

KfK 4373
April 1988

Dynamisches Verhalten der Naturkonvektion in geschlossenen Kreisläufen

P. Ehrhard
Institut für Reaktorbauelemente

Kernforschungszentrum Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Reaktorbauelemente

KfK 4373

**Dynamisches Verhalten der Naturkonvektion in
geschlossenen Kreisläufen**

P. Ehrhard

Von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe genehmigte Dissertation

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

Zusammenfassung

Es wird ein eindimensionales Modell zusammen mit Experimenten vorgestellt, welches die Naturkonvektionsströmung in von unten beheizten und von oben gekühlten, geschlossenen Kreisläufen beschreibt. Hierbei wird, ausgehend von einem einfachen Kreislauf, die mechanische und thermische Ankopplung eines zweiten Kreislaufs untersucht.

Übereinstimmend zeigen sowohl die experimentellen Daten als auch das theoretische Modell auf, daß die untersuchte Naturkonvektionsströmung deutlich durch nichtlineare Eigenschaften geprägt ist. Neben der Vielfalt stabiler stationärer Strömungsformen sind ausgeprägte unterkritische Konvektionsbereiche zu beobachten. In diesen Bereichen besteht die Möglichkeit zu unterkritischen Instabilitäten der stationären Konvektionsströmung. Der global instabile Bereich hingegen ist durch chaotisches Zeitverhalten der Zustandsgrößen gekennzeichnet. Für den schiefssymmetrischen Beheizungsfall tritt eine nicht perfekte Vorwärtsverzweigung aus der Ruhelösung heraus auf. Hierdurch wird eine Strömungsrichtung im Kreislauf bevorzugt angenommen und stabilisiert. Ein zweiter Strömungszustand mit entgegengesetzter Strömungsrichtung bleibt nur in einem relativ kleinen, isoliert liegenden, Bereich stabil. Die Modellrechnungen liefern darüber hinaus die Aussage, daß eine stabile periodische Strömung in einem kleinen "Parameterfenster" möglich ist. Die letzte Aussage konnte bisher experimentell noch nicht bestätigt werden.

Die Effekte, welche speziell durch eine Wärme- bzw. Impulskopplung von zwei Kreisläufen hervorgerufen werden, können ebenfalls mit den abgeleiteten Modellgleichungen beschrieben werden. Die Mannigfaltigkeit der Lösungen nimmt in diesem Fall zu. Es existieren für dieses Problem vier stationäre Konvektionslösungen. Bei Wärmekopplung am unteren Scheitel der Kreisläufe sind je nach Symmetrie der Beheizungen sowohl völlig entkoppelte als auch Wärme austauschende Strömungen möglich. Die auftretenden Stabilitätsgrenzen liegen stets innerhalb eines Intervalls, welches durch die Stabilitätsgrenzen des schiefssymmetrisch beheizten Einzelkreislaufs eingegrenzt ist. Die Lösungssymmetrie des symmetrisch beheizten Kreislaufs bleibt in allen Fällen erhalten. Experimente zur kombinierten Wärme- und Impulskopplung stehen bisher zur Verifikation der abgeleiteten Modellaussagen noch nicht zur Verfügung.

Dynamical Behaviour of Natural Convection in Closed Loops

Abstract

A one dimensional model is presented together with experiments, which describe the natural convective flow in closed loops heated at the bottom and cooled in the upper semicircle. Starting from a single loop, mechanical and thermal coupling with a second loop is discussed.

The experiments and the theoretical model both concurrently demonstrate that the investigated natural convection is clearly influenced by non-linear effects. Beside the variety of stable steady flows there are extensive subcritical ranges of convective flow. In these parameter ranges subcritical instabilities of the steady state flow could occur in the presence of finite amplitude disturbances. However, the supercritical, global unstable range is characterized by chaotic histories of the variables of state. Non-symmetric heating generates an imperfect bifurcation out of the steady solution with zero velocity in the loop. This effect stabilizes the flow in the preferred direction. The flow in the opposite direction only remains stable in a small isolated interval of the heating parameter. Furthermore the calculations with the model equations demonstrate that a stable periodic behaviour of the flow is possible in a small parameter window. However, it has not been possible to verify this particular effect in the experiments conducted to date.

The model equations are also able to describe the effects, which are especially generated by heat and momentum interaction between two loops. The number of solutions is increased in this case. Generally there are four steady solutions associated with convective flows in both loops. With heat coupling at the lowest point of the both loops completely decoupled flows as well as heat exchanging flows are possible, depending on the symmetry of heating conditions. The stability bounds occurring are always within one interval, which is limited by stability bounds of the individual loop heated in a non-symmetrical manner. The solution symmetry of the loop heated symmetrically remains unchanged. Experiments in combined heat and momentum coupling for verification of the related theories are not yet available.

Inhalt

	Seite
1.0 Problemstellung	1
1.1 Zielsetzung	1
1.2 Literaturübersicht	2
1.3 Beschreibung der untersuchten Anordnungen	4
2.0 Grundgleichungen des Problems	7
2.1 Impulsgleichung	7
2.2 Energiegleichung	9
2.3 Überführung in gewöhnliche Differentialgleichungen	11
2.4 Dimensionslose Gleichungen	13
2.5 Physikalische Bedeutung der Parameter	14
2.6 Eigenschaften der reduzierten Gleichungen	16
2.7 Begriffe aus der Theorie der Lösungsverzweigung und Stabilität dynamischer Systeme	16
2.7.1 Klassifikation des Stabilitätsverhaltens	16
2.7.2 Klassifikation des Zeitverhaltens	17
2.7.3 Klassifikation der Verzweigungspunkte	18
3.0 Stabilitätsanalyse	21
3.1 Stationäre Lösungen	21
3.2 Lineare Stabilitätsanalyse	23
3.3 Schwach nichtlineare Störungsrechnung	27
3.4 Periodische Lösungen als Rand-/Eigenwertproblem	35
3.5 Stabilität der periodischen Lösungen	38
3.6 Das vollständige, nichtlineare Verzweigungsdiagramm	42
3.7 Zusammenfassung	47
4.0 Modifikationen des Grundmodells	49
4.1 Auswirkung der nichtlinearen Wärmeübergangsbeziehung	49
4.2 Konsequenzen der axialen Wärmeleitung, Einführung einer Nu-Zahl	52
4.3 Ankopplung eines zweiten Kreislaufs	56
4.3.1 Mathematische Formulierung	56
4.3.2 Eigenschaften und Parameter der Gleichungen	59
4.3.3 Der Fall reiner Wärmekopplung bei $\varphi_0 = 0^\circ$	61
4.4 Zusammenfassung	70

5.0	Experimente	71
5.1	Die Strömung im einfachen Kreislauf	71
5.1.1	Experimenteller Aufbau	71
5.1.2	Berücksichtigung der Versuchsgeometrie in der Theorie	73
5.1.3	Meßtechnik	74
5.1.4	Eichmessungen	76
5.1.5	Ergebnisse	79
5.1.51	Der symmetrische Beheizungsfall	79
5.1.52	Der unsymmetrische Beheizungsfall	85
5.1.53	Dreidimensionale Effekte	88
5.1.6	Zusammenfassung	91
5.2	Die Strömung in zwei thermisch gekoppelten Kreisläufen	93
5.2.1	Experimenteller Aufbau	93
5.2.2	Berücksichtigung der Versuchsgeometrie in der Theorie	94
5.2.3	Meßtechnik	96
5.2.4	Eichmessungen	97
5.2.5	Ergebnisse	99
5.2.51	Die Wärmekopplung zweier symmetrisch beheizter Kreisläufe	99
5.2.52	Die Wärmekopplung eines schiefsymmetrisch beheizten Kreislaufs mit einem symmetrisch beheizten	102
5.2.6	Zusammenfassung	105
6.0	Diskussion	107
7.0	Anhang	114
7.1	Literaturverzeichnis	114
7.2	Ergänzungen zu den Experimenten	118
7.3	Ergänzende Gleichungen zu Abschnitt 3.3	125

1.0 Problemstellung

1.1 Zielsetzung

Die Wechselwirkung von gekoppelten Konvektionskreisläufen spielt im Kraftwerksbau allgemein, und speziell im Reaktorbau, bei Druckwasserreaktoren und auch bei natriumgekühlten schnellen Brütern eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit der sicheren Abfuhr der Nachzerfallswärme.

Zur Analyse dieser Vorgänge erweisen sich 2- oder 3-dimensionale numerische Rechnungen mit Hilfe von Differenzenverfahren an realen Reaktorgeometrien als sehr schwierig und aufwendig. Darüber hinaus sind sie dem grundsätzlichen Verständnis der Dynamik wenig zuträglich, weil eine Parameterstudie nur bedingt durchgeführt werden kann.

Es ist deshalb sinnvoll, eine möglichst einfache, d.h. in der Regel eindimensionale Analyse des Problems vorzunehmen. Auf diese Art wird es möglich, das grundsätzliche dynamische Verhalten der wechselwirkenden Kreisläufen in Abhängigkeit aller Parameter zu erfassen.

Die Modellierung des Einzelkreislaufs spielt hierbei eine entscheidende Rolle, denn anhand der hier gefundenen Ergebnisse kann das Modell bereits auf seine Plausibilität und vor allem auf sein Potential hin überprüft werden, die wichtigsten physikalischen Phänomene, d.h. die experimentellen Befunde zu erfassen. In einem weiteren Schritt kann dann die Kopplung solcher Einzelkreisläufe über Wärme- bzw. Impulsaustausch vorgenommen werden.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb zunächst ein Modell für die Strömung im einzelnen Kreislauf hergeleitet. Die theoretischen Aussagen zur Strömung in diesem Kreislauf werden mit einem Experiment auf ihre physikalische Relevanz hin untersucht. Nach der so durchgeführten Bewertung des mathematischen Modells wird ein Modell für die Ankopplung eines zweiten Kreislaufs entwickelt und dessen Überprüfung im Experiment vollzogen.

1.2 Literaturübersicht

Die Problematik der Strömung in geschlossenen Naturkonvektionskreisläufen wird erstmals von Welander [28] 1965 und Keller [17] 1966 aufgegriffen. Beide untersuchen mit eindimensionalen Modellgleichungen die Strömung in einem rechteckigen, adiabaten Kreislauf im Hinblick auf die stationären Lösungen und ihre Stabilität. Die Wärmezufuhr bzw. -abfuhr erfolgt punktförmig am unteren bzw. oberen Scheitel der Anordnung. Welander weist auf die mögliche stationäre Lösungsvielfalt hin und berechnet durch numerische Integration Zeitgeschichten der Strömungsgeschwindigkeit für verschiedene Parameterwerte. Neben asymptotisch und oszillatorisch stabilem Verhalten findet er für hohe Beheizungen auch oszillatorisches Zeitverhalten, welches sich auch nach langer Zeit nicht wiederholt, also nicht periodisch ist. Die Strömungsgeschwindigkeit ändert dabei ihr Vorzeichen in zufälligen Zeitabständen. Keller hingegen zeigt analytisch auf, daß neben stationärer Ruhelösung und Konvektionslösung bei Steigerung der Beheizung stabile periodische Lösungen auftreten, sobald die Stabilitätsgrenze der stationären Konvektion überschritten wird.

Im Jahre 1972 schlägt Malkus [19] vor, für die partiellen Dgln. des Problems eine Reduktion auf nichtlineare gewöhnliche Dgl. durchzuführen. Er endet so bei dem 1963 von Lorenz [24] in anderem Zusammenhang erstmals behandelten Gleichungssatz und weist auf die Möglichkeit zu periodischer aber auch nicht-periodischer Strömung sowohl für große als auch für kleine Prandtl-Zahlen hin.

Creveling et al. [3] präsentieren 1975 Experimente und eine eindimensionale Theorie zum Verhalten der Strömung in einem torusförmigen Kreislauf. Die untere Kreishälfte wird durch Vorgabe eines Wandwärmestromes beheizt, in der oberen Kreishälfte wird die Wärme bei konstanter Wandtemperatur abgeführt. Bei Steigerung der Beheizung finden sie nacheinander rechts- oder linkslaufende stationäre Strömung, unregelmäßig oszillierende Strömung und nach Umschlag zur Turbulenz wiederum im zeitlichen Mittel stationäre Strömung. Die laminare, unregelmäßig oszillierende Strömung beinhaltet Änderungen der Strömungsrichtung in zufälligen Zeitabständen. Mit Hilfe einer linearisierten Störungsrechnung leiten sie darüber hinaus ein Stabilitätsdiagramm für den laminaren und turbulenten Fall ab.

In weiteren Arbeiten von Greif et al. [10] und Damarell & Schoenhals [4] wird das identische Problem im Hinblick auf transiente Vorgänge sowie auf Schief-symmetrie der Wärmez- bzw. -abfuhr untersucht. Greif et al. benutzen ein finite Differenzen Verfahren zur numerischen Behandlung der eindimensionalen Gleichungen. Sie erhalten bei Variation der Anfangsbedingungen sowie der Beheizung Zeitgeschichten von Anlauf- und Einschwingvorgängen. Damarell & Schoenhals diskutieren erstmals, gestützt auf Experimente, den Einfluß der Verdrehung von heizenden und kühlenden Zonen. Bereits für kleine Verdrehwinkel finden sie nur eine Strömungsrichtung, welche zudem stabilisiert ist. Die Strömung mit entgegengesetzter Orientierung wird von den Autoren nicht beobachtet. Für Verdrehwinkel größer 6° wird darüber hinaus ausschließlich stabil stationäres Verhalten der Strömung in der Vorzugsrichtung postuliert.

Im Jahre 1980 leiten Yorke & Yorke [29] eine Umformung der partiellen Dgln. für den torusförmigen Kreislauf ab. Diese führt mit wenig einschneidenden Voraussetzungen ebenfalls auf gewöhnliche nichtlineare Dgln., ähnlich den von Lorenz behandelten. Hart [12] greift diese Formulierung 1984 auf und untersucht das System bei Berücksichtigung der Verdrehung von heizenden und kühlenden Zonen mit Hilfe primär numerischer Methoden. Er stellt heraus, daß die Lösung des "Master-Problems" in Form der ersten drei Gleichungen die exakte Lösung für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit liefert. Darüber hinaus zeigt er das Stabilitätsverhalten der stationären Lösungen auf und postuliert, daß ausschließlich stationäre oder chaotische Lösungen des Gleichungssystems möglich sind. In jüngeren Experimenten von Gorman et al. [8,9] wird die Strömung im symmetrisch beheizten Kreislauf, insbesondere im Hinblick auf das chaotische Zeitverhalten untersucht. Sie überprüfen hierbei insbesondere, ob die vom Lorenz-Attraktor bekannten Typen von Chaos im Experiment in gleicher Weise auftreten.

Naturkonvektion in geschlossenen Kreisläufen wird auch von mehr anwendungsorientierten Arbeiten aus dem Gebiet der Solartechnik aufgegriffen. Dort ist Naturumlauf z.B. zur Brauchwassererwärmung in einfachen Kreisläufen eingesetzt. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Arbeiten findet sich bei Mertol et al. [22]. Die Fragestellung Nachwärmeabfuhr bei Reaktoren steht im Mittelpunkt einer ganzen Reihe von anwendungsbezogenen Arbeiten. Neben einer Zusammenfassung der wichtigen Resultate durch Zvirin [32] findet sich auch eine experimentelle Arbeit von Zvirin et al. [33], welche anhand eines Reaktormodells erstmals die Dynamik von zwei gekoppelten Kreisläufen betrachtet.

Modellgleichungen zum Verhalten von zwei wärmegekoppelten, torusförmigen Kreisläufen werden von Roppo [26] sowie Davis & Roppo [5] in jüngster Zeit abgeleitet. Bei seitlicher Kopplung erhalten sie eine Näherungslösung, indem sie die partiellen Dgln. in ein System von sechs gewöhnlichen Dgln. überführen und dieses diskutieren. Neben der Stabilität und Lösungsvielfalt der stationären Lösungen wird auch eine nichtlineare Störungsrechnung ausgeführt.

Abschließend soll hier exemplarisch noch eine grundlegende Arbeit über einen offenen Kreislauf erwähnt werden. So haben Bau & Torrance [2] 1981 die Strömung in einer geologisch relevanten Geometrie untersucht. Diese ist im wesentlichen als rechteckiger Kreislauf aufzufassen, bei welchem die vertikalen Segmente freie Oberflächen haben.

Die hier gegebene Literaturübersicht kann keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben, weil sie lediglich einige zentrale Arbeiten aufführt. Ein weitergehender Überblick zum kompletten Themenkreis findet sich bei Mertol & Greif [21].

1.3 Beschreibung der untersuchten Anordnungen

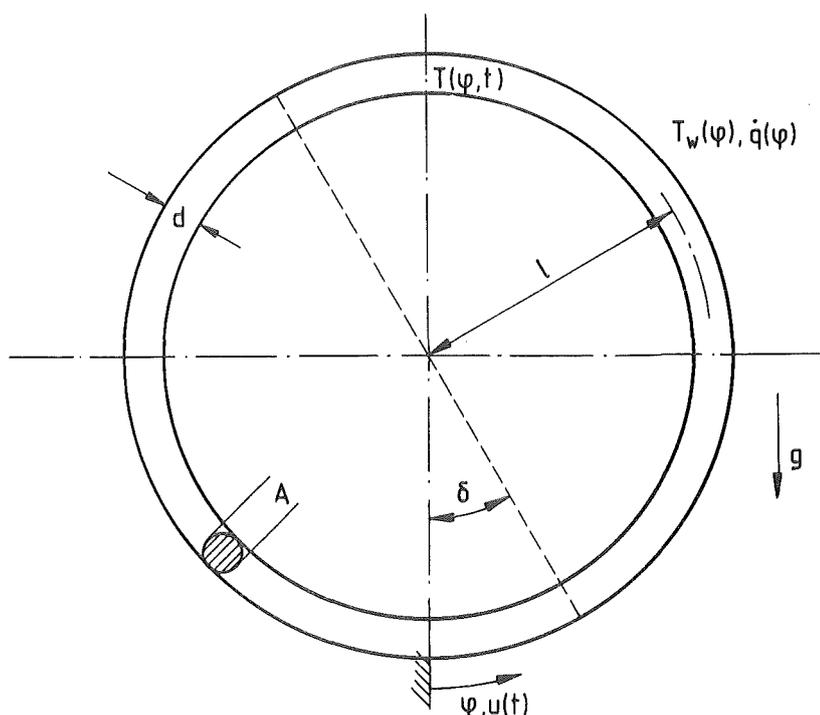


Abb. 1-1: Betrachtete Konfiguration des Einzelkreislaufs

Die geometrische Gestalt des einzelnen Kreislaufs wird im Hinblick auf eine geschlossene mathematische Darstellung kreisförmig mit dem Radius l , sowie konstantem Strömungsquerschnitt A gewählt. Die Ortskoordinate φ sowie die querschnittsgemittelte Strömungsgeschwindigkeit u werden in der in Abb. 1-1 gezeigten Weise als positiv definiert. Die querschnittsgemittelte Temperatur $T(\varphi, t)$ und die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $u(t)$ stellen die zwei zentralen Zustandsgrößen des Systems dar.

Als Randbedingung geben wir wahlweise die Wandtemperatur $T_w(\varphi)$ oder eine ortsabhängige volumetrische Leistungsverteilung $\dot{q}(\varphi)$ vor. Für die weiteren analytischen Schritte wird gefordert, daß die Funktionen $T_w(\varphi)$ und $\dot{q}(\varphi)$ in Form einer Fourier-Reihe darstellbar sind.

Die Wärmezufuhr erfolgt dominant in der unteren Kreishälfte, die Wärmeabfuhr in der oberen Hälfte der Rohrschleife. Die Funktionen $T_w(\varphi)$ und $\dot{q}(\varphi)$ sind deshalb entsprechend zu wählen. Die Schwerpunkte von Wärmezufuhr bzw. -abfuhr können jedoch um den Winkel δ aus der vertikalen Symmetrielinie herausgedreht sein (vgl. Abb. 1-1).

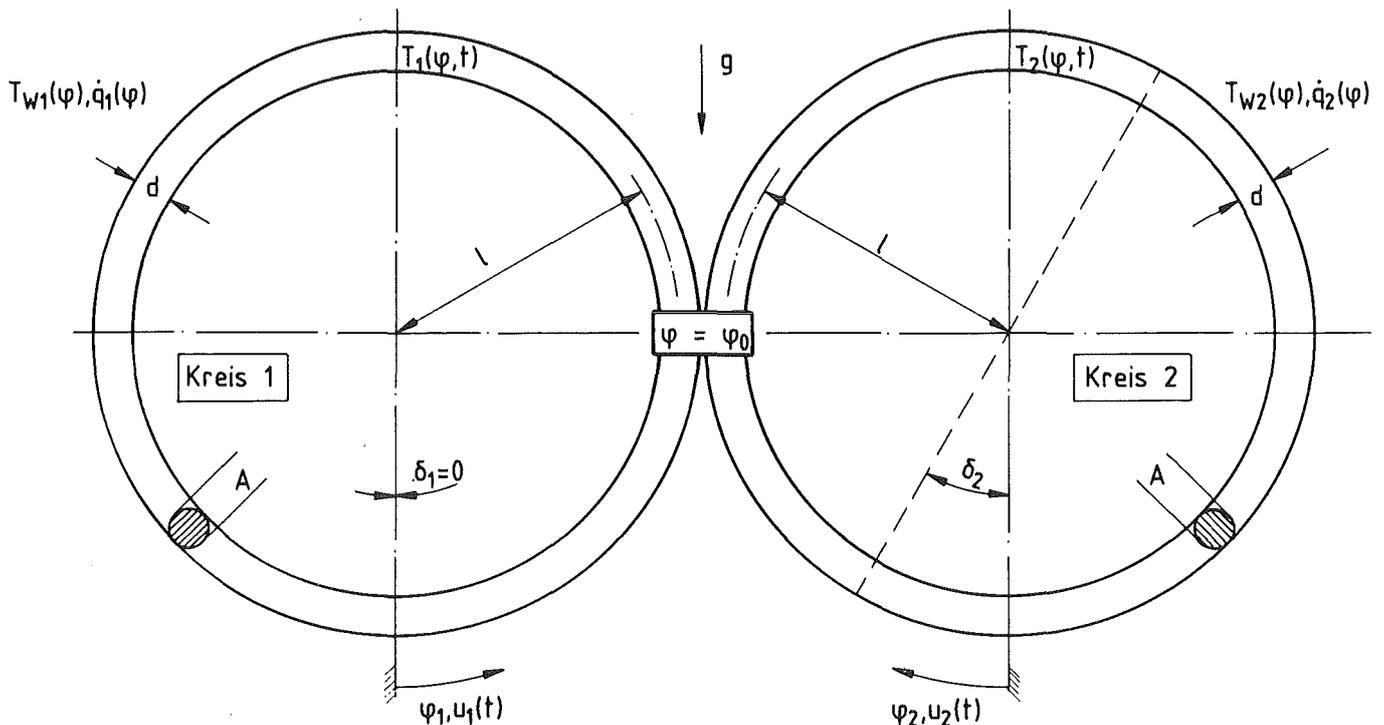


Abb. 1-2: Betrachtete Konfiguration bei zwei gekoppelten Kreisläufen

In Abb. 1-2 ist die Anordnung von zwei an einer allgemeinen Stelle $\varphi = \varphi_0$ gekoppelten Kreisläufe dargestellt. Während die Kreisläufe selbst vollständig dem beschriebenen Einzelkreislauf entsprechen, soll nun zusätzlich an der Kontaktstelle eine thermische bzw. mechanische Wechselwirkung zwischen den Fluiden in den Kreisläufen möglich sein.

Im Innern der Rohrschleifen befindet sich stets ein inkompressibles Fluid, dessen Eigenschaften durch die Dichte ρ_0 bei T_0 , die kinematische Zähigkeit ν_0 , die Wärmeleitfähigkeit λ_0 , die spezifische Wärme c_p sowie den Wärmeausdehnungskoeffizient α_0 charakterisiert sind. Das Fluid bleibt stets einphasig.

2.0 Grundgleichungen des Problems

2.1 Impulsgleichung

Für ein eindimensionales, d.h. querschnittsgemitteltes Kreisrohr lautet die Impulsbilanzgleichung in differentieller Form

$$S_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\} = - \frac{\partial p}{\partial \varphi} - S(\tau) q \sin \varphi - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - f_w. \quad (2.1)$$

Es ist hier bereits die Boussinesq-Approximation getroffen. Das bedeutet, daß die Dichte im allgemeinen als konstant angesehen wird. Dies gilt aber nicht für die Modellierung der Auftriebskräfte. Hier wird die Dichte als lineare Funktion der Temperatur eingeführt. Es gilt:

$$S(\tau) = S_0 \{ 1 - \alpha_0 (\tau - \tau_0) \}. \quad (2.1a)$$

Desweiteren wird deutlich, daß aufgrund des konstanten Rohrquerschnitts $A = \text{konst.} \neq f(\varphi)$ die Kontinuitätsgleichung den einfachen Zusammenhang

$$u = f(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt} \quad (2.2)$$

liefert. Deshalb entfallen alle Ableitungen der mittleren Strömungsgeschwindigkeit nach der Ortskoordinate φ , d.h. es kommt

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.3)$$

Der Größe f_w in Gl. (2.1) repräsentiert die Wirkung der Rohrwand auf die Strömung. Bei der gewählten eindimensionalen Modellierung muß dieser Reibungsterm aufgrund fehlender Geschwindigkeitsgradienten am Rand (es kann keine Haftbedingung gestellt werden) künstlich als Funktion der mittleren Strömungsgeschwindigkeit u eingebracht werden. Die Druckverlust-Relation muß hierbei entsprechend der Geometrie eines glatten Kreisrohres und des Strömungszustandes (laminar/turbulent) gewählt werden.

Aus dem Hagen-Poiseuille-Gesetz für die laminare sowie der Blasius-Formel für die turbulente Rohrströmung (vgl. z.B. Zierep [30]) läßt sich der in Abb. 2-1 dargestellte Zusammenhang zwischen Druckverlust und mittlerer Strömungsgeschwindigkeit herleiten.

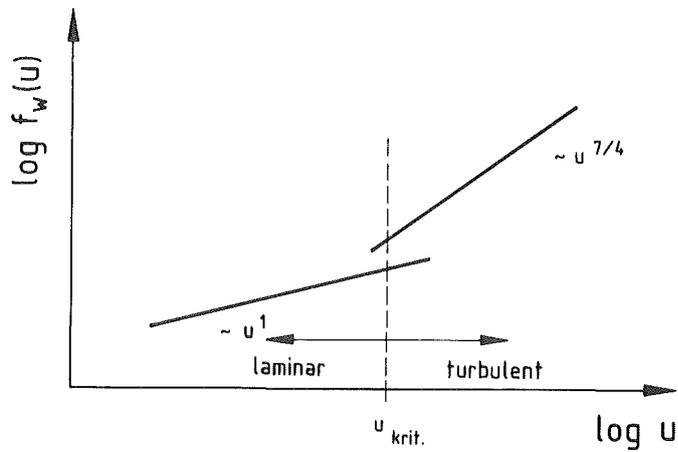


Abb. 2-1: Druckverlust als Funktion der mittleren Strömungsgeschwindigkeit im Kreisrohr

Wie leicht gezeigt werden kann ist der Umschlag laminar-turbulent erst bei sehr hohen Heizraten zu erwarten. Man kann deshalb mit gutem Grund laminare Strömung voraussetzen. Diese Abschätzung wird im übrigen bei den Experimenten (vgl. Kaptiel 5) bestätigt. In den Experimenten werden ausschließlich laminare Geschwindigkeitsprofile im Rohrquerschnitt beobachtet.

Die Impulsgleichung wird zur Elimination des Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$ entlang des Kreisrohres geschlossen integriert. Man erhält die Beziehung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\alpha_0 g}{2\hat{\pi}} \int_0^{2\hat{\pi}} T(\varphi) \sin \varphi d\varphi - R \cdot u, \quad (2.4)$$

mit

$$R = R_{lam.} = \frac{32 \nu_0}{d^2}.$$

2.2 Energiegleichung

Die querschnittsgemittelte Energiegleichung für den beschriebenen Modellkreislauf lautet in differentieller Form

$$S_0 c_p \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\} - \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \dot{q}(\varphi) + \frac{4h_w}{d} \{ T_w(\varphi) - T \}. \quad (2.5)$$

Auf der linken Seite der Gleichung stehen der instationäre Term, der Term für den Wärmetransport aufgrund von Konvektion, sowie der Wärmetransport durch Diffusion. Die rechte Seite enthält die verschiedenen Quell- bzw. Senkenterme.

Die volumetrische Beheizung $\dot{q}(\varphi)$ wird allgemein als Funktion des Ortes vorgegeben. Der Wärmeaustausch mit der Rohrwand für den Fall vorgegebener Wandtemperatur $T_w(\varphi)$ wird mit einem linearen Ansatz modelliert. Demnach ist der lokale Wärmestrom an der Grenzfläche Rohrwand/Fluid proportional zur Differenz zwischen der mittleren Fluidtemperatur $T(\varphi)$ und der Wandtemperatur $T_w(\varphi)$. Als Proportionalitätskonstante erscheint der Wärmeübergangskoeffizient h_w .

Die Modellierung des Wärmeaustauschverhaltens Wand/Fluid ist wiederum deshalb notwendig, weil die Temperaturgradienten der Dgl. (2.5) im Querschnitt A durch die Mittelung eliminiert sind. Der Wandwärmestrom muß somit künstlich als Funktion der mittleren Temperatur $T(\varphi)$ dargestellt werden.

Bei näherer Betrachtung erweist sich der Wärmeübergangskoeffizient h_w jedoch nicht als Konstante. Vielmehr hängt der Wärmeübergang Fluid/Wand auch vom Geschwindigkeitsprofil über den Kreisrohrquerschnitt ab. Für eine eindimensionale Modellierung wird deshalb eine Abhängigkeit von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit u die Folge sein. Der Zusammenhang $h_w = f(u)$ ist qualitativ, basierend auf experimentellen Befunden, in Abb. 2-2 dargestellt.

Es wird deutlich, daß im Gegensatz zur Druckverlustrelation hier bereits eine Abhängigkeit von u im laminaren Bereich auftritt. Um diesen Einfluß zu erfassen, werden im Modell die Abhängigkeiten $h = \text{Konst.}$ und $h \sim u^{1/3}$ berücksichtigt. Damit ist der laminare Bereich zwar nicht vollständig abgedeckt, doch es wird möglich, den Einfluß eines solcher Art verbesserten Wärmeübergangs zumindest qualitativ zu diskutieren (vgl. hierzu Abschn. 4.1).

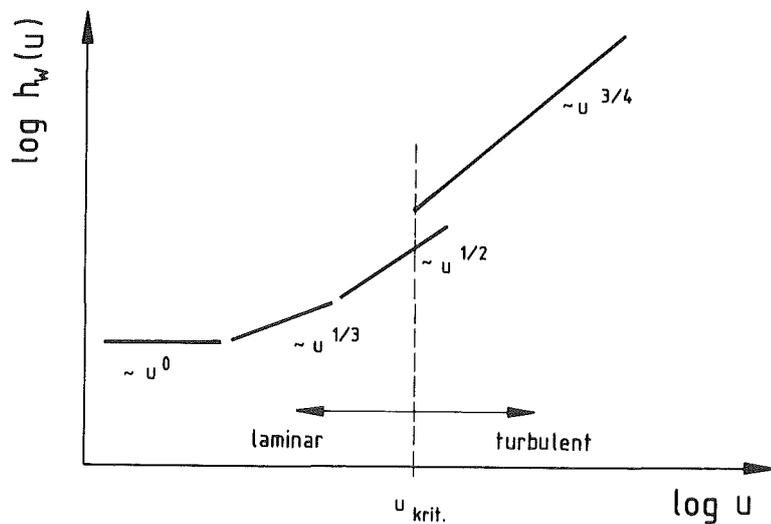


Abb. 2-2: Wärmeübergangskoeffizient h_w als Funktion der mittleren Strömungsgeschwindigkeit u nach Schlünder [27]

Unabhängig davon kann die Gl. (2.5) durch Zusammenfassung der Quellterme in $Q(\varphi)$ in die Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + HT = Q(\varphi) \quad (2.5a)$$

überführt werden. Hierbei gelten für die neu eingeführten Größen die folgenden Substitutionsbeziehungen:

$$\Lambda = \frac{\lambda_0}{\rho^2 s_0 c_p}, \quad H = \frac{4 h_w}{s_0 c_p d}, \quad Q(\varphi) = \frac{4 h_w}{s_0 c_p d} T_w(\varphi) + \frac{\dot{q}(\varphi)}{s_0 c_p}. \quad (2.5b)$$

Es ist deutlich, daß im Gegensatz zur Impulsgleichung (2.4) die Energiegleichung nach wie vor eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung darstellt. Im nächsten Schritt ist deshalb die Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen vorzunehmen.

2.3 Überführung in gewöhnliche Differentialgleichungen

Für das vorliegende Problem bieten sich Fourier-Reihenansätze für die von φ abhängigen Funktionen an, weil alle diese Funktionen aufgrund der geometrischen Vorgabe eines geschlossenen Kreises 2π -periodisch sein müssen. Durch die Ansätze werden deshalb die Rand- bzw. Übergangsbedingungen a priori erfüllt.

Mit den Ansätzen

$$T(\varphi, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \sin n\varphi + C_n(t) \cos n\varphi, \quad (2.6)$$

$$Q(\varphi) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin n\varphi + R_n \cos n\varphi,$$

eingeführt in die integrierte Impulsgleichung (2.4) sowie die Energie-Differentialgleichung (2.5a) erhält man bei Anwendung des Galerkin-Verfahrens einen Satz von $(2n + 2)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Zeit. Das Galerkinverfahren beinhaltet im wesentlichen die Multiplikation der Differentialgl. (2.5a) mit trigonometrischen Vergleichsfunktionen des Typs $f_i = \sin i\varphi$ bzw. $f_j = \cos j\varphi$, sowie die anschließende Integration über das Anwendungsgebiet $0 < \varphi < 2\pi$. Die Orthogonalitätsbeziehungen unter den gewählten Vergleichsfunktionen ermöglichen dann ein Ausblenden der einzelnen Reihenkoeffizienten T_0 , S_n und C_n (vgl. Gl. 2.6). Als neue abhängige Variable kommen deshalb neben der mittleren Strömungsgeschwindigkeit u die $(2n+1)$ Koeffizienten der Temperaturverteilung. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\alpha_0 g}{2} S_1 - Ru, \\ \frac{dT_0}{dt} &= Q_0 - HT_0, \\ \frac{dS_1}{dt} &= \frac{u}{l} C_1 - (H + \lambda) S_1 + Q_1, \\ \frac{dC_1}{dt} &= -\frac{u}{l} S_1 - (H + \lambda) C_1 + R_1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

...

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{dS_n}{dt} &= \frac{nu}{\ell} C_n - (H + n^2 \Lambda) S_n + Q_n, \\ \frac{dC_n}{dt} &= -\frac{nu}{\ell} S_n - (H + n^2 \Lambda) C_n + R_n; \end{aligned} \quad (n \geq 1)$$

(vgl. hierzu auch Yorke & Yorke [29]).

Betrachtet man die Kopplungen im Gleichungssystem (2.7) genauer, so wird deutlich, daß zur Bestimmung der zeitabhängigen mittleren Strömungsgeschwindigkeit $u(t)$ die Kenntnis der ersten Fourierkoeffizienten $S_1(t)$ und $C_1(t)$ ausreicht. Es genügt deshalb, das folgende Gleichungssystem zu betrachten.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\alpha_0 g}{2} S_1 - Ru, \\ \frac{dS_1}{dt} &= \frac{u}{\ell} C_1 - (H + \Lambda) S_1 + Q_1, \\ \frac{dC_1}{dt} &= -\frac{u}{\ell} S_1 - (H + \Lambda) C_1 + R_1. \end{aligned} \quad (2.7a)$$

Die hieraus zu bestimmenden Lösungen $u(t)$, $S_1(t)$ und $C_1(t)$ stellen in jedem Fall exakte Lösungen dar, weil gegenüber Gl. (2.7) keinerlei Näherung eingeführt wird. Dies gilt auch für beliebige Vorgabe des Quellterms $Q(\varphi)$ mit z.B. höheren Fourier-Moden, d.h. $Q_2, R_2, Q_3, R_3, \dots \neq 0$ (vgl. Gl. 2.6).

Für die Angabe der genauen Temperaturverteilung

$T(\varphi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin n\varphi + C_n \cos n\varphi$ ist es jedoch nötig, weitere Gleichungen zu lösen, um die weiteren Koeffizienten $T_0(t)$ bzw. $S_2(t)$, $C_2(t)$ etc. zu erhalten. Diese Gleichungen sind jedoch alle vom System (2.7a) entkoppelt und können bei Kenntnis der Q_n und R_n sukzessive gelöst werden.

2.4 Dimensionslose Gleichungen

Für die Zeit t , sowie die Zustandsgrößen u , S_1 und C_1 werden mit dem Ziel einer dimensionslosen Darstellung die folgenden Normierungen eingeführt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\tau}{H_0} , \\ u &= H_0 \ell x_1 , \\ S_1 &= \frac{2 H_0 R \ell}{\alpha_0 q} x_2 , \\ C_1 &= \frac{R_1}{H_0} - \frac{2 H_0 R \ell}{\alpha_0 q} x_3 . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Gleichzeitig wird hier für den Wärmeübergangskoeffizienten zur Wand $H \sim h_w$ die Schließungsbedingung entsprechend dem Modellgesetz

$$H(x_1) = H_0 \left\{ 1 + K_{ne} |x_1|^{1/3} \right\} \quad (2.9)$$

eingeführt (vgl. Abb. 2-2). Die Funktion (2.9) stellt somit eine asymptotische Näherung des realen Verhaltens $H(x_1)$ dar, welche als Grenzfälle

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow 0 : H(x_1) &= H_0 = \text{konst.} , \\ x_1 \rightarrow \infty : H(x_1) &= H_0 K_{ne} |x_1|^{1/3} \sim u^{1/3} , \end{aligned} \quad (2.10)$$

beinhaltet.

Mit diesen Beziehungen, eingeführt in Gl. (2.7a) kommt die dimensionslose Grundgleichung des Problems zu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha (x_2 - x_1) , \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 - x_1 x_3 - x_2 \left\{ 1 + K_{ne} |x_1|^{1/3} + \frac{\Lambda}{H_0} \right\} + \beta \tan \delta , \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - x_3 \left\{ 1 + K_{ne} |x_1|^{1/3} + \frac{\Lambda}{H_0} \right\} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hierbei ist die Bezeichnung $\dot{x} = \frac{d}{dt} x$ eingeführt worden. Die auftretenden dimensionslosen Kennzahlen sind wie folgt definiert:

fester Stoff- bzw. Wandparameter:	$\alpha = \frac{R}{H_0}$,
Beheizungs-Parameter:	$\beta = \frac{\alpha_0 g R_1}{2 H_0^2 R \ell}$,
Symmetriewinkel der Beheizung:	$\delta = \arctan\left(\frac{Q_1}{R_1}\right)$, (2.12)
Wärmeleitungs-Parameter:	$\frac{\Lambda}{H_0}$,
Kontrollparameter des Modellgesetzes (2.9):	K_{nl} .

2.5 Physikalische Bedeutung der Parameter

Der Parameter α stellt einen Quotienten aus Reibungsfaktor und Wärmeübergangskoeffizient zwischen Fluid und Wand dar. Dieser Parameter α hängt deshalb allein von den Eigenschaften des Fluids und der Paarung Fluid/Wand ab und wird in erster Näherung als konstante Größe angenommen. Für zähe Medien wird $\alpha \gg 1$ zu erwarten sein, während gut wärmeleitende Medien mit einem guten Wärmeübergang zwischen Fluid und Wand i.a. zu $\alpha \ll 1$ führen. Es sei darauf hingewiesen, daß hier eine gewisse Analogie zur Prandtl-Zahl besteht, wenn gleich im Falle der Prandtl-Zahl das Verhältnis der diffusiven Transportkoeffizienten für Impuls und Wärme im Fluid selbst gebildet ist. Dies weicht vom hier betrachteten Fall ab, weil die eindimensionale Modellierung im gemittelten Querschnitt A keine Trennung der Einflüsse von Wand und Fluid zuläßt. Da jedoch die Transportkoeffizienten des Fluids auch direkt Einfluß auf den Wärmeübergang Fluid/Wand und den Druckabfall haben, sind die beiden Energieverhältnisse Pr und α in erster Näherung proportional zueinander.

Die Beheizungs-Kennzahl β verknüpft die treibende Dichtedifferenz $\left(\frac{\alpha_0 g R_1}{H_0}\right)$ mit den dissipativen Mechanismen des Fluids in Form der Reibungs- und Wärmeverluste. Damit kann β als Leistungsverhältnis interpretiert werden, welches eine Analogie zur Rayleigh-Zahl im Bénard-Problem besitzt.

Die Größe δ bildet sich aus dem Quotient Q_1/R_1 , wobei Q_1 und R_1 die Koeffizienten im 1. Fourier-Mod des Quellterms $Q(\varphi)$ darstellen (vgl. Gl. 2.6). Für $R_1 \gg Q_1$ ist die Wärmezufuhr im Kreis dominant unten und die Wärmeabfuhr entsprechend oben. In dem Fall $\delta \ll 1$ wird eine direkte Umformung der Terme des 1. Fourier-Mods gemäß

$$Q_1 \sin \varphi + R_1 \cos \varphi \cong R_1 \cos(\varphi - \delta) \quad (2.12)$$

zulässig. Somit ist deutlich, daß der Winkel δ anschaulich als Verdrehwinkel der Kühl- bzw. Heizstrecke aus ihrer ursprünglich symmetrischen Position heraus interpretiert werden kann.

Der Wärmeleitungs-Parameter (Λ/H_0) stellt den Quotienten aus diffusiv und konvektiv längs φ transportierter Wärme dar. In allen Fällen zeigen Abschätzungen

$$\frac{\Lambda}{H_0} \ll 1. \quad (2.14)$$

Die Mitnahme der Wärmeleitung in Richtung der Strömung stellt keine prinzipielle Schwierigkeit dar, weil sie lediglich additiv zu H_0 erscheint (vgl. dazu Gl. (2.11)). Doch soll zunächst aus Gründen der Parameterreduktion die Wärmeleitung als klein gegenüber der konvektiv transportierten Wärme vorausgesetzt werden. Diese Voraussetzung wird in der Literatur (vgl. z. B. [3, 28, 29] üblicherweise getroffen. Den Gln. (2.11) kann entnommen werden, welcher Einfluß von $\Lambda/H_0 \neq 0$ auf das Modell qualitativ zu erwarten ist. Eine weitergehende Diskussion dieses Punktes findet sich in Abschn. 4.2.

Aus dem Modellgesetz für den Wärmeübergang Fluid/Wand kommt der Kontrollparameter K_{nl} . Er gewichtet den von der Strömungsgeschwindigkeit gemäß $H \sim |x_1|^{1/3}$ abhängigen Anteil des Wärmeübergangskoeffizienten in Relation zum konstanten Anteil. Der Grenzfall $K_{nl} \rightarrow 0$ liefert demgemäß den Fall $H = H_0 = \text{konst}$, d.h. der Wärmeübergangskoeffizient ist unabhängig von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $u \sim x_1$. Die Größe K_{nl} stellt deshalb keinen freien Parameter dar, sondern sie ist festgelegt durch die gewählte Kombination Fluid/Wand und ihr Betrag kann z.B. durch Experimente oder Wärmeübergangsrechnungen ermittelt werden (vgl. auch Abs. 5.1.4).

Wir werden im folgenden zur Vereinfachung α als Stoffparameter, β als Beheizung und δ als Symmetriewinkel bezeichnen.

2.6 Eigenschaften der reduzierten Gleichungen

Für die weiteren Betrachtungen wird das Gleichungssystem (2.11) zugrunde gelegt. Es stellt ein inhomogenes, gewöhnliches System von Differentialgleichungen 3. Ordnung in der Zeit dar, welches, bedingt durch die konvektiven Glieder in der Wärmetransportgleichung, die nichtlinearen Terme x_1x_3 und x_1x_2 besitzt.

Als Grenzfall beinhaltet es bei Wegfall des symmetriestörenden, inhomogenen Terms, d.h. $\delta \rightarrow 0$, sowie für konstanten Wärmeübergang, d.h. $K_{n1} \rightarrow 0$, das sogenannte Lorenz-System (vgl. Lorenz [24]). Diese Gleichungen wurden von E.N. Lorenz 1962 im Zusammenhang mit Konvektionsströmungen in einer ebenen Schicht betrachtet und sind wegen ihres extrem nichtlinearen Charakters seit her Gegenstand umfangreicher mathematischer Untersuchungen (vgl. z.B. Guckenheimer & Holmes [11], Iooss & Joseph [15], McLaughlin & Martin [20], Robbins [25], Yorke & Yorke [29]).

2.7 Begriffe zur Theorie der Lösungsverzweigung und Stabilität dynamischer Systeme

Im folgenden wird eine klassisch lineare sowie eine nichtlineare Stabilitätsanalyse durchgeführt. In diesem Zusammenhang tauchen Begriffe auf, welche vorab einer Festlegung bedürfen. Wir greifen hierbei auf Definitionen zurück, wie sie z. B. von Joseph [16] oder Iooss & Joseph [15] in der Literatur eingeführt sind.

2.7.1 Klassifikation des Stabilitätsverhaltens

a) Aussagen der linearisierten Störungsrechnung:

- Stationäre Lösungen werden als asymptotisch stabil bzw. instabil (auch als monoton stabil/instabil) bezeichnet, wenn ausschließlich reelle Eigenwerte präsent sind.
- Stationäre Lösungen werden als oszillatorisch stabil bzw. instabil bezeichnet, wenn mindestens ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte vorhanden ist.
- Periodische Lösungen werden als lokal stabil bzw. instabil bezeichnet, wenn der Betrag des Floquet-Multiplikators kleiner oder größer als eins ist.

Alle Aussagen einer linearisierten Störungsrechnung betreffen stets die lokale Stabilität, d.h. die unmittelbare Nachbarschaft der betrachteten stationären oder periodischen Lösung.

b) Aussagen aus nichtlinearen Betrachtungen:

Bei Kenntnis der Lösungsvielfalt und der lokalen Stabilität der einzelnen Lösungen sind weitere Einteilungen sinnvoll.

- Eine Lösung wird als global stabil (auch absolut stabil) bezeichnet, wenn sie lokal stabil ist und darüber hinaus keine weiteren Lösungen existieren.
- Eine Lösung wird als bedingt stabil bezeichnet, wenn sie lokal stabil ist, aber noch weitere stabile oder instabile Lösungen vorhanden sind.
- Ein System wird als global instabil (auch absolut instabil) bezeichnet, wenn ausschließlich lokal instabile Lösungen existieren.

2.7.2 Klassifikation des Zeitverhaltens

Asymptotisches Zeitverhalten (auch exponentiell) resultiert in der Umgebung stationären Lösungen, wenn diese als asymptotisch stabil bzw. instabil charakterisiert sind. Alle Trajektorien im Phasenraum, aufgespannt durch die unabhängigen Variablen x_i , laufen monoton auf den Lösungspunkt zu bzw. von diesem weg.

Oszillatorisches Zeitverhalten tritt auf in der Umgebung von stationären Lösungen, wenn diese als oszillatorisch stabil bzw. instabil bezeichnet sind. Die Trajektorien im Phasenraum laufen in Form von Spiralbahnen auf den Lösungspunkt zu bzw. von diesem weg.

Periodisches Zeitverhalten ist zu erwarten, wenn eine periodische Lösung als lokal stabil charakterisiert ist. Im Phasenraum stellt die stabile periodische Lösung eine geschlossene Trajektorie (Orbit) dar.

Chaotisches Zeitverhalten (auch absolut instabiles) resultiert, wenn ausschließlich lokal instabile Lösungen existieren. Dieses Verhalten kann aufgefaßt werden als fortgesetztes Annehmen und Verlassen einer Anzahl lokal instabiler Lösungen. Bei geringfügiger Änderung der Anfangsbedingung kann deshalb keine Aussage zur Veränderung des Zeitverhaltens getroffen werden. Im Phasenraum bleiben die Trajektorien stets innerhalb eines Schlauches mit endlichem

Durchmesser, d.h. sie werden offensichtlich von einer geschlossenen Raumkurve angezogen (engl. "strange attractor"). Der Abstand von dieser ist stochastischer Natur.

Transient chaotisches Zeitverhalten ist möglich, wenn neben einer lokal stabilen stationären Lösung eine Anzahl instabiler periodischer Lösungen existiert. Bei Überschreiten einer kritischen Amplitude in der Umgebung der stabilen Lösung ist dann über lange Zeiträume regelloses Zeitverhalten (ähnlich chaotisch) zu erwarten, verbunden mit einer möglichen Rückkehr zum lokal stabilen Lösungspunkt für $t \rightarrow \infty$.

2.7.3 Klassifikation der Verzweigungspunkte

a) Stationäre Vorwärtsverzweigung

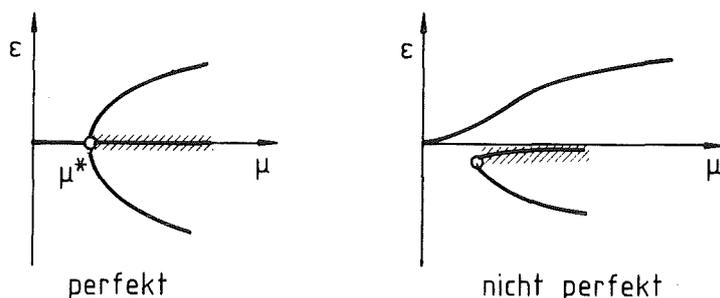


Abb. 2-3: Perfekte und nicht perfekte stationäre Vorwärtsverzweigung.
Lokal instabile Lösungen sind schraffiert.

Wir betrachten zunächst die perfekte Verzweigung in Abb. 2-3. Für wachsenden Kontrollparameter μ tritt bei $\mu = \mu^*$ ein Sattelpunkt der Lösung $\varepsilon = 0$ auf. Dieser ist durch einen reellen Eigenwert charakterisiert, welcher für $\mu = \mu^*$ die imaginäre Achse kreuzt. Deshalb verliert die Lösung $\varepsilon = 0$ ihre Stabilität und zwei lokal stabile Lösungen mit $\varepsilon \neq 0$ zweigen für wachsenden Kontrollparameter ab. Die Lösung $\varepsilon = 0$ ist im Bereich $0 < \mu < \mu^*$ als global stabil zu bezeichnen. Die abzweigenden Lösungen sind für $\mu > \mu^*$ zunächst bedingt stabil. Das Auftreten eines die Symmetrie störenden Terms in den Gleichungen führt zu einer nicht perfekten Verzweigung. Eine Lösung wird dann für wachsende μ durch einen glatten Übergang angenommen, die anderen Lösungen liegen isoliert. Der Umkehrpunkt der Lösungskurve in der negativen Halbebene trennt die lokal stabile äußere Lösung von der instabilen inneren Lösung mit $\varepsilon \approx 0$.

b) Hopf-Verzweigung

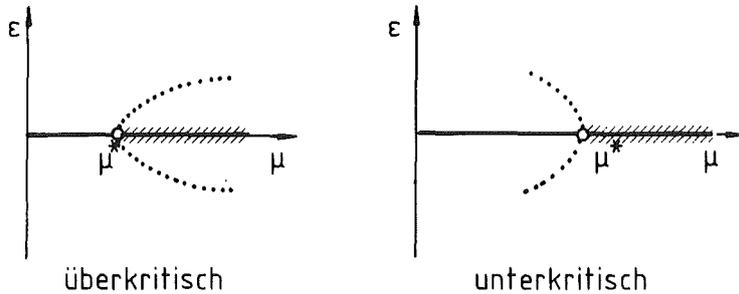


Abb. 2-4: Überkritische und unterkritische Hopf-Verzweigung.

Lokal instabile stationäre Lösungen sind schraffiert.

Für wachsenden Kontrollparameter μ tritt bei $\mu = \mu^*$ ein neutralstabiler Wirbelpunkt der stationären Lösung $\varepsilon = 0$ auf. Dieser Hopf-Punkt ist charakterisiert durch ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar, welches gerade für $\mu = \mu^*$ die reelle Achse kreuzt. Nach Hopf [13] zweigen an diesem Punkt periodische Lösungen des Systems ab. Die periodischen Lösungen, in Abb. 2-4 punktiert durch ihre Amplituden gegeben, können überkritisch abzweigen, d.h. sie existieren nur für Werte des Kontrollparameters $\mu > \mu^*$. Von unterkritischer Abzweigung spricht man, wenn die periodischen Lösungen auch für Werte $\mu < \mu^*$ existieren. Im Falle einer unterkritischen Verzweigung wird der Bereich, in welchem die lokal stabile stationäre Lösung parallel zur periodischen Lösung existiert, als unterkritischer Bereich bezeichnet. Damit verbunden ist die stationäre Lösung im unterkritischen Bereich stets bedingt stabil. Zur lokalen Stabilität der abzweigenden Lösungen sind nach Hopf bei Kenntnis der Abzweigungsrichtung eindeutige Aussagen möglich.

Die unter a) und b) aufgeführten Verzweigungspunkte sind charakterisiert durch die Neutralstabilität einer stationären Lösung. Aus diesem Grunde kann eine Klassifizierung anhand der Eigenwerte der entsprechenden stationären Lösung erfolgen. Ausgezeichnete Punkte auf periodischen Lösungsästen hingegen müssen anhand der Floquet-Multiplikatoren klassifiziert werden. Im folgenden geschieht dies anhand der auftretenden Fälle.

c) Homoklines Orbit

Als Homoklines Orbit wird die Grenzlage einer periodischen Lösung bezeichnet, welche sich ergibt, wenn die geschlossene Phasenbahn der periodischen Lösung im Phasenraum einen stationären Lösungspunkt tangiert. Für diesen Grenzfall wird sowohl die Periodendauer der periodischen Lösung als auch der führende Floquet-Multiplikator singular, d.h. beide wachsen über alle Grenzen.

d) Subharmonischer Verzweigungspunkt

Dieser Punkt auf einem periodischen Lösungsast zeichnet sich aus durch die Abzweigung nT -periodischer Lösungen ($n \geq 2$) von der T -periodischen Grundlösung. Der führende Floquet-Multiplikator an einem solchen Punkt ist reell und liegt bei -1 .

3. Stabilitätsanalyse

Zunächst soll das Gleichungssystem (2.11) für $K_{nl} = 0$ betrachtet werden. In weiteren Schritten wird dann die Veränderung durch Hinzunahme weiterer Terme diskutiert (vgl. Abschn. 4.1, 4.2).

3.1 Stationäre Lösungen

Gemäß den zunächst eingeführten Vereinfachungen erhält man deshalb

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha (x_2 - x_1) , \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 - x_1 x_3 - x_2 + \beta \tan \delta , \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - x_3 .\end{aligned}\tag{2.11a}$$

Die stationären Lösungen des Systems ($\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3 = 0$) ergeben sich aus der algebraischen Gleichung dritten Grades der Form:

$$x_0^3 - x_0 (\beta - 1) - \beta \tan \delta = 0 ,\tag{3.1}$$

mit

$$x_0 = x_{1st} = x_{2st} = \sqrt{x_{3st}} .$$

Die Gleichung (3.1) wird numerisch gelöst. Ihre reellen Lösungen sind in den folgenden Diagrammen (3-1) für zwei Symmetriewinkel δ über der dimensionslosen Kennzahl β aufgetragen.

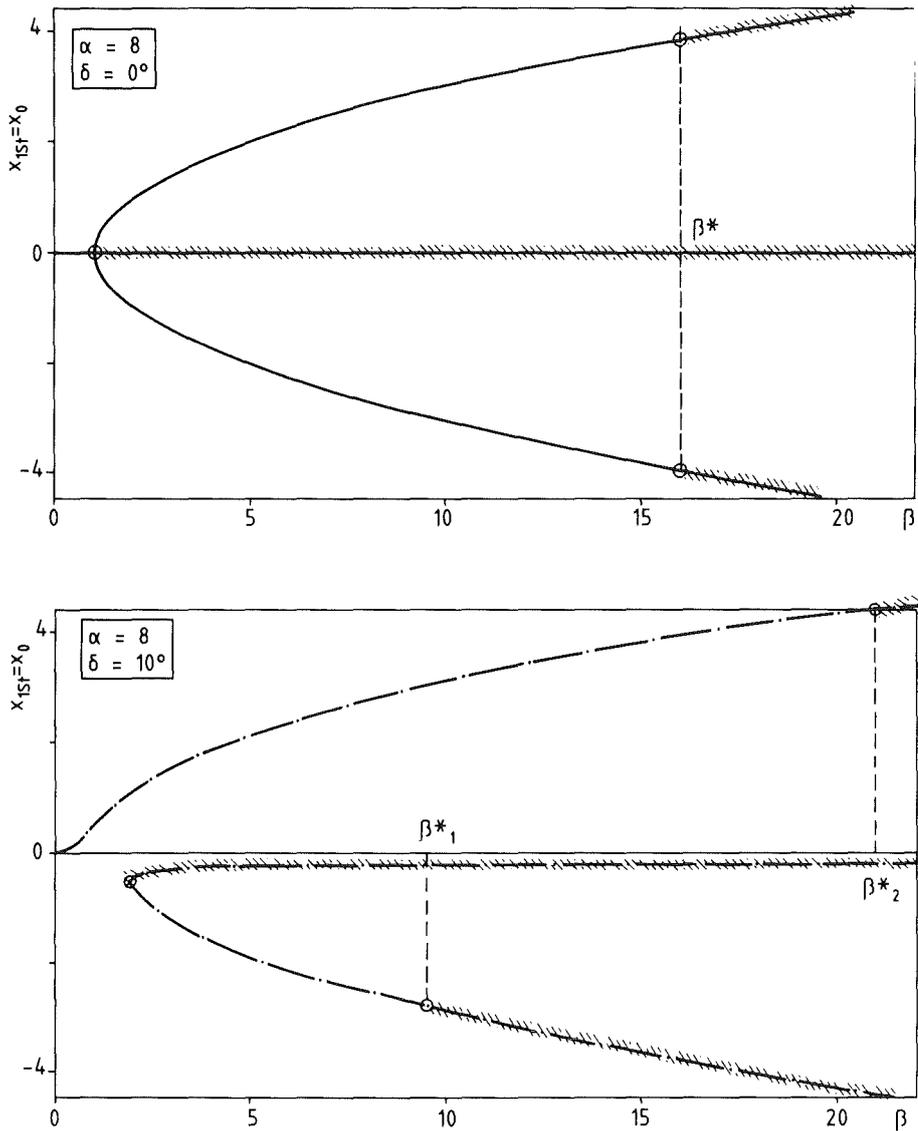


Abb. 3-1: Die drei stationären Lösungen für die dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit als Funktion der Beheizung β für $\delta = 0^\circ$ und $\delta = 10^\circ$. Es sind in diesem Diagramm bereits die Stabilitätsgrenzen der Lösungen mit einem Kreis gekennzeichnet, und die instabilen Bereiche schraffiert.

Zunächst zeigt sich für die stationären Lösungen lediglich eine Abhängigkeit der Lösung \tilde{x}_{St} von der Beheizung β sowie vom Symmetriewinkel δ , während der Stoffparameter α nicht eingeht.

Bei symmetrischer Beheizung, d.h. $\delta = 0^\circ$, ergibt sich als Grenzfall die analytisch exakt angebbare Lösung der Form:

$$x'_0 = 0, \quad x_0^{''''} = \pm \sqrt{\beta - 1}. \quad (3.2)$$

Dies bedeutet, daß eine Nulllösung existiert für welche die Strömungsgeschwindigkeit, sowie die horizontale Temperaturdifferenz im Kreislauf ($\sim x_2$) verschwinden. Außerdem erhält man bei einem Wert $\beta = 1$ das Abzweigen von zwei weiteren Lösungen, die einer rechts- und einer linksherum laufenden Strömung zugeordnet werden können. Die Strömungsgeschwindigkeit hat für beide den gleichen Betrag. Je nach Strömungsrichtung ändert auch die horizontale Temperaturdifferenz x_2 (vgl. Gl. 3.1) ihr Vorzeichen. Im Falle $x_0 > 0$ ist deshalb der rechte Teil des Kreislaufs mit dem Aufstrom heißer als der linke Teil in der Abwärtsströmung und umgekehrt. Demgegenüber merkt die vertikale Temperaturdifferenz x_3 (vgl. Gl. 3.1) nichts von der Strömungsrichtung, d.h. unabhängig von der Strömungsrichtung besteht durch die transportierte Wärme immer die Tendenz zum Abbau der aufgeprägten Temperaturunterschiede.

Wird nun die Symmetrie der Beheizung bzw. Kühlung durch einen von Null verschiedenen Symmetriewinkel $\delta > 0$ gebrochen, so wird diejenige Lösung bevorzugt, welche die Strömung in positiver φ -Richtung beschreibt. Der Betrag ihrer Strömungsgeschwindigkeit wird größer gegenüber dem der negativen Lösung. Außerdem wandert der Verzweigungspunkt der Lösungen in die negative Halbebene hinein, und die Nulllösung entartet, d.h. für sie gilt $x_0' \cong 0$. Die Gesamtzahl aller Lösungen bleibt jedoch erhalten.

Unter der Voraussetzung kleiner Unsymmetrien, also für $\delta \ll 1$, lassen sich die Lösungen in einer Reihe um die symmetrische Lösung entwickeln. Man erhält als Lösung eine Approximation erster Ordnung in der Form:

$$x_0' \cong -\frac{\beta}{(\beta-1)} \delta, \quad x_0'' \cong \pm \sqrt{\beta-1} + \frac{\beta}{(\beta-1)} \frac{\delta}{2}. \quad (3.3)$$

3.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Zu ersten Aussagen über die Stabilität der stationären Lösungen gelangt man durch Einführung von Störungsansätzen für die Zustandsgrößen

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}_{st} + \delta \tilde{x}_t(\tau). \quad (3.4)$$

Eingeführt in das Gleichungssystem (2.11a) kann dann wegen $|\delta \tilde{x}_1| \ll 1$ eine Linearisierung durchgeführt werden. Man erhält das lineare Gleichungssystem für die Störgrößen:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_{1e} &= \alpha (\delta x_{2e} - \delta x_{1e}), \\ \delta \dot{x}_{2e} &= (\beta - x_0^2) \delta x_{1e} - \delta x_{2e} - x_0 \delta x_{3e}, \\ \delta \dot{x}_{3e} &= x_0 \delta x_{1e} + x_0 \delta x_{2e} - \delta x_{3e}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Lösungen dieses Systems werden durch die Eigenwerte λ_j der Determinante der Funktionalmatrix kontrolliert (vgl. Guckenheimer & Holmes [11]). Es ist deshalb die folgende algebraische Beziehung für λ_j zu lösen.

$$\det \{ A - \lambda E \} = 0, \quad \delta \dot{\tilde{x}}_e = A \cdot \delta \tilde{x}_e, \quad (3.6)$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ (\beta - x_0^2) & -1 & -x_0 \\ x_0 & x_0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

sowie E als diagonal besetzte Einheitsmatrix.

Man erhält ein Polynom 3. Ordnung und damit drei Lösungen für die Eigenwerte λ_j . Die Lösung des Differentialgleichungssystems (3.5) können dann als Linearkombination der Eigenfunktionen zu

$$\delta \tilde{x}_e(\tau) = \sum_{j=1}^3 \tilde{c}_j e^{\lambda_j \tau} \quad (3.8)$$

angegeben werden, wobei die Konstanten-Vektoren \tilde{c}_j den Anfangsbedingungen anzupassen sind.

Daraus folgt als notwendiges Kriterium für die lokale Stabilität der stationären Grundlösung

$$\operatorname{Re} \{ \lambda_j \} < 0. \quad (3.9)$$

Die Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung sind in der Abb. 3-1 eingetragen. Zunächst erkennt man, daß im symmetrischen Fall, also für $\delta = 0$, die Lösung $x_{1st} = 0$ an der Stelle $R = 1$ instabil wird. Von diesem Wert ab existieren

zwei stabile Lösungsäste $x_{1st} = \pm \sqrt{\beta-1}$ bis zur Grenze ihrer Stabilität bei β^* . Für $\beta > \beta^*$ gibt es schließlich keine stabilen stationären Lösungen im Sinne der linearen Stabilitätstheorie.

Im unsymmetrischen Fall mit $\delta > 0$ wird nun die positive Lösung in ihrer Stabilität begünstigt, d.h. sie ist stabil von $\beta = 0$ bis zu dem höheren Wert $\beta_2^* > \beta^*$. Die negative Lösung liegt isoliert, d.h. sie ist nicht mehr durch stetig wachsende β erreichbar, denn zwischen $\beta = 0$ und dem Verzweigungspunkt existieren lediglich zwei komplexe Lösungen. Die obere Stabilitätsgrenze dieses Lösungsastes ist bereits bei $\beta_1^* < \beta^*$ erreicht und die entartete Nulllösung ist im gesamten β -Bereich instabil.

Die beiden wesentlichen Einflußgrößen auf die Stabilitätsgrenzen sind folglich die Beheizung β sowie der Symmetriewinkel δ . Der Eigenwertsgleichung (3.6) ist jedoch anzusehen, daß auch der Stoffparameter α eine Rolle spielen muß. In der Tat läßt sich unter Einbeziehung von α ein Stabilitätsdiagramm herleiten, welches in der α - β -Ebene stabile und instabile Bereiche in Abhängigkeit der maßgeblichen Parameter verdeutlicht. Dieses Stabilitätsdiagramm ist in Abb. 3-2 gezeigt. Betrachtet werden hierbei nur die oberen Stabilitätsgrenzen der Lösungsäste.

Bei symmetrischer Beheizung mit $\delta = 0$ existiert im Bereich $\alpha > 2$ eine Grenzkurve, welche den oszillatorisch stabilen vom oszillatorisch instabilen Bereich trennt. Dabei gilt diese Stabilitätsgrenze für beide stationären Lösungen, also sowohl für die rechts- als auch für die linksdrehende Lösung. Die Gleichung dieser Kurve kann im übrigen auch analytisch angegeben werden, wenn man die Bedingung für zwei rein imaginäre Eigenwerte in Gleichung (3.6) einbringt. Wir erhalten so die Beziehung für die kritische Beheizung zu

$$\beta^*(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 4\alpha}{\alpha - 2} \quad (3.10)$$

Es läßt sich zeigen, daß das Minimum der Funktion bei $\alpha = 2 + \sqrt{12} \approx 5.5$ liegt und für $\alpha = 2$ eine Singularität auftritt.

Bei genaueren Betrachtungen der Eigenwerte im Bereich $\alpha < 2$ zeigt sich, daß diese alle reell sind, folglich ein asymptotisches Wegdämpfen der Störungen zu erwarten ist. Physikalisch kann dies derart interpretiert werden, daß für $\alpha < 2$, also für Medien mit sehr gutem Wärmeübergang zur Wand, die Tempera-

turstörungen bereits weggedämpft werden, ehe sie nach einem Umlauf rückkoppeln können. Umgekehrt führt der relative schlechte Wärmeübergang Fluid/Wand für $\alpha > 2$ zu oszillatorischem Verhalten, weil die Störungen erhalten bleiben und so rückkoppeln können. Dies äußert sich im Auftreten komplexer Eigenwerte. Für $\alpha \rightarrow \infty$ nähert sich die Kurve asymptotisch einer Geraden gemäß $\beta^* \sim \alpha$.

Wenn die Beheizung unsymmetrisch erfolgt, etwa mit $\delta = 10^\circ$, existieren zwei Stabilitätsgrenzen, wovon die obere für die begünstigte positive und die untere für die negative Lösung gilt. Im Bereich zwischen den strichpunktierten Kurven in Abb. 3-2 ist deshalb eine der stationären Lösungen noch stabil, während die andere bereits instabil wurde. Bei kleiner Unsymmetrie $\delta \ll 1$ können Approximationen für die Grenzkurven angegeben werden. Bei Mitnahme von Termen bis zu 2. Ordnung ergibt sich

$$\beta_{1,2}^*(\alpha) \cong \beta^*(\alpha) + \frac{\delta^2}{2} \left\{ \frac{\alpha^4 + 2\alpha + 2}{(\alpha - 2)^2} \right\} \pm \frac{(2 + \alpha^2)}{(\alpha - 2)} \delta \sqrt{\frac{\delta^2}{4} \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 - 4\alpha - 4}, \quad (3.11)$$

wobei $\beta^*(\alpha)$ die exakte kritische Beheizung im symmetrischen Beheizungsfall gemäß Gl. (3.10) darstellt. An dieser Stelle muß man sich nun die Grundlagen der linear gewonnenen Stabilitätsaussagen vor Augen führen. Es wurde stets eine Linearisierung der Störgrößen ($|\delta x_1| \ll 1$) um eine stationäre Lösung vorgenommen. Dies impliziert, daß in der Umgebung der Stabilitätsgrenze die lineare Theorie versagt, weil die Störungen am Grenzpunkt Dauerschwingungen mit größerer Amplitude ausführen können.

Es bleibt also die Feststellung, daß bis zur Stabilitätsgrenze, die von der linearen Theorie geliefert wird, das Verhalten der Störungen bei kleinen Amplituden gut beschreibbar ist. In der näheren Umgebung jedoch oder gar oberhalb der Stabilitätsgrenze können mit einer linearisierten Betrachtung keine Aussagen gemacht werden, weil Störungen mit endlicher Amplitude auftreten. Aus diesem Grunde sind weitergehende Betrachtungen notwendig.

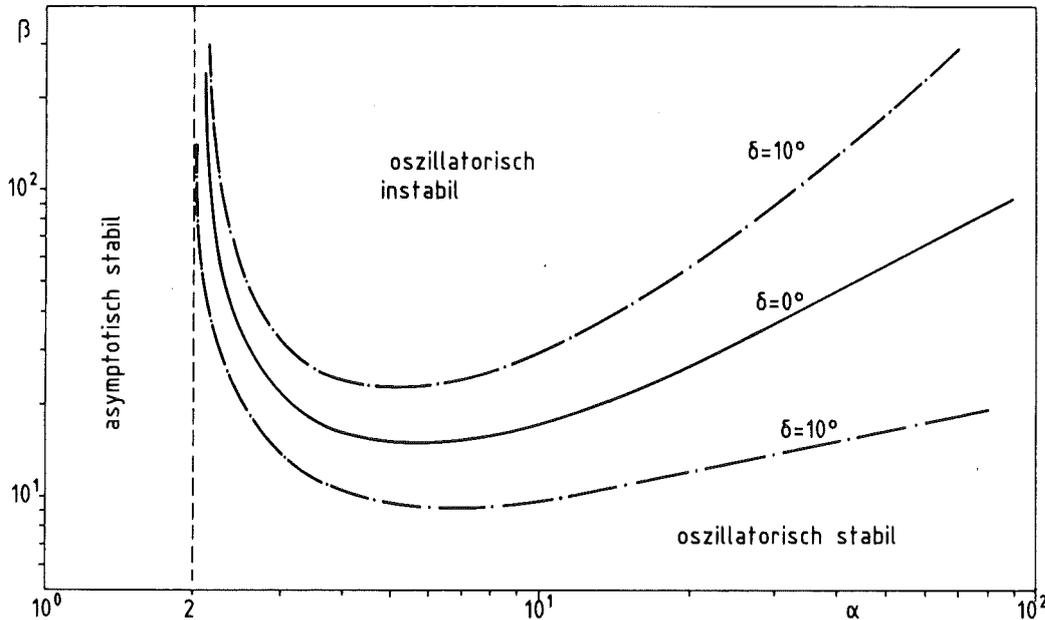


Abb. 3-2: Neutralkurven der Stabilität für $\delta = 0$ sowie $\delta = 10^\circ$ in der α - β -Ebene. Die Kurven (durchgezogen und strichpunktiert) zeigen die kritische Beheizung β^* als Funktion des Stoffparameters α .

3.3 Schwach nichtlineare Störungsrechnung

Die Stabilitätsgrenze im Sinne einer linearen Theorie ist gegeben durch einen oder mehrere Eigenwerte in Gl. (3.6), welche gerade einen Realteil von Null haben. Im Regelfall ist für diesen Fall nicht nur der Verlust der Stabilität des betrachteten Zustands festzustellen, sondern auch das Abzweigen von weiteren Lösungen. Welcher Typ von Verzweigung jeweils vorliegt, kann anhand der Konstellation der Eigenwerte geprüft werden.

Im symmetrischen Beheizungsfall mit $\delta = 0$ verliert die Nulllösung ihre Stabilität bei $\beta = 1$, denn es taucht ein positiv reeller Eigenwert auf. Die restlichen Eigenwerte sind sämtlich negativ und reell. Demzufolge wird die Nulllösung asymptotisch instabil und es zweigen für wachsenden Kontrollparameter β symmetrisch zwei stabile stationäre Lösungen ab. Der Punkt läßt sich deshalb als perfekte stationäre Vorwärtsverzweigung charakterisieren.

Demgegenüber ist die obere Stabilitätsgrenze der beiden abzweigenden stationären Lösungen durch ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte gekennzeichnet, welche bei $\beta = \beta^*$ gerade einen verschwindenden Realteil haben. Es tritt des-

halb eine oszillatorische Instabilität der betrachteten stationären Lösungen auf, und nach Hopf [13] zweigen an diesen Punkten periodische Lösungen des Differentialgleichungssystems ab. In der Literatur hat sich hierfür der Begriff Hopf-Verzweigung eingebürgert.

Für eine schiefssymmetrische Beheizung ($\delta > 0$) kommt es zu einer sogenannten Imperfektion der stationären Vorwärtsverzweigung mit den erwähnten Besonderheiten (vgl. Abb. 3-1). Die oberen Stabilitätsgrenzen auf den stationären Lösungsästen liegen bei verschiedenen $\beta_1^* \neq \beta_2^*$. Die Qualität der Eigenwerte am Grenzpunkt bleibt jedoch ungeändert. Sowohl bei $\beta = \beta_1^*$ als auch bei $\beta = \beta_2^*$ liegt ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte mit verschwindendem Realteil vor. Man findet also an beiden Punkten β_1^*, β_2^* eine Hopf-Verzweigung.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich ausschließlich auf die Verzweigung von stationären zu periodischen Lösungen. An den sogenannten Hopf-Punkten, nämlich bei $\beta^*, \beta_1^*, \beta_2^*$, muß per Definition die lineare Störungsrechnung versagen, weil Störungen endlicher Amplitude auftreten. Als Kriterium für die Stabilität des Systems können deshalb die Eigenwerte der linearisierten Störungsgleichungen nicht mehr sinnvoll verwertet werden. Es ist darum angezeigt, ein anders Kriterium, nämlich das Lyapunov-Kriterium, zur Bewertung der Stabilität anzuwenden. Im Rahmen der Untersuchungsmethode wird per Definition als Anfachungsrate der Ausdruck

$$X = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \langle \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 \rangle \quad (3.12)$$

gewählt, wobei die eckigen Klammern die zeitliche Mittelung über eine Periode andeuten. Die Funktionen δx_i des Vektors $\delta \tilde{x}(\tau)$ beschreiben das wahre zeitliche Verhalten der Störungen. Mit der Forderung

$$X \stackrel{!}{<} 0 \quad (3.12a)$$

stellt das Lyapunov-Kriterium ein hinreichendes Kriterium für die Stabilität eines Zustandes dar.

Als Ausgangsgleichungen sind die vollständigen nichtlinearen Stördifferentialgleichungen aus Gl. (2.11a) zu generieren. Wir erhalten analog zu Gl. (3.5) jedoch ohne Linearisierung

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= \alpha (\delta x_2 - \delta x_1), \\ \delta \dot{x}_2 &= (\beta - x_0^2) \delta x_1 - \delta x_2 - x_0 \delta x_3 - \delta x_1 \delta x_3, \\ \delta \dot{x}_3 &= x_0 \delta x_1 + x_0 \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_1 \delta x_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Anfachungsrate X kann dann gemäß Gl. (3.12) durch zulässiges Vertauschen der auftretenden Operationen ausgedrückt werden. Wir wollen uns jedoch auf die unmittelbare Umgebung der Hopf-Punkte, d.h. $\mathbb{B} \cong \mathbb{B}^*$ beschränken und führen deshalb zunächst eine relative Abweichung vom betrachteten Hopf-Punkt ein als

$$\Delta \beta = \pm \sqrt{\beta - 1} \mp \sqrt{\beta^* - 1}. \quad (3.14)$$

Die Kennzahl-Transformation von \mathbb{B} auf $\Delta \mathbb{B}$ erweist sich als sinnvoll für die folgenden Schritte. Für $\Delta \mathbb{B} < 0$ gilt deshalb $\mathbb{B} < \mathbb{B}^*$, d.h. wir befinden uns "unterhalb" des Hopf-Punktes im unterkritischen Bereich. Entsprechend kann $\Delta \mathbb{B} > 0$ direkt dem überkritischen Bereich, d.h. $\mathbb{B} > \mathbb{B}^*$ zugeordnet werden. Im Rahmen der so definierten Umgebung um den Hopf-Punkt kann auch eine kleine Unsymmetrie δ angenommen werden. Wir können deshalb wegen $\Delta \mathbb{B}, \delta \ll 1$, jedoch ohne Annahmen bzgl. der Störungsamplituden δx_i , das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= \alpha (\delta x_2 - \delta x_1), \\ \delta \dot{x}_2 &= \left\{ 1 - \frac{(1+x_0^{*2})}{x_0^*} \delta \right\} \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_1 \delta x_3 \\ &\quad - \left\{ x_0^* + \Delta \beta + \frac{(1+x_0^{*2})}{x_0^*} \frac{\delta}{2} \right\} \delta x_3, \\ \delta \dot{x}_3 &= \left\{ x_0^* + \Delta \beta + \frac{(1+x_0^{*2})}{x_0^*} \frac{\delta}{2} \right\} \delta x_1 - \delta x_3 + \delta x_1 \delta x_2 \\ &\quad + \left\{ x_0^* + \Delta \beta + \frac{(1+x_0^{*2})}{x_0^*} \frac{\delta}{2} \right\} \delta x_2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

herleiten. Dieses System ist linearisiert in den Größen $\Delta \mathbb{B}$ und δ um den Hopf-Punkt bei $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$. Die Anfachungsrate X kann bei Berücksichtigung der Ergebnisse aus der linearen Störungsrechnung angegeben werden. Es kommt

$$\begin{aligned} X &= -\alpha \langle \delta x_1^2 \rangle - \langle \delta x_2^2 \rangle - \langle \delta x_3^2 \rangle \\ &\quad + \left\{ \alpha + 1 - \frac{(1+x_0^{*2})}{x_0^*} \delta \right\} \langle \delta x_1 \delta x_2 \rangle \\ &\quad + \left\{ x_0^* + \Delta \beta + \frac{(1+x_0^{*2})}{x_0^*} \frac{\delta}{2} \right\} \langle \delta x_1 \delta x_3 \rangle, \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit

$$x_0^* = \pm \sqrt{\beta^* - 1}.$$

Im folgenden wird es nötig, die zunächst unbekannte Störungsgröße $\delta_{\tilde{x}}(\tau)$ in sinnvoller Weise anzunähern. Wir wählen hierzu eine additive Überlagerung gemäß

$$\delta_{\tilde{x}}(\tau) \cong \delta_{\tilde{x}_e}(\tau) + \delta_{\tilde{x}_{ne}}(\tau). \quad (3.17)$$

Der Anteil $\delta_{\tilde{x}_1}(\tau)$ soll hierbei das Ergebnis aus den linearen Störungsdifferentialgleichungen (vgl. Gl. 3.5) repräsentieren. Für $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$ sind aufgrund der Untersuchungsmethode die Eigenwerte als $\lambda_{1/2} = \pm j \omega^*$ und $\lambda_3 < 0$ und $\text{Im}(\lambda_3) = 0$ bekannt. Mit der willkürlichen Anfangsbedingung

$$\delta_{\tilde{x}_{1e}}^*(\tau=0) = \hat{A} \quad (3.18)$$

können die Lösungen für den eingeschwungenen Zustand angegeben werden, wobei sich Funktionen vom Typ

$$\delta_{\tilde{x}_e}^*(\tau) = \underline{C}_1 \sin \omega^* \tau + \underline{C}_2 \cos \omega^* \tau + \underline{C}_3 \quad (3.19)$$

ergeben.

Streng genommen sind diese Lösungen $\delta_{\tilde{x}_1}^*(\tau)$ nur am Hopf-Punkt, d.h. bei $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$ gültig. Im Rahmen des Untersuchungsbereichs mit $\Delta \mathbb{B}, \delta \ll 1$ stellen sie jedoch auch gute Näherungen für die Umgebung dar. Wir unterstellen also $\delta_{\tilde{x}_1} \cong \delta_{\tilde{x}_1}^*$. Der vollständige Gang der Rechnung ist aus Gründen der Übersichtlichkeit im Anhang (vgl. Abschn. 7.3) ausgeführt.

Der zweite Anteil $\delta_{\tilde{x}_{n1}}(\tau)$ hingegen soll der nichtlinearen Wechselwirkung der Störgrößen Rechnung tragen. Zur Berechnung dieses Anteils wird der Ansatz (3.17) in das Differentialgleichungssystem (3.15) eingebracht und nach Linearisierung in den Größen $\Delta \mathbb{B}, \delta, \delta_{\tilde{x}_{n1}}$ erhält man

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_{1ne} &= \alpha (\delta x_{2ne} - \delta x_{1ne}), \\ \delta \dot{x}_{2ne} &= \delta x_{1ne} - \delta x_{2ne} - x_0^* \delta x_{3ne} - \delta x_{1e}^* \delta x_{3e}^*, \\ \delta \dot{x}_{3ne} &= x_0^* \delta x_{1ne} + x_0^* \delta x_{2ne} - \delta x_{3ne} + \delta x_{1e}^* \delta x_{2e}^*. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aufgrund der auftretenden Produkte der bekannten Funktionen $\delta x_{11}^* \delta x_{j1}^*$ handelt es sich um ein inhomogenes Gleichungssystem für δx_{nl} und somit kommen ausschließlich Lösungen vom Typ

$$\delta x_{nl} = \underset{\sim}{C}_4 \sin 2\omega^* \tau + \underset{\sim}{C}_5 \cos 2\omega^* \tau + \underset{\sim}{C}_6 \quad (3.21)$$

in Frage. Nach Bestimmung der Konstanten-Vektoren $\underset{\sim}{C}_j$ (vgl. Aschn. 7.3) sind alle auftretenden Größen in der Gleichung für die Anfachungsrate X (Gl. 3.16) bekannt. Wir berücksichtigen die Ergebnisse aus der linearen Störungsrechnung und erhalten für die Anfachungsrate

$$\begin{aligned} X &= -\alpha \langle \delta x_{1nl}^2 \rangle - \langle \delta x_{2nl}^2 \rangle - \langle \delta x_{3nl}^2 \rangle \\ &+ \frac{(\alpha^2 + 4\alpha)}{\sqrt{(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+2)}} \delta \langle \delta x_{1e}^* \delta x_{2e}^* \rangle \\ &+ \left\{ \Delta\beta + \frac{(\alpha^2 + 4\alpha)}{\sqrt{(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+2)}} \delta \right\} \langle \delta x_{1e}^* \delta x_{3e}^* \rangle \\ &\pm \sqrt{\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{(\alpha-2)}} \langle \delta x_{1nl} \delta x_{3nl} \rangle \\ &+ (\alpha+1) \langle \delta x_{1nl} \delta x_{2nl} \rangle ; \end{aligned} \quad (3.22)$$

die doppeldeutigen Vorzeichen rühren von den Lösungen mit unterschiedlicher Strömungsrichtung im Kreis mit $x_1 \geq 0$ her.

An dieser Stelle wird zur Vereinfachung der weiteren Algebra $\alpha \gg 1$ vorausgesetzt. Alle Funktionen können deshalb als Laurent-Reihe in $\sqrt{\alpha}$ entwickelt werden und das Resultat kann bei Abbruch nach den Gliedern der Ordnung $(1/\alpha)$ analytisch angegeben werden. Zusammen mit der Proportionalität

$$X \sim \frac{1}{2} \frac{d\hat{A}^2}{d\tau} \quad (3.23)$$

erhält man schließlich die Amplitudengleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}^2}{d\tau} &\cong \frac{37}{72} \frac{\hat{A}^4}{\alpha} - \left\{ \pm \alpha \frac{\delta}{2} + \sqrt{\alpha} \frac{\delta}{2} - (\Delta\beta + \frac{3}{2} \delta) + \frac{7\delta}{\sqrt{\alpha}} \right\} \frac{\hat{A}^2}{\sqrt{\alpha}} \\ &+ \mathcal{O}\left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}^3} \right\} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Diese Differentialgleichung, häufig auch als Landau-Gleichung bezeichnet, gibt Aufschluß über das Verhalten einer beliebigen Anfangsamplitude \hat{A} in der Zeit. Weil stets eine Anfangsstörung $\hat{A} \neq 0$ vorhanden sein wird, scheidet die triviale Lösung $\hat{A} = 0$ aus. Der Fall $\frac{d\hat{A}^2}{dt} = 0$, d.h. zeitliche Konstanz der Störungsamplitude, kann als neutralstabil aufgefaßt werden. Eingeführt in Gl.(3.24) erhält man eine algebraische Bestimmungsgleichung für die zur Neutralstabilität gehörende Amplitude \hat{A}_N . Es kommt

$$\hat{A}_N^2 \approx -\frac{72}{37} \sqrt{\alpha} \left\{ \mp \frac{\delta}{2} \alpha \pm \sqrt{\alpha} \frac{\delta}{2} + \left(\Delta\beta \mp \frac{3\delta}{2} \right) \pm \frac{7\delta}{4\sqrt{\alpha}} \right\}. \quad (3.25)$$

Wir wollen zunächst den Fall symmetrischer Beheizung, d.h. $\delta = 0$, diskutieren. Man erhält die Gleichung

$$\hat{A}_N^2 \approx -\frac{72}{37} \sqrt{\alpha} \Delta\beta, \quad (3.25a)$$

welche für $\Delta\beta < 0$ zwei reelle Lösungen für \hat{A}_N liefert. Im folgenden Bild sind die Ergebnisse für die Amplituden bei zwei verschiedenen Werten des Stoffparameters α über $\Delta\beta/|\Delta\beta|$ aufgetragen.

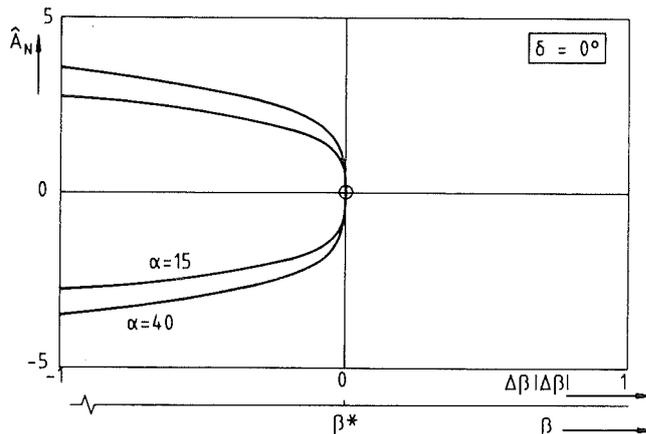


Abb. 3-3: Amplituden der Neutralstabilität im symmetrischen Beheizungsfall ($\delta = 0$) für zwei Werte des Stoffparameters $\alpha = 15$ und $\alpha = 40$.

Zunächst ist zu erkennen, daß die Kurven rückwärtig vom Hopf-Punkt, gegeben durch $\beta = \beta^*$ (bzw. $\Delta\beta = 0$), abzweigen. Der Betrag von \hat{A}_N nimmt dann für fallende Werte β zu. Die Amplitude ist zudem unabhängig von der Richtung der

Strömung im Kreislauf ($x_1 \geq 0$), und deshalb zeigen beide stationären Lösungsäste am jeweiligen Hopf-Punkt identisches Verhalten. Es ist dadurch charakterisiert, daß für Werte $B < B^*$ die stationären Lösungen im Falle kleiner Störungen stabil bleiben; für endliche Störungsamplituden \hat{A} hingegen, welche größer als die gezeigten Amplituden der Neutralstabilität \hat{A}_N sind, kann aus Gl. (3.24) $\frac{d\hat{A}^2}{dt} > 0$, also instabiles Verhalten gefolgert werden. Dies bedeutet, daß der Zustand der Neutralstabilität bei endlicher Störungsamplitude bereits für Werte $B < B^*$ erreicht ist. Der Übergang ist deshalb unterkritisch bzw. man spricht von einer unterkritischen Instabilität der stationären Lösung. In Abb. 3-3 kann auch der Einfluß des Stoffparameters α diskutiert werden, welcher gemäß $|A_N| \sim \alpha^{1/4}$ bei großen Werten α zu deutlich größeren Neutralamplituden führt. Es sei noch erwähnt, daß der Grenzfall $\delta = 0$, wie er in Gl. (3.25a) bzw. Abb. 3-3 dargestellt ist, in einer Arbeit von McLaughlin & Martin [20] in anderem physikalischem Kontext mit identischem Ergebnis gerechnet wurde.

Im nächsten Bild nun ist der allgemeine Fall $\delta \neq 0$ für zwei Werte α dargestellt. In diesem Fall liefert die Gl. (3.25) jetzt abhängig von der Strömungsrichtung ($x_1 \geq 0$) vier Lösungen für \hat{A}_N .

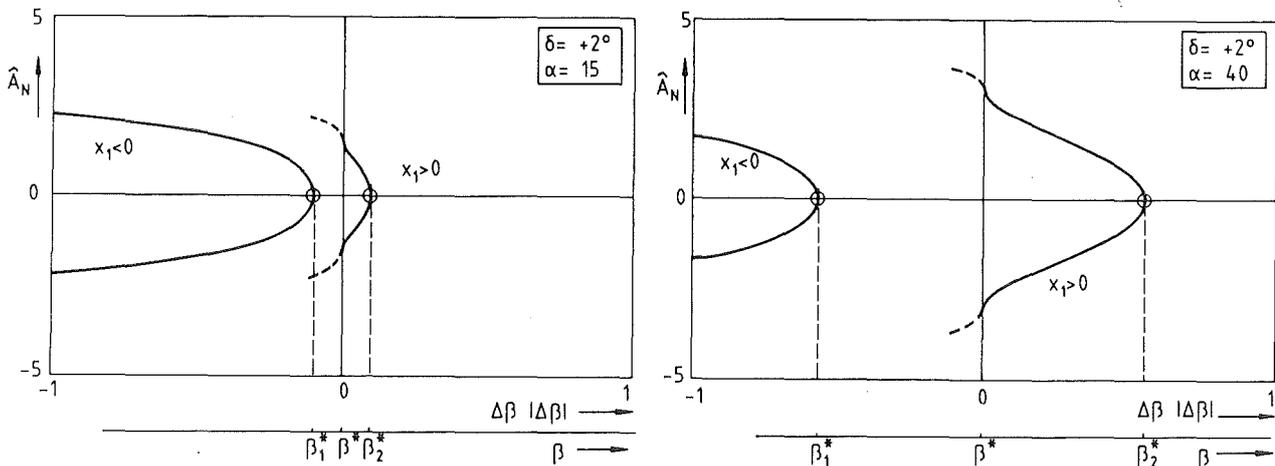


Abb. 3-4: Amplituden der Neutralstabilität im allgemeinen Fall ($\delta \neq 0$) für zwei verschiedene Werte des Stoffparameters $\alpha = 15$. und $\alpha = 40$.). Die Kurven sind gestrichelt in den Bereichen, in welchen die Voraussetzungen der Rechnung verletzt sind.

Bei der linearisierten Störungsrechnung konnte bereits festgestellt werden, daß die Hopf-Punkte der stationären Lösungsäste bei verschiedenen Werten der

Beheizung β_1^* und β_2^* im Falle $\delta \neq 0$ zu finden sind. Dieser Sachverhalt spiegelt sich naturgemäß auch hier wieder, indem die Abzweigung der Amplitudenkurven je nach Strömungsrichtung ($x_1 \geq 0$) jetzt bei $\Delta\beta \geq 0$ auftreten, also an den bekannten Hopf-Punkten bei β_1^* und β_2^* . Auch hier ist jedoch eine rückwärtige Verzweigung an beiden Punkten zu beobachten. Die Übergänge sind deshalb beide unterkritisch. Es zeigt sich jedoch zusätzlich, daß das Anwachsen der neutralstabilen Amplitude \hat{A}_N für fallende Werte β ausgehend von β_1^* und β_2^* unterschiedlich stark geschieht, indem \hat{A}_N für $x_1 < 0$ relativ klein bleibt, für $x_1 > 0$ jedoch ein Wendepunkt zu deutlich größeren \hat{A}_N führt. Außerdem besitzen die von β_2^* ausgehenden Kurven bei $\beta = \beta_2^*$ eine Singularität in der Steigung. Demgemäß kann gefolgert werden, daß die stationäre Lösung mit negativer Strömungsrichtung ($x_1 < 0$) im Bereich $\beta < \beta_1^*$ schon bei relativ kleinen Störungsamplituden \hat{A} instabil werden kann im Gegensatz zur stationären Lösung mit positiver Strömungsrichtung ($x_1 > 0$), für welche deutlich größere kritische Amplituden \hat{A}_N berechnet werden. Es liegt die Vermutung nahe, daß der unterkritische Bereich im Falle $x_1 > 0$ auf das Intervall $\beta_1^* < \beta < \beta_2^*$ beschränkt ist. Der Einfluß des Stoffparameters α auf den Verlauf der Kurven \hat{A}_N ist ähnlich wie im Fall mit $\delta = 0$. Für wachsende Werte α ergeben sich größere Neutralamplituden. Daneben findet man eine Verschiebung der Hopf-Punkte β_1^* , β_2^* zu kleineren Werten bei β_1^* bzw. zu größeren Werten für β_2^* . Letzteres kann bereits aus der linearisierten Störungsrechnung entnommen werden.

Mit den gefundenen Neutralamplituden \hat{A}_N in der Umgebung von β^* ist es somit möglich, die zulässigen Störungsamplituden \hat{A} abzuschätzen, welche im Falle $\hat{A} < \hat{A}_N$ stets ein Zurückschwingen auf die gestörte stationäre Lösung zur Folge haben. Für $\hat{A} = \hat{A}_N$ kann gerade der Grenzfall einer periodischen Schwingung erwartet werden, alle größeren Amplituden mit $\hat{A} > \hat{A}_N$ führen jedoch im Rahmen der hier durchgeführten Betrachtungen auf $\frac{d\hat{A}^2}{d\tau} > 0$, d.h. auf ein unbegrenztes Anwachsen der Störungen. Der Grenzfall $|\hat{A}_N| \rightarrow 0$ zeigt im übrigen in konsistenter Weise die Stabilitätsgrenze, welche im Falle beliebig kleiner Störungen ermittelt wurde (vgl. Abschn. 3.2).

Zu weitergehenden Aussagen über die Stabilitätsstruktur des Systems gelangt man mit Resultaten aus einer Arbeit von E. Hopf aus dem Jahre 1942 [13]. Hierin wird in einem Satz klar dargelegt, welcher Zusammenhang zwischen den charakteristischen Exponenten der stationären und der abzweigenden periodischen Lösungen besteht. Nach Hopf kann aus dem Sachverhalt einer rückwärtig abzweigenden periodischen Lösung sofort auf deren Instabilität geschlossen

werden. Es gibt aus diesem Grunde im jeweiligen unterkritischen Bereich für das Systemverhalten nur die Alternative zwischen lokal stabilem stationärem Verhalten im Falle genügend kleiner Störungen und regellos zeitabhängigem Verhalten bei Überschreiten der kritischen Störungsamplitude \hat{A}_N . Die stationäre Lösung ist folglich im unterkritischen Bereich als bedingt stabil einzustufen, für große Störampplituden tritt transient chaotisches Zeitverhalten auf.

3.4 Periodische Lösungen als Rand-/Eigenwertproblem

Mit der schwach nichtlinearen Störungsrechnung (vgl. Abschn. 3.3) sind Aussagen zum Verhalten bei endlicher Störungsamplitude nur bei Einhaltung der gemachten Voraussetzungen $|\delta x_{n1}|$, ΔB , $\delta \ll 1$ und $\alpha \gg 1$ zulässig. Dies impliziert, daß sie sicherlich nur in unmittelbarer Umgebung des Hopf-Punktes für $B \cong B^*$ eine brauchbare Näherung liefert.

Die anschließenden Betrachtungen sollen nun, ausgehend vom nichtlinearen Gleichungssatz (2.11a) mit einem numerischen Verfahren zur vollständigen Kenntnis der periodischen Lösungen führen. Damit kann dann der komplette Parameterbereich in B abgedeckt werden, insbesondere auch die Bereiche, welche bisher mit den Mitteln der analytischen Störungsrechnung nicht erfaßbar waren.

Für die weiteren Überlegungen wird die Existenz von mindestens einer periodischen Lösung im unterkritischen Bereich unterstellt. Hierbei ist zunächst unwichtig, ob diese Lösung sich später als stabil oder instabil erweisen wird. In jedem Falle muß eine Lösung von Gl. (2.11a) existieren, für welche die periodische Randbedingung

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}(\tau + T) \quad (3.26)$$

erfüllt ist.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, die Zeit mit der zunächst unbekanntem Periodendauer zu normieren, d.h. $t = \tau / T$, wodurch das System (2.11a) in der Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= T \alpha \{ x_2 - x_1 \}, \\ \dot{x}_2 &= T \{ \beta x_1 - x_1 x_3 - x_2 + \beta \tan \delta \}, \\ \dot{x}_3 &= T \{ x_1 x_2 - x_3 \}, \\ (\dot{x}_i &= \frac{d}{dt} x_i) ;\end{aligned}\tag{2.11b}$$

oder kurz

$$\dot{\underline{x}} = \mathbb{A}(\alpha, \beta, T, \underline{x}) \cdot \underline{x} + \underline{c}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \beta \tan \delta \\ 0 \end{bmatrix},$$

geschrieben werden kann.

Die Periodizitätsbedingung lautet deshalb allgemein

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(t+1),\tag{3.27}$$

oder speziell für $t = 0$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}(1).\tag{3.27a}$$

Es kann deshalb das Auffinden der periodischen Lösungen als nichtlineares Rand-/Eigenwertproblem aufgefaßt werden. Dieses ist gegeben durch das Differentialgleichungssystem (2.11b) und durch die Randbedingung (3.27a). Die Nichtlinearität des Systems (2.11b) steckt im übrigen in der Abhängigkeit $\mathbb{A} = f(\underline{x})$. Eine Lösung des Problems ist auf analytischem Wege nicht möglich. Daher empfiehlt es sich, ein numerisches Verfahren anzuwenden. Hier wird ein "multiple shooting"-Verfahren auf der Basis eines Runge-Kutta Verfahrens 4. Ordnung verwendet (vgl. z. B. [18]).

Im vorliegenden Fall werden die Parameter α , β und δ festgehalten, während die Periodendauer T als freier Parameter vom numerischen Verfahren bis zur Lösung variiert wird. Aufgrund eines freien Parameters im Shooting-Verfahren müssen jetzt $(n + 1)$ Randbedingungen gestellt werden, um das Problem eindeutig zu formulieren. Hierbei stellt n die Anzahl der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in Gl. (2.11b) dar und damit auch den Rang der Matrix \mathbb{A} und die Dimension des Vektors \underline{x} . Mit der Randbedingung (3.27a) sind deshalb in Vektorform bereits n Randbedingungen formuliert. Eine weitere Bedingung erhält man beispielsweise indem man setzt

$$x_1(0) = a_0 = \text{konst.} \quad (3.28)$$

Diese Anfangsbedingung muß naturgemäß so gewählt werden, daß die Größe $x_1(t)$ während einer Periode auch tatsächlich den Wert a_0 annimmt. Es muß daher gelten

$$x_{1\min} < a_0 < x_{1\max} \quad (3.29)$$

Das Rand-/Eigenwertproblem ist im übrigen für eine stationäre Lösung stets erfüllbar, weil für beliebige Werte von T auch die Randbedingung (3.27a) erfüllt ist. Aus diesen Gründen muß die $(n+1)$ te Bedingung zusätzlich so gewählt werden, daß sie nicht mit einer der stationären Lösungen identisch ist, d.h.

$$x_1(0) = a_0 \neq x_{1st} \quad (3.30)$$

In Abb. 3-5 ist das Integrationsgebiet mit den dazugehörigen Randbedingungen veranschaulicht.

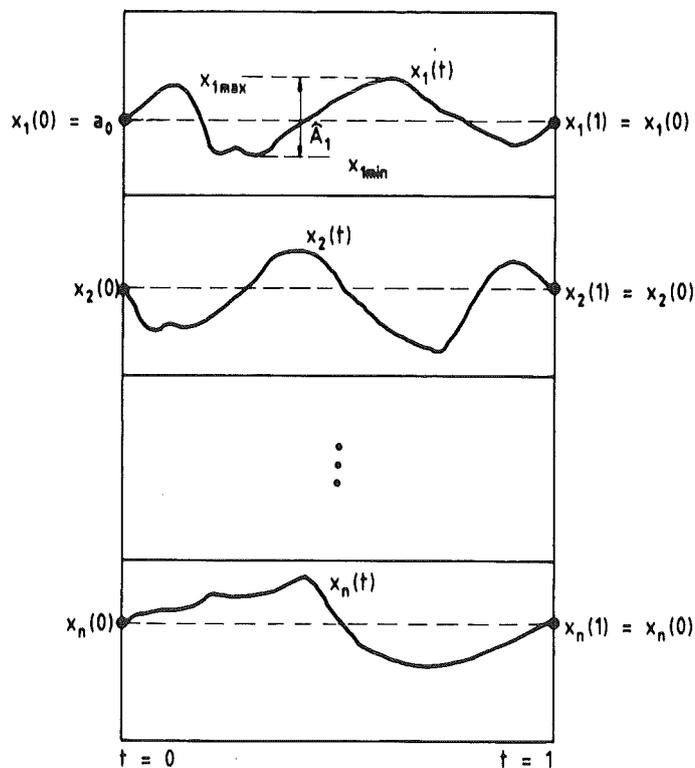


Abb. 3-5: Randbedingungen für das Rand-/Eigenwertproblem

Existiert mindestens eine periodische Lösung für den gewählten festen Parametersatz α , β und δ , und wird zusätzlich die Anbindung a_0 z.B. der Funktion $x_1(t)$ richtig gewählt (gemäß Gln. 3.29, 3.30), so müssen auch Lösungen für das dazugehörige Rand-/Eigenwertproblem existieren. Der freie Parameter T entspricht dann gerade der Periodendauer oder einem ganzzahligen Vielfachen.

Numerisch erweist sich dieses Problem als lösbar, womit für die weiteren Betrachtungen die periodischen Lösungen $\tilde{x}_p(t)$ als bekannt vorausgesetzt werden können. Die prinzipielle Vorgehensweise beim numerischen Verfahren findet sich in Form eines Flußdiagramms in Abb. 3-5a.

3.5 Stabilität der periodischen Lösungen (Floquet-Theorie)

Zur Untersuchung der Stabilität der periodischen Lösungen kann prinzipiell wieder eine linearisierte Theorie herangezogen werden, wenn man unterstellt, daß das Verhalten kleiner Störungen um die Lösung Aufschluß über deren Stabilität gibt (vgl. Joseph [16]).

Es wird deshalb ein Störungsansatz der Form

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_p(t) + \delta \tilde{x}(t) \quad (3.31)$$

gewählt, mit $|\delta \tilde{x}| \ll 1$.

Entsprechend wird es möglich, den Ansatz (3.31) in das Differentialgleichungssystem (2.11b) einzuführen und das folgende linearisierte Stördifferentialgleichungssystem herzuleiten:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= T \alpha \{ \delta x_2 - \delta x_1 \} , \\ \delta \dot{x}_2 &= T \{ (\beta - x_{3p}) \delta x_1 - x_{1p} \delta x_3 - \delta x_2 \} , \\ \delta \dot{x}_3 &= T \{ x_{2p} \delta x_1 + x_{1p} \delta x_2 - \delta x_3 \} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

In Gl. (3.32) treten als Koeffizienten die zeitabhängigen periodischen Funktionen $x_{ip}(t)$ auf, so daß das lineare System in Vektorschreibweise als

$$\delta \dot{\tilde{x}} = B \{ \alpha, \beta, T, \tilde{x}_p(t) \} \cdot \delta \tilde{x} \quad (3.32a)$$

geschrieben werden kann.

$B(t)$ stellt eine periodische Koeffizientenmatrix ($n \times n$) dar, für welche ebenfalls die Periodizitätsbedingung

$$B(t) = B(t+1) \quad (3.33)$$

gilt.

Die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichung (vgl. Joseph [16]) liefert wegen der Existenz von n linear unabhängigen Lösungsvektoren \underline{y}_i des Systems eine Fundamentalmatrix \mathbb{F} ($n \times n$), in deren Spalten die Vektoren \underline{y}_i stehen. Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch eine Linearkombination der n linear unabhängigen Lösungsvektoren. Für diese Fundamentalmatrix kann deshalb die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbb{F}}(t) = B(t) \cdot \mathbb{F}(t) \quad (3.34)$$

angegeben werden.

Wegen Gl. (3.33) kann gefolgert werden, daß

$$\mathbb{F}(t+1) = B(t+1) \cdot \mathbb{F}(t+1) = B(t) \cdot \mathbb{F}(t+1) \quad (3.35)$$

gilt. Das bedeutet, daß auch $\mathbb{F}(t+1)$ eine Fundamentalmatrix darstellen muß. Dies wiederum ist nur möglich wenn gilt

$$\mathbb{F}(t+1) = \mathbb{F}(t) \cdot \mathbb{C}(1), \quad (3.36)$$

wobei $\mathbb{C}(1)$ eine Konstanten-Matrix sein muß. Sie wird als Monodromie-Matrix bezeichnet und ihre Eigenwerte λ_i als Floquet-Multiplikatoren.

Wie aus Gl. (3.36) ersichtlich, kontrollieren die Eigenwerte λ_i von $\mathbb{C}(1)$ die Entwicklung der Fundamentalmatrix \mathbb{F} in der Zeit und geben somit Aufschluß über die Stabilität.

Für

$$|\lambda_i| < 1, \quad (3.37)$$

d.h. wenn alle Floquet-Multiplikatoren im Einheitskreis der komplexen Zahlenebene liegen, verschwindet die Fundamentalmatrix nach j Perioden, d.h. $t = t + j$, für $j \rightarrow \infty$. Wegen Gl. (3.36) kommt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|F(t+j)\| = \|F(t)\| \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{C}^j(1) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.38)$$

Das Verschwinden der Fundamentalmatrix für $t \rightarrow \infty$ bedeutet gleichzeitig, daß die Lösungen $\dot{x}(t)$ des Systems (3.32) gedämpft werden. Die Störungen um die periodische Lösung $x_p(t)$ klingen ab. Die periodische Lösung kann deshalb als lokal stabil bezeichnet werden.

Die Bestimmung der Monodromie-Matrix $\mathbb{C}(1)$ kann als Anfangswertproblem aufgefaßt werden. Man wählt hierzu eine spezielle Fundamentalmatrix $\mathbb{F}_0(t)$ mit der Anfangsbedingung

$$\mathbb{F}_0(t=0) = \mathbb{E} \quad . \quad (3.39)$$

Hierin ist \mathbb{E} die diagonal besetzte Einheitsmatrix. Wegen Gl. (3.36) folgt

$$\mathbb{F}_0(t+1) = \mathbb{F}_0(t) \cdot \mathbb{C}(1) \quad , \quad (3.36a)$$

bzw. für $t = 0$ mit Gl. (3.39)

$$\mathbb{F}_0(1) = \mathbb{C}(1) \quad . \quad (3.40)$$

Somit ist das Anfangswertproblem integrierbar, wenn die Matrix $\mathbb{B}(t)$ bekannt ist. Im vorliegenden Fall sind die Funktionen $x_p(t)$ wegen des nicht-linearen Charakters der Grundgleichung (2.11a) nicht analytisch anzugeben. Deshalb wird zur Integration des Problems

$$\dot{\mathbb{F}}_0 = \mathbb{B} \cdot \mathbb{F}_0 \quad , \quad \text{mit der Anfangsbedingung } \mathbb{F}_0(0) = \mathbb{E} \quad , \quad (3.34a)$$

ein numerisches Verfahren (Runge-Kutta, 4. Ordnung) gewählt. Die Integration erfolgt in den Grenzen $0 \leq t \leq 1$, sodaß als Ergebnis die Monodromie-Matrix, gegeben durch $\mathbb{C}(1) = \mathbb{F}_0(1)$ erhalten wird.

Im weiteren bleibt nur noch die Bestimmung der Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathbb{C}(1)$ vorzunehmen, um hieraus eine Aussage zur lokalen Stabilität der dazugehörigen periodischen Lösung zu treffen.

Der Konstellation der Floquet-Multiplikatoren können im übrigen nach Holodniok & Kubicek [14] noch weitere Details über das Verhalten der Lösungen an

speziellen Punkten entnommen werden. So lassen sich insbesondere Verzweigungspunkte eindeutig einer charakteristischen Konstellation zuordnen. Auf eine ausführliche Darstellung bei Holodniok & Kubicek sowie eine Darlegung der hier auftretenden Fälle in Abs. 2.7.3 sei verwiesen.

Zur Berechnung und Verfolgung der periodischen Lösungsäste ist ein Programm entwickelt worden. Es ermittelt in seinem Kern die periodischen Lösungen durch Lösen des Rand-/Eigenwertproblems. Darüber hinaus werden ebenfalls die Monodromiematrix und die Floquetmultiplikatoren durch Lösen des Anfangswertproblems berechnet. In Abb. 3-5 ist die Programmstruktur dargestellt, mit welcher die in Abschnitt 3.4 und 3.5 aufgestellten Gleichungen ausgewertet werden.

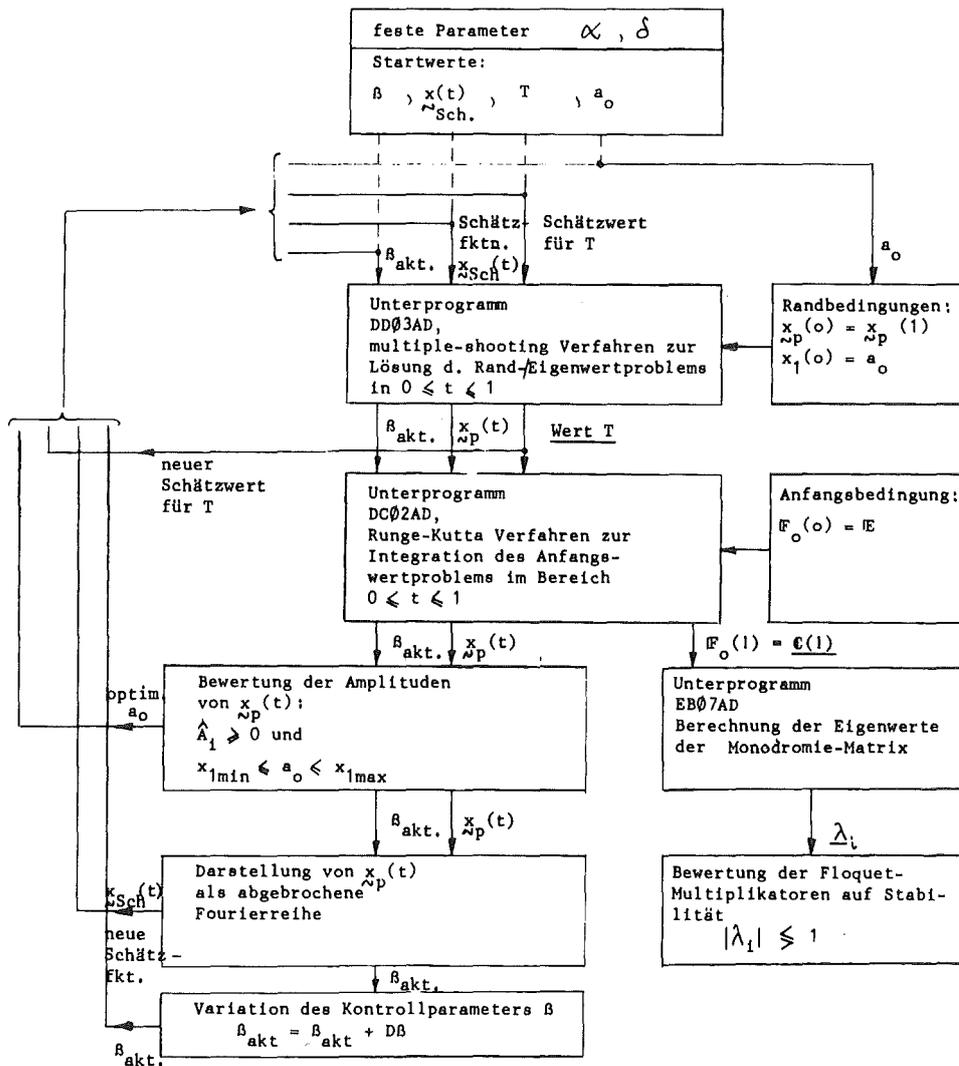


Abb. 3-5a: Programmstruktur zur Lösung, Stabilitätsbewertung und Verfolgung der periodischen Lösungsäste.

Die erhaltenen periodischen Lösungen werden dann unter Variation des Parameters β weiterverfolgt. Im folgenden Abschnitt 3.6 sind exemplarisch Amplituden des dimensionslosen Volumenstroms $x_{1\min}$, $x_{1\max}$ als wichtige Kenngrößen der periodischen Lösungen über der Beheizung β aufgetragen und diskutiert.

3.6 Das vollständige, nichtlineare Verzweigungsdiagramm

Zunächst wird der Fall einer symmetrischen Beheizung, d.h. $\delta = 0^\circ$, betrachtet.

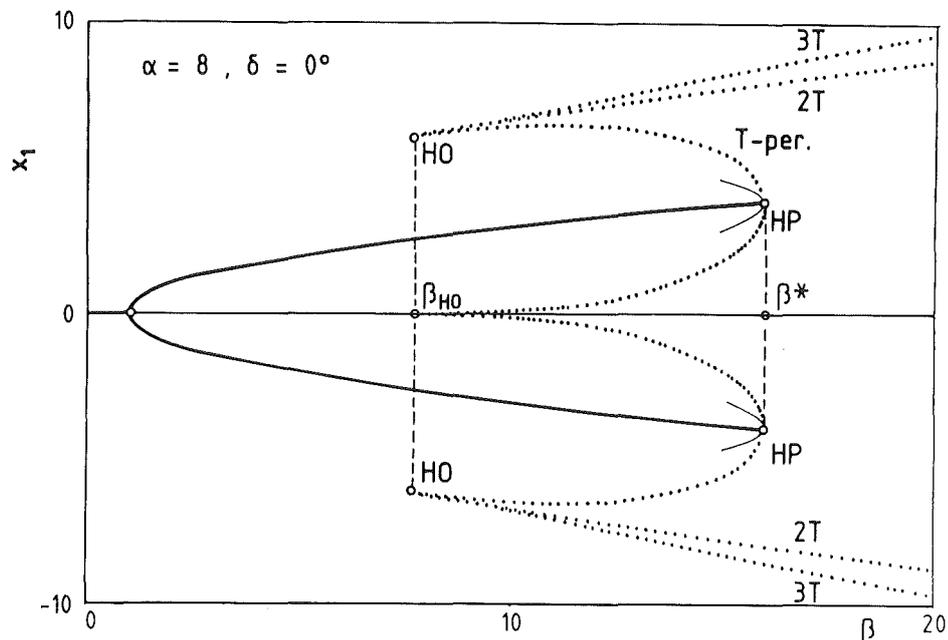


Abb. 3-6: Stabile stationäre Lösungen sowie Amplitude der periodischen Lösungen für den Volumenstrom x_1 als Funktion der Beheizung β .

Es wird deutlich, daß ausgehend von der Stabilitätsgrenze der stationären Lösung, dem Hopf-Punkt HP, rückwärtig eine T-periodische Lösung abzweigt. Ihre Amplitude, in Abb. 3-6 gegeben durch Minimal- und Maximalwerte, nimmt mit wachsendem Abstand vom HP zu. Bei $\beta = \beta_{HO}$ wird die Amplitude der periodischen Lösung so groß, daß die Strömungsgeschwindigkeit zeitweise verschwindet. Dies bedeutet, daß die periodische Lösung die lokal instabile stationäre Lösung $x_{st} = 0$ tangiert und in diese übergeht.

Der Übergang einer periodischen Lösung der endlichen Periodendauer T in eine stationäre Lösung ist mathematisch gesehen nur möglich, wenn T singular wird. Hier bedeutet dies, daß T unbeschränkt zunimmt. Diese Konfiguration wird als Homoklines Orbit HO bezeichnet und kann im dreidimensionalen Zustandsraum,

aufgespannt durch die Größen x_1 , x_2 und x_3 , als ein Grenzfall interpretiert werden, in welchem die geschlossene Raumkurve der periodischen Lösung den stationären Lösungspunkt trifft und dort verharret. Das Fortschreiten auf der Raumkurve mit der Zeit ist unterbunden, weil definitionsgemäß die zeitliche Änderung der Größen, gegeben durch $\dot{\underline{x}} = 0$, verschwindet. Die Rückkehr zum Ausgangspunkt auf der Raumkurve erfolgt erst nach beliebig langer Zeit.

Die numerischen Rechnungen zeigen in der Tat das grenzenlose Ansteigen der Periodendauer T bei Annäherung an das Homokline Orbit. Zur Kontrolle des numerischen Verfahrens wird darüber hinaus die Periodendauer T der monoperiodischen Lösung als Grenzübergang für $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^*$ ermittelt und den Eigenwerten des linearisierten Modells genau am HP (vgl. Abschn. 3.2) gegenübergestellt. Hierbei kann gezeigt werden, daß die Resultate in der Tat konvergieren, d.h. am Hopf Punkt liefern sowohl die linearisierte Störungsrechnung, als auch die vollständige nichtlineare Rechnung identische Resultate für die Periodendauer.

Als Besonderheit findet man im Punkt des Homoklinen Orbit für den symmetrischen Fall mit $\delta = 0$ eine Paarung von zwei monoperiodischen Schwingungen. Diese sind gegeben durch die Schwingung um die positive sowie die spiegelsymmetrische negative stationäre Lösung. Die Vereinigung der beiden Orbits stellt letztlich die Ursache für die Existenz weiterer subharmonischer Lösungen dar, die am Punkt des HO von der T-periodischen Lösung abzweigen. Diese können demgemäß als Folgen von Durchläufen auf wahlweise einem der beiden Orbits aufgefaßt werden. Aus diesem Grund erstreckt sich ihre Amplitude über beide Halbebenen, d.h. im HO ist sie genau doppelt so groß wie die Amplitude der monoperiodischen Schwingung. In der mathematischen Literatur hat sich für diese spezielle Konstellation der Begriff "homokliner Verzweigungspunkt" eingebürgert.

Die monoperiodischen Lösungen existieren aus den genannten Gründen nur im Bereich $\mathbb{B}_{HO} \leq \mathbb{B} \leq \mathbb{B}^*$, d.h. im unterkritischen Bereich zwischen Homoklinem Orbit (HO) und Hopf-Punkt (HP). Aus der Tatsache einer rückwärtigen Verzweigung kann nach Hopf [13], wie bereits in Abschn. 3.3 aufgezeigt, auf ihr instabiles Verhalten geschlossen werden. Die Floquet-Multiplikatoren erweisen sich dementsprechend als reell, für den Betrag gilt stets $|\hat{\lambda}_1| \geq 1$.

Die weiteren Untersuchungen haben gezeigt, daß alle subharmonischen Lösungen vom HO ausgehen und daß ihre jeweilige Periodendauer im HO gleichfalls eine

Polstelle aufweist. Sie existieren folglich nur für Werte R im Bereich $R \geq R_{HO}$. Die Anfachungsraten der nT -periodischen Lösungen signalisieren im betrachteten R -Bereich durchweg instabiles Verhalten.

Zum Vergleich sind in Abb. 3-6 zusätzlich die analytisch gewonnen Amplitudenkurven gemäß Gl. (3.25a) als dünne durchgezogene Linien in der Umgebung des HP eingezeichnet. Die Abweichungen sind dadurch zu erklären, daß die Gültigkeit der Amplitudengleichung aufgrund der getroffenen Voraussetzungen auf die unmittelbare Umgebung des HP beschränkt ist.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß numerische Ergebnisse zum symmetrischen Fall (Lorenz-System) in Teilen bereits von Holodniok & Kubicek [14] im Jahre 1984 veröffentlicht wurden. Die hier vorgestellte Rechnung befindet sich bei diesen Teilen in Übereinstimmung mit den Ergebnissen dieser Autoren. Dies stellt eine schöne Bestätigung des benutzten numerischen Verfahrens dar. Das Hauptaugenmerk der Arbeit dieser Autoren liegt jedoch in einer Verfolgung der periodischen Lösungen für sehr große R , weil dort wiederum stabile Bereiche erwartet werden. Dieser Bereich erweist sich jedoch für das hier betrachtete physikalische Problem als irrelevant.

Im folgenden wird jetzt der allgemeine Fall einer unsymmetrischen Beheizung (z.B. $\delta = 10^\circ$) diskutiert. Hierzu sind in gleicher Auftragsung die Amplituden der Lösungen in Abb. 3-7 als Funktion der Beheizung R dargestellt.

Von der Stabilitätsgrenze (HP) der negativen stationären Lösung bei $R = R_1^*$ zweigt genau eine T -periodische Lösung rückwärtig ab. Für fallende Werte R nimmt die Amplitude zu, bis schließlich durch das Zusammentreffen dieses Lösungszweiges mit der stationären, instabilen Lösung ein Homoklines Orbit (HO) geformt wird bei $R = R_{HO}$. Demgemäß findet sich für die Periodendauer T eine Polstelle beim HO. Im Gegensatz zum symmetrischen Beheizungsfall (vgl. Abb. 3-7) treffen hier im Homoklinen Orbit nicht zwei periodische Lösungen zusammen. Aus diesem Grunde führt ein Überschwingen der periodischen Lösung in die positive Halbebene nicht zu subharmonischen Lösungen. Die Transienten enden auf dem lokal stabilen stationären Lösungsast mit $x_1 > 0$.

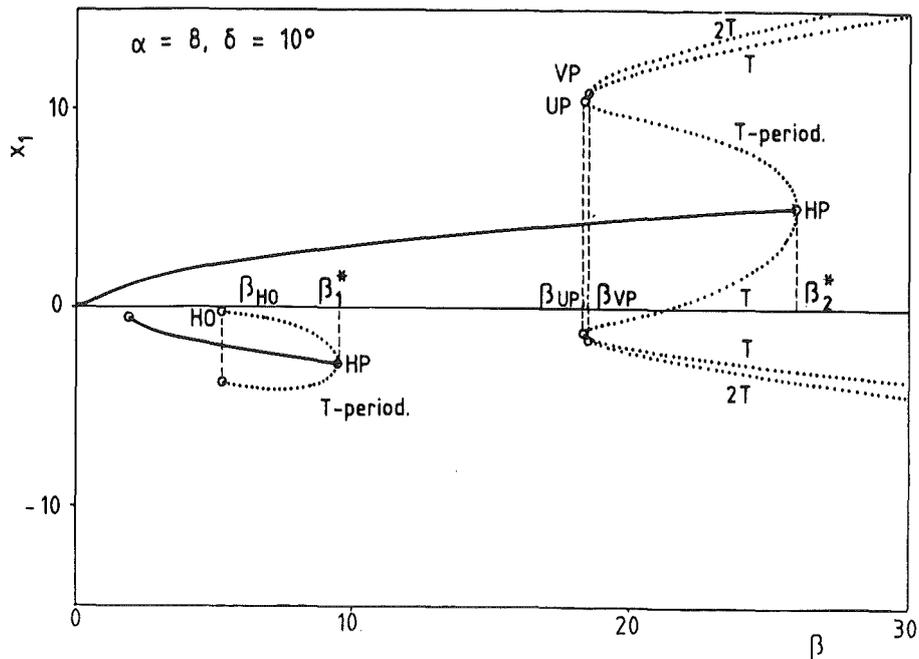


Abb. 3-7: Stabile stationäre Lösungen sowie Amplitude der periodischen Lösungen für den Volumenstrom x_1 als Funktion der Beheizung β .

Eine rückwärtige Abzweigung der instabilen T-periodischen Lösung findet sich in gleicher Weise am Hopf-Punkt in der positiven Halbebene bei $\beta = \beta_2^*$. Es kommt jedoch nach Anwachsen der Amplitude für fallende Werte β zu einer Umkehr der Lösungskurve am Punkt UP mit $\beta = \beta_{UP}$. Dort variiert neben den Amplituden auch die Periodendauer T stetig. Schließlich tritt auf dem vorwärtsgerichteten Ast der T-periodischen Lösung ein weiterer Verzweigungspunkt VP auf, von welchem wiederum eine Schar subharmonischer Lösungen abzweigt. Es sind dies nT -periodische Lösungen mit $n \gg 2$.

Es existieren somit für beide stationäre Konvektionslösungen verschiedene unterkritische Bereiche. Im Falle des negativen Astes ist der unterkritische Bereich begrenzt durch das Homokline Orbit HO und den Hopf-Punkt HP. Er liegt folglich bei Werten $5.25 \leq \beta \leq 9.43$. Beim positiven Lösungsast wird er eingeschlossen durch den linken Umkehrpunkt UP sowie den Hopfpunkt HP und liegt im Bereich $18.20 \leq \beta \leq 25.93$. Für Werte $\beta > \beta_2^*$ existieren nur die instabilen nT -Lösungen ($n \geq 1$) sowie die instabilen stationären Äste. Das Stabilitätsverhalten in diesem Bereich ist deshalb als global instabil einzustufen und das Zeitverhalten wird chaotisch sein.

Im folgenden wird der führende Floquet-Multiplikator bei Veränderung des Parameters β diskutiert. Hierzu ist λ_1 als Funktion der Beheizung β in Abb. 3-8 dargestellt.

3.7 Zusammenfassung

Wir wollen zunächst die analytischen Ergebnisse für den symmetrischen Beheizungszustand $\delta = 0$ zusammenfassen. Das Fluid im Kreislauf bleibt in diesem Fall bei Erhöhung der Beheizung \mathcal{R} zunächst in Ruhe, bis bei $\mathcal{R} = 1$ die Ruhelösung mit einer stationären Vorwärtsverzweigung ihre Stabilität verliert. Für $\mathcal{R} > 1$ existieren dann zwei bedingt stabile stationäre Lösungen, welche einer rechts- oder linksdrehenden Strömung im Kreislauf entsprechen. An ihrer Stabilitätsgrenze bei $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ werden beide Lösungen instabil gegen oszillatorische Störungen. Eine genauere Analyse zeigt, daß eine unterkritische Hopf-Verzweigung vorliegt.

Dementsprechend müssen für das Systemverhalten vier verschiedene Bereiche unterschieden werden. Für steigende Werte der Beheizung sind dies der global stabile Ruhebereich, der Konvektionsbereich, der unterkritische Konvektionsbereich und der überkritische Bereich. Im Konvektionsbereich ist unabhängig von der Störungsamplitude eine stationäre stabile Strömung in positiver oder negativer φ -Richtung zu erwarten. Im unterkritischen Bereich ist im Falle kleiner Störungen ebenfalls eine stationäre stabile Strömung die Folge. Ist die Störungsamplitude jedoch größer als die Amplitude der instabilen T-periodischen Lösung in der Nachbarschaft, so wird instabiles Verhalten möglich. Wir erwarten deshalb ein transient chaotisches Zeitverhalten der Zustandsgrößen. Im überkritischen Bereich wird für die Konvektionsströmung chaotisches Zeitverhalten erwartet, weil ausschließlich instabile Lösungen vorhanden sind.

Im folgenden soll der Einfluß einer nicht-symmetrischen Anordnung der Wärmequellen und -senken aufgezeigt werden. Bei $\mathcal{R} \cong 1$ findet sich eine nicht perfekte Verzweigung von der stationären Ruhelösung zur stationären Konvektionsströmung. Dabei bleibt einer der Lösungsäste stetig erreichbar, der andere Lösungsast hingegen liegt isoliert. Die Stabilitätsgrenzen beider Lösungsäste liegen in diesem Fall bei unterschiedlichen Werten der Beheizung, die rückwärtigen Hopf-Verzweigungen bleiben jedoch erhalten. Deshalb existiert auch in diesem Fall für beide Konvektionslösungen die Möglichkeit zu einer unterkritischen Instabilität der Strömung. Es kommt zudem zu einer deutlichen Stabilisierung des stetig erreichbaren Lösungsastes.

Zusammenfassend ist deshalb zu erwarten, daß die isolierte Lösung im unterkritischen Bereich bei größeren Störungsamplituden ihre Stabilität verliert. Es ist dann der Übergang zur anderen Lösung, verbunden mit einer einmaligen Strömungsumkehr, zu erwarten. Für die stetig erreichbare Lösung ist im unterkritischen Bereich das Überschreiten einer Grenzamplitude von transient chaotischem Zeitverhalten begleitet. Insbesondere in der Umgebung des Umkehrpunktes dieses Lösungszastes sind in einem engen Parameterbereich auch stabil periodische Strömungszillationen möglich. Der überkritische Bereich ist als global instabil zu charakterisieren, die Zustandsgrößen zeigen dort chaotisches Zeitverhalten.

4.0 Modifikationen des Grundmodells

4.1 Auswirkung der nichtlinearen Wärmeübergangsbeziehung

Bisher wurde im Grundmodell durch $K_{n1} = 0$ ein konstanter Wärmeübergangskoeffizient $H \neq f(x_1)$ vorausgesetzt. Tatsächlich jedoch hängt der Wärmeübergang Fluid/Wand auch im laminaren Bereich von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und damit von x_1 ab. Dieser Tatsache trägt das in Abschnitt 2.4 eingeführte Modellgesetz

$$H(x_1) = H_0 \left\{ 1 + K_{nt} |x_1|^{1/3} \right\} \quad (2.9)$$

Rechnung.

Aus der Literatur zum Wärmeübergang in laminar durchströmten Kreisrohren bei isothermen Wänden (vgl. z.B. Schlünder [27]) kann für die Nusselt-Zahl Nu_d die Beziehung

$$Nu_d \cong \left\{ 3.66^3 + 1.62^3 Gz \right\}^{1/3} \quad (4.1)$$

entnommen werden, wobei die Nusselt-Zahl Nu_d und die Graetz-Zahl Gz durch die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} Nu_d &= \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{d}{l} \right)^2 \cdot H(x_1), \\ Gz &= \frac{H_0}{2\pi\lambda} \left(\frac{d}{l} \right)^2 x_1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit den in dieser Arbeit verwendeten Größen verknüpft sind. Aus den Grenzwerten der Funktion in Gl. (4.1), nämlich

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow 0: & \quad H(x_1) = H_0 = \text{konst.}, \\ x_1 \rightarrow \infty: & \quad H(x_1) \cong \sqrt[3]{\frac{1}{5}} H_0 |x_1|^{1/3}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

kann unmittelbar $K_{n1} \cong \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ identifiziert werden. Somit steht ein Wert für den Parameter K_{n1} zur Verfügung, welcher auf der Basis von Experimenten gewonnen ist.

Der Einfachheit halber sei die Auswirkung eines solcher Art verbesserten Wärmeübergangs für einen symmetrischen Beheizungszustand ($\delta = 0$) diskutiert. Aus Gl. (2.11) können wir die relevanten Differentialgleichungen ableiten und erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha (x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 - x_1 x_3 - x_2 \left\{ 1 + K_{ne} |x_1|^{1/3} \right\}, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - x_3 \left\{ 1 + K_{ne} |x_1|^{1/3} \right\}; \end{aligned} \quad (2.11b) \quad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{d\tau} \right).$$

Für die stationären Lösungen kann demgemäß eine nichtlineare Betragsgleichung angegeben werden in der Form

$$|x_0|^3 + K_{ne}^2 |x_0|^{5/3} + (2-\beta) K_{ne} |x_0|^{4/3} + (1-\beta) |x_0| = 0, \quad (4.4)$$

mit

$$|x_0| = |x_{1st}|, \quad x_{1st} = x_{2st}, \quad x_{3st} = \frac{x_0^2}{\left\{ 1 + K_{ne} |x_0|^{1/3} \right\}}.$$

Eine analytische Lösung der Gl. (4.4) ist nicht möglich, deshalb wird ein numerisches Verfahren zur Lösung eingesetzt. Die folgende Abbildung 4-1 zeigt die drei Lösungen für die stationäre Strömungsgeschwindigkeit x_{1st} . Zum Vergleich sind die Lösungen für $K_{nl} = 0$ (vgl. Abschn. 3.1) eingetragen.

Der Einsatz der Konvektionsströmung bei $B = 1$ geschieht in ähnlicher Form mit einer stationären Vorwärtsverzweigung. Der verbesserte Wärmeübergang hat dann jedoch für steigende Werte der Beheizung B deutlich höhere Strömungsgeschwindigkeiten x_{1st} zur Folge.

In analoger Weise wird nun ein Störungsansatz mit einer Linearisierung nachgeschaltet, um die Stabilität der gefundenen stationären Lösungen zu prüfen. Man erhält in der Umgebung von \underline{x}_{st} das Stördifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= \alpha (\delta x_2 - \delta x_1), \\ \delta \dot{x}_2 &= \left\{ \beta - \frac{x_0^2}{(1 + K_{ne} |x_0|^{1/3})} - \frac{1}{3} K_{ne} |x_0|^{1/3} \right\} \delta x_1 \\ &\quad - \left\{ 1 + K_{ne} |x_0|^{1/3} \right\} \delta x_2 - x_0 \delta x_3, \\ \delta \dot{x}_3 &= \left\{ x_0 - \frac{1}{3} K_{ne} \frac{x_0 |x_0|^{1/3}}{(1 + K_{ne} |x_0|^{1/3})} \right\} \delta x_1 \\ &\quad + x_0 \delta x_2 - \left\{ 1 + K_{ne} |x_0|^{1/3} \right\} \delta x_3, \end{aligned} \quad (4.5)$$

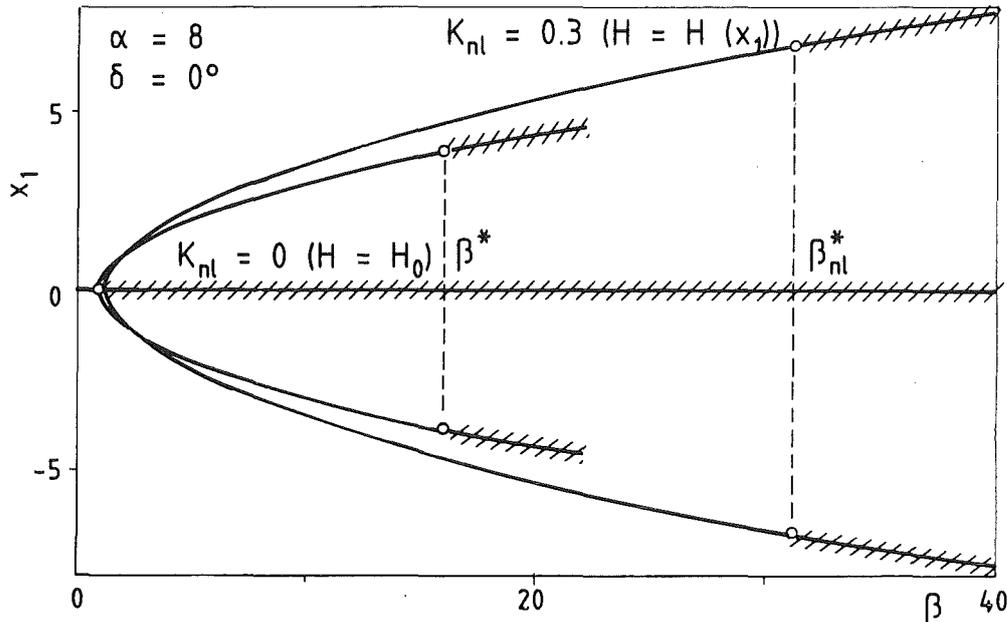


Abb. 4-1: Die drei stationären Lösungen für die dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit x_1 als Funktion der Beheizung B . Die Stabilitätsgrenzen der Lösungen sind mit Kreisen gekennzeichnet und die instabilen Teile schraffiert.

und kann aufgrund der Eigenwerte des Systems Aussagen zur Stabilität treffen. Die Ergebnisse sind für $\alpha = 8$ bereits in Abb. 4-1 eingetragen. Sie können auch in einem Stabilitätsdiagramm in der α - B -Ebene (vgl. Abb. 4-2) dargestellt werden, um den Einfluß des Stoffparameters α zu verdeutlichen.

Als erstes kann festgestellt werden, daß eine Verbesserung des Wärmeübergangs Fluid/Wand, welche durch den Ansatz $H = H(x_1)$ gemäß Gl. (2.9) zum Ausdruck kommt, zu einer deutlichen Stabilisierung beider stationärer Lösungen führt. Das oszillatorisch aufklingende Verhalten der Störgrößen ist somit erst bei höheren Werten der Beheizung $B_{nl}^* > B^*$ zu beobachten. An der Stabilität der Ruhelösung $x_{St} = 0$ ändert sich nichts. Im Stabilitätsdiagramm (vgl. Abb. 4-2) liegt deshalb die Kurve der Neutralstabilität im gesamten α -Bereich oberhalb der entsprechenden bei konstant modellierten Wärmeübergang (vgl. Abschn. 3.2). Weiterhin zeigt sich, daß die Lage der Asymptoten, und damit der Bereich asymptotisch gedämpfter Störungen, bei höheren α -Werten liegt.

Das gefundene Resultat kann physikalisch nur so interpretiert werden, daß die Intensivierung des Wärmeaustausches mit wachsendem x_1 eine stärkere Dämpfung von Temperaturstörungen zur Folge hat. Demgemäß wird der Bereich, in

welchem keine Rückkopplung der Temperaturstörungen auftritt, bis zu $\alpha < 4.5$ hin vergrößert. Aus dem gleichen Grund jedoch wird auch der Zustand der Neutralstabilität erst für höhere Werte der Beheizung erreicht, wobei der Unterschied aufgrund größerer Strömungsgeschwindigkeiten x_1 recht signifikant wird.

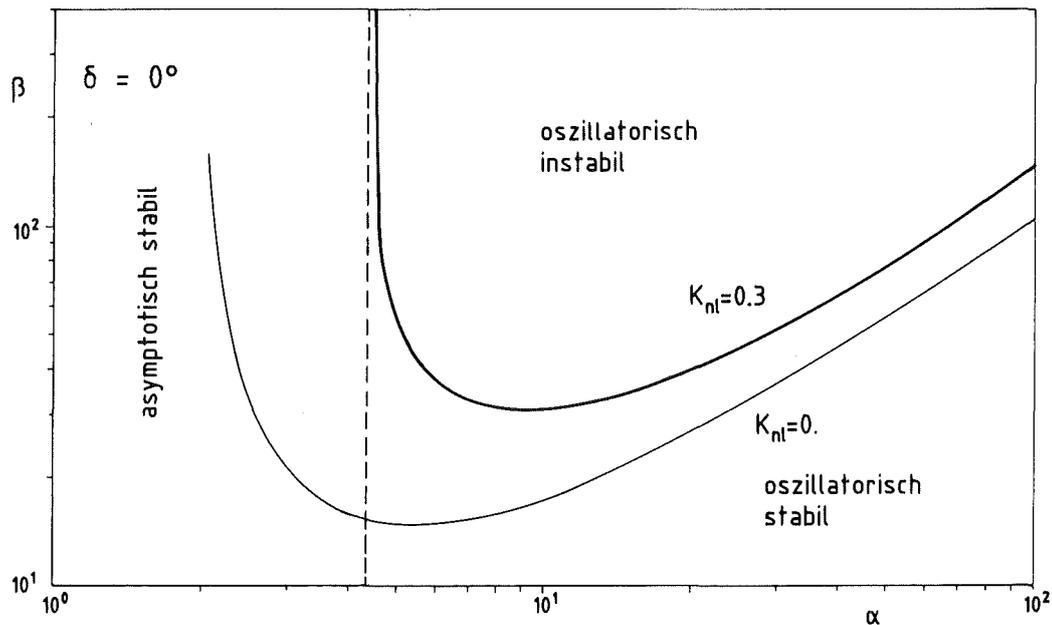


Abb. 4-2: Neutralkurven der Stabilität für $\delta = 0^\circ$ in der α - β -Ebene. Die Kurven zeigen die kritische Beheizung β^* bzw. β_{n1}^* als Funktion des Stoffparameters α .

4.2 Konsequenzen der axialen Wärmeleitung, Einführung einer Nusselt-Zahl

In Abschnitt 2.5 wurde bereits aufgezeigt, daß wegen Gl. (2.14) eine Vernachlässigung der diffusiv in Azimutalrichtung φ transportierten Wärme gegenüber dem konvektiven Anteil in den Modellgleichungen Gl. (2.11) berechtigt ist. Diese Gleichungen erfassen ausschließlich die ersten Koeffizienten der Temperaturverteilung $T(\varphi, t)$ im jeweiligen Kreislauf.

Wenn wir uns für die Konsequenzen der axialen Wärmeleitung interessieren, müssen naturgemäß auch die höheren Moden der Fourier-Reihe für $T(\varphi, t)$ betrachtet werden. Diese können aus Gl. (2.7) in Form der allgemeinen Koeffizienten S_n und C_n extrahiert werden. Wir erhalten für sie die gewöhnlichen Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned} \frac{dS_n}{dt} &= \frac{n u}{l} C_n - H \left\{ 1 + n^2 \frac{\Lambda}{H} \right\} S_n + Q_n, \\ \frac{dC_n}{dt} &= - \frac{n u}{l} S_n - H \left\{ 1 + n^2 \frac{\Lambda}{H} \right\} C_n + R_n. \end{aligned} \quad (2.7b)$$

Man erkennt deutlich, daß zwar für $n = 1$ und $\Lambda/H_0 \ll 1$ in den Modellgleichungen (2.7b) der Term $n^2 \Lambda/H_0$ vernachlässigt werden kann, aber für große n der Term mit n^2 gewichtet wird. Demgemäß gewinnt mit $n \rightarrow \infty$ die diffusive Komponente maßgeblichen Einfluß auf die Dgln. (2.7b).

Wir können diesen Sachverhalt physikalisch in der Art interpretieren, daß die axiale Wärmeleitung eine merkliche Auswirkung nur auf die höheren Koeffizienten der Temperaturverteilung besitzt. Damit beeinflußt sie die Temperaturvariation stark bei den kleinen Längenskalen. Demgegenüber hat sie auf die großräumige Temperaturverteilung, und damit über große Längenerstreckungen kaum Einfluß. Dementsprechend ist die thermische Diffusion in Strömungsrichtung φ verantwortlich für die Feinstruktur der Temperatur, während die konvektiv transportierte Wärme die großräumige Temperaturverteilung prägt.

Wir wollen im folgenden aus den dimensionslosen Zustandsgrößen x_i unseres Modells eine Kenngröße für den Wärmetransport in der betrachteten Anordnung ableiten. Die dimensionslose Kennzahl Nu erfaßt das Verhältnis zwischen aktuell transportierter Wärme und Wärmetransport durch Wärmeleitung. Sie ist definiert durch die Beziehung:

$$Nu \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\dot{Q}_{\text{ges}}}{\dot{Q}_{\text{WL}}} = 1 + \frac{\dot{Q}_{\text{Konv}}}{\dot{Q}_{\text{WL}}} \quad (4.6)$$

Der Gesamtwärmestrom \dot{Q}_{ges} setzt sich aus den Anteilen der Wärmeleitung \dot{Q}_{WL} und der konvektiv transportierten Wärme \dot{Q}_{Konv} additiv zusammen. Es wird so eine Aufspaltung gemäß Gl. (4.6) möglich. Demgemäß ist $Nu = 1$ im Grenzfall reiner Wärmeleitung. Im Falle von Konvektion wird $Nu > 1$, weil die Vorzeichen von \dot{Q}_{Konv} und \dot{Q}_{WL} per Definition gleich sind.

Die Wärmeleitung transportiert längs der Rohrachse die Wärme aus dem Gebiet mit heißem Rand in das Gebiet mit kühler Berandung. Demgemäß ist ihre treibende Temperaturdifferenz durch die Amplitude von $T_w(\varphi)$, d.h. durch $\Delta T = T_H - T_K$, gegeben. Als charakteristische Länge, über welcher diese Temperaturdifferenz anliegt, wird der Radius l gewählt. Mit den spezifischen Eigenschaften des Fluids, wie Wärmeleitfähigkeit λ_0 , spezifische Wärme c_p so-

wie Dichte ρ_0 und Wärmeausdehnungskoeffizient α_0 ergibt sich deshalb

$$\dot{Q}_{WL} = \lambda_0 \frac{(\bar{T}_H - \bar{T}_K)}{\ell} 2A = \beta \left\{ \frac{\mathcal{L}}{H_0} \right\} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{4H_0^2 \ell^2 R c_p \rho_0 A}{\alpha_0 g} \right\}. \quad (4.7)$$

Es zeigt sich, daß der durch Wärmeleitung transportierte Wärmestrom proportional zur Beheizung β ist. Die Größe (\mathcal{L}/H_0) stellt, wie in Abschn. 2.5 erläutert, eine dimensionslose Kennzahl dar, welche den Einfluß der Wärmeleitung im Vergleich zum konvektiven Wärmetransport gewichtet. Wegen $\mathcal{L}/H_0 \ll 1$ wurde der diffusive Anteil des Wärmetransports in der vorangegangenen analytischen Untersuchungen der Kapitel 2 und 3 stets vernachlässigt. Er muß jedoch bei der Bildung der Nusselt-Zahl definitionsgemäß als Bezugszustand betrachtet werden.

Den konvektiv transportierten Wärmestrom erhält man durch eine Wärmebilanz um die obere Hälfte des Kreislaufs (vgl. Abb. 1-1). Bei entsprechender Berücksichtigung der ein- und austretenden Wärmeströme kommt

$$\dot{Q}_{konv.} = -u (T_3 - T_9) c_p \rho_0 A \cong \left\{ \frac{4H_0^2 \ell^2 R c_p \rho_0 A}{\alpha_0 g} \right\} x_1 x_2, \quad (4.8)$$

wobei $(T_3 - T_9)$ die Differenz der mittleren Fluidtemperaturen zwischen den Positionen bei $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = 3\pi/2$ darstellt. Diese Größe kann aufgrund der Reihendarstellung der Temperatur durch die ersten Glieder abgeschätzt werden. Der Gleichung (4.8) kann deshalb entnommen werden, daß der konvektive Wärmestrom in erster Näherung proportional zum Produkt der Zustandsgrößen x_1 und x_2 ist.

Die Nusselt-Zahl ergibt sich somit gemäß Gl. (4.6) als

$$Nu \cong 1 + \frac{x_1 x_2}{\beta} \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{H_0}{\mathcal{L}} \right\}. \quad (4.9)$$

Für die stationären Fälle mit $x_1 = x_2 = \pm \sqrt{\beta - 1}$ folgt

$$Nu = 1 \quad \text{für } \beta < 1, \quad (4.9a)$$

$$Nu \cong 1 + \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{H_0}{\mathcal{L}} \right\} \quad \text{für } \beta > 1.$$

Die Nusselt-Zahl Nu kann demzufolge erst nach Einsetzen der Konvektion bei $\mathcal{B} = 1$ anwachsen, wenn x_1 und x_2 nicht mehr verschwinden. Im Grenzfall $\mathcal{B} \rightarrow \infty$ gilt

$$\lim_{\mathcal{B} \rightarrow \infty} Nu = 1 + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{H_0}{\mathcal{L}} \right\} = \text{Konst.} \quad (4.10)$$

Somit wird deutlich, daß der Kreislauf konvektiv um den Faktor (H_0/\mathcal{L}) mehr Wärme transportiert als durch Diffusion. Ein Vergleich zwischen dem hier abgeleiteten theoretischen Verlauf $Nu = f(\mathcal{B})$ und experimentell ermittelten Werten findet sich im Anhang (vgl. Abschn. 7.2).

4.3 Ankopplung eines zweiten Kreislaufs

Im folgenden soll ausführlich analysiert werden, welchen Einfluß die Ankopplung eines zweiten Kreislaufs (vgl. Abb. 1-2) auf das System hat. Zunächst wird der Kopplungsmechanismus so allgemein wie möglich zugelassen. Die Kopplung der beiden Kreisläufe soll über einen Behälter erfolgen, in welchem beide Strömungen miteinander in Kontakt kommen. Technisch relevant ist diese Vorstellung für den Fall, daß mehrere Kreisläufe die Wärme eines Wärmeerzeugers abführen sollen.

An der Kontaktstelle bei $\varphi = \varphi_0$ kommt es aufgrund der lokalen Temperatur- und Geschwindigkeitsgradienten im Strömungsquerschnitt zu einem Wärme- und Impulsaustausch zwischen den beiden Strömen. Ein Netto-Massenaustausch kann aufgrund der Inkompressibilität der Medien ausgeschlossen werden, weil jedem Übertrag von Masse, z.B. von Kreislauf 1 nach Kreislauf 2, ein entsprechender Rücktransport gegenüber stehen muß. Aus diesem Grund führt der lokale Austausch von Masse lediglich zu einer Intensivierung der Wärme- und Impulswechselwirkung.

4.3.1 Mathematische Formulierung

Wir gehen vom einfachsten Grundfall für den Einzelkreis aus, d.h. wir setzen für alle folgenden Betrachtungen $h_w = \text{konst.}$ und $\lambda_0 = 0$. Dies entspricht einem konstanten Wärmeübergangskoeffizienten Fluid/Wand und vernachlässigt die Wärmeleitung in φ -Richtung. Im Sinne einer eindimensionalen Modellierung ist es notwendig, die an der Kontaktstelle bei $\varphi = \varphi_0$ auftretenden Wechselwirkungen in Form eines Wärmestroms bzw. Impulsflusses als Funktion der querschnittsgemittelten Größen T_1 bzw. u_1 anzugeben. Für den Wärmestrom \dot{q}_{12} vom Kreislauf 1 zum Kreislauf 2 wird ein linearer Ansatz in der Form

$$\dot{q}_{12}(\varphi, t) = \eta \pi \delta(\varphi - \varphi_0) \frac{4h_{12}}{d} \{ T_1(\varphi, t) - T_2(\varphi, t) \}, \quad (4.11)$$

mit $\eta = A_{\text{Kont.}}/A_{\text{ges}} \ll 1$ gewählt. Hier ist $A_{\text{Kont.}}$ die Kontaktfläche zwischen beiden Kreisläufen, und A_{ges} stellt die gesamte Wandfläche eines Kreislaufs dar.

Der Wärmestrom wird somit proportional zur treibenden mittleren Temperaturdifferenz, gewichtet mit dem Flächenverhältnis η und der Proportionalitäts-

konstanten h_{12} , eingeführt. Die Größe h_{12} wird zusätzlich durch die Relation $h_{12} = h_w \cdot K_w$ skaliert. K_w stellt deshalb eine dimensionslose Kennzahl dar. Für $K_w = 1$ hat so der Wärmeaustausch durch Kopplung die gleiche Qualität wie der Wärmeübergang Fluid/Wand. Schließlich kommt in der Modellierung von \dot{q}_{12} mit der δ -Funktion der mathematisch unstetige Grenzfall eines punktförmigen Austauschortes bei $\varphi = \varphi_0$ zum Ausdruck. Aufgrund der weiteren mathematischen Behandlung werden jedoch im folgenden nur wohldefinierte Integrale der δ -Funktion und damit endliche Werte der physikalischen Größen auftreten.

Für den Impulsfluß i_{12} wird ein analoger Ansatz gewählt. Es wird eine Proportionalität zwischen dem Impulsfluß und der Differenz der mittleren Strömungsgeschwindigkeiten $u_1(t)$ und $u_2(t)$ angenommen. Wir setzen

$$\dot{i}_{12}(\varphi, t) = 2\pi \eta \delta(\varphi - \varphi_0) f_{12}(t), \quad f_{12}(t) = R_{12} S_0 (u_1 - u_2). \quad (4.12)$$

Es wird auch hier eine Gewichtung mit dem Flächenverhältnis η sowie eine Festlegung des Kontaktortes mit Hilfe der δ -Funktion vorgenommen. Für die Reibungskonstante R_{12} kann in analoger Weise eine Skalierung gemäß $R_{12} = R K_I$ eingeführt werden, wobei K_I eine dimensionslose Kennzahl für die Intensität der Impulswechselwirkung darstellt.

Die Ansätze gemäß der Gln. (4.11) und (4.12) können nun in die Ausgangsdifferentialgleichungen (2.1) und (2.5) additiv eingebracht werden. Wir erhalten z.B. für Kreislauf 1 die Impuls- bzw. Wärmetransportgleichung zu

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\alpha_0 g}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_1(\varphi) \sin \varphi d\varphi - R \{ u_1 + \eta K_I (u_1 - u_2) \}, \quad (4.13)$$

und

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} + H \{ T_1 + \pi \delta(\varphi - \varphi_0) \eta K_w (T_1 - T_2) \} = Q_1(\varphi), \quad (4.14)$$

Die Gleichungen für den zweiten, geometrisch und fluidmechanisch identischen Kreislauf können durch Vertauschung der Indices in den Gln. (4.13) und (4.14) abgeleitet werden. Die weitere Behandlung der Gleichungen geschieht analog zu der in Kapitel 2 durchgeführten Prozedur. Mit den Reihenansätzen für die ortsabhängigen Funktionen

$$\begin{aligned} T_i(\varphi, t) &= T_{i0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{in}(t) \sin n\varphi + C_{in}(t) \cos n\varphi, \\ Q_i(\varphi) &= Q_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{in} \sin n\varphi + R_{in} \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (4.15)$$

erhält man nach Anwendung des Galerkinverfahrens einen Satz von $2 \cdot (2n+2)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Koeffizienten und Strömungsgeschwindigkeiten beider Kreisläufe.

Vollkommen analog zu Gl. (2.8) führen wir eine Skalierung der Gleichungen mit

$$\begin{aligned} t &= \frac{\tau}{H_0}, \\ u_1 &= H_0 l x_1, & u_2 &= H_0 l y_1, \\ S_{11} &= \frac{2H_0 R l}{\alpha_0 q} x_2, & S_{21} &= \frac{2H_0 R l}{\alpha_0 q} y_2, \\ C_{11} &= \frac{R_{11}}{H_0} - \frac{2H_0 R l}{\alpha_0 q} x_3, & C_{21} &= \frac{R_{21}}{H_0} - \frac{2H_0 R l}{\alpha_0 q} y_3, \end{aligned} \quad (4.16)$$

ein, und erhalten schließlich die dimensionslose Form der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \{x_2 - x_1 - \eta K_I (x_1 - y_1)\} \alpha, \\ \dot{x}_2 &= \beta_1 x_1 - x_1 x_3 - x_2 + \beta_1 \tan \delta_1 \\ &\quad - \eta K_w \left\{ (x_2 - y_2) \sin^2 \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 [(\beta_1 - x_3) - (\beta_2 - y_3)] + \dots \right\}, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - x_3 \\ &\quad + \eta K_w \left\{ [(\beta_1 - x_3) - (\beta_2 - y_3)] \cos^2 \varphi_0 + \frac{1}{2} (x_2 - y_2) \sin 2\varphi_0 + \dots \right\}, \\ \dot{y}_1 &= \{y_2 - y_1 - \eta K_I (y_1 - x_1)\} \alpha, \\ \dot{y}_2 &= \beta_2 y_1 - y_1 y_3 - y_2 + \beta_2 \tan \delta_2 \\ &\quad - \eta K_w \left\{ (y_2 - x_2) \sin^2 \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 [(\beta_2 - y_3) - (\beta_1 - x_3)] + \dots \right\}, \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - y_3 \\ &\quad + \eta K_w \left\{ [(\beta_2 - y_3) - (\beta_1 - x_3)] \cos^2 \varphi_0 + \frac{1}{2} (y_2 - x_2) \sin 2\varphi_0 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

In Gl. (4.17) ist die Bezeichnung $\dot{x}_i = dx_i/d\tau$ bzw. $\dot{y}_i = dy_i/d\tau$ eingeführt. Darüber hinaus wird die Voraussetzung $Q_{10} \cong Q_{20}$ getroffen (vgl. Gl. 4.15). Eine Erläuterung zu dieser Näherung folgt in Abs. 4.3.2. Die auftretenden Parameter sind definiert als

fester Stoff- bzw. Wandparameter:	$\alpha = \frac{R}{H_0} \quad ,$	
Beheizungsparameter in Kreislauf i:	$\beta_i = \frac{\alpha_{0,9} R_{i1}}{2H_0^2 R \ell} \quad ,$	(4.18)
Symmetriewinkel der Beheizung in Kreislauf i:	$\delta_i = \arctan \left\{ \frac{Q_{i1}}{R_{i1}} \right\} \quad ,$	
Kontrollparameter für Wärmekopplung:	$K_w \quad ,$	
Kontrollparameter für Impulskopplung:	$K_I \quad ,$	
Kopplungsflächenanteil:	$\eta = \frac{A_{\text{kont.}}}{(\pi d)(2\pi \ell)} \ll 1 \quad ,$	
Position der Kopplung:	$\varphi_0 \quad ,$	

i kann hier die Werte 1 oder 2 annehmen.

4.3.2 Eigenschaften und Parameter der Gleichungen

Der Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen (4.17) beschreibt mit den Vektoren \underline{x} und \underline{y} die zeitliche Entwicklung der maßgeblichen Zustandsgrößen von Kreislauf 1 und Kreislauf 2. Bedingt durch die Einführung einer punktförmigen Kopplung der Kreisläufe mit Hilfe der δ -Funktion stellen die angegebenen Gleichungen nur Näherungen mit einem Abbruchfehler von $\mathcal{O} \{ \eta(S_{12} - S_{22}) \}$ bzw. $\mathcal{O} \{ \eta(C_{12} - C_{22}) \}$ dar. Der relativ geringe Anteil der wirksamen Kopplungsfläche, bezogen auf die gesamte Wandfläche, führt in vielen, auch technisch relevanten Fällen zu der Abschätzung $\eta \ll 1$. Unterstellt man weiterhin die Konvergenz der Fourier-Reihen für die Temperaturen, d.h.

$S_{i,1}, C_{i,1} \gg S_{i,n}, C_{i,n} (n \rightarrow \infty)$, so stellen die angeführten Gleichungen bereits gute Näherungen für die führenden Koeffizienten und die Strömungsgeschwindigkeiten dar.

Weil der Abbruchfehler lediglich von der Differenz der höheren Fourier-Koeffizienten abhängt, kann eine weitere Reduktion erreicht werden durch die Forderung nach ähnlichen Beheizungszuständen in beiden Kreisen. Dies ist physikalisch gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Wärmequellen bzw. -senken für beide Kreisläufe näherungsweise gleiche Intensität haben. Bei technischen Anlagen ist im Regelfall durch thermohydraulisch symmetrische

Auslegung sowie durch gemeinsame Wärmequelle und gleich mächtige Wärmesenken eine solche Ähnlichkeit gegeben. Wir beschränken uns deshalb im weiteren auf den Fall

$$\beta_1 \cong \beta_2 \cong \beta, \quad (4.19)$$

lassen jedoch kleine Symmetrieunterschiede in der Beheizung beider Kreise zu, d.h. es darf gelten

$$\delta_1 \neq \delta_2. \quad (4.20)$$

Die Forderung nach ähnlichen Beheizungszuständen erfüllt im übrigen auch die zur Herleitung der Gleichung (4.17) getroffene Annahme $Q_{10} \cong Q_{20}$.

Die Parameter α , β_i und δ_i haben physikalisch somit identisch Bedeutung wie für den in Abschn. 2.5 erläuterten Einzelkreislauf. Die Intensität der Kopplung kann für Impuls und Wärme getrennt durch die Kennzahlen K_I und K_W beeinflusst werden, ihre räumliche Lage durch den Parameter φ_0 .

In den Impulsgleichungen (4.17), den Gln. für \dot{x}_1 und \dot{y}_1 , kommt bereits zum Ausdruck, daß der Ort der Impulskopplung bei $\varphi = \varphi_0$ keinerlei Einfluß auf die Form der Gleichungen nimmt. Demgegenüber bleibt φ_0 als Parameter in den Wärmetransportgleichungen präsent, womit der Ort der Wärmekopplung zentrale Bedeutung gewinnt. Plausibel wird dieser Sachverhalt aus den in Abschnitt 2.1 und 2.2 diskutierten Abhängigkeiten $u_i = f(t)$ und $T_i = f(t, \varphi)$. Somit kann φ_0 ausschließlich als Ort der Wärmekopplung aufgefaßt werden, unabhängig davon wo eine Impulskopplung vorhanden ist.

Die weitere Analyse zum Einfluß von φ_0 zeigt, daß eine deutliche Vereinfachung des Differentialgleichungssatzes (4.17) für $\varphi_0 = 0$ oder $\varphi_0 = \pi/2$ zu erwarten ist. Im Falle einer seitlichen Wärmekopplung bei $\varphi_0 = \pi/2$ entfällt in der Gleichung für \dot{x}_3 (analog \dot{y}_3) der Kopplungsterm, in der Gleichung für \dot{x}_2 hingegen (analog \dot{y}_2) bleibt er erhalten. Demzufolge steht der Kopplungsterm an gleicher Stelle wie die Beheizungsunsymmetrie δ_i des jeweiligen Kreislaufs in Gl. (4.17). Dies bedeutet physikalisch, daß ein seitlich ein- oder ausgekoppelter Wärmestrom für den Kreislauf die gleichen Auswirkungen hat wie eine durch den Winkel δ_i charakterisierte Schiefsymmetrie der Beheizung. Von einer solchen Kopplung ist deshalb grundsätzlich das Bevorzugen

einer Strömungsrichtung zu erwarten (vgl. hierzu auch Kap. 3).

Demgegenüber kann eine Wärmekopplung unten an der Stelle mit $\varphi_0 = 0$ immer nur symmetrische Auswirkungen haben, weil sie keinen zusätzlichen Term in der Gleichung für \dot{x}_2 (analog \dot{y}_2) produziert. Ein am unteren Scheitel ein- oder ausgekoppelter Wärmestrom kann deshalb nur wie eine Veränderung der Beheizung R_1 wirken. Er beeinflusst deshalb beide Strömungsrichtungen gleichermaßen.

Es sei noch erwähnt, daß die Fälle $\varphi_0 = \pi$ bzw. $3\pi/2$ auf die oben erwähnten zurückgeführt werden können. Im allgemeinen jedoch wird eine Überlagerung der beschriebenen Einzeleffekte die Folge für ein beliebiges φ_0 sein.

Wegen der Komplexität des Gleichungssystems (4.17) ist für die weiteren Untersuchungen eine Beschränkung auf einen der beiden Effekte zweckmäßig. Wir werden deshalb im folgenden Abschnitt für den Fall, daß mit $\varphi_0 = 0$ die Kopplung am tiefsten Punkt der beiden Kreisläufe erfolgt das Problem der gekoppelten Strömungen diskutieren. Es wird hierbei zunächst reine Wärmekopplung unterstellt. Dieser Fall ist bisher in der Literatur nicht behandelt worden. Die einzigen bekannten Veröffentlichungen zu gekoppelten Kreisläufen überhaupt stammen von Davis & Roppo [5] bzw. Roppo [26]. Diese Autoren behandeln zwei bei $\varphi_0 = \pi/2$ rein thermisch gekoppelte Konvektionskreisläufe.

4.3.3 Der Fall reiner Wärmekopplung bei $\varphi_0 = 0^\circ$

Wir wollen für die weiteren Untersuchungen den in Kapitel 3 behandelten Einzelkreislauf mit $\delta_1 \neq 0$ zugrundelegen und fragen, wie sich die bekannten Lösungen durch Ankopplung eines zweiten, symmetrischen Kreislaufs mit $\delta_2 = 0$ verändern.

Mit den erwähnten Voraussetzungen $\varphi_0 = 0$, $K_I = 0$, $\delta_2 = 0$ haben wir den reduzierten Gleichungssatz

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha (x_2 - x_1) , \\
 \dot{x}_2 &= \beta x_1 - x_1 x_3 - x_2 + \beta \tan \delta_1 , \\
 \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - x_3 - \eta K_w (x_3 - y_3) , \\
 \dot{y}_1 &= \alpha (y_2 - y_1) , \\
 \dot{y}_2 &= \beta y_1 - y_1 y_3 - y_2 , \\
 \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - y_3 - \eta K_w (y_3 - x_3) ,
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

zu betrachten. Es handelt sich bei dem System (4.21) um 2-3 gewöhnliche Differentialgleichungen, wobei die drei Gleichungen eines Kreislaufes untereinander stark koppeln, die Kopplung zwischen \underline{x} und \underline{y} hingegen schwach ist, weil $\eta \ll 1$ gilt. In dieser Betrachtungsweise kann man von zwei schwach wechselwirkenden Lorenz Oszillatoren (vgl. Lorenz [24]) sprechen.

Die stationären Lösungen von Gl. (4.21) können aus den algebraischen Gleichungen für $\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{y}} = 0$ bestimmt werden. Für den Grenzfall $\delta_1 = 0$ können sie in analytischer Form angegeben werden. Im allgemeinen müssen sie aus den auftretenden Polynomen mit einem numerischen Verfahren berechnet werden.

Für $\delta_1 = 0$ wollen wir zunächst die analytischen Lösungen angeben und diskutieren. Wir erhalten die fünf entkoppelten Lösungen:

V: $\underline{x}_{st} = \underline{y}_{st} = 0 ;$

I, II, III, IV: $x_0 = \pm \sqrt{\beta - 1}$, mit $x_{1st} = x_{2st} = x_0, x_{3st} = x_0^2$ (4.22)
 $y_{1st} = y_{2st} = \pm x_0, y_{3st} = x_0^2 ;$

sowie vier wärmegekoppelte Lösungen zu

VI, VII, VIII, IX: $x_w = \pm \frac{(1 + 2\eta K_w)}{(1 + \eta K_w)} \sqrt{\beta - 1}$,
 mit $x_{1st} = x_{2st} = 0, x_{3st} = \frac{\eta K_w}{(1 + \eta K_w)} x_0^2$,
 $y_{1st} = y_{2st} = x_w, y_{3st} = x_0^2 ;$ (4.23)
 oder $x_{1st} = x_{2st} = x_w, x_{3st} = x_0^2$
 $y_{1st} = y_{2st} = 0, y_{3st} = \frac{\eta K_w}{(1 + \eta K_w)} x_0^2 .$

Bevor wir die Diskussion der Lösungen für $\delta_1 = 0$ durchführen, stellen wir die Frage nach deren Stabilität. Wir führen dies sinnvollerweise für den allgemeinen Fall $\delta_1 \neq 0$ aus. Es werden hierzu die Störansätze

$$\underline{x}(\tau) = \underline{x}_{st} + \delta \underline{x}(\tau) \quad , \quad \underline{y}(\tau) = \underline{y}_{st} + \delta \underline{y}(\tau) \quad , \quad (4.24)$$

in das Dgl.-System (4.21) eingebracht. Nach einer Linearisierung erhält man wegen $|\delta \underline{x}|, |\delta \underline{y}| \ll 1$ ein lineares Differentialgleichungssystem für die Störgrößen in der Form

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \\ \delta \dot{x}_3 \\ \delta \dot{y}_1 \\ \delta \dot{y}_2 \\ \delta \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\beta - x_3) & -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -(1 + \eta K_w) & 0 & 0 & \eta K_w \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\beta - y_3) & -1 & -y_1 \\ 0 & 0 & \eta K_w & y_2 & y_1 & -(1 + \eta K_w) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \\ \delta x_5 \\ \delta x_6 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Gl. (4.25) ist auszuwerten für $\underline{x} = \underline{x}_{st}$ und $\underline{y} = \underline{y}_{st}$. Aus den Eigenwerten der in Gl. (4.25) auftretenden Funktional-Matrix, genommen an der betrachteten stationären Lösung, ergibt sich dann deren Stabilität. Die Untersuchungsmethode entspricht im übrigen vollständig derjenigen, welche in Kapitel 3 angewandt wird. Deshalb haben wir hier eine kompakte Darstellung gewählt.

In der folgenden Abbildung sind die stationären Lösungen mit ihren stabilen Bereichen zunächst für den Fall $\delta_1 = 0$ (entsprechend Gln. 4.22 und 4.23) veranschaulicht.

Wir finden zunächst eine Ruhelösung V, welche bei $B = 1$ ihre Stabilität durch eine stationäre Vorwärtsverzweigung verliert. An dieser Stelle zweigen insgesamt 8 Lösungen ab. Lediglich die vier ungekoppelten Strömungen I-IV erweisen sich als lokal stabil. Diese Lösungen können aufgefaßt werden als unabhängige Kombination von den je zwei Konvektionslösungen der Einzelkreisläufe. Ein Wärmeübergang findet nicht statt, weil am Kopplungspunkt bei $\varphi_0 = 0$ unabhängig von der Richtung der Strömung die lokalen Temperaturen gleich sind. Aus den genannten Gründen sind diese Lösungen absolut identisch mit denen des symmetrisch beheizten Einzelkreislaufs. Die Stabilitätsgrenze bei $B = B^*$ stellt gleichfalls einen Hopf-Punkt dar, d.h. die Lösungen werden hier instabil gegen oszillatorische Störungen. Der Wert $B^*(\alpha)$ kann aus der Beziehung (3.10) bzw. aus dem Stabilitätsdiagramm (Abb. 3-2) entnommen werden.

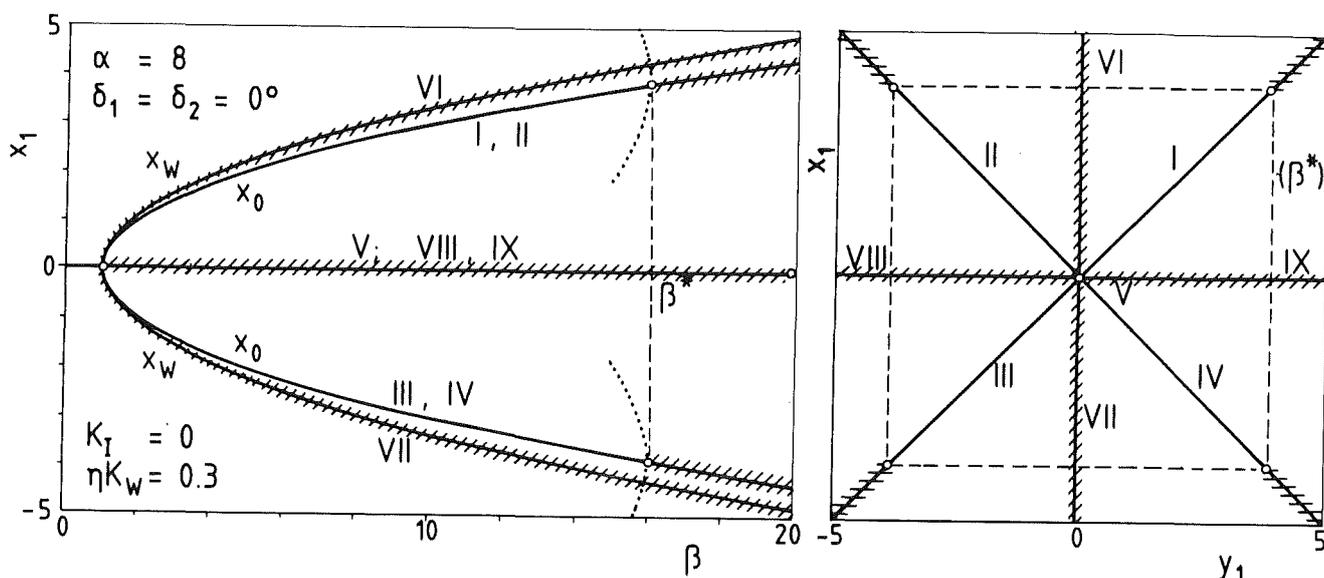


Abb. 4-3: Die neun stationären Lösungen für die Strömungsgeschwindigkeit x_1 im Kreislauf 1 und y_1 im Kreislauf 2 als Funktion der Beheizung. Die Stabilitätsgrenzen sind mit Kreisen gekennzeichnet, lokal instabile Bereiche sind schraffiert.

Als nächstes betrachten wir die vier gekoppelten Lösungen VI - IX für die Strömung. Alle diese Lösungen haben gemeinsam, daß einer der Kreisläufe in Ruhe bleibt und somit in diesem keine Wärme konvektiv transportiert wird. Die vertikale Temperaturdifferenz in diesem Kreislauf wird aufgrund der fehlenden Strömung nicht abgebaut. Der in Bewegung befindliche andere Kreislauf übernimmt deshalb am Kopplungspunkt $\varphi_0=0$ zusätzliche Wärme und transportiert diese mit der höheren Strömungsgeschwindigkeit $|x_w| > |x_0|$ ab. Diese Strömungsformen VI - IX erweisen sich jedoch als instabil.

Während das linke Diagramm in Abb. 4-3 die Strömungsgeschwindigkeit im Kreislauf 1, x_{1st} , als Funktion der Beheizung β zeigt, ist aus dem rechten Diagramm die Zuordnung der beiden Strömungsgeschwindigkeiten x_{1st} und y_{1st} ersichtlich. Die durchgezogenen Linien I - IX entstehen, wenn die für $\beta = 0$ alle im Zentrum liegenden Lösungen bei Anwachsen von β nach außen wandern.

Im nächsten Schritt werden die an den vier Hopf-Punkten abzweigenden periodischen Lösungen mit dem in den Abschnitten 3.4 und 3.5 behandelten Verfahren aus den vollständigen Gleichungen (4.21) berechnet. Hierbei stellt sich her-

aus, daß alle gefundenen T-periodischen Lösungen mit den zwei trivialen Ansätzen

$$\begin{aligned} y_1(\tau) &= \pm x_1(\tau), \\ y_2(\tau) &= \pm x_2(\tau), \\ y_3(\tau) &= x_3(\tau), \end{aligned} \quad (4.26)$$

auf das bereits behandelte Problem des symmetrischen Einzelkreislaufs (vgl. Abb. 3-6) zurückgeführt werden können. Das positive Vorzeichen in Gl. (4.26) ist zu wählen, wenn beide Kreisläufe die gleiche Strömungsrichtung besitzen, d.h. für die Lösungen in der Umgebung der Äste I und III. Analog muß das negative Vorzeichen für die von den Hopf-Punkten der Äste II und IV abzweigenden Lösungen eingesetzt werden. Die aufwendigen Rechnungen mit dem Dgl.-System 6. Ordnung (4.21) können deshalb entfallen und alle Ergebnisse aus Absatz 36 bzgl. der T-periodischen Lösungen können übertragen werden.

Wir finden deshalb im linken Diagramm der Abb. 4-3 von den Hopf-Punkten bei $B = B^*$ rückwärtig abzweigende instabile T-periodische Lösungen, welche in der Amplitude für fallende Werte B anwachsen und schließlich in einen "homoklinen Verzweigungspunkt" münden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind diese Lösungen nur in der Umgebung der Hopf-Punkte, durch punktierte Linien in Abb. 4-3 angedeutet; der weitere Verlauf kann aus den Ergebnissen für den Einzelkreislauf entnommen werden (vgl. Abb. 3-6). Die Zustandsamplituden des zweiten Kreislaufs \tilde{y} können aus Gl. (4.26) angegeben werden. Die Momentanwerte während einer Schwingung der T-periodischen Lösung liegen im y_1 - x_1 -Diagramm deshalb stets auf den Winkelhalbierenden.

Wir fassen deshalb zusammen: Die Kopplung zweier symmetrisch beheizter Konvektionsströmungen führt nicht zu gekoppelten stabilen Lösungen. Vielmehr sind ausschließlich die bekannten stabilen Lösungsäste des Einzelkreislaufs auch im Doppelkreislauf stabil. Diese Lösungen können beliebig kombiniert auftreten. Sie führen aufgrund des spezifisch gewählten Kopplungsortes zu keinem Wärmeaustausch zwischen den Kreisläufen.

Im nächsten Schritt wollen wir den allgemeinen Fall $\delta_1 \neq 0$ diskutieren. Dies bedeutet, daß an den nicht symmetrisch beheizten Kreislauf 1 der symmetrisch beheizte Kreislauf 2 mit $\delta_2 = 0$ thermisch angekoppelt wird. In der folgenden Abbildung 4-4 sind in gleicher Auftragung die stationären Strömungen aufge-

tragen, und deren Stabilität ist gekennzeichnet.

Zunächst stellen wir fest, daß im allgemeinen Fall ausschließlich Strömungen auftreten, welche am Punkt $\varphi_0 = 0^\circ$ durch einen Wärmeaustausch gekoppelt sind. Dieser Sachverhalt ist ersichtlich im Phasendiagramm der Abb. 4-4, aus welchem für alle Lösungen der Zusammenhang $|x_1| \neq |y_1|$ entnommen werden kann. Alle Lösungen verhalten sich symmetrisch bzgl. y_1 , wie aus der Spiegelsymmetrie zur Vertikalen in der y_1 - x_1 -Ebene in Abb. 4-4 ebenfalls unmittelbar hervorgeht. Die Symmetrie bzgl. x_1 hingegen ist durch den schief-symmetrischen Beheizungszustand in Kreislauf 1 mit $\delta_1 \neq 0^\circ$ gebrochen.

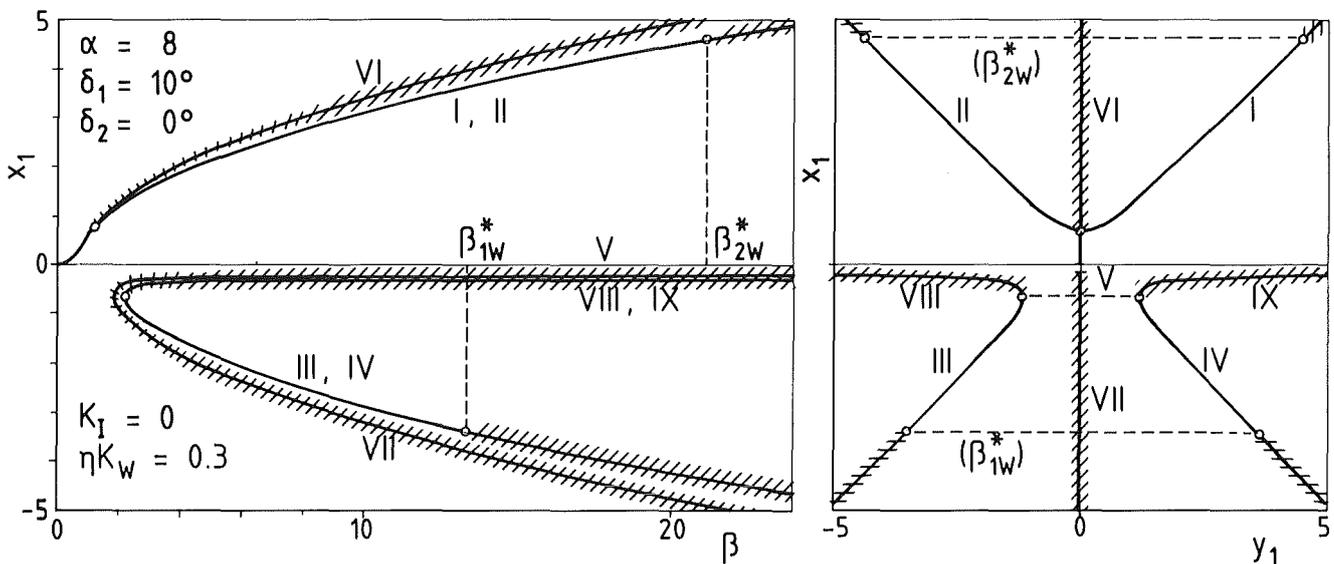


Abb. 4-4: Die neun stationären Lösungen für die Strömungsgeschwindigkeiten x_1 in Kreislauf 1 und y_1 in Kreislauf 2 als Funktion der Beheizung B . Die Stabilitätsgrenzen sind mit Kreisen gekennzeichnet, lokal instabile Bereiche schraffiert.

Es existieren drei stetig erreichbare stationäre Lösungsäste (I, II, VI) mit positiver Strömungsrichtung im Kreislauf 1. Für steigende Werte B ist Lösung VI stabil im Bereich $0 \leq B \lesssim 1$. Für Werte $B \gtrsim 1$ verliert diese Lösung, welche durch Ruhe in Kreislauf 2 charakterisiert ist, ihre Stabilität. An der Stelle $B \cong 1$ zweigen die Lösungen I und II ab. Die Strömungsformen I und II sind im Bereich $1 \lesssim B < \beta_{2w}^*$ stabil und unterscheiden sich lediglich durch die Strömungsrichtung in Kreislauf 2 mit $y_1 \gtrsim 0$. Ihre obere Stabilitätsgrenze β_{2w}^* ist charakterisiert durch das Aufklingen oszillatorischer Störungen. An der Stelle $B = \beta_2^*$ liegt deshalb ein Hopf-Punkt vor. Es sei ausdrücklich vermerkt, daß der Wert β_{2w}^* weder mit der Stabilitätsgrenze des symmetrisch beheizten Einzelkreislaufs β^* noch mit der des schief-symmetrisch beheizten

Einzelkreislaufs β_2^* (vgl. Abschn. 3.2) identisch ist. Vielmehr stellt sich ein Wert im Intervall $\beta^* < \beta_{2w}^* < \beta_2^*$ ein.

Die Lösungen mit negativer Strömungsrichtung im Kreislauf 1 sind nicht durch kontinuierliche Variation von β zugänglich. Sie liegen isoliert. Die Lösungen V und VII sind gekennzeichnet durch verschwindende Strömungsgeschwindigkeiten y_1 im Kreislauf 2 und erweisen sich als instabil. Die Strömungsformen III und IV sind hingegen stabil im Intervall $2. \lesssim \beta < \beta_{1w}^*$. Diese beiden Lösungen unterscheiden sich lediglich durch die Richtung der Strömung im zweiten Kreislauf, also durch das Vorzeichen von y_1 . Der Wert β_{1w}^* kann mit den bekannten Ergebnissen für den Einzelkreislauf eingegrenzt werden auf das Intervall $\beta_1^* < \beta_{1w}^* < \beta^*$ (vgl. Abschn. 3.2).

Wir wollen im folgenden die Auswirkungen der Kopplung auf die Stabilität der stationären Lösungen systematisch untersuchen. Hierzu betrachten wir die maßgeblichen Einflußgrößen auf die kritische Beheizung β_{iw}^* . Es sind dies der Stoffparameter α , der Symmetriewinkel der Beheizung δ_1 sowie die Kopplungsintensität η_{Kw} . Wir beschränken uns auf den gewählten Fall mit $\delta_1 = 10^\circ$ und $\delta_2 = 0^\circ$. Wir fassen deshalb β_{iw}^* als $f(\alpha, \eta_{Kw})$ auf und stellen die Verhältnisse in einer dreidimensionalen Stabilitätskarte dar. Das Diagramm gibt uns somit eine Erweiterung der bisher gezeigten Stabilitätskarten um den Parameter η_{Kw} in der dritten Dimension. Die Flächen markieren jeweils den Übergang von einem stabilen stationären Strömungszustand zu zeitabhängigem Verhalten der Strömung.

Zunächst wollen wir zum besseren Verständnis den Grenzfall $\eta_{Kw} \rightarrow 0$ betrachten. Beide Kreisläufe sind somit vollständig entkoppelt und für die Stabilitätsgrenzen müssen die Ergebnisse der Einzelkreisläufe gültig sein. Wir erwarten deshalb im Grenzfall

$$\eta_{Kw} \rightarrow 0 : \quad \begin{array}{l} \beta_{1w}^* \longrightarrow \beta_1^*(\alpha) , \\ \beta_{2w}^* \longrightarrow \beta^*(\alpha) . \end{array} \quad (4.27)$$

Der Begriff Stabilität muß hier auf das gesamte System bezogen werden, d.h. der Verlust der Stabilität ist gegeben, sobald in einem der Kreisläufe ein zeitabhängiges Verhalten der Strömung auftritt. Aus diesem Grund kann zwar in Kreislauf 1 ($\delta_1 = 10^\circ$) für $\eta_{Kw} \rightarrow 0$ die Strömung bis zu Werten $\beta \rightarrow \beta_1^*(\alpha)$

$$\delta_1 = 10^\circ, \delta_2 = 0$$

$$K_1 = 0$$

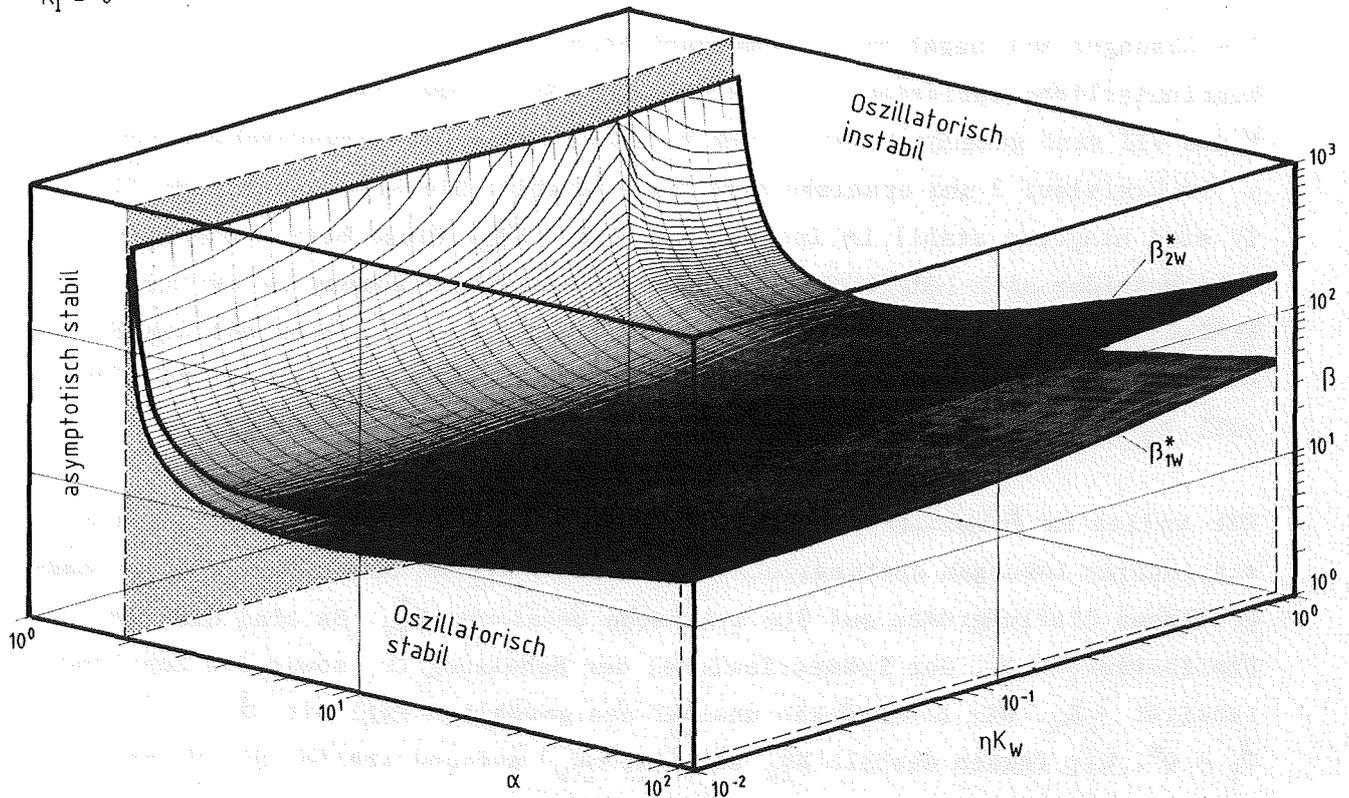


Abb. 4-5: Neutralfläche der Stabilität für $\delta_1=10^\circ$, $\delta_2=0^\circ$. Die Kurven zeigen die kritische Beheizung β_{1W}^* und β_{2W}^* bei Wärmekopplung am Ort $\varphi_0=0^\circ$.

stabil stationär bleiben, im zweiten Kreislauf stellt sich jedoch für $\beta > \beta^*$ eine zeitabhängige oszillierende Strömung ein. Damit ist das System als ganzes im obigen Sinne instabil gegenüber oszillatorischen Störungen.

Wir finden den Grenzfall $\eta K_w \rightarrow 0$ in der vordersten α - β -Ebene in Abb. 4-5. Der Schnitt bei $\eta K_w = 10^{-2}$ liefert näherungsweise die bereits bekannten Funktionen $\beta^*(\alpha)$ und $\beta_1^*(\alpha)$, also die Stabilitätsgrenzen eines einzelnen Kreislaufs (vgl. auch Abb. 3-2). Für wachsende Kopplungsintensität ηK_w ist zu beobachten, daß die kritische Beheizung im wesentlichen monoton anwächst auf Werte $\beta_{2W}^* > \beta^*$ bzw. $\beta_{1W}^* > \beta_1^*$. Dies bedeutet, daß die an der Kopplungsstelle ausgetauschte Wärme auf das System als ganzes stabilisierend wirkt. Diesen erweiterten stabil stationären Bereich findet man für beide Strömungsrichtungen des unsymmetrisch beheizten Kreislaufs 1. Dies äußert sich im

Ansteigen beider Flächen $B_{1W}^*(\alpha, \eta K_w)$ und $B_{2W}^*(\alpha, \eta K_w)$ für wachsende Kopplungsintensität.

Die in Abb. 4-5 gezeigten Flächen trennen demgemäß einen stabilen stationären Strömungsbereich unterhalb der Fläche, von einem oszillatorisch instabilen Parameterbereich oberhalb der Fläche. Darüber hinaus wird für kleine Werte α ein Bereich abgetrennt, in welchem die stationäre Strömung für beliebige Beheizung B stabil bleibt. Dieser asymptotisch stabile Parameterbereich ist abgetrennt durch eine Polfläche der Funktionen $B_{1W}^*(\alpha, \eta K_w)$ und $B_{2W}^*(\alpha, \eta K_w)$. Diese Polfläche ist in Abb. 4-5 punktiert dargestellt. Für wachsende Werte der Kopplungsintensität ηK_w ist eine leichte Ausdehnung dieses Bereiches auf Werte $\alpha > 2$ zu erkennen. Diese Verschiebung wird durch die Möglichkeit zum Ausgleich von unterschiedlichen Temperaturstörungen in beide Kreisläufen an der Kontaktstelle verursacht. Durch die übergehende Wärme wirkt dieser Mechanismus dämpfend auf die Temperaturstörungen. Der Parameterbereich für welchen die Temperaturstörungen nach einem Umlauf rückkoppeln können wird deshalb eingengt.

4.4 Zusammenfassung

Wir fassen die wichtigsten Aspekte des letzten Kapitels zusammen. Hierin werden die Modifikationen des Modells in Gestalt eines nichtlinearen Wärmeübergangsgesetzes, der Berücksichtigung der axialen Wärmeleitung sowie der Ankopplung eines zweiten Kreislaufs diskutiert.

Der nichtlinear modellierte Wärmeübergang zwischen Fluid und Wand bewirkt eine Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit im Kreislauf, verbunden mit einer deutlichen Stabilisierung der beiden stationären Konvektionsströmungen. Darüber hinaus bleibt die Stabilitätscharakteristik der Strömung im wesentlichen ungeändert.

Der diffusive Wärmetransport längs φ prägt die Feinstruktur der Temperaturverteilung im Kreislauf. Demgegenüber zeichnet die konvektiv transportierte Wärme für die großräumige Temperaturverteilung und damit für die Strömungsgeschwindigkeit im Kreislauf verantwortlich. Eine Vernachlässigung des diffusiven Anteils hat deshalb kaum Einfluß auf das Verhalten der maßgeblichen Zustandsgrößen.

Die Ankopplung eines zweiten Kreislaufs durch Wärme- und Impulswechselwirkung bei $\varphi = \varphi_0$ wird in den Grundgleichungen allgemein berücksichtigt. Als Spezialfall wird dann die Wärmekopplung am unteren Scheitelpunkt beider Kreisläufe diskutiert. Wir zeigen auf, daß im Falle von zwei symmetrisch beheizten Kreisläufen vier verschiedene stationäre stabile Konvektionsströmungen möglich sind. Diese können aufgefaßt werden als unabhängige Kombination der je zwei Lösungen für den Einzelkreislauf. Dementsprechend tauschen diese Strömungsformen keine Wärme aus, und ihre Stabilitätsgrenzen und -charakteristiken entsprechen vollständig dem für den Einzelkreislauf gesagten.

Wird ein unsymmetrisch beheizter Kreislauf mit einem symmetrisch beheizten Kreislauf thermisch gekoppelt, so ergeben sich zwei durch stetige Variation der Beheizung β erreichbare sowie zwei isoliert liegende Konvektionsströmungen. Die übergelassene Wärme hat hierbei die Tendenz, die unterschiedlichen Stabilitätsgrenzen der beiden Paare von Lösungen einander anzugleichen. Die Stabilitätskarte zeigt darüber hinaus, daß eine Verbesserung der Kopplung stets eine Stabilisierung der vier Lösungsäste zur Folge hat.

5.0 Experimente

5.1 Die Strömung im einfachen Kreislauf

5.1.1 Experimenteller Aufbau

Im Experiment müssen aus konstruktiven und meßtechnischen Überlegungen einige Veränderungen gegenüber dem ideal kreisförmig angenommenen Aufbau der Theorie vorgenommen werden. Dadurch werden einige im Modell auftretende Größen verändert. Dies kann nachträglich durch eine geeignete Skalierung auch in der Rechnung berücksichtigt werden (vgl. Abs. 5.1.2). Die folgende Abb. 5-1 zeigt den experimentellen Aufbau.

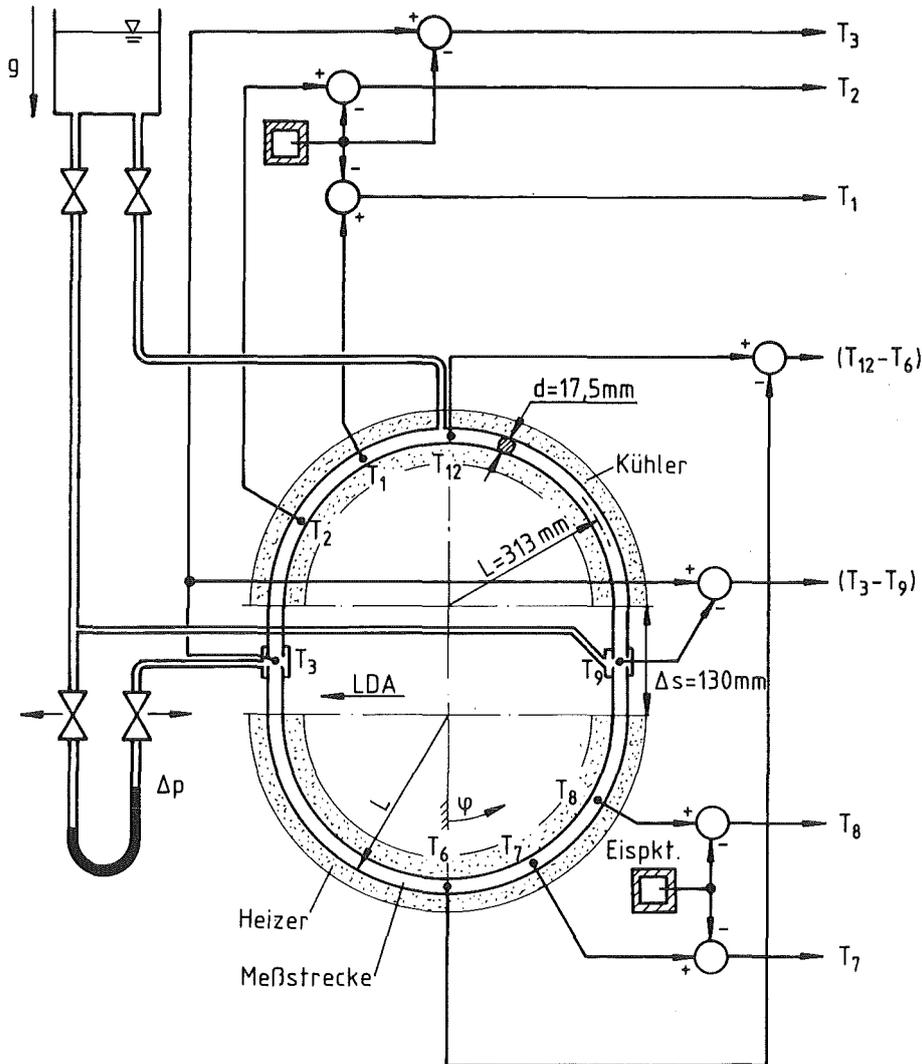


Abb. 5-1: Teststrecke und Instrumentierung des Experiments "LOOP 1"

Die eigentliche Meßstrecke wird aus zwei halbkreisförmigen Glasrohrbögen mit Radius L und Rohrrinnendurchmesser d gebildet, welche durch Zwischenelemente aus PVC verbunden sind. Die Verbindung ist so ausgeführt, daß die Innenkontur des Glasrohres an der Verbindungsstelle stetig zum nächsten Halbkreis fortgeführt ist. Die Geometrie des Kreises wird somit von einer ideal kreisrunden Form zu einer ovalen Form verändert, wobei die beiden geraden Teilstrecken jeweils die Länge Δs haben (vgl. Abb. 5-1). Im Innern der Meßstrecke befindet sich destilliertes Wasser als Testfluid.

Die Wandtemperatur in den punktierten Bereichen (vgl. Abb. 5-1) wird, für jedes Viertelkreissegment getrennt, durch temperierte Wasserkreisläufe kontrolliert. Im Detail ist dies experimentell realisiert durch eine turbulente Außenumströmung der eigentlichen Meßstrecke, wodurch ein guter Wärmeübergang erzielt wird. Dies entspricht mathematisch der Vorgabe einer Stufenfunktion für $T_w(\varphi)$ gemäß Abb. 5-2.

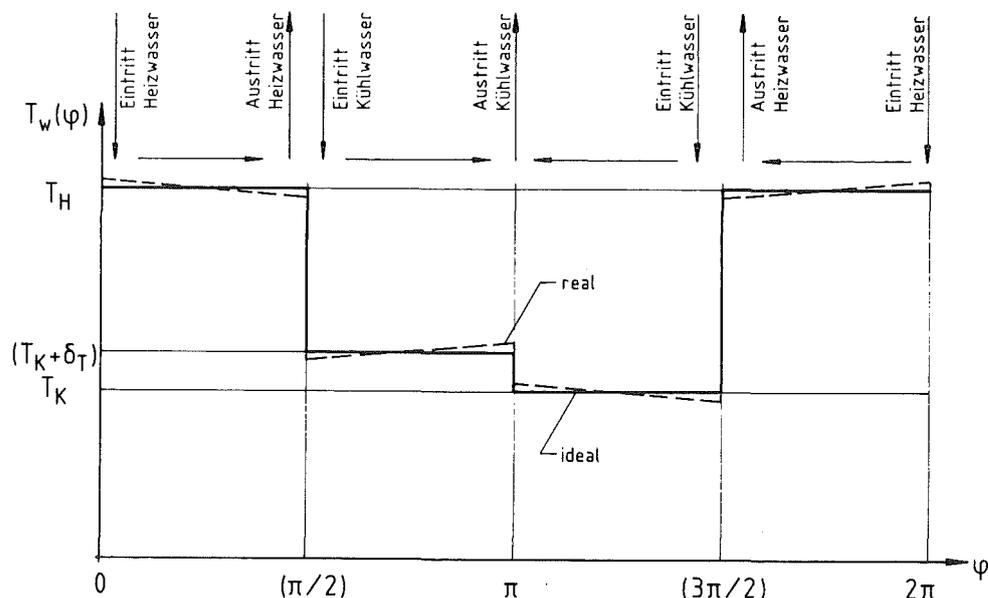


Abb. 5-2: Vorgabe der Wandtemperatur $T_w(\varphi)$ im Experiment

Diese ideale Stufenfunktion für die Wandtemperatur $T_w(\varphi)$ kann im Experiment naturgemäß nur näherungsweise realisiert werden. Abweichungen kommen durch die entsprechende Wärmeaufnahme bzw. -abgabe des Arbeitsmediums zustande. Bedingt durch einen hohen Durchsatz des Arbeitsmediums Wasser (ca. $1.5 \text{ m}^3/\text{h}$) liegen die eingezeichneten Temperaturabweichungen vom idealen Verlauf bei

typisch 0.05°C . Diese Abweichungen können durch entsprechende Meßpositionen der Thermoelemente in der Außenströmung bei der Berechnung der Beheizung B kompensiert werden (vgl. Abs. 5.1.3). Die zeitliche Konstanz der Temperaturen in der jeweiligen Außenströmung beträgt ca. 0.02°C .

Mit dieser Methode kann nun z.B. die untere Kreishälfte durch Vorgabe einer höheren Temperatur T_H beheizt und entsprechend die obere Hälfte durch T_K gekühlt werden. Dieser Fall mit $\delta T = 0$ entspricht dem symmetrischen Beheizungszustand. Man kann leicht zeigen, daß bei einer solchen Vorgabe von $T_w(\varphi)$ der Symmetriewinkel der Beheizung $\delta = 0$ wird (vgl. Abschn. 2.5). Zur Erzeugung einer Schiefsymmetrie der Beheizung ($\delta \neq 0$) wird im Bereich $\pi/2 < \varphi < \pi$ eine Wandtemperatur $T_K^* = T_K + \delta T$ eingestellt, während der Bereich $\pi < \varphi < 3\pi/2$ nach wie vor die Wandtemperatur T_K sieht. Man kann zeigen, daß eine solche Wandtemperaturverteilung einer Schiefsymmetrie der Beheizung ($\delta \neq 0$) äquivalent ist. Auf diese Weise kann das geometrische Verdrehen der Kühl- und Heizzonen durch Änderung der Wandtemperatur eines Viertelkreissegments ($\delta T \neq 0$) ersetzt werden.

5.1.2 Berücksichtigung der Versuchsgeometrie in der Theorie

Die Veränderung der Geometrie gegenüber dem ideal kreisförmigen Fall kann in der Theorie durch eine entsprechende Korrektur berücksichtigt werden. Zur Elimination des Druckgradienten wurde die Impulsgleichung über $0 < s < 2\pi L$ integriert. Durch die geänderte Geometrie im Experiment (vgl. Abb. 5-1) verlängert sich der Integrationsweg um die Länge der beiden geraden Zwischenelemente, d.h.

$$L_{\text{ges}} = 2\pi L \left\{ 1 + \frac{\Delta s}{\pi L} \right\} = 2\pi L (1 + \epsilon), \quad (5.1)$$

Wird die Impulsgleichung jetzt über die Lauflänge L_{ges} integriert, so tauchen im Auftriebsterm zusätzlich zwei Integrale über die konstanten Temperaturen in den Zwischenstücken $T(\pi/2)$ und $T(3\pi/2)$ auf. Der instationäre Term sowie der Reibungsterm müssen wegen des längeren Integrationsweges mit dem Faktor $(1 + \epsilon)$ multipliziert werden. Es kommt somit

$$(1 + \epsilon) \frac{du}{dt} = \frac{\alpha_0 g}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} T(\varphi) \sin \varphi d\varphi + \int_0^{\Delta s/L} T\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2} ds + \int_0^{\Delta s/L} T\left(\frac{3\pi}{2}\right) \sin \frac{3\pi}{2} ds \right] - (1 + \epsilon) R u \quad (5.2)$$

für die Impulsgleichung. Die Wärmetransportgleichung bleibt im übrigen unverändert, wenn man innerhalb der Zwischenstücke adiabate Ränder unterstellt. Dies ist zulässig, weil dort auch experimentell keine Beheizung bzw. Kühlung vorhanden ist. Es gilt in diesen Bereichen dann $T = \text{konstant}$.

Wir können die erhaltene Impulsgleichung (5.2) im bewährten Verfahren auswerten und erhalten mit der geänderten Skalierung

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{t}}{H_0} \quad , \\ u &= H_0 L x_1 \quad , \\ S_1 &= \frac{2 H_0 R L}{\alpha_0 q} \left\{ \frac{(1+\varepsilon)}{(1+2\varepsilon)} \right\} x_2 \quad , \\ C_1 &= \frac{R_1}{H_0} - \frac{2 H_0 R L}{\alpha_0 q} \left\{ \frac{(1+\varepsilon)}{(1+2\varepsilon)} \right\} x_3 \quad , \end{aligned} \quad (5.3)$$

ein vollkommen analoges Gleichungssystem (zu Gl. 2.11) mit leicht veränderten Parametern:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha (x_2 - x_1) \quad , \\ \dot{x}_2 &= \beta \left\{ \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right\} x_1 - x_1 x_3 - \left\{ 1 + K_{ne} |x_1|^{1/3} \right\} \\ &\quad + \beta \left\{ \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right\} \tan \delta \quad , \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \left\{ 1 + K_{ne} |x_1|^{1/3} \right\} . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Es wird deutlich, daß wegen der veränderten Geometrie die effektive Beheizung B_{eff} eingeht gemäß

$$B_{\text{eff}} = \beta \left\{ \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right\} . \quad (5.4a)$$

5.1.3 Meßtechnik

Für einen Vergleich zwischen dem in Abschnitt 2.3 hergeleiteten Modell und dem durchgeführten Experiment ist die Erfassung der querschnittsgemittelten Größen wie Strömungsgeschwindigkeit $u(t)$, sowie Temperatur $T(\varphi, t)$ erforderlich. Darüber hinaus müssen für jeden Meßpunkt die Beheizungskenngrößen B und δ aus der Wandtemperaturverteilung $T_w(\varphi)$ bestimmt werden.

Hierzu werden in der Meßstrecke mit Hilfe von Thermoelementen und einem Laser-Doppler-Anemometer zunächst lokale Werte an den eingezeichneten Positionen registriert (vgl. Abb. 5-1). Die entsprechenden Messungen werden immer exakt in der Mitte des Strömungsquerschnitts positioniert. Die Festlegung der Wandtemperaturverteilung $T_w(\varphi)$ geschieht über die Messung der mittleren Temperaturdifferenz $\Delta T = T_H - T_K$ in der coaxialen Außenströmung sowie der Differenz $\delta T = [(T_K + \delta T) - T_K]$ durch entsprechend positionierte Thermoelemente (vgl. Abb. 5-2). Hierbei wird durch geschickte Positionierung die Temperaturänderung des Arbeitsmediums durch Wärmeaufnahme bzw. -abgabe, bei der Differenzbildung eliminiert.

Mit den Meßgrößen ΔT und δT ist die Wandtemperaturverteilung $T_w(\varphi)$ gemäß Abb. 5-2 bis auf ihr mittleres Temperaturniveau bekannt. Wir können deshalb die Fourierkoeffizienten Q_1 und R_1 des Quellterms $Q(\varphi)$ aus der Beziehung

$$Q(\varphi) = H_0 T_w(\varphi) = Q_0 + Q_1 \sin \varphi + R_1 \cos \varphi + \dots \quad (5.5)$$

berechnen (vgl. Gl. 2.5, 2.6). Die dimensionslosen Kenngrößen der Beheizung werden aus den erfaßten Meßwerten deshalb gebildet mit den Beziehungen

$$\beta_{\text{eff}} = \frac{\alpha_0 g}{\pi H_0 R_L} \left\{ \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right\} \left\{ \Delta T - \frac{\delta T}{2} \right\}, \quad (5.6)$$

$$\tan \delta = \frac{\delta T}{(2 \Delta T - \delta T)}.$$

Zur Berechnung der dimensionslosen Zustandsgrößen $x_1 \sim u$, $x_2 \sim S_1$ und $x_3 \sim C_1$ stehen die Meßwerte \hat{u} aus der LDA-Messung, $(T_3 - T_9)$, $(T_{12} - T_6)$ sowie verschiedene T_1 aus Thermoelement-Messungen zur Verfügung (vgl. Abb. 5-1). Die Theorie zeigt, daß für $t \rightarrow \infty$ bei stationärer Strömung die höheren Fourierkoeffizienten der Temperaturverteilung $T(\varphi, t)$ in der Meßstrecke verschwinden (vgl. Roppo [26]). Es gilt dann

$$\overline{T}(\varphi, t) = T_0 + S_1 \sin \varphi + C_1 \cos \varphi. \quad (5.7)$$

Dieser Sachverhalt kann anhand der Messungen T_1 eindeutig bestätigt werden, die typischen Temperaturabweichungen vom idealen Verlauf gemäß Gl. (5.7) liegen bei 0.2°C . Die Beziehung (5.7) stellt daneben auch eine gute Näherung für den Temperaturverlauf im Falle zeitabhängiger Strömung dar. Aus diesen Gründen ist es zulässig die Zustandsgrößen x_2 und x_3 ausschließlich aus den

gemessenen Differenzen $(T_3 - T_9)$ und $(T_{12} - T_6)$ zu bestimmen. Wir benutzen die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\hat{u}_1 K_u}{H_0 L} , \\
 x_2 &= \frac{\alpha_0 g}{2H_0 RL} \left\{ \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right\} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} (T_3 - T_9) K_{39} \right\} , \\
 x_3 &= \frac{\alpha_0 g}{2H_0 RL} \left\{ \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right\} \cdot \left\{ \frac{R_1}{H_0} + \frac{1}{2} (T_{12} - T_6) K_{126} \right\} ,
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

zur dimensionslosen Darstellung der physikalischen Größen.

In Gl. (5.8) treten neben den gemessenen Werten und den experimentellen Konstanten noch die Formfaktoren K_u , K_{39} und K_{126} auf. Diese dienen zur Umrechnung der lokal im Strömungsquerschnitt erfaßten Werte in die für das Modell relevanten querschnittsgemittelten Werte. Die Formfaktoren sind durch entsprechende Eichmessungen (vgl. Abs. 5.14) festgelegt. Sie berücksichtigen somit das näherungsweise parabolische Geschwindigkeits- bzw. Temperaturprofil im Strömungsquerschnitt.

Alle Thermoelemente sind in Differenz geschaltet. Die auftretenden Spannungen werden über je einen hochwertigen, auf die entsprechenden Elemente abgeglichenen, Differenz-Gleichspannungsverstärker zur Messung geführt. Der absolute Fehler dieser aufwendigen Schaltung liegt typisch bei 0.05°C . Die verwendete LDA-Meßtechnik führt das erhaltene Streulicht auf einen Photomultiplier und das Signal dann nach entsprechender Bandpass-Filterung auf einen Transientenrekorder. Die Auswertung der Sequenzen übernimmt ein Micro-Rechner, welcher auf der Basis von mindestens 20 Nulldurchgängen die Frequenz der Doppler-Signale analysiert. Bedingt durch den Einsatz einer Frequenzverschiebung in beiden Teilstrahlen, sowie der langsamen aber genauen Analyse der Signale ist eine Auflösung mit der Genauigkeit von typisch 0.02 cm/sec im ganzen Geschwindigkeitsbereich, also auch bei extrem niedrigen Werten, gewährleistet. Der detaillierte meßtechnische Aufbau sowie die optische LDA-Konfiguration findet sich im Anhang (vgl. Abschn. 7.2).

5.1.4 Eichmessungen

Neben den Geometriegrößen tauchen in der Theorie die Konstanten H_0 und R auf, sowie die Formfaktoren K_u , K_{39} und K_{126} . Alle diese Größen können theoretisch

mit der Voraussetzung einer laminaren, eingelaufenen Strömung im geraden Kreisrohr berechnet werden. Es ist jedoch sinnvoll, ihre tatsächliche Größe durch Eichmessungen an der Testapparatur selbst zu bestimmen, weil an dieser Stelle Informationen zur wahren Verteilung der Zustandsgrößen über dem Strömungsquerschnitt notwendig sind. So wird das ideal parabolische Geschwindigkeits-Profil zum Beispiel aufgrund der Krümmung der Meßstrecke, der verschiedenen Übergänge sowie der eingebauten Thermoelemente sicherlich nur eine Näherung für das tatsächliche Profil darstellen.

Die Eichmessungen werden ausgeführt, indem der erläuterte Aufbau (vgl. Abb. 5-1) an einer Verbindungsstelle geöffnet wird. Durch lange gerade Einlaufstücke wird dann eine laminare, eingelaufene Zwangsdurchströmung des Rohrsystems realisiert. Neben den angegebenen Meßgrößen (vgl. Abs. 5.1.3) wird zusätzlich mit Hilfe einer elektronischen Waage die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, durch eine hochempfindliche Druckmeßdose der Druckabfall über L_{ges} sowie die mittlere Ein- und Austrittstemperatur durch Verwirbelung an einem Platin-Widerstandsthermometer erfaßt. Dadurch wird es möglich die benötigten Konstanten zum Druckabfall, zum Wärmeübergang und die Formfaktoren am Versuchsstand selbst zu ermitteln.

Der Geschwindigkeitsgradient zur Rohrwandung und damit der Reibungseinfluß wird im eindimensionalen Modell charakterisiert durch die Reibungskonstante R (vgl. Gl. 2.4). Wir erhalten für die ideal laminare Kreisrohrströmung

$$R_{th.} = \frac{32 \nu_0}{d^2} = 0.084 \frac{1}{s} \quad (5.9)$$

Experimentell hingegen ermitteln wir aus dem gemessenen Druckabfall Δp über der Lauflänge L_{ges} sowie der gemessenen mittleren Strömungsgeschwindigkeit u den Wert

$$R_{exp.} = \frac{\Delta p}{u \nu_0 L_{ges.}} = 0.12 \frac{1}{s} \quad (5.10)$$

Beide Werte gelten für eine Fluidtemperatur von 30°C.

Die theoretische Bestimmung des Wärmeübergangs zwischen der turbulente Außenströmung und dem Testfluid ist unter der Annahme einer Reihenschaltung dreier Wärmewiderstände (vgl. z.B. Schlünder [27]) gleichfalls möglich. Es sind dies im einzelnen der Wärmeübergang von der laminaren Strömung im Rohr-

innern zur Glaswand, Wärmeleitung in der Rohrwand sowie der Übergang von der Glaswand an die turbulente Außenströmung. Wir erhalten bei Berücksichtigung von empirischen Beziehungen für die Einzelübergänge die folgenden Relationen für den im Modell auftretenden Koeffizienten

$$H_{th.}(x_1) = 4.2 \cdot 10^{-3} \left\{ 1 + \left(\frac{|x_1|}{24} \right)^{1/3} \right\} \frac{1}{s} . \quad (5.11)$$

Hierbei ist bereits berücksichtigt, daß eine Abhängigkeit des Wärmeübergangs von der Strömungsgeschwindigkeit x_1 in der Meßstrecke ausschließlich beim Wärmeübergang von der laminaren Innenströmung an die Glaswand auftreten kann.

Dieser Wärmeübergang kann auch experimentell bestimmt werden, wenn bei bekannter Strömungsgeschwindigkeit u sowie fixierter Temperatur der Außenströmung $T_H = T_K$, der Anstieg der mittleren Temperatur des Fluids in der Teststrecke erfaßt wird. Wir erhalten bei einer solchen Vorgehensweise die Beziehung

$$H_{exp.}(x_1) = 8.2 \cdot 10^{-3} \left\{ 1 + \left(\frac{|x_1|}{24} \right)^{1/3} \right\} \frac{1}{s} . \quad (5.12)$$

Für alle weiteren Betrachtungen werden jeweils die experimentell ermittelten Werte zugrunde gelegt. Diese sind aufgrund der aufwendigen und mit hoher Genauigkeit reproduzierbaren Eichmessungen als zuverlässiger zu betrachten als die aus theoretischen Überlegungen hergeleiteten Werte. Wir erhalten somit für den dimensionslosen Stoffparameter α den Wert

$$\alpha_{exp.} = \frac{R_{exp.}}{H_{o,exp.}} = 15.05 . \quad (5.13)$$

Die Ausmessung der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile in den maßgeblichen Strömungsquerschnitten (vgl. Abb. 5-1) wird für jeweils zehn Werte der Beheizung β ausgeführt. Die eingeführten Formfaktoren (vgl. Gl. 5.8) ergeben sich hierbei zu

$$K_u = 0.52 + 0.098 |u| ,$$

$$K_{39} = 0.85 , \quad (5.14)$$

$$K_{126} = 1.0 .$$

Aus diesen Konstanten sind bereits Schlußfolgerungen auf die tatsächlich vorhandenen Profile der Zustandsgrößen möglich. Auf eine ausführliche Darstellung der dreidimensionalen Effekte in Abs. 5.1.53 sei hier verwiesen. Darüber hinaus sind die Diagramme aus den Eichmessungen zum Druckverlust und Wärmeübergang im Anhang eingefügt (vgl. Abschn. 7.2).

5.1.5 Ergebnisse

Der Symmetriewinkel der Beheizung wird im vorliegenden Experiment, entsprechend den theoretischen Rechnungen, auf zwei Werte eingestellt. Neben dem symmetrischen Beheizungszustand ($\delta = 0^\circ$) wird eine Unsymmetrie von $\delta = + 10^\circ$ gewählt.

5.1.51 Der symmetrische Beheizungsfall mit $\delta = 0^\circ$

Ausgehend vom isothermen Zustand mit $\Delta T = B = 0$, wird die Beheizung B quasi-stationär erhöht. Dies geschieht in kleinen Schritten, nach welchen dem System stets eine Anpassungszeit von mehreren Stunden gewährt wird. Das mittlere Temperaturniveau wird stets auf 30°C gehalten, so daß die Temperaturen T_H und T_K symmetrisch um diese Mittentemperatur liegen.

Im Bereich $0 < B < 1A$ werden keine Netto-Volumenströme im Kreislauf beobachtet. Das System ist im Sinne eines eindimensionalen Modells in Ruhe und die gemessene Temperaturdifferenz ($T_3 - T_9$) verschwindet dementsprechend bis auf kleine Schwankungen. Hingegen befindet sich die Temperaturdifferenz ($T_{12} - T_6$) gerade auf dem Wert, welcher sich durch den Beheizungszustand ΔT ergibt, d.h. $(T_{12} - T_6) \cong - \Delta T$. Der Zustand kann aus diesen Gründen als Ruhelösung oder Wärmeleitungszustand aufgefaßt werden, weil ein Wärmetransport vom beheizten zum gekühlten Bereich nur durch Diffusion erfolgen kann.

Bei einer Temperaturdifferenz entsprechend $B = 1A$ setzt die Konvektion sprunghaft ein. Dieses Ereignis bewirkt jeweils an allen wichtigen Zustandsgrößen nämlich \hat{u} , $(T_3 - T_9)$ sowie $(T_{12} - T_6)$ charakteristische Änderungen. Der Einsatz der Konvektion wird im Experiment mehrfach angefahren, wobei meist eine Strömung in positiver φ -Richtung auftritt. Dies ist offensichtlich auf eine kleine, jedoch entscheidende Unsymmetrie im Kreislauf zurückzuführen. Durch Variation von B in entgegengesetzter Richtung zeigt sich ein Abklingen der Strömung bei jeweils gleichem B . Deshalb ist festzuhalten, daß

der Konvektionseinsatz keine meßbare Hysterese aufweist.

Eine Strömung in negativer φ -Richtung bei Beginn der Konvektion kann, bedingt durch die kleine Unsymmetrie in der Anordnung nur in wenigen Fällen beobachtet werden, solange die Aufheizung quasistationär erfolgt. Diese Strömungsform kann jedoch jederzeit durch gezieltes Einbringen einer Unsymmetrie in die Versuchsanordnung eingestellt werden. Dies geschieht praktisch durch kurzzeitige Änderung der Wandtemperatur eines Viertelkreissegments (vgl. Abb. 5-1).

Die einsetzende Konvektionsströmung ist für beide Strömungsrichtungen zunächst stationär, d.h. eine leichte Erhöhung der treibenden Temperaturdifferenz $\Delta T \sim B$ führt stets nach kurzem Einschwingen wieder zu einem zeitlich konstanten Verlauf der Zustandsgrößen. In Abb. 5-3 ist ein oszillatorisch stabiler Einschwingvorgang gezeigt. Nach einer deutlichen Änderung von $\Delta T \sim B$ zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die dazugehörige stationäre Lösung von den Zustandsgrößen $\hat{u} \sim x_1$ und $(T_3 - T_9) \sim x_2$ nach einigen Minuten angenommen.

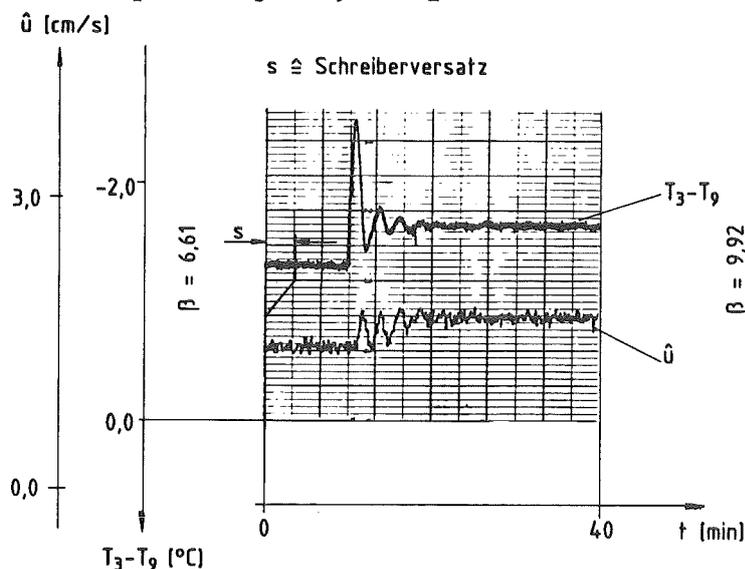


Abb. 5-3: Stabil stationäres Einschwingen bei $B = 9.92$

Im Bereich $14 < B \lesssim 15$ sind für beide Strömungsrichtungen ausschließlich stationäre Formen der Strömungen zu beobachten. In der folgenden Abb. 5-4 ist die gemessene Strömungsgeschwindigkeit x_1 dimensionslos über der Beheizung B aufgetragen. Die stationären Lösungen sind je nach Strömungsrichtung, gekennzeichnet mit den Symbolen Δ und \diamond , eingetragen. Zum Vergleich ist die auf der Basis des Rechenmodells ermittelte theoretische Kurve ebenfalls in Abb. 5-4 zu sehen.

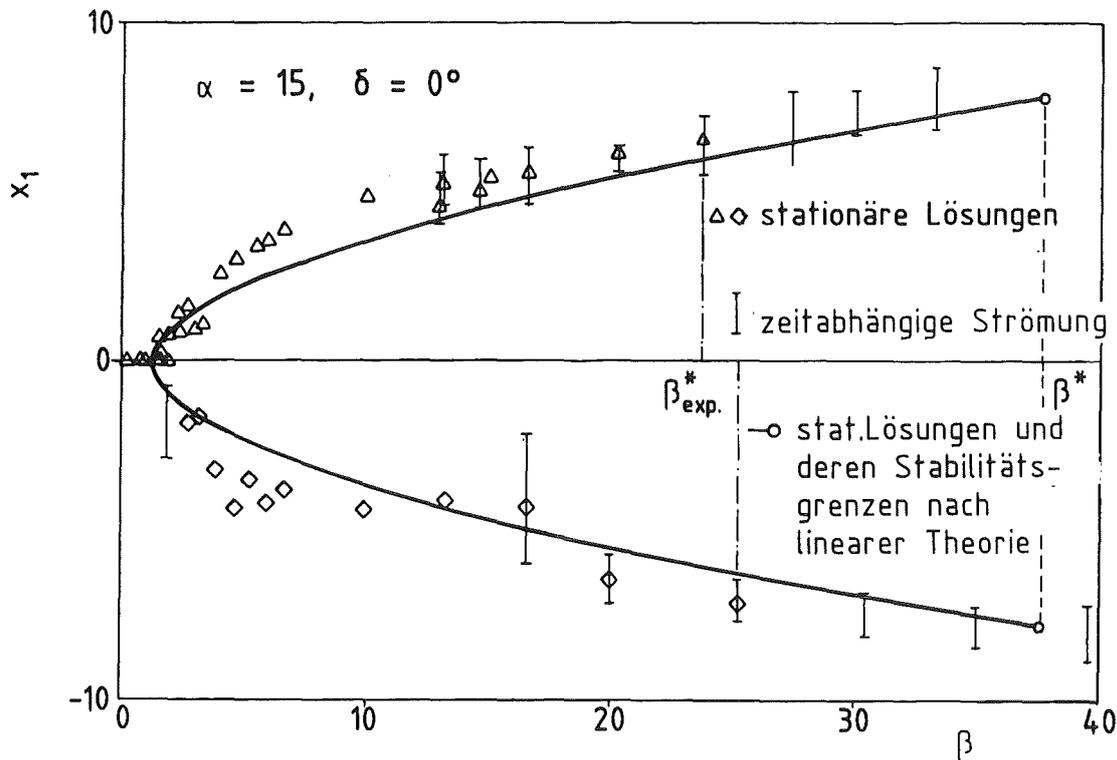


Abb. 5-4: Gemessene Strömungsgeschwindigkeiten $x_1 \sim u$ für symmetrische Wärmezu- bzw. abfuhr

Wir halten hier fest, daß zwei verschiedene stabile Konvektionszustände mit positiv oder negativ gerichteten Strömung beobachtet werden, welche im Experiment in etwa gleiches Gewicht haben. Es sind leichte Unterschiede im Existenzbereich der beiden Lösungen festzustellen. Sie lassen sich aus kleinen geometrischen Ungenauigkeiten der experimentellen Anordnung erklären.

Die Konvektionsströmung führt unabhängig von der Strömungsrichtung durch ihren Wärmetransport zum Abbau, der von den Wänden aufgeprägten Temperaturunterschiede. Es wird deshalb $(T_{12} - T_6) < -\Delta T$ gemessen. Dies hat einen linearen Anstieg der Größe x_3 in Abhängigkeit von β zur Folge. Gleichzeitig führt die mittransportierte Wärme im Aufstrom zu höheren Temperaturen als im Abstrom. Deshalb wird die Temperaturdifferenz $(T_3 - T_9)$, je nach Strömungsrichtung, von Null verschieden. Die Größe x_2 zeigt folglich wie $x_1(\beta)$ zwei verschiedene Lösungen mit der Proportionalität $x_2 \sim \sqrt{\beta}$.

Die weitere Erhöhung von β im Experiment führt für $\beta \geq 12.9$ bei positiver Strömungsrichtung bzw. $\beta \geq 16.5$ bei negativer Strömungsrichtung zu einem neuen Phänomen. Es können jeweils nach dem Einbringen von größeren Temperaturstörungen zeitweise instationäre Strömungsformen auftreten. Solche Tempe-

raturstörungen ergeben sich beispielsweise bei der Erhöhung von $\Delta T \sim B$. Daneben bleiben jedoch die stationären Zustände stabil erhalten, wenn nur kleine Temperaturstörungen eingebracht werden. Es kann auch geschehen, daß spontan aus instationärem Verhalten heraus der stationäre Zustand wieder angenommen wird. Ein typisches Beispiel ist in der folgenden Abbildung 5-5 zu sehen, welche eine Temperaturgeschichte zeigt.

Es ist zu erkennen, daß nach einer deutlichen Erhöhung des treibenden Temperaturgefälles ΔT und damit verbunden dem Einbringen einer größeren Störung, das System instabil wird und bei konstantem ΔT zunächst für etwa 12 Stunden in diesem zeitabhängigen Zustand bleibt. Danach wird in einem spontanen Übergang wieder die zur neuen Beheizung $B \sim \Delta T$ gehörende, stationäre Lösung eingenommen. Dieses Verhalten ist für die beiden Lösungsäste in einem größeren Bereich von B -Werten zu beobachten. Ab der jeweiligen oberen Grenze bei $B = B_{exp}^*$ kann die stationäre Lösung selbst bei sehr geringer Änderung der Beheizung B nicht mehr eingestellt werden. Diese Beobachtungen entsprechen den Voraussagen, welche das mathematische Modell beim Einzelkreislauf für den sogenannten unterkritischen Bereich macht.

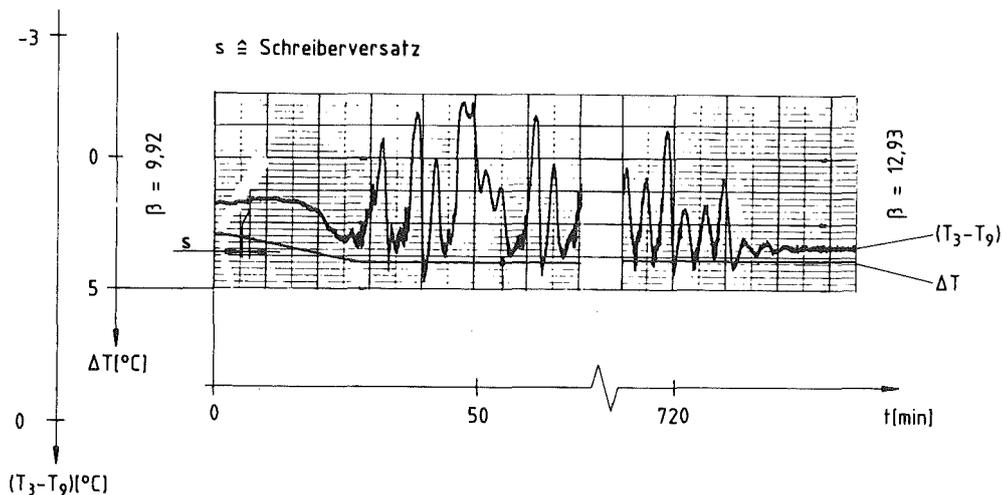


Abb. 5-5: Beispiel für unterkritisches Zeitverhalten bei $B = 12.93$

Der unterkritische Bereich ist in Abb. 5-4 erkennbar am Vorhandensein sowohl einer bedingt stabilen stationären Lösung, durch die Symbole \triangle und \diamond gekennzeichnet, als auch durch die Existenz einer zeitabhängig schwankenden Strömung, deren Amplituden durch vertikale Balken eingetragen sind. Weiterhin wird im Experiment beobachtet, daß die Wahrscheinlichkeit, einen zeitabhängigen Zustand einzustellen, mit wachsendem B stetig zunimmt. Demgegenüber nimmt die Wahrscheinlichkeit für die Realisierung einer stationären Lösung

stetig ab.

Die obere Bereichsgrenze bei $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{exp}}^*$ ist als Stabilitätsgrenze für die stationäre Lösung zu werten. Es liegt deshalb im Experiment eine unterkritische Instabilität vor. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß durch größere äußere Störungen am System vor Erreichen der Stabilitätsgrenze die stationäre Strömung in eine instationäre Strömung übergeht. Die stationäre Lösung bleibt jedoch stabil, wenn auf das System nur kleine Störungen einwirken.

Nach Überschreiten der Stabilitätsgrenze für die stationäre Strömungsform im Bereich $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{\text{exp}}^*$ sind nur noch zeitabhängige Zustände möglich. Wir können diesen Bereich als global instabil charakterisieren. In diesem Bereich nimmt die Schwankungsamplitude bei quasistationär gesteigerter Beheizung stetig zu. Dabei ist zunächst kein Wechsel im Vorzeichen bei x_1 bzw. x_2 , zu beobachten. Lediglich wenn große Störungen auf das System einwirken, finden wir Umkehrungen der Strömung für kurze Zeiträume, gefolgt von einer Verringerung der Störungsamplitude und einer Rückkehr zu den vorher bestehenden Schwankungen.

Für sehr hohe Werte der Beheizung im Bereich $\mathcal{R} > 120$ treten Folgen von Strömungsumkehrungen über beliebig lange Zeiträume auf. Dabei tritt die Strömungsumkehr in unregelmäßigen Zeitintervallen auf. Dies ist typisch für global instabiles Verhalten, welches in der Literatur auch als chaotisch bezeichnet wird. Ein typisches Beispiel für ein solches chaotisches Zeitver-

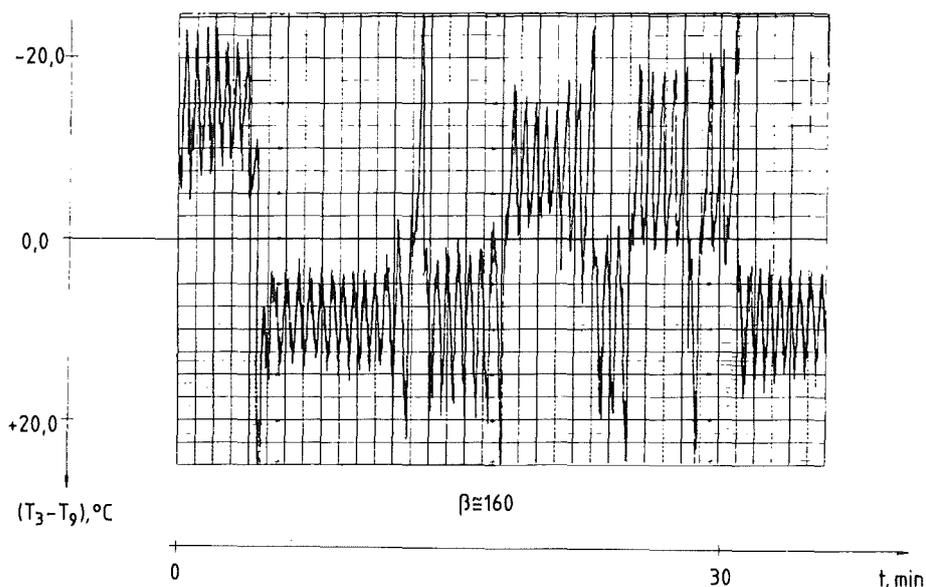


Abb. 5-6: Temperatursignal $(T_3 - T_9)$ im absolut instabilen Bereich bei $\mathcal{R} \approx 160$ mit mehrfacher Strömungsumkehr

halten ist in der folgenden Abbildung anhand der Temperaturdifferenz ($T_3 - T_9$) zu sehen. Jeder Vorzeichenwechsel der Temperaturdifferenz ($T_3 - T_9$) $\sim x_2$ geht einher mit der Umkehr der Strömungsrichtung in zufälligen Zeitabständen. Diesen Sachverhalt haben wir anhand von Strömungsanzeigern in der Teststrecke auch visuell direkt beobachtet.

Um näheren Aufschluß über Charakter und Ursache der zeitabhängigen Phänomene zu erhalten, haben wir jeweils Frequenzanalysen von den gewonnenen Temperatur- und Geschwindigkeitssignalen durchgeführt. Aus den Autoleistungsdichtespektren ist stets eine Leistungsspitze ablesbar. Dies trifft auch dann zu, wenn die Spektren breitbandigen Charakter haben. Die Frequenz der Leistungsspitzen ist im folgenden Diagramm (Abb. 5-7) über der dimensionslosen Beheizung aufgetragen. Es zeigt sich, daß eine gute Übereinstimmung mit den aus den Eigenwerten des Modells bestimmten Frequenzen besteht. Das Aussehen der gewonnenen Spektren ändert sich für wachsende β drastisch. Während im stabilen Bereich mit $\beta < 30$ praktisch Linienspektren anzutreffen sind, ergeben sich im global instabilen Bereich mit $\beta > 30$ ausnahmslos breitbandige Signalspektren. Ein Vergleich zwischen theoretisch berechneten und experimentell gemessenen Signalspektren ist in Abs. 5.1.53 gezogen.

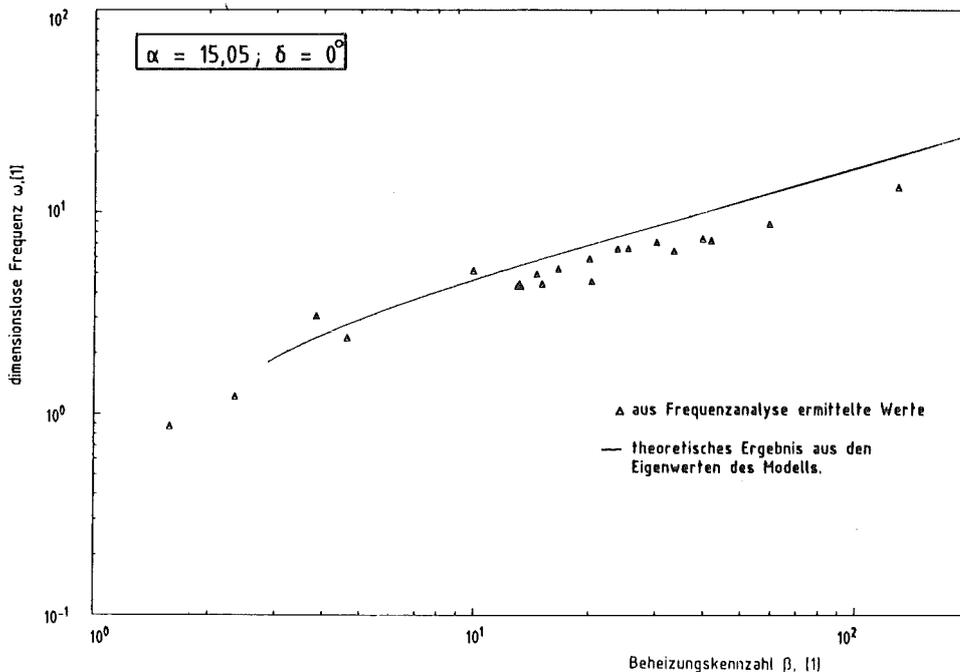


Abb. 5-7: Vergleich der experimentell und theoretisch ermittelten Frequenzen

5.1.52 Der unsymmetrische Beheizungsfall mit $\delta = 10^\circ$

Im Gegensatz zum symmetrischen Beheizungsfall mit $\delta = 0^\circ$ wird im hier behandelten Fall keine stabile Ruhelösung für $B > 0$ gefunden. Die Strömung setzt sich vielmehr stetig in positiver φ -Richtung in Bewegung sobald $B > 0$ eingestellt ist. Mehrfaches Anfahren des Experimentes führt stets zu einer Strömung in positiver φ -Richtung, während eine Strömung in negativer φ -Richtung bei Beginn der Konvektion nicht auftritt.

Die Strömung in positiver φ -Richtung bleibt dann bei Erhöhung der Beheizung ausschließlich stationär in dem Bereich $0 < B < 20.7$. Zeitabhängige Phänomene treten erst für deutlich höhere Beheizungen auf, wenn man zum Vergleich den symmetrischen Beheizungsfall heranzieht. Dabei sind die Beträge der gemessenen Zustandsgrößen x_i stets größer als die des symmetrischen Beheizungsfallles. In Abb. 5-8 sind die gefundenen stationären Strömungsformen in Gestalt der Zustandsgröße $x_1 = f(B)$ durch die Symbole Δ und \diamond eingetragen.

Eine stabile stationäre Strömung in negativer φ -Richtung kann im Bereich $4.7 < B < 7.9$ nur eingestellt werden, wenn geeignete Transienten bei der Aufheizung des Systems mit entsprechenden unsymmetrischen Wandtemperaturverteilungen angewandt werden. Ist ein stationärer Strömungszustand in diesem Bereich eingestellt, dann verharret die Strömung in diesem Zustand auch bei vorsichtiger Variation von B . Ein solcher Zustand ist deshalb bedingt stabil und bleibt erhalten, solange die Störungen nicht so groß werden, daß ein Übergang zur Lösung mit positiver Strömungsrichtung angeschlossen ist.

Es bleibt somit festzuhalten, daß im Experiment zwei verschiedene stabile stationäre Konvektionszustände gefunden werden, welche bedingt durch die Unsymmetrie der Beheizung nicht gleiches Gewicht haben. Es zeigt sich deutlich, daß bei quasistationärer Erhöhung der Temperaturdifferenz die Strömung in der positiven φ -Richtung stets auftritt und bis zu höheren Werten der Beheizung B stabil bleibt. Demgegenüber ist die Lösung mit negativer Strömungsrichtung isoliert. Sie kann deshalb nicht bei stetiger Parameterveränderung eingestellt werden. Ihr Stabilitätsbereich ist zudem deutlich kleiner und nach beiden Seiten hin begrenzt. Dies bedeutet, daß sowohl bei Erhöhung als auch bei Erniedrigung von B über die jeweiligen Stabilitätsgrenzen hinaus ein Übergang zur positiven Strömungsrichtung auftritt. Die Übergänge sind in Abb. 5-8 an den vertikalen Linien erkennbar, welche beide Äste verbinden.

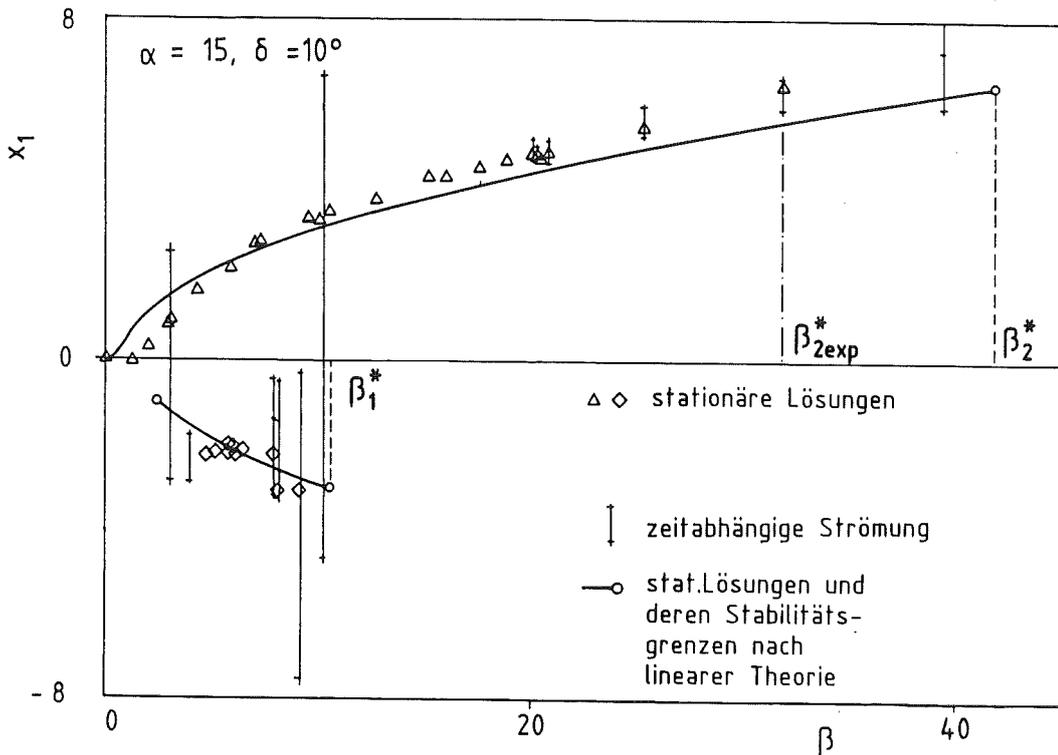


Abb. 5-8: Gemessene Strömungsgeschwindigkeit $x_1 \sim u$ für unsymmetrische Wärmezu- bzw. abfuhr

Die weitere Erhöhung der Beheizung führt für beide Strömungsrichtungen in einen Bereich, in welchem je nach Größe der Störungsamplitude sowohl lokal stabiles stationäres, als auch zeitabhängiges Verhalten beobachtet werden kann. Das Zeitverhalten der Zustandsgrößen entspricht hierbei dem, wie es für den symmetrischen Fall in Abb. 5-5 dargestellt ist. Die Ausdehnung des unterkritischen Bereiches ist in Abb. 5-8 erkennbar an dem parallelen Auftreten stationärer und zeitabhängiger Strömungen. Sie wird gleichfalls durch die Unsymmetrie der Beheizung beeinflusst. So findet sich beim positiven Lösungsast ein ausgedehnter unterkritischer Bereich, während der des negativen Lösungsastes relativ klein ist.

Die Amplituden der Strömungsschwankungen in den unterkritischen Bereichen bleiben begrenzt. Dies impliziert, daß der negative Lösungsast innerhalb des unterkritischen Bereiches infolge selbsterregter Schwankungen noch nicht verlassen wird. Erst bei $\beta = 10.2$ tritt ein Übergang aus dem unterkritischen Bereich des Lösungsastes mit negativer Strömungsrichtung auf den Lösungsast mit positiver Strömungsrichtung ein. In Abb. 5-9 ist dieser Übergang anhand der gemessenen Temperaturdifferenz ($T_3 - T_9$) veranschaulicht. Mit dem Wechsel

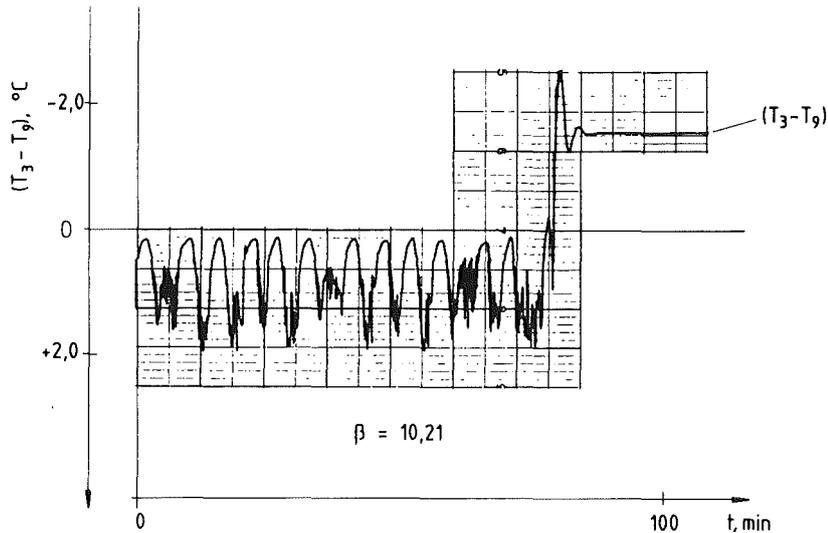


Abb. 5-9: Übergang von instabilem, unterkritischem Zeitverhalten der negativen stationären Lösung hin zur stabilen positiven Lösung ($\beta = 10.21$).

des Vorzeichens bei $(T_3 - T_9)$ geht eine einmalige Strömungsumkehr einher. Die Temperatur schwingt nach dem Übergang auf einen stationären Wert ein.

Für Beheizungen $\beta > \beta_{1\text{exp}}^*$ bzw. $\beta > \beta_{2\text{exp}}^*$ ist für beide Strömungsrichtungen kein stabiles stationäres Verhalten mehr anzutreffen. Für $\beta > \beta_{1\text{exp}}^*$ sind weder stationäre noch zeitabhängige Strömungen in negativer φ -Richtung zu beobachten. Bei der Strömung in positiver φ -Richtung wird für $\beta > \beta_{2\text{exp}}^*$ ausschließlich zeitabhängiges Verhalten mit der in Abb. 5-8 eingezeichneten Amplitude registriert.

Aus versuchstechnischen Gründen ist eine detaillierte Untersuchung des Bereichs $\beta > 50$ für den schiefssymmetrischen Beheizungsfall nicht möglich. Eine mehrfach wiederkehrende Strömungsumkehr kann deshalb im betrachteten Bereich nicht beobachtet werden. Vielmehr bleiben die Amplituden im global instabilen Bereich stets soweit begrenzt, daß ein Überschwingen mit einer nachfolgenden Strömungsumkehr nicht auftritt.

5.1.53 Dreidimensionale Effekte

Das Modell unterstellt für die Strömung einen in erster Näherung eindimensionalen Charakter. In Wirklichkeit werden jedoch Strömungsformen beobachtet, welche teilweise deutlich von der eindimensional zu betrachtenden laminaren Rohrströmung abweichen. Um gegebenenfalls Diskrepanzen zwischen dem theoretischen Modell und dem Experiment zu erklären, scheint es sinnvoll, die beobachteten Phänomene kurz aufzuzeigen sowie ihre Auswirkungen zu deuten. Die Untersuchungen zur dreidimensionalen Ausbildung der Strömung wurden detailliert für den symmetrischen Beheizungsfall beim Einzelkreislauf durchgeführt. Alle folgenden Ergebnisse sind deshalb streng nur für diesen Fall gültig. Qualitativ werden jedoch bei den anderen Experimenten ähnliche Phänomene beobachtet.

Vor Einsatz der Konvektion im Gesamtkreis werden bereits in den vertikal stehenden Rohrsegmenten, welche von oben her die Kühlertemperatur T_K und von unten die Heizertemperatur T_H sehen, kleine Strömungsgeschwindigkeiten gemessen. Es sind hierbei jeweils im Querschnitt Zonen mit Abströmung sowie Zonen mit Aufströmung mit dem LDA auflösbar. Die gemessenen Geschwindigkeiten liegen betragsmäßig bei $|\hat{u}| < 0.3$ cm/s. Der Vergleich mit einer Theorie von Gershuni & Zhukhovitskii [7] zeigt, daß für diese Temperaturdifferenz verschiedene Moden stationärer Zylinderkonvektion möglich sind.

Durch die Krümmung des Kreisrohres kommt es zu deutlichen Abweichungen vom ideal parabelförmigen Geschwindigkeitsprofil. Dies führt zu Profilen, deren Maximum aus der Rohrmitte zur Krümmungsaußenseite verschoben ist. Das Phänomen wird an allen Stellen im Kreis beobachtet und hat offensichtlich rein mechanische Ursachen. Während die unsymmetrischen Profile auch bei Zwangsdurchströmung zu beobachten sind, tritt an thermisch exponierten Stellen eine Verstärkung dieses Effekts bis hin zur lokalen Rückströmung auf. In der folgenden Abb. 5-10 sind gemessene Geschwindigkeitsprofile beispielhaft für die obere Kreishälfte dargestellt.

Die Strömung verläßt bei $\varphi = 270^\circ$ den Bereich mit hoher Wandtemperatur und kommt nach der Strecke Δs in eine Zone mit niedriger Wandtemperatur. Es kommt dann zu einem Rückfluß des abgekühlten Fluids an der inneren Wand entgegen der Hauptströmung. Das Rückströmungsgebiet (schraffiert in Abb. 5-10) existiert nur im Bereich $180^\circ < \varphi < 270^\circ$, wo die krümmungsbedingte Verzerrung

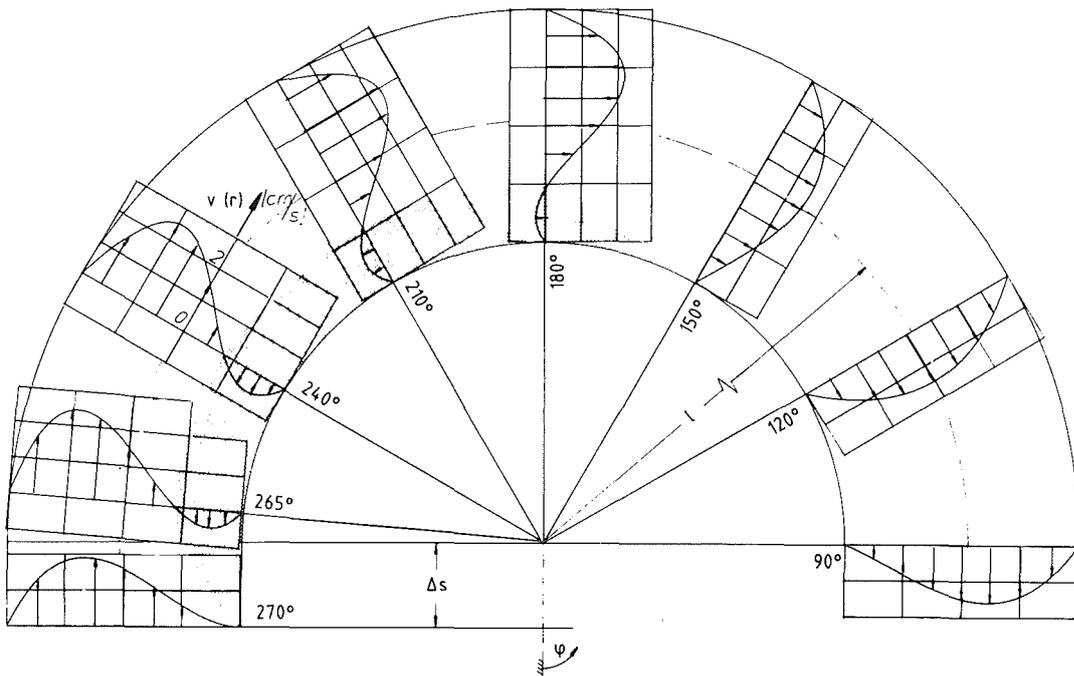


Abb. 5-10: Stationäre Geschwindigkeitsprofile mit Rückströmung bei $B = 9.92$

des Geschwindigkeitsprofils durch die Rückströmung des kalten Fluids an der Wand offensichtlich verstärkt wird.

Die Auswirkung im Bereich $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ ist genau entgegengesetzt. Hier fließt das an der Innenwandung liegende kalte Fluid in derselben Richtung wie die Hauptströmung ab und symmetriert deshalb das Geschwindigkeitsprofil. Die analogen Phänomene treten im übrigen in der unteren Kreishälfte auf oder aber wenn die Hauptströmung in umgekehrter Richtung läuft.

Der dreidimensionale Charakter der Strömung in Form von Rückströmungen stellt für das eindimensionale Modell einen Wärmeausgleich längs der Rohrachse und damit eine Art effektiver Wärmeleitung dar. Darüber hinaus ist auch eine Zunahme der Impulsverluste aufgrund größerer Geschwindigkeitsgradienten im Strömungsquerschnitt die Folge. Aus diesen Gründen muß man generell davon ausgehen, daß aufgrund der zunehmend dreidimensionalen Ausprägung der Strömung eine Zunahme der thermischen und mechanischen Verluste zu erwarten ist. Diese Eigenschaft tritt verstärkt bei hohen Beheizungen B auf und ist naturgemäß durch das Modell nicht erfaßt. Sie hat darüber hinaus das Potential, bei instabilem Zeitverhalten der Grundströmung die vorhandenen Amplituden abzubauen.

Ein Vergleich zwischen gemessenen und aus dem Modell berechneten Leistungsdichtespektren ermöglicht eine Identifikation dieser Zusammenhänge. Die folgende Abbildung 5-11 zeigt exemplarisch zwei Temperatursignale nebst -spektren für Zustände aus dem unterkritischen sowie überkritischen Bereich.

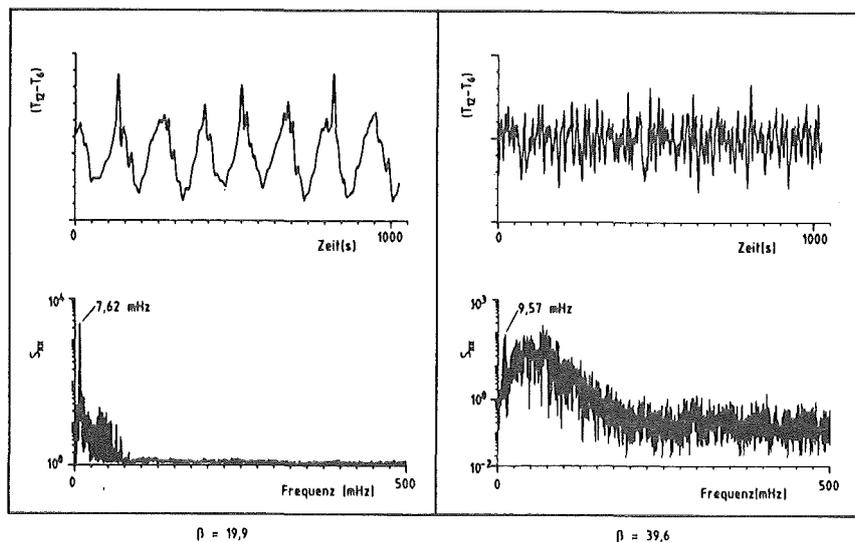


Abb. 5-11: Gemessene Autoleistungsdichtespektren aus dem unterkritischen und überkritischen Bereich

Markiert ist in beiden Spektren der Abb. 5-11 jeweils die mit dem eindimensionalen Modell harmonisierenden Leistungsspitze in dem Frequenzbereich von 7 - 10 mHz. Das rechte Spektrum weist jedoch deutlich einen breitbandigen Leistungsberg bei ca. 70 mHz auf. Diese höherfrequenten Anteile repräsentieren mit wachsendem β schließlich immer größere Leistungen. Damit wird dokumentiert, daß neben dem Leistungsanteil der Grundströmung auch erhebliche Leistung in höheren Frequenzen wandert, welche wiederum ihre Ursache nur in räumlich kleineren Zonen haben können.

Zur Erhärtung obiger Aussagen werden zum Vergleich die Leistungsdichtespektren nach der Theorie herangezogen. In Abb. 5-12 wird deutlich, daß das Modell nur wesentliche Leistungsanteile im Frequenzbereich 7 - 10 mHz liefert. Ursachen für die höherfrequenten Anteile, die auf eindimensionalen Strömungseffekten beruhen, können deshalb mit Sicherheit ausgeschlossen werden.

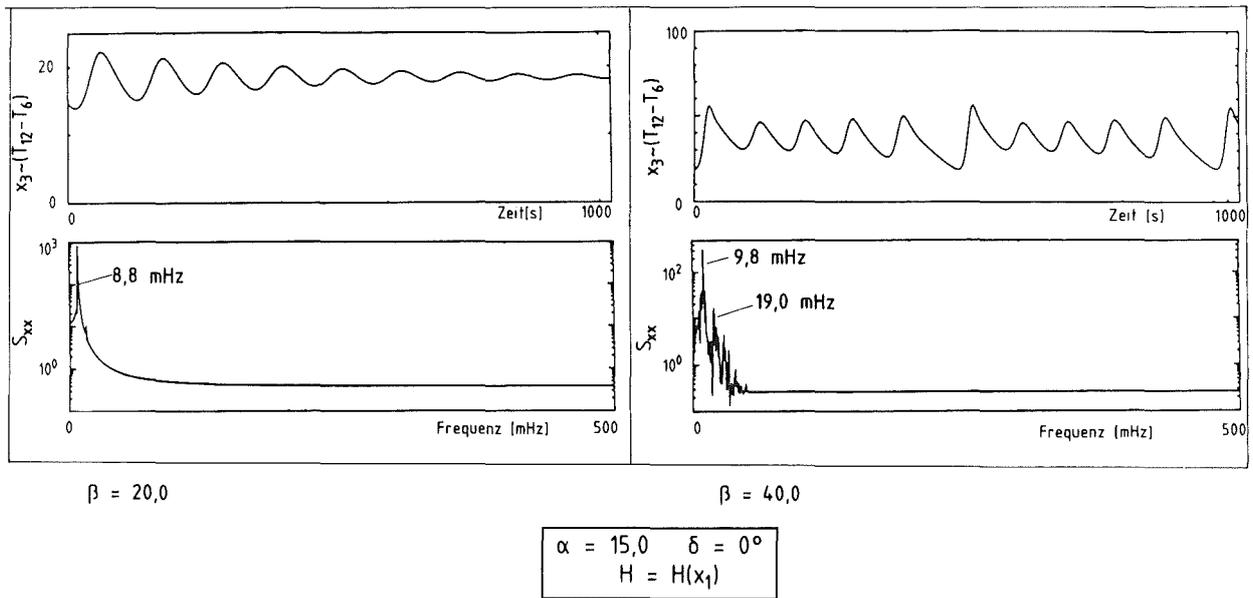


Abb. 5-12: Autoleistungsdichtespektren sowie Signale aus dem unterkritischen und überkritischen Bereich nach Theorie.

5.1.6 Zusammenfassung

Wir wollen die wichtigsten experimentellen Befunde bei der Strömung im einzelnen Kreislauf zusammenfassen. Hierzu betrachten wir zunächst den symmetrisch beheizten Kreislauf. Für wachsende Werte der Beheizung \mathcal{R} können wir vier verschiedene Bereiche im Experiment unterscheiden. Dieses sind im einzelnen ein Ruhezustand, ein Zustand ausschließlich stationärer Konvektionsströmung, ein Bereich, in welchem sowohl stationäre als auch zeitabhängige Strömung auftreten kann sowie ein Bereich, in welchem ausschließlich zeitabhängiges Verhalten der Strömung zu beobachten ist.

Die stationäre Konvektionsströmung kann in allen Fällen entweder in positiver oder aber in negativer φ -Richtung laufen. Welche Richtung sich etabliert, hängt von einer zufälligen Anfangsstörung beim Einsatz ab. Im unterkritischen Bereich werden bei größeren äußeren Störungen bereits zeitabhängige Zustände beobachtet, obwohl im Falle kleiner Störungen noch stationäre stabile Zustände erhalten werden. Im überkritischen Bereich schließlich finden wir chaotisches Zeitverhalten der Zustandsgrößen, verbunden mit Umkehrungen der Strömungsrichtung in zufälligen Zeitabständen.

Bei schiefssymmetrischer Beheizung des Kreislaufs kann nur noch ein stationärer Konvektionszustand bei stetiger Erhöhung der Beheizung eingestellt werden. Dieser Zustand wird im Vergleich zum symmetrisch beheizten Kreislauf deutlich stabilisiert. Damit bleibt die Strömung bis zu höheren Werten der Beheizung β stationär, ein unterkritischer Bereich bleibt jedoch erhalten.

Eine zweite, isoliert liegende Strömungsform mit entgegengesetzter Strömungsrichtung kann im Experiment durch gezieltes Einbringen von Störungen eingestellt werden. Dieser Zustand ist in einem relativ kleinen Bereich stabil stationär und sowohl bei Erhöhung als auch bei Reduktion der Beheizung tritt nach Überschreiten der Stabilitätsgrenzen ein Übergang zur anderen Strömungsrichtung auf.

5.2 Die Strömung in zwei thermisch gekoppelten Kreisläufen

Wir beschreiben im nachfolgenden ein Experiment, das in weiten Teilen dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Experiment zur Strömung in einem einfachen Kreislauf entspricht. So sind insbesondere der gewählte Aufbau, die eingesetzten Meßverfahren mit ihrer spezifischen Genauigkeiten sowie die verwendete Skalierung und Auswertung in wesentlichen Teilen identisch. Es werden deshalb in den folgenden Abschnitten ausschließlich die neuen Aspekte diskutiert, und wir verzichten auf eine wiederholte vollständige Darstellung mit Blick auf das oben beschriebene Experiment am einfachen Kreislauf. Dies gilt auch für die Ergebnisse.

5.2.1 Experimenteller Aufbau

Als wesentliche Veränderung sind im vorliegenden Experiment zwei Kreisläufe bei $\varphi_0 = 0^\circ$, d.h. unten, thermisch in Kontakt gebracht. Dies geschieht über einen Kupferblock, durch welchen beide Strömungen hindurchgeführt sind und deshalb entsprechend ihrer lokalen Temperaturdifferenz Wärme austauschen können. Das folgende Bild zeigt schematisch den Aufbau.

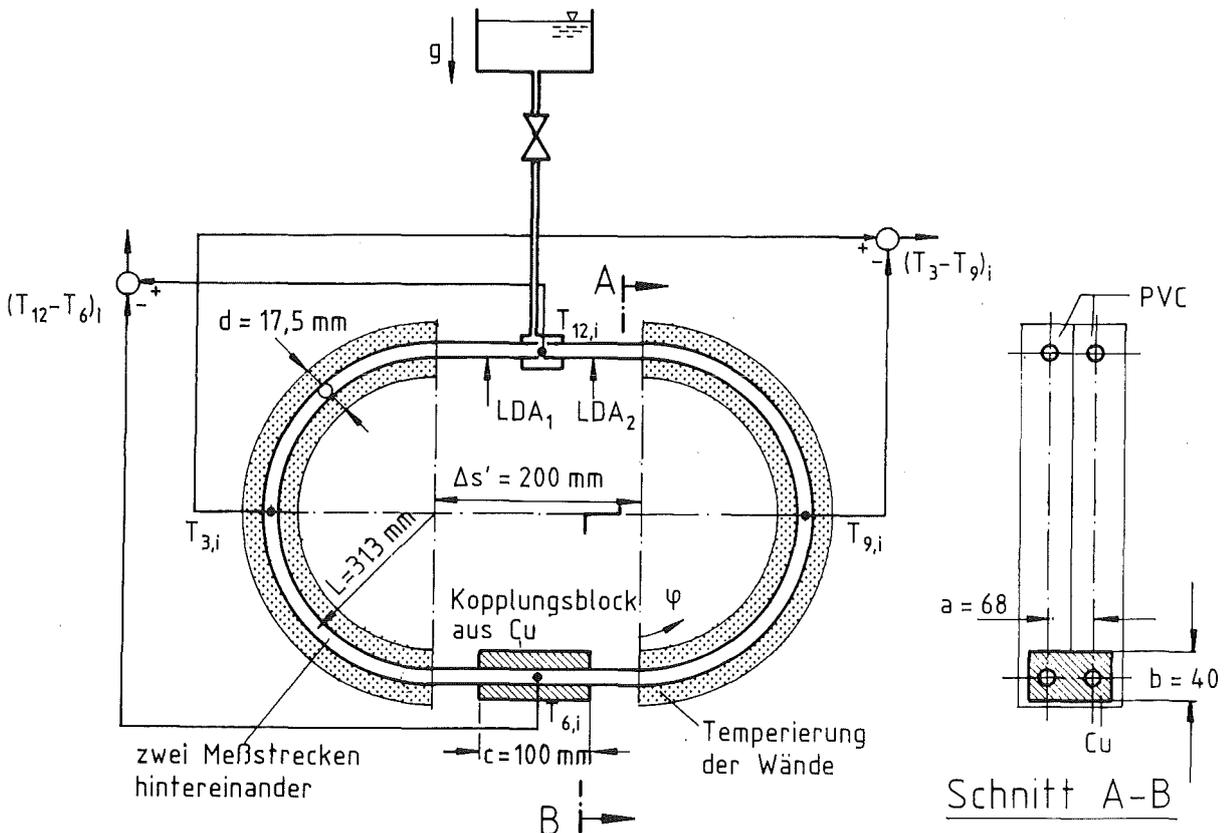


Abb. 5-13: Teststrecke und Instrumentierung des Experiments "LOOP 2"

Bedingt durch die Zielsetzung eine möglichst effektive Wärmekopplung zu realisieren, kommt es zu langen horizontalen Zwischenstücken der Länge $\Delta s'$. Aus diesem Grund weicht die Geometrie sowohl von der idealen Kreisform als auch von der des vorangegangenen Experimentes im einzelnen Kreislauf ab. Wir können jedoch diesen Sachverhalt wiederum durch eine geeignete Skalierung der Modellgleichungen berücksichtigen.

Die Wandtemperatur in den punktierten Bereichen beider Kreise wird, prinzipiell analog zum Experiment im Einzelkreislauf durch eine koaxiale Außenströmung der Glasrohre vorgegeben. Im Kreislauf 1 kann in jedem Viertelkreissegment eine beliebige Temperatur eingestellt werden. Aus diesem Grund kann dort jedes gewünschte Wertepaar \mathbb{R}_1, δ_1 realisiert werden. Es sind deshalb sowohl symmetrische als auch schiefssymmetrische Beheizungszustände möglich (vgl. Abb. 5-2). In zwei MeBreihen werden in Anlehnung an die Theorie die Zustände mit $\delta_1 = 0^\circ$ und $\delta_1 = +10^\circ$ eingestellt. In Kreislauf 2 hingegen wird gezielt auf eine schiefssymmetrische Beheizung verzichtet. Dadurch wird eine einfachere Konzeption für die Thermostatierung der Außenströmung erreicht. So geben wir diesem Kreislauf in seiner unteren Kreishälfte die Wandtemperatur T_{H2} und entsprechend in seiner oberen Kreishälfte die Wandtemperatur T_{K2} vor. Dadurch wird ein symmetrischer Beheizungszustand mit $\delta_2 = 0$ erzwungen, während der Beheizungsparameter $\mathbb{R}_2 \sim (T_{H2} - T_{K2})$ beliebig eingestellt werden kann.

5.2.2 Berücksichtigung der Versuchsgeometrie in der Theorie

Wir erhalten aufgrund der horizontalen Zwischstücke der Länge $\Delta s'$ einen geänderten Integrationsweg für die Impulsgleichung. Es gilt

$$L'_{ges.} = 2\pi L \left\{ 1 + \frac{\Delta s'}{\pi L} \right\} = 2\pi L (1 + \varepsilon'). \quad (5.15)$$

Die Impulsgleichungen beider Kreise haben deshalb nach der geschlossenen Integration die Form ($i = 1, 2$)

$$(1 + \varepsilon') \frac{du_i}{dt} = \frac{\alpha_0 g}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_i(\varphi) \sin \varphi d\varphi - (1 + \varepsilon') P u_i. \quad (5.16)$$

Das Integral über die horizontalen geraden Teilstücke ergibt hierbei keinen Beitrag zum Auftriebsterm. Wie früher im Fall des einfachen Kreislaufs müssen

die Grundgleichungen des Systems in Form der veränderten Impulsgleichung (Gl. 5.16) und der ungeänderten Wärmetransportgleichung (Gl. 4.14) neu skaliert werden. Dies geschieht mit der nachfolgenden Beziehung:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\tau}{H_0} , \\
 u_1 &= H_0 L x_1 , & u_2 &= H_0 L y_1 , \\
 S_{11} &= \frac{2 H_0 R L}{\alpha_0 q} (1 + \epsilon') x_2 , & S_{21} &= \frac{2 H_0 R L}{\alpha_0 q} (1 + \epsilon') y_2 , \\
 C_{11} &= \frac{R_{11}}{H_0} - \frac{2 H_0 R L}{\alpha_0 q} (1 + \epsilon') x_3 , & & (5.17) \\
 C_{21} &= \frac{R_{21}}{H_0} - \frac{2 H_0 R L}{\alpha_0 q} (1 + \epsilon') y_3 .
 \end{aligned}$$

Wir erhalten nach Einführung dieser Skalierung den folgenden Satz dimensionsloser Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha (x_2 - x_1) , \\
 \dot{x}_2 &= \frac{\beta_1}{(1 + \epsilon')} x_1 - x_1 x_3 - x_2 + \frac{\beta_1}{(1 + \epsilon')} \tan \delta_1 , \\
 \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - x_3 - \eta K_w (x_3 - y_3) , & & (5.18) \\
 \dot{y}_1 &= \alpha (y_2 - y_1) , \\
 \dot{y}_2 &= \frac{\beta_2}{(1 + \epsilon')} y_1 - y_1 y_3 - y_2 , \\
 \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - y_3 - \eta K_w (y_3 - x_3) .
 \end{aligned}$$

Dieser Gleichungssatz (5.18) entspricht in seinem Aufbau wiederum vollständig demjenigen, welcher für die kreisrunden Meßstrecken hergeleitet wurde (vgl. Gl. 4.21). Es wird hier eine effektive Beheizung gemäß

$$\beta_{\text{eff}, i} = \frac{\beta_i}{(1 + \epsilon')} \tag{5.19}$$

als modifizierte Kennzahl für das Problem kennzeichnend.

5.2.3 Meßtechnik

In den beiden Kreisläufen wird in der Außenströmung jeweils

$\Delta T_i = T_{Hi} - T_{Ki}$ sowie in Kreislauf 1 zusätzlich der Meßwert $\delta T_1 = [(T_{K1} + \delta T_1) - T_{K1}]$ erfaßt. Mit diesen drei Meßwerten sind dann die Temperaturverläufe $T_{W1}(\varphi)$ bis auf ihr mittleres Niveau festgelegt. Während beim Einzelkreislauf das mittlere Niveau der Wandtemperatur keinerlei Einfluß auf die Modellgleichungen hat, müssen zur Herleitung der Gleichungen für die gekoppelten Kreisläufe einige Annahmen getroffen werden (vgl. Abschnitt 4.3).

So steckt insbesondere in der Forderung, ähnliche Beheizungs Zustände in beiden Kreisläufen zu haben, daß sowohl das mittlere Temperaturniveau in beiden Kreisläufen als auch die Beheizung B gleich sein müssen. Hierzu wird experimentell zusätzlich der Meßwert $\delta T_H = (T_{H1} - T_{H2})$ registriert. Mit den experimentellen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \delta T_H &= 0, \\ \left\{ \Delta T_1 - \frac{\delta T_1}{2} \right\} &= \Delta T_2, \end{aligned} \quad (5.20)$$

werden beide Voraussetzungen erfüllt. Die dimensionslosen Kennzahlen zur Charakterisierung des Beheizungs Zustandes definieren sich deshalb aus den Meßwerten zu

$$\begin{aligned} \beta_{\text{eff},1} &= \frac{\alpha_0 g}{\pi H_0 R L} \frac{1}{(1+\epsilon')} \left\{ \Delta T_1 - \frac{\delta T_1}{2} \right\}, \\ \tan \delta_1 &= \frac{\delta T_1}{(2\Delta T_1 - \delta T_1)}, \\ \beta_{\text{eff},2} &= \frac{\alpha_0 g}{\pi H_0 R L} \frac{1}{(1+\epsilon')} \Delta T_2, \\ \tan \delta_2 &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Im Interesse einer Reduktion des Meßaufwands wird im Experiment auf eine Vielzahl von Temperaturmessungen in der eigentlichen Konvektionsströmung beider Kreisläufe verzichtet. Es werden lediglich die Differenzen $(T_3 - T_9)_i$ sowie $(T_{12} - T_6)_i$ gemessen. Mittels zweier Laser-Doppler-Anemometer werden an den eingezeichneten Positionen (vgl. Abb. 5-13) wiederum die lokalen Ström-

mungsgeschwindigkeiten \hat{u}_i beider Kreisläufe erfaßt. Im weiteren wird eine dimensionslose Darstellung der Zustandsgrößen verwendet, welche sich aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\hat{u}_1 K'_u}{H_0 L} , \\
 y_1 &= \frac{\hat{u}_2 K'_u}{H_0 L} , \\
 x_2 &\cong \frac{\alpha_0 q}{2 H_0 R L} \frac{1}{(1+\epsilon')} \left\{ -\frac{1}{2} (T_3 - T_9)_1 K'_{39} \right\} , \\
 y_2 &\cong \frac{\alpha_0 q}{2 H_0 R L} \frac{1}{(1+\epsilon')} \left\{ -\frac{1}{2} (T_3 - T_9)_2 K'_{39} \right\} , \\
 x_3 &\cong \frac{\alpha_0 q}{2 H_0 R L} \frac{1}{(1+\epsilon')} \left\{ \frac{R_{11}}{H_0} + \frac{1}{2} (T_{12} - T_6)_1 K'_{126} \right\} , \\
 y_3 &\cong \frac{\alpha_0 q}{2 H_0 R L} \frac{1}{(1+\epsilon')} \left\{ \frac{R_{21}}{H_0} + \frac{1}{2} (T_{12} - T_6)_2 K'_{126} \right\} ,
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

ergibt.

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß mit den Messungen der Temperaturdifferenzen in den Meßstrecken lediglich Näherungen für die dimensionslosen Fourier-Koeffizienten x_2, y_2, x_3, y_3 der wahren Temperaturverteilungen $T_i(\varphi, t)$ erhalten werden. Dies resultiert daraus, daß die tatsächlichen Temperaturen an den Meßpositionen durchaus von den höheren Koeffizienten beeinflußt sind. Die Theorie liefert für die höheren Koeffizienten keine Aussagen wie im vorangegangenen Experiment im Einzelkreislauf und bestätigt lediglich die Konvergenz der zur Darstellung verwendeten Fourier-Reihe (vgl. Roppo [26]).

5.2.4 Eichmessungen

Die meßtechnische Bestimmung der Größen R und H_0 bleibt auch für dieses Experiment gültig, weil es sich um spezifische, auf ein differentielles Wegelement bezogene Größen handelt. Es ist jedoch zu erwarten, daß sich durch die geänderte Geometrie und Meßpositionen veränderte lokale Profile der Temperatur und Geschwindigkeit einstellen. Deshalb müssen die Formfaktoren K'_{39}, K'_{126} und K'_u aktuell bestimmt werden. Bei gleicher Anwendung der Meßmethode wie früher (vgl. Abs. 5.14) ergeben sich für beide Kreisläufe nahezu identische Werte. Wir benutzen deshalb die Mittelwerte

$$\begin{aligned} K'_u &= 0.61, \\ K'_{39} &= 0.85, \\ K'_{126} &= 1.0. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Im Fall des Doppelkreislaufs wird die experimentelle Bestimmung der thermischen Kopplungsintensität ηK_w notwendig. Hierin kann das Flächenverhältnis η leicht aus der bekannten Geometrie zu $\eta = 0.05$ bestimmt werden. Zur Festlegung der gesamten ausgetauschten Wärme und damit der Größe K_w werden fünf spezielle Versuche durchgeführt. Die Grundidee ist hierbei, einen der beiden Kreisläufe ausschließlich durch die an der Kopplungsstelle eingebrachte Wärme zu einer Naturkonvektionsströmung zu veranlassen.

Dies geschieht im Detail dadurch, daß Kreislauf 1 wie üblich mit $B_1 > 0$ und $\delta_1 = 0^\circ$ beheizt wird. Die sich einstellende Strömung verursacht an der Kopplungsstelle bei $\varphi_0 = 0^\circ$ eine, durch die Messung von $(T_{12} - T_6)_1$, bekannte Temperatur. Der Kreislauf 2 hingegen wird bei gleichem mittleren Temperaturniveau auf $B_2 = 0$, $\delta_2 = 0$ eingestellt. Dieser Kreislauf hat also isotherme Wände. Aufgrund der lokal am Kupferblock anliegenden höheren Temperatur stellt sich dennoch eine Wärmezufuhr ein, welche vom Modell noch nicht erfaßt ist. Wir gehen bei Berücksichtigung der dort zugeführten Wärme in diesem Spezialfall von einer virtuell anliegenden Temperaturdifferenz $\Delta T_{vir,2}$ aus, welche durch folgende Beziehung

$$\Delta T_{vir,2} = \left\{ \Delta T_2 - \frac{1}{2} \eta K_w (T_{12} - T_6)_1 \right\} \tag{5.34}$$

definiert ist. Sie ist durch die Messungen ΔT_2 und $(T_{12} - T_6)_1$ bis auf ηK_w festgelegt. Der sich einstellende Strömungszustand im Kreislauf 2 kann dann vermessen und mit den aus einer normalen Beheizung erhaltenen Werten mit $\Delta T_2 > 0$ verglichen werden. Somit kann ηK_w festgelegt werden. Die fünf Tests ergeben Werte im Bereich

$$0.2 \leq \eta K_w \leq 0.5. \tag{5.35}$$

Dabei steigen die Werte sukzessive mit Erhöhung von B_1 an. Dies bedeutet physikalisch, daß die Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit $|u_1|$ im Kreislauf 1 die Wärmekopplung deutlich intensiviert. Dieser Sachverhalt darf nicht verwundern, weil für große $|u_1|$ der Wärmeübergang zum Kupferblock deutlich verbessert wird (vgl. auch Abschn. 4.1). Für die erwähnten Tests werden stets

hohe Strömungsgeschwindigkeiten im Kreislauf 1 erzeugt, so daß gilt $|u_1| \gg |u_2|$. Die eigentlichen Experimente sind hingegen aufgrund der gemachten theoretischen Voraussetzungen charakterisiert durch $|u_1| \approx |u_2|$. Hier besteht eine deutliche Diskrepanz zur Situation bei der Eichmessung. Sie veranlaßt uns dazu, die Tests mit großen $|u_1|$ skeptischer zu betrachten und eine Kopplungsintensität von

$$\eta K_w \approx 0.2 \tag{5.36}$$

als realistisch anzunehmen.

5.2.5 Ergebnisse

5.2.5.1 Die Wärmekopplung zweier symmetrisch beheizter Kreisläufe mit $\delta_1 = \delta_2 = 0^\circ$

In der folgenden Abbildung sind zunächst gemessene Werte der Strömungsgeschwindigkeiten x_1, y_1 über der Beheizung B bzw. in der x_1 - y_1 -Ebene aufgetragen.

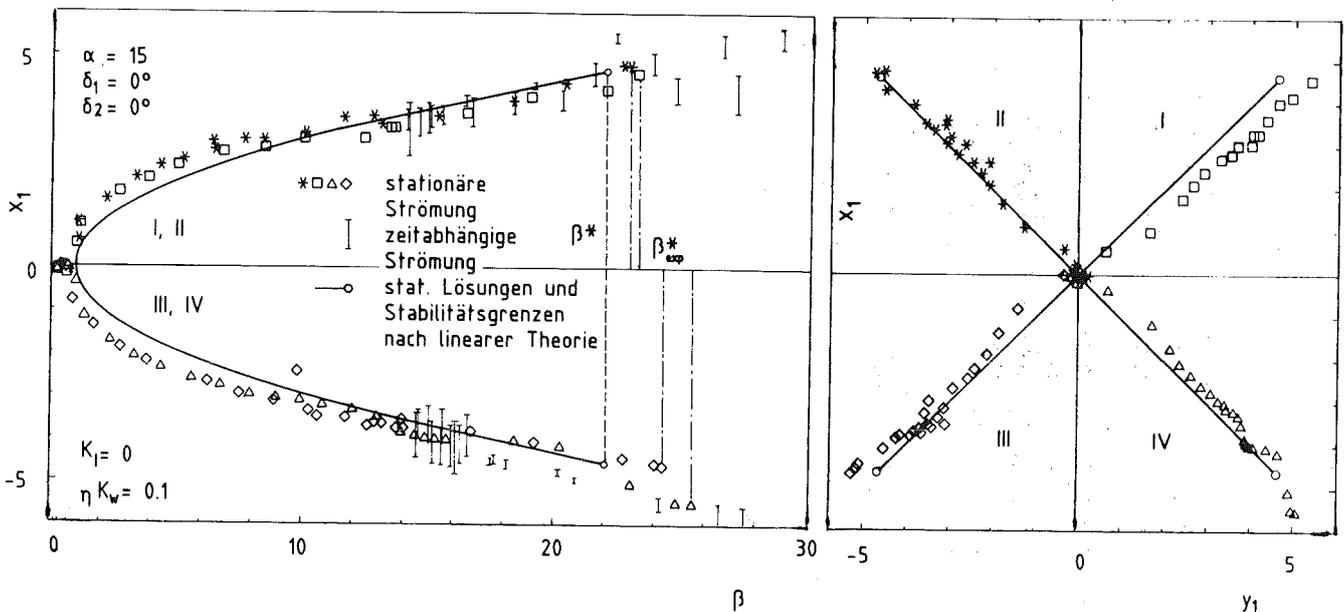


Abb. 5-14: Gemessene Strömungsgeschwindigkeiten $x_1 \sim u_1, y_1 \sim u_2$ bei symmetrischer Wärmezu- bzw. abfuhr in beiden Kreisläufen ($B_1 = B_2 = B$)

Die Erhöhung der Beheizung $B \sim \Delta T_1$ führt, ausgehend vom isothermen Zustand, durch einen Bereich, in welchem beide Kreisläufe keine merkliche Strömungsge-

schwindigkeit aufweisen. Diese Ruhelösung ist stabil für Werte der Beheizung im Intervall $0 < B \lesssim 0.8$.

Wird dieser Schwellwert überschritten, dann treten mit einem relativ scharfen Übergang vier verschiedene stationäre Konvektionsströmungen (I-IV) in Erscheinung, welche für $B \gtrsim 0.8$ zunächst stabil sind. Diese vier Lösungsäste kommen zustande durch die Kombination von je zwei möglichen Strömungsrichtungen pro Kreislauf. Sie unterscheiden sich durch die Vorzeichen der Strömungsgeschwindigkeit, während deren Beträge für festgehaltenes B nahezu identisch sind. Dieses Verhalten ist in Abb. 5-14 an der Position der Meßpunkte auf den Winkelhalbierenden in der x_1 - y_1 -Ebene erkennbar. Welche der vier Strömungsformen sich bei Überschreitung des Schwellwertes etabliert hängt jeweils von kleinen Anfangsstörungen ab. Im Experiment kann hierbei keine bevorzugte Lösung ausgemacht werden, d.h. alle Formen treten etwa gleich häufig auf. Es liegt daher der Schluß nahe, daß die vier Lösungen gleiches Gewicht besitzen. Die weitere Steigerung der Beheizung B führt zum Anwachsen des Betrags der Strömungsgeschwindigkeit in beiden Kreisläufen, wobei die Abhängigkeit $x_1 \sim \sqrt{B}$ und $y_1 \sim \sqrt{B}$ aus Abb. 5-14 in guter Näherung für alle vier Lösungen bestätigt werden kann.

Bei vorsichtiger Experimentierweise, insbesondere durch sehr feinfühligem Variation von B , sind die vier stationären Strömungsformen bis zu den strichpunktierten Linien in Abb. 5-14 bei $B = B_{\text{exp}}^*$ stabil zu erhalten. Diese kritischen Werte der Beheizung B_{exp}^* liegen für alle vier Lösungsäste eng beieinander und können als Stabilitätsgrenze im Falle kleiner Störungen aufgefaßt werden. Sie sind deshalb direkt dem theoretisch ermittelten Wert B^* zuzuordnen. In allen Fällen bleibt die Strömung stabil bis zu Werten $B_{\text{exp}}^* > B^*$. Die verschiedenen Strömungsformen sind also stabiler als die Theorie es vorher sagt. Dieser Sachverhalt kommt dadurch zustande, daß im verwendeten Modell für die gekoppelten Kreisläufe (vgl. Gl. 4.21) der stabilisierende Einfluß der nichtlinearen Wärmeübergangsbeziehung (vgl. Abschnitt 4.1) nicht erfaßt ist. Die ermittelten Werte B_{exp}^* im hier behandelten Experiment decken sich hingegen fast perfekt mit den Stabilitätsgrenzen, welche sich für die Strömung im Einzelkreislauf experimentell ergeben (vgl. Abb. 5-4). Ein Vergleich der Zahlenwerte kann den Tabellen im Anhang (Abschn. 7.2) entnommen werden.

Es kann jedoch auch für Beheizungen $B < B_{exp}^*$, also im unterkritischen Bereich, für die vier Strömungsformen instabiles Verhalten beobachtet werden. Dies tritt immer dann auf, wenn größere Störungen auf die Strömung einwirken. Diese s.g. unterkritischen Instabilitäten sind in Abb. 5-14 jeweils erkennbar an den vertikalen Balken, die im Bereich der stationären Lösungen liegen und den Amplituden der zeitabhängigen Strömung entsprechen. Der unterkritische Bereich ist gekennzeichnet vom Auftreten sowohl der stationären Strömung als auch der zeitabhängigen Strömung in Abb. 5-14. Die Ausdehnung der unterkritischen Bereiche ist für die vier Strömungsformen näherungsweise gleich. Der Vergleich der Verhältnisse mit denen bei der Strömung im Einzelkreislauf zeigt auch in diesem Punkt gute Übereinstimmung (vgl. Abb. 5-4).

Das beobachtete Zeitverhalten der Zustandsgrößen x_i, y_i entspricht sowohl im stabil stationären Bereich als auch im unterkritischen Bereich in seiner Qualität vollständig den Ausführungen in Abs. 5.1.51. Dennoch treten speziell im unterkritischen Bereich einige neue Phänomene auf, welche speziell durch die Wärmekopplung verursacht werden. So zeigt sich insbesondere, daß ein Nebeneinander von einer stationär stabilen Strömung, etwa in Kreislauf 1, und einer unterkritisch instabilen Strömung bei gleicher Beheizung in Kreislauf 2 in der Regel nicht über längere Zeiträume möglich ist. Vielmehr führt die aus dem oszillierenden Kreislauf 2 eingekoppelten Wärme im anderen Kreislauf zu merklichen Störungen. Die Folge davon ist, daß die bedingt stabile, stationäre Strömung in Kreislauf 1 instabil wird und Strömungsozillationen auftreten. Ein Beispiel für ein solches Verhalten ist der folgenden Abbildung 5-15 anhand der Zeitgeschichte der Temperaturdifferenzen $(T_{12} - T_6)_i$ und ΔT_i zu entnehmen. Die Beheizung $B \sim \Delta T_i$ ist während mehrerer Stunden davor und im Moment des Geschehens konstant gehalten.

Dieses Verhalten interpretieren wir so, daß im unterkritischen Bereich in aller Regel von beiden Kreisläufen der gleiche Zustand angenommen wird. Dieser ist entweder stabil stationär oder instabil zeitabhängig. Letzteres hat im Sinne der eingeführten Definitionen transient chaotisches Zeitverhalten zur Folge.

Für Werte der Beheizung $B > B_{exp}^*$ wird bei allen Lösungsformen ausschließlich zeitabhängige Strömung beobachtet. Selbstinduzierte Strömungsumkehrungen treten im untersuchten Bereich mit $0 < B < 100$ nicht auf. Gleichwohl kann die Umkehrung der Strömung durch größere Störungen herbeigeführt werden. Nach

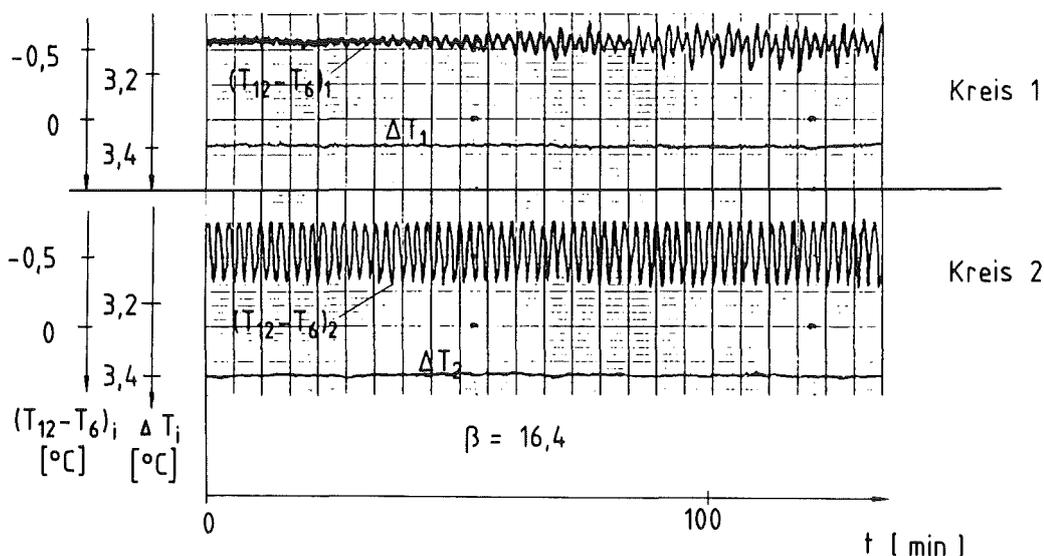


Abb. 5-15: Durch Wärmekopplung getriggert Übergang von stationär stabilem zu unterkritisch instabilem Verhalten in Kreislauf 1

einigen in unregelmäßigen Zeitabständen erfolgenden Umkehrungen der Strömungsrichtung stellt sich stets die Rückkehr zu einer eindeutig gerichteten Strömung mit moderaten Schwankungsamplituden ein. Die bei einem solchen Vorgang an der Kopplungsstelle übergehende Wärme reicht nicht aus um den zweiten Kreislauf zu Richtungswechseln der Geschwindigkeit zu veranlassen. Die Zeitgeschichten in diesem Bereich entsprechen in ihrer Qualität vollständig denjenigen, welche beim einzelnen Kreislauf auftreten.

5.2.52 Die Wärmekopplung eines schiefsymmetrisch beheizten Kreislaufs mit einem symmetrisch beheizten ($\delta_1 = 10^\circ$, $\delta_2 = 0^\circ$)

Bild 5-16 zeigt in der eingeführten graphischen Auftragung die Strömungsgeschwindigkeiten in beiden Kreisläufen. Ausgehend vom isothermen Zustand wird $\beta \sim \Delta T_1$ erhöht. Hierbei stellt sich in allen Fällen kontinuierlich eine Konvektionsströmung mit positiver Orientierung in Kreislauf 1 mit $x_1 > 0$ ein. Beide möglichen Strömungsformen, gekennzeichnet durch die Symbole \square , $*$ sind stationär und unterscheiden sich nur durch die Richtung der Strömung im zweiten Kreislauf durch $y_1 \geq 0$. Aufgrund der Symmetrie der Beheizung in Kreislauf 2 treten die Äste I und II im Experiment mit gleicher Häufigkeit auf. Dies wird auch in der x_1 - y_1 -Ebene der obigen Abb. 5-16 an der Symmetrie der Meßwerte bzgl. der Koordinate y_1 deutlich.

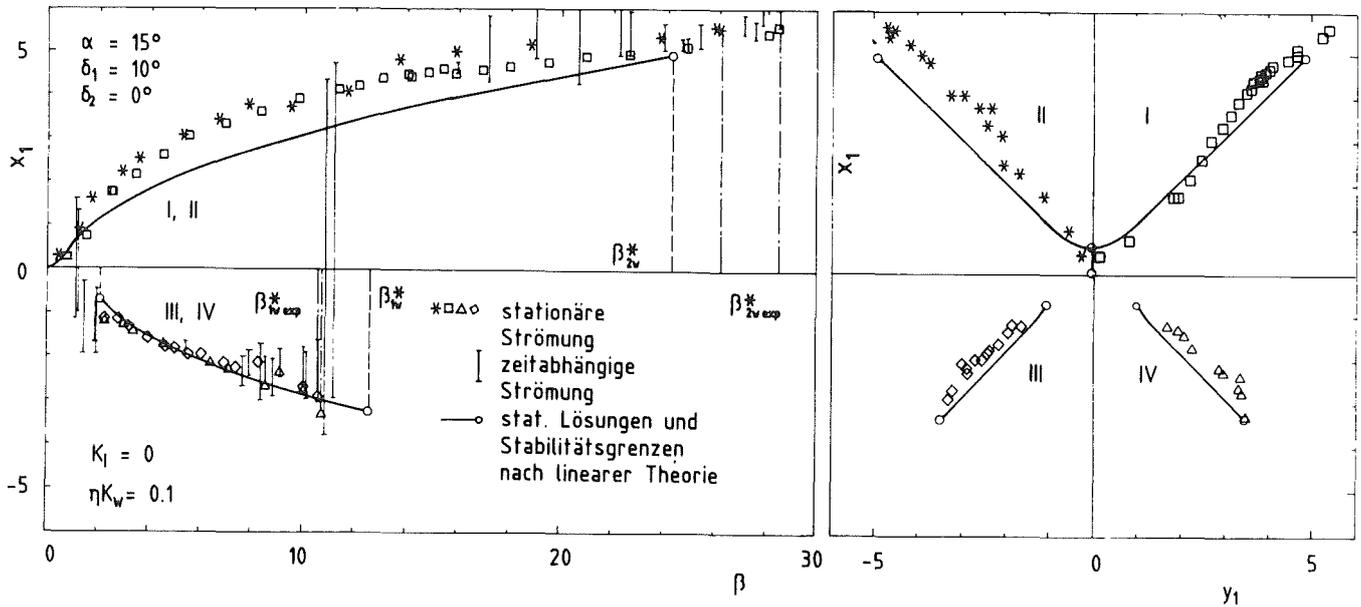


Abb. 5-16: Gemessene Strömungsgeschwindigkeiten $x_1 \sim u_1$, $y_2 \sim u_2$ bei unsymmetrischer Wärmez- bzw. -abfuhr in Kreislauf 1 und symmetrischer Beheizung in Kreislauf 2 ($\delta_1 = 10^\circ$, $\delta_2 = 0^\circ$, $B_1 = B_2 = B$)

Damit bleibt festzuhalten, daß in Kreislauf 1, der unsymmetrisch beheizt ist, keine Ruhelösung auftritt. Vielmehr stellen sich ausschließlich zwei stationäre Strömungstypen im Experiment ein. Der zweite Kreislauf, der symmetrisch beheizt wird, besitzt hingegen trotz der vorhandenen Kopplung einen Bereich, in welchem bei einer Beheizung von $B > 0$ nur verschwindende Strömungsgeschwindigkeiten gemessen werden. Hieraus kann gefolgert werden, daß für Kreislauf 2 nach wie vor eine Ruhelösung existiert. Die Ruhelösung wird bei steigender Beheizung B von einem scharfen Einsatz der Konvektionsströmung in eine der möglichen Richtungen abgelöst.

Bei einer weiteren Erhöhung der Beheizung B wachsen in beiden Kreisläufen die Beträge der Geschwindigkeiten an. Die Strömung bleibt bis zu Werten $B = B_{2w}^*$ stationär, wenn nur kleine Störungen auf das System einwirken. Die so ermittelten Stabilitätsgrenzen B_{2w}^* liegen für beide Lösungsäste bei vergleichbaren Werten. Dies kann aus den strichpunktierten Linien in Abb. 5-16 ersehen werden. Im Experiment bleibt die Strömung bis zu höheren Werten der Beheizung B stabil im Vergleich zu dem theoretischen Wert B_{2w}^* . Wir haben also $B_{2w}^{exp} > B_{2w}^*$. Es ist sinnvoll an dieser Stelle wiederum die für die Strömung im Einzelkreislauf experimentell erhaltenen Stabilitätsgrenzen zum

Vergleich heranzuziehen. Dieser Vergleich führt zu der Aussage, daß $B_{\text{exp}}^* < B_{2\text{wexp}}^* < B_{2\text{exp}}^*$ gilt. Dies bedeutet, daß experimentell der kritische Wert $B_{2\text{wexp}}^*$ für die wärmegekoppelten Kreisläufe, durch die Stabilitätsgrenzen des Einzelkreislaufs für symmetrische bzw. unsymmetrische Beheizung eingegrenzt wird.

Für Werte $B < B_{2\text{wexp}}^*$, also im unterkritischen Bereich, tritt für beide Strömungsformen I und II im Falle größerer Störungen bereits instabiles Verhalten auf. Dies ist in Abb. 5-16 durch die Balkensymbole im Existenzbereich der stationären Lösungen angezeigt, welche die gemessenen Amplituden bei zeitabhängiger Strömung wiedergeben. Auch die Tiefe des unterkritischen Bereichs ist für beide Lösungsäste I und II vergleichbar groß. Ausschließlich zeitabhängige Strömung bei moderaten Amplituden findet sich für Werte der Beheizung $B > B_{2\text{wexp}}^*$. Hierbei bleibt die Strömung im untersuchten Bereich $0 < B < 100$ in Kreislauf 1 im zeitlichen Mittel stets positiv orientiert. Strömungsumkehrungen treten ohne starke äußere Anregungen in beiden Kreisläufen nicht auf.

Eine Strömung in negativer φ -Richtung kann in Kreislauf 1 ausschließlich durch gezielte starke Störungen eingestellt werden. Wenn diese Strömung allerdings erzeugt ist, dann sind in einem bedingt stabilen stationären Bereich zwei Strömungstypen gekennzeichnet durch die Symbole \diamond und \triangle möglich. Sie unterscheiden sich lediglich durch das Vorzeichen der Geschwindigkeit in Kreislauf 2 mit $y_1 > 0$ oder $y_1 < 0$. Auch in diesem Fall bleibt die Symmetrie der Lösungen bzgl. der Phasenkoordinate y_1 erhalten. Bei einer Reduktion der Beheizung B werden beide Strömungsformen III und IV instabil. Es tritt dann eine einmalige Strömungsumkehr in Kreislauf 1 auf, während in Kreislauf 2 die Richtung der Strömung erhalten bleibt. Somit wird beispielsweise die Lösung III verlassen und die Lösung II eingenommen. Analoges gilt für die Strömungsform IV. Diese Übergänge sind in Abb. 5-16 an den vertikalen Balken zu erkennen, welche je zwei Lösungsäste verbinden.

Die vorsichtige Erhöhung der Beheizung B führt gleichfalls an eine Stabilitätsgrenze bei $B = B_{1\text{wexp}}^*$. Jenseits dieses Grenzwertes treten keine stationären Zustände mit negativer Strömungsrichtung in Kreislauf 1 auf. Hier kommt es deshalb ebenfalls zu einer Änderung der Strömungsrichtung im unsymmetrisch beheizten Kreislauf 1. Ein Bereich mit unterkritischen Instabilitäten ist bei $B < B_{1\text{wexp}}^*$ auch in der Nähe der Stabilitätsgrenze $B_{1\text{wexp}}^*$ festzustellen. Die-

ser unterkritische Bereich ist gleichfalls dadurch charakterisiert, daß die bedingt stabile stationäre Lösung im Falle größerer Störungsamplituden ihre Stabilität verliert und transient chaotisches Zeitverhalten einsetzt. Für Beheizungen $B > B_{1wexp}^*$ schließlich werden im Experiment keine Strömungen mit negativer Strömungsrichtung in Kreislauf 1 gefunden. Dies gilt sowohl für stationäre als auch für zeitabhängige Strömungen.

Sowohl bei Erhöhung als auch bei Reduktion der Beheizung B liegen die beobachteten Übergänge für beide Strömungsformen bei ähnlichen B -Werten. Dies wird anhand der strichpunktierten Linien bzw. vertikalen Balken in Abb. 5-16 deutlich. Ein Vergleich mit den theoretischen Verzweigungskurven zeigt, daß $B_{1wexp}^* < B_{1w}^*$ gilt. Diese Aussage impliziert, daß die Lösungen bereits für relativ niedrige Werte der Beheizung im Experiment ihre Stabilität verlieren. Ein Vergleich mit den Stabilitätsgrenzen der Strömung im Einzelkreislauf führt zu der Aussage $B_{1exp}^* < B_{1wexp}^* < B_{exp}^*$. Dies bedeutet, daß auch im Fall der isolierten Lösungsäste die Grenze für globale Instabilität bei Wärmekopplung aus den Ergebnissen für den einzelnen Kreislauf abgeschätzt werden kann.

Wir weisen darauf hin, daß in diesem Zusammenhang die theoretische Vergleichskurve, insbesondere die Festlegung der Kopplungsintensität $\eta_{K_w} = 0.1$, so erfolgt ist, daß eine bestmögliche Anpassung aller Stabilitätsgrenzen zwischen Modell und Experiment erzielt wird. Dies ist zulässig, weil eine zuverlässige Messung der Kopplungsintensität η_{K_w} nicht zur Verfügung steht. Der Vergleich zwischen dem, in Abs. 5.2.4 vorab ermittelten Wert $\eta_{K_w} = 0.2$ und dem hier durch die Stabilitätsuntersuchung erhaltenen Wert von $\eta_{K_w} = 0.1$ zeigt eine gute Übereinstimmung.

5.2.6 Zusammenfassung

Wir wollen nun die wichtigsten Beobachtungen bei den Experimenten zum Doppelkreislauf zusammenfassen. Hierzu betrachten wir zunächst den Fall, in welchem beide Kreisläufe einen symmetrischen Beheizungszustand haben. Für wachsende Werte der Beheizung beobachten wir im Experiment vier phänomenologisch unterschiedliche Bereiche. Dies sind im einzelnen ein Ruhezustand, ein Bereich ausschließlich stationärer Konvektionsströmung, ein Bereich, in welchem sowohl zeitabhängige als auch stationäre Strömung möglich ist sowie ein Bereich, welcher ausschließlich zeitabhängige Strömung zeigt.

Es sind für die Konvektionsströmung in allen Fällen vier verschiedene Lösungen möglich, welche als unabhängige Kombination der Lösungen im Einzelkreislauf aufgefaßt werden können. Bei diesen vier Strömungstypen verhalten sich sowohl die gemessenen Zustandsgrößen als auch die Stabilitätsbereiche genau so, wie es bei dem Experiment zum Einzelkreislauf beobachtet wird. Welche der Lösungen auftritt, hängt von einer kleinen Störung beim Einsatz der Konvektion ab. Aus diesem Grunde gehen wir davon aus, daß die beiden Kreisläufe zumindest bei stationärer Strömung keine Wärme austauschen. Dieser Umstand kann durch lokal an der Kopplungsstelle gleiche Temperaturen erklärt werden.

Im nächsten Schritt wird die Wärmekopplung eines schiefsymmetrisch beheizten Kreislaufs mit einem zweiten, symmetrisch beheizten Kreislauf betrachtet. Bei stetiger Variation der Beheizung können in diesem Fall nur zwei verschiedene Konvektionsformen eingestellt werden. Diese beiden Zustände sind stationär stabil bis zu höheren Werten der Beheizung. Damit verbunden verschwindet im unsymmetrisch beheizten Kreislauf die Ruhelösung, während im zweiten, symmetrisch beheizten Kreislauf für kleine Werte der Beheizung das Fluid in Ruhe bleibt. Die Lösungssymmetrie bleibt erhalten.

Zwei weitere, isoliert liegende Strömungsformen mit entgegengesetzter Strömungsrichtung im unsymmetrisch beheizten Kreislauf können durch geeignete Transienten bei der Variation der Beheizung realisiert werden. Diese stationären Strömungsformen werden jedoch sowohl bei Erhöhung als auch bei Reduktion der Beheizung nach Überschreiten der Stabilitätsgrenzen verlassen. Dies geschieht durch Umkehr der Strömung im unsymmetrisch beheizten Kreislauf bei Beibehaltung der Strömungsrichtung im anderen Kreislauf.

Die Stabilitätscharakteristik bei diesem Experiment zeigt ähnliche Züge wie beim Experiment zum schiefsymmetrisch beheizten Einzelkreislauf. Die ermittelten Werte der Beheizung an den Stabilitätsgrenzen weichen hingegen markant ab. Dieser Umstand weist darauf hin, daß eine Veränderung der Strömungsformen durch die an der Kopplungsstelle übergehende Wärme stattfindet.

6.0 Diskussion

Als erstes scheint es sinnvoll zu fragen, ob sich die Voraussetzungen des Modells im Experiment als zutreffend erwiesen haben. Aus den Eichmessungen zum Druckverlust läßt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Druckverlust und Volumenstrom im untersuchten Bereich feststellen. Zudem ist bei der maximal realisierten Geschwindigkeit ($Re_d = 1120$) die Strömung eindeutig laminar. Die Verwendung eines laminaren Reibungsgesetzes in der Impulsgleichung des Modells ist deshalb gerechtfertigt. Die Annahmen zum Wärmeübergang können ebenfalls als zutreffend bezeichnet werden, denn es ist aus den Eichmessungen ersichtlich, daß die gewählte Modellfunktion eine gute Beschreibung des Verlaufs der Meßwerte für den Wärmeübertragungskoeffizienten $H(x_1)$ liefert.

Die wichtige Voraussetzung über den eindimensionalen Charakter der Strömung trifft nach einer Analyse der gemessenen Strömungsprofile aber nur bedingt zu. Es werden Zonen mit überlagerter Zirkulationsströmung beobachtet. Der dreidimensionale Charakter der Strömung ist im allgemeinen jedoch nicht stark ausgeprägt, so daß zumindest in guter Näherung eine eindimensionale Beschreibung möglich ist. Die folgenden Vergleiche zwischen theoretischen Aussagen und experimentellen Befunden werden deshalb aufzeigen, inwiefern das eindimensionale mathematisch physikalische Modell die querschnittsgemittelten Zustandsgrößen des Problems beschreibt.

Wir wollen uns zunächst auf den Einzelkreislauf konzentrieren. Die Modellrechnungen weisen für eine symmetrische Beheizung vier verschiedene Stabilitätsbereiche aus. Bei ansteigender Beheizung existiert zunächst eine global stabile Lösung, die Ruhelösung. Von ihr zweigen stationäre stabile Lösungen mit entgegengesetzten Strömungsrichtungen ab. Für größere Werte der Beheizung existiert dann ein unterkritischer Bereich, in dem miteinander stabile stationäre und instabile periodische Lösungen existieren. Jenseits der Stabilitätsgrenze für die stationären Lösungen liegt der global instabile Bereich, welcher durch instabile stationäre und eine Schar instabiler periodischer Lösungen charakterisiert ist.

Alle diese Bereiche werden im Experiment im wesentlichen beobachtet. Es wird darüber hinaus auch eine gute quantitative Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment sowohl bei den Zustandsgrößen als auch für die verschiedenen Stabilitätsübergänge offensichtlich. Der scharfe Einsatz der stationären Kon-

vektionsströmung erfolgt im Experiment erst für Werte der Beheizung, die über dem theoretisch berechneten kritischen Wert für β liegen. Diese Diskrepanz kann durch eine Zylinderkonvektionsströmung in den vertikalen Rohrsegmenten erklärt werden. Diese hat die Tendenz, das treibende Temperaturgefälle abzubauen. Diesem Effekt schreiben wir zu, daß die Hauptströmung erst für höhere Beheizungen anläuft. Die beiden stationären Lösungsäste werden nahezu perfekt durch das Modell beschrieben. Dies gilt sowohl für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit x_1 als auch für die Temperaturverteilung, gekennzeichnet durch x_2 , x_3 . Darüber hinaus zeigen die Messungen auf, daß für stationäre Fälle die Temperaturverteilung aus den ersten Fourier-Koeffizienten bereits eine vollständige Beschreibung darstellt.

Die untere sowie die obere Begrenzung des unterkritischen Bereichs findet sich bei ähnlichen Werten der Beheizung, wie sie durch das Modell vorausberechnet wurden. In Anbetracht des Sachverhalts, daß diese Stabilitätsgrenzen extrem sensitiv gegenüber der experimentellen Störungsamplitude sind, dürfen die vorhandenen kleinen Abweichungen nicht überraschen. Der unterkritische Bereich ist im Experiment jedoch klar zu identifizieren. Dies wird dadurch deutlich, daß parallel zu den durch Störungen endlicher Amplitude angeregten instationären Lösungen auch stationäre stabile Lösungen anzutreffen sind. Der global instabile Bereich ist auch im Experiment durch regelloses instationäres Verhalten der Zustandsgrößen gekennzeichnet.

Die Theorie liefert für den unsymmetrischen Beheizungsfall einige markante Veränderungen. Diese sind im wesentlichen mit der nicht perfekten Verzweigung der stationären Lösung verbunden, welche durch die Unsymmetrie der Beheizung verursacht wird. Bei einer Erhöhung der Beheizung wird deshalb der begünstigte stationäre Lösungsast aus der Ruhe heraus glatt angenommen, der andere Lösungsast hingegen liegt isoliert. Der begünstigte stationäre Lösungsast bleibt stabil bis zu höheren Werten der Beheizung, während die zweite, isolierte Lösung ihre Stabilität schon für kleinere Werte der Beheizung verliert.

Alle diese Phänomene treten im Experiment in der erwarteten Form auf. Darüber hinaus werden sowohl die Werte der Zustandsgrößen als auch die Werte der Beheizung β an den Stabilitätsgrenzen durch das Modell quantitativ richtig wiedergegeben. Eine Ausnahme bildet das kleine Intervall, in welchem stabile periodische Strömungen existieren. Dieser stabile periodische Zustand konnte

experimentell bisher nicht beobachtet werden. Der Umstand ist offensichtlich auf den extrem kleinen Parameterbereich der Beheizung β zurückzuführen, in welchem dieser Zustand bei einem Symmetriewinkel von $\delta = 10^\circ$ existiert.

Diese Aussagen machen deutlich, daß das Modell auch die Auswirkungen einer schiefssymmetrischen Wärmez- und -abfuhr auf die querschnittsgemittelten Zustandsgrößen richtig beschreibt. Abweichungen treten nur an solchen Stellen der Versuchsanordnung auf, wo die dreidimensionale Ausbildung der Strömung Einfluß gewinnt. Zum Vergleich sind Zahlenwerte für die Stabilitätsübergänge und -grenzen im Anhang zusammengestellt (vgl. Abschn. 7.2).

An dieser Stelle sind die im Experiment beobachteten Amplituden bei zeitabhängigem Verhalten zu bewerten. Die Messungen zeigen, daß die Größe der Amplituden in der Nachbarschaft der Stabilitätsgrenzen beschränkt bleibt, und zwar sowohl im unterkritischen als auch im leicht überkritischen Bereich. Das Modell sagt hingegen in allen Fällen ein grenzenloses Anwachsen bis hin zur Umkehr der Strömung vorher. Wir geben für diese Diskrepanz zwischen Beobachtung und Vorhersage durch das Modell die folgende Erklärung:

Zunächst kann man davon ausgehen, daß durch die dreidimensionale Sekundärströmung, wie in Absatz 5.1.53 erläutert, im Experiment zusätzliche Dissipation zugegen ist. Diese hat die Tendenz, die aus der Hauptströmung resultierenden Amplituden abzubauen. Weiterhin deuten die Spektren der Temperatur- und Geschwindigkeitsgeschichten darauf hin, daß Strömungsschwankungen auch in kleineren räumlichen Zonen auftreten. Dies folgern wir aus den hochfrequenten Leistungsanteilen, welche einen vergleichbaren Beitrag zur Leistung liefern wie die Hauptströmung. Der Effekt wird von uns mit einer Wechselwirkung zwischen der zeitabhängigen Hauptströmung und einer anregbaren Sekundärströmung in Form der überlagerten Rezirkulation erklärt. Die zeitabhängige Sekundärströmung prägt deshalb in vergleichbarem Maße die Dynamik des Gesamtsystems. Das beschriebene Phänomen bleibt begrenzt auf die Umgebung der Stabilitätsgrenzen. Für höhere Beheizungen sind die Leistungsanteile der Sekundärströmung im Spektrum zwar noch präsent, aber der Leistungsanteil aus der Hauptströmung nimmt stark zu. Deshalb wird im oberen β -Bereich die Strömung wieder dominant von den Eigenschaften der Hauptströmung geprägt, und das Modell liefert eine gute Beschreibung der Vorgänge.

Zur Strömung in einer kreisrunden Rohrschleife bei symmetrischer Beheizung sind verschiedene Arbeiten anderer Autoren bekannt geworden. So haben Creveling et al. [3] Experimente durchgeführt und ein mathematisches Modell für die Vorgänge abgeleitet. Die Beheizung erfolgt in ihrer Anordnung durch Vorgabe eines Wandwärmestromes, die Kühlung durch Vorgabe einer festen Wandtemperatur. Bedingt durch die spärliche Meßtechnik ist ein quantitativer Vergleich ihrer Experimente mit unseren Ergebnissen nicht möglich. Dennoch werden von diesen Autoren die in dieser Arbeit diskutierten typischen Stabilitätsbereiche in gleicher Weise beobachtet. Die Autoren gehen für hohe Werte der Beheizung von einem laminar/turbulenten Umschlag der Strömung aus. Diese Einschätzung wird hingegen durch unsere experimentellen Beobachtungen in Zweifel gezogen. Demnach zeigen unsere Experimente laminares und zeitabhängiges Verhalten der Strömung für alle Werte der Beheizung. Dies schließt jedoch nicht aus, daß lokale Zeitgeschichten von Temperaturen stochastische Merkmale besitzen.

Als nächstes sei der Vergleich mit der Arbeit von Damerell und Schoenhals [4] gezogen. Diese Autoren haben für schiefssymmetrische Beheizung im Experiment nur eine Strömungsrichtung gefunden und dies auch durch ihre Modellgleichungen bestätigt. Die Realisierung des isolierten Strömungszustandes in unseren Experimenten vervollständigt deshalb die Kenntnisse über den Einfluß solcher Beheizungszustände. Wir befinden uns in Übereinstimmung mit den genannten Autoren bezüglich der Stabilisierung des stetig erreichbaren Konvektionsastes. Eine für alle Werte der Beheizung stabile stationäre Strömung für Symmetriewinkel größer als 6° tritt jedoch sowohl nach unserer Theorie als auch in unseren Experimenten nicht auf. Das mathematisch physikalische Modell der Autoren muß deshalb kritisch bewertet werden, weil es den Einfluß eines schiefssymmetrischen Beheizungszustandes auf die Strömung nur unvollständig wiedergibt.

In jüngerer Zeit haben Gorman et al. [9] für identische geometrische und thermische Bedingungen mehrere Experimente bei variiertem Stoff-/Wandparameter α präsentiert. Die in den Experimenten auftretenden Stabilitätsbereiche finden sich nach diesen Autoren in zufriedenstellender Übereinstimmung mit dem Modellverhalten, welches aus dem Lorenz-System resultiert. Die Veränderung der Stabilitätsgrenzen bei Variation von α fügt sich von der Tendenz her ausgezeichnet auch in das von uns abgeleitete Stabilitätsdiagramm ein. Eine Ursache für die Diskrepanzen zwischen experimentellen und theoretischen Sta-

bilitätsgrenzen bei den genannten Autoren liegt nach unserer Auffassung jedoch in der zu einfach gewählten Wärmeübergangsbeziehung. Ein verbesserter Wärmeübergang bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten stabilisiert die Konvektionsströmung entscheidend und führt deshalb zu besserer experimentell-theoretischer Übereinstimmung.

Wir leiten darüber hinaus Modellgleichungen ab, welche eine Impuls- und Wärme-
wechselwirkung zwischen zwei Kreisläufen an einer allgemeinen Stelle $\varphi = \varphi_0$
berücksichtigen. Neben einer allgemeinen Diskussion der Modellgleichungen
erfolgt dann eine ausführliche Betrachtung zum Effekt der Wärmekopplung am
unteren Scheitelpunkt der Kreisläufe. Hierbei zeigt sich auch, daß die Mo-
dellgleichungen von Roppo [26] und Davis & Roppo [5] als Spezialfall unserer
allgemeinen Modellgleichungen erhalten werden, wenn reine Wärmekopplung bei
 $\varphi_0 = \pi/2$ vorausgesetzt wird. Hierin sehen wir eine erste Bestätigung der
allgemeinen Modellgleichungen im Bezug auf die Terme, welche den Wärmeaus-
tausch erfassen. Ein direkter Vergleich zwischen den Resultaten der erwähnten
Autoren und unseren Ergebnissen ist jedoch nicht sinnvoll aufgrund der grund-
sätzlich verschiedenen Effekte, welche durch die unterschiedlichen Kopplungs-
orte auftreten. Wir werden uns auch aufgrund bislang fehlender Experimente
zur Impulskopplung, deshalb auf einen Vergleich zwischen Modellaussagen und
Experimenten bei reiner Wärmekopplung am unteren Scheitel der Kreisläufe
beschränken.

Die thermische Ankopplung eines zweiten Kreislaufs ergibt im Falle zweier
symmetrisch beheizter Kreisläufe vier gleichberechtigte Lösungsäste. Die Mo-
dellrechnungen zeigen, daß diese Lösungen vollständig entkoppeln. Wegen des
fehlenden Wärmeaustausches resultiert deshalb für jeden Kreislauf das bereits
bekannte Verhalten. Die Stabilitätsgrenzen und -bereiche müssen aus diesem
Grunde mit denen übereinstimmen, welche bei der Strömung in einem einzelnen
Kreislauf auftreten.

Im Experiment werden diese vier entkoppelten und gleichwertigen Lösungen
beobachtet. Mit Ausnahme von Wechselwirkungen im unterkritischen Bereich tre-
ten ausschließlich die Stabilitätscharakteristiken auf, welche bei der
Strömung im Einzelkreislauf beobachtet werden. Darüber hinaus ist praktisch
eine quantitative Übereinstimmung zwischen beiden Experimenten bzgl. aller
Größen festzustellen. Die Reproduzierbarkeit der Experimente im Einzelkreis-
lauf und im Doppelkreislauf ist deshalb offensichtlich gegeben.

Wird nun ein schiefssymmetrisch beheizter Kreislauf mit einem symmetrisch beheizten thermisch gekoppelt, so tritt eine Wärmewechselwirkung auf. Die Stabilitätsgrenzen des Gesamtsystems werden nun im Falle der stetig erreichbaren Lösungsäste geprägt durch das Verhalten des symmetrisch beheizten Kreislaufs. Demgegenüber ist die obere Stabilitätsgrenze der isolierten Lösungsäste durch das Verhalten des unsymmetrisch beheizten Kreislaufs bestimmt. Eine Verbesserung der Wärmekopplung zwischen den Kreisläufen führt immer zu einer Stabilisierung aller vier Lösungsäste. Die Stabilitätsgrenzen, welche sich in diesem Fall ergeben, sind in jedem Fall eingegrenzt durch die Stabilitätsgrenzen, welche für die Strömung im unsymmetrisch beheizten Einzelkreislauf bei gleichem Symmetriewinkel auftreten. Der zweite, symmetrisch beheizte Kreislauf weist trotz der eingekoppelten Wärme streng symmetrisches Verhalten bzgl. der Lösungen auf. Für diesen Kreislauf existiert bei kleinen Werten der Beheizung B auch eine stabile Ruhelösung.

Alle diese charakteristischen Phänomene treten im Experiment in der erwarteten Form auf. Neben der Verschiebung der Stabilitätsgrenzen finden wir im Experiment auch die Veränderungen der Zustandsgrößen in beiden Kreisläufen sowie den Erhalt der Lösungssymmetrie im zweiten Kreislauf.

Zusammenfassend kann man deshalb davon ausgehen, daß das abgeleitete Modell auch für Wärmekopplung zwischen den beiden Kreisläufen die Strömung in den beiden Teilen in guter Näherung beschreibt. Leichte Diskrepanzen treten auf, wenn in der Umgebung der Stabilitätsgrenzen dreidimensionale Effekte vergleichbar große Zustandsänderungen bewirken wie die eindimensionale Grundstörung.

Von der Seite der Anwendung her ist zur Auslegung von Naturkonvektionskreisläufen in technischen Anlagen die Kenntnis der Stabilitätscharakteristik unerlässlich. Hierbei stellt die akademische Frage nach der Stabilität im Falle kleiner Störungen eine nicht vollständig befriedigende Antwort zur Verfügung. Dies wird insbesondere deutlich, wenn man sich vor Augen führt, welche Störungen beispielsweise das Auslaufen einer Pumpe oder das Schließen von Ventilen im Strömungssystem hervorrufen. Vor diesem Hintergrund ist es zweckmäßig, eine nichtlineare Stabilitätsanalyse solcher Systeme vorzunehmen. Nur so können unterkritische Bereiche aufgedeckt werden, in welchen in extremen Fällen unkontrollierte Strömungszustände auftreten.

Die vorliegende Arbeit will deshalb anhand des einfachen Grundproblems die Stabilitätscharakteristik solcher Strömungen aufzeigen. Wir weisen an dieser Stelle zusätzlich darauf hin, daß in realen Anlagegeometrien bei eindimensionaler Modellierung ähnliche nichtlineare Gleichungssysteme erhalten werden.

7.0 Anhang

7.1 Literaturverzeichnis

- [1] Arnol'd, V.I.
"Gewöhnliche Differentialgleichungen"; Springer, Berlin (1980)

- [2] Bau, H.H; Torrance, K.E.
"On the Stability and Flow Reversal of an Asymmetrically Heated Open Convection Loop"; Journal of Fluid Mechanics, Vol.106 (1981),pp417-433

- [3] Creveling, H.F.; De Paz, J.F.; Baladi, J.Y.; Schoenhals, R.J.
"Stability Characteristics of a Single-Phase Free Convection Loop"; Journal of Fluid Mechanics, Vol. 67 (1975), pp. 65-84

- [4] Damerell, P.S.; Schoenhals, R.J.
"Flow in a Toroidal Thermosyphon with Angular Displacement of Heated and Cooled Sections"; Journal of Heat Transfer Vol. 101 (1979), pp. 672-676

- [5] Davis, S.H.; Roppo, M.N.
"Coupled Lorenz Oscillators"; Physica D Vol. 24 D (1987), pp. 226-242

- [6] Durst, F.; Melling, A.; Whitelaw, J.H.
"Theorie und Praxis der Laser-Doppler-Anemometrie"; G. Braun Verlag, Karlsruhe (1987)

- [7] Gershuni, G.Z.; Zhukhovitskii, E.M.
"Convective Stability of Incompressible Fluids"; Israel Progr. of Scient. Transf., Jerusalem (1976)

- [8] Gorman, M.; Widmann, P.Z.; Robbins, K.A.
"Chaotic Flow Regimes in a Convection Loop"
Phys. Rev. Lett., Vol. 52 (1984), pp. 2241-2244

- [9] Gorman, M.; Widmann, P.Z.; Robbins, K.A.
"Nonlinear Dynamics of a Convection Loop: a Quantitative Comparison of Experiment with Theory"; Physica D, Vol. 19 D (1986), pp. 255-267

- [10] Greif, R.; Zvirin, Y.; Mertol, A.
"The Transient and Stability Behaviour of a Natural Convection Loop";
Journal of Heat Transfer, Vol. 101 (1979), pp. 684-688
- [11] Guckenheimer, J.; Holmes, P.
"Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector
Fields"; Springer, New York (1983)
- [12] Hart, J.E.
"A new Analysis of the Closed Loop Thermosyphon"; Int. Journal Heat and
Mass Transfer, Vol. 27 (1984), pp. 125-136
- [13] Hopf, E.
"Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines
Differentialsystems";
Akad. d. Wiss., Leipzig, Berichte Mathem.-Phys. Kl. 94 (1942)
- [14] Holodniok, M.; Kubicek, M.
"DERPER- An Algorithm for the Continuation of Periodic Solutions in
Ordinary Differential Equations"
Journ. Comp. Phys., Vol. 55 (1984), pp. 254-267
- [15] Iooss, G.; Joseph, D.D.
"Elementary Stability and Bifurcation Theory"; Springer, New York (1980)
- [16] Joseph, D.D.
"Stability of Fluid Motions I", Springer, Berlin (1976)
- [17] Keller, J.B.
"Periodic Oscillations in a Model of Thermal Convection";
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 26 (1966), pp. 599-606
- [18] Kubicek, M.; Marek, M.
"Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative
Structures", Springer, New York (1983)

- [19] Malkus, W.V.R.
"Non-Periodic Convection at High and Low Prandtl Numbers"
Mém. Soc. Royale de Sci. de Liège, 6. Serie, Vol. 4 (1972),
pp. 125-128
- [20] McLaughlin, J.B.; Martin, P.C.
"Transition to Turbulence in a Statically Stressed Fluid System";
Physical Review A, Vol. 12, (1975), pp. 186-203
- [21] Mertol, A.; Greif, R.
"A Review of Natural Circulation Loops";
NATO Advanced Study Institute on Natural Convection: Fundamentals and
Applications, Izmir, Turkey (1984), pp. 1033-1081
- [22] Mertol, A.; Place, W.; Webster, T.
"Detailed Loop Model Analysis of Liquid Solar Thermosiphons with Heated
Exchangers"; Solar Energy, Vol. 27 (1981), pp. 367-386
- [23] Mesch, F.
"Meßtechnisches Praktikum"; BI-Hochschultaschenbücher, Bd. 736, 3. Auf-
lage (1981)
- [24] Lorenz, E.N.
"Deterministic Nonperiodic Flow";
Journal of Atmospheric Sciences, Vol. 20 (1963), pp. 130-141
- [25] Robbins, K.A.
"A New Approach to Subcritical Instability and Turbulent Transition in a
Simple Dynamo"; Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 82 (1977), pp. 309-325
- [26] Roppo, M.N.
"Problems in Thermal Convective Instability";
Ph. D. Thesis, Northwestern University, USA (1985)
- [27] Schlünder, E.U.
"Einführung in die Wärmeübertragung";
Vieweg-Verlag Braunschweig, 3. Auf. (1981)

- [28] Welander, P.
"On the Oszillatory Instability of a Differentially Heated Fluid Loop";
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 29 (1967), pp. 17-30
- [29] Yorke, J.A.; Yorke, E.D.
"Chaotic Behavior and Fluid Dynamics"; Topics in Applied Physics,
Vol. 45, Editors: Swinney, H.L.; Gollup, J.P.; Springer Berlin (1981),
pp. 77-95
- [30] Zierep, J.
"Grundzüge der Strömungslehre"; G. Braun Verlag, Karlsruhe (1979)
- [31] Zierep, J.
"Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre";
G. Braun Verlag, Karlsruhe (1982)
- [32] Zvirin, Y.
"A Review of Natural Circulation Loops in Pressurized Water Reactors
and Other Systems"; Nuclear Engineering and Design, Vol. 67 (1981), pp.
203-225
- [33] Zvirin, Y.; Jeuck III, P.R.; Sullivan, C.W.; Duffey, R.B.
"Experimental and Analytical Investigation of a Natural Circulation
System with Parallel Loops"; Journal of Heat Transfer, Vol. 103 (1981),
pp. 645-652

7.2 Ergänzungen zu den Experimenten

a) Geometrische Abmessungen im Experiment "LOOP 1"

Radius Glasrohr	L	= 313.00 mm
Innendurchmesser Glasrohr	d	= 17.50 mm
Außendurchmesser Glasrohr	d _a	= 22.00 mm
Wandstärke	s	= 2.25 mm
Gerade Zwischenstücke	Δs	= 130.00 mm
Gesamte Lauflänge	l _{ges}	= 2πL(1+ε) = 2226.6 mm

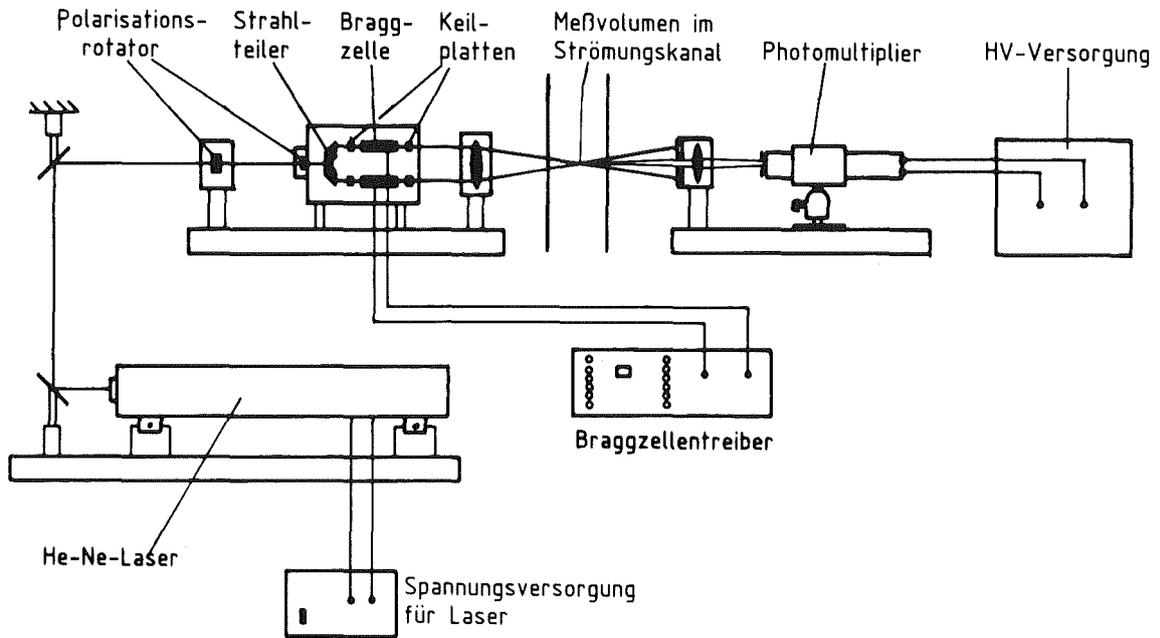
b) Geometrische Abmessungen im Experiment "LOOP 2"

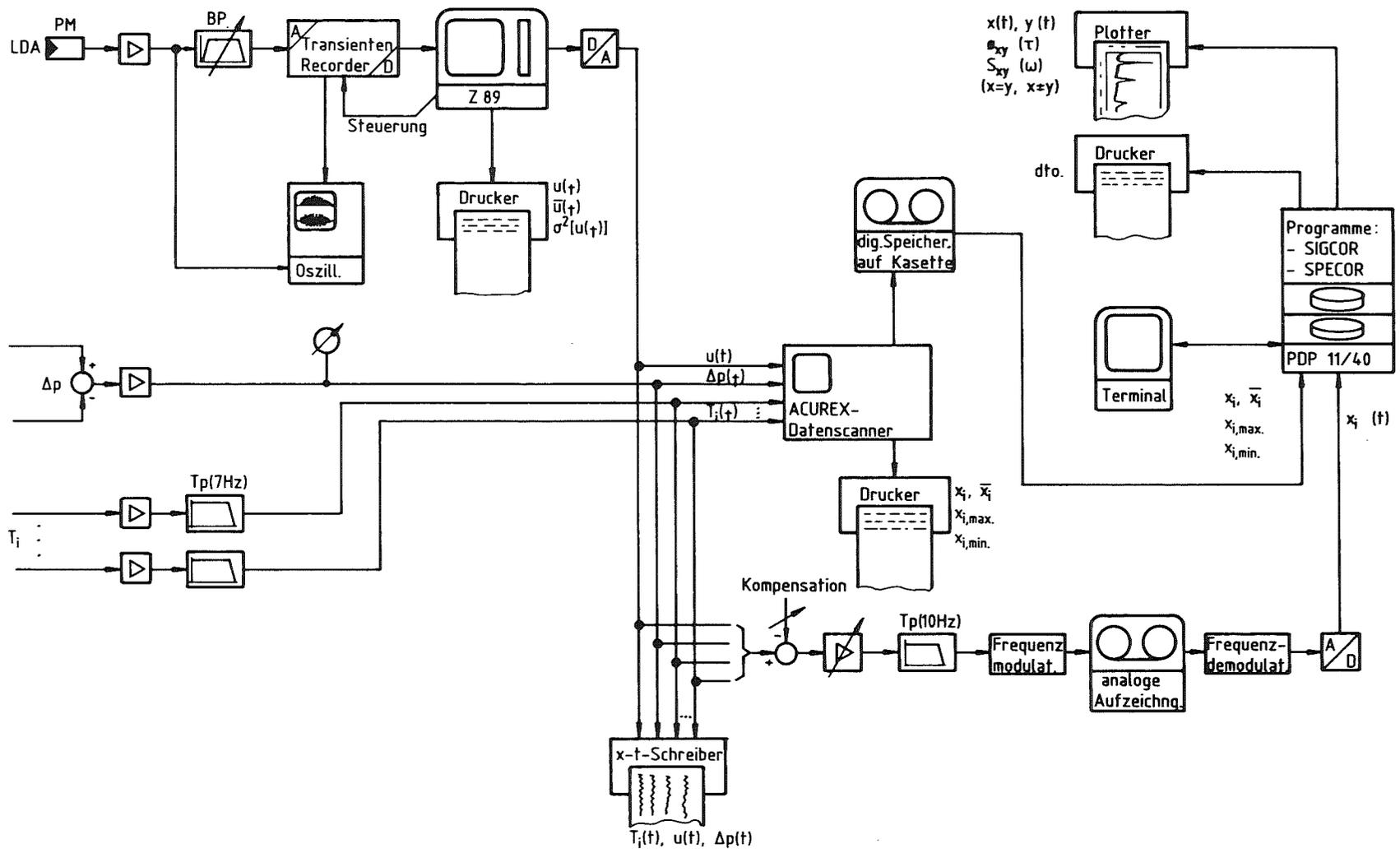
Radius Glasrohr	L	= 313.50 mm
Innendurchmesser Glasrohr	d	= 17.50 mm
Außendurchmesser Glasrohr	d _a	= 22.00 mm
Wandstärke	s	= 2.25 mm
gerade Zwischenströme	Δs'	= 200.00 mm
Gesamte Lauflänge	l _{ges}	= 2πL(1+ε') = 2366.6 mm
Flächenverhältnis	η	= 0.05

c) Stoffdaten des verwendeten Versuchsmediums (destilliertes Wasser)

Größe	Einheit	20°C	30°C	35°C	40°C
Dynamische Viskosität μ	/10 ⁻⁵ kg/ms/	100.4	80.1	71.94	65.3
Kinematische Viskosität ν ₀	/10 ⁻⁶ m ² /s/	1.0058	0.8045	0.7237	0.6581
Dichte ρ ₀	/kg/m ³ /	998.207	995.650	994.035	992.2187
Wärmeleitfähigkeit λ ₀	/10 ⁻² W/mK/	59.9	61.8	62.3	63.4
Spezifische Wärme c _p	/Ws/kgK/	4181.9	4178.5	4178.2	4178.6
Wärmeausdehnungs- koeffizient α ₀	/10 ⁻⁴ 1/K/	2.0678	3.0324	3.457	3.853

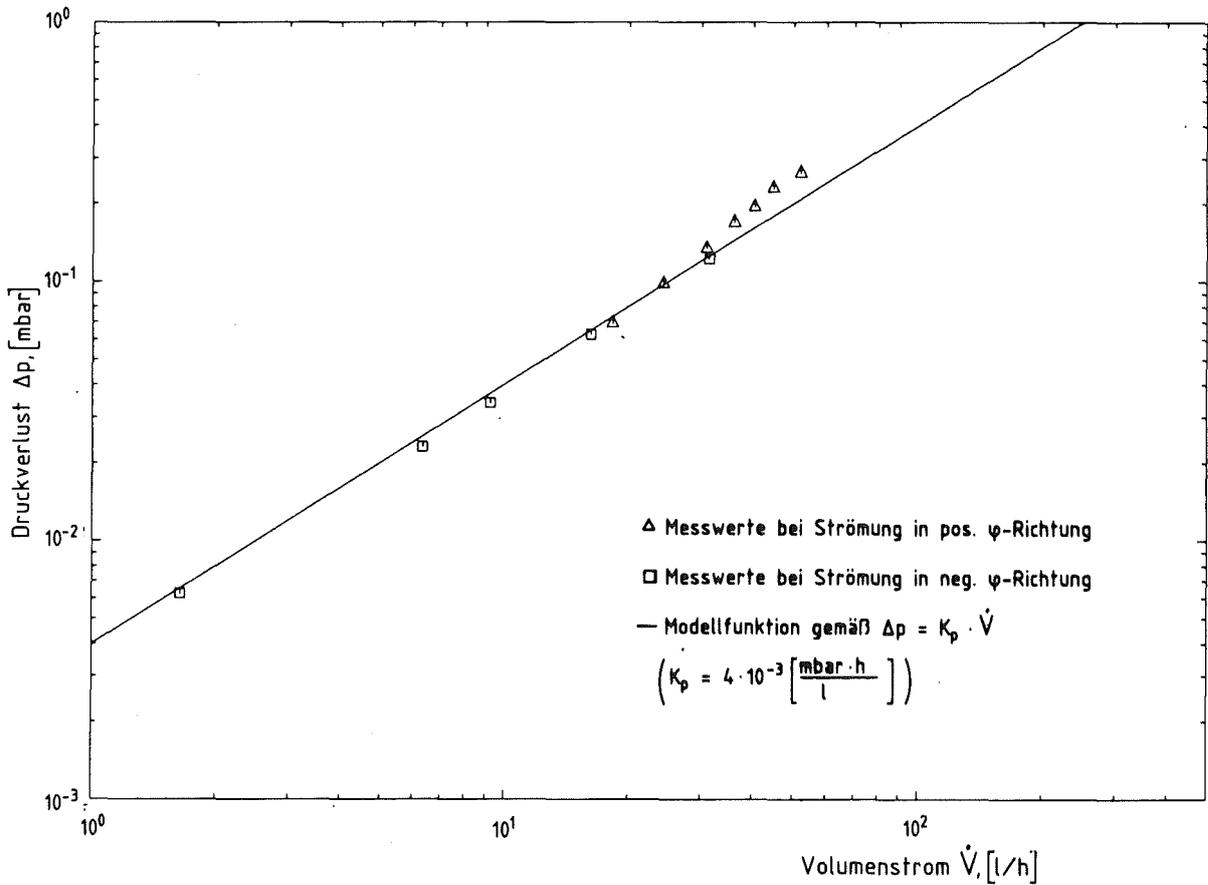
d) Benutzter Aufbau eines Laser-Doppler-Anemometers



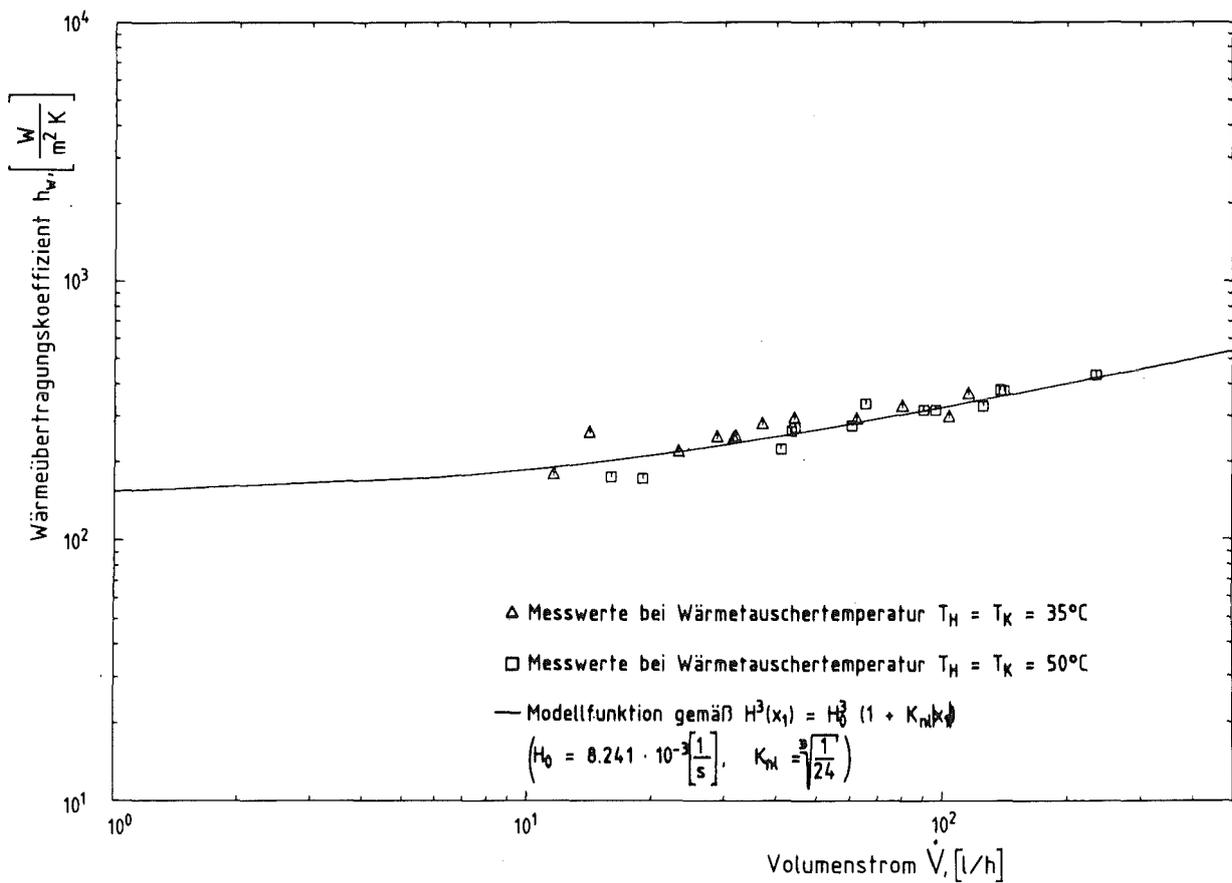


e) Benutzte Signalverarbeitung und Messtechnik

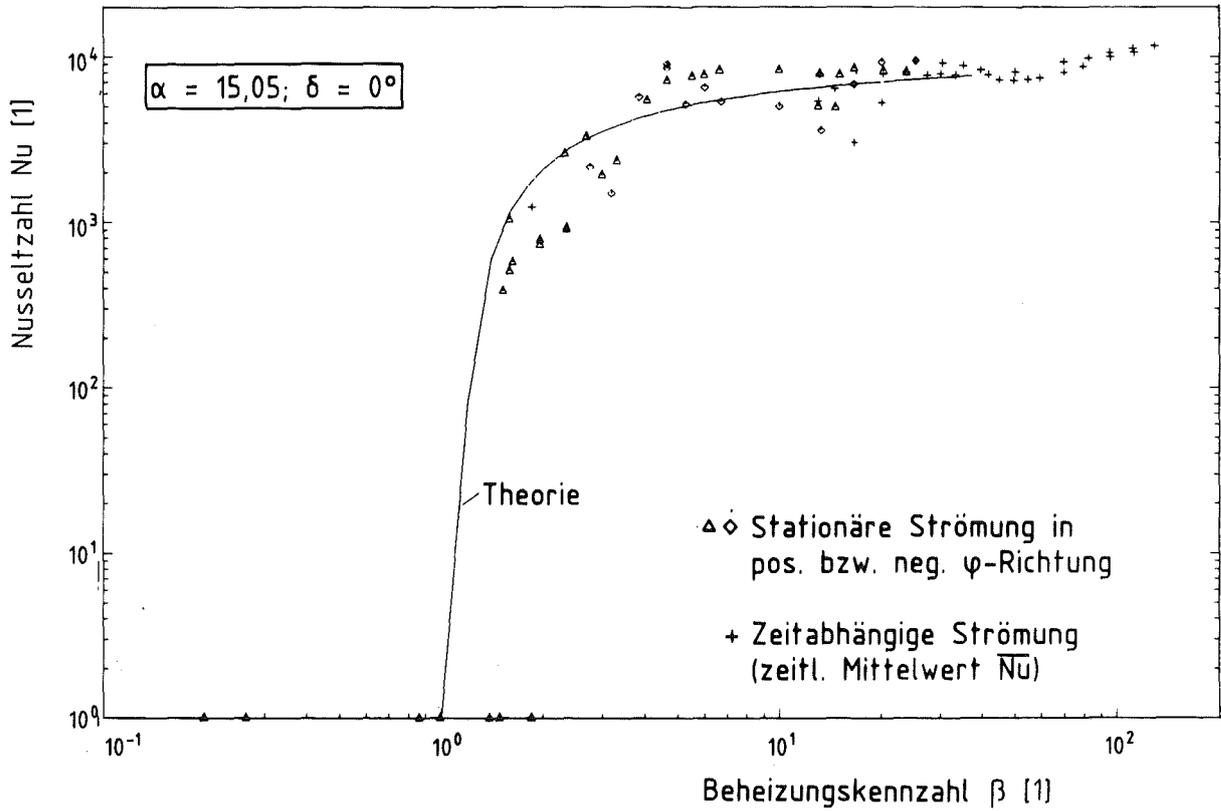
f) Meßwerte der Eichmessungen zum Druckverlust



g) Meßwerte der Eichmessungen zum Wärmeübergang



h) Vergleich der experimentell ermittelten Nusselt-Zahlen mit den Ergebnissen aus dem Modell für die Strömung im symmetrisch beheizten Einzelkreislauf.



i) Tabelle der Stabilitätsgrenzen für die Strömung im symmetrisch beheizten Einzelkreislauf.

Phänomen	Experiment		Theorie	
	pos. Lösung	neg. Lösung	H = Konst.	H = H(x ₁)
$\alpha = 15.05$ $\delta = 0^\circ$				
Einsatz d. Konvektion	1.35	1.85	1.0	1.0
Beginn des unterkrit. Bereiches	12.93	16.56	9.4	~ 13.4
Beginn des global instab. Bereiches	27.40	30.44	21.8	37.2

j) Tabelle der Stabilitätsgrenzen für die Strömung im schiefsymmetrisch beheizten Einzelkreislauf.

Phänomen	Experiment		Theorie			
	pos. Lösung	neg. Lösung	H = Konst.		H = H(x ₁)	
			pos. Lsg.	neg. Lsg.	pos. Lsg.	neg. Lsg.
$\alpha = 15.05$ $\delta = 10^\circ$						
Einsatz der Konvektion	0	stabil ab 2.94	0	stabil ab 1.92	0	stabil ab 2.4
Beginn d. unterkrit. Bereichs	20.72	7.87	41.4	5.2	~ 28.2	~ 15.9
Beginn d. global instab. Bereichs	31.67	10.21	41.8	10.8	~ 52.4	~ 25.2

k) Tabelle der Stabilitätsgrenzen für die Strömung in zwei symmetrisch beheizten, gekoppelten Kreisläufen

Phänomen	Kreis	Experiment				Theorie
		I	II	III	IV	H = Konst.
$\alpha = 15.05$ $\delta_1 = \delta_2 = 0^\circ$						
Einsatz der Konvektion	1	1.05	1.1	0.91	1.06	1.0
	2	0.96	1.0	0.68	0.87	
Beginn des unterkrit. Bereichs	1	14.13	14.17	14.55	15.17	9.4
	2	14.65	14.08	14.13	14.95	
Beginn des global instab. Bereichs	1	23.28	23.00	24.32	25.55	21.8
	2	23.19	23.19	24.37	25.59	

l) Tabelle der Stabilitätsgrenzen für die Strömung in einem schief-symmetrisch beheizten Kreislauf bei Ankopplung eines symmetrisch beheizten Kreislaufs.

Phänomen	Kreis	Experiment				Theorie H = Konst.	
		I	II	III	IV	I, II	III, IV
$\alpha = 15.05$ $\delta_1 = 10^\circ, \delta_2 = 0^\circ$							
Einsatz der Konvektion	1	0	0	stabil ab 2.29	stabil ab 2.31	0	stabil
	2	1.55	1.25	stabil ab 2.24	stabil ab 2.31	1.02	ab 2.10
Beginn des unterkrit. Bereichs	1	15.95	17.20	8.35	7.64	/ n.n.	/ n.n.
	2	15.90	15.95	8.26	7.69		
Beginn des global instab. Bereichs	1	28.45	26.19	10.62	10.71	24.15	12.45
	2	28.36	26.19	10.60	10.70		

7.3 Ergänzende Gleichungen zu Abschnitt 3.3

Für die Lösung von Gl. (3.5) mit der Anfangsbedingung gemäß Gl. (3.18) ergibt sich

$$\delta x_{1e}^*(\tau) = \hat{A} \cos \omega^* \tau,$$

$$\delta x_{2e}^*(\tau) = \hat{A} \left\{ \cos \omega^* \tau - \frac{\omega^*}{\alpha} \sin \omega^* \tau \right\},$$

$$\delta x_{3e}^*(\tau) = \hat{A} \frac{\omega^{*2}}{\alpha(x_0^* + \frac{\varepsilon}{2})} \left\{ \cos \omega^* \tau + \frac{(\alpha+1)}{\omega^*} \sin \omega^* \tau \right\},$$

mit

$$\omega^{*2} = \omega_0^{*2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{(\alpha+4)(\alpha-2)}{\alpha} \right\}, \quad \omega_0^{*2} = \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha-2)},$$

$$x_0^{*2} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha-2)}, \quad \varepsilon = \frac{\beta^*}{(\beta^*-1)} \delta \cong \delta.$$

Die Lösung des Gleichungssystems (3.20) kann ebenfalls in analytischer Form angegeben werden. Es kommt

$$\delta x_{in}(\tau) = C_{i,0} + C_{i,1} \sin 2\omega^* \tau + C_{i,2} \cos 2\omega^* \tau,$$

Die Konstanten ergeben sich als

$$C_{1,0} = C_{2,0} = - \left\{ 1 + \frac{\omega^{*2}}{\alpha x^{*2}} \right\} \frac{\hat{A}^2}{4x^*},$$

$$C_{1,1} = \{KL + M\} \hat{A}^2,$$

$$C_{1,2} = L \hat{A}^2,$$

$$C_{2,1} = \left\{ K + M - \frac{2\omega^*}{\alpha} \right\} \hat{A}^2,$$

$$C_{2,2} = \left\{ L + M + \frac{2\omega^*}{\alpha} KL \right\} \hat{A}^2,$$

$$C_{3,1} = \left\{ 8\omega^*(KL + M)x^* + (\alpha+1)(4Kx^* - 1) \frac{\omega^*}{2\alpha x^{*2}} \right\} \hat{A}^2,$$

$$C_{3,2} = \left\{ \omega^*(8Lx^* - 1) - 4(\alpha+1)(KL + M)x^* \right\} \frac{\omega^*}{2\alpha x^{*2}} \hat{A}^2,$$

$$C_{3,0} = -\frac{\omega^{*2}}{2\alpha x^{*2}} \hat{A}^2 ;$$

$$X^* = X_0^* + \frac{\epsilon}{2} ;$$

mit den Abkürzungen

$$M = \frac{2\omega^*(\alpha+1) - 3\omega^{*3}}{4x^* \{ 2\omega^{*2}(\alpha+2) - \alpha x^{*2} \}} ,$$

$$K = \frac{3\omega^{*2}}{2\omega^{*2}(\alpha+2) - \alpha x^{*2}} ,$$

$$L = \frac{\omega^{*2}(2\alpha+3) + \alpha x^{*2} - 12\omega^{*3}x^*}{4x^* \{ 2\omega^{*2}(\alpha+2) + 3K\omega^{*3} - \alpha x^{*2} \}} .$$