

KfK 4820  
Februar 1991

# **Darstellung turbulenter Geschwindigkeits- und Temperaturfelder einphasiger Strömungen in engen Stabgittern**

C. Monir  
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE  
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik  
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

KfK 4820

Darstellung turbulenter Geschwindigkeits- und Temperaturfelder  
einphasiger Strömungen in engen Stabgittern

Clemens Monir \*)

Dissertation genehmigt von der Fakultät für  
Maschinenbau und Elektrotechnik  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

\*) Technische Universität Braunschweig  
Institut für Raumflugtechnik und Reaktortechnik  
Arbeitsgebiet thermo-fluiddynamische Grundlagen

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

## Kurzfassung

Ein zwei-dimensionales Verfahren, VANTACY-II, zur Darstellung turbulenter Geschwindigkeits- und Temperaturfelder einphasiger, im zeitlichen Mittel stationärer, inkompressibler, hydraulisch und thermisch vollingelaufener Strömungen in achsparallel durchströmten Stabgittern wird vorgestellt und validiert.

Zunächst wird der heutige Kenntnisstand auf dem Gebiet des turbulenten Impuls- und Wärmetransports in engen Stabgittern dargestellt. Es wird deutlich, daß speziell auf dem Gebiet des turbulenten Wärmetransports ein erhebliches Defizit an experimentellen Grundlagen vorliegt.

Das neue, hier vorgestellte Verfahren baut bei der Turbulenzmodellierung im wesentlichen auf dem Modell VELASCO-TUBS von NEELEN auf und benutzt zur numerischen Behandlung des Strömungsproblems die finite Elemente Methode-Code VANTACY von KAISER.

Die Validierung des neuen Verfahrens VANTACY-II erfolgt an Hand eines ausführlichen Vergleiches numerisch ermittelter Daten für das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld sowie für das natürliche Mixing mit den experimentellen Daten von SEALE. Der Vergleich zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung, wobei die auftretenden Abweichungen plausibel sind und hauptsächlich auf die Modellierung der turbulenten PRANDTL-Zahl im neuen Verfahren zurückgeführt werden können.

## Description of turbulent velocity and temperature fields of single phase flow through tight rod bundles

### Abstract

A two-dimensional procedure, VANTACY-II, describing the turbulent velocity and temperature fields for single phase flow in tight lattices is presented and validated. The flow is assumed to be steady, incompressible and hydraulic and thermal fully developed.

First, the state of art of turbulent momentum and heat transport in tight lattices is documented. It is shown that there is a necessity for experimental investigations in the field of turbulent heat transport.

The presented new procedure is based on the turbulence model VELASCO-TUBS by NEELEN. The numerical solution of the balance equations is done by the finite element method code VANTACY by KAISER.

The validation of the new procedure VANTACY-II is done by comparing the numerically calculated data for the velocity and temperature fields and for natural mixing with the experimental data of SEALE. The comparison shows a good agreement of experimental and numerically computed data. The observed differences can be mainly attributed to the model of the turbulent PRANDTL number used in the new procedure.

INHALTSVERZEICHNIS

Nomenklatur . . . . .	iv
1. <b>Einleitung</b> . . . . .	1
2. <b>Physikalische Grundlagen der achsparallelen, turbulenten Stabgitterströmungen</b> . . . . .	3
2.0. Vorbemerkung . . . . .	3
2.1. Mathematische Darstellung turbulenter Strömungen . . . . .	3
2.2. Reynolds'sche Gleichungen für achsparallele Strömungen durch enge Stabgitter . . . . .	6
3. <b>Turbulenter Impulstransport</b> . . . . .	8
3.1. Turbulenzmodelle . . . . .	8
3.1.1. Halbempirische Turbulenztheorien erster Ordnung . . . . .	9
3.1.2. Halbempirische Turbulenztheorien höherer Ordnung . . . . .	13
3.1.2.1. Eingleichungsmodelle . . . . .	14
3.1.2.2. Zweigleichungsmodelle . . . . .	16
3.2. Universelle wandsenkrechte Geschwindigkeitsprofile . . . . .	18
3.2.1. Viskose Unterschicht . . . . .	18
3.2.2. Vollturbulente Kernströmung . . . . .	19
3.3. Sekundärströmungen . . . . .	22
3.3.1. Mechanismen . . . . .	23
3.3.1.1. Sekundärströmungswirbel . . . . .	23
3.3.1.2. Pulsierende Querströme . . . . .	24
4. <b>Turbulenter Wärmetransport</b> . . . . .	25
4.1. Turbulente Prandtl-Zahl . . . . .	26
4.1.1. Rein empirische Ansätze . . . . .	29
4.1.2. Ansätze auf der Grundlage von Theorien erster Ordnung . . . . .	30
4.1.2.1. Mischungsweg-Modelle . . . . .	30
4.1.2.2. Weitere Ansätze auf der Grundlage von Theorien erster Ordnung . . . . .	32
4.1.3. Ansätze auf der Grundlage von Theorien höherer Ordnung . . . . .	33
4.2. Natürliches Mixing . . . . .	36

5.	<b>Der finite Elemente Methode-Code VANTACY-II</b> . . . . .	40
5.1.	Der FEM-Code VANTACY . . . . .	40
5.2.	Das Modell VELASCO-TUBS . . . . .	42
5.2.1.	Das physikalische Modell . . . . .	42
5.2.2.	Der Lösungsweg . . . . .	44
5.2.3.	Die numerische Behandlung . . . . .	45
5.3.	Die Verknüpfung des Modells VELASCO-TUBS mit dem FEM-Code VANTACY . . . . .	46
5.3.1.	Der Lösungsweg zur Darstellung des turbulenten Temperaturfeldes . . . . .	47
5.3.2.	Ermittlung der wandsenkrechten Wirbelviskosität . . . . .	48
5.3.3.	Wahl eines geeigneten Ansatzes für die turbulente Prandtl-Zahl . . . . .	49
6.	<b>Darstellung der Ergebnisse</b> . . . . .	50
6.1.	Validierung des Verfahrens VANTACY-II . . . . .	50
6.1.1.	Die Experimente von Seale . . . . .	50
6.1.1.1.	Zielsetzung, Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung . . . . .	50
6.1.1.2.	Experimentelle Ergebnisse von Seale . . . . .	53
6.1.1.2.1.	Gemessene Geschwindigkeitsverteilungen . . . . .	53
6.1.1.2.2.	Gemessene Temperaturverteilungen . . . . .	54
6.1.1.2.3.	Gemessene Mixing-Daten . . . . .	54
6.1.2.	Numerische Simulation der Experimente von Seale mit dem FEM-Code VANTACY-II . . . . .	55
6.1.2.1.	Nachbildung der Teststrecke . . . . .	55
6.1.2.2.	Ergebnisse der numerischen Simulation . . . . .	56
6.1.2.2.1.	Errechnete Geschwindigkeitsverteilungen, Wandschubspannungsverläufe und Druckverlustkoeffizienten . . . . .	57
6.1.2.2.2.	Errechnete Temperaturverteilungen und Wandwärmestromverläufe . . . . .	58
6.1.2.2.3.	Errechnete Mixing-Daten . . . . .	58
6.1.3.	Vergleich der experimentellen und der numerischen Ergebnisse . . . . .	59
6.1.3.1.	Vergleich der Geschwindigkeitsverteilungen, Wandschubspannungen und Druckverlustkoeffizienten . . . . .	59

6.1.3.2.	Vergleich der Temperaturverteilungen . . . . .	60
6.1.3.3.	Vergleich der Mixing-Daten . . . . .	60
6.1.3.4.	Schlußfolgerungen aus dem durchgeführten Vergleich . . . . .	61
6.2.	Ergebnisse für enge 7-Stabgitter . . . . .	61
6.2.1.	Einfluß der Reynolds-Zahl . . . . .	62
6.2.1.1.	Einfluß der Reynolds-Zahl auf das turbulente Geschwindigkeitsfeld . . . . .	62
6.2.1.2.	Einfluß der Reynolds-Zahl auf das turbulente Temperaturfeld . . . . .	63
6.2.2.	Einfluß der Fluideigenschaften . . . . .	64
6.2.3.	Einfluß der Bündelrandgestaltung . . . . .	64
6.2.3.1.	Einfluß der Bündelrandgestaltung auf das turbulente Geschwindigkeitsfeld . . . . .	65
6.2.3.2.	Einfluß der Bündelrandgestaltung auf das turbulente Temperaturfeld . . . . .	66
6.2.3.3.	Einfluß der Bündelrandgestaltung auf das turbulente Mixing . . . . .	66
6.2.4.	Einfluß der Wärmequellenverteilung im Bündelquerschnitt . . . . .	67
6.2.4.1.	Einfluß der Wärmequellenverteilung im Bündelquerschnitt auf das turbulente Temperaturfeld . . . . .	67
6.2.4.2.	Einfluß der Wärmequellenverteilung im Bündelquerschnitt auf das turbulente Mixing . . . . .	67
6.3.	Bewertung der durchgeführten Vergleiche . . . . .	68
7.	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b> . . . . .	69
	Literaturverzeichnis . . . . .	71
	Tabellen . . . . .	81
	Abbildungen . . . . .	97
Anhang A.	Zusammenstellung der Beziehungen für die turbulente Prandtl-Zahl . . . . .	175
A.1.	Rein empirische Ansätze . . . . .	175
A.2.	Ansätze auf der Grundlage von Theorien erster Ordnung . . . . .	176
A.2.1.	Mischungsweg-Modelle . . . . .	176
A.2.2.	Weitere Ansätze auf der Grundlage von Theorien erster Ordnung . . . . .	177
A.3.	Ansätze auf der Grundlage von Theorien höherer Ordnung . . . . .	178

## Nomenklatur

Lateinische Großbuchstaben

$A^+$	=	VAN DRIEST Konstante Gl. (3.9c) / 1
$A_R$	=	Koeffizient Gl. (3.23) / 1
$B^+$	=	Koeffizienten Gl. (4.15) / 1
$B_R$	=	Koeffizient Gl. (3.23) / 1
$C_i$	=	Konstante bzw. Koeffizient / 1
$D$	=	Durchmesser / $m$
$E$	=	Feldgröße / <i>versch.</i>
$F$	=	Fläche / $m^2$
$I$	=	Funktional / $(N \cdot K) / s$
$K$	=	Lamellenparameter Gl. (3.12) / 1
$K_i$	=	Koeffizienten / 1
$L$	=	Profillänge / $m$
$N$	=	Formfunktion
$\dot{M}$	=	Massenstrom / $kg/s$
$P$	=	Stabmittenabstand / $m$
$Pr$	=	$\nu/a$ PRANDTL-Zahl / 1
$Pr_{tur}$	=	$\epsilon_r/\epsilon_q$ turbulente PRANDTL-Zahl Gl. (4.2) / 1
$R$	=	Bezugsradius / $m$
$Re$	=	$(\bar{u} \cdot d_h) / \nu$ REYNOLDS-Zahl / 1
$S_\zeta$	=	Quell- oder Senktermer der Turbulenzgröße $\zeta$ / <i>versch.</i>
$S_\omega$	=	Produktionsterm Gl. (3.55) / $s^{-2}$
$St_g$	=	STANTON-Zahl im Spalt / 1
$T$	=	Temperatur / $^\circ C$
$U_{OE}$	=	azimutaler Abstand zweier benachbarter Schubspannungsulldurchgänge / $m$
$U_{ben}$	=	benetzter Umfang / $m$
$V$	=	Volumen / $m^3$
$W$	=	Wandabstand / $m$ ,
	=	Widerstand / $N$
$Y$	=	dimensionsloser Wandabstand Gl. (3.18a) / 1,
	=	Wichtungsfaktor Gl. (4.38) / 1
$Y_m$	=	$L/R$ dimensionsloser Profillänge / 1
$Z$	=	radiale Koordinate Gl. (3.14a) / 1
$Z_{ij}$	=	Mixing-Länge Gl. (4.41) / $m$

Lateinische Kleinbuchstaben

$a$	=	Temperaturleitfähigkeit / $m^2/s$
$c$	=	Spaltweite / $m$
$c_p$	=	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck / $J/(kg \cdot K)$

$d_h$	=	hydraulischer Durchmesser / $m$
$g_j$	=	Massenbeschleunigung in Tensornotation / $m/s^2$
$\dot{j}_{ij}$	=	Impulsstromdichtetensor / $N/m^2$
$k$	=	Turbulenzenergie Gl. (3.20) / $m^2/s^2$
$l$	=	Mischungsweg / $m$ ,
	=	Einlauflänge / $m$ ,
	=	effektive thermische Mixing-Länge Gl. (4.39a) / $m$
$m$	=	Koeffizient / 1
$\dot{m}$	=	Massenstromdichte / $kg/(m^2 \cdot s)$
$n$	=	Anisotropiefaktor Gl. (3.15a) / 1
$p$	=	Druck / $N/m^2$
$q'$	=	Wärmestrom je axialer Längeneinheit / $W/m$
$q'_{ij}$	=	effektiver Wärmestrom zwischen den Unterkanälen $i$ und $j$ pro axialer Längeneinheit / $W/m$
$q''$	=	Wärmestromdichte / $W/m^2$
$r$	=	radiale Koordinate / $m$
$r_m$	=	radiale Koordinate der Schubspannungsnulllinie / $m$
$t$	=	Zeit / $s$ ,
	=	Koeffizient der turbulenten Strömung / 1
$u$	=	Geschwindigkeit in axialer Richtung / $m/s$
$u^*$	=	$\sqrt{\tau_w/\rho}$ Schubspannungsgeschwindigkeit Gl. (3.9b) / $m/s$
$u^+$	=	$\bar{u}/u^*$ dimensionslose Geschwindigkeit / 1
$u_i$	=	Koeffizient Gl. (3.21) / 1
$v$	=	Geschwindigkeit in radialer Richtung / $m/s$
$v_k$	=	Geschwindigkeitskomponenten in Tensornotation / $m/s$
$v$	=	Geschwindigkeit in azimuthaler Richtung / $m/s$
$w'_{ij}$	=	hypothetischer Quermassenstrom zwischen den Unterkanälen $i$ und $j$ pro axialer Längeneinheit / $kg/(m \cdot s)$
$x$	=	axiale Koordinate / $m$
$x_k$	=	Koordinaten in Tensornotation / $m$
$y$	=	radiale Koordinate / $m$

Griechische Kleinbuchstaben

$\alpha$	=	Koeffizient Gl. (4.42, 4.43) / 1
$\delta$	=	Grenzschichtdicke / $m$
$\epsilon_q$	=	Wirbelleitfähigkeit / $m^2/s$
$\epsilon_\tau$	=	Wirbelviskosität / $m^2/s$
$\epsilon$	=	Dissipationsterm / $N/(m \cdot s^2)$
$\zeta$	=	Turbulenzgröße / <i>versch.</i>
$\eta$	=	Zentroidabstand / $m$
$\kappa$	=	Koeffizient der turbulenten Strömung / 1
$\lambda$	=	Wärmeleitfähigkeit / $W/(m \cdot K)$
$\lambda_D$	=	Druckverlustkoeffizient / 1

$\mu$	=	dynamische Viskosität / $kg/(m \cdot s)$
$\mu'$	=	dynamische Volumenviskosität / $kg/(m \cdot s)$
$\nu$	=	kinematische Viskosität / $m^2/s$
$\rho$	=	Dichte / $kg/m^3$
$\sigma_{ij}$	=	Spannungstensor / $N/m^2$
$\sigma_\varepsilon$	=	Konstante Gl. (3.38) / 1
$\tau_{jk}$	=	Schubspannung / $N/m^2$
$\phi$	=	azimutale Koordinate / 1
$\omega_i$	=	Wirbelstärke um die Achse $i$ / $m/s$

### Mathematische Operatoren

$\Delta$	Differenz
$\partial$	partielle Ableitung
$\nabla$	Nabla-Operator

### Indizes

$b$	Bündel bzw. betrachteter Ausschnitt
$h$	beheizte Kanalwand (Heizplatte)
$K$	Lamelle
$k$	gekühlte Kanalwand
$m$	Mittelwert (Gebiet oder Strecke)
$q$	Wärmetransport
$r$	radial
$tur$	turbulent
$w$	Wand
$\tau$	Impulstransport
$\phi$	azimutal
( $e$ )	Element
-	zeitlicher Mittelwert Gl. (2.10)
'	Schwankungswert Gl. (2.11)
+	dimensionslos (s. z. b. Gl. (3.9a))
1, 2, 3	Zentral-, Wand- oder Eckkanal bzw. oberer oder unterer Unterkanal in der Versuchsanordnung von SEALE

## 1. Einleitung

Bei der Darstellung der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in achsparallel durchströmten Stabbündeln sind im allgemeinen zwei grundsätzlich verschiedene Wege beschritten worden. Zum einen wird der gesamte Bündelquerschnitt in sogenannte Unterkanäle unterteilt (s. Abb. 1.1), für die mittlere Fluidgeschwindigkeiten und -temperaturen ermittelt werden. Der Austausch von Masse, Impuls und Wärme zwischen diesen Unterkanälen wird mit Mixingkoeffizienten beschrieben, die aus experimentellen Daten ermittelt werden. Innerhalb der Unterkanäle wird die Geschwindigkeits- oder Temperaturverteilung nicht detailliert ermittelt, so daß diese Methode — die *Unterkanalanalyse* — nur sehr grobe Eingangsdaten für Strukturanalysen (z.B. Festigkeitsberechnungen) geben kann. Allerdings ist zur Zeit nur mit dieser Methode die Berechnung der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in größeren Stabbündeln möglich.

Grundsätzlich anders wird bei der detaillierten Analyse (im allgemeinen mit dem englischen Begriff "*distributed parameter approach*" beschrieben) vorgegangen. Hier werden die örtlichen Verteilungen von Geschwindigkeit und Temperatur im Bündel berechnet, so daß detaillierte Aussagen über diese Größen gemacht werden können und dann als Eingangsdaten für die angesprochenen Strukturanalysen zur Verfügung stehen bzw. integrale Größen wie Druckverlustbeiwerte, Wärmeübergangs- und Mixingkoeffizienten u.a. an Unterkanalanalyse-Codes geliefert werden können. Man unterscheidet hier zwei- und drei-dimensionale Modelle, wobei die zwei-dimensionalen Modelle die Verteilungen in einer Ebene senkrecht zur Hauptströmungsrichtung ermittelten und deshalb nur eingelaufene Zustände beschreiben. Da eine detaillierte Analyse eine sehr feine Auflösung des betrachteten Gebietes erfordert, sind nur relativ kleine Gebiete mit dem *distributed parameter approach* untersuchbar. Daraus ergibt sich aber ein weiteres Anwendungsgebiet dieser Methode, nämlich die detaillierte Untersuchung des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes in einem speziellen, von der Unterkanalanalyse als kritischen ermittelten Unterkanal eines größeren Bündels.

Die Ermittlung der örtlichen Verteilungen von Geschwindigkeit und Temperatur bei turbulenten Strömungen erfordert eine genaue Kenntnis und daraus resultierend eine Modellierung der Turbulenzstruktur in engen Stabbündeln. ROWE [1] hat 1973 grundlegende Unterschiede in der Turbulenzstruktur von Kreisrohr- und Stabbündelströmungen aufgezeigt, die es erforderlich gemacht haben, die Turbulenzstruktur von Stabbündelströmungen genauer zu untersuchen. Der turbulente Impulstransport in radialer Richtung, der Kreisrohrströmungen kennzeichnet, wird bei Stabgitterströmungen vom turbulenten Impulstransport in azimuthaler Richtung um Größenordnungen übertroffen, wobei diese Anisotropie mit abnehmendem relativen Stabmittenabstand ansteigt. REHME [2] hat in der Folgezeit umfangreiche experimentelle Untersuchungen turbulenter, isothermer Stabbündelströmungen durchgeführt, die eine Modellierung des turbulenten wandparallelen Impulstransportes in engen Stabgittern zur Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes durch NEELEN [3] ermöglicht haben.

Die Validierung des Modells von NEELEN [3], die in Vorstudien [4, 5] zur vorliegenden Schrift durchgeführt worden ist, hat gezeigt, daß das Modell von NEELEN [3] sehr gut zur Beschreibung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes in engen Stabgittern geeignet ist. Eine Darstellung des turbulenten Temperaturfeldes, wie sie z.B. schon 1973 von FUCHS [6] angestrebt worden ist (jedoch ohne Erfolg), hat jedoch mit dem Modell von NEELEN [3] noch nicht durchgeführt werden können,

so daß sich erneut die Aufgabe der Modellierung des turbulenten Wärmetransportes in engen Stabgittern — aufbauend auf der Arbeit NEELEN's — gestellt hat.

In der vorliegenden Schrift wird nun ein neues zwei-dimensionales Verfahren zur Darstellung turbulenter Geschwindigkeits- und Temperaturfelder einphasiger Strömungen in engen Stabgittern vorgestellt und validiert. Dabei werden die folgenden Ziele verfolgt:

1. Darstellung des heutigen Kenntnisstandes auf dem Gebiet des turbulenten Impuls- und Wärmetransportes in engen Stabgittern, wobei deutlich werden wird, daß speziell auf dem Gebiet des turbulenten Wärmetransportes noch ein erhebliches Wissensdefizit besteht.
2. Beschreibung des neuen zwei-dimensionalen Verfahrens zur Darstellung des turbulenten Wärmetransportes in engen Stabgittern und
3. Validierung dieses Verfahrens an Hand der experimentellen Untersuchungen von SEALE [7] und Darstellung einiger Anwendungen des neuen Verfahrens bei der Untersuchung enger 7-Stabbündel.

## 2. Physikalische Grundlagen der achsparallelen, turbulenten Stabgitterströmungen

### 2.0. VORBEMERKUNG

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Strömungen durch achsparallel durchströmte Stabgitter, wie sie in Reaktorkernen von Druckwasserreaktoren und ähnlichen hochbelasteten Wärmetauschern auftreten, werden als *einphasig*, im zeitlichen Mittel *stationär* und *beschleunigungsfrei*, *hydraulisch* und *thermisch volleingelaufene* Strömungen eines *inkompressiblen*, *Newton'schen* Fluides angesehen. Alle benetzten Wände werden als hydraulisch glatt betrachtet.

Bei der Auslegung eines thermisch hochbelasteten Wärmetauschers mit aufgeprägtem Wärmestrom ist die Kenntnis der Wandtemperaturen der Heizstäbe sicherheitstechnisch relevant. Die Wandtemperaturen sind direkt vom Wärmeübergang zwischen der benetzten Wand und dem umströmenden Fluid abhängig. Modelle, die den Wärmeübergang unterschätzen, sind deshalb als konservativ anzusehen.

Die oben genannten Annahmen sind in diesem Sinne als konservativ zu bewerten. Wird eine thermische Leistung im Wärmetauscher freigesetzt, die einen Übergang vom normalen einphasigen Betriebszustand zu einer zweiphasigen Strömung bewirkt, so wird der Wärmeübergang durch die einsetzende Blasenbildung zunächst verbessert, so daß ein einphasiges Modell bei kleinen Abweichungen vom einphasigen Betriebszustand konservativ rechnet. Durch Einlaufvorgänge, die einerseits am Eintritt in den Wärmetauscher und andererseits nach Abstandhaltern, die den Strömungsquerschnitt teilweise versperren, auftreten, wird die Turbulenz der Strömung erhöht, was ebenfalls zu einer Verbesserung des Wärmeübergangs durch einen verstärkten Quertransport führt. Ein Modell, das diese "künstliche" Erhöhung der Turbulenz vernachlässigt, ist deshalb ebenso als konservativ einzustufen.

Bewegt man sich nicht im Grenzgebiet zwischen ein- und zweiphasigen Strömungszuständen, so können die im Rahmen dieser Untersuchung auftretenden Änderungen der Fluideigenschaften in Abhängigkeit von den Fluidtemperaturen und dem Druck als vernachlässigbar klein angesehen werden, so daß ein quasi-inkompressibles Fluid vorliegt.

### 2.1. MATHEMATISCHE DARSTELLUNG TURBULENTER STRÖMUNGEN

Laminare und turbulente Strömungen können prinzipiell mit den allgemeinen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie beschrieben werden. Diese lauten in Tensornotation (s. JISCHA [8]):

— Massenbilanz:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0 \quad , \quad (2.1)$$

— Impulsbilanz:

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} + \rho g_j \quad , \quad (2.2)$$

— Energiebilanz:

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \varepsilon - \frac{\partial q_k''}{\partial x_k} \quad , \quad (2.3)$$

mit:

— den Schubspannungen

$$\tau_{jk} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) + \mu' \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta_{jk} \quad , \quad (2.4a)$$

— dem Dissipationsterm

$$\varepsilon = \tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \quad , \quad (2.4b)$$

— den Wärmestromdichten

$$q_k'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad . \quad (2.4c)$$

Mit den oben dargestellten, einschränkenden Annahmen :

i) stationäre und beschleunigungsfreie Strömungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad (2.5a)$$

ii) hydraulisch und thermisch in Hauptströmungsrichtung  $x_1$  eingelaufene Strömungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &\stackrel{!}{=} \text{const.} \\ \frac{\partial T}{\partial x_1} &\stackrel{!}{=} \text{const.} \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_1} &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \right\} \quad , \quad (2.5b)$$

iii) inkompressibles Fluid

$$\left. \begin{aligned} \partial \rho &\stackrel{!}{=} 0 \\ \partial \mu &\stackrel{!}{=} 0 \\ \partial c_p &\stackrel{!}{=} 0 \\ \partial \lambda &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5c)$$

vereinfachen sich die Bilanzgleichungen (2.1) bis (2.3) zu:

— Massenbilanz:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad , \quad (2.6)$$

— Impulsbilanz:

$$\rho v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} + \rho g_j \quad , \quad (2.7)$$

— Energiebilanz:

$$\rho c_p v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \varepsilon - \frac{\partial q_k''}{\partial x_k} \quad , \quad (2.8)$$

mit:

$$\tau_{jk} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \quad , \quad (2.9a)$$

$$\varepsilon = \tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \quad , \quad (2.9b)$$

$$q_k'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad . \quad (2.9c)$$

Turbulente Strömungen sind dadurch gekennzeichnet, daß sich der Hauptströmungsbewegung zeitlich und räumlich ungeordnete Schwankungsbewegungen überlagern. Sind diese Schwankungsbewegungen in Größe und Richtung stochastisch verteilt, d.h. gibt es keine präferierten Richtungen für die Schwankungen, so spricht man von isotroper Turbulenz. In der Mehrzahl der technisch relevanten Fälle werden die Schwankungsbewegungen durch benetzte Wände jedoch eingeschränkt, so daß hier der Fall der anisotropen oder Scherturbulenz vorliegt. Will man die Momentanwerte der Feldgrößen Geschwindigkeit und Temperatur darstellen, so macht die Größenordnung der Schwankungen eine Diskretisierung des betrachteten Strömungsvolumens erforderlich, die die Möglichkeiten der heutigen Computertechnik bei weitem übersteigt. Einem Vorschlag REYNOLDS [9] folgend wird deshalb für im zeitlichen Mittel stationäre Strömungen der Momentanwert  $E(x_k, t)$  in einen zeitlichen Mittelwert

$$\bar{E}(x_k) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} E(x_k, t) dt \quad (2.10)$$

und einen Schwankungswert  $E'(x_k, t)$  zerlegt, so daß gilt:

$$E(x_k, t) = \bar{E}(x_k) + E'(x_k, t) \quad . \quad (2.11)$$

Das Zeitintervall  $\Delta t$  ist dabei so groß zu wählen, daß der zeitliche Mittelwert  $\bar{E}(x_k)$  von der Zeit unabhängig ist. Setzt man die Beziehung (2.11) für die Geschwindigkeiten  $v_k$  und die Temperatur  $T$  ein, so erhält man aus den Bilanzgleichungen (2.6) bis (2.8) nach zeitlicher Mittelung die REYNOLDS'schen Gleichungen

— Massenbilanz:

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k'}{\partial x_k} = 0 \quad , \quad (2.12)$$

— Impulsbilanz:

$$\rho \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} + \rho g_j \quad , \quad (2.13)$$

— Energiebilanz:

$$\rho c_p \bar{v}_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} = \bar{v}_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \varepsilon - \frac{\partial q_k''}{\partial x_k} \quad , \quad (2.14)$$

mit:

$$\tau_{jk} = \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) - \overline{\rho v'_k v'_j} \quad , \quad (2.15a)$$

$$\varepsilon = \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \mu \overline{\left( \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} \quad , \quad (2.15b)$$

$$q_k'' = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \rho c_p \overline{T' v'_k} \quad . \quad (2.15c)$$

In den Spannungs- und Wärmestromdichtetensoren sind nun neben den laminaren oder molekularen Anteilen noch turbulente oder REYNOLDS'sche Anteile vorhanden, die aus den konvektiven Termen der linken Seiten der Impuls- bzw. Energiebilanzgleichungen stammen.

## 2.2. REYNOLDS'SCHE GLEICHUNGEN FÜR ACHSPARALLELE STRÖMUNGEN DURCH ENGE STABGITTER

Neben den oben angesprochenen, einschränkenden Annahmen (2.5), die sich aus ingenieurmässigen Betrachtungen ergeben, können noch weitere Vereinfachungen für achsparallele, turbulente Strömungen durch enge Stabgitter auf Grund der Physik dieser Strömungen, die aus in der Literatur dokumentierten Untersuchungen bisher bekannt ist, eingeführt werden, die eine Entkopplung des REYNOLDS'schen Gleichungssystems (2.12) bis (2.14) ermöglichen.

FAKORY-MONAZAH [10] hat bei Messungen im Zentralkanal (s. Abb. 1.1) eines hexagonalen Stabbündels (Versuchsquerschnitt nach FAKORY-MONAZAH s. Abb. 2.1) gezeigt, daß die azimutalen Variationen des Druckes  $p$  in einer Ebene senkrecht zur Hauptströmungsrichtung vernachlässigbar klein sind. Für enge Stabgitter gilt also:

$$\left| \frac{\partial p}{\partial \phi} \right| \approx 0 \quad . \quad (2.16)$$

Geht man davon aus, daß auch die radialen Variationen, über die in der Literatur keine experimentellen Daten vorhanden sind, Werte ähnlicher Größenordnungen annehmen, so kann gefolgert werden

$$\left| \frac{\partial p}{\partial \phi} \right| \approx 0 \approx \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \quad , \quad (2.17)$$

bzw.

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \gg \left| \frac{\partial p}{\partial \phi} \right| \quad , \quad (2.17a)$$

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \gg \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \quad . \quad (2.17b)$$

Untersuchungen von KJELLSTRÖM [11], SEALE [12] und VONKA ET AL. [13], auf die in Kapitel 3. noch näher eingegangen wird, haben gezeigt, daß im hydraulisch eingelaufenen Zustand

die Strömungskomponenten senkrecht zur Hauptströmungsrichtung wesentlich kleiner sind als die Hauptströmungskomponente (maximal 2 % der Hauptströmungskomponente), so daß

$$\bar{u} \gg \bar{v} \quad (2.18a)$$

$$\bar{u} \gg \bar{w} \quad (2.18b)$$

angesetzt werden kann. Mit diesen weiteren Voraussetzungen (2.17) und (2.18) ergeben sich die REYNOLDS'schen Gleichungen für achsparallele Strömungen durch enge Stabgitter unter Vernachlässigung des Dissipationsterms  $\varepsilon$  (s. JISCHA [8]) und des Schwerkräfteinflusses in Zylinderkoordinaten zu:

— Massenbilanz:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad (2.19)$$

— Impulsbilanz<sup>1)</sup>:

$$\rho \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} \right) = -\frac{dp}{dx} + \rho g_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{xr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{x\phi}}{\partial \phi} \quad , \quad (2.20)$$

— Energiebilanz:

$$\rho c_p \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \phi} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) = \bar{u} \frac{dp}{dx} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r'') - \frac{1}{r} \frac{\partial q_\phi''}{\partial \phi} \quad , \quad (2.21)$$

mit

$$\tau_{xr} = \tau_r = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \overline{\rho u'v'} \quad , \quad (2.22a)$$

$$\tau_{x\phi} = \tau_\phi = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \overline{\rho u'w'} \quad , \quad (2.22b)$$

$$q_r'' = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \overline{\rho c_p T'v'} \quad , \quad (2.22c)$$

$$q_\phi'' = -\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \phi} + \overline{\rho c_p T'w'} \quad . \quad (2.22d)$$

Die dargestellten REYNOLDS'schen Gleichungen (2.19) bis (2.21) enthalten einen Satz von 9 Unbekannten. Zur Beschreibung des turbulenten Impulstransportes sind dies die drei Geschwindigkeitskomponenten  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$ , der Druckgradient  $dp/dx$  und die turbulenten Schubspannungen  $-\overline{\rho u'v'}$  und  $-\overline{\rho u'w'}$ . Bei der Behandlung des Wärmetransportes kommen noch die Temperatur  $\bar{T}$  und die turbulenten Wärmestromdichten  $\overline{\rho c_p T'v'}$  und  $\overline{\rho c_p T'w'}$  als unbekannte Größen hinzu.

Für alle diese Größen sind in der Literatur eine Vielzahl von experimentellen Daten und theoretischen Ansätzen vorhanden, von denen in den beiden folgenden Kapiteln 3. und 4. die für die vorliegende Arbeit bedeutsamsten und grundlegenden Publikationen dargestellt werden. Dabei wird zunächst im Kapitel 3. das sehr intensiv bearbeitete Feld des turbulenten Impulstransportes und dann in Kapitel 4. das in der Literatur noch recht unvollständig behandelte Gebiet des turbulenten Wärmetransportes in engen Stabgittern vorgestellt.

<sup>1)</sup>Es muß nun nur noch die axiale Impulsbilanz betrachtet werden.

### 3. Turbulenter Impulstransport

In Kapitel 2. ist gezeigt worden, daß bei turbulenten Strömungen neben den molekularen Schubspannungen, die durch die innere Reibung des Fluides verursacht werden, auch turbulente Schubspannungen vorhanden sind. Betrachtet man die Impulsstromdichte  $\dot{j}_i$  durch ein Flächenelement  $dF$ , das in einer Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung  $x_i$  liegt, so ergeben sich die Komponenten des Impulsstromdichtetensors zu

$$\dot{j}_{ij} = \rho v_i v_j \quad (3.1)$$

Setzt man nun Gl. (2.11) für die Geschwindigkeiten  $v_i$  und  $v_j$  an, und führt eine zeitliche Mittelung durch, so erhält man

$$\overline{\dot{j}_{ij}} = \rho \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{\rho v_i' v_j'} \quad (3.2)$$

Man erkennt, daß durch die turbulenten Schwankungen eine zusätzliche Impulsstromdichte  $\overline{\rho v_i' v_j'}$  verursacht wird, die auch als zusätzliche Spannung auf das bzw. an dem Flächenelement angesehen werden kann. Neben den ohnehin vorhandenen molekularen Spannungen liegen also bei turbulenten Strömungen noch turbulente Spannungen

$$\sigma_{ij,tur} = -\overline{\rho v_i' v_j'} \quad (3.3)$$

vor, die für  $i = j$  Normalspannungen und für  $i \neq j$  Schubspannungen sind. Auch wenn der zeitliche Mittelwert einer Geschwindigkeitskomponente gleich *Null* ist, können durch die Schwankungen um diesen zeitlichen Mittelwert turbulente Spannungen verursacht werden.

Turbulente Schubspannungen können jedoch nur dann vorliegen, wenn das zeitlich gemittelte Produkt zweier Schwankungsbewegungen von *Null* verschieden ist. Tatsächlich sind bei isotroper Turbulenz die turbulenten Schubspannungen gleich *Null*, da alle Schwankungen statistisch gesehen gleich und unabhängig voneinander sind, so daß sie nicht miteinander korrelieren. Bei der anisotropen oder Scherturbulenz sind die einzelnen Schwankungen jedoch nicht voneinander unabhängig, sie korrelieren, und zwar der Gestalt, daß der zeitliche Mittelwert eines Mischproduktes  $\overline{v_i' v_j'}$  ( $i \neq j$ ) im allgemeinen negativ ist [14]. Der Zusammenhang zwischen den turbulenten Spannungen  $-\overline{\rho v_i' v_j'}$  und den zeitlichen Mittelwerten der Geschwindigkeitskomponenten wird durch Turbulenzmodelle beschrieben.

#### 3.1. TURBULENZMODELLE

Bei der Modellierung der Turbulenzeigenschaften sind prinzipiell zwei Arten der Turbulenztheorie zu unterscheiden:

- i) die statistische Turbulenztheorie, bei der alle statistisch erfaßbaren Eigenschaften der turbulenten Schwankungen untersucht werden. Auf die statistische Turbulenztheorie, die auf Arbeiten von TAYLOR [15] zurückgeht, soll hier nicht näher eingegangen werden.
- ii) die halbempirischen Turbulenztheorien, bei denen mit sogenannten "Schließungsannahmen" die Zusammenhänge zwischen den Turbulenzgrößen und den anderen Feldgrößen geknüpft werden. Als Pionierarbeit muß hier die Arbeit PRANDTL's [16] über den Mischungswegansatz

angesehen werden, die eine halbempirische Theorie erster Ordnung ist. Auf die halbempirischen Theorien höherer Ordnung, die auf den Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen beruhen, wird in diesem Abschnitt ebenfalls eingegangen werden.

### 3.1.1. HALBEMPIRISCHE TURBULENZTHEORIEN ERSTER ORDNUNG

Nach einem Vorschlag BOUSSINESQ's aus dem Jahre 1877 wird für die turbulenten Schubspannungen  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$  ein dem NEWTON'schen Schubspannungsansatz ähnlicher Ansatz

$$\tau_{ij,tur} = -\overline{\rho v'_i v'_j} = \rho \epsilon_{\tau,ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \quad (3.4)$$

gemacht, wobei die Austauschgröße  $\epsilon_{\tau,ij}$  keine Stoffkonstante, sondern eine vom Strömungsfeld abhängige Ortsfunktion ist. In Anlehnung an die molekulare Viskosität wird sie scheinbare oder auch "Wirbel"-viskosität genannt. Sind die Wirbelviskositäten  $\epsilon_{\tau,ij}$  für eine Problemstellung bekannt, so ist für diesen Fall das Turbulenzproblem gelöst.

1925 hat PRANDTL [16] erstmals einen erfolgreichen Ansatz für den turbulenten Impulsaustausch formuliert. PRANDTL geht von Flüssigkeitsballen aus, die aus einer Schicht  $y$  in einen Nachbarbereich  $y \pm l$  wandern<sup>2)</sup>, und dort eine Geschwindigkeitsdifferenz gegenüber der Umgebung von

$$\Delta \bar{u} \sim u' \sim \mp l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.5)$$

aufweisen. Auf Grund der Verdrängungswirkung der Flüssigkeitsballen werden aus Kontinuitätsgründen Querschwankungen  $v'$  verursacht, die die gleiche Größenordnung wie die Längsschwankungen  $u'$  haben. Der PRANDTL'sche Mischungswegansatz lautet dann

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad , \quad (3.6)$$

wobei alle Proportionalitäten im Mischungsweg  $l$  enthalten sind. Die Lösung des Turbulenzproblems ist somit auf die Formulierung des Mischungsweges  $l$  zurückgeführt worden. Aus den experimentell ermittelten Daten NIKURADSE's [17] für eine vollständig eingelaufene, turbulente Kreisrohrströmung (s. Abb. 3.1) entwickelt PRANDTL die folgende Interpolationsformel für den Mischungsweg:

$$l/R = 0.14 - 0.08(1 - y/R)^2 - 0.06(1 - y/R)^4 \quad , \quad (3.7)$$

wobei  $y$  der Wandabstand und  $R$  der Rohrradius ist. In unmittelbarer Wandnähe geht diese Beziehung über in

$$l = \kappa y \quad (3.8)$$

mit

$$\kappa = 0.4 \quad . \quad (3.8a)$$

---

<sup>2)</sup>Es wird hier eine ebene Kanalströmung mit  $\bar{u} = \bar{u}(y)$  und  $\bar{v} = \bar{w} = 0$  betrachtet.

VAN DRIEST [18] entwickelt 1956 einen theoretischen Ansatz für den Mischungsweg und validiert diesen an den experimentellen Daten von LAUFER [19]. Der VAN DRIEST'sche Ansatz lautet:

$$l = \kappa y \left[ 1 - e^{(-y^+/A^+)} \right] \quad (3.9)$$

mit dem dimensionslosen Wandabstand

$$y^+ = \frac{yu^*}{\nu} \quad , \quad (3.9a)$$

der Wandschubspannungsgeschwindigkeit

$$u^* = \sqrt{\tau_w/\rho} \quad (3.9b)$$

und der Konstanten

$$A^+ = 26 \quad . \quad (3.9c)$$

Für Modifikationen des VAN DRIEST'schen Ansatzes (3.9) sei auf [20] verwiesen.

REICHARDT [21] betrachtet die Austauschgröße  $\epsilon_r$  des BOUSSINESQ-Ansatzes direkt und entwickelt aus umfangreichen Messungen in Kreisrohren und Kanälen und den experimentellen Daten NIKURADSES [17] die Beziehungen

$$\frac{\epsilon_{\tau,r}}{\nu} = \kappa \left( y^+ - y_0^+ \tan \frac{y^+}{y_0^+} \right) \quad \text{für} \quad y^+ \leq y_0^+ \quad , \quad (3.10)$$

wobei  $y_0^+$  ein Maß für die Stärke der viskosen Wandschicht ist und mit  $y_0^+ = 11$  angegeben wird, und

$$\frac{\epsilon_{\tau,r}}{u^* R} = \frac{\kappa}{3} \left[ 0.5 + (1 - y/R)^2 \right] \left[ 1 - (1 - y/R)^2 \right] \quad \text{für} \quad y^+ > y_0^+ \quad . \quad (3.11)$$

Auf die Arbeit REICHARDT's [21] wird im folgenden Abschnitt noch näher eingegangen.

Die bisher dargestellten Ansätze sind strenggenommen nur für Kreisrohre oder ebene Kanäle anwendbar, da es sich bei der modellierten Austauschgröße nur um die Austauschgröße für die radiale turbulente Schubspannung  $-\overline{\rho u'v'}$  handelt. Wie aus der axialen Impulsbilanz (2.20) leicht zu ersehen ist, wird auch nur diese bei Kreisrohrströmungen benötigt, da bei dieser Geometrie alle azimutalen Variationen zu *Null* werden.

EIFLER [22] untersucht in einer Stabbündelgeometrie (s. Abb. 3.2) turbulente Geschwindigkeitsverteilungen und faßt seine Ergebnisse, die auch eine Auswertung der experimentellen Daten JONSON's [23] (kon- und exzentrischer Ringspalt) und BRIGHTON's [24] (konzentrischer Ringspalt) beinhalten, in Bezug auf die Wirbelviskositäten wie folgt zusammen. Die turbulenten Schubspannungen werden mit dem BOUSSINESQ-Ansatz beschrieben, wobei für die radiale Wirbelviskosität ein modifizierter REICHARDT-Ansatz [21] verwendet wird. Mit Hilfe eines von TIEDT [25] eingeführten Lamellenparameters

$$K = \frac{L}{R} + 1 = \frac{r_m}{R} \quad , \quad (3.12)$$

wobei die Profillänge  $L$  den Abstand zwischen der benetzten Wand und dem Ort der maximalen Geschwindigkeit auf dem entsprechenden Radialstrahl darstellt, beschreibt EIFLER die Abhängigkeit der radialen Wirbelviskosität von der örtlichen Geometrie.

EIFLER geht bei der Auswertung der experimentellen Daten davon aus, daß auch bei asymmetrischen Strömungen am Ort der maximalen Geschwindigkeit auf einem Radialstrahl die radiale Schubspannung zu *Null* wird. REHME [26] hat bei systematischen Untersuchungen asymmetrischer Geschwindigkeitsprofile — am Beispiel eines konzentrischen Ringspaltes mit kleinem Durchmesser-verhältnis — gezeigt, daß eine Koinzidenz der Schubspannungsnulllinie mit der Linie der maximalen Geschwindigkeiten nicht generell gegeben ist. Die Fehler, die aus der von EIFLER [22] benutzten Annahme resultieren, sind jedoch für Stabgitterströmungen und Strömungen durch Ringspalte mit Radienverhältnissen größer 0.1 vernachlässigbar gering (s. MONIR [27]).

Für die dimensionslose radiale Wirbelviskosität

$$\epsilon_{\tau,r}^+ = \frac{\epsilon_{\tau,r}}{u^* L} \quad (3.13)$$

entwickelt EIFLER für die vollturbulente Kernströmung ( $y^+ \geq 30$  nach EIFLER) die Beziehung:

$$\epsilon_{\tau,r}^+ = \frac{\kappa}{2(1+t)} (t + Z^2) (1 - Z^2) \frac{2K - Z(K-1)}{(K+1)[K - Z(K-1)]} \quad , \quad (3.14)$$

wobei der relative radiale Abstand vom Ort maximaler Geschwindigkeit mit der Koordinate

$$Z = \frac{K - r/R}{K - 1} \quad (3.14a)$$

beschrieben wird. Der Koeffizient  $t$  ist eine Funktion des Lamellenparameters  $K$  und der REYNOLDS-Zahl  $Re$ . Im folgenden Abschnitt 3.2.2. wird noch näher auf ihn eingegangen werden.

Für die azimutale Wirbelviskosität setzt Eifler [22]

$$\epsilon_{\tau,\phi} = n \epsilon_{\tau,r} \quad , \quad (3.15)$$

wobei der Anisotropiefaktor

$$n = \frac{\epsilon_{\tau,\phi}}{\epsilon_{\tau,r}} \quad (3.15a)$$

durch die Anpassung seiner theoretischen Ergebnisse an experimentelle Daten [28] zu

$$1 \leq n \leq 10 \quad (3.15b)$$

bestimmt wird. EIFLER kommt zu dem Schluß, daß "nach bisherigen Kenntnissen keine allgemeingültigen Voraussagen über die Größe  $n$  möglich sind, da von anderen Strömungsvorgängen bekannte Werte im vorliegenden Fall nicht gültig sind" (EIFLER [22], S. 127).

Im Computer-Code VELASCO [29] wenden EIFLER & NIJSING für die dort zur Lösung der axialen Impulsbilanz benötigte azimutale Wirbelviskosität eine Modifikation des experimentell für den Stofftransport parallel zu einer Wand von ELDER [30] ermittelten globalen Ansatzes für die radial gemittelte, dimensionslose azimutale Wirbelviskosität

$$\overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+} = \frac{\overline{\epsilon_{\tau,\phi}}}{u^* L} = 0.23 \quad (3.16)$$

an, und setzen für die dimensionslose azimutale Wirbelviskosität in "Ermanglung genügender Kenntnisse" (EIFLER & NIJSING [31], S. 135) den konstanten Zahlenwert

$$\epsilon_{\tau,\phi}^+ = \overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+} = 0.154 \quad . \quad (3.17)$$

NEELEN [3] hat durch die Auswertung der umfangreichen, experimentell ermittelten Daten REHME's [32-44] (Versuchsgeometrie s. Abb. 3.3) nähere Aufschlüsse über den azimuthalen Verlauf und die radiale Verteilung der wandparallelen Wirbelviskosität erhalten. Abb. 3.4 zeigt exemplarisch die zweidimensionale Verteilung der dimensionslosen, wandparallelen Wirbelviskosität in einer Höhenliniendarstellung. Wie zu erkennen ist, liegen im Bereich kleiner Profillängen — also im Bereich der Spalte zwischen zwei Unterkanälen — die größten dimensionslosen, wandparallelen Wirbelviskositäten vor. Dabei sind die Maximalwerte um bis zu 4 Zehnerpotenzen höher als die im Bereich maximaler Profillängen auftretenden Minimalwerte. NEELEN hat nun für jeden von REHME ausgemessenen Radialstrahl eine radialgemittelte, dimensionslose wandparallele Wirbelviskosität

$$\overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+} = \int_0^1 \epsilon_{\tau,\phi}^+(Y) dY \quad (3.18)$$

mit dem dimensionslosen Wandabstand

$$Y = \frac{r - R}{r_m - R} \quad (3.18a)$$

ermittelt, und die Abhängigkeit dieser Größe von der dimensionslosen Profillänge  $Y_m = L/R$  mit der durch Fehlerquadratminimierung gewonnenen Korrelation

$$\ln \left( \overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+} \right) = 0.118e^{(-13.8Y_m + 4.47)} - 1.43 \quad (3.19)$$

beschrieben. Abb. 3.5 zeigt den Verlauf der gefitteten REHME'schen Meßwerte für die radial gemittelte, dimensionslose wandparallele Wirbelviskosität  $\overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+}$  über der dimensionslosen Profillänge  $Y_m$  und die von NEELEN ermittelte Kurve nach Gl. (3.19). NEELEN stellt jedoch systematische Abweichungen der einzelnen Meßreihen von der Ausgleichskurve (3.19) fest, und führt auf Grund der nachfolgenden Überlegungen weitere Parameter zur Beschreibung der Verteilung der gesuchten Größe  $\overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+}$  ein.

Ausgehend von der radialen Verteilung der Turbulenzenergie

$$k = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (3.20)$$

kommt NEELEN zu der Auffassung, daß "die Verteilung der Turbulenzenergie in erster Näherung als homogen" (NEELEN [3], S. 31) anzusehen ist, was ihn zu der Vermutung führt, daß "primär nicht hydraulische, sondern geometrische Parameter die Ausbildung der wandparallelen Wirbelviskosität beeinflussen" (NEELEN [3], S. 31). NEELEN kommt zu dem Schluß, daß die radial gemittelte, dimensionslose wandparallele Wirbelviskosität  $\overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+}$  mit steigendem hydraulischen Durchmesser  $d_{h,i}$  des betrachteten Unterkanals  $i$  sinkt und mit steigendem azimuthalen Abstand  $U_{OE}$  zwischen zwei Nulldurchgängen der Wandschubspannung steigt. Die REHME'schen Meßdaten werden von NEELEN mit diesen weiteren Einflußparametern korreliert, so daß die Beziehung

$$\ln \left( \overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+} \right) = u_1 e^{(u_2 Y_m + u_3)} + u_4 \quad (3.21)$$

mit

$$u_1 = 0.118 \quad , \quad (3.21a)$$

$$u_2 = -13.8 \quad , \quad (3.21b)$$

$$u_3 = (d_{h,i}/R)^{0.236} + 3.52 \quad , \quad (3.21c)$$

$$u_4 = 0.215(d_{h,i}/R)^{3.4} + 5.1(U_{OE}/d_{h,i})^{0.149} - 6.94 \quad (3.21d)$$

ermittelt wird. Für die Korrelation (3.21) gibt NEELEN [3] folgende Gültigkeitsgrenzen an:

$$Y_m \geq \left( \frac{d_{h,i}}{R} - 0.3 \right) / 7.25 \quad , \quad (3.22a)$$

$$0.52 \leq \frac{d_{h,i}}{R} \leq 1.63 \quad , \quad (3.22b)$$

$$0.44 \leq \frac{U_{OE}}{d_{h,i}} \leq 3.61 \quad . \quad (3.22c)$$

Außerhalb dieses Gültigkeitsbereiches empfiehlt NEELEN, die Mittelwertformel (3.19) zu benutzen.

Für die radiale Verteilung der dimensionslosen wandparallelen Wirbelviskosität gibt NEELEN [3] die Beziehung

$$\epsilon_{\tau,\phi}^+ = \overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+} \left[ 1.0 + A_R \left( B_R^2 - B_R + 1/3 \right) - A_R (B_R - Y)^2 \right] \quad (3.23)$$

mit den empirisch ermittelten Koeffizienten

$$A_R = 3.0 \quad ; \quad B_R = 0.60 \quad \text{Stabzone} \quad (3.23a)$$

$$A_R = 2.0 \quad ; \quad B_R = 0.75 \quad \text{Wandzone} \quad (3.23b)$$

an, wobei die Stabzone der Bereich zwischen einem Stab und der Schubspannungsnulllinie und die Wandzone der Bereich zwischen der Bündelberandung (Kastenwand) und der Schubspannungsnulllinie ist.

CORDES [45] hat durch die Auswertung der experimentell ermittelten Wandschubspannungsverteilungen von REHME [33, 35–38, 40, 41, 46], HOOPER [47] (Versuchsgeometrie nach HOOPER s. Abb. 3.6) und FAKORY-MONAZAH [10] die Koeffizienten von Gl. (3.21) modifiziert und gibt für sie folgende Beziehungen an:

$$u_1 = 12.992 \quad , \quad (3.24a)$$

$$u_2 = -2.959 \quad , \quad (3.24b)$$

$$u_3 = (d_{h,i}/R)^{1.037} \cdot (-0.581) \quad , \quad (3.24c)$$

$$u_4 = 2.644 (d_{h,i}/R)^{2.106} + 3.793 (U_{OE}/d_{h,i})^{0.435} - 11.419 \quad . \quad (3.24d)$$

Eine Verbesserung gegenüber dem Modell (3.21) von NEELEN [3] wird mit den Koeffizienten aus Gl. (3.24) jedoch nicht erreicht.

### 3.1.2. HALBEMPIRISCHE TURBULENZTHEORIEN HÖHERER ORDNUNG

Bei den halbempirischen Turbulenztheorien höherer Ordnung, bei denen im Gegensatz zu den Theorien erster Ordnung die Schließungsannahmen nicht direkt in den REYNOLDS'schen Gleichungen (2.12–2.14) bzw. (2.19–2.21) vorgenommen werden, unterscheidet man je nach der Anzahl der zusätzlich zu den Bilanzgleichungen für Masse und Impuls zu lösenden Differentialgleichungen für die Turbulenzgrößen Ein-, Zwei- oder Mehrgleichungsmodelle. Es soll hier nur kurz auf die bekanntesten Ein- und Zweigleichungsmodelle eingegangen werden; für die Mehrgleichungsmodelle sei als einführende Literatur auf [20] verwiesen.

## 3.1.2.1. EINGLEICHUNGSMODELLE

Die halbempirischen Turbulenztheorien erster Ordnung setzten die turbulenten Spannungen  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  einem Geschwindigkeitsgradienten  $\partial \bar{v}_i / \partial x_j$  proportional, so daß die turbulenten Spannungen an Orten verschwindender Geschwindigkeitsgradient zu *Null* werden. Betrachtet man die Strömung hinter einem feinmaschigen Gitter eines Windkanals, wo eine isotrope Turbulenz vorliegt, so hieße dies, daß dort keine turbulenten Spannungen vorlägen und somit auch keine turbulenten Transportvorgänge stattfänden, obwohl die Strömung stark turbulent ist. Dies ist offensichtlich ebenso unzutreffend, wie die Konsequenzen der halbempirischen Turbulenztheorien erster Ordnung bei ihrer Anwendung zur Beschreibung der Wärmetransportvorgänge an Orten verschwindender Geschwindigkeitsgradienten. Betrachtet man eine turbulente Kanalströmung mit einseitiger Beheizung, so wird einem klar, daß die turbulenten Wärmetransportvorgänge sicherlich nicht an der Linie maximaler Geschwindigkeiten zum Erliegen kommen, so daß hier eine Kopplung an den Geschwindigkeitsgradienten nicht sinnvoll ist.

KOLMOGOROV (1942) und PRANDTL (1945) entwickelten unabhängig voneinander ein Turbulenzmodell, in dem die Transportgleichung für die Turbulenzenergie  $k$  modelliert wird. Im folgenden sollen kurz die Gedanken PRANDTL's [48] skizziert werden.

Für eine zweidimensionale Grenzschichtströmung, wie sie auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht wird, lautet die Transportgleichung für die Turbulenzenergie

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y}}_{\text{Konvektion}} = - \underbrace{\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipation}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( k + \frac{p'}{\rho} \right) v' - \nu \frac{\partial k}{\partial y} - \nu \frac{\partial v'^2}{\partial y} \right]}_{\text{Diffusion}}, \quad (3.25)$$

wobei die Turbulenzenergie nach Gl. (3.20) durch

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

und der Dissipationsterm nach Gl. (2.15b) durch

$$\varepsilon = \mu \left[ \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \left( \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \right]$$

gegeben ist. Zur Herleitung der Transportgleichung (3.25) sei auf [8] verwiesen.

PRANDTL [48] modelliert nun die Produktions-, Dissipations- und Diffusionsterme wie folgt:

**Produktion:** Für die turbulente Schubspannung  $-\rho \overline{u'v'}$  setzt PRANDTL den BOUSSINESQ-Ansatz Gl. (3.4) an und setzt für die Wirbelviskosität  $\epsilon_\tau$  "im Hinblick auf ihre Dimension" (PRANDTL [48], S. 9)

$$\epsilon_\tau = C_\tau l \sqrt{k}, \quad (3.26)$$

worin  $C_\tau$  eine (konstante ?) Zahl und  $l$  eine dem Mischungsweg ähnliche Ortsfunktion darstellt. Für den Produktionsterm ergibt sich dann

$$-\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = C_\tau l \sqrt{k} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (3.27)$$

Dissipation : Die turbulente Dissipation  $\epsilon$ , die das Erlahmen der Turbulenz beschreibt, wird durch die Widerstände, die sich den einzelnen Fluidballen bei ihrer Weiterbewegung entgegenstellen, verursacht. Der Widerstand eines Fluidballens ist dann proportional dem Quadrat seiner Relativgeschwindigkeit  $u'$  zum umgebenden Fluid und proportional seiner Querschnittsfläche. PRANDTL nimmt — wie in seinem Mischungswegansatz — den Durchmesser des Fluidballens proportional dem Mischungsweg  $l$  an und erhält somit für den Widerstand

$$W \sim l^2 \overline{u'^2} \quad (3.28)$$

Die Widerstandsleistung ist dann  $\sim l^2 \overline{u'^3}$  und die Widerstandsleistung pro Volumeneinheit ( $V \sim l^3$ ), also die Dissipation, ergibt sich zu

$$\epsilon \sim \frac{\overline{u'^3}}{l} \quad (3.29)$$

PRANDTL [48] setzt nun noch die Schwankungsgeschwindigkeit  $u'$  proportional der Quadratwurzel der Turbulenzenergie  $k$  und erhält für den Dissipationsterm

$$\epsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad , \quad (3.30)$$

wobei alle Proportionalitäten in der Konstanten  $C_D$  enthalten sind.

Diffusion : Der Diffusionsterm beschreibt die Tatsache, daß sich die Turbulenzenergie in Richtung ihres Gefälles ausbreitet, d.h. von Gebieten größerer zu Gebieten geringerer Turbulenzenergie strömt. Ähnlich wie beim molekularen Wärmetransport stellt sich ein Turbulenzenergiestrom ein, den PRANDTL auch analog zum molekularen Wärmetransport modelliert, so daß er den Diffusionsterm dem negativen Turbulenzenergiegradienten proportional setzt, also

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( k + \frac{p'}{\rho} \right) v' - \nu \frac{\partial k}{\partial y} - \nu \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_{DF} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (3.31)$$

Analog der Modellierung des Produktionsterms wird nun die Austauschgröße  $\epsilon_{DF}$  ermittelt, so daß mit Gl. (3.26) der Diffusionsterm zu

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( k + \frac{p'}{\rho} \right) v' - \nu \frac{\partial k}{\partial y} - \nu \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left( C_{DF} l \sqrt{k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (3.32)$$

wird.

Setzt man nun die Ausdrücke für die Produktion (3.27), die Dissipation (3.30) und die Diffusion (3.32) in die Transportgleichung für die Turbulenzenergie (3.25) ein, so erhält man

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = C_{\tau} l \sqrt{k} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - C_D \frac{k^{3/2}}{l} + \frac{\partial}{\partial y} \left( C_{DF} l \sqrt{k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (3.33)$$

Der Zusammenhang zwischen der REYNOLDS'schen Schubspannung  $-\overline{\rho u'v'}$  und der Turbulenzenergie  $k$  wird durch die Beziehung

$$-\overline{u'v'} = C_{\tau} l \sqrt{k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.34)$$

beschrieben. Eine Lösung des Turbulenzproblems ist nun möglich, wenn die Konstanten  $C_\tau$ ,  $C_D$  und  $C_{DF}$  bekannt sind und für den Mischungsweg  $l$  ein geeigneter Ansatz vorliegt.

WIEGHARDT (im Zusatz zu PRANDTL [48]) bestimmt aus experimentell ermittelten Daten für eine ebene Kanalströmung die Konstanten von Gl. (3.33) zu

$$C_\tau \approx 0.56 \quad , \quad (3.35a)$$

$$C_D \approx 0.18 \quad , \quad (3.35b)$$

$$C_{DF} \approx 0.38 \quad . \quad (3.35c)$$

Für den Mischungsweg  $l$  wendet WIEGHARDT dabei die Interpolationsformel (3.7) von PRANDTL an.

Auf Modifikationen und Weiterentwicklungen der Eingleichungsmodelle nach KOLMOGOROV<sup>3)</sup> und PRANDTL soll hier nicht näher eingegangen werden (siehe hierzu [20] und [49]), sondern kurz die Vor- und Nachteile solcher Eingleichungsmodelle diskutiert werden.

Der Vorteil der Eingleichungsmodelle gegenüber den halbempirischen Turbulenztheorien erster Ordnung ist — wie oben ausgeführt —, daß mit ihnen auch turbulente Austauschprozesse an Orten verschwindender Geschwindigkeitsgradienten beschrieben werden und die Formulierung globaler erfolgt, d.h. nicht ausschließlich mit lokalen Austauschansätzen durchgeführt wird. Der entscheidende Nachteil ist sicherlich die höhere Anzahl der zu bestimmenden Konstanten, die gerade bei anisotroper Turbulenz ungleich höher ist als bei den halbempirischen Turbulenztheorien erster Ordnung (s. KAISER [50]). Auch ist der Rechenaufwand wesentlich höher.

Ein weiterer Nachteil der Eingleichungsmodelle ist, daß der Mischungsweg  $l$  mit einer algebraischen Beziehung ermittelt werden muß, und somit ein Teil der Globalität des Modells wieder verloren geht. Um diesen Nachteil zu beseitigen, haben eine Vielzahl von Autoren sogenannte Zweigleichungsmodelle entwickelt, in denen neben der Transportgleichung für die Turbulenzenergie auch eine Transportgleichung für eine weitere Turbulenzgröße, wie z.B. die turbulente Dissipation  $\varepsilon$ , den Mischungsweg  $l$  oder eine Kombination der Größen Turbulenzenergie  $k$  und Mischungsweg  $l$ , modelliert wird.

### 3.1.2.2. ZWEIFLEICHUNGSMODELLE

Für stationäre zweidimensionale Grenzschichtströmungen haben die Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen die allgemeine Form (s. [20])

$$\bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\zeta}{k} C_1 l \sqrt{k} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - C_2 \frac{\zeta}{\sqrt{k}} \frac{k}{l} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{C_3 l \sqrt{k}}{\sigma_\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + S_\zeta \quad , \quad (3.36)$$

wobei  $S_\zeta$  einen Quell- oder Senkenterm für die betrachtete Turbulenzgröße  $\zeta = k^m l^n$  darstellt. Setzt man als Turbulenzgröße die Turbulenzenergie  $k$  in Gl. (3.36) an, so erhält man wieder Gl. (3.33).

---

<sup>3)</sup>KOLMOGOROV modelliert in seiner Arbeit eine Transportgleichung für eine "Frequenz"  $f = \sqrt{k}/l$  und nicht wie PRANDTL eine Transportgleichung für die Turbulenzenergie  $k$ .

LAUNDER & SPALDING [20] haben in Tabelle III.1 die Arbeiten verschiedener Autoren zusammengefaßt, wobei jeweils angegeben ist, welche Turbulenzgröße neben der Turbulenzenergie in einer zweiten Transportgleichung modelliert worden ist.

Am Beispiel des  $k \sim \varepsilon$ -Modells von JONES & LAUNDER [51] soll hier kurz gezeigt werden, welche Koeffizienten im Rahmen eines Zweigleichungsmodells benötigt werden, und wo die Vorteile gegenüber einem Eingleichungsmodell liegen. JONES & LAUNDER [51] formulieren für hohe REYNOLDS-Zahlen (d.h. bei vernachlässigbarem Einfluß der molekularen Viskosität) die Transportgleichungen für die Turbulenzenergie  $k$

$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} \right) = C_\tau \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left( C_\tau \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (3.37)$$

und die turbulente Dissipation  $\varepsilon = k^{3/2}/l$

$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) = C_1 C_\tau \rho k \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - C_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{C_\tau \rho k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \quad (3.38)$$

und geben für die Konstanten die folgenden Zahlenwerte an :

$$C_\tau = 0.09 \quad , \quad (3.39a)$$

$$C_1 = 1.55 \quad , \quad (3.39b)$$

$$C_2 = 2.00 \quad , \quad (3.39c)$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.30 \quad . \quad (3.39d)$$

Der Zusammenhang zwischen der REYNOLDS'schen Schubspannung  $-\overline{\rho u'v'}$  und der Turbulenzenergie  $k$  wird mit Gl. (3.34) beschrieben. Man erkennt, daß mit nur 4 Konstanten — ohne ein algebraisches Hilfsmodell — das Turbulenzproblem für den Impulstransport gelöst ist, wenn das System der 4 gekoppelten Differentialgleichungen (REYNOLDS'sche Gleichungen (2.12) und (2.13) und die Transportgleichungen (3.37) und (3.38)) mathematisch gelöst werden kann. Allerdings modelliert diese Lösung dann nicht die Anisotropie einer Strömung, wie z.B. die Anwendung dieses Modells für enge Stabgitter (relativer Stabmittenabstand  $P/D = 1.07$ ) durch BARBARO [52] zeigt<sup>4)</sup>.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Zweigleichungsmodelle die konsistentere Lösung darstellen, allerdings bei anisotropen Strömungen nur begrenzt einsatzfähig sind. Eingleichungsmodelle erscheinen bei speziellen Problemen (Nullstellen des Geschwindigkeitsgradienten) den halbempirischen Turbulenztheorien erster Ordnung überlegen, sind aber außerhalb dieser speziellen Anwendungsgebiete diesen Theorien erster Ordnung unterlegen, da sie auch mit algebraischen Hilfsmodellen arbeiten und dabei einen höheren numerischen Aufwand verursachen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird deshalb (stark anisotrope Strömung, komplexe Strukturen) das halbempirische Turbulenzmodell erster Ordnung nach NEELEN [3] angewendet.

---

<sup>4)</sup>BARBARO [52] verwendet für die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  leicht abweichende Zahlenwerte ( $C_1 = 1.44$ ;  $C_2 = 1.92$ ).

### 3.2. UNIVERSELLE WANDSENKRECHTE GESCHWINDIGKEITSPROFILE

Grundlegende Untersuchungen experimenteller und theoretischer Art zur Beschreibung der turbulenten wandsenkrechten Geschwindigkeitsverteilungen in Rohren und nichtkreisförmigen Kanälen sowie an ebenen Platten sind von PRANDTL [16, 48], NIKURADSE [17, 53] und REICHARDT [21] durchgeführt worden. Es zeigt sich, daß die wandsenkrechte Verteilung der Hauptströmungskomponente  $\bar{u}$  in vier Bereiche unterteilt werden muß. In Abb. 3.7 können die vier Bereiche

- i) viskose Unterschicht (1),
- ii) Übergangsbereich (2),
- iii) vollturbulente Kernströmung (3) und
- iv) vollturbulente Kernströmung mit Zusatzgeschwindigkeit im Inneren (4)

abgelesen werden.

#### 3.2.1. VISKOSE UNTERSCHICHT

In der viskosen Unterschicht wird die Strömung primär durch die molekulare Viskosität des Fluides beeinflusst, während die turbulenten Schubspannungen vernachlässigbar sind (s. Abb. 3.8). Führt man die Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$  nach Gl. (3.9b) und den dimensionslosen Wandabstand  $y^+ = \frac{yu^*}{\nu}$  nach Gl. (3.9a) ein und vernachlässigt den turbulenten Schubspannungsanteil, so erhält man für die unmittelbare Wandnähe die Beziehung

$$\partial y^+ = \partial u^+ \quad , \quad (3.40)$$

wobei die dimensionslose Geschwindigkeit  $u^+$  die mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $u^*$  normierte Hauptströmungskomponente  $\bar{u}$  darstellt. Mit der Haftbedingung  $\bar{u}(y=0) = 0$  ergibt sich nach Integration von Gl. (3.40) für die wandsenkrechte Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Wandnähe — also in der viskosen Unterschicht — der Zusammenhang

$$u^+ = y^+ \quad . \quad (3.41)$$

REICHARDT [21] unterteilt die viskose Unterschicht auf Grund eigener experimenteller Ergebnisse und unter Berücksichtigung der experimentellen Daten NIKURADSE's [17] in einen Bereich  $y^+ \leq 4$ , in dem Gl. (3.41) als voll zutreffend angesehen wird, und einen Bereich  $4 \leq y^+ \leq 11$ . In diesem zweiten Bereich beobachtet REICHARDT schon ein schwaches Ansteigen der turbulenten Schubspannungen (bis auf ca. 30 % der gesamten radialen Schubspannung, s. Abb. 3.8) und entwickelt für diesen Bereich unter Verwendung des Modells (3.10) für die wandsenkrechte Wirbelviskosität die Beziehung

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + C_1 \left( 1 - e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33y^+} \right) \quad , \quad (3.42)$$

mit den Koeffizienten

$$\kappa = 0.4 \quad , \quad (3.42a)$$

$$C_1 = C - \frac{1}{\kappa} \ln \kappa = 7.8 \quad , \quad (3.42b)$$

$$C = 5.5 \quad . \quad (3.42c)$$

Die Koeffizienten  $C$  und  $\kappa$  sind schon von PRANDTL (s. [17], S. 27 ff) bei der Betrachtung der vollturbulenten Kernströmung eingeführt worden.

Es soll hier nicht näher auf die weiteren verschiedenen Ansätze der Literatur eingegangen werden, sondern nur noch der für diese Arbeit grundlegende Ansatz von NIJSING [54] dargestellt werden.

Durch die Betrachtung der Stabilität der viskosen Unterschicht gewinnt NIJSING [54] für den Bereich  $y^+ \leq 30$  die Beziehung

$$u^+ = y^+ \left[ 1.0 - 0.34 \frac{y^+}{U_0^+} + 0.039 \left( \frac{y^+}{U_0^+} \right)^2 \right] \quad (3.43)$$

mit

$$U_0^+ = 14.7 \quad . \quad (3.43a)$$

Dabei geht NIJSING von der Vorstellung aus, daß die viskose Unterschicht bis zum Erreichen einer Grenzdicke anwächst und dann in turbulente "Mikro-Wirbel" zerfällt, die in die turbulente Kernströmung diffundieren. Im Anschluß an den Zusammenbruch der viskosen Unterschicht baut sich diese wieder bis zum Erreichen der Grenzdicke auf, und der beschriebene Prozeß des Zusammenbruches setzt wieder ein.

Wie aus Abb. 3.9 zu erkennen ist, weichen die Beziehungen (3.41) - (3.43) im Bereich  $y^+ \leq 10$  nur unwesentlich voneinander ab. Im Bereich  $10 \leq y^+ \leq 20$  sind die in der Arbeit REICHARDT's [21] angesprochenen Abweichungen von (3.41) gut zu erkennen. Die Unterschiede zwischen den Beziehungen Gl. (3.42) und Gl. (3.43) hingegen sind vernachlässigbar gering, weshalb hier auch auf eine weitere Diskussion verzichtet werden soll.

### 3.2.2. VOLLTURBULENTE KERNSTRÖMUNG

Außerhalb der viskosen Unterschicht werden die turbulenten Schubspannungen  $-\overline{\rho u'v'}$  gegenüber den molekularen Schubspannungen  $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  immer beherrschender, wie auch Abb. 3.8 zeigt. Unter Vernachlässigung der radialen Variationen der radialen Schubspannung erhält man dann

$$u^{*2} \approx -\overline{u'v'} \quad . \quad (3.44)$$

PRANDTL (s. [17], S. 29) geht von dem Ansatz

$$u^* \sim y^p \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^q \quad (3.45)$$

aus, und erhält hieraus als einzige dimensionsrichtige Beziehung mit  $p = q = 1$

$$u^* = \kappa y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad , \quad (3.46)$$

wobei  $\kappa$  die schon oben mehrfach erwähnte universelle Konstante darstellt. Nach der Integration erhält man das logarithmische Geschwindigkeitsprofil

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad , \quad (3.47)$$

wobei für die Konstanten  $\kappa$  und  $C$  die in Gl. (3.42) angegebenen Zahlenwerte ermittelt worden sind.

REICHARDT [21] modifiziert auf Grund der schon angesprochenen experimentellen Arbeiten [17] und [21] das logarithmische Geschwindigkeitsprofil (3.47), indem er experimentell ermittelte Abweichungen von Gl. (3.47) im mittleren Teil des Strömungsquerschnittes in einem Kanal oder Kreisrohr mit einer dimensionslosen Zusatzgeschwindigkeit im Inneren

$$\frac{\bar{u}_i}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ \frac{1.5(2-Y)}{1+2(1-Y)^2} \right] \quad (3.48)$$

modelliert, wobei  $Y = (r - R)/(r_m - R)$  der dimensionslose Wandabstand nach Gl. (3.18a) ist. Das modifizierte "log-wall"-Gesetz nach REICHARDT [21] lautet dann für den Bereich der vollturbulenten Kernströmung

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ y^+ \frac{1.5(2-Y)}{1+2(1-Y)^2} \right] + C \quad (3.49)$$

mit den Koeffizienten  $\kappa$  und  $C$  nach PRANDTL (s. Gl. (3.42)).

In der oben schon angesprochenen Arbeit EIFLER's [22] (s. Abschnitt 3.1.1.) untersucht dieser unter anderem die Abhängigkeit der Koeffizienten  $\kappa$  und  $C$  von der örtlichen Geometrie und der REYNOLDS-Zahl und kommt durch die Anwendung seines Wirbelviskositätsmodells (3.14) zu einer modifizierten Formulierung der REICHARDT'schen Zusatzgeschwindigkeit im Inneren. Das wand-senkrechte Geschwindigkeitsprofil im Bereich der vollturbulenten Kernströmung ( $y^+ \geq 30$ ) lautet nach EIFLER [22]

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ y^+ \frac{(1+t)(2-Y)}{2[t+(1-Y)^2]} \right\} + C \quad , \quad (3.50)$$

wobei nun die Koeffizienten  $\kappa$ ,  $t$  und  $C$  Funktionen des Lamellenparameters  $K = r_m/R$  nach Gl. (3.12) und der REYNOLDS-Zahl  $Re$  sind, d.h.

$$\kappa = f_\kappa(Re, K) \quad , \quad (3.50a)$$

$$t = f_t(Re, K) \quad , \quad (3.50b)$$

$$C = f_C(Re, K) \quad . \quad (3.50c)$$

Aus denen in [22] dargestellten Tabellenwerten für  $\kappa$ ,  $t$  und  $C$  korrelieren EIFLER & NIJSING [29] im Bereich  $Re \geq 10^4$  die Beziehungen

$$0 \leq K \leq 1 \quad : \quad \kappa = 0.407 \quad , \quad (3.51a)$$

$$\frac{1}{t} - 1 = 3.87 - 1.8|K - 0.32|^{1.4} \quad , \quad (3.51b)$$

$$C = 5.0 \quad , \quad (3.51c)$$

$$K > 1 \quad : \quad \kappa = 0.387(1 + 0.05K) \quad (3.51d)$$

$$\frac{1}{t} - 1 = 10e^{-1.26\sqrt{K}} \quad , \quad (3.51e)$$

$$C = 12.471 - \frac{3.0445}{\kappa} \quad . \quad (3.51f)$$

NEELEN [3] hat im Rahmen seiner oben dargestellten Analyse der experimentellen Daten von REHME [32–44] die funktionalen Zusammenhänge von EIFLER & NIJSING [29] für den Koeffizienten  $C$  modifiziert. Nach NEELEN [3] gilt

$$0 \leq K \leq 1 \quad : \quad C = 5.0 \quad , \quad (3.52a)$$

$$K > 1 \quad : \quad C = 5.0(1 + 0.05K) \quad , \quad (3.52b)$$

$$C > 6.0 \implies C = 6.0 \quad . \quad (3.52c)$$

Die Anpassung des Koeffizienten  $C$  unter Beibehaltung der Koeffizienten  $\kappa$  und  $t$  an die experimentellen Daten von REHME [32–44] ist durch NEELEN [3] recht willkürlich erfolgt, und mit Blick auf die von NEELEN ermittelten Druckverlustkoeffizienten, die in direktem Zusammenhang mit den Koeffizienten des "log-wall"-Gesetzes stehen (s. EIFLER [22], Anhang V)<sup>5)</sup>, erscheint eine Anpassung des Koeffizienten  $\kappa$  sinnvoller. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführte entsprechende Anpassungen, bei denen der Koeffizient  $C$  nach Gl. (3.51) ermittelt und der Koeffizient  $\kappa$  an die experimentellen Daten [32–44] angepaßt worden ist, haben jedoch nicht besser mit den Experimenten [32–44] übereinstimmende Druckverlustkoeffizienten ergeben, so daß im weiteren die Anpassung von NEELEN [3] benutzt wird.

---

<sup>5)</sup>Nach EIFLER [22] ist der Zusammenhang zwischen dem Druckverlustkoeffizienten und den Koeffizienten des "log-wall"-Gesetzes einer Lamelle durch die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_{D,K}}{8}}} = \frac{1}{\kappa_K} \ln \left( Re_K \sqrt{\frac{\lambda_{D,K}}{8}} \right) + B_R \quad (3.53)$$

gegeben, d.h. daß mit steigendem Koeffizienten  $\kappa_K$  auch der Druckverlustkoeffizient  $\lambda_{D,K}$  der Lamelle steigt. Der Einfluß der anderen Koeffizienten des "log-wall"-Gesetzes ist nur additiv im Term  $B_R$  enthalten und wirkt sich daher nur schwach aus.

### 3.3. SEKUNDÄRSTRÖMUNGEN

Bei turbulenten Strömungen durch Stabbündelgeometrien unterscheidet man zwei Arten von Sekundärströmungen (s. VONKA ET AL. [13]):

- i) Sekundärströmungen 1. Art, die durch äußere Kräfte verursacht werden (Krümmer, Abstandhalter, Einlaufvorgänge jeglicher Art) und bei hydraulisch voll eingelaufenen Strömungen, wie sie hier betrachtet werden, nicht vorhanden sind.
- ii) Sekundärströmungen 2. Art, die einerseits als geschlossene und räumlich begrenzte Wirbel und andererseits als pulsierende Querströme auftreten können.

Um die Unterscheidung zwischen Sekundärströmungswirbeln und pulsierenden Querströmen zu verdeutlichen, betrachte man ein unendliches hexagonales Stabgitter (s. Abb. 3.10). Die kleinste symmetrische Untereinheit ist eine "Primärströmungszelle" (vgl. KAISER & ZEGGEL [55]) und je sechs Primärströmungszellen bilden einen Unterkanal. Unter einem Sekundärströmungswirbel versteht man geschlossene Wirbel, die innerhalb einer Primärströmungszelle in einer Ebene senkrecht zur Hauptströmungsrichtung verlaufen. Pulsierende Querströme hingegen treten über die Grenzen von Unterkanälen, bewirken jedoch im zeitlichen Mittel keinen Massenaustausch zwischen diesen.

Bevor im folgenden kurz die Mechanismen, die für die Entstehung von Sekundärströmungen 2. Art ursächlich sind, erläutert werden, soll hier auf gerichtete Sekundärströmungen zwischen benachbarten Unterkanälen eingegangen werden. Geht man von einem unendlichen hexagonalen oder quadratischen Stabgitter aus, so ist keine treibende Kraft für gerichtete Strömungen zwischen zwei benachbarten Unterkanälen erkennbar. Betrachtet man jedoch ein endliches Stabgitter (z.B. das hexagonale 91-Stabbündel in Abb. 1.1), so erscheint eine gerichtete Querströmung zwischen einem Wand-(Index 2) und einem Zentralkanal (Index 1) möglich<sup>6)</sup>. Geht man von einer homogenen Druckverteilung im Bündelquerschnitt aus (s. CHENG & TODREAS [56]), so kann man aus der Kräftebilanz über die Querschnitte eines Zentral- und eines Wandkanals die Beziehung

$$\frac{\tau_{w,m,1}}{\tau_{w,m,2}} = \frac{d_{h1}}{d_{h2}} \quad (3.54)$$

ableiten. Im allgemeinen ist das Verhältnis der hydraulischen Durchmesser von Zentral- und Wandkanal ungleich 1, wie aus Abb. 3.11 abzulesen ist. Somit liegt auch eine Differenz der mittleren Wandschubspannungen der betrachteten Unterkanäle vor, die gerichtete Sekundärströmungen vom Unterkanal mit der kleineren mittleren Wandschubspannung in den Unterkanal mit der größeren mittleren Wandschubspannung in Wandnähe initiieren würden. Diese Massenumverteilung ist jedoch ein Einlaufvorgang, so daß z.B. die meßtechnisch von KJELLSTRÖM [11] und VONKA ET AL. [13] erfaßten gerichteten Sekundärströmungen ein Indiz dafür sind, daß bei diesen Experimenten nicht hydraulisch voll eingelaufene Strömungszustände vorgelgen haben. Gerade die Forderung nach hydraulisch eingelaufenen Strömungszuständen erfordert sehr große Einlaufängen  $l/d_h > 100$ , und die Mehrzahl aller experimentellen Arbeiten auf dem Gebiet der Stabgitter-Thermohydraulik genügt dieser Anforderung nicht (vgl. [4]).

---

<sup>6)</sup>Als Folge dieser gerichteten Querströmung sind dann auch gerichtete Querströme zwischen zwei Zentralkanälen denkbar.

## 3.3.1. MECHANISMEN

## 3.3.1.1. SEKUNDÄRSTRÖMUNGSWIRBEL

Betrachtet man die hydraulischen Verhältnisse in einer Primärströmungszelle bei voll eingelaufener Strömung, so sind folgende Sachverhalte festzuhalten:

- i) Die Wandschubspannung  $\tau_w = \tau_w(\phi)$  steigt monoton vom Bereich  $\phi = 0^\circ$  mit der kleinsten Profillänge  $L_{min}$  bis zum Bereich  $\phi = 30^\circ$  mit der maximalen Profillänge  $L_{max}$ .
- ii) Die maximalen Geschwindigkeiten (maximal bezogen auf den jeweiligen Radialstrahl) steigen ebenfalls von  $\phi = 0^\circ$  monoton bis auf  $\phi = 30^\circ$ .

Betrachtet man einen Sekundärströmungswirbel in analoger Weise wie die turbulenten Schwankungsbewegungen, so sind die Wirbel bemüht, Gradienten der axialen Geschwindigkeiten auszugleichen, d.h. Fluidballen aus Regionen mit höheren Geschwindigkeiten werden in Regionen mit niedrigeren Geschwindigkeiten transportiert und aus Kontinuitätsgründen dann auch Fluidballen aus Regionen mit niedrigen Geschwindigkeiten in die Regionen mit höheren Geschwindigkeiten, so daß sich geschlossene Wirbel einstellen, die den in Abb. 3.12 schematisch dargestellten Verlauf haben.

Die Rotation des Geschwindigkeitsvektors ergibt den Vektor der Wirbelstärken  $\omega_i$ , so daß für die Wirbelstärke  $\omega_x$  um die  $x$ -Achse in Zylinderkoordinaten

$$\omega_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{w}) - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} \quad (3.55)$$

gilt. Durch kreuzweises Differenzieren und Subtrahieren der REYNOLDS'schen Impulsbilanzgleichungen in radialer und azimuthaler Richtung erhält man die axiale Wirbeltransportgleichung (vgl. WOOD [57])

$$\frac{\partial}{\partial r} (\omega_x \bar{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\omega_x \bar{w}) = \nu \nabla^2 \omega_x + S_\omega \quad (3.56)$$

mit

$$\nabla^2 \omega_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial \phi^2} \quad (3.56a)$$

und dem Produktionsterm

$$S_\omega = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial r} \left[ r (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \right] + \left( \frac{\partial^2}{r^4 \partial \phi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (r^2 \overline{v'w'}) \quad (3.56b)$$

Die REYNOLDS'sche Schubspannung zweiter Ordnung  $-\overline{\rho v'w'}$  kann gegenüber den anderen fünf Komponenten des turbulenten Spannungstensors vernachlässigt werden, wie u.a. die experimentellen Untersuchungen von KJELLSTRÖM [11], SEALE [12] und BARTZIS & TODREAS [58] gezeigt haben<sup>7)</sup>, so daß für den Produktionsterm

$$S_\omega \simeq \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial r} \left[ r (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \right] \quad (3.57)$$

<sup>7)</sup>In den erwähnten Arbeiten konnte die turbulente Schubspannung zweiter Ordnung im Gegensatz zu den anderen turbulenten Spannungen nicht meßtechnisch erfaßt werden, da sie verschwindend geringe Werte annimmt.

geschrieben werden kann (s. HAQUE ET AL. [59]). Man erkennt, daß eine Produktion — und somit die Existenz — von Sekundärströmungswirbeln immer an die turbulenten Normalspannungen  $-\rho \overline{v'^2}$  und  $-\rho \overline{w'^2}$  gebunden ist, und somit Sekundärströmungswirbel nur bei turbulenten Strömungen auftreten können. Ausschlaggebend für die Größe der Produktion ist die treibende Differenz  $\overline{v'^2} - \overline{w'^2}$  der beiden turbulenten Hauptspannungen, die an den benetzten Wänden am größten ist (s. Abb. 3.13 für eine Kreisrohrströmung) und zur Kanalmitte hin abnimmt. Die Produktion der Sekundärströmungswirbel wird somit an der Wand initiiert. In der Kanalmitte ergibt sich dann — wie oben schon dargestellt — aus Kontinuitätsgründen eine Rückströmung, so daß geschlossene Wirbel vorliegen.

### 3.3.1.2. PULSIERENDE QUERSTRÖME

REHME [2] (s. auch HOOPER & REHME [60]) erklärt die von ihm betrachteten pulsierenden Querströme durch Druckinstabilitäten zwischen benachbarten Unterkanälen. Zu einer differenzierteren physikalischen Darstellung dieses Sachverhaltes kommt MÖLLER [61], der in der von REHME verwendeten Geometrie (s. Abb. 3.3) mit symmetrischer Stabanordnung die turbulenten Spannungen mißt. An Hand der von ihm aufgenommenen Spektren erklärt MÖLLER die pulsierenden Querströme mit einer Art VON KÁRMÁN'scher Wirbelstraße, wobei die Wirbel im Idealfall auf beiden Seiten eines Spaltes zwischen zwei gleichen Unterkanälen von gleicher Stärke und entgegengesetztem Drehsinn sind (s. Abb. 3.14)<sup>8)</sup>. Im realen Zustand sind nun die Wirbel nicht genau gleichstark, da Fertigungstoleranzen u.ä. die Strömung leicht beeinflussen. Es stellt sich dann nach MÖLLER der in Abb. 3.15 dargestellte Zustand ein, wobei die Wirbel nun einen pulsierenden Massenaustausch bewirken.

Es sollte aber an dieser Stelle festgehalten werden, daß alle experimentellen Untersuchungen für quasi-eingelaufene bzw. voll eingelaufene Stabgitterströmungen nur Sekundärströmungskomponenten (1. und 2. Art) von maximal 2% der Hauptströmungskomponente festgestellt haben [4]. Über die genaue Rolle der Sekundärströmungen wird in Kapitel 5. noch genauer berichtet werden.

---

<sup>8)</sup>Es werden hier jetzt Wirbel in einer Ebene senkrecht zum Strömungsquerschnitt, also parallel zur Hauptströmungsrichtung betrachtet.

#### 4. Turbulenter Wärmetransport

Zur Beschreibung des turbulenten Wärmetransportes werden neben Turbulenzmodellierungen für den Impulstransport auch Modelle für den turbulenten Wärmetransport benötigt, um das System der REYNOLDS'schen Gleichungen (2.19) - (2.22) zu schließen. Im allgemeinen wird dabei analog zur Modellierung des turbulenten Impulstransportes vorgegangen, und deshalb meist auch der turbulente Wärmetransport in Relation zum turbulenten Impulstransport gesetzt.

Analog zum BOUSSINESQ-Ansatz (3.4) wird für die in der Energiebilanzgleichung (2.21) auftretenden turbulenten Wärmestromdichten der Ansatz

$$q_{k,tur}'' = \rho c_p \overline{T'v_k'} = -\rho c_p \epsilon_{q,k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (4.1)$$

gemacht. Die hier eingeführte "Wirbel"-leitfähigkeit  $\epsilon_{q,k}$ , die — wie auch die Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,ij}$  — keine Stoffkonstante, sondern eine Ortsfunktion des Strömungsfeldes ist, wird in der Literatur im allgemeinen der Wirbelviskosität proportional gesetzt, wobei die Proportionalität für eingelaufene Strömungen (Hauptströmungsrichtung  $x_1 = x$ ) durch die turbulente PRANDTL-Zahl

$$Pr_{tur} = \frac{\epsilon_{\tau,ij}}{\epsilon_{q,k}} \quad \text{mit } i = x \text{ und } j = k \quad (4.2)$$

beschrieben wird (s. ECKERT & DRAKE [62]).

In diesem Kapitel 4. sollen einige Ansätze zur Beschreibung der turbulenten PRANDTL-Zahl vorgestellt und diskutiert werden, wobei hierbei im wesentlichen auf die Arbeit REYNOLDS [63] zurückgegriffen wird. REYNOLDS [63] hat 1975 eine Zusammenstellung von 30 verschiedenen Ansätzen für die turbulente PRANDTL-Zahl veröffentlicht. Die Diskussion einer Auswahl dieser und einiger neuerer Ansätze wird zeigen, daß auf dem Gebiet der Turbulenzmodellierung für den turbulenten Wärmetransport noch eine recht große Unsicherheit in der Literatur vorhanden ist.

Auf eine spezielle Problematik des turbulenten Wärmetransportes in beheizten Stabbündeln, das turbulente oder natürliche Mixing, soll hier auch kurz eingegangen werden (s. Abschnitt 4.2.). Unter natürlichem bzw. turbulenten Mixing versteht man den konvektiven Enthalpieaustausch zwischen zwei benachbarten Unterkanälen, wobei zwischen den Unterkanälen keine Netto-Massenströme fließen. Der Wärmetransport geschieht vielmehr durch die turbulenten Schwankungsbewegungen der einzelnen Fluidballen, die beim Übertritt in einen benachbarten Unterkanal Wärme in diesen transportieren und jene vor ihrer Rückkehr in den betrachteten Unterkanal teilweise abgeben. Somit handelt es sich bei dem turbulenten Mixing um eine Art mikrokonvektiven Wärmetransportes.

## 4.1. TURBULENTE PRANDTL-ZAHL

Definitionsgemäß ist die turbulente PRANDTL-Zahl das Verhältnis der turbulenten Impulsaustauschgröße zur turbulenten Wärmeaustauschgröße. Betrachtet man die Verhältnisse einer eingelaufenen, beheizten, turbulenten Kreisrohrströmung, so kann man grundsätzliche Aussagen über das Verhalten der turbulenten PRANDTL-Zahl in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl, der molekularen PRANDTL-Zahl und des Wandabstandes machen.

Für eine eingelaufene Kreisrohrströmung ergibt sich die turbulente PRANDTL-Zahl mit dem BOUSSINESQ-Ansatz für die turbulente Schubspannung (3.4) und dem analogen Ansatz für die turbulente Wärmestromdichte (4.1) zu

$$Pr_{tur} = \frac{\overline{v'u'}}{\overline{v'T'}} \cdot \frac{\partial \bar{T}/\partial y}{\partial \bar{u}/\partial y} \quad (4.3)$$

Setzt man nun den PRANDTL'schen Mischungswegansatz (3.6)

$$\overline{v'u'} = l \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \cdot \left( -l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (4.4a)$$

an, und überträgt die von PRANDTL bei der Herleitung dieses Ansatzes gemachten Überlegungen auf das zeitlich gemittelte Produkt aus turbulenter Geschwindigkeitsschwankung  $v'$  und turbulenter Temperaturschwankung  $T'$ , so erhält man

$$\overline{v'T'} = l \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \cdot \left( -l_q \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \quad (4.4b)$$

Für die turbulente PRANDTL-Zahl folgt dann

$$Pr_{tur} = l/l_q \quad , \quad (4.5)$$

sie ist also das Verhältnis des dynamischen Mischungsweges  $l$  und des thermischen Mischungsweges  $l_q$ .

Betrachtet man einen Fluidballen, so transportiert dieser entlang des dynamischen Mischungsweges Impuls und Wärme. Einen Teil dieser beiden Größen gibt er entlang dieses Weges ab, bevor er nach dem Durchwandern des gesamten dynamischen Mischungsweges zerfällt. Ist die molekulare Wärmeleitung gegenüber der viskosen Reibung nun so groß, daß das Temperaturgefälle  $\bar{T}(\text{Fluidballen}) - \bar{T}(\text{Umgebung})$  schon vor dem Zurücklegen des gesamten dynamischen Mischungsweges durch Wärmeleitung abgebaut worden ist, so ist die turbulente PRANDTL-Zahl größer 1, da der thermische Mischungsweg kleiner ist als der dynamische. Für Fluide mit sehr kleinen molekularen PRANDTL-Zahlen (z.B. flüssigen Metallen) kann also gefolgert werden

$$Pr \ll 1 \quad \implies \quad Pr_{tur} > 1 \quad . \quad (4.6a)$$

Analog kann für Fluide mit molekularen PRANDTL-Zahlen um 1 (z.B. Gase) geschlossen werden, daß die dynamische und thermische Mischungsweglänge ungefähr gleich sind, also

$$Pr \approx 1 \quad \implies \quad Pr_{tur} \approx 1 \quad . \quad (4.6b)$$

Für Fluide mit molekularen PRANDTL-Zahlen größer als 1 (z.B. Wasser) müßte die turbulente PRANDTL-Zahl nach den hier gemachten Überlegungen ebenfalls im Bereich um 1 bzw. geringfügig kleiner 1 liegen. Der Fluidballen weist zwar nach dem Zurücklegen des dynamischen Mischungsweges noch ein Temperaturgefälle zum umgebenden Fluid auf, aber dieses Gefälle kann nicht mehr weitertransportiert werden, da der Fluidballen zerfällt. Eine eventuelle geringfügig weiterreichende Beeinflussung des Temperaturfeldes führt aber auch zu turbulenten PRANDTL-Zahlen, die kleiner als 1 sind, also

$$Pr > 1 \quad \implies \quad Pr_{tur} \leq 1 \quad . \quad (4.6c)$$

Die hier gemachten Überlegungen verdeutlichen auch den Unterschied zwischen dem turbulenten Impuls- und dem turbulenten Wärmetransport. Während beim turbulenten Impulstransport die Entstehung und Fortbewegung der Turbulenzballen und der transportierte turbulente Impuls eng miteinander verknüpft und voneinander abhängig sind — wodurch ein Teil des turbulenten Impulses immer bis zum Endpunkt der Bewegung des Turbulenzballens transportiert wird —, wird die turbulente Wärme lediglich vom Turbulenzballen mitgenommen, ohne dabei einen Einfluß auf die Existenz des Fluidballens zu haben<sup>9)</sup>. Man spricht deshalb beim turbulenten Impulstransport von einem aktiven Transportprozeß, während der turbulente Wärmetransport als passiver Transportprozeß bezeichnet wird.

Abb. 4.1 zeigt eine Zusammenstellung von RIEKE [64], der die experimentellen Ergebnisse verschiedener Autoren für die turbulente PRANDTL-Zahl über der molekularen PRANDTL-Zahl für zwei verschiedene REYNOLDS-Zahlen aufgetragen hat. Die Messungen wurden in ausgebildeten Rohrströmungen — d.h. hydraulisch und thermisch eingelaufenen Strömungen nach den Angaben der Experimentatoren — von FUCHS [6] mit Natrium ( $Pr \approx 0.007$ ), BUHR ET AL. [65] und SUBBOTIN ET AL. [66] mit Quecksilber ( $Pr \approx 0.02$ ), SLEICHER [67] und TAO [68] mit Luft ( $Pr \approx 0.7$ ) und SMITH ET AL. [69] mit Wasser ( $Pr \approx 6.2$ ) durchgeführt. Man erkennt aus Abb. 4.1, daß die oben ausgeführten Überlegungen über die Abhängigkeit der turbulenten PRANDTL-Zahl von der molekularen PRANDTL-Zahl von den in Abb. 4.1 dargestellten, experimentell ermittelten Daten gut bestätigt werden.

Ebenso kann aus Abb. 4.1 der Einfluß der REYNOLDS-Zahl auf die turbulente PRANDTL-Zahl abgelesen werden. Mit steigender REYNOLDS-Zahl sinkt die turbulente PRANDTL-Zahl, was auch aus folgender Überlegung deutlich wird. Bei steigenden REYNOLDS-Zahlen wird der dynamische Mischungsweg und somit auch die Fluidballengröße größer<sup>10)</sup>, so daß die Wärmeverluste auf Grund des steigenden Volumen- zu Oberflächenverhältnisses sinken. Somit wird der thermische Mischungsweg bei höheren REYNOLDS-Zahlen stärker anwachsen als der dynamische, d.h. die turbulente PRANDTL-Zahl wird mit steigender REYNOLDS-Zahl kleiner.

Mit analogen Überlegungen kann auch der Einfluß des Wandabstandes beschrieben werden. Mit zunehmenden Wandabstand nimmt die Turbulenzballengröße zu, so daß — im Analogschluß zu

<sup>9)</sup>Bei kompressiblen Fluiden ist bei größeren Temperaturschwankungen ein indirekter Einfluß auf die Existenz der Turbulenzballen über die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte — besonders der dynamischen Viskosität — zu berücksichtigen.

<sup>10)</sup>Der Durchmesser der Fluidballen ist nach PRANDTL [16] proportional dem Mischungsweg.

dem oben gesagten — die turbulente PRANDTL-Zahl mit zunehmenden Wandabstand kleiner werden müßte. Die experimentellen Daten der Literatur geben diesen Sachverhalt jedoch nicht so eindeutig wieder, wie Abb. 4.2 verdeutlicht. In Abb. 4.2 sind in Abhängigkeit vom normierten Wandabstand  $y^+ = \frac{y u^*}{\nu}$  turbulente PRANDTL-Zahlen dargestellt, die von BLOM [70] aus den experimentell ermittelten Daten für Geschwindigkeits- und Temperaturprofile sowie Schubspannungs- und Wärmestromdichteverteilungen abgeleitet worden sind (s. BLOM [70], Kapitel 3, Abschnitt C). Die Daten von CORCORAN ET AL. [71] und VENEZIAN & SAGE [72] sind in Rechteckkanälen ermittelt worden, während die Daten von SLEICHER [67], LUDWIEG [73], JOHNK & HONRATTY [74, 75] und GOWEN & SMITH [76] in Kreisrohren aufgenommen worden sind. Die Daten von JOHNK & HANRATTY [74, 75] stellen sowohl die vollentwickelte Strömung [74] als auch die Verhältnisse in der thermischen Einlaufzone [75] dar, wodurch in Abb. 4.2 bei zunehmendem Wandabstand ein ansteigender (thermischer Einlauf) und ein absteigender (voll entwickelte Strömung) Ast vorhanden ist.

Abb. 4.2 zeigt jedoch auch weiter, daß die oben gemachte Aussage (4.6)

$$Pr \leq 1 \quad \implies \quad Pr_{tur} \geq 1$$

durch die Auswertung experimenteller Daten keineswegs immer bestätigt wird. Vielmehr kann man aus Abb. 4.2 für eine molekulare PRANDTL-Zahl  $Pr \approx 0.7$  für eingelaufene Strömungen turbulente PRANDTL-Zahlen im Bereich  $0.2 \leq Pr_{tur} \leq 2.0$  ablesen, wobei das Gros der Kurven Werte im Bereich  $0.6 \leq Pr_{tur} \leq 0.9$  liefert. Eine Auswertung der experimentellen Daten von LUDWIEG [73], CORCORAN ET AL. [71] und SLEICHER [67] durch ECKERT (s. ECKERT & DRAKE [62], Fig. 8-11, S. 384) zeigt ebenfalls Werte im Bereich  $0.6 \leq Pr_{tur} \leq 0.9$  auf.

Neben den zu beobachtenden Unterschieden zwischen den experimentellen Ergebnissen verschiedener Autoren, die teilweise recht erheblich sind, zeigt sich hier auch eine teilweise gravierende Diskrepanz zwischen den theoretischen Überlegungen prinzipieller Art auf der Basis des PRANDTL'schen Mischungswegansatzes und den experimentellen Resultaten. Die nachfolgende Darstellung der empirischen und semi-empirischen Ansätze zur Ermittlung der turbulenten PRANDTL-Zahl wird weitere Diskrepanzen aufzeigen, so daß deutlich wird, daß das Gebiet des turbulenten Wärmetransportes weder experimentell noch theoretisch ausreichend gut bekannt ist.

Im folgenden sollen nun die wichtigsten in der Literatur vorhandenen Modelle zur Beschreibung der turbulenten PRANDTL-Zahl vorgestellt werden. Um jedoch den Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht zu sprengen und aus Gründen größerer Übersichtlichkeit, wird nur auf die Ansätze eingegangen werden, die für Fluide mit molekularen PRANDTL-Zahlen  $Pr > 0.5$  gültig sind.

## 4.1.1. REIN EMPIRISCHE ANSÄTZE

Von der Vielzahl der Ansätze, die rein empirisch aus Meßwerten ermittelt worden sind, seien hier stellvertretend fünf Näherungsformeln angegeben, die wiederum zeigen, daß die experimentellen Abweichungen teilweise recht gravierend sind.

QUARMBY & QUIRK [77] legen durch ihre für eine Luftströmung in einem Kreisrohr gewonnenen Daten für die turbulente PRANDTL-Zahl eine Ausgleichskurve und erhalten so die Beziehung

$$Pr_{tur} = \left(1 + 400^{-y/R}\right)^{-1} \quad (4.7)$$

In Wandnähe ( $y = 0$ ) liefert diese Beziehung den Wert  $Pr_{tur} = 0.5$ , im Zentrum des Rohres ( $y = R$ ) den Wert  $Pr_{tur} \approx 1$ .

ROTTA [78] untersucht die Temperaturverteilungen in der Grenzschicht an einer ebenen Platte und erhält als beste Approximation für die turbulente PRANDTL-Zahl die Beziehung

$$Pr_{tur} = 0.9 - 0.4(y/\delta) \quad , \quad (4.8)$$

wobei  $\delta$  die Grenzschichtdicke ist. Direkt an der Wand ( $y = 0$ ) liefert diese Beziehung den Wert  $Pr_{tur} = 0.9$ , am Außenrand der Grenzschicht ( $y = \delta$ ) den Wert  $Pr_{tur} = 0.5$ , und steht somit in einem gegensätzlichen Trendverhalten zu der Beziehung (4.7) von QUARMBY & QUIRK [77].

Auch ANTONIA [79] untersucht das Verhalten der turbulenten PRANDTL-Zahl in der turbulenten Grenzschicht einer Kanalströmung mit Luft und gibt folgende Beziehung, die aus einer TAYLOR-Reihenentwicklung für die Geschwindigkeit  $\bar{u}$ , die Temperatur  $\bar{T}$ , die turbulente Schubspannung  $-\overline{\rho u'v'}$  und die turbulente Wärmestromdichte  $\overline{\rho c_p v'T'}$  ermittelt wird, für die turbulente PRANDTL-Zahl an

$$Pr_{tur} \simeq 0.61 \frac{(1 - 0.045y^+)}{(1 - 0.050y^+)} \quad \text{mit} \quad 0 \leq y^+ \leq 20 \quad . \quad (4.9)$$

Direkt an der Wand ( $y^+ = 0$ ) ergibt sich aus Gl. (4.9) der Wert  $Pr_{tur} \simeq 0.61$ , am Außenrand der turbulenten Grenzschicht ( $y^+ \approx 20$ ) ist ein steiler Anstieg auf Werte  $Pr_{tur} \geq 3$  zu bemerken. Somit liegt diese Beziehung (4.9) an der Wand zwischen den Beziehungen (4.7) von QUARMBY & QUIRK [77] und Gl. (4.8) von ROTTA [78] und liefert am Außenrand der Grenzschicht einen dritten Wert.

GRÄBER [80] untersucht den Wärmeübergang in glatten Rohren, zwischen parallelen Platten, in Ringspalten und längs hexagonaler Rohrbündel (relativer Stabmittenabstand  $P/D = 1.25, 1.60, 1.95, 3.50$ ) und gibt für alle untersuchten Strömungsquerschnitte die Näherungsgleichung

$$Pr_{tur} = \left(0.91 + 0.13Pr^{0.545}\right)^{-1} \quad \text{für} \quad 0.72 \leq Pr \leq 100 \quad (4.10)$$

an. Für Luft ( $Pr \approx 0.72$ ) liefert diese Beziehung den Wert  $Pr_{tur} \simeq 0.98$ .

Für Fluide mit molekularen PRANDTL-Zahlen  $Pr > 1$  geben MALHOTRA & KANG [81] eine empirische Erweiterung der Beziehung (4.10) von GRÄBER [80] an. Für molekulare PRANDTL-Zahlen

im Bereich  $1 < Pr < 12500$  und REYNOLDS-Zahlen im Bereich  $10^4 \leq Re \leq 10^6$  korrelieren MALHOTRA & KANG [81] 38 Datenpunkte zu folgenden Beziehungen:

$$Pr_{tur} = 1.01 - 0.09Pr^{0.36} \quad \text{für} \quad 1 < Pr < 145 \quad , \quad (4.11a)$$

$$Pr_{tur} = 1.01 - 0.25 \log Pr \quad \text{für} \quad 145 < Pr < 1800 \quad , \quad (4.11b)$$

$$Pr_{tur} = 0.99 - 0.44(\log Pr)^{0.5} \quad \text{für} \quad 1800 < Pr < 12500 \quad . \quad (4.11c)$$

Als Grenzwerte dieser Beziehungen (4.11) erhält man für Fluide mit  $Pr = 1$  eine turbulente PRANDTL-Zahl  $Pr_{tur} = 0.92$  und für Fluide mit  $Pr = 12500$  den Zahlenwert  $Pr_{tur} \simeq 0.1$ .

#### 4.1.2. ANSÄTZE AUF DER GRUNDLAGE VON THEORIEN ERSTER ORDNUNG

##### 4.1.2.1. MISCHUNGSWEG-MODELLE

Ausgehend von der Annahme, daß die Fluidballen Kugeln (*Radius*  $R =$  *Mischungsweg*  $l$ ) sind, die in der Zeit  $l/v'$  den Mischungsweg  $l$  zurücklegen und sich dabei entlang eines konstanten Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten bewegen, entwickelt JENKINS [82] eine Theorie zur Ermittlung der turbulenten PRANDTL-Zahl. Mit der Annahme, daß die Oberflächentemperatur des betrachteten Fluidballens gleich der Umgebungstemperatur sein soll, ermittelt JENKINS dann mit einer vorhandenen Formel für die molekulare Wärmediffusion die mittlere Temperatur des Fluidballens am Ende der Bewegung. Eine analoge Betrachtung für den turbulenten Impulstransport führt dann auf die Beziehung

$$Pr_{tur} = \frac{1}{Pr} \frac{1 - (90/\pi^2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} e^{\left(-n^2 \pi^2 l \nu / R^2 v'^2\right)}}{1 - (90/\pi^2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} e^{\left(-n^2 \pi^2 l a / R^2 v'^2\right)}} \quad , \quad (4.12)$$

wobei  $l$  der dynamische Mischungsweg,  
 $R = l$  der Radius des kugeligen Fluidballens,  
 $v'$  die laterale Schwankungsgeschwindigkeit,  
 $\nu$  die dynamische Viskosität  
 und  $a$  die Temperaturleitfähigkeit ist.

Auch DEISSLER [83] geht von kugelförmigen Fluidballen aus, verwendet jedoch bei sonst gleichen Annahmen andere Modelle für den Wärme- und Impulsverlust, da er sich lediglich auf Betrachtungen für Fluide mit sehr kleinen molekularen PRANDTL-Zahlen  $Pr \ll 1$  beschränkt. Während bei JENKINS [82] die Transportprozesse zwischen dem betrachteten Fluidballen und der Umgebung durch die Zustände im Fluidballen bestimmt werden, werden sie bei DEISSLER [83] durch die Umgebung bestimmt. WASSEL & CATTON [84] erweitern das Modell von DEISSLER [83], indem sie

Variationen der Wirbelviskosität  $\epsilon_\tau$  entlang des dynamischen Mischungsweges berücksichtigen. Sie erhalten für die turbulente Grenzschicht entlang einer ebenen Platte die Beziehung

$$Pr_{tur} = \frac{C_3}{C_1 Pr} \frac{1 - e^{-\frac{C_4}{\epsilon_\tau/\nu}}}{1 - e^{-\frac{C_2}{Pr \epsilon_\tau/\nu}}} \quad (4.13)$$

mit den durch Anpassung an die experimentellen Daten von BLOM [70] und SIMPSON ET AL. [85] ermittelten Konstanten

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0.21 \\ C_2 &= 5.25 \\ C_3 &= 0.20 \\ C_4 &= 5.00 \end{aligned} \right\} \quad (4.13a)$$

Die Wirbelviskosität  $\epsilon_\tau$  wird bei WASSEL & CATTON [84] u.a. auch mit einem modifizierten VAN DRIEST'schen Ansatz (3.9) dargestellt. Dadurch wird sowohl der Einfluß der REYNOLDS-Zahl als auch des Wandabstandes berücksichtigt.

Den VAN DRIEST'schen Mischungswegansatz (3.9) verwendet auch CEBECI [86], der für den thermischen Mischungsweg analog zu Gl. (3.9) die Beziehung

$$l_q = \kappa_q y \left[ 1 - e^{(-y^+/B^+/Pr)} \right] \quad (4.14)$$

ansetzt, so daß sich die turbulente PRANDTL-Zahl zu

$$Pr_{tur} = \frac{\kappa}{\kappa_q} \frac{1 - e^{(-y^+/A^+)}}{1 - e^{(-y^+/B^+/Pr)}} \quad (4.15)$$

ergibt. NA & HABIB [87] geben für die Koeffizienten  $\kappa_q$  und  $B^+$  die Beziehungen

$$\kappa_q = \kappa \quad (4.15a)$$

und

$$B^+ = \sum_{i=1}^5 C_i (\log Pr)^{i-1} \quad (4.15b)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 34.96 \\ C_2 &= 28.79 \\ C_3 &= 33.95 \\ C_4 &= 6.33 \\ C_5 &= -1.186 \end{aligned} \right\} \quad (4.15c)$$

an.

KAYS & CRAWFORD [88] erhalten aus einem modifizierten VAN DRIEST'schen Mischungswegansatz die Beziehung

$$Pr_{tur}^{-1} = \frac{1}{2Pr_{tur,\infty}} + C \frac{\epsilon_\tau}{\nu} Pr \sqrt{Pr_{tur,\infty}^{-1}} - \left( C \frac{\epsilon_\tau}{\nu} Pr \right)^2 \left[ 1 - e^{\left( -C \frac{\epsilon_\tau}{\nu} Pr Pr_{tur,\infty}^{0.5} \right)^{-1}} \right] \quad (4.16)$$

mit den experimentell ermittelten Konstanten

$$\left. \begin{aligned} Pr_{tur,\infty} &= 0.86 \\ C &= 0.20 \end{aligned} \right\} \quad (4.16a)$$

Für die Wirbelviskosität  $\epsilon_\tau$  ist ein modifizierter VAN DRIEST'scher Mischungswegansatz einzusetzen (s. KAYS & CRAWFORD [88], S. 182 ff.).

Ebenfalls auf dem Mischungsweg-Konzept baut der Ansatz von AZER & CHAO [89] auf, wobei die Turbulenzmodellierung stark durch experimentell ermittelte Werte für eine Kreisrohrströmung beeinflusst wird. Der Ansatz, der wesentlich detaillierter die einzelnen Transportprozesse zu beschreiben sucht als die bisher vorgestellten Modelle, ergibt für Kreisrohrströmungen von Fluiden mit molekularen PRANDTL-Zahlen im Bereich  $0.6 \leq Pr \leq 15$  die folgende Näherungsformel

$$Pr_{tur} = \frac{1 + 57f(y/R) / (Re^{0.46} Pr^{0.58})}{1 + 135f(y/R) / Re^{0.45}} \quad (4.17)$$

mit

$$f(y/R) = e^{-(y/R)^{0.25}} \quad (4.17a)$$

#### 4.1.2.2. WEITERE ANSÄTZE AUF DER GRUNDLAGE VON THEORIEN ERSTER ORDNUNG

Neben den oben dargestellten Ansätzen, die auf dem Mischungsweg-Konzept beruhen, sollen hier noch zwei weitere Gruppen von Ansätzen, die ebenfalls zu den Theorien erster Ordnung zählen, angesprochen werden. REYNOLDS [63] stellt als weitere Gruppen noch die "Diffusivitäts-" und die "Wandschicht"-Modelle vor.

Die Diffusivitäts-Modelle, die im Bereich der statistischen Turbulenzmodelle anzuordnen sind, beschreiben die Wirbelleitfähigkeit durch LAGRANGE-Längenmaße und Autokorrelationskoeffizienten für die Geschwindigkeitsschwankungen, wobei im allgemeinen eine homogene Turbulenz vorausgesetzt wird. Als Beispiel für diese Modelle sei hier die von REYNOLDS [90] entwickelte Beziehung

$$Pr_{tur} = \frac{1 + C_1 / (Re Pr)^{0.5}}{1 + C_2 / Re^{0.5}} \quad (4.18)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 86 \\ C_2 &= 200 \end{aligned} \right\} \quad (4.18a)$$

angegeben.

Als Beispiel für die Wandschicht-Modelle sei hier das Modell von THOMAS [91] dargestellt. THOMAS [91] geht von dem "renewal-penetration"-Modell aus, welches auf der Annahme beruht, daß sich immer wieder Fluidwirbel vom Kern der Strömung zu den benetzten Wänden hin bewegen, und dort kurzzeitig verweilen. Während dieser Verweildauer ist der molekulare Wärmetransport als der dominierende Wärmetransportmechanismus anzusehen. Mit einem Ansatz von DANCKWERTS [92] für die Verweilzeit kommt THOMAS [91] zu der Beziehung

$$Pr_{tur} = \frac{Pr + \nu / \epsilon_\tau}{1 + \nu / \epsilon_\tau} \cdot \frac{e^{(-y^+ \frac{\bar{u}_m^*}{\bar{u}_m} Pr^{0.5})}}{e^{(-y^+ \frac{\bar{u}_m^*}{\bar{u}_m})}} \quad (4.19)$$

wobei  $\bar{u}_m$  die mittlere Fluidgeschwindigkeit im Strömungsquerschnitt ist.

4.1.3. ANSÄTZE AUF DER GRUNDLAGE VON THEORIEN HÖHERER ORDNUNG

In den letzten 15 Jahren ist vermehrt der Versuch unternommen worden, die Lösung des Turbulenzproblems beim turbulenten Wärmetransport durch die Formulierung von Transportgleichungen für die turbulenten Wärmeströme oder das zeitlich gemittelte Quadrat der turbulenten Temperaturschwankungen zu erreichen.

JISCHA & RIEKE [93] (s. auch RIEKE [64]) modellieren u. a. die Transportgleichung für die turbulente Wärmestromdichte für eine eingelaufene Kreisrohrströmung. Die Transportgleichung für  $\overline{T'v'}$  lautet für Strömungen mit Grenzschichtcharakter (s. JISCHA [8])

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T'v'}) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T'v'})}_{\text{Konvektion}} = - \underbrace{\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{1}{c_p} \overline{v'\epsilon'} + \nu \frac{Pr+1}{Pr} \left( \frac{\partial v'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right)}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\frac{p'}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial y}}_{\text{Umverteilung}} - \dots - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (\overline{T'v'^2} + \dots)}_{\text{Diffusion}} \quad (4.20)$$

JISCHA & RIEKE modellieren die einzelnen Terme der Transportgleichung (4.20) unter Vernachlässigung des Diffusionsterms wie folgt:

Produktion : Für den Produktionsterm wird nach ROTTA [94]

$$\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = C_P k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (4.21)$$

gesetzt.

Dissipation und Umverteilung : Für den ersten Term der Dissipation in Gl. (4.20) und den Umverteilungsterm wird analog zum Modell für die Dissipation der Turbulenzenergie Gl. (3.30) der Ansatz

$$-\frac{1}{c_p} \overline{v'\epsilon'} - \frac{p'}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial y} + \dots = C_{DU} \frac{\sqrt{k}}{l} \overline{T'v'} \quad (4.22)$$

gemacht. Der zweite Dissipationsterm beinhaltet einen  $\nu$ -proportionalen und einen  $\nu/Pr$ -proportionalen Ausdruck. Der  $\nu$ -proportionale Anteil kann gegenüber dem in Gl. (4.22) modellierten Anteil vernachlässigt werden, während der  $\nu/Pr$ -proportionale Anteil mit Blick auf die Anwendung des Modells auch für flüssige Metalle, d.h. für Fluide mit molekularen PRANDTL-Zahlen  $Pr \ll 1$ , modelliert werden muß. Führt man eine "Turbulenz-REYNOLDS"-Zahl

$$Re_{tur} = \frac{l\sqrt{k}}{\nu} = \frac{\epsilon_\tau}{C_\tau \nu} \quad (4.23)$$

ein, so kann man für den  $\nu/Pr$ -proportionalen Anteil

$$-\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial v'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} = \frac{1}{Pr Re_{tur}} C_D \frac{\sqrt{k}}{l} \overline{T'v'} \quad (4.24)$$

ansetzen.

Da der Konvektionsterm für eingelaufene Strömungen verschwindet, ergibt sich nun nach JISCHA & RIEKE [93] die modellierte Transportgleichung für  $\overline{T'v'}$  zu

$$C_P k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \left( C_{DU} + \frac{C_D}{Pr Re_{tur}} \right) l \sqrt{k} (\overline{T'v'}) = 0 \quad , \quad (4.25)$$

bzw.

$$\frac{-\overline{T'v'}}{\partial \bar{T} / \partial y} = \frac{C_P}{C_{DU} + \frac{C_D}{Pr Re_{tur}}} l \sqrt{k} \quad . \quad (4.25a)$$

Im Zusammenhang mit dem PRANDTL'schen Ansatz (3.34)

$$\frac{-\overline{u'v'}}{\partial \bar{u} / \partial y} = C_\tau l \sqrt{k} \quad (4.26)$$

ergibt sich die turbulente PRANDTL-Zahl nach Gl. (4.3) zu

$$Pr_{tur} = \frac{\overline{u'v'}}{\overline{T'v'}} \frac{\partial \bar{T} / \partial y}{\partial \bar{u} / \partial y} = \frac{C_\tau}{C_P} \left( C_{DU} + \frac{C_D}{Pr Re_{tur}} \right) \quad . \quad (4.27)$$

Für die Turbulenz-REYNOLDS-Zahl  $Re_{tur}$  hat RIEKE [64] den Ausdruck

$$Re_{tur} = a Re^m f(y/R) \quad (4.28)$$

mit

$$f(y/R) = f_m = const. \quad (4.28a)$$

ermittelt. Zusammenfassend ergibt sich nun als Beziehung von JISCHA & RIEKE

$$Pr_{tur} = K_1 + \frac{K_2}{Pr Re^m} \quad , \quad (4.29)$$

wobei RIEKE [64] die Koeffizienten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $m$  durch die Anpassung von Gl. (4.29) an die experimentellen Ergebnisse von FUCHS [6] zu

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = 0.9 \\ K_2 = 182.4 \\ m = 0.888 \end{array} \right\} \quad (4.29a)$$

bestimmt hat. Es sei hier darauf hingewiesen, daß diese Beziehung (4.29) ihrer Herleitung nach nur für Fluide mit molekularen PRANDTL-Zahlen  $Pr \leq 0.5$  anzuwenden ist. Bei Fluiden mit höheren molekularen PRANDTL-Zahlen müßte die von mehreren Autoren experimentell festgestellte Abhängigkeit der turbulenten PRANDTL-Zahl von Wandabstand durch die Modellierung des Diffusionsterms in Gl. (4.20) berücksichtigt werden. JISCHA & RIEKE [95] modellieren zur Erfassung dieser Problematik die Transportgleichung für  $\overline{T'^2}$  und erhalten als Lösung eine algebraisch nicht lösbare Beziehung für die turbulente PRANDTL-Zahl, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

BAARS [96] hat mit einem numerischen Verfahren (Finite Elemente Methode) unter Verwendung der Beziehung (4.29) von JISCHA & RIEKE den Wärmeübergang für voll eingelaufene Kreisrohrströmungen mit flüssigem Natrium ( $Pr \approx 0.007$ ) und Luft ( $Pr \approx 0.7$ ) berechnet. Durch

eine Anpassung der Koeffizienten  $K_1$ ,  $K_2$  und  $m$  aus Gl. (4.29) wurde eine möglichst große Übereinstimmung der errechneten Wärmeübergangswerte mit den in der Literatur vorhandenen Meßwerten<sup>11)</sup> angestrebt. Als optimierte Koeffizienten gibt BAARS [96]

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= 0.98 \\ K_2 &= 2.87 \\ m &= 0.5 \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

an, wobei der Gültigkeitsbereich von BAARS [96] mit  $Pr \leq 1$  angegeben wird.

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 sind die mit einigen der in diesem Abschnitt vorgestellten Beziehungen ermittelten turbulenten PRANDTL-Zahlen graphisch dargestellt. Abb. 4.3 zeigt für eine Kreisrohrströmung ( $Re = 10^5$ , Fluid: Luft;  $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ ;  $T = 25^\circ\text{C}$ ;  $Pr = 0.69$ ) die verschiedenen Verläufe der turbulenten PRANDTL-Zahl über dem normierten Wandabstand  $y^+ = yu^*/\nu$ . Die Grenzschichtdicke ist für diesen Vergleich mit  $y_\delta^+ = 20$  angenommen und die Wandschubspannung mit der Beziehung nach BLASIUS für den Druckverlustbeiwert

$$\lambda_D = 0.316Re^{-1/4} \quad (4.31)$$

ermittelt worden. Der Vergleich zeigt, daß im Bereich der viskosen Unterschicht  $y^+ \leq 20$  teilweise erhebliche Unterschiede zu bemerken sind, während im Bereich der vollturbulenten Kernströmung die Mehrzahl der Beziehungen Werte  $Pr_{tur} \simeq 0.9 \dots 1.0$  liefern. Die in Abb. 4.4 graphisch dargestellten Beziehungen geben keine Abhängigkeit vom Wandabstand an und sind deshalb hier über der REYNOLDS-Zahl aufgetragen. Auch hier ist eine Kreisrohrströmung (Fluid: Luft;  $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ ;  $T = 25^\circ\text{C}$ ;  $Pr = 0.69$ ) angenommen worden. Im dargestellten REYNOLDS-Zahl-Bereich  $10^4 \leq Re \leq 10^6$  liefern die Beziehungen nach GRÄBER [80], MALHOTRA & KANG [81]<sup>12)</sup> und JISCHA & RIEKE [93] mit den Koeffizienten nach RIEKE [64] bzw. BAARS [96] Werte um 1 für die turbulente PRANDTL-Zahl, wobei die beiden erstgenannten Beziehungen keine REYNOLDS-Zahl-Abhängigkeit berücksichtigen. Lediglich die Beziehung nach REYNOLDS [90] zeigt eine starke REYNOLDS-Zahl-Abhängigkeit auf, wobei die turbulente PRANDTL-Zahl von Werten um 0.68 ( $Re = 10^4$ ) monoton auf Werte um 0.92 ( $Re = 10^6$ ) ansteigt.

Die Abbildungen 4.3 und 4.4 zeigen somit für das relativ einfache Beispiel einer turbulenten Kreisrohrströmung mit Luft als Strömungsfluid eine große Unsicherheit bei der Bestimmung der turbulenten PRANDTL-Zahl auf. Werte im Bereich  $0.5 \leq Pr_{tur} \leq 2.0$  werden für eine feste REYNOLDS-Zahl  $Re = 10^5$  angeboten, und gerade im Bereich der wärmeübertragenden Wände (viskose Unterschicht) ist diese Unsicherheit am stärksten ausgeprägt. Es wird deutlich, daß auf diesem Gebiet noch ein großes Wissensdefizit in der Literatur vorhanden ist, das die Berechnung des Wärmeübergangs und der Wandtemperaturen bei Stabgitterströmungen mit großen Unsicherheiten versieht.

<sup>11)</sup>BAARS [96] hat die Meßwerte von FUCHS [6], DEISSLER & EIAN [97] und JOHNS & HANRATTY [74] zum Vergleich mit seinen Rechenwerten verwendet.

<sup>12)</sup>Der Gültigkeitsbereich von Gl. (4.11a) wurde für den hier vorgenommenen Bereich etwas erweitert, ebenso der Gültigkeitsbereich für die Koeffizienten (4.29a) nach RIEKE [64]

## 4.2. NATÜRLICHES MIXING

Wie schon oben erwähnt, handelt es sich bei dem natürlichen oder auch turbulenten Mixing um eine Art mikrokonvektiven Wärmetransport, der auf dem Unterschied zwischen dem turbulenten Impulstransport als aktivem Transportprozeß und dem turbulenten Wärmetransport als passivem Transportprozeß beruht. Betrachtet man die Verhältnisse in einem Stabbündel, so fließt senkrecht zum Spalt  $ij$  zwischen zwei benachbarten Unterkanälen  $i$  und  $j$  ein effektiver Wärmestrom  $q'_{ij}$  pro axialer Längeneinheit, der mit Gl. (2.22d) und Gl. (4.1) als

$$q'_{ij} = - \int_{\text{Spalt } ij} \left\{ [\lambda + \rho c_p \epsilon_{q,\phi}] \frac{\partial \bar{T}}{r \partial \phi} \right\}_{\phi=\phi_{\text{Spalt } ij}} dr \quad (4.32)$$

bzw. mit der Definitionsgleichung der molekularen PRANDTL-Zahl

$$Pr = \frac{\rho \nu c_p}{\lambda} \quad (4.33)$$

und der turbulenten PRANDTL-Zahl Gl. (4.2) als

$$q'_{ij} = - \int_{\text{Spalt } ij} \left\{ \rho \nu c_p \left[ \frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_{\tau,\phi}}{\nu} \frac{1}{Pr_{tur}} \right] \frac{\partial \bar{T}}{r \partial \phi} \right\}_{\phi=\phi_{\text{Spalt } ij}} dr \quad (4.34)$$

dargestellt werden kann.

Diese Darstellung zeigt, daß der effektive Wärmestrom  $q'_{ij}$  aus einem molekularen und einem turbulenten Anteil besteht, wobei bei Stabgitterströmungen für REYNOLDS-Zahlen  $Re \geq 10^4$  und molekulare PRANDTL-Zahlen  $Pr \approx 1$  der molekulare Anteil um Größenordnungen kleiner ist als der turbulente Anteil. Aus der Beziehung (3.11) von REICHARDT [21] erhält man für die radiale Wirbelviskosität im Zentrum eines Kreisrohres in Verbindung mit der BLASIUS'schen Beziehung (4.31) für den Druckverlustkoeffizienten z.B. für  $Re = 5 \cdot 10^4$  den Wert  $\epsilon_{\tau,r}/\nu \approx 85$  und die experimentellen Daten von REHME [2] liefern in diesem REYNOLDS-Zahl-Bereich spaltgemittelte Werte  $\overline{\epsilon_{\tau,\phi}}/\nu > 100$  für die azimutale Wirbelviskosität.

Bei *distributed parameter* Verfahren ist die Kenntnis des effektiven Wärmestroms  $q'_{ij}$  ein Ergebnis der Untersuchungen, während sie bei Unterkanalanalysen eine Eingangsgröße darstellt. Im Sinne der Unterkanalanalyse ist der effektive Wärmestrom  $q'_{ij}$  je axialer Längeneinheit proportional der Differenz der mittleren Fluidtemperaturen  $\bar{T}_{m,i}$  und  $\bar{T}_{m,j}$  in den Unterkanälen  $i$  und  $j$

$$q'_{ij} = w'_{ij} c_p (\bar{T}_{m,i} - \bar{T}_{m,j}) \quad , \quad (4.35)$$

wobei  $w'_{ij}$  der hypothetische Quermassenstrom senkrecht zum Spalt je axialer Längeneinheit zwischen den Unterkanälen  $i$  und  $j$  ist. Dieser hypothetische Quermassenstrom  $w'_{ij}$  bzw. die STANTON-Zahl im Spalt

$$St_g = \frac{w'_{ij}/c}{\dot{m}_{ij}} \quad , \quad (4.36)$$

die die hypothetische Quermassenstromdichte durch den Spalt  $ij$  mit der Spaltweite  $c$  bezogen auf die mittlere Massenstromdichte  $\dot{m}_{ij}$  in den betrachteten Unterkanälen  $i$  und  $j$  darstellt, sind meist die für Unterkanalanalysen benötigten Eingangsdaten. Im folgenden wird ein knapper Überblick

über die Literatur auf diesem Gebiet gegeben, der sich nur mit einigen der bekanntesten Arbeiten befaßt. Für einen detaillierten Überblick sei auf ROGERS & TODREAS [98] und SEALE [7] verwiesen.

INGESSON & HEDBERG [99] stellen ihre und weitere experimentelle Daten der Literatur in der Form eines Wichtungsfaktors  $Y$  dar, der im Unterkanalanalyse-Code HECTIC [100] von ihnen zur Beschreibung des effektiven Wärmestroms  $q'_{ij}$  in der Form

$$q'_{ij}/c = Y \rho c_p \epsilon_{r,ij} \frac{\bar{T}_{m,i} - \bar{T}_{m,j}}{\eta} \quad (4.37)$$

wobei  $\eta$  der Zentroidabstand zwischen den Unterkanälen  $i$  und  $j$  ist und die Wirbelviskosität  $\epsilon_{r,ij}$  mit

$$\epsilon_{r,ij} = \frac{u_{m,ij}^* d_{h,m,ij}}{20} \quad (4.37a)$$

angegeben wird, eingeführt wird. Die mittlere Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_{m,ij}^*$  und der mittlere hydraulische Durchmesser  $d_{h,m,ij}$  stellen die Mittelwerte der beiden betrachteten Unterkanäle  $i$  und  $j$  dar. Ein Vergleich mit der exakten Lösung (s. RAMM ET AL. [101]) zeigt

$$Y = \frac{\overline{\epsilon_{q,\phi}} (\phi = \phi_{Spalt\ ij}) \eta}{\epsilon_{r,ij} l} \quad (4.38)$$

wobei die azimutale Wirbelleitfähigkeit  $\overline{\epsilon_{q,\phi}}$  und die effektive thermische Mixing-Länge

$$l = - \frac{\bar{T}_{m,i} - \bar{T}_{m,j}}{\left( \frac{\partial \bar{T}}{r \partial \phi} \right)_{\phi = \phi_{Spalt\ ij}}} \quad (4.38a)$$

spaltgemittelte Größen sind<sup>13)</sup>. Für den Wichtungsfaktor  $Y$  geben INGESSON & HEDBERG [99] die Beziehung

$$Y = 0.95 \left( \frac{P/D}{P/D - 1} \right)^{1/2} \left( \frac{P}{D} \frac{P}{d_{h,m,ij}} \right)^{3/2} \quad (4.39)$$

an, die für unendliche Dreiecks- und Vierecksgitter gültig ist.

ROGERS & ROSEHART [102] ersetzen den mittleren Temperaturgradienten senkrecht zum Spalt  $\overline{\frac{\partial \bar{T}}{r \partial \phi}}$  durch das Verhältnis der Differenz der mittleren Unterkanaltemperaturen und einer unbekanntem Mixing-Länge  $Z_{ij}$

$$\left( \frac{\partial \bar{T}}{r \partial \phi} \right)_{\phi = \phi_{Spalt\ ij}} \simeq - \frac{\bar{T}_{m,i} - \bar{T}_{m,j}}{Z_{ij}} \quad (4.40)$$

Die Auswertung verschiedener experimenteller Ergebnisse erlaubt ROGERS & ROSEHART eine algebraische Modellierung der Mixing-Länge  $Z_{ij}$ , so daß sie folgende Beziehungen zur Beschreibung des natürlichen Mixings angeben. Die STANTON-Zahl im Spalt (Bezugsgröße ist die Massenstromdichte im Unterkanal  $i$ ) wird mit der Beziehung

$$St_g = \frac{K(P/D - 1)^{-\alpha} \left[ 1 + \left( \frac{d_{h,j}}{d_{h,i}} \right)^{\frac{3m}{2-n}} \right] \frac{d_{h,i}}{D}}{2} Re_i^{m-1} \quad (4.41)$$

<sup>13)</sup>Die exakte Lösung setzt ein inkompressibles Fluid voraus, so daß keine örtliche Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte vorliegt.

beschrieben, wobei die Exponenten  $m$  und  $n$  mit

$$\left. \begin{aligned} m &= 0.9 \\ n &= 0.0 \dots 0.25 \end{aligned} \right\} \quad (4.41a)$$

angegeben werden. In Abhängigkeit von der geometrischen Anordnung werden für  $K$  und  $\alpha$  die Werte

$$K = 0.0050 \quad ; \quad \alpha = 0.894 \quad \text{für Vierecks - Viereckskanal - Anordnungen} \quad (4.41b)$$

$$K = 0.0026 \quad ; \quad \alpha = 1.360 \quad \text{für Dreiecks - Viereckskanal - Anordnungen} \quad (4.41c)$$

angegeben. Für Dreiecks-Dreieckskanal-Anordnungen geben ROGERS & ROSEHART [102] aus Mangel an experimentellen Daten keine Werte für  $K$  und  $\alpha$  an.

ROGERS & TAHIR [103] untersuchen experimentell die Verhältnisse in einem hexagonalen Stabbündel und geben als Erweiterung der Beziehung (4.41) von ROGERS & ROSEHART [102] die Koeffizienten

$$K = 0.0050 \quad ; \quad \alpha = 0.894 \quad \text{für Vierecks - Viereckskanal - Anordnungen} \quad (4.42a)$$

$$K = 0.0054 \quad ; \quad \alpha = 0.950 \quad \text{für Dreiecks - Viereckskanal - Anordnungen} \quad (4.42b)$$

$$K = 0.0018 \quad ; \quad \alpha = 1.400 \quad \text{für Dreiecks - Dreieckskanal - Anordnungen} \quad (4.42c)$$

an.

Die bisher angesprochenen Arbeiten stützen sich beinahe ausschließlich auf experimentelle Untersuchungen, die auf einem Analogieschluß zwischen turbulentem Wärmetransport und turbulentem Stofftransport beruhen. Dabei wird im Experiment im Unterkanal  $i$  Feststoff oder ein zweites Fluid zugegeben und nach einer bestimmten Lauflänge die Konzentration dieses Stoffes in den benachbarten Unterkanälen  $i$  und  $j$  ermittelt. Analogiebetrachtungen führen dann auf den hypothetischen Quermassenstrom  $w'_{ij}$ . Experimentelle Untersuchungen mit beheizten Strömungen und real auftretenden Wärmeströmen zwischen benachbarten Unterkanälen, wie z.B. die Untersuchungen von INGESSON ET AL. [104], sind nur vereinzelt in der Literatur zu finden, und oftmals wegen der teilweise ungeklärten Randbedingungen theoretisch nicht nachvollziehbar. INGESSON ET AL. [104] haben in einem konzentrischen, auf der Innenseite gleichmässig beheizten und auf der Außenseite gekühlten Ringspalt einen Ring von adiabaten Kreisrohren angeordnet (s. Abb. 4.5). Nach einer hydraulisch und thermisch ausreichend langen Einlaufstrecke soll sich im Strömungsquerschnitt eine konstante Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung einstellen. Ist dann der axiale Temperaturgradient  $\partial \bar{T} / \partial x$  im axial folgenden Streckenabschnitt  $\Delta x$  gleich *Null*, so kann gefolgert werden, daß die auf der Innenseite in diesem Abschnitt zugeführte Wärme komplett auf der Außenseite abgeführt wird, und somit der Wärmestrom durch die Spalte zwischen den inneren und den äußeren

Unterkanälen bekannt ist. Mit dieser Versuchsanordnung kann das natürliche Mixing also direkt gemessen werden. Auch SEALE [7] hat diese Idee bei seinen experimentellen Untersuchungen angewendet. In einem asymmetrisch beheizten Testbündel mit 3, 4 oder 5 nebeneinander angeordneten Stäben (s. Abb. 4.6) ermittelt SEALE dann folgende Korrelationen für die STANTON-Zahl im Spalt

$$St_g = 0.009255 \cdot Re^{-0.1} \quad \text{für das 3 - Stabbündel mit } P/D = 1.833 \quad , \quad (4.43a)$$

$$St_g = 0.016830 \cdot Re^{-0.1} \quad \text{für das 4 - Stabbündel mit } P/D = 1.375 \quad , \quad (4.43b)$$

$$St_g = 0.029680 \cdot Re^{-0.1} \quad \text{für das 5 - Stabbündel mit } P/D = 1.100 \quad . \quad (4.43c)$$

Aus den hier vorgestellten Arbeiten und den weiteren Untersuchungen der Literatur können nun folgende Schlüsse gezogen werden:

- i. Der Zusammenhang zwischen der STANTON-Zahl im Spalt und der REYNOLDS-Zahl in den betrachteten Unterkanälen bzw. in einem der betrachteten Unterkanäle wird durch die — rein hydraulisch begründbare — Proportionalität

$$St_g \sim Re^{-0.1} \quad (4.44)$$

beschrieben (s. auch Abb. 4.7).

- ii. Der Proportionalitätsfaktor ist von der geometrischen Anordnung abhängig. Er sinkt mit steigendem relativen Stabmittenabstand  $P/D$  und ist bei engen Stabgittern ( $P/D \leq 1.2$ ) für Dreiecks-Dreieckskanal-Anordnungen größer als für Vierecks-Viereckskanal-Anordnungen (s. Abb. 4.8).

## 5. Der finite Elemente Methode-Code VANTACY-II

Das zwei-dimensionale Verfahren zur Darstellung des turbulenten Wärmetransportes in engen Stabgittern, das in dieser Schrift vorgestellt und validiert wird, baut bei der Turbulenzmodellierung im wesentlichen auf dem Modell VELASCO-TUBS von NEELEN [3] auf und benutzt zur numerischen Behandlung des Strömungsproblems den finite Elemente Methode-(FEM-)Code VANTACY von KAISER [50]. In diesem Kapitel 5. wird deshalb kurz der FEM-Code VANTACY und das Modell VELASCO-TUBS sowie dessen Realisierung im finite Differenzen Methode (FDM)-Code VELASCO-TUBS, der eine Weiterentwicklung des FDM-Codes VELASCO von EIFLER & NIJSING [29] ist, vorgestellt. Eine ausführliche Darstellung findet sich in den Originalarbeiten von KAISER [50] bzw. NEELEN [3]. Ausführlich wird hier auf die Verknüpfung des Modells VELASCO-TUBS mit dem FEM-Code VANTACY zum neuen Modell und FEM-Code VANTACY-II eingegangen werden, wobei das Hauptaugenmerk auf die Übertragung der Turbulenzmodellierung vom FDM-Code VELASCO-TUBS auf den FEM-Code VANTACY-II gelegt wird.

### 5.1. DER FEM-CODE VANTACY

Die Behandlung des Strömungsproblems für beheizte Strömungen in engen Stabgittern erfordert ein numerisches Werkzeug, welches ein hohes Maß an Flexibilität bei der Anpassung an komplexe Geometrien bei gleichzeitig möglichst kurzen Rechenzeiten aufweist. Diese Eigenschaften weist die FEM auf, so daß sie bei einer hinreichend guten Modellierung der Turbulenzeigenschaften zur Lösung der Bilanzgleichungen (2.20)-(2.22), also zur Darstellung der turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen, benutzt werden kann.

Die Vorgehensweise bei der FEM gliedert sich in drei Hauptschritte:

1. Das betrachtete Gebiet, welches aus Teilgebieten verschiedenster physikalischer Eigenschaften (z.B. strömendes Fluid, Hüllrohr, ruhendes Gas und Brennstofftablette, s. Abb. 5.1) bestehen kann und für das z.B. die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung ermittelt werden soll, wird mittels eines Netzgenerators in  $N$  Elemente diskretisiert, die an  $n$  Knoten miteinander verknüpft sind. Die Form der Elemente (Stab-, Dreiecks-, Viereckselemente usw., gerad- oder krummlinig) und die Anzahl  $p$  der Knoten je Element sind dabei dem jeweiligen Problem anzupassen.
2. Die gesuchte Feldvariable (Geschwindigkeit  $\bar{u}$ , Temperatur  $\bar{T}$  usw.) wird innerhalb eines Elementes  $e$  durch einfache Funktionen — die Ansatzfunktionen — angenähert. Die Ansatzfunktionen stellen sich dabei als Linearkombinationen von Formfunktionen  $N_i^{(e)}$  mit den gesuchten Funktionswerten an den Knoten  $i$ , den Knotenvariablen, als Koeffizienten dar. Sei  $\bar{T}(\mathbf{x}, y)$  die gesuchte Feldgröße, so wird sie im Element  $e$  mit  $p$  Knoten durch die Ansatzfunktion

$$\bar{T}^{(e)}(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^p \bar{T}_i^{(e)} N_i^{(e)}(\mathbf{x}, y) \quad (5.1)$$

dargestellt. Dabei gilt für die Formfunktionen  $N_i^{(e)}(\mathbf{x}, y)$ , daß sie im Knotenpunkt  $P_i^{(e)}(x_i, y_i)$

den Wert *Eins* und an allen anderen Knotenpunkten den Wert *Null* einnehmen müssen, also

$$N_i^{(e)}(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{für } j \neq i \end{cases} \quad (5.2)$$

Bei den Formfunktionen handelt es sich um einfache Polynome, die für jeden Elementtyp entwickelt werden und vor der eigentlichen Behandlung des Strömungsproblems bekannt sind, so daß in der Ansatzfunktion (5.1) lediglich die Knotenvariablen  $\bar{T}_i^{(e)}$  als Unbekannte auftreten. Durch additives Zusammensetzen der lokalen Ansätze  $\bar{T}^{(e)}$  aller  $N$  Elemente läßt sich der globale Ansatz

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{T}^{(k)}(x, y) = \sum_{l=1}^n \bar{T}_l N_l(x, y) \quad (5.3)$$

gewinnen, wobei nun die globale Formfunktion  $N_l(x, y)$  die Summe aller Elementformfunktionen  $N_i^{(e)}(x, y)$ , die am Knotenpunkt  $P_l$  den Wert *Eins* einnehmen, darstellt.

3. Die Lösung der beherrschenden Differentialgleichung des Problems erfolgt, indem der Ansatz (5.3) in eine entsprechende Bestimmungsgleichung eingesetzt wird. Im FEM-Code VANTACY kommt das Variationsprinzip bei der Findung dieser Bestimmungsgleichung zur Anwendung. Die Näherungsfunktion  $\bar{T}(x, y)$  wird dann aus der Erfüllung der Extremalbedingung der Variationsrechnung — die gesuchte Funktion muß das die Problematik beschreibende Funktional  $I$  zum Extremum machen — gewonnen. Für die Lösung der Energiebilanzgleichung (2.21) ergibt sich nach dem Variationsprinzip unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2.1. gemachten Annahmen (2.5) und unter Vernachlässigung der zeitlichen Mittelwerte  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$  der Sekundärgeschwindigkeiten  $v$  und  $w$  das Funktional

$$I(\bar{T}) = \frac{1}{2} \int_{\phi} \int_{\tau} \left\{ \left[ (\lambda + \rho c_p \epsilon_{q,r}) \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)^2 + (\lambda + \rho c_p \epsilon_{q,\phi}) \left( \frac{\partial \bar{T}}{r \partial \phi} \right)^2 \right] + r \bar{T} \left[ \bar{u} \left( \rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \frac{dp}{dx} \right) \right] \right\} dr d\phi \quad (5.4)$$

$$= \int_{\tau} \int_{\phi} F \left( r, \phi, \bar{T}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial \phi} \right) dr d\phi \quad (5.4a)$$

Die beherrschende Differentialgleichung des vorliegenden Problems, die Energiebilanzgleichung (2.21), ergibt sich dann aus der EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{T}} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{T}_r} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{T}_\phi} \right) = 0 \quad (5.5)$$

mit

$$\bar{T}_r = \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \quad \text{und} \quad \bar{T}_\phi = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \phi} \quad (5.5a)$$

Die Extremalbedingung für das Funktional (5.4) lautet

$$\delta I(\bar{T}) = 0 \quad \text{für alle } \delta \bar{T} \quad , \quad (5.6)$$

d.h. die erste Variation des Funktionals  $I(\bar{T})$  muß für alle zulässigen Variationen  $\delta\bar{T}$  zu Null werden. Setzt man nun den globalen Ansatz (5.3) in die Extremalbedingung (5.6) ein und sind alle anderen, neben der gesuchten Feldgröße  $\bar{T}$  in Gl. (5.4) auftretenden Größen an jedem Punkt  $l$  bekannt, so erhält man als Bestimmungsgleichung für die unbekanntenen Knotenvariablen  $\bar{T}_l$

$$\partial I(\bar{T}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial I}{\partial \bar{T}_l} = 0 \quad . \quad (5.7)$$

Diese Bestimmungsgleichung führt auf ein lineares Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen für die an  $n$  Knoten unbekanntenen Knotenvariablen  $\bar{T}_l$ , in das auf einfache Weise Randbedingungen für  $m$  Knoten eingebaut werden können, so daß sich die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten auf  $n - m$  reduziert (s. SCHWARZ [105]).

Vor der Lösung der Energiebilanzgleichung, die hier exemplarisch umrissen worden ist, muß in analoger Weise die Impulsbilanzgleichung gelöst werden, damit das Geschwindigkeitsfeld  $\bar{u}(x, y)$  bekannt ist (s. KAISER [50]).

## 5.2. DAS MODELL VELASCO-TUBS

Das Modell VELASCO-TUBS von NEELEN [3], das eine Weiterentwicklung des Modells VELASCO von EIFLER & NIJSING [29] ist und im FDM-Code VELASCO-TUBS realisiert worden ist, kann zur Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes — und daraus ableitbarer Größen wie Wandschubspannungen und Druckverlustkoeffizienten — einer isothermen, einphasigen, hydraulisch vollentwickelten, turbulenten Strömung eines NEWTON'schen Fluides durch achsparallel durchströmte, enggepackte Stabbündel verwendet werden. Es können sowohl unendliche als auch endliche Stabanordnungen (s. Abb. 5.2a und b) untersucht werden, wobei für die unendlichen Stabanordnungen gilt, daß die Stäbe entweder in reiner Dreieck-, reiner Rechteck- oder gemischter Dreieck-Rechteck-Anordnung angeordnet sein können. Für die endlichen Stabanordnungen gilt, daß

- i. die Stäbe von runden und/oder geraden Kanalwänden umschlossen sein sollen, wobei scharfe Ecken abgerundet werden müssen.
- ii. die Stäbe verschiedene Durchmesser haben können.
- iii. die Stäbe asymmetrisch angeordnet sein können.

### 5.2.1. DAS PHYSIKALISCHE MODELL

Zur Lösung der axialen Impulsbilanzgleichung (2.20) sind neben geeigneten Schließungsannahmen und Ansätzen Randbedingungen anzugeben. Durch die Anwendung der Haftbedingung an benetzten Wänden und mit der Annahme, daß der Strömungsquerschnitt in verschiedene Rechengebiete unterteilt werden kann, über deren Grenzen innerhalb des Fluides im zeitlichen Mittel kein Impulsaustausch stattfindet, werden im Modell VELASCO-TUBS<sup>14)</sup> diese benötigten Randbedin-

<sup>14)</sup>Im folgenden wird immer nur vom Modell VELASCO-TUBS gesprochen werden, wenn ein Sachverhalt in beiden Modellen VELASCO und VELASCO-TUBS in gleicher Art behandelt wird.

gungen erzeugt. In Abb. 5.3 sind für einige unterschiedliche Geometrien diese Rechengebiete, die im folgenden "impulsneutrale Zonen" genannt werden<sup>15)</sup>, dargestellt worden, wobei hier zur Verdeutlichung gesagt werden muß, daß die genaue Lage der Grenzen innerhalb des Fluides nur in Ausnahmefällen sofort bekannt ist, da diese Grenzen oftmals die Schubspannungsnulllinien sind, die im Modell VELASCO-TUBS entsprechend dem BOUSSINESQ-Ansatz (3.4) mit den Linien der maximalen Geschwindigkeiten gleichgesetzt werden (s. auch Abschnitt 3.1.1.).

Die mathematische Beschreibung einer impulsneutralen Zone erfolgt durch die Darstellung der auf ihren Grenzen geltenden Randbedingungen:

- i. An der benetzten Wand mit  $r = R$  gilt die Randbedingung

$$\tau_r (r = R) = \tau_w \quad . \quad (5.8)$$

- ii. Auf der Schubspannungsnulllinie mit  $r = r_m$  muß die Impulsstromdichte normal zur Schubspannungsnulllinie gleich *Null* sein, d.h.

$$\tau_n (r = r_m) = 0 \quad . \quad (5.9)$$

Aus Abb. 5.4 läßt sich ablesen

$$\tau_n (r_m) = \tau_r (r_m) \cos \phi - \tau_\phi (r_m) \sin \phi \quad (5.10a)$$

und

$$\tan \phi = \frac{dr_m}{r_m d\phi} \quad , \quad (5.10b)$$

so daß sich die Randbedingung (5.9) auf der Schubspannungsnulllinie wie folgt formulieren läßt

$$\tau_r (r_m) = \frac{dr_m}{r_m d\phi} \tau_\phi (r_m) \quad . \quad (5.9a)$$

Da bei verschwindendem Impulstrom auch die Geschwindigkeit normal zur Schubspannungsnulllinie (innerhalb der  $r$ - $\phi$ -Ebene) zu *Null* werden muß, gilt analog für die Sekundärströmungskomponenten der Zusammenhang

$$\bar{v} (r_m) = \frac{dr_m}{r_m d\phi} \bar{w} (r_m) \quad . \quad (5.9b)$$

---

<sup>15)</sup>Die irreführende Bezeichnung "impulsneutrale Zone" ist von EIFLER & NIJSING [106] eingeführt worden und wird hier im Einklang mit der Literatur auch verwendet.

## 5.2.2. DER LÖSUNGSWEG

Die Integration der axialen Impulsbilanzgleichung (2.20) in radialer Richtung zwischen der benetzten Wand und der Schubspannungsnullinie liefert unter Berücksichtigung der Randbedingungen (5.8) und (5.9) die Beziehung [3]

$$\tau_w R = -\frac{r_m^2 - R^2}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{d}{d\phi} \left[ \int_R^{r_m} (\tau_\phi - \rho \bar{u} \bar{w}) dr \right] \quad (5.11)$$

Der Bereich, über den hier integriert worden ist, beschreibt eine Strömungslamelle, die durch den Lamellenparameter  $K = r_m/R$  nach Gl. (3.12) und einen lokalen hydraulischen Durchmesser

$$d_{h,l} = 2 \frac{r_m^2 - R^2}{R} \quad (5.12)$$

beschrieben wird. Mit der Definitionsgleichung für den lokalen hydraulischen Durchmesser (5.12) und einer Kräftebilanz über den gesamten betrachteten Strömungsquerschnitt

$$-\frac{dp}{dx} F = \int_{U_{ben}} \tau_w dU_{ben} = \tau_{w,m} U_{ben} \quad (5.13)$$

ergibt sich die in radialer Richtung integrierte axiale Impulsbilanzgleichung (5.11) zu

$$\frac{\tau_w}{\tau_{w,m}} = \frac{d_{h,l}}{d_h} + Y_m \frac{d}{d\phi} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\tau_\phi - \rho \bar{u} \bar{w}}{\tau_{w,m}} \right) dY \right] \quad (5.14)$$

wobei  $Y = \frac{r-R}{r_m-R}$  der dimensionslose Wandabstand nach Gl. (3.18a)

und  $Y_m = K - 1$  die dimensionslose Profillänge ist.

Gl. (5.14) ist nun eine Bestimmungsgleichung für das Wandschubspannungsverhältnis  $\tau_w/\tau_{w,m}$ , die iterativ gelöst werden kann, wenn für die wandparallele Schubspannung  $\tau_\phi(r, \phi, \tau_w)$ , das wand-senkrechte Geschwindigkeitsprofil  $u^+(r, \tau_w)$  und die azimutale Sekundärströmung  $\bar{w}(r, \phi, \tau_w)$  noch geeignete Ansätze eingebracht werden.

In Kapitel 3. sind die in den Modellen VELASCO [29] und VELASCO-TUBS [3] enthaltenen Ansätze für die wand-senkrechte Schubspannung und das wand-senkrechte Geschwindigkeitsprofil schon vorgestellt und diskutiert worden. Der wesentliche Unterschied zwischen den Modellen VELASCO von EIFLER & NIJSING [29] und VELASCO-TUBS von NEELEN [3] liegt, wie aus Tabelle V.1, in der die verwendeten Ansätze zusammengestellt sind, deutlich wird, in der Modellierung der Turbulenz, speziell der wandparallelen Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,\phi}$ . Während EIFLER & NIJSING hier nur einen konstanten Wert von 0.154 für die dimensionslose wandparallele Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,\phi}^+$  angeben, modelliert NEELEN diese unter Berücksichtigung der in engen Stabgittern auftretenden, stark anisotropen Turbulenz (s. Abschnitt 3.1.1.).

Für die azimutale Sekundärströmung  $\bar{w}$ , die im Modell VELASCO-TUBS berücksichtigt wird, wird ein cosinus-förmiger Verlauf über der radialen Koordinate angenommen, obwohl dieser an der benetzten Wand die Haftbedingung verletzt. Es gilt

$$\bar{w} = 2C_{Sek} \frac{\partial u^*}{\partial \phi} \cos(\pi Y) \quad (5.15)$$

mit

$$C_{Sek} = 0.05 \quad (5.15a)$$

In einer Vorstudie zur vorliegenden Schrift [5] ist gezeigt worden, daß bei der Anwendung des Modells VELASCO-TUBS zur Darstellung turbulenter Strömungen durch enge hexagonale Stabgitter die Konstante  $C_{Sek}$  zu *Null* gesetzt werden kann, was eine Vernachlässigung der Sekundärströmungen bedeutet. Dabei sind die Experimente von HALL & SVENNINGSON [107] (s. 3.14a), KJELLSTRÖM [11] (s. Abb. 3.14a), ROWE [1] (s. Abb. 5.5a und b), HEJNA ET AL. [108] (s. Abb. 5.6) und VONKA ET AL. [13] (s. Abb. 3.15a) rechnerisch mit dem FDM-Code VELASCO-TUBS nachvollzogen worden, wobei die Rechnungen sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung des Sekundärströmungsterms durchgeführt worden sind. Der Vergleich Rechnung mit Sekundärströmungen — Rechnung ohne Sekundärströmungen — Experiment erfolgte an Hand der Wandschubspannungsverläufe und/oder der wandsenkrechten Geschwindigkeitsprofile. Für die detaillierte Darstellung dieses Vergleiches sei auf [4] und [5] verwiesen. Hier sollen nur kurz die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen resümiert werden:

- i. Das Modell VELASCO-TUBS ist sehr gut geeignet, das turbulente Geschwindigkeitsfeld und die daraus ableitbaren Größen für isotherme, einphasige Strömungen eines NEWTON'schen Fluides durch enge Stabgitter darzustellen (Validierung des Modells VELASCO-TUBS in [4]).
- ii. Die Vernachlässigung der zeitlichen Mittelwerte der Sekundärströmungen erbringt bei Berechnungen mit dem Modell VELASCO-TUBS nur minimale Veränderungen, die die Qualität der Ergebnisse im Sinne des unter i. Gesagten nicht verändern.

Im folgenden werden deshalb auch im Modell VELASCO-TUBS die zeitlichen Mittelwerte der Sekundärströmungen vernachlässigt, so daß die Bestimmungsgleichung für das Wandschubspannungsverhältnis (5.14) in

$$\frac{\tau_w}{\tau_{w,m}} = \frac{d_{h,l}}{d_h} + Y_m \frac{d}{d\phi} \left[ \int_0^1 \frac{\tau_\phi}{\tau_{w,m}} dY \right] \quad (5.16)$$

übergeht. Somit ist auch eine Harmonisierung mit dem FEM-Code VANTACY gegeben, da dort die zeitlichen Mittelwerte der Sekundärströmungen ebenfalls vernachlässigt werden (s. Abschnitt 5.1. ).

### 5.2.3. DIE NUMERISCHE BEHANDLUNG

Setzt man die in Tabelle V.1 zusammengestellten Ansätze für die wandparallele Schubspannung  $\tau_\phi$  und das wandsenkrechte Geschwindigkeitsprofil  $u^+$  in die Bestimmungsgleichung (5.16) ein, so erhält man nach einer Integration in Umfangsrichtung (s. NEELEN [109]) eine Gleichung der Art

$$\int_0^\phi \frac{\tau_w}{\tau_{w,m}} d\phi = DHI(\phi) + COEF \left. \frac{d\left(\frac{\tau_w}{\tau_{w,m}}\right)}{d\phi} \right|_\phi - COEF \left. \frac{d\left(\frac{\tau_w}{\tau_{w,m}}\right)}{d\phi} \right|_{\phi=0} \quad (5.17)$$

Zur Lösung dieser Integro-Differentialgleichung wird für das Wandschubspannungsverhältnis ein FOURIER-Reihenansatz der Art

$$\frac{\tau_w}{\tau_{w,m}} = DHI(\phi = \phi_{end}) + \sum_{n=1}^N [BT_n \cos(n\phi)] \quad (5.18)$$

gemacht, wobei  $\phi_{end}$  die azimutale Position der Zonengrenze ist. Wird die betrachtete impulsneutrale Zone in  $N$  Lamellen unterteilt, so erhält man  $N$  Gleichungen zur Bestimmung der  $N$  Koeffizienten  $BT_n$  des FOURIER-Reihenansatzes (5.18). Das Gleichungssystem ist aber nur dann zu lösen, wenn der Verlauf der Schubspannungsnulllinie bekannt ist. Deshalb wird bei der numerischen Behandlung in einem ersten Iterationsschritt der Verlauf der Schubspannungsnulllinie vorgegeben und damit eine erste Wandschubspannungsverteilung ermittelt, die dann zur Bestimmung der Lage der neuen Schubspannungsnulllinie in das wandsenkrechte Geschwindigkeitsprofil eingesetzt wird. Bei ungenügender Übereinstimmung der neuen Schubspannungsnulllinie mit der zuvor Angenommenen wird die Rechnung mit der neuen Schubspannungsnulllinie als Ausgangspunkt erneut durchgeführt. Dieser Iterationsvorgang wird wiederholt, bis eine vorgegebene Übereinstimmung erreicht ist, wobei eine rasche Konvergenz gewährleistet ist.

Eine detaillierte Beschreibung der numerischen Behandlung liegt bei NEELEN [109, 110] vor.

### 5.3. DIE VERKNÜPFUNG DES MODELLS VELASCO-TUBS MIT DEM FEM-CODE VANTACY

Die Ausführungen im vorangegangenen Abschnitt 5.2. haben unterstrichen, daß das Modell VELASCO-TUBS [3] hervorragend für die Darstellung turbulenter Geschwindigkeitsfelder bei isothermen, einphasigen Strömungen eines NEWTON'schen Fluides durch enge Stabgitter geeignet ist. Die Lösung der Energiebilanzgleichung zur Darstellung des turbulenten Temperaturfeldes bei beheizten Strömungen ist bei einer analogen Vorgehensweise, wie sie im Modell VELASCO-TUBS bei der Lösung der axialen Impulsbilanzgleichung angewendet wird, nur für einige Spezialfälle möglich. Verwendet man analog zum wandsenkrechten Geschwindigkeitsprofil  $u^+ = \bar{u}/u^*$  ein wandsenkrechtes Temperaturprofil (s. KAYS & CRAWFORD [88])

$$T^+ = \frac{T_w - \bar{T}}{T^*} \quad \text{mit} \quad T^* = \frac{q_w''}{\rho c_p u^*} \quad , \quad (5.19)$$

so wird man das Wandwärmestromverhältnis  $q_w''/q_{w,m}''$  iterativ zu bestimmen haben. Dies setzt jedoch — will man analog zum Modell VELASCO-TUBS vorgehen — eine Wärmestromnulllinie bzw. unter Berücksichtigung des Ansatzes (4.1) eine Linie minimaler Temperaturen im Strömungsgebiet und hinreichend verifizierte Ansätze für die Beschreibung des örtlichen Wärmeübergangs an benetzten Wänden voraus. Dieses Vorgehen ist aus zweierlei Gründen schwer durchzuführen:

- i. In der Literatur sind keine hinreichend genauen Angaben über wandsenkrechte Temperaturprofile und örtliche Wärmeübergangskoeffizienten für turbulente Strömungen in engen Stabgittern zu finden.
- ii. In vielen Fällen ist eine Wärmestromnulllinie gar nicht im Strömungsgebiet vorhanden.

Betrachtet man z.B. die Verhältnisse in einem 7-Stabbündel (s. Abb. 5.7), so wird ersichtlich, daß bei gleichmäßiger Beheizung aller Stäbe die Bestimmung der Wärmestromnulllinie

in den Zentralkanälen wohl möglich, in den Wand- und Eckkanälen jedoch unmöglich ist, bzw. die Wärmestromnulllinie mit der Kastenwand zusammenfällt, wenn diese adiabat ist. Bei ungleichmäßiger Beheizung kann die benötigte Wärmestromnulllinie auch durch Stäbe führen und nicht mehr im Fluidgebiet liegen. Aus diesen Gründen ist es notwendig, einen anderen Weg der Darstellung der turbulenten Temperaturfelder in Stabgittern zu finden, der ohne Ansätze für wandsenkrechte Temperaturprofile und örtliche Wärmeübergangskoeffizienten und ohne Wärmestromnulllinien beschränkt werden kann.

### 5.3.1. DER LÖSUNGSWEG ZUR DARSTELLUNG DES TURBULENTEN TEMPERATURFELDES

Wie in Abschnitt 5.1. gezeigt worden ist, ist die Lösung der Energiebilanzgleichung (2.21) mit dem FEM-Code VANTACY [50] möglich, wenn die neben der gesuchten Temperatur  $\bar{T}$  im Funktional (5.4) auftretenden Größen an jedem Knoten im Lösungsgebiet bekannt sind. Die Stoffwerte (Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , Dichte  $\rho$  und spezifische Wärmekapazität  $c_p$ ) sind, da ein inkompressibles Fluid betrachtet wird, nicht von der örtlichen Temperaturverteilung abhängig und gehen als Rechengebiet-gemittelte Größen in die Rechnung ein. Der axiale Temperaturgradient ergibt sich aus einer globalen Energiebilanz

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{q'}{c_p \dot{M}}, \quad (5.20)$$

wobei der zu- bzw. abgeführte Wärmestrom je axialer Längeneinheit  $q'$  und der Massenstrom  $\dot{M}$  Eingangsdaten für den jeweiligen Rechenfall sind. Löst man die axiale Impulsbilanzgleichung in einem vorgeschalteten Rechenschritt mit dem Modell VELASCO-TUBS, so ist das turbulente Geschwindigkeitsfeld  $\bar{u}$  bekannt und es läßt sich der axiale Druckgradient  $dp/dx$  mit der Kräftebilanz (5.13) bestimmen. Die Lösung der axialen Impulsbilanzgleichung erfolgt dabei völlig unabhängig von der Lösung der Energiebilanzgleichung, da alle Betrachtungen für ein inkompressibles Fluid erfolgen. Da für die Lösung der axialen Impulsbilanzgleichung (2.20) mit dem Modell VELASCO-TUBS die Verteilung der wandparallelen Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,\phi}$  benötigt wird, ist diese nach der Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes auch bekannt.

Das neue Verfahren VANTACY-II geht nun von folgendem Lösungsweg zur Darstellung des turbulenten Temperaturfeldes aus:

1. Für die jeweilige Problemstellung wird die axiale Impulsbilanzgleichung (2.20) mit dem FDM-Code VELASCO-TUBS [3] gelöst, so daß die Geschwindigkeit  $\bar{u}$  und die wandparallele Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,\phi}$  an jedem Ort des Strömungsquerschnittes — im Rahmen der jeweiligen Diskretisierung — bekannt sind.
2. Mit diesen Größen wird durch eine erneute Anwendung der axialen Impulsbilanzgleichung (2.20) auch die wandsenkrechte Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,r}$  an jedem Ort des Strömungsquerschnittes ermittelt.
3. Die Felder der wandparallelen und der wandsenkrechten Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,\phi}(r, \phi)$  bzw.  $\epsilon_{\tau,r}(r, \phi)$  werden dem FEM-Code VANTACY zur Verfügung gestellt.
4. Der FEM-Code VANTACY löst zunächst mit diesen Feldern die axiale Impulsbilanzgleichung (2.20) zur Ermittlung der Knotengeschwindigkeiten  $\bar{u}_i$ .

5. Mit einem geeigneten Ansatz für die turbulente PRANDTL-Zahl werden die wandparallelen und wandsenkrechten Wirbelviskositäten in entsprechende Wirbelleitfähigkeiten umgerechnet.
6. Mit diesen Wirbelleitfähigkeiten  $\epsilon_{q,\phi}$  und  $\epsilon_{q,r}$  und den Knotengeschwindigkeiten  $\bar{u}_i$  werden mit dem FEM-Code VANTACY die Knotentemperaturen  $\bar{T}_i$  und somit das turbulente Temperaturfeld  $\bar{T}(r, \phi)$  ermittelt.

Die Realisierung dieses Lösungsweges ist das neue zwei-dimensionale Verfahren zur Darstellung des turbulenten Wärmetransportes in engen Stabgittern "VANTACY-IP", welches ohne zusätzliche Wärmeübergangsmodelle auskommt, da die Kopplung zwischen Fluidgebieten und wärmeübertragenden Wänden über gemeinsame Knoten gegeben ist. Vielmehr können aus dem errechneten Temperaturfeld örtliche Wandwärmestromdichten und Wärmeübergangskoeffizienten abgeleitet werden.

Bevor im folgenden Kapitel 6. die Validierung des neuen Verfahrens VANTACY-II dargestellt wird, soll hier zunächst noch näher auf die Schritte 2. und 5. des vorgestellten Lösungsweges eingegangen werden.

### 5.3.2. ERMITTLUNG DER WANDSENKRECHTEN WIRBELVISKOSITÄT

Ausgehend von der axialen Impulsbilanzgleichung (2.20) erhält man unter Vernachlässigung der zeitlichen Mittelwerte der Sekundärströmungen durch eine Integriation in radialer Richtung zwischen den Punkten  $(R, \phi)$  an der benetzten Wand und dem Punkt  $(r_n, \phi)$  die Beziehung

$$\int_R^{r_n} \frac{dp}{dx} r dr = (r\tau_r) \Big|_R^{r_n} + \int_R^{r_n} \frac{\partial \tau_\phi}{\partial \phi} dr \quad . \quad (5.21)$$

Mit der Randbedingung (5.8) an der benetzten Wand und der Kräftebilanz über den gesamten Strömungsquerschnitt (5.13) erhält man nach Umformung (s. [111]) die Bestimmungsgleichung für die dimensionslose wandsenkrechte Wirbelviskosität

$$\epsilon_{\tau,r}^+ = \frac{1}{\frac{\tau_w}{\tau_{w,m}} \cdot \frac{\partial u^+}{\partial Y}} \left\{ \frac{1}{Y_n Y_m + 1} \cdot \frac{\tau_w}{\tau_{w,m}} - \frac{2R}{d_h} \cdot \frac{(Y_n Y_m + 1)^2 - 1}{Y_n Y_m + 1} \right. \\ \left. - \frac{Y_m}{Y_n Y_m + 1} \int_0^{Y_n} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left( \nu^+ + \epsilon_{\tau,\phi}^+ \right) \frac{Y_m}{Y Y_m + 1} \cdot \frac{\tau_w}{\tau_{w,m}} \cdot \frac{1}{u^*} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} \right] dY \right\} \\ - \nu^+ \quad , \quad (5.22)$$

wobei die azimutale Ableitung der Geschwindigkeit aus

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} = u^* \frac{\partial u^+}{\partial \phi} + u^+ \frac{\partial u^*}{\partial \phi} \\ = u^* \left[ \frac{\partial u^+}{\partial \phi} + \frac{u^+}{2} \cdot \frac{1}{\tau_w / \tau_{w,m}} \cdot \frac{\partial (\tau_w / \tau_{w,m})}{\partial \phi} \right] \quad (5.22a)$$

bestimmt wird. Alle auf der rechten Seite von Gl. (5.22) auftretenden Größen sind nach einer VELASCO-TUBS-Rechnung an jedem Diskretisierungspunkt bekannt, bzw. können mit den in Tabelle V.1 zusammengestellten Gesetzmäßigkeiten für das wandsenkrechte Geschwindigkeitsprofil  $u^+$  und die dimensionslose wandparallele Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,\phi}^+$  aus den Ergebnissen der VELASCO-TUBS-Rechnung ermittelt werden, so daß die dimensionslose wandsenkrechte Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,r}^+$ , ebenso wie die dimensionslose wandparallele Wirbelviskosität  $\epsilon_{\tau,\phi}^+$  an jedem Diskretisierungspunkt berechnet werden kann (detaillierte Darstellung s. [111])<sup>16)</sup>.

### 5.3.3. WAHL EINES GEEIGNETEN ANSATZES FÜR DIE TURBULENTE PRANDTL-ZAHL

In Abschnitt 4.1. ist ein Auswahl der wichtigsten und bekanntesten in der Literatur enthaltenen Ansätze zur Beschreibung der turbulenten PRANDTL-Zahl  $Pr_{tur}$  vorgestellt und diskutiert worden. Bei der Auswahl einer geeigneten Beziehung für die Anwendung in VANTACY-II sind folgende Kriterien zu beachten:

- i. Die Beziehung muß für Gase und Flüssigkeiten mit molekularen PRANDTL-Zahlen um *Eins* bei REYNOLDS-Zahlen im Bereich  $10^4 \leq Re \leq 10^6$  gültig sein.
- ii. Die Beziehung soll nicht rein empirischer Natur sein.
- iii. Die Beziehung muß an einer möglichst großen Anzahl experimenteller Arbeiten verifiziert worden sein, bzw. die angepaßten Koeffizienten sollen ein möglichst breites Spektrum experimenteller Arbeiten repräsentieren.
- iv. Die Beziehung muß für enge Stabgitter gültig sein.

Keine der in der Literatur vorhandenen Beziehungen erfüllt diese Bedingungen, wobei selbst eine Erfüllung nur der ersten drei Kriterien für Kreisrohrströmungen nicht gegeben ist.

Für die Entwicklung des Verfahrens VANTACY-II ist auf die Beziehung (4.29) von JISCHA & RIEKE [93] mit den Koeffizienten nach BAARS [96] zurückgegriffen worden, da

- i. diese Beziehung von ihrer Herleitung her ausbaufähig für turbulente Stabgitterströmungen erscheint (speziell über die Modellierung der Turbulenz-REYNOLDS-Zahl  $Re_{tur}$ ).
- ii. die Anpassung der Koeffizienten von BAARS [96] an Hand nachweisbar voll eingelaufener Strömungen durchgeführt worden ist.
- iii. diese Beziehung algebraisch leicht verwertbar ist.

---

<sup>16)</sup>Auf der Schubspannungsnulllinie muß wegen  $\partial u^+ / \partial Y|_{Y=1} = 0$  eine Approximation durchgeführt werden.

## 6. Darstellung der Ergebnisse

### 6.1. VALIDIERUNG DES VERFAHRENS VANTACY-II

Die Validierung des zwei-dimensionalen Verfahrens VANTACY-II zur Beschreibung des turbulenten Wärmetransportes in engen Stabgittern erfolgt an Hand eines Vergleiches der mit dem Verfahren VANTACY-II ermittelten Temperaturfelder für die experimentell von SEALE [7] untersuchte 5-Stab-Anordnung (relativer Stabmittenabstand  $P/D = 1.100$  und relativer Wandabstand  $W/D = 1.196$ , s. Abb. 4.6) und der experimentell ermittelten Daten von SEALE. Dabei wird sich zeigen, daß die auftretenden Unterschiede nur geringfügig und gut interpretierbar sind (s. auch [112]). Für die Validierung sind die Experimente in der 5-Stab-Anordnung aus drei Gründen ausgewählt worden:

- i. nur bei der 5-Stab-Anordnung liegt ein enges Stabgitter ( $P/D \leq 1.2$ ) vor (s. Tabelle VI.1).
- ii. die relative Einlauffänge  $l/d_{h,b}$  ist bei der 5-Stab-Anordnung am größten, so daß in dieser Anordnung am ehesten ein hydraulisch und thermisch volleingelaufener Zustand erreicht worden ist.
- iii. die ausgemessenen Unterkanäle sind in vertikaler Richtung windkanalsymmetrisch und relativ weit von den Kanalecken entfernt, so daß die Einflüsse dieser Kanalecken auf das Strömungs- und Temperaturfeld in den ausgemessenen Unterkanälen verschwindend gering sind. Bei der numerischen Simulation muß deshalb nur eine Symmetriehälfte der ausgemessenen Unterkanäle modelliert werden, wobei dieses Modell dann gedanklich eine unendliche Anordnung ist.

Eine Validierung des hydraulischen Teils des neuen Verfahrens wird hier nicht vorgenommen, da diese bereits ausführlich in [4] und [5] dargestellt worden ist (s. auch Abschnitt 5.2.2.).

#### 6.1.1. DIE EXPERIMENTE VON SEALE

##### 6.1.1.1. ZIELSETZUNG, VERSUCHSAUFBAU UND VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

SEALE [7] hat in drei verschiedenen Anordnungen (s. oben) beheizte Experimente mit dem Fluid Luft durchgeführt, um bessere Kenntnisse über das natürliche Mixing in Stabbündeln zu erhalten. Es ist die Zielsetzung der experimentellen Untersuchungen gewesen, für verschiedene relative Stabmittenabstände  $P/D$  und REYNOLDS-Zahlen  $Re$

- i. Daten über den hypothetischen Quermassenstrom je axialer Spaltlänge  $w'_{ij}$  zwischen zwei benachbarten Unterkanälen  $i$  und  $j$  zu liefern und
- ii. detailliert die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen im Strömungsquerschnitt zu ermitteln.

Um diese Zielsetzungen erfüllen zu können, hat SEALE [7] einen Versuchsaufbau — ähnlich wie INGESSON ET AL. [104] — gewählt, bei dem ein bekannter Wärmestrom zwischen den beiden betrachteten Unterkanälen fließt und alle Messungen des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes in einem Querschnitt vorgenommen werden, in dem alle axiale Gradienten (mit Ausnahme des Druckgradienten) gleich *Null* sind.

In Abb. 4.6 sind die verschiedenen von SEALE [7] untersuchten Teststreckenquerschnitte dargestellt. Die obere Kanalwand ist eine elektrisch beheizte Heizplatte, die untere Kanalwand wird wassergekühlt und die eingebauten Kreisrohre sind nahezu adiabat. Die Wärmeleitung oberhalb der Heizplatte wird durch eine Asbestschicht und eine Schaumstoffisolation gedämmt, so daß nur ca. 10% der elektrisch zugeführten Leistung als Wärmeverluste durch diese Isolierung entweichen und nicht dem Fluid im Strömungskanal zugeführt werden. Der Kühlwassermassenstrom im Kühlkanal unterhalb der Teststrecke beträgt ca.  $2 \text{ kg/s}$  und die mittlere Kühlwassertemperatur erhöht sich während der Durchführung eines Experimentes um maximal  $1 \text{ K}$  entlang der gesamten Kanallänge. Die eingebauten Rohre sind aus schlecht leitendem, dünnwandigen "Tufnol" (Wandstärke  $2 \text{ mm}$ , Wärmeleitfähigkeit  $0.26 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ ) gefertigt und mit einer Schaumstoffisolation gefüllt, so daß die azimutale und axiale Wärmeleitung in den Rohrwänden und die radiale und axiale Wärmekonvektion im Inneren der Rohre verhindert wird. Weniger als 2% des gesamten effektiven Wärmestroms durch die Spalte strömt durch die Rohre.

Abb. 6.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau des verwendeten Windkanals. Die horizontal angeordnete Teststrecke besteht aus neun  $3 \text{ m}$  langen Teilstücken und hat eine Gesamtlänge von ca.  $27 \text{ m}$ . Alle Messungen der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder sind  $104 \text{ mm}$  stromaufwärts vom Windkanalaustritt vorgenommen worden. Wie aus Tabelle VI.1 ersichtlich ist, ergibt sich für die hier näher zu behandelnde 5-Stab-Anordnung ein Verhältnis von Einlaufänge  $l$  zu hydraulischen Durchmesser  $d_h$  von  $l/d_h \approx 1023$ . SEALE [7] gibt auf Grund theoretischer Betrachtungen selbst ein Grenzverhältnis  $(l/d_h)_{min} \approx 2000$  an, ab dem eine thermisch volleingelaufene Strömung mit axial konstantem Temperaturprofil vorliegt. Da dieses Verhältnis aus baulichen Gegenbenheiten von SEALE nicht realisiert werden konnte, ist vor der Teststrecke ein Vorwärmer installiert worden, der die erforderliche thermische Einlaufänge reduzieren soll. Vorversuche haben gezeigt, daß mit diesem Vorwärmer die benötigten, thermisch volleingelaufenen Zustände im Meßquerschnitt realisiert werden können. Die eingebauten Kreisrohre werden alle  $3 \text{ m}$  (3- und 4-Stab-Anordnung) bzw. alle  $1.5 \text{ m}$  (5-Stab-Anordnung) durch Abstandhalterringe, die an der unteren Kanalwand durch  $1.6 \text{ mm}$  starke Stifte befestigt sind, fixiert, so daß eine Einhaltung der Nenngeometrie im Rahmen akzeptabler Toleranzen gewährleistet ist.

Im Verlauf eines Versuches sind von SEALE [7] die folgenden Größen aufgenommen worden:

- i. die der Heizplatte zugeführte elektrische Leistung,
- ii. der statische Druck im Windkanal,
- iii. die örtlichen Strömungsgeschwindigkeiten und
- iv. die örtlichen Wand- und Fluidtemperaturen.

Die elektrische Leistung der Heizplatte ist aus den Meßwerten für die Spannung  $U$  und den Strom  $I$  bestimmt worden, und aus dieser ist der dem Fluid zugeführte Wärmestrom ermittelt worden. Dabei sind von SEALE [7] Verluste durch die Wärmeableitung oberhalb der Heizplatte  $q''_{Kon}$  und der Strahlung zwischen der Heizplatte und der gekühlten Kanalwand  $q''_{Rad}$  berücksichtigt worden, so daß sich die Netto-Input-Wärmestromdichte aus

$$q''_{input} = U \cdot I / F_{Heiz} - q''_{Kon} - q''_{Rad} \quad (6.1)$$

mit  $F_{Heiz}$  : Fläche der Heizplatte

bestimmt. Der statische Druck  $p$  ist über Wasser- oder BETZ-Mikro-Manometer alle 3  $m$  entlang des Windkanals gemessen worden, so daß aus diesen Daten der axiale Druckgradient  $dp/dx$  bestimmt wird. Für die Messung der örtlichen Strömungsgeschwindigkeiten  $\bar{u}$  und der Fluidtemperaturen  $\bar{T}$  ist eine kombinierte PITOT-Temperatur-Meßsonde mit einem äußeren Durchmesser von 2.4  $mm$  verwendet worden. In dem Meßquerschnitt der 5-Stab-Anordnung ist dabei ein Netz von 142 Meßpunkten (s. Abb. 6.2) durchfahren worden. Zur Messung der Wandtemperaturen der Heizplatte, der gekühlten Kanalwand und der eingebauten Rohre sind  $Cu - Constantan$ -Thermoelemente benutzt worden, deren Positionierung aus Abb. 6.3 ersichtlich ist.

Aus den Meßwerten für die örtlichen Strömungsgeschwindigkeiten  $\bar{u}$  und Fluidtemperaturen  $\bar{T}$  sind die unterkanalgemittelten Werte  $\bar{u}_{m,i}$  bzw.  $\bar{T}_{m,i}$  durch ein numerisches Summationsverfahren ermittelt worden, so daß

$$\bar{u}_{m,i} = \frac{\int_{A_i} \bar{u} dA}{A_i} \quad (6.2a)$$

bzw.

$$\bar{T}_{m,i} = \frac{\int_{A_i} \bar{T} \bar{u} dA}{\int_{A_i} \bar{u} dA} \quad (6.2b)$$

erfüllt ist. Die Stoffwerte für die Luft sind für die jeweiligen mittleren Fluidtemperaturen ermittelt worden. Die Berechnung der REYNOLDS-Zahl ist mit den Mittelwerten der beiden ausgemessenen Unterkanäle erfolgt, d.h.

$$Re = \frac{\bar{u}_{m,b} d_{h,b}}{\nu} \quad (6.3)$$

mit

$$\bar{u}_{m,b} = (\bar{u}_{m,1} + \bar{u}_{m,2}) / 2 \quad , \quad (6.3a)$$

$$\nu = \nu(\bar{T}_{m,b}) \quad , \quad (6.3b)$$

$$\bar{T}_{m,b} = \frac{\bar{T}_{m,1} \bar{u}_{m,1} + \bar{T}_{m,2} \bar{u}_{m,2}}{\bar{u}_{m,1} + \bar{u}_{m,2}} \quad (6.3c)$$

Die Berechnung der STANTON-Zahl im Spalt erfolgt in Analogie zur Berechnung der REYNOLDS-Zahl mit dem Mittelwert beider Unterkanäle für die entsprechenden Größen. Alle Wandtemperaturen ergeben sich als Mittelwerte der Meßwerte an der entsprechenden Wand.

## 6.1.1.2. EXPERIMENTELLE ERGEBNISSE VON SEALE

Eine Grundvoraussetzung der SEALE-Versuche [7] ist, daß im Meßquerschnitt ein hydraulisch und thermisch volleingelaufener Zustand herrscht, wobei SEALE abweichend von den in dieser Schrift gemachten Voraussetzungen (2.5) den thermisch volleingelaufenen Zustand einschränkend mit

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = 0 \quad (6.4)$$

beschreibt, da dann ein rein lateraler Wärmetransport vorliegt. Auf diese Weise kann eine direkte Messung des natürlichen Mixings zwischen zwei benachbarten Unterkanälen vorgenommen werden. Der geforderte thermisch volleingelaufene Strömungszustand wird bei SEALE [7] durch einen speziellen Vorwärmer, der ein asymmetrisches, dem vollentwickelten Temperaturprofil in der Teststrecke ähnliches, Temperaturprofil am Windkanaleintritt erzeugt (s. Abb. 6.4). Durch die Anpassung der Vorwärmer-Heizleistung und Vorwärmer-Heizleistungsverteilung erreicht SEALE dann eine thermisch vollentwickelte Strömung im Meßquerschnitt.

Im folgenden sollen die experimentellen Ergebnisse von SEALE [7] für die 5-Stab-Anordnung kurz dargestellt werden. Tabelle VI.2 zeigt die Hauptdaten der Versuche in dieser Stab-Anordnung. Im REYNOLDS-Zahl-Bereich  $4.6 \cdot 10^4 \leq Re \leq 9.2 \cdot 10^4$  hat SEALE Versuche mit unterschiedlichen Beheizungen durchgeführt ( $740 \text{ W/m}^2 \leq q''_{input} \leq 1520 \text{ W/m}^2$ ), wobei die über beide ausgemessenen Unterkanälen 1 und 2 (oberere bzw. unterer ausgemessener Unterkanal) gemittelten Fluidtemperaturen im Bereich  $26^\circ\text{C} \leq \bar{T}_{m,b} \leq 47^\circ\text{C}$  liegen.

## 6.1.1.2.1. GEMESSENE GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNGEN

Die Abbildungen 6.5a bis 6.5g zeigen in Isotachendarstellung die Geschwindigkeitsverteilungen  $\bar{u}/\bar{u}_{max}$  in den ausgemessenen Unterkanälen der 5-Stab-Anordnung für die sieben von SEALE [7] in dieser Anordnung durchgeführten Versuche. Alle Geschwindigkeitsverteilungen sind nahezu gleich und zeigen, daß die gemessenen Geschwindigkeitsfelder bis auf geringfügige Abweichungen symmetrisch zur vertikalen Traverse (s. Abb. 6.2) sind. Bezogen auf den Spalt 1 2 (s. Abb. 6.2) sind die experimentell ermittelten Geschwindigkeitsfelder asymmetrisch. Im Unterkanal 1 mit der Heizplatte als Kanalwand ist die Fluidtemperatur höher als im Unterkanal 2 mit der wassergekühlten Kanalwand, so daß die Dichte des Fluides im Unterkanal 1 geringer ist als die im Unterkanal 2. Da beide Unterkanäle hydraulisch gleich sind, kann gefolgert werden, daß die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Unterkanal 1  $\bar{u}_{m,1}$  größer ist als die im Unterkanal 2 ( $\bar{u}_{m,i} \sim \sqrt{\bar{T}_{m,i}}$ ) und die Massenstromdichte im Unterkanal 1  $\dot{m}_1$  kleiner ist als die im Unterkanal 2 ( $\dot{m}_i \sim 1/\sqrt{\bar{T}_{m,i}}$ ). Die Abbildungen 6.5a bis 6.5g und die in Tabelle VI.2a zusammengestellten Daten stehen im Einklang mit diesen Überlegungen und zeigen somit, daß die gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen verständlich und ohne schwerwiegende systematische Fehler sind. Man kann aus den gemessenen Geschwindigkeitsfeldern weiter ablesen, daß die auf Grund der temperaturabhängigen Dichtedifferenzen auftretenden Asymmetrien im Geschwindigkeitsfeld jedoch recht gering sind, so daß die Nachrechnung der Experimente mit dem Verfahren VANTACY-II, das die örtliche Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte vernachlässigt, möglich erscheint.

## 6.1.1.2.2. GEMESSENE TEMPERATURVERTEILUNGEN

Die Abbildungen 6.6a bis 6.6g zeigen in Isothermendarstellung die Temperaturverteilungen in den ausgemessenen Unterkanälen. Für alle sieben untersuchten Fälle in der 5-Stab-Anordnung stellen sich sehr ähnliche Verteilungen dar. SEALE [7] hat bei der Normierung nicht die gemessene Wandtemperatur an der Heizplatte  $T_{w,m,h}$  sondern eine durch graphische Interpolation aus einem normierten wandsenkrechten Temperaturprofil ermittelte Wandtemperatur an der beheizten Kanalwand  $T_{w,m,h}^i$  verwendet, die um ca. 1 – 2 K höher liegt als die gemessene Wandtemperatur. Die Ermittlung dieser interpolierten Wandtemperatur begründet SEALE mit Meßfehlern bei der Wandtemperaturmessung an der Heizplatte. Aus den Abbildungen 6.6a bis 6.6g läßt sich im Bereich der beheizten Wand eine bemerkbare Asymmetrie im Temperaturfeld, die in allen Fällen gleichgeartet ist, ablesen. Diese Asymmetrie macht jedoch maximal 4% der Differenz zwischen den Wandtemperaturen an der Heizplatte und der gekühlten Kanalwand  $T_{w,m,h}^i - T_{w,m,k}$  aus und liegt somit in akzeptablen Grenzen, wengleich sie auch als Indiz für einen systematischen Fehler im Teststreckenaufbau angesehen werden kann. Dieser Fehler hat aber nur einen sehr geringen Einfluß auf die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen.

Der Verlauf der normierten Fluidtemperatur  $(\bar{T} - T_{w,m,k}) / (T_{w,m,h}^i - T_{w,m,k})$  ist in Abb. 6.7 für alle sieben in der 5-Stab-Anordnung untersuchten Fälle entlang der vertikalen Traverse, die von der beheizten Kanalwand senkrecht durch den Spalt 1 2 zur gekühlten Kanalwand verläuft, dargestellt. Es ist zu ersehen, daß der Verlauf unabhängig von der REYNOLDS-Zahl im Testquerschnitt und der Größe des zugeführten Wärmestroms ist. Diese ist ein deutliches Indiz für das Vorliegen einer hydraulisch und thermisch volleingelaufenen Strömung, wie sie für die Zwecke der Untersuchungen von SEALE [7] benötigt wird.

## 6.1.1.2.3. GEMESSENE MIXING-DATEN

Aus den Daten der gemessenen Temperaturfelder und dem dem Fluid zugeführten Wärmestrom hat SEALE [7] das natürliche Mixing in seinen Versuchsgeometrien in Form der STANTON-Zahl im Spalt quantifiziert, wobei die STANTON-Zahl im Spalt aus

$$St_g = \frac{q_{input}'' \frac{P}{P-D}}{\rho c_p \bar{u}_{m,b} (\bar{T}_{m,1} - \bar{T}_{m,2})} \quad (6.5)$$

ermittelt worden ist. Abb. 6.8 zeigt die so ermittelten STANTON-Zahlen im Spalt  $St_g$  für alle drei untersuchten Stab-Anordnungen in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl in den ausgemessenen Unterkanälen  $Re$ . Wie zu erkennen ist, lassen sich die Daten der einzelnen Stab-Anordnungen gut miteinander korrelieren, wobei die Abhängigkeit  $St_g \sim Re^{-0.1}$  (s. Abschnitt 4.2.) gut wiedergegeben wird. Der Proportionalitätsfaktor ist für die 5-Stab-Anordnung ( $P/D = 1.100$ ) am größten und macht ca. den 3-fachen Wert des Proportionalitätsfaktors der 3-Stab-Anordnung ( $P/D = 1.833$ ) aus, was zeigt, daß das natürliche Mixing mit enger werdendem Stabgitter ansteigt. SEALE [7] gibt für die von ihm experimentell ermittelten STANTON-Zahlen im Spalt einen maximalen Fehler von 11% an, der sich aus den einzelnen Fehlern bei der Ermittlung des zugeführten Wärmestroms (8%), der örtlichen Strömungsgeschwindigkeit (1%) und der unterkanalgemittelten Fluidtemperaturen

(5%, für die Ermittlung der örtlichen Fluidtemperaturen wird ein Fehler von 1% angegeben), sowie Geometrieabweichungen (5%) ergibt.

### 6.1.2. NUMERISCHE SIMULATION DER EXPERIMENTE VON SEALE MIT DEM FEM-CODE VANTACY-II

#### 6.1.2.1. NACHBILDUNG DER TESTSTRECKE

Für die Validierung des Verfahrens VANTACY-II wird eine Symmetriehälfte des von SEALE [7] detailliert ausgemessenen Teststreckenausschnittes der 5-Stab-Anordnung nachgebildet. Um die Experimente simulieren zu können, ist es notwendig, neben der wärmefreisetzenden Heizplatte auch ein wärmeaufnehmendes Gebiet auf der gekühlten Kanalseite anzuordnen, um den thermisch eingelaufenen Zustand mit  $\partial\bar{T}/\partial x = 0$  darzustellen. Abb.6.9a zeigt den prinzipiellen Aufbau des numerischen Modells. Das Strömungsgebiet (1) ist in drei Teilgebiete unterteilt:

- i. die viskose Unterschicht, die radial in 4 Elementzeilen und azimuthal in 48 Elementspalten je 30°-Segment am Stab bzw. 48 Elementzeilen je entsprechendem Segment an den geraden Kanalwänden unterteilt ist (radiale Ausdehnung  $y/R \leq 0.005$ ).
- ii. das Übergangsbereich, das radial in 5 Elementzeilen und azimuthal in 12 bis 24 Elementspalten je Segment unterteilt ist ( $0.005 \leq y/R \leq 0.0333$ ).
- iii. der vollturbulente Kern, der aus 12 bzw. 18 Elementzeilen (zwischen zwei gegenüberliegenden Übergangsbereichen) und 6 Elementspalten je Segment besteht ( $0.0333 \leq y/R$ ).

Die Kanalwände sind in je zwei Schichten aufgeteilt. Die Heizplatte wird durch eine Schicht mit einer homogenen Wärmequellenbelegung (2) dargestellt, die die konstante elektrische Beheizung simulieren soll. Auf der gekühlten Kanalseite ist es nicht möglich, die Kühlwasserströmung direkt darzustellen. Die Funktion der Kühlwasserströmung wird im Modell durch eine Schicht (3), die homogen mit Wärmesenken belegt ist, dargestellt. Die Wärmequellen (2) und die Wärmesenken (3) haben dabei betragsmäßig den gleichen Wert, so daß im Modell ebenso wie bei den Experimenten ein thermisch volleingelaufener Zustand mit  $\partial\bar{T}/\partial x = 0$  realisiert wird. Die gesamte auf der beheizten Seite eingespeiste Wärme strömt durch den Spalt zur gekühlten Seite und wird dort vollständig aus der Luftströmung abgezogen. Aus numerischen Gründen wird zwischen dem Strömungsgebiet und den mit Wärmequellen bzw. -senken belegten Schichten eine dünne Zwischenschicht (4) angeordnet.

Folgende Randbedingungen werden bei den Modellrechnungen benutzt:

- i. Die Linien (a - a) und (b - b) sind Symmetrielinien (s. Abb. 6.9a), d.h. alle Gradienten senkrecht zu diesen Linien sind gleich *Null*.
- ii. Es wird keine Wärme von der Luftströmung an das Kreisrohr abgegeben, d.h. die Kreisrohroberfläche ist adiabatisch.
- iii. Die Temperatur auf der äußeren Oberfläche der Heizplatte (c - c) ist konstant und wird entsprechend der von SEALE [7] gemessenen Heizplattentemperatur als Randwert vorgegeben.
- iv. Es wird keine Wärme über die äußeren Oberflächen der Heizplatte (c - c) und der gekühlten Wand (d - d) transportiert.

Alle Stoffwerte werden als gebietsgemittelte Größen für die fünf Hauptgebiete (Strömungsgebiet (1), Heizplatte (2), gekühlte Wand (3) und zweimal die Zwischenschicht (4)) ermittelt und gehen als Eingangsgrößen in die Rechnungen ein. Sollte die Abweichung zwischen den erwarteten mittleren Temperaturen, die für die Kalkulation der Stoffwerte benutzt werden, und den später errechneten Temperaturmittelwerten zu groß sein, ist eine zweite Rechnung mit entsprechend korrigierten Stoffwerten nötig. Als Eingangsdaten für eine Rechnung sind neben den Geometriedaten anzugeben:

- i. die REYNOLDS-Zahl im betrachteten Ausschnitt  $Re$ ,
- ii. die Wärmestromdichte  $q''_{input}$ , bzw. die daraus ermittelten Wärmequell- und Wärmesenkendichten  $q'''_{input}$  und  $q'''_{output} = -q'''_{input}$  (gleiche Querschnittsflächen der beheizten und der gekühlten Schicht (2) und (3)),
- iii. die mittleren Wandtemperaturen  $T_{w,m,h}$  und  $T_{w,m,k}$ ,
- iv. die mittlere Fluidtemperatur  $\bar{T}_{m,b}$  und
- v. die Stoffwerte.

Die mittlere Fluidtemperatur  $\bar{T}_{m,b}$  und die mittlere Wandtemperatur der gekühlten Wand  $T_{w,m,k}$  gehen nur in die Stoffwerteberechnung ein, und sind keine direkten Eingangsdaten der FEM-Rechnung. Alle Daten werden entsprechend den in Tabelle VI.2 dargestellten experimentellen Werten von SEALE [7] in die Rechnungen eingebracht.

Das finite Elemente-Netz (s. Abb. 6.9b), das für die numerische Simulation der Versuche von SEALE [7] verwendet wird, besteht aus 5916 Dreieckselementen mit insgesamt 12345 Knoten (6 Knoten je Element). Die Rechenzeit beläuft sich je Fall auf ca. 14500 *CPU – Sekunden* an der IBM 4381 des Regionalen Rechenzentrums für Niedersachsen / Universität Hannover, wobei diese Zeit auch Graphikauswertungen u.ä. umfasst. Die eigentliche FEM-Rechenzeit (Netzgeneration, Lösung der axialen Impulsbilanz und der Energiebilanz nach dem Variationsprinzip) beträgt ca. 12000 *CPU – Sekunden*.

#### 6.1.2.2. ERGEBNISSE DER NUMERISCHEN SIMULATION

Verwendet man den FEM-Code VANTACY-II zur numerischen Simulation, so erhält man als Ergebnisse einer Rechnung die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder  $\bar{u}(y,z)$  und  $\bar{T}(y,z)$ , aus denen dann die örtlichen Wandtemperaturen  $T_w$ , Wandwärmeströme  $q''_w$  und Wandschubspannungen  $\tau_w$ , sowie die Mittelwerte dieser Größen, die mittleren Unterkanalgeschwindigkeiten und -temperaturen  $\bar{u}_{m,i}$  und  $\bar{T}_{m,i}$  und integrale Größen wie die STANTON-Zahl im Spalt  $St_g$ , der hypothetische Quermassenstrom durch den Spalt 1 2 pro axialer Längeneinheit  $w'_{12}$  und der Druckverlustkoeffizient  $\lambda_D$  abgeleitet werden können. Im folgenden sollen diese Ergebnisse der numerischen Simulation, die in Tabelle VI.3 zusammengefasst sind, dargestellt werden.

### 6.1.2.2.1. ERRECHNETE GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNGEN, WANDSCHUBSPANNUNGSVERLÄUFE UND DRUCKVERLUSTKOEFFIZIENTEN

Die mit dem FEM-Code VANTACY-II errechneten Geschwindigkeitsverteilungen sind in den Abbildungen 6.10a bis 6.10g in Form von Isotachen dargestellt. Wie zu erkennen ist, sind die errechneten Geschwindigkeitsverteilungen symmetrisch zum Spalt 1 2. Diese Symmetrie ist damit zu begründen, daß im Verfahren VANTACY-II alle Stoffwerte ortsunabhängig sind, und somit temperaturabhängige Dichtedifferenzen bei der Modellrechnung nicht zum Tragen kommen.

Die dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen sind alle nahezu gleich. An Hand der in Tabelle VI.3a zusammengefaßten Daten läßt sich ein schwacher REYNOLDS-Zahl-Einfluß feststellen, und zwar der Art, daß die Geschwindigkeitsverteilungen mit zunehmender REYNOLDS-Zahl homogener werden. Die relativen maximalen Geschwindigkeiten sinken monoton von  $\bar{u}_{max}/\bar{u}_{m,b} = 1.183$  für  $Re = 46,154$  auf  $\bar{u}_{max}/\bar{u}_{m,b} = 1.169$  für  $Re = 91,490$ .

Aus den errechneten Geschwindigkeitsverteilungen sind an den benetzten Wänden die Wandschubspannungen abgeleitet worden. Auch hier zeigt sich die Symmetrie zum Spalt 1 2, so daß die in Tabelle VI.3a dargestellten Werte für die mittlere Wandschubspannung der beheizten und der gekühlten Kanalwand  $\tau_{w,m,h+k} = (\tau_{w,m,h} + \tau_{w,m,k})/2$  identisch mit den entsprechenden Mittelwerten jeder der beiden Kanalwände sind, also  $\tau_{w,m,h+k} = \tau_{w,m,h} = \tau_{w,m,k}$ . Die errechneten Wandschubspannungsverteilungen  $\tau_w/\tau_{w,m,i}$  an den Kanalwänden (s. Abb. 6.11a für den Fall 5B/6.3) steigen monoton vom Wandspalt ( $z = 0$ , s. Abb. 6.9a) bis zur Symmetrielinie ( $a - a$ ) an, und stehen in prinzipiellem Einklang mit den Ergebnissen der Literatur (vgl. z.B. REHME [113]). In Abb. 6.11b, die die Wandschubspannungsverteilung am Kreisrohr für den Fall 5B/6.3 darstellt, erkennt man deutlich numerisch verursachte Schwankungen um einen mittleren Kurvenverlauf. Abgesehen von diesen Schwankungen, zeigt aber auch dieser Verlauf eine qualitative Übereinstimmung mit der Literatur mit relativen Minima im Bereich der Spalte ( $\phi = 0^\circ, 90^\circ$  und  $180^\circ$ ) und relativen Maxima im Bereich der größten Profillängen ( $\phi \approx 45^\circ$  und  $135^\circ$ ).

Der Druckverlustkoeffizient  $\lambda_D$  ist aus den mittleren Wandschubspannungen an den benetzten Wänden ermittelt und in Abb. 6.12 im Vergleich mit der BLASIUS'schen Beziehung (4.31) über der REYNOLDS-Zahl aufgetragen worden. Man erkennt, daß die Abweichungen der mit dem Verfahren VANTACY-II errechneten Daten von der BLASIUS'schen Beziehung (4.31) recht gering sind. Da bei der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7] ein relativer Stabmittenabstand  $P/D = 1.10$  vorliegt, ist diese Übereinstimmung nicht verwunderlich. Die in der Literatur dargestellten Daten für den Druckverlustkoeffizienten (s. REHME [114]) zeigen, daß speziell für enge Stabgitter mit einem relativen Stabmittenabstand  $P/D \approx 1.1$  der Druckverlustkoeffizient des Stabbündels mit dem eines Kreisrohres gleichen hydraulischen Durchmessers übereinstimmt.

## 6.1.2.2.2. ERRECHNETE TEMPERATURVERTEILUNGEN UND WANDWÄRMESTROMVERLÄUFE

Die Abbildungen 6.13a bis 6.13g zeigen die mit dem FEM-Code VANTACY-II errechneten Temperaturverläufe in Isothermendarstellung. Die Temperaturverteilungen sind spiegelsymmetrisch zum Spalt 1 2, da die gesamte von der Heizplatte zugeführte Wärme an der gekühlten Kanalwand abgezogen wird und das Geschwindigkeitsfeld symmetrisch ist. Direkt im Spalt liegt dann auch die mittlere Fluidtemperatur im gesamten untersuchten Bündelquerschnitt als örtliche Temperatur vor. Vergleicht man die Fälle 5B/4.7, 5B/6.3 und 5B/8.1 (s. Abb. 6.13b, 6.13d und 6.13f), bei denen die mittleren Fluidtemperaturen  $\bar{T}_{m,b}$  annähernd gleich sind ( $\bar{T}_{m,b} \approx 46^\circ C$ ), so erkennt man, daß die Temperaturfelder im Bereich um den Spalt 1 2 nahezu gleich sind. In den Bereichen nahe den Kanalwänden wird die Temperaturverteilung mit steigender REYNOLDS-Zahl etwas flacher, jedoch sind auch hier die Unterschiede zwischen den einzelnen Fällen recht gering.

Das wandsenkrechte normierte Temperaturprofil entlang der Symmetrielinie ( $a - a$ ) von der beheizten zur gekühlten Kanalwand ist für alle simulierten Fälle gleich. Abb. 6.14 zeigt dieses Profil, wobei die angesprochene Spiegelsymmetrie und der flache Temperaturverlauf in den Bereichen um die Kanalwände (außer direkt an den Kanalwänden) nochmals deutlich wird. Auf den Vergleich mit den ebenfalls eingetragenen experimentellen Daten von SEALE [7] für den Fall 5B/6.3 wird im Abschnitt 6.1.3.2. eingegangen.

Für den Fall 5B/6.3 sind in den Abbildungen 6.15a bis 6.15c die Wandtemperaturverläufe an den benetzten Wänden dargestellt. Wie aus Abb. 6.15a (Heizplatte) und 6.15b (gekühlte Kanalwand) ersichtlich ist, sind die Wandtemperaturvariationen an den Kanalwänden sehr gering, während am Kreisrohr (s. Abb. 6.15c) eine Differenz zwischen der maximalen und der minimalen Wandtemperatur von ca. 34 K vorliegt.

Aus den Temperaturfeldern sind die Wandwärmestromverteilungen an der Heizplatte, der gekühlten Kanalwand und am Kreisrohr ermittelt worden. Am Kreisrohr ergibt sich der Wandwärmestrom entsprechend den eingebrachten Randbedingungen zu *Null*. Die Verteilungen  $q_w''/q_{w,m}''$  an der Heizplatte und an der gekühlten Wand sind gleich. Man erkennt aus Abb. 6.16, daß eine Variation in der Wandwärmestromverteilung von  $\pm 20\%$  entlang einer Kanalwand vorliegt, obwohl z.B. an der Heizplatte die Temperatur entlang der äußeren Oberfläche ( $c - c$ ) konstant und die Wärmequellenverteilung in der Heizplatte homogen ist. Es zeigt sich an dieser Stelle die starke Verknüpfung des turbulenten Impuls- und des turbulenten Wärmetransportes.

## 6.1.2.2.3. ERRECHNETE MIXING-DATEN

Die bei der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II ermittelten Mixing-Daten für die 5-Strab-Anordnung von SEALE [7] sind in Tabelle VI.3c in Form von STANTON-Zahlen im Spalt  $St_g$  und hypothetischen Quermassenströmen je axialer Längeneinheit  $w'_{12}$  zusammengestellt. Der Wärmestrom senkrecht zum Spalt je axialer Längeneinheit  $q'_{12}$  ist dabei nach Gl. (4.34) aus den Daten der errechneten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder numerisch ermittelt worden. Zwischen den so errechneten Wärmeströmen je axialer Längeneinheit  $q'_{12}$  und den aus den vorgegebenen Wärmequellendichten errechenbaren Wärmeströmen je axialer Längeneinheit  $q'_{input}$  treten dabei nur Differenzen  $< 1\%$  auf, was für die Qualität des numerischen Verfahrens spricht. Wie aus

Abb. 6.17 ersichtlich ist, können alle numerisch ermittelten STANTON-Zahlen im Spalt mit einer Korrelation

$$St_g = a \cdot Re^{-0.1} \quad (6.6)$$

mit

$$a = 2.925 \cdot 10^{-2} \quad (6.6a)$$

ausgerückt werden, womit die errechneten Ergebnisse die hydraulisch begründbare Abhängigkeit

$$St_g \sim Re^{-0.1}$$

wiedergeben.

### 6.1.3. VERGLEICH DER EXPERIMENTELLEN UND DER NUMERISCHEN ERGEBNISSE

#### 6.1.3.1. VERGLEICH DER GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNGEN, WANDSCHUBSPANNUNGEN UND DRUCKVERLUSTKOEFFIZIENTEN

Der Vergleich der in den Tabellen VI.2a und VI.3a zusammengestellten Daten zeigt, daß

- i. die vorgegebene REYNOLDS-Zahl  $Re$  bei der numerischen Simulation mit einer Abweichung  $< \pm 1\%$  erreicht wird.
- ii. die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten  $\bar{u}_{m,b}$  bei der numerischen Simulation um 3 – 9% kleiner sind als im Experiment, was mit Abweichungen in den Stoffwerten begründet werden kann.
- iii. die relativen maximalen Strömungsgeschwindigkeiten  $\bar{u}_{max}/\bar{u}_{m,b}$  bei der numerischen Simulation monoton mit steigender REYNOLDS-Zahl sinken und dabei grundsätzlich größer sind als die experimentell ermittelten Werte, die nur eine grob erkennbare REYNOLDS-Zahl-Abhängigkeit aufweisen.
- iv. die mittleren Wandschubspannungen an der beheizten und der gekühlten Kanalwand  $\tau_{w,m,h+k}$  der numerischen Simulation mit einer Abweichung von  $-9\%$  bis  $+1\%$  die experimentellen Daten wiedergeben.

Betrachtet man die Abbildungen 6.6a bis 6.6g und 6.10a bis 6.10g, so zeigt sich, daß die Unterschiede zwischen Experiment und numerischer Simulation nur gering sind, obwohl das Modell im Gegensatz zum Experiment mit einem inkompressiblen Fluid rechnet. Es fällt jedoch auf, daß die experimentell ermittelten Geschwindigkeitsverteilungen insgesamt geringfügig homogener sind als die mit der numerischen Simulation errechneten. Der Grund hierfür ist in der Modellannahme eines inkompressiblen Fluides zu suchen.

Die experimentell ermittelten Druckverlustkoeffizienten (s. SEALE [7], Anhang A2.9, Table A2.13) sind laut SEALE [7], Abschnitt 2.8.7, um ca. 30% zu niedrig. Die mit dem FEM-Code VANTACY-II ermittelten Werte bestätigen diese von SEALE gemachte Fehlerangabe.

### 6.1.3.2. VERGLEICH DER TEMPERATURVERTEILUNGEN

Die Daten in Tabellen VI.2b und VI.3b zeigen, daß die bei der numerischen Simulation errechneten Temperaturen grundsätzlich über den experimentell ermittelten Temperaturen liegen (die Wandtemperaturen an der beheizten Wand müssen hier ausgenommen werden, da sie vorgegeben sind). Die Temperaturdifferenz zwischen der beheizten und der gekühlten Kanalwand beträgt bei der Simulation nur 82–97% der experimentell ermittelten Temperaturdifferenz, wobei die Abweichungen nicht von der eingebrachten Wärme oder dem Massenstrom im Strömungskanal abhängig sind. Die errechneten Temperaturfelder sind demnach prinzipiell homogener als die gemessenen, wie auch der Vergleich der Abbildungen 6.7a bis 6.7g und 6.13a bis 6.13g zeigt. Auch hier wird deutlich, daß die auftretenden Unterschiede teilweise dadurch verursacht werden, daß das Verfahren VANTACY-II mit ortsunabhängigen Stoffwerten rechnet und so ein zum Spalt 1 2 spiegelsymmetrisches Temperaturfeld ermittelt, welches im Experiment nicht vorhanden ist. Detailliert zeigt dies Abb. 6.14, in der neben dem errechneten wandsenkrechten Temperaturprofil auch die Meßwerte von SEALE [7] für den Fall 5B/6.3 eingetragen sind. Man erkennt das zum Spalt 1 2 asymmetrische Verhalten der experimentell ermittelten Werte und kann ablesen, daß die errechneten Werte nur maximal um 10% vom Experiment abweichen.

Die dargestellten Abweichungen lassen sich aber nicht ausschließlich durch die verwendete Modellannahme eines inkompressiblen Fluides begründen. Vielmehr muß als Hauptursache für die Unterschiede zwischen den errechneten und den gemessenen Temperaturfeldern der im Verfahren VANTACY-II benutzte Ansatz zur Beschreibung der turbulenten PRANDTL-Zahl angesehen werden. Da im vorliegenden Fall der Wärmestrom aufgeprägt ist, ergibt sich für die Temperaturgradienten  $\partial\bar{T}/\partial x_k$  die Abhängigkeit

$$\partial\bar{T}/\partial x_k \sim Pr_{tur} \quad (6.7)$$

Eine geringfügige Änderung der turbulenten PRANDTL-Zahl könnte die auftretenden Unterschiede im Temperaturfeld minimieren, wobei das errechnete Temperaturfeld stark sensitiv auf Änderungen der turbulenten PRANDTL-Zahl reagiert. Wie in Abschnitt 4.1. gezeigt worden ist, ist besonders die Formulierung eines für enge Stabgitter gültigen Ansatzes für die turbulente PRANDTL-Zahl noch nicht geschehen, so daß auf diesem Gebiet noch experimentelle und theoretische Arbeiten dringend durchgeführt werden müssen.

### 6.1.3.3. VERGLEICH DER MIXING-DATEN

In Tabelle VI.3c sind die von SEALE [7] gemessenen und die bei der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II errechneten STANTON-Zahlen im Spalt zusammengefaßt. Der Vergleich zeigt, daß die Simulation die Experimente sehr gut wiedergibt (s. auch Abb. 6.17). Alle numerisch ermittelten Daten liegen in einem Bereich von 94% bis 104% der gemessenen Werte, wobei noch berücksichtigt werden kann, daß SEALE [7] seine Daten für die STANTON-Zahl im Spalt mit einem experimentellen Fehler von  $\pm 11\%$  angibt (s. Abschnitt 6.1.1.2.3.).

Mit einem FDM-Code hat SEALE [7] unter Verwendung verschiedener  $k \sim \epsilon$ -Modelle den Versuch unternommen, seine Experimente numerisch nachzubilden. Obwohl SEALE verschiedene Modelle

und Verteilungen zur Darstellung der anisotropen Turbulenz anwendet, liegen die von ihm errechneten STANTON-Zahlen im Spalt für die 5-Stab-Anordnung bei maximal 76% des entsprechenden, experimentell ermittelten Wertes. Bei Verwendung eines Modells für isotrope Turbulenz kommt SEALE [7] auf nur 8% des gemessenen Wertes.

An dieser Stelle zeigt sich die Güte und Bedeutung des in dieser Schrift vorgestellten Verfahrens VANTACY-II, das die starke Anisotropie der Turbulenz bei Strömungen durch enge Stabgitter sehr gut wiedergibt.

#### 6.1.3.4. SCHLUSSFOLGERUNGEN AUS DEM DURCHGEFÜHRTEN VERGLEICH

Der durchgeführte Vergleich zwischen den experimentell ermittelten Daten von SEALE [7] für die 5-Stab-Anordnung und den Ergebnissen der numerischen Simulation dieser Versuche mit dem FEM-Code VANTACY-II kann wie folgt zusammengefaßt werden:

- i. Die Ergebnisse der numerischen Simulation stimmen mit den Experimenten überein. Das gilt sowohl für die Darstellung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes als auch mit Einschränkungen für die Darstellung des turbulenten Temperaturfeldes, welches stark abhängig vom verwendeten Ansatz für die turbulente PRANDTL-Zahl ist. Die Ergebnisse der numerischen Simulation mit VANTACY-II sind dabei wesentlich besser als die der von SEALE [7] selbst durchgeführten Simulation.
- ii. Das neue zwei-dimensionale Verfahren VANTACY-II ist durch den durchgeführten Vergleich — im Bereich der Versuchsparameter — validiert worden.
- iii. Die numerische Simulation ergänzt die experimentelle Arbeit SEALE's [7] und hilft, Unsicherheiten zu klären (z.B. Druckverlustkoeffizienten, Wandschubspannungs- und Wandwärmestromverläufe).
- iv. Das Verfahren VANTACY-II stellt eine wesentliche qualitative Verbesserung bei der Modellierung turbulenter Strömungen durch enge Stabgitter gegenüber den bisher in der Literatur veröffentlichten Modelle dar.

#### 6.2. ERGEBNISSE FÜR ENGE 7-STABGITTER

Der FEM-Code VANTACY-II kann, wie im vorangegangenen Abschnitt 6.1. gezeigt worden ist, die turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in engen Stabgittern darstellen. In diesem Abschnitt 6.2. soll gezeigt werden, daß mit dem FEM-Code VANTACY-II die Verhältnisse in engen 7-Stabgittern detailliert untersucht werden können, um auf spezielle Fragestellungen Antworten geben zu können. Dazu werden einige Ergebnisse von numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II zum Einfluß der REYNOLDS-Zahl, der Fluideigenschaften, der Bündelrandgestaltung und der Verteilung der Wärmequellen im Bündelquerschnitt auf die turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in engen 7-Stabbündeln dargestellt und diskutiert werden. Es handelt sich dabei nicht um detaillierte Parameterstudien, sondern um eine exemplarische Darstellung von Einsatzmöglichkeiten des FEM-Codes VANTACY-II.

### 6.2.1. EINFLUSS DER REYNOLDS-ZAHL

Der REYNOLDS-Zahl-Einfluß auf die turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen wird am Beispiel eines enggepackten 7-Stabbündels mit einem relativen Stabmittenabstand  $P/D = 1.147$  und einem relativen Wandabstand  $W/D = 1.149$  untersucht. Bei dem 7-Stabbündel handelt es sich um die numerische Nachbildung des im KRISTA-Versuchsstand des Institutes für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten Bündels mit indirekt elektrisch beheizten Brennstabsimulatoren [115]. Die Versuche dienen der Bestimmung der kritischen Heizflächenbelastung, wobei als Modellfluid das Kältemittel Frigen-R12 verwendet wird. Der Aufbau eines Heizstabes (Brennstabsimulator) ist aus Abb. 6.18 ersichtlich. Auf einem Magnesiumoxidkern ist eine Heizwendel aus NiCr-Stahl aufgebracht, die zur elektrischen Isolation mit einer Bornitridschicht ummantelt ist. Das gesamte Heizelement steckt in einem Stahlrohr (1.4301) mit einem Außendurchmesser von  $D = d_{H,a} = 9.5 \text{ mm}$  (Geometriedaten des KRISTA-7-Stabbündels s. Tabelle VI.4).

Zur numerischen Berechnung mit dem FEM-Code VANTACY-II ist ein  $1/12$ -Symmetrieausschnitt des Bündels diskretisiert worden. Das finite Elemente-Netz (s. Abb. 6.19) besteht aus 6111 Elementen mit 12516 Knoten bzw. 6415 Elementen mit 13128 Knoten (Fall KR15FG). Aus numerischen Gründen weicht die Modellgeometrie in zwei Punkten von der Originalgeometrie des KRISTA-7-Stabbündels ab:

- i. Im Zentrum der Magnesiumoxidkerne werden Löcher mit einem Durchmesser von  $d_{K,i} = 0.1 \cdot D = 0.95 \text{ mm}$  eingefügt.
- ii. Die Ecken des Bündelkastens werden abgerundet.

Im Rahmen der numerischen Untersuchungen des REYNOLDS-Zahl-Einflusses auf die turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in einem engen 7-Stabbündel sind REYNOLDS-Zahlen im betrachteten Bündelquerschnitt im Bereich  $2 \cdot 10^4 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$  realisiert worden, wobei dieser Bereich durch Variationen der Massenstromdichte und der mittleren Fluidtemperatur — und damit der Stoffwerte des Fluides — ausgefüllt worden ist. Ein mit diesen Untersuchungen einhergehender Vergleich mit experimentellen Ergebnissen hat Variationen der Bündelheizleistung  $\dot{Q}$  und der mittleren Fluidtemperatur  $\bar{T}_{m,b}$  erforderlich gemacht. Entsprechend den experimentellen Untersuchungen ist als Strömungsfluid Frigen-R12 verwendet worden. Die Hauptdaten der durchgeführten numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II sind in Tabelle VI.5a zusammengestellt.

#### 6.2.1.1. EINFLUSS DER REYNOLDS-ZAHL AUF DAS TURBULENTE GESCHWINDIGKEITSFELD

Wie aus Tabelle VI.5a ersichtlich ist, lassen sich die Fälle KR15FH, KR15FF, KR15FE und KR15FG gut miteinander vergleichen, da die mittleren Fluidtemperaturen  $\bar{T}_{m,b}$  in allen Fällen bei ca.  $15^\circ\text{C}$  liegen. Die Abbildungen 6.20a bis 6.20d zeigen für diese Fälle die errechneten Geschwindigkeitsverteilungen in Isotachendarstellungen. An Hand dieser Abbildungen und der in Tabelle VI.5b dargestellten hydraulischen Ergebnisse läßt sich der REYNOLDS-Zahl-Einfluß auf das turbulente Geschwindigkeitsfeld wie folgt charakterisieren:

Mit zunehmender REYNOLDS-Zahl wird die Geschwindigkeitsverteilung homogener. Dabei werden die Geschwindigkeitsunterschiede innerhalb eines Unterkanals mit steigender REYNOLDS-Zahl geringer. Der Grund für diese Vereinheitlichung des Geschwindigkeitsfeldes ist das starke Anwachsen des turbulenten Impulstransportes, wie aus den spaltgemittelten Werten für die wandparallele Wirbelviskosität im Spalt zwischen einem Zentral- und einem Wandkanal  $\overline{\epsilon_{\tau,\phi}}$  in Tabelle VI.5b abgelesen werden kann.

#### 6.2.1.2. EINFLUSS DER REYNOLDS-ZAHL AUF DAS TURBULENTE TEMPERATURFELD

Die Abbildungen 6.21a bis 6.21c zeigen für die Fälle KR15FH, KR15FF und KR15FG die errechneten Temperaturverteilungen in Isothermenform. Der Vergleich zeigt, daß die Temperaturfelder mit zunehmender REYNOLDS-Zahl wesentlich homogener werden. Aus Tabelle VI.5c kann entnommen werden, daß die maximale Wandtemperatur, die am Zentralstab im Spalt zwischen zwei benachbarten Zentralkanälen auftritt, im Fall KR15FH mit  $Re = 19,998$  gleich  $T_{w,max} = 131.69^\circ C$  ist und im Fall KR15FG mit  $Re = 198,795$  auf  $T_{w,max} = 35.82^\circ C$  abgesunken ist. Diese Reduktion der Temperaturdifferenzen im Bündelquerschnitt wird durch den stark ansteigenden turbulenten Impulstransport — und den damit einhergehenden turbulenten Wärmetransport — verursacht. Bei der Betrachtung der örtlichen Wandtemperaturen zeigt sich deutlich der Vorteil eines *distributed parameter* Verfahrens. Für den Fall KR15FH würde eine Unterkanalanalyse auf Grund der mittleren Fluidtemperatur im Zentralkanal  $\bar{T}_{m,1} = 58.82^\circ$ , die deutlich unter der Siedetemperatur  $T' (p = 23.00 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2) \approx 80^\circ$  liegt, einphasige Verhältnisse im Bündelquerschnitt ermitteln. Mit dem *distributed parameter* Verfahren VANTACY-II werden die örtlichen Temperaturen bestimmt und man kann an Hand der Ergebnisse erkennen, daß ein zweiphasiger Zustand vorliegen muß, wenngleich dieser nicht vom Verfahren VANTACY-II nachgebildet wird.

Aus den Isothermendarstellungen läßt sich auch sehr gut die asymmetrische Temperaturverteilung speziell in den Wandstäben ablesen, wobei auch diese Asymmetrie mit steigender REYNOLDS-Zahl geringer wird. Aus dem Abstand der Isothermen kann man einen qualitativen Überblick über die Wandwärmestromdichteverteilungen erhalten, was gerade für die Vorbereitung und Interpretation der Versuche am KRISTA-Versuchsstand von Bedeutung ist.

Aus den numerisch ermittelten Geschwindigkeits- und Temperaturfeldern sind die in Tabelle VI.5d dargestellten Mixing-Daten für das turbulente Mixing zwischen einem Zentral- und einem Wandkanal ermittelt worden. Die errechneten STANTON-Zahlen im Spalt lassen sich mit der Korrelation

$$St_g = a \cdot Re^{-0.1} \quad (6.8)$$

mit

$$a = 9.327 \cdot 10^{-3} \quad (6.8a)$$

beschreiben und entsprechen somit in ihrer REYNOLDS-Zahl-Abhängigkeit dem oben Gesagten (s. Abschnitt 4.2.). Ein Vergleich mit Literaturwerten für den Koeffizienten  $a$  kann nicht vorgenommen werden, da für ein 7-Stabbündel oder eine ähnliche Anordnung mit einem Dreiecks- und einem Viereckswandkanal keine Daten vorliegen. Der Wichtungsfaktor  $Y$  ist unabhängig von der REYNOLDS-Zahl, was auch die Beziehung (4.39) von INGESSON & HEDBERG [99] ausdrückt.

### 6.2.2. EINFLUSS DER FLUIDEIGENSCHAFTEN

Die im Abschnitt 6.2.1. dargestellten Untersuchungen sind mit dem Kältemittel Frigen-R12 als Modellfluid durchgeführt worden. Für zwei der numerisch untersuchten Fälle (KR15FC und KR15FD) sind die numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II auch für Strömungen durch die gleiche Geometrie mit dem Fluid Wasser durchgeführt worden. Dabei ist die REYNOLDS-Zahl für den jeweiligen Wasser-Fall gleich der des entsprechenden Frigen-Falls angesetzt worden. Der Systemdruck, die Bündelleistung und die Dampfqualität werden in Anlehnung an das AHMAD-Gesetz (vgl. [116]) mit den Umrechnungsfaktoren nach MÜLLER-MENZEL [117] vom Modellfluid Frigen-R12 auf das Fluid Wasser umgerechnet, so daß sich die in Tabelle VI.6a dargestellten Eingangsdaten für die Rechnungen ergeben<sup>17)</sup>.

Ein Vergleich der hydraulischen und thermischen Ergebnisse der Frigen- und der Wasser-Fälle wird an dieser Stelle nicht durchgeführt, da die hydraulischen Ergebnisse identisch sind (für relative Größen) und ein Vergleich der Temperaturfelder auf Grund des Fehlens einer geeigneten Bezugsgröße nur sehr schwer durchzuführen ist. Der Vergleich der errechneten Mixing-Daten ist jedoch durch den Vergleich dimensionsloser Kennzahlen — wie der STANTON-Zahl im Spalt — möglich. Der Vergleich der in den Tabellen VI.5d und VI.6b dargestellten Mixing-Daten zeigt, daß die errechneten STANTON-Zahlen im Spalt für einen Frigen- und den entsprechenden Wasser-Fall nahezu gleich sind, obwohl in den vorliegenden Fällen die molekulare PRANDTL-Zahl für Frigen-R12 um einen Faktor 3 größer ist als die für Wasser. Die turbulenten PRANDTL-Zahlen, die mit dem Ansatz (4.29) ermittelt werden, differieren jedoch nur um einige Promille, so daß die beobachteten Übereinstimmungen plausibel sind.

Es kann also gefolgert werden, daß sich die Mixing-Daten für Versuche in gleicher Geometrie mit verschiedenen Fluiden, die molekulare PRANDTL-Zahlen um 1 aufweisen, im wesentlichen gleich seien und nur minimal voneinander abweichen werden.

### 6.2.3. EINFLUSS DER BÜNDELRANDGESTALTUNG

Die Durchsatzverteilung in einem Stabbündel, und hier speziell in einem 7-Stabbündel, wird wesentlich durch das Verhältnis der hydraulischen Durchmesser der Wand- und Zentralkanäle bestimmt. Im folgenden sollen die turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder dreier im Bündelrandbereich verschieden ausgebildeter regelmäßiger 7-Stabbündel mit einem relativen Stabmittenabstand  $P/D = 1.10$  mit dem FEM-Code VANTACY-II dargestellt werden (s. auch [118]). Die einzelnen Fälle unterscheiden sich geometrisch bzw. hydraulisch durch Größe und Benetzung der Wandkanäle. Die ersten beiden Konfigurationen sehen einen das Bündel umhüllenden hexagonalen Kasten (D) vor, wobei bei der Konfiguration D0.5 der Wandspalt 50% des Spaltes zwischen zwei benachbarten Stäben ausmacht ( $W - D = (P - D) / 2$ , d.h.  $W/D = 1.05$ ) und bei der Konfiguration D1.0 der Wandspalt die gleiche Größe wie der Spalt zwischen zwei benachbarten Stäben

<sup>17)</sup>Die Massenstromdichte wird nicht — wie im AHMAD-Gesetz vorgesehen — mit einem Umrechnungsfaktor vom Modellfluid Frigen-R12 auf das Fluid Wasser umgerechnet, sondern so ermittelt, daß für beide Fluide gleiche REYNOLDS-Zahlen vorliegen. Der Vergleich der Ergebnisse kann dann für gleiche hydraulische Verhältnisse vorgenommen werden.

hat ( $W - D = P - D$ , d.h.  $W/D = 1.10$ ). Bei der dritten Anordnung ist kein umhüllender Kasten vorgesehen. An Stelle des Kastens wird hier eine Symmetrielinie (S) definiert, so daß prinzipiell eine unendliche Anordnung von 7-Stabbündeln vorliegt. Der Spalt zwischen zwei benachbarten Wandstäben zweier 7-Stabbündel ist dabei doppelt so groß wie der Spalt zwischen zwei benachbarten Stäben eines 7-Stabbündels (Fall S1.0), so daß die Bündelanordnungen der Fälle D1.0 und S1.0 gleich sind, jedoch im Fall S1.0 die benetzende Kastenwand am Bündelrand fehlt.

Die Bündelstäbe von 10 mm Außendurchmesser bestehen aus Zirkaloy-4 mit einer Wandstärke von 0.5 mm. Der Brennstab enthält Uranradioxid, das von einem 0.05 mm starken Helium-Gasspalt umgeben ist. Für die in Abschnitt 6.2.4. dargestellten Untersuchungen zum Einfluß der Wärmequellenverteilung im Bündelquerschnitt, die an den gleichen Bündeln vorgenommen wird, sind drei Beheizungsvarianten vorgesehen worden, die sich nur durch die Anzahl der beheizten Stäbe (7, 1 oder 6) unterscheiden. Unbeheizte Stäbe sind dabei vollständig mit Helium gefüllt. Als Fluid ist Wasser bei einem Systemdruck von  $150 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  angenommen worden.

#### 6.2.3.1. EINFLUSS DER BÜNDELRANDGESTALTUNG AUF DAS TURBULENTE GESCHWINDIGKEITS-FELD

Die numerischen Untersuchungen sind für REYNOLDS-Zahlen im Bündel  $Re = 10^5$  durchgeführt worden. Wie die Abbildungen 6.22a bis 6.22c deutlich zeigen, ist die Bündelrandgestaltung von erheblichem Einfluß auf die errechneten Geschwindigkeitsverteilungen. Während die Geschwindigkeitsverteilung für den Fall kleiner Wandspalte (Fall D0.5) deutliche absolute Maxima in den Zentralkanälen aufweist (s. Abb. 6.22a), bewirkt die Verdopplung der Wandspalte (Fall D1.0) eine Vergleichmäßigung der Geschwindigkeitsverteilung (s. Abb. 6.22b). Für den Fall ohne umhüllenden Kasten (Fall S1.0) kommt es dann zu einer schüsselartigen Aufwölbung, wobei die absoluten Geschwindigkeitsmaxima nun klar erkennbar in den Zentren der Wandkanäle liegen.

Tendenziell sind die in den Abbildungen 6.22a bis 6.22c dargestellten Ergebnisse mit den in Tabelle VI.7 zusammengestellten Daten leicht nachvollziehbar. Die Strömungsflächen sowie die Benetzung — also auch die hydraulischen Durchmesser — der Zentralkanäle sind für alle drei Bündel gleich. Dagegen ändern sich die Wandkanalflächen beim Übergang vom Fall D0.5 zum Fall D1.0 bzw. S1.0 durch die Verdopplung des Abstandes zwischen Wandstab und Kastenwand bzw. Symmetrielinie. Von noch größerer Bedeutung für die Größe des hydraulischen Durchmessers der Wandkanäle ist jedoch die Tatsache, daß im Fall S1.0 auf Grund des Fehlens der benetzenden Kastenwand eine Benetzung nur an den Wandstäben erfolgt. Wegen des hohen anisotropen Impulstransportes sind die örtlichen Geschwindigkeitsverteilungen in den Zentralkanälen sehr flach, so daß die mittlere Geschwindigkeit in den Innenspalten zwischen zwei Zentralkanälen nur um 10% unter dem Unterkanalmittelwert liegt. Der Randeinfluß bewirkt nun, daß sich die Volumenströme durch den Bereich der Zentralkanäle von 40% des Bündelvolumenstromes für den Fall D0.5 auf 20% für den Fall S1.0 reduzieren. Vergleicht man die Zahlenwerte für das Verhältnis des Volumenstroms durch einen Wandkanal zu dem durch einen Zentralkanal, so erkennt man, daß für den Fall D0.5  $4/3$  des Zentralkanalvolumenstroms durch den Wandkanal fließen. Für den Fall D1.0 steigt dieses Verhältnis schon auf den Wert 2 an, und für den Fall S1.0 wird der Wert 3 erreicht.

## 6.2.3.2. EINFLUSS DER BÜNDELRANDGESTALTUNG AUF DAS TURBULENTE TEMPERATURFELD

Die dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen der untersuchten Fälle wirken auf die Verteilungen der Fluid- und Stabwand- bzw. Kastenwandtemperaturen zurück. Um vergleichbare Verhältnisse zu erhalten, sind für die thermischen Berechnungen die Randbedingungen für die Brennstabwärmequellen wie folgt festgelegt worden:

- i. Die Temperatur im Zentrum des Brennstoffes beträgt  $1400^{\circ}\text{C}$ .
- ii. Die lineare Stableistung je Stab beträgt  $450\text{ W/cm}$ , was einer Pelletleistungsdichte von  $733\text{ W/cm}^3$  und einer mittleren Wärmestromdichte an der Hüllrohräußenwand von  $143\text{ W/cm}^2$  entspricht.

Die in den Abbildungen 6.23a bis 6.23c dargestellten Temperaturfelder der drei Bündel (alle 7 Stäbe sind beheizt) lassen sich mit den in den Abbildungen 6.22a bis 6.22c dargestellten Geschwindigkeitsfeldern und den in Tabelle VI.7 zusammengefaßten Daten gut einsehen. Durch die hohen Volumenströme in den Zentralkanälen im Fall D0.5H7 kommt es zu sehr flachen Temperaturverteilungen (s. Abb. 6.23a), wobei die Gleichförmigkeit der Wärmeübertragungseigenschaften in diesem Bündel zu etwa gleichen Wandtemperaturen an allen 7 Stäben führt (s. Tabelle VI.8a). Bei verdoppeltem Brennstab- zu Kastenwandabstand (Fall D1.0H7) sehen die Verhältnisse wegen der diskutierten Durchsatzverteilungen im Bündel weniger gleichförmig aus (s. Abb. 6.23b). Diese Feststellungen werden durch die in Tabelle VI.8a zusammengefaßten Temperaturmittelwerte untermauert. Dabei ist eine Eigentümlichkeit der gewählten Randbedingungen ( $Re = 10^5$ ; Zentraltemperatur im Brennstoff stets gleich  $1,400^{\circ}\text{C}$ ) auffällig. Mit steigendem hydraulischem Durchmesser der Bündel sinkt neben der mittleren Fluidgeschwindigkeit  $\bar{u}_{m,b}$  auch die mittlere Fluidtemperatur  $\bar{T}_{m,b}$ . Diese Reduktion der mittleren Fluidtemperatur im Bündel  $\bar{T}_{m,b}$  wird durch die relativ höheren Volumenströme in den Wandkanälen für die Fälle D1.0H7 und S1.0H7 verursacht.

Wie aus Tabelle VI.8a zu entnehmen ist, variieren die Wandtemperaturen am Umfang des Zentralstabes in allen drei Fällen um weniger als  $10\text{ K}$ . Auf Grund der Durchsatzverteilungen sind die Wandtemperaturen am Zentralstab für die Fälle D1.0H7 und S1.0H7 jedoch deutlich höher als im Fall D0.5H7. Noch gravierender sind jedoch die Unterschiede zwischen den Wandtemperaturverteilungen an den Wandstäben für die untersuchten Fälle. Obwohl die Mittelwerte der Wandtemperaturen am Wandstab  $T_{w,m,W-S}$  in allen Fällen bei ca.  $210^{\circ}\text{C}$  liegen, ergeben sich für die Fälle D1.0H7 und S1.0H7 drastische Variationen über den Stabumfang von bis zu  $100\text{ K}$ , während diese für den Fall D0.5H7 weniger als  $20\text{ K}$  betragen. Insgesamt zeigt sich, daß die thermischen Resultate für die Fälle D1.0H7 und S1.0H7 recht ähnlich aussehen (trotz der großen Unterschiede der hydraulischen Ergebnisse) und stark von denen für den Fall D0.5H7 abweichen.

## 6.2.3.3. EINFLUSS DER BÜNDELRANDGESTALTUNG AUF DAS TURBULENTE MIXING

Der Einfluß der verschiedenen numerisch untersuchten Bündelrandgestaltungen auf das turbulente Mixing läßt sich aus Tabelle VI.8b ablesen. Die STANTON-Zahlen im Spalt zwischen einem Zentral- und einem Wandkanal sind für die Fälle D0.5H7 und D1.0H7, die hydraulisch recht ähnlich sind, ungefähr gleich ( $St_g \approx 5 \cdot 10^{-3}$ ) und liegen um ca. 50% unter der STANTON-Zahl im Spalt, die für den Fall S1.0H7 ermittelt worden ist. Der Wichtungsfaktor  $Y$ , der auch als Maßstab für

die Abweichungen von Kreisrohrverhältnissen angesehen werden kann, zeigt, daß die beiden erstgenannten Fälle schon stark von diesen Verhältnissen abweichen und der Fall S1.0H7 gar nicht mit Kreisrohrbeziehungen beschrieben werden kann. Besonders das Fehlen der benetzenden Kastenwand erhöht das turbulente Mixing erheblich, was der Grund für die gute Überstimmung der thermischen Ergebnisse der Fälle D1.0H7 und S1.0H7 ist.

#### 6.2.4. EINFLUSS DER WÄRMEQUELLENVERTEILUNG IM BÜNDELQUERSCHNITT

Zur Untersuchung des Einflusses der Wärmequellenverteilung im Bündelquerschnitt auf die turbulente Temperaturverteilung und das turbulente Mixing sind die drei in Abschnitt 6.2.3. untersuchten Bündel unterschiedlich beheizt worden. Jedes Bündel ist dabei mit drei Beheizungsanordnungen versehen worden:

- i. Alle Stäbe werden gleich beheizt (H7).
- ii. Nur der Zentralstab wird beheizt (H1).
- iii. Nur die Wandstäbe werden beheizt (H6).

Da im Verfahren VANTACY-II von einem inkompressiblen Fluid ausgegangen wird, sind die mit diesem Modell errechneten Geschwindigkeitsverteilungen unabhängig von der Verteilung der Wärmequellen im Bündelquerschnitt.

##### 6.2.4.1. EINFLUSS DER WÄRMEQUELLENVERTEILUNG IM BÜNDELQUERSCHNITT AUF DAS TURBULENTE TEMPERATURFELD

Die thermischen Ergebnisse für die Fälle mit heterogener Beheizung sind in den Tabellen VI.9a und VI.10a sowie den Abbildungen 6.24a bis 6.25b dargestellt. Die Verteilung der Wärmequellen im Bündelquerschnitt bestimmt hier zusätzlich zu dem hydraulischen Verhalten der verschiedenen Bündel die Resultate, wie der Vergleich der Abbildungen 6.23b, 6.24a und 6.25a und der Abbildungen 6.24b und 6.25b zeigt. Auffällig ist besonders der Wandtemperaturverlauf am Wandstab für den Fall D0.5H6 (s. Abb. 6.25b). Die höchste Wandtemperatur liegt jetzt nicht mehr im Spalt zwischen Zentral- und Wandstab ( $\phi = 180^\circ$ ) vor, sondern in der Bündelecke ( $\phi = 0^\circ$ ), was auf die diskutierten Volumenstromverteilungen in Kombination mit der Wärmequellenverteilung (nur die Wandstäbe sind beheizt) zurückzuführen ist.

##### 6.2.4.2. EINFLUSS DER WÄRMEQUELLENVERTEILUNG IM BÜNDELQUERSCHNITT AUF DAS TURBULENTE MIXING

Wie aus den Tabellen VI.8b, VI.9b und VI.10b ersichtlich ist, hat die Verteilung der Wärmequellen im Bündelquerschnitt keinen Einfluß auf das turbulente Mixing. Die numerisch ermittelten STANTON-Zahlen im Spalt weichen für jeweils eine Geometrie nur unwesentlich voneinander ab. Dieses Ergebnis zeigt nochmals, daß das turbulente Mixing allein von den hydraulischen Verhältnissen abhängig ist und nicht durch thermische Einflüsse beeinflusst wird.

### 6.3. BEWERTUNG DER DURCHGEFÜHRTEN VERGLEICHE

Die durchgeführten Vergleiche haben gezeigt, daß der FEM-Code VANTACY-II ein flexibles Werkzeug zur Darstellung turbulenter Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in engen Stabgittern ist. Dabei sind die Vorteile eines *distributed parameter* Verfahrens klar zu erkennen gewesen. Fragestellungen, die nur mit hohem experimentellen Aufwand geklärt werden können, sind untersucht worden, und dabei sind angesichts der durchgeführten thermischen Validierung mehr als nur qualitativ richtige Antworten gegeben worden. An Hand der dargestellten Vergleichsrechnungen ist gezeigt worden, daß der FEM-Code VANTACY-II eine wesentliche Hilfe bei der Planung, Durchführung und Interpretation von Experimenten sein kann und den experimentellen Aufwand zu minimieren gestattet.

Es muß jedoch kritisch angemerkt werden, daß der zum jetzigen Zeitpunkt im FEM-Code VANTACY-II implementierte Ansatz (4.29) für die turbulente PRANDTL-Zahl mit den Koeffizienten nach Gl. (4.30) für Kreisrohrströmungen hergeleitet und angepaßt worden ist. Ein für Stabgitterströmungen gültiger Ansatz für die turbulente PRANDTL-Zahl ist in der Literatur nicht vorhanden. Eine Implementierung neuer Ansätze in den FEM-Code VANTACY-II, die auch oder speziell für Strömungen durch enge Stabgitter gültig sind, kann jedoch problemlos erfolgen.

Trotz dieses Mangels geben die mit dem FEM-Code VANTACY-II ermittelten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder die Realität turbulenter einphasiger Strömungen durch enge Stabgitter bei voll eingelaufenem Strömungszustand besser wieder als alle bisher in der Literatur dargestellten Verfahren. Speziell die Ermittlung des turbulenten Temperaturfeldes und der daraus ableitbaren Mixing-Daten ist qualitativ wesentlich besser als z.B. die numerische Ermittlung dieser Daten nach SEALE [7].

## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Turbulente Stabgitterströmungen werden maßgeblich durch die starke Anisotropie der Turbulenz in engen Stabgittern geprägt. Die Turbulenzstruktur hydraulisch volleingelaufener, isothermer Strömungen eines inkompressiblen NEWTON'schen Fluides ist in der Literatur für Stabgitter-Geometrien vielfältig untersucht worden, und mit dem Modell VELASCO-TUBS von NEELEN [3] steht am Institut für Raumflug- und Reaktortechnik ein zuverlässiges Turbulenzmodell zur Darstellung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes in engen Stabgittern zur Verfügung.

Die experimentellen und theoretischen Arbeiten zur Darstellung des turbulenten Temperaturfeldes in engen Stabgittern sind noch im Anfangsstadium begriffen. Experimentelle Ergebnisse zu detaillierten Feldmessungen der Fluidtemperatur liegen nur vereinzelt für Strömungen durch einfache Geometrien, wie Strömungen längst ebener Platten, durch Kreisrohre oder durch Dreiecks- oder Viereckskanäle, vor. Ansätze zur Beschreibung des turbulenten Wärmetransportes werden im allgemeinen auf die Beschreibung des turbulenten Impulstransportes zurückgeführt, wobei die in der Literatur vorhandenen Ansätze zur Beschreibung des Proportionalitätsfaktors, der turbulenten PRANDTL-Zahl, teilweise recht unterschiedliche Ergebnisse liefern.

In der vorliegenden Schrift ist ein zwei-dimensionales Verfahren zur Darstellung turbulenter Geschwindigkeits- und Temperaturfelder einphasiger Strömungen in engen Stabgittern entwickelt und im FEM-Code VANTACY-II realisiert worden. Die Beschreibung des turbulenten Impulstransportes erfolgt mit dem validierten Modell VELASCO-TUBS [3]. Für die Beschreibung des turbulenten Wärmetransportes wird eine von BAARS [96] modifizierte Version des Ansatzes für die turbulente PRANDTL-Zahl von JISCHA & RIEKE [93] verwendet. Die numerische Lösung der axialen Impulsbilanz- und der Energiebilanzgleichung wird unter Vernachlässigung der zeitlichen Mittelwerte der Sekundärströmungskomponenten mit dem FEM-Code VANTACY von KAISER [50] durchgeführt, da die FEM eine hohe Flexibilität bei der Anpassung an komplizierte Geometrien aufweist.

Die thermische Validierung des neuen Verfahrens VANTACY-II ist an Hand der numerischen Nachbildung der Experimente von SEALE [7] (asymmetrisch beheizter, Luft durchströmter Rechteckkanal mit 5 nebeneinander angeordneten Stäben;  $P/D = 1.100$ ;  $W/D = 1.196$ ; hydraulisch und thermisch volleingelaufene Strömung) durchgeführt worden. Der Vergleich der experimentell von SEALE und der numerisch mit dem FEM-Code VANTACY-II ermittelten Ergebnisse für das turbulente Geschwindigkeits- und Temperaturfeld sowie für das natürliche Mixing zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung, wobei die auftretenden Abweichungen plausibel sind.

Mit einigen Anwendungsbeispielen zur Darstellung der turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen in engen 7-Stabbündeln ist gezeigt worden, daß der neue FEM-Code VANTACY-II ein numerisches Werkzeug ist, das sehr gut bei der Planung und Interpretation von Experimenten eingesetzt werden kann. Weitere Anwendungsgebiete liegen in der detaillierten Parameterstudie, der lokalen Interpretation von Unterkanalanalyse-Resultaten sowie dem Ingenieur-Entwurf.

In nächster Zukunft müssen neue, experimentell gut abgesicherte Ansätze zur Beschreibung der turbulenten PRANDTL-Zahl in engen Stabgittern erarbeitet werden. Besonderen Stellenwert neh-

men hier die Experimente von MEYER, Kernforschungszentrum Karlsruhe, (HERA-Versuchsstand mit einem beheizten, Luft durchströmten 37-Stabbündel;  $P/D = 1.120$ ;  $W/D = 1.062$ ) und TAVOULARIS, University of Ottawa / Kanada, (beheiztes, Luft durchströmtes Modell eines 37-Stab CANDU-Bündels;  $P/D = 1.14$ ;  $W/D = 1.000 \dots 1.149$ ) ein. Erste Einsichten werden aus der Analyse der Experimente von TAVOULARIS erwartet. Eine Auswertung und Nachrechnung der Experimente von MEYER mit dem FEM-Code VANTACY-II wird gesicherte Erkenntnisse über den turbulenten Wärmetransport in engen Stabgittern erbringen.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] D.S. Rowe : Measurements of turbulent velocity, intensity and scale in rod bundle flow channels  
Report BNWL-1736, Battelle Pacific Northwest Labs. (1973).
- [2] K. Rehme : The structure of turbulent flow through rod bundles  
Nuclear Engineering and Design 99 (1987), 141-154.
- [3] N. Neelen : Modellierung des Impulsstromes achsparalleler turbulenter Strömungen  
Dissertation, TU Braunschweig (1987).
- [4] C. Monir : Einfluß von Sekundärströmungen auf die Struktur des turbulenten Impuls-transportes in stabparallel durchströmten Gittern  
DFG-Bericht K8713, IfRR, TU Braunschweig (1987).
- [5] C. Monir : Bedeutung des Sekundärströmungsterms bei der Berechnung turbulenter Strömungen durch enge hexagonale Stabgitter mit dem Modell VELASCO-TUBS  
Bericht K8724, IfRR, TU Braunschweig (1987).
- [6] H. Fuchs : Wärmeübergang an strömendes Natrium — Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Temperaturprofile und turbulente Temperaturschwankungen bei Rohrgeometrie  
Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (1973).
- [7] W.J. Seale : Turbulent diffusion of heat between connected flow passages  
Ph.D. Thesis, University of Bradford (1977).
- [8] M. Jischa : Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch  
Vieweg-Verlag, Braunschweig / Wiesbaden (1982).
- [9] O. Reynolds : On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion  
Philosophical Transactions of the Royal Society of London 186 (1895), 123-164.
- [10] M.R. Fakory-Monazah : Measurement and analysis of flow wall shear stress in an interior subchannel of triangular array rods  
Master thesis, Massachusetts Institute of Technology (1977).
- [11] B. Kjellström : Studies of turbulent flow to a rod bundle of triangular array  
Aktiebolaget (AB), Atomenergi Report AE-487 (1974).
- [12] W.J. Seale : Measurements and predictions of fully developed turbulent flow in a simulated rod bundle  
Journal of Fluid Mechanics 123 (1982), 399-423.
- [13] V. Vonka, J. Hoornstra, P. Boersma : Experimental investigation of secondary flow vortices in a rod cluster  
Internal Report ECN 174, Petten, Netherlands (1985).

- [14] H. Reichardt : Messungen turbulenter Schwankungen  
Die Naturwissenschaften 24/25 (1938), 404-408.
- [15] The scientific papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor — Vol. II : Meteorolgy, oceanography  
and turbulent flow  
Ed. G.K. Batchelor, University Press, Cambridge (1960).
- [16] L. Prandtl : 7. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz  
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 5, Heft 2 (1925). 136-138.
- [17] J. Nikuradse : Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömungen in glatten Rohren  
Forschungsheft 356, Beilage zu Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Ausgabe  
B, Band 4 (1933).
- [18] E.R. van Driest : On turbulent flow near a wall  
Journal of the Aeronautical Sciences (1956), 1007-1011, 1036.
- [19] J. Laufer : The structure of turbulence in fully developed pipe flow  
National Advisory Committee for Aeronautics, Report 1174 (1952), 417-434.
- [20] B.E. Launder, D.B. Spalding : Lectures in mathematical models of turbulence  
Academic Press, London / New York (1972).
- [21] H. Reichardt : Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in  
glatten Leitungen  
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 24, Heft 5/6 (1944), 268-272.
- [22] W. Eiffer : Über die turbulente Geschwindigkeitsverteilung und Wandreibung in Strö-  
mungskanälen verschiedener Querschnitte  
Dissertation, TH Darmstadt (1968).
- [23] V.K. Jonsson : Experimental studies of turbulent flow phenomena in eccentric annuli  
Ph.D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis (1965).
- [24] J.A. Brighton : The structure of fully developed turbulent flow in annuli  
Ph.D. Thesis, Purdue University (1963).
- [25] W. Tiedt : Berechnung des laminaren und turbulenten Reibungswiderstandes konzentri-  
scher und exzentrischer Ringspalte  
Institut für Hydraulik und Hydrologie der TH Darmstadt, Technischer Bericht Nr.4  
(1968).
- [26] K. Rehme : Turbulente Strömung in konzentrischen Ringspalten  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 2099 (1975).
- [27] C. Monir : Zur theoretischen Behandlung turbulenter Strömungen in Ringspalten  
Diplomarbeit K8619, IfRR, TU Braunschweig (1986).

- [28] W. Eifler, R. Nijsing : Fundamental studies of fluid flow and heat transfer in fuel element geometries. II. Experimental investigation of velocity distribution and flow resistance in a triangular array of parallel rods  
Report EURATOM-2193 e (1965).
- [29] W. Eifler, R. Nijsing : VELASCO — VELOCITY field in ASYMETRIC rod COntigurations  
Report EURATOM-4950 e (1973).
- [30] J.W. Elder : The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow  
Journal of Fluid Mechanics 5 (1959), 544-560.
- [31] W. Eifler, R. Nijsing : Berechnung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung und Wandreibung in asymmetrischen Stabbündeln  
Atomkernenergie 18, Lfg. 3 (1971), 189-172.
- [32] K. Rehme : Messungen der Geschwindigkeits-, Turbulenz- und Wandreibungsverteilungen in einem Eckkanal eines Stabbündels  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 2513 (1977).
- [33] K. Rehme : Untersuchungen zur Turbulenzstruktur in einem Wandkanal eines Stabbündels  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 2983 (1980).
- [34] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen an einem asymmetrischen Stabbündel ( $W/D = 1.096$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3047 (1980).
- [35] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen an einem asymmetrischen Stabbündel ( $W/D = 1.048$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3069 (1980).
- [36] K. Rehme : Turbulenzstruktur in einem Wandkanal eines Stabbündels  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3177 (1981).
- [37] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen an einem asymmetrischen Stabbündel ( $W/D = 1.148$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3318 (1982).
- [38] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen an einem asymmetrischen Stabbündel ( $W/D = 1.026$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3324 (1982).
- [39] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen im Wandkanal eines Stabbündels ( $P/D = 1.036$ ;  $W/D = 1.026$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3361 (1982).
- [40] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen an einem asymmetrischen Stabbündel ( $P/D = 1.148$ ;  $W/D = 1.045$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3597 (1983).

- [41] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen an einem asymmetrischen Stabbündel ( $P/D = 1.148$ ;  $W/D = 1.252$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3598 (1983).
- [42] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen an einem asymmetrischen Stabbündel ( $P/D = 1.148$ ;  $W/D = 1.074$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3818 (1984).
- [43] K. Rehme : Strömungsuntersuchungen an einem asymmetrischen Stabbündel ( $P/D = 1.148$ ;  $W/D = 1.222$ )  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3822 (1985).
- [44] K. Rehme : Turbulenzstruktur im Wandkanal eines Stabbündels ( $P/D = W/D = 1.148$ )  
für drei Ebenen im Einlauf  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 4027 (1986).
- [45] J. Cordes : Zur Darstellung des wandsenkrechten turbulenten Impulstransportes in engen Bündeln achsparallel umströmter zylindrischer Rohre  
Diplomarbeit K8614, IfRR, TU Braunschweig (1986).
- [46] K. Rehme : Turbulente Strömung in einem Wandkanal eines Stabbündels  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 2617 (1978).
- [47] J.D. Hooper : Developed single phase turbulent flow through a square-pitch-rod cluster  
Nuclear Engineering and Design 60 (1980), 365-379.
- [48] L. Prandtl : Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz  
Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse (1945), 6-19.
- [49] J.O. Hinze : Turbulence  
McGraw-Hill, New York, 2.edition (1975).
- [50] H.-G. Kaiser : Näherungslösungen für den Impulstransport bei turbulenter Strömung in engen Stabbündeln nach der Methode der Finite Elemente  
Dissertation, IfRR, TU Braunschweig (1985).
- [51] W.P. Jones, B.E. Launder : The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence  
International Journal of Heat and Mass Transfer 15 (1972), 301-304.
- [52] M. Barbaro : Turbulence modelling of axial flow through a wall subchannel of a smooth rod bundle  
ENEA-Report RT/VEL/88/1, Bologna, Italy (1988).
- [53] J. Nikuradse : Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen  
Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Heft 281, VDI-Verlag (1926).

- [54] R. Nijssing : Predictions of momentum, heat and mass transfer in turbulent channel flow with the aid of a boundary layer growth-breakdown model  
Wärme- und Stoffübertragung, Bd.2 (1969), 65-86.
- [55] H.-G. Kaiser, W. Zeggel : Turbulent flows in complex rod bundle geometries numerically predicted by the use of FEM and a basic turbulence model  
Nuclear Engineering and Design 99 (1987), 351-363.
- [56] S.-K. Cheng, N.E. Todreas : Hydrodynamic models and correlations for bare and wire-wrapped hexagonal rod bundles — Bundle friction factors, subchannel friction factors and mixing parameters  
Nuclear Engineering and Design 92 (1986), 227-251.
- [57] D.H. Wood : The equations describing secondary flow in cylindrical polar co-ordinates  
Report T.N.-F.M., University of Newcastle, New South Wales, Australia (1981).
- [58] J.G. Bartzis, N.E. Todreas : Hydrodynamic behaviour of a bare rod bundle  
Department of Nuclear Engineering, Massachusetts Institute of Technology, U.S.A. (1977).
- [59] M.A. Haque, A.K.A. Hassan, J.T. Turner, H. Barrow : An observation on the origin of secondary flow in straight noncircular ducts  
Wärme- und Stoffübertragung 17 (1983), 93-95.
- [60] J.D. Hooper, K. Rehme : The structure of single-phase turbulent flows through closely spaced rod arrays  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 3467 (1983).
- [61] S.V. Möller : Experimentelle Untersuchung der Vorgänge in engen Spalten zwischen Unterkänen von Stabbündeln bei turbulenter Strömung  
Dissertation, TH Karlsruhe (1988) (Kernforschungszentrum Karlsruhe, Bericht KfK 4501).
- [62] E.R.G. Eckert, R.M. Drake, Jr. : Analysis of heat and mass transfer  
Hemisphere Publishing Corporation, New York, reprint (1987).
- [63] A.J. Reynolds : The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers  
International Journal of Heat and Mass Transfer 18 (1975), 1055-1069.
- [64] H.B. Rieke : Bestimmung des Wärmeübergangs bei turbulenter Rohrströmung mit Hilfe von Transportgleichungen  
Dissertation, Fachbereich Maschinentechnik der Universität Essen - GH (1981).
- [65] H.O. Buhr, A.D. Carr, R.E. Balzhiser : Temperature profiles in liquid metals and the effect of super-imposed free convection in turbulent flow  
International Journal of Heat and Mass Transfer 11 (1968), 641-654.

- [66] V.I. Subbotin, M.K. Ibragimow, N.N. Ivanovskii, M.N. Arnoldov, W.V. Nomoflov : Turbulent heat transfer in a stream of molten metals  
Soviet Journal of Atomic Energy 10 (1961), 373-376.
- [67] C.A. Sleicher, Jr. : Experimental velocity and temperature profiles for air in turbulent pipe flow  
Transactions of the ASME 80 (1958), 693-704.
- [68] F.F. Tao : A study of eddy diffusivity in turbulent heat transfer  
Ph.D.Thesis, University of Missouri (1964).
- [69] J.W. Smith, R.A. Gowen, B.O. Wasmund : Eddy diffusivities and temperature profiles for turbulent heat transfer to water in pipes  
Chemical Engineering Progress, Symp. Ser. 63, No. 77 (1967), 92-101.
- [70] J. Blom : An experimental determination of the turbulent Prandtl number in a developing temperature boundary layer  
Thesis, Technical University of Eindhoven (1970).
- [71] W.H. Corcoran, F. Page, Jr., W.G. Schlinger, B.H. Sage : Temperature gradients in turbulent gas streams  
Ind. Eng. Chem. 44 (1952), 410-430.
- [72] E. Venezian, B.H. Sage : Temperature gradients in turbulent gas streams : Effect of viscous dissipation on evaluation of total conductivity  
A.I.Ch.E. Journal 7 (1961), 688-692.
- [73] H. Ludwig : Bestimmung des Verhältnisses der Austauschkoefizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten  
Z. f. Flugwissenschaften 4 (1956), 73-81.
- [74] R.E. Johnk, T.J. Hanratty : Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe — I. The fully developed heat-transfer region  
Chemical Engineering Science 17 (1962), 867-879.
- [75] R.E. Johnk, T.J. Hanratty : Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe — II. The thermal entrance region  
Chemical Engineering Science 17 (1962), 881-892.
- [76] R.A. Gowen, J.W. Smith : Turbulent heat transfer from smooth and rough surfaces  
International Journal of Heat and Mass Transfer 11 (1968), 1657-1674.
- [77] A. Quarmby, R. Quirk : Measurements of the radial and tangential eddy diffusivities of heat and mass in turbulent flow in a plain tube  
International Journal of Heat and Mass Transfer 15 (1972), 2309-2327.
- [78] J.C. Rotta : Temperaturverteilungen in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte  
International Journal of Heat and Mass Transfer 7 (1964), 215-228.

- [79] R.A. Antonia : Behaviour of the turbulent Prandtl number near the wall  
International Journal of Heat and Mass Transfer 23 (1980), 906-908.
- [80] H. Gräber : Der Wärmeübergang in glatten Rohren, zwischen parallelen Platten, in Ringspalten und längs Rohrbündeln bei exponentieller Wärmeflußverteilung in erzwungener laminarer oder turbulenter Strömung  
International Journal of Heat and Mass Transfer 13 (1970), 1645-1703.
- [81] A. Malhotra, S.S. Kang : Turbulent Prandtl number in circular pipes  
International Journal of Heat and Mass Transfer 27 (1984), 2158-2161.
- [82] R. Jenkins : Variation of the eddy conductivity with Prandtl modulus and its use in prediction of turbulent heat transfer coefficients  
Proceedings of the 1952 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press (1952), 147-158.
- [83] R.G. Deissler : Analysis of fully developed turbulent heat transfer at low Péclet numbers in smooth tubes with application to liquid metals  
U.S. National Advisory Committee for Aeronautics, Res. Memo. E52F05 (1952).
- [84] A.T. Wassel, I. Catton : Calculation of turbulent boundary layers over flat plates with different phenomenological theories of turbulence and variable turbulent Prandtl numbers  
International Journal of Heat and Mass Transfer 16 (1973), 1547-1563.
- [85] R.L. Simpson, D.G. Whitten, R.J. Moffat : An experimental study of the turbulent Prandtl number of air with injection and suction  
International Journal of Heat and Mass Transfer 13 (1970), 125-143.
- [86] T. Cebeci : A model for eddy conductivity and turbulent Prandtl number  
Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer 95 (1973), 227-234.
- [87] T.Y. Na, I.S. Habib : Heat transfer in turbulent pipe flow based on a new mixing length model  
Journal of Applied Scientific Research 28 (1973), 302-314.
- [88] W.M. Kays, M.E. Crawford : Convective heat and mass transfer  
2nd ed., McGraw-Hill, New York (1980).
- [89] N.Z. Azer, B.T. Chao : A mechanism of turbulent heat transfer in liquid metals  
International Journal of Heat and Mass Transfer 1 (1960), 121-138.
- [90] A.J. Reynolds : Turbulent flows in engineering  
Wiley, London (1974).
- [91] L.C. Thomas : Temperature profiles for liquid metals and moderate-Prandtl-number fluids  
Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer 92 (1970), 565-567.
- [92] P.V. Danckwerts : Significance of liquid-film coefficients in gas absorption  
Industrial and Engineering Chemistry 43 (1951), 1460-1467.

- [93] M. Jischa, H.B. Rieke : About the prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers from modeled transport equations  
International Journal of Heat and Mass Transfer 22 (1979), 1547-1555.
- [94] J. Rotta : Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz  
Zeitschrift für Physik 129 (1951), 547-572.
- [95] M. Jischa, H.B. Rieke : Turbulent heat transfer in duct flow  
Proceedings of the 6th International Heat Transfer Conference, Toronto (1978), FC(a)-10, 543-548.
- [96] H. Baars : Zur Darstellung des turbulenten Wärmetransports im kreisförmigen Strömungskanal  
Diplomarbeit K8509, IfRR, TU Braunschweig (1985).
- [97] R.G. Deissler, C.S. Eian : Analytical and experimental investigation of fully developed turbulent flow of air in a smooth tube with heat transfer with variable fluid properties  
U.S. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 2629 (1951).
- [98] J.T. Rogers, N.E. Todreas : Coolant interchannel mixing in reactor fuel rod bundles single-phase coolants  
in "Heat Transfer in Rod Bundles", ASME, New York (1968).
- [99] L. Ingesson, S. Hedberg : Heat transfer between subchannels in a rod bundle  
in "Heat Transfer 1970", Eds. U. Grigull und E. Hahne, Paper FC7.11, Elsevier Science Publishers, Amsterdam (1970).
- [100] N. Kattchee, W.C. Reynolds : HECTIC-II. An IBM 7090 FORTRAN computer program for heat transfer analysis of gas or liquid coolant reactor passages  
IDO-28595, Aerojet-General Nucleonics, California (1962).
- [101] H. Ramm, K. Johannsen, N.E. Todreas : Single phase transport within bare rod arrays at laminar, transition and turbulent flow conditions  
Nuclear Engineering and Design 30 (1974), 186-204.
- [102] J.T. Rogers, R.G. Rosehart : Mixing by turbulent interchange in fuel bundles. Correlations and inferences  
ASME, Paper 72-HT-53 (1972).
- [103] J.T. Rogers, A.E.E. Tahir : Turbulent interchange mixing in rod bundles and the role of secondary flows  
ASME, Paper 75-HT-31 (1975).
- [104] L. Ingesson, B. Kjellström, S. Hedberg : Experimental determination of heat transfer between subchannels in a rod bundle — part 1  
Internal report AE-RTL-959, AB Atomenergi, Sweden (1967).
- [105] H.R. Schwarz : Methode der finiten Elemente  
B.G. Teubner-Verlag, Stuttgart (1980).

- [106] W. Eifler, R. Nijsing : Berechnung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung und Wandreibung in exzentrischen Ringspalten  
Atomkernenergie (ATKE) 18, Lfg. 2 (1971), 133-142.
- [107] C. Hall, P.-J. Svenningson : Secondary flow velocities in a rod bundle of triangular array  
Aktiebolaget (AB), Atomenergi Report AE-RL-1326 (1971).
- [108] J. Hejna, L. Vosáhlo, J. Červenka, J. Schmid : Experimentelle Untersuchungen lokaler Strömungsparameter in Wandnähe von Brennelementen Schneller Reaktoren — 2. Meßergebnisse bei Nenngeometrie ohne Verdrängungskörper  
Kernforschungszentrum Karlsruhe, Internationale Beziehungen / Übersetzergruppe, KfK-tr-676 (1982).
- [109] N. Neelen : Darstellung der Strömungsverhältnisse in wasserdurchströmten engen Stabgittern  
Diplomarbeit K7813, IfRR, TU Braunschweig (1978).
- [110] N. Neelen : Das Programm VELASCO-BS zur Darstellung der hydraulischen Eigenschaften von parallel durchströmten Stabbündeln — ein "How to use" zur Programmübergabe  
Abschlußbericht K8116, IfRR, TU Braunschweig (1981).
- [111] C. Monir, W. Zeggel : Entwicklung eines 2D-FEM-Codes zur Darstellung turbulenter Geschwindigkeits- und Temperaturfelder — 1. Zwischenbericht : Berechnung der radialen und azimuthalen Wirbelviskositätsfelder aus VELASCO-TUBS-Ergebnissen  
Bericht K8822, IfRR, TU Braunschweig (1988).
- [112] C. Monir, W. Zeggel : Validation of a two-dimensional turbulent heat transport model angenommen zur Veröffentlichung beim 1990 ASME Winter Annual Meeting "Thermal Hydraulics of Advanced Nuclear Reactors", Dallas, Texas, 25-30 November 1990.
- [113] K. Rehme : Turbulent momentum transport in rod bundles  
Nuclear Engineering and Design 62 (1980), 137-146.
- [114] K. Rehme : Pressure drop performance of rod bundles in hexagonal arrangements  
International Journal of Heat and Mass Transfer 15 (1972), 2499-2517.
- [115] W. Zeggel, F.J. Erbacher, D.C. Groeneveld : Critical heat flux investigations using a closely-spaced rod bundle  
Proceedings of the 4th International Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics, Karlsruhe (1989), 781-787.
- [116] A. Katsaounis : Literaturbewertung zur Fluidähnlichkeit für die kritische Heizflächenbelastung  
GKSS-Forschungszentrum Geesthacht, Bericht 81/E/10 (1981).
- [117] Th. Müller-Menzel : Untersuchungen zum kritischen Siedezustand in engen Strömungskanälen mit dem Kältemittel R12 als Modellfluid  
Dissertation, TU Braunschweig (1987).

- [118] W. Zeggel, C. Monir : Prediction of natural mixing in tightly packed 7-rod-bundles ( $p/d = 1.10$ )  
Proceedings of the 4th International Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics, Karlsruhe (1989), 1294 - 1302 (ausgewählt zur Publikation in einer Sonderausgabe von Nuclear Engineering and Design).

**TABELLEN**

Tabelle III.1 : Modellierete zweite Turbulenzgröße in Zweigleichungsmodellen der Literatur (nach LAUNDER & SPALDING [20])

Autor(en)	Jahr	Turbulenzgröße $\zeta$
KOLMOGOROV	1942	$f = \sqrt{k}/l$
CHOU	1945	$\epsilon = k^{3/2}/l$
DAVIDOV	1961	
HARLOW & NAKAYAMA	1968	
JONES & LAUNDER	1972	
ROTTA	1951	$l$
SPALDING	1967	
ROTTA	1968	$kl$
ROTTA	1971	
RODI & SPALDING	1970	
NG & SPALDING	1972	
SPALDING	1969	$f^2 = k/l^2$

**Tabelle V.1:** Ansätze für die wandparallele Schubspannung  $\tau_\phi$  und das wandsenkrechte Geschwindigkeitsprofil  $\bar{u}(\tau)$  in den Modellen VELASCO [29] und VELASCO-TUBS [3]

	VELASCO	VELASCO-TUBS
$\tau_\phi =$		$\rho(\nu + \epsilon_{\tau,\phi}) \frac{\partial \bar{u}}{\tau \partial \phi}$ (3.4)
$\epsilon_{\tau,\phi} =$		$\epsilon_{\tau,\phi}^+ u^* Y_m R$ (3.13)
$\epsilon_{\tau,\phi}^+ =$	0.154 (3.17)	$\overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+} \left\{ 1.0 + A_R (B_R^2 - B_R + 1/3) - A_R (B_R - Y)^2 \right\}$ (3.23)
$\ln(\overline{\epsilon_{\tau,\phi}^+}) =$	$\ln(\epsilon_{\tau,\phi}^+)$	$u_1 e^{u_2 Y_m + u_3} + u_4$ (3.21)
$\bar{u} =$		$u^+ / u^*$
$u^+ =$		$y^+ \left[ 1.0 - 0.34 \frac{y^+}{U_0^+} + 0.039 \left( \frac{y^+}{U_0^+} \right)^2 \right]$ für $y^+ \leq 30$ (3.43)
		$\frac{1}{\kappa} \ln \left\{ y^+ \frac{(1+t)(2-Y)}{2[t+(1-Y)^2]} \right\} + C$ für $y^+ > 30$ (3.49)
$\kappa, t =$		s. Gl.(3.51)
$C =$	s. Gl.(3.51)	s. Gl.(3.52)

Tabelle VI.1: Geometrie-Daten der Teststrecken von SEALE [7]

Anzahl der Stäbe	3	4	5
$P/D$	1.833	1.375	1.100
$W/D$	1.875	1.402	1.196
$F / mm^2$	31922.02	16951.02	9047.52
$d_h / mm$	106.74	53.87	26.37
$l/d_h$	252.6	500.5	1022.6
$F_1 / mm^2$	4338.59	2118.88	904.75
$d_{h,1} / mm$	125.03	57.54	27.10
$l/d_{h,1}$	215.6	468.5	994.8

Tabelle VI.2a : Hydraulische Hauptdaten der Versuche von SEALE [7] in der 5-Stab-Anordnung

Fall	$Re$ [-]	$\dot{m}$ [kg/m <sup>2</sup> /s]	$\dot{m}_1$ [kg/m <sup>2</sup> /s]	$\dot{m}_2$ [kg/m <sup>2</sup> /s]	$\bar{u}_{m,b}$ [m/s]	$\bar{u}_{max}$ [m/s]	$\tau_{w,m,h+k}$ [N/m <sup>2</sup> ]
5B/4.6	46,290	30.898	29.810	31.987	27.82	32.81	2.31
5B/4.7	47,424	32.373	31.086	33.660	29.71	33.82	2.68
5B/5.5	55,468	36.433	35.677	37.190	31.86	37.10	3.18
5B/6.3	63,135	42.022	40.740	43.304	37.77	43.79	4.13
5B/7.2	71,836	48.082	46.522	49.643	43.52	49.72	5.33
5B/8.1	81,482	55.559	53.494	57.624	51.05	56.52	6.94
5B/9.1	91,120	59.142	59.565	58.718	51.42	59.21	7.19

Tabelle VI.2b : Thermische Hauptdaten der Versuche von SEALE [7] in der 5-Stab-Anordnung

Fall	$q''_{input}$ [W/m <sup>2</sup> ]	$T_{w,m,h}$ [°C]	$T_{w,m,k}$ [°C]	$\bar{T}_{m,b}$ [°C]	$\bar{T}_{m,1}$ [°C]	$\bar{T}_{m,2}$ [°C]
5B/4.6	746.2	60.84	15.29	37.24	50.62	23.85
5B/4.7	1,022.7	70.08	16.66	42.99	58.89	26.87
5B/5.5	562.2	38.88	13.03	26.22	34.09	18.30
5B/6.3	1,112.6	67.91	17.44	42.59	57.02	27.82
5B/7.2	1,413.7	74.86	17.66	46.03	62.76	28.75
5B/8.1	1,510.9	68.70	18.77	43.70	58.10	29.16
5B/9.1	741.8	37.91	14.35	26.60	33.54	19.24

**Tabelle VI.3a:** Hydraulische Hauptdaten der numerischen Simulation der Versuche von SEALE [7] in der 5-Stab-Anordnung mit dem FEM-Code VANTACY-II

Fall	$Re$ [–]	$\dot{m}$ [kg/m <sup>2</sup> /s]	$\bar{u}_{m,b}$ [m/s]	$\bar{u}_{max}$ [m/s]	$\tau_{w,m,h+k}$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\lambda_D$ [–]	$\lambda_D/\lambda_{D,o}$ [%]
5B/4.6	46,154	30.968	25.83	30.56	2.317	0.02293	106.3
5B/4.7	47,297	32.180	27.29	32.29	2.525	0.02266	105.7
5B/5.5	54,940	35.846	28.92	34.11	2.881	0.02173	105.3
5B/6.3	63,257	42.993	36.41	42.84	4.159	0.02046	102.7
5B/7.2	71,331	48.873	41.79	49.04	5.305	0.01984	102.6
5B/8.1	81,400	55.498	47.16	55.23	6.547	0.01909	102.0
5B/9.1	91,490	59.718	48.21	56.34	6.977	0.01839	101.2

**Tabelle VI.3b:** Thermische Hauptdaten der numerischen Simulation der Versuche von SEALE [7] in der 5-Stab-Anordnung mit dem FEM-Code VANTACY-II

Fall	$q''_{input}$ [W/m <sup>2</sup> ]	$T_{w,m,h}$ [°C]	$T_{w,m,k}$ [°C]	$\bar{T}_{m,b}$ [°C]	$\bar{T}_{m,1}$ [°C]	$\bar{T}_{m,2}$ [°C]
5B/4.6	746.2	60.78	23.00	41.89	55.00	28.79
5B/4.7	1,022.7	70.07	20.09	45.09	62.41	27.77
5B/5.5	562.2	38.88	13.89	26.39	35.02	17.77
5B/6.3	1,112.6	67.86	25.28	46.58	61.20	31.96
5B/7.2	1,413.7	74.85	26.87	50.87	67.28	34.46
5B/8.1	1,510.9	68.65	22.41	45.54	61.29	29.79
5B/9.1	741.8	37.88	16.41	27.15	34.44	19.85

Tabelle VI.3c : Mixing-Daten der Versuche von SEALE [7] in der 5-Stab-Anordnung und der numerischen Simulation dieser Versuche mit dem FEM-Code VANTACY-II

Fall	Experiment			Simulation		
	$Re$ [-]	$St_g$ [ $10^{-4}$ ]	$w'_{12}$ [kg/m/s]	$Re$ [-]	$St_g$ [ $10^{-4}$ ]	$w'_{12}$ [kg/m/s]
5B/4.6	46,290	95.99	0.00148	46,154	100.14	0.00155
5B/4.7	47,424	105.00	0.00170	47,297	99.88	0.00161
5B/5.5	55,468	104.88	0.00220	54.940	98.82	0.00177
5B/6.3	63,135	96.11	0.00231	63,257	96.42	0.00207
5B/7.2	71,836	91.99	0.00221	71,331	96.05	0.00235
5B/8.1	81,482	100.01	0.00278	81,400	94.22	0.00261
5B/9.1	91,120	92.24	0.00273	91,490	92.70	0.00277

Tabelle VI.4 : Geometriedaten des im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels

$P/D$	[-]	1.147
$W/D$	[-]	1.149
$D$	[mm]	9.500
$d_{H,a}$	[mm]	9.500
$d_{I,a}$	[mm]	5.700
$d_{HW,a}$	[mm]	3.700
$d_{K,a}$	[mm]	2.850
$d_{K,i}$	[mm]	0.950
$d_h$	[mm]	4.381
$d_{h,1}$	[mm]	4.281
$d_{h,2}$	[mm]	4.918
$d_{h,3}$	[mm]	3.338
$F$	[mm <sup>2</sup> ]	345.720
$F_1$	[mm <sup>2</sup> ]	15.972
$F_2$	[mm <sup>2</sup> ]	31.741
$F_3$	[mm <sup>2</sup> ]	9.907

Tabelle VI.5a: Hauptdaten der numerisch mit dem FEM-Code VANTACY-II untersuchten Frigen-R12-Fälle für das im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels

Fall	$Re$ [-]	$\dot{m}$ $\left[\frac{kg}{m^2 \cdot s}\right]$	$\dot{Q}$ [kW]	$q'$ [W/cm]	$p$ [ $10^5 N/m^2$ ]	$\bar{T}_{m,b}$ [°C]
KR15FH	19,998	1,105.9	22.00	52.38	23.00	14.99
KR15FF	59,408	3,998.2	21.50	51.19	23.70	14.14
KR15FC	67,774	4,002.0	22.00	52.38	23.00	9.34
KR15FD	88,010	3,001.0	7.90	18.81	23.00	52.81
KR15FA	91,458	3,037.1	7.81	18.60	23.54	54.66
KR15FE	99,979	5,516.0	14.00	33.33	23.00	15.23
KR15FG	198,795	10,993.4	22.00	52.38	23.00	14.99

Tabelle VI.5b: Hydraulische Ergebnisse der numerischen Untersuchung mit dem FEM-Code VANTACY-II des im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels (Fluid: Frigen-R12)

Fall	$Re$ [-]	$\bar{u}_{m,b}$ [m/s]	$\bar{u}_{m,1}$ $\bar{u}_{m,b}$	$\bar{u}_{m,2}$ $\bar{u}_{m,b}$	$\bar{u}_{m,3}$ $\bar{u}_{m,b}$	$\bar{u}_{max}$ $\bar{u}_{m,b}$
KR15FH	19,998	0.817	1.026	1.051	0.795	1.289
KR15FF	59,408	2.832	1.057	1.038	0.788	1.250
KR15FC	67,774	2.915	1.063	1.038	0.778	1.251
KR15FD	88,010	2.489	1.092	1.029	0.761	1.245
KR15FA	91,458	2.537	1.094	1.028	0.759	1.245
KR15FE	99,979	4.078	1.090	1.031	0.756	1.245
KR15FG	198,795	8.173	1.076	1.030	0.780	1.228
Fall	$Re$ [-]	$\dot{m}$ [ $\frac{kg}{m^2 \cdot s}$ ]	$\dot{V}_1/\dot{V}_b$ [%]	$\dot{V}_2/\dot{V}_b$ [%]	$\dot{V}_3/\dot{V}_b$ [%]	$\left(\frac{\varepsilon_{\tau,\phi}}{\nu}\right)_{\phi=\phi_{12}}$ [-]
KR15FH	19,998	1,105.9	28.43	57.84	13.67	113.81
KR15FF	59,408	3,998.2	29.29	57.17	13.54	299.00
KR15FC	67,774	4,002.0	29.46	57.17	13.37	335.02
KR15FD	88,010	3,001.0	30.27	56.66	13.07	423.65
KR15FA	91,458	3,037.1	30.33	56.61	13.05	437.38
KR15FE	99,979	5,516.0	30.23	56.77	13.00	475.39
KR15FG	198,795	10,993.4	29.84	56.75	13.41	889.47

Tabelle VI.5c: Thermische Ergebnisse der numerischen Untersuchung mit dem FEM-Code VANTACY-II des im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels (Fluid: Frigen-R12)<sup>18)</sup>

Fall	$Re$ [-]	$\dot{Q}$ [kW]	$\bar{T}_{m,b}$ [°C]	$\bar{T}_{m,1}$ [°C]	$\bar{T}_{m,2}$ [°C]	$\bar{T}_{m,3}$ [°C]
KR15FH	19,998	22.00	14.99	58.82	-2.81	-0.84
KR15FF	59,408	21.50	14.14	32.45	6.63	6.26
KR15FC	67,774	22.00	9.34	27.70	1.70	1.53
KR15FD	88,010	7.90	52.81	59.74	49.78	49.88
KR15FA	91,458	7.81	54.66	61.42	51.70	51.80
KR15FE	99,979	14.00	15.23	24.17	11.37	11.27
KR15FG	198,795	22.00	14.99	24.31	11.12	10.63
Fall	$q'$ [W/cm]	$\frac{\dot{Q}/F}{c_p \cdot \dot{m}}$ [K]	$T_{w,m,Z-S}$ [°C]	$T_{w,m,W-S}$ [°C]	$T_{w,m,Ka}$ [°C]	$T_{w,max}$ [°C]
KR15FH	52.38	61.26	130.55	94.98	-8.35	131.69
KR15FF	51.19	17.02	57.52	40.25	4.23	58.86
KR15FC	52.38	17.10	53.27	35.87	-0.66	54.53
KR15FD	18.81	7.22	69.98	63.42	48.88	70.43
KR15FA	18.60	6.99	71.34	64.98	50.83	71.79
KR15FE	33.33	7.81	36.37	27.58	10.22	37.14
KR15FG	52.38	6.16	34.84	25.30	9.88	35.82

<sup>18)</sup>Die Indizes  $Z - S$ ,  $W - S$  und  $Ka$  stehen für *Zentralstab*, *Wandstab* bzw. *Kasten*.

Tabelle VI.5d: Mixing-Daten der numerischen Untersuchung mit dem FEM-Code VANTACY-II des im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels (Fluid: Frigen-R12)

Fall	$Re$ [-]	$\dot{Q}$ [kW]	$q'_{12}$ [W/cm]	$w'_{12}$ [ $\frac{kg}{m \cdot s}$ ]	$Y$ [-]	$St_g$ [ $10^{-3}$ ]
KR15FH	19,998	22.00	3.193	0.00551	2.387	3.425
KR15FF	59,408	21.50	4.352	0.01844	2.324	3.164
KR15FC	67,774	22.00	4.334	0.01792	2.294	3.066
KR15FD	88,010	7.90	1.369	0.01303	2.297	2.961
KR15FA	91,458	7.81	1.351	0.01305	2.285	2.931
KR15FE	99,979	14.00	2.883	0.02397	2.337	2.962
KR15FG	198,795	22.00	5.549	0.04478	2.387	2.790

Tabelle VI.6a: Hauptdaten der numerisch mit dem FEM-Code VANTACY-II untersuchten Wasserfälle für das im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels

Fall	$Re$ [-]	$\dot{m}$ [ $\frac{kg}{m^2 \cdot s}$ ]	$\dot{Q}$ [kW]	$q'$ [W/cm]	$p$ [bar]	$\bar{T}_{m,b}$ [°C]
KR15WC	67,774	2,355.6	352.00	838.10	142.60	180.49
KR15WD	88,010	1,916.4	126.40	300.95	142.60	281.47

Tabelle VI.6b: Mixing-Daten der numerischen Untersuchung mit dem FEM-Code VANTACY-II des im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels (Fluid: Wasser)

Fall	$Re$ [-]	$\dot{Q}$ [kW]	$q'_{12}$ [W/cm]	$w'_{12}$ [ $\frac{kg}{m \cdot s}$ ]	$Y$ [-]	$St_g$ [ $10^{-3}$ ]
KR15WC	67,774	352.00	86.696	0.01058	2.300	3.074
KR15WD	88,010	126.40	28.787	0.00836	2.309	2.977

Tabelle VI.7: Geometrische Daten und hydraulische Ergebnisse der numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II für die Fälle D0.5, D1.0 und S1.0 ( $Re = 10^5$ )

Fälle →		D0.5	D1.0	S1.0
Strömungsflächen / $mm^2$				
Bündel :	$F_b$	19.328	23.698	23.775
Zentralkanal :	$F_1$	6.563	6.563	6.563
Wandkanal :	$F_2$	10.615	13.365	13.365
Eckkanal :	$F_3$	2.150	3.770	3.847
Hydr. Durchmesser / $mm$				
Bündel :	$d_{h,b}$	2.870	3.485	5.189
Zentralkanal :	$d_{h,1}$	3.340	3.340	3.340
Wandkanal :	$d_{h,2}$	3.186	4.005	6.807
Eckkanal :	$d_{h,3}$	1.503	2.520	5.885
Hydr. Ergebnisse				
	$\bar{u}_{m,1}/\bar{u}_{m,b}$	1.185	1.070	0.733
	$\dot{V}_1/\dot{V}_b$	0.402	0.296	0.202
	$\dot{V}_2/\dot{V}_1$	1.330	1.979	3.127

**Tabelle VI.8a:** Thermische Ergebnisse der numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II für die Fälle *D0.5H7*, *D1.0H7* und *S1.0H7* ( $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ W/cm}$ ; alle Stäbe beheizt)

Fall	→	<i>D0.5H7</i>	<i>D1.0H7</i>	<i>S1.0H7</i>
$\bar{T}_{m,b}$	/°C	190.1	175.9	155.9
$\bar{T}_{m,1}$	/°C	196.1	221.3	213.5
$\bar{T}_{m,2}$	/°C	185.3	157.0	143.7
$\bar{T}_{m,3}$	/°C	192.0	155.6	131.9
$T_{w,max}$	/°C	223.1	260.4	269.7
$T_{w,m,Z-S}$	/°C	219.4	256.0	264.2
$T_{w,m,W-S}$	/°C	214.5	208.1	206.7
$T_{w,m,Ka}$	/°C	187.7	152.1	—
$\Delta T_{w,Z-S}$	/K	4.9	7.1	9.2
$\Delta T_{w,W-S}$	/K	17.0	80.5	99.0
$\Delta T_{w,Ka}$	/K	10.6	5.6	—

**Tabelle VI.8b:** Mixing-Daten der numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II für die Fälle *D0.5H7*, *D1.0H7* und *S1.0H7* ( $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ W/cm}$ ; alle Stäbe beheizt)

Fall	$q'_{12}$ [W/m]	$w'_{12}$ [kg/(m s)]	$Y$ [-]	$N_{Stg}$ [10 <sup>-3</sup> ]
D0.5H7	1366.5	0.02902	4.784	4.878
D1.0H7	6615.7	0.02370	3.984	5.083
S1.0H7	11557.1	0.03869	8.488	11.411

Tabelle VI.9a: Thermische Ergebnisse der numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II für die Fälle *D0.5H1*, *D1.0H1* und *S1.0H1* ( $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ W/cm}$ ; Zentralstab beheizt)

Fall	→	<i>D0.5H1</i>	<i>D1.0H1</i>	<i>S1.0H1</i>
$\bar{T}_{m,b}$	/°C	120.7	111.2	102.4
$\bar{T}_{v,1}$	/°C	135.4	134.2	123.4
$\bar{T}_{m,2}$	/°C	111.1	102.0	98.7
$\bar{T}_{m,3}$	/°C	108.9	155.6	131.9
$T_{w,max}$	/°C	159.6	163.3	167.6
$T_{w,m,Z-S}$	/°C	157.0	160.2	163.3
$T_{w,m,W-S}$	/°C	118.2	111.7	105.4
$T_{w,m,Ka}$	/°C	109.1	99.5	—
$\Delta T_{w,Z-S}$	/K	4.2	5.1	6.6
$\Delta T_{w,W-S}$	/K	30.7	41.0	35.9
$\Delta T_{w,Ka}$	/K	1.0	1.9	—

Tabelle VI.9b: Mixing-Daten der numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II für die Fälle *D0.5H1*, *D1.0H1* und *S1.0H1* ( $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ W/cm}$ ; Zentralstab beheizt)

Fall	$q'_{12}$ [W/m]	$w'_{12}$ [kg/(m s)]	$Y$ [-]	$N_{Stg}$ [10 <sup>-3</sup> ]
D0.5H1	4704.0	0.04605	4.805	4.895
D1.0H1	5368.5	0.03986	3.799	5.033
S1.0H1	6094.3	0.05896	8.325	11.203

Tabelle VI.10a: Thermische Ergebnisse der numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II für die Fälle *D0.5H6*, *D1.0H6* und *S1.0H6* ( $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ W/cm}$ ; Wandstäbe beheizt)

Fall	→	<i>D0.5H6</i>	<i>D1.0H6</i>	<i>S1.0H6</i>
$\bar{T}_{m,b}$	/°C	184.5	180.6	164.7
$\bar{T}_{m,1}$	/°C	168.8	189.5	192.8
$\bar{T}_{m,2}$	/°C	194.0	176.3	157.7
$\bar{T}_{m,3}$	/°C	204.1	180.0	157.1
$T_{w,max}$	/°C	232.1	222.1	243.7
$T_{w,m,Z-S}$	/°C	162.6	186.2	191.9
$T_{w,m,W-S}$	/°C	213.2	212.6	212.5
$T_{w,m,Ka}$	/°C	199.4	175.4	—
$\Delta T_{w,Z-S}$	/K	0.4	1.6	2.8
$\Delta T_{w,W-S}$	/K	43.0	21.1	51.7
$\Delta T_{w,Ka}$	/K	11.9	8.4	—

Tabelle VI.10b: Mixing-Daten der numerischen Untersuchungen mit dem FEM-Code VANTACY-II für die Fälle *D0.5H6*, *D1.0H6* und *S1.0H6* ( $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ W/cm}$ ; Wandstäbe beheizt)

Fall	$q'_{12}$ [W/m]	$w'_{12}$ [kg/(m s)]	$Y$ [-]	$N_{Stg}$ [10 <sup>-3</sup> ]
D0.5H6	-3096.0	0.02812	4.774	4.864
D1.0H6	1588.7	0.02763	4.781	6.332
S1.0H6	5769.4	0.03790	8.683	11.693

**ABBILDUNGEN**

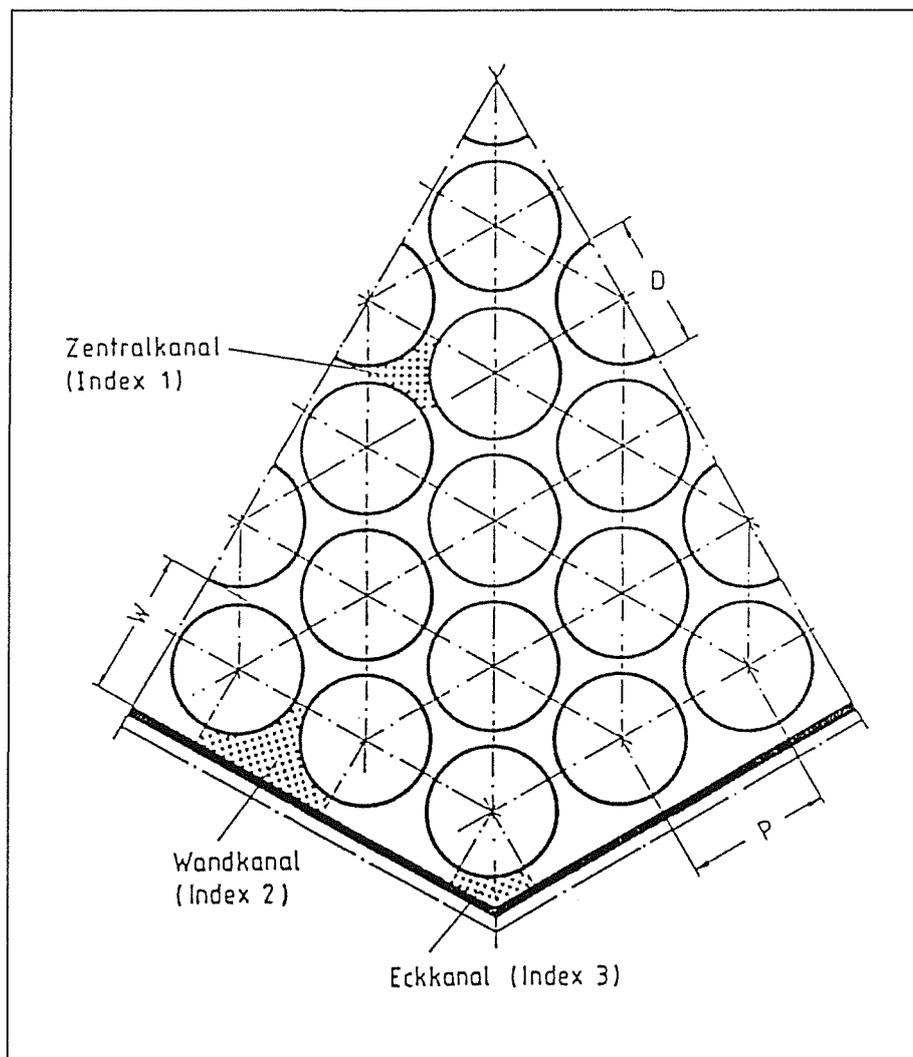


Abb. 1.1: Bezeichnungen an einem endlichen Stabbündelquerschnitt (hier 1/6-Bündel-Ausschnitt eines hexagonalen Bündels)

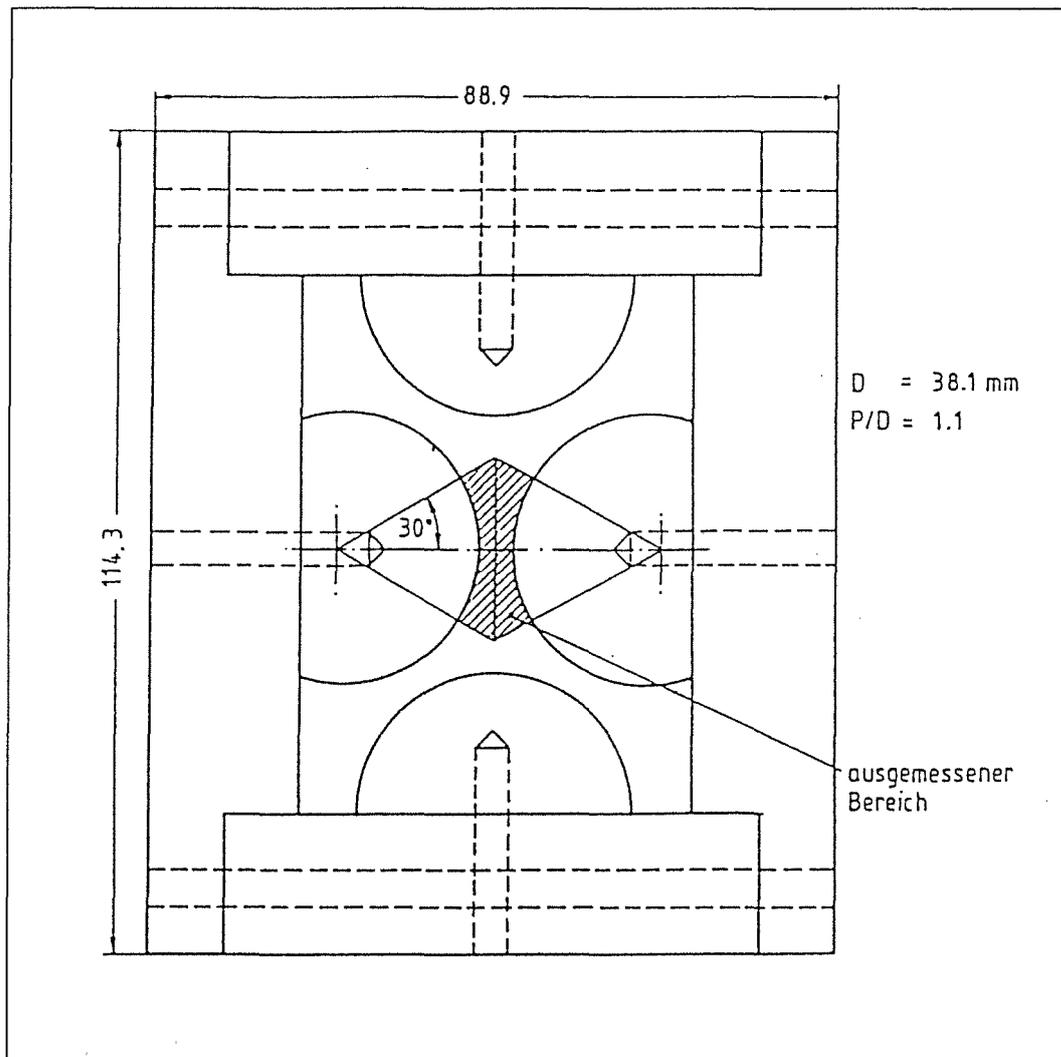


Abb. 2.1: Versuchsstreckenquerschnitt nach FAKORY-MONAZAH [10]

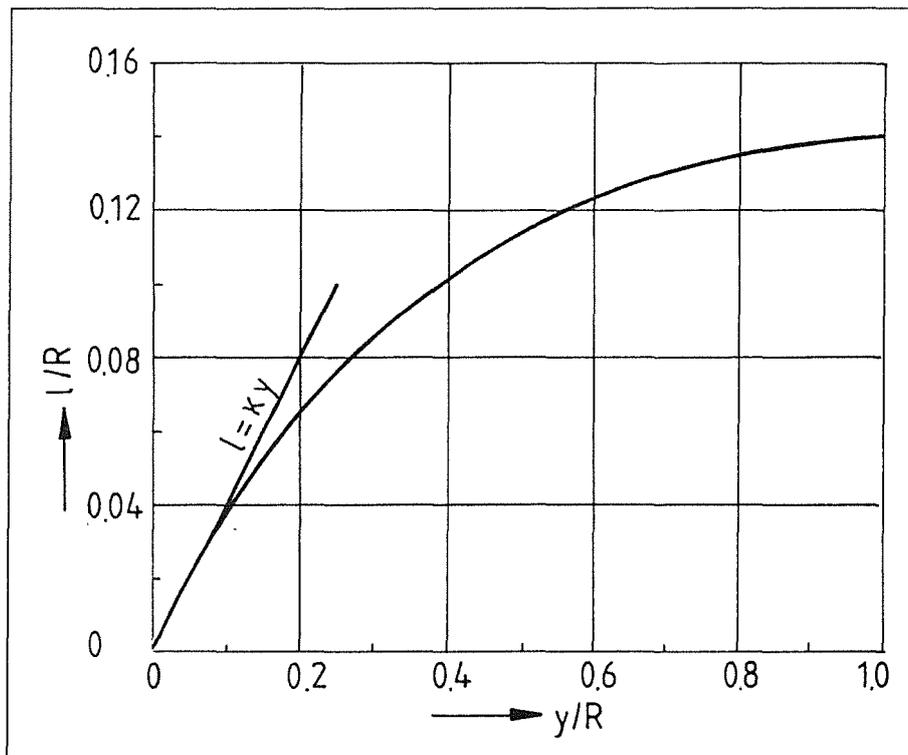


Abb. 3.1: Der normierte Mischungsweg  $l/R$  in Abhängigkeit vom normierten Wandabstand  $y/R$  nach experimentellen Ergebnissen von NIKURADSE [17]

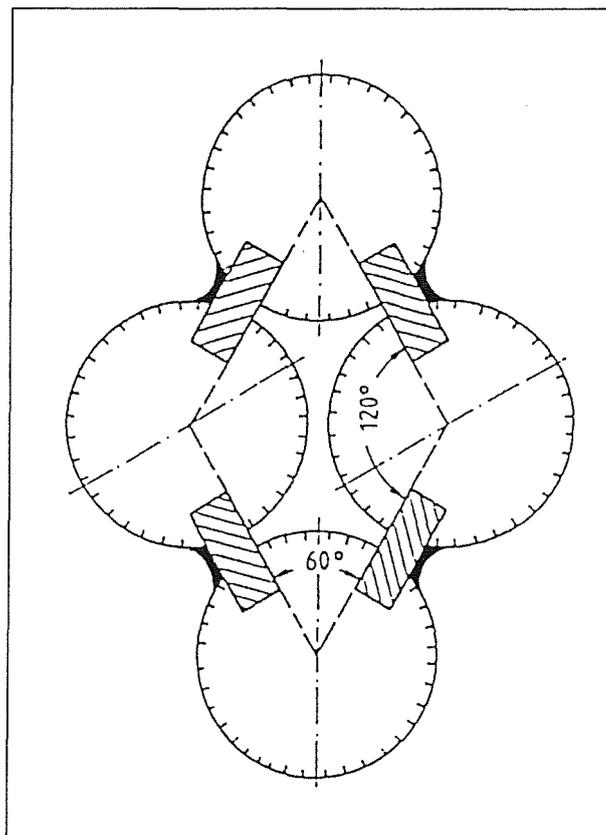


Abb. 3.2: Versuchsstreckenquerschnitt von EIFLER [22]

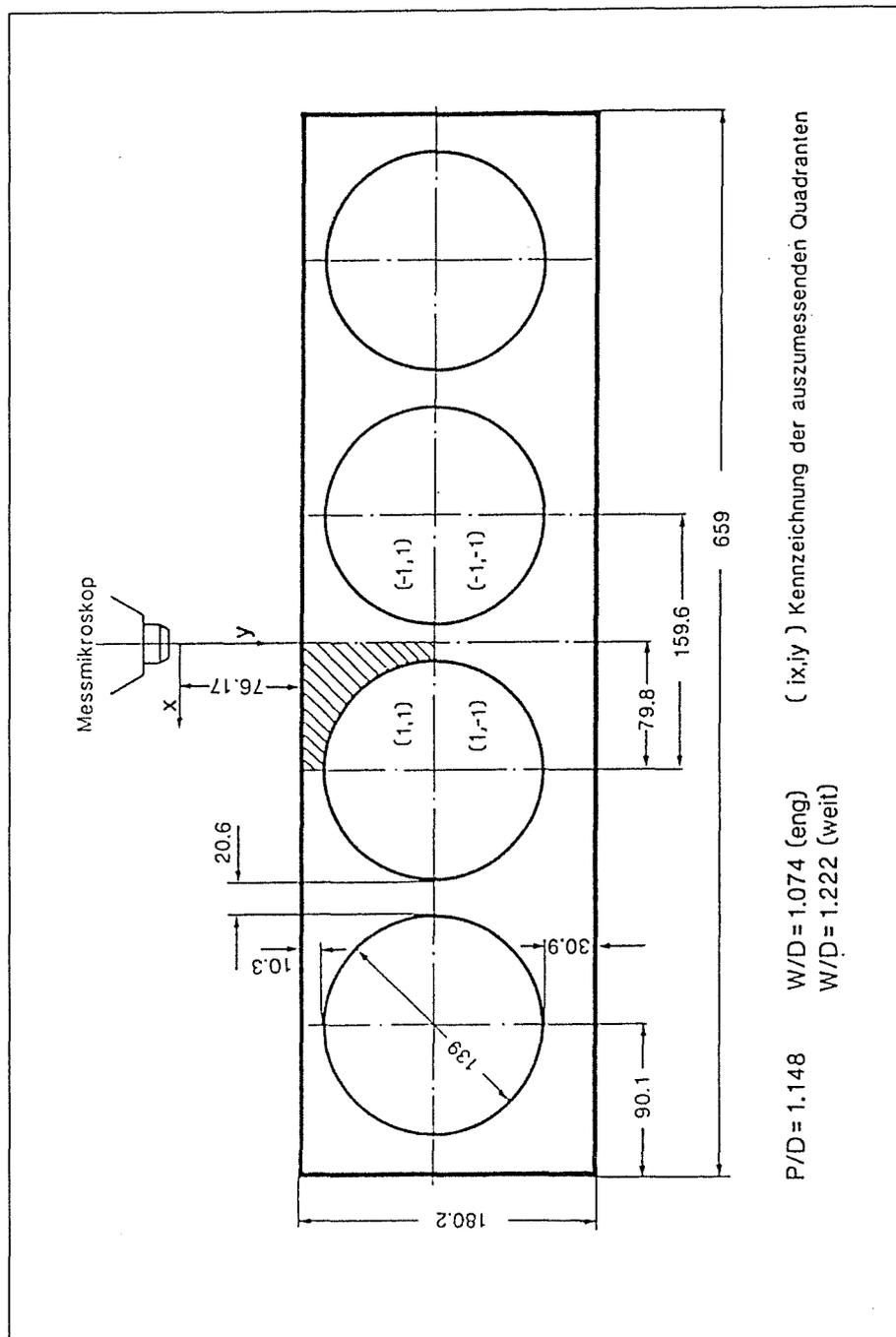


Abb. 3.3: Versuchsstreckenquerschnitt von REHME [32-44]

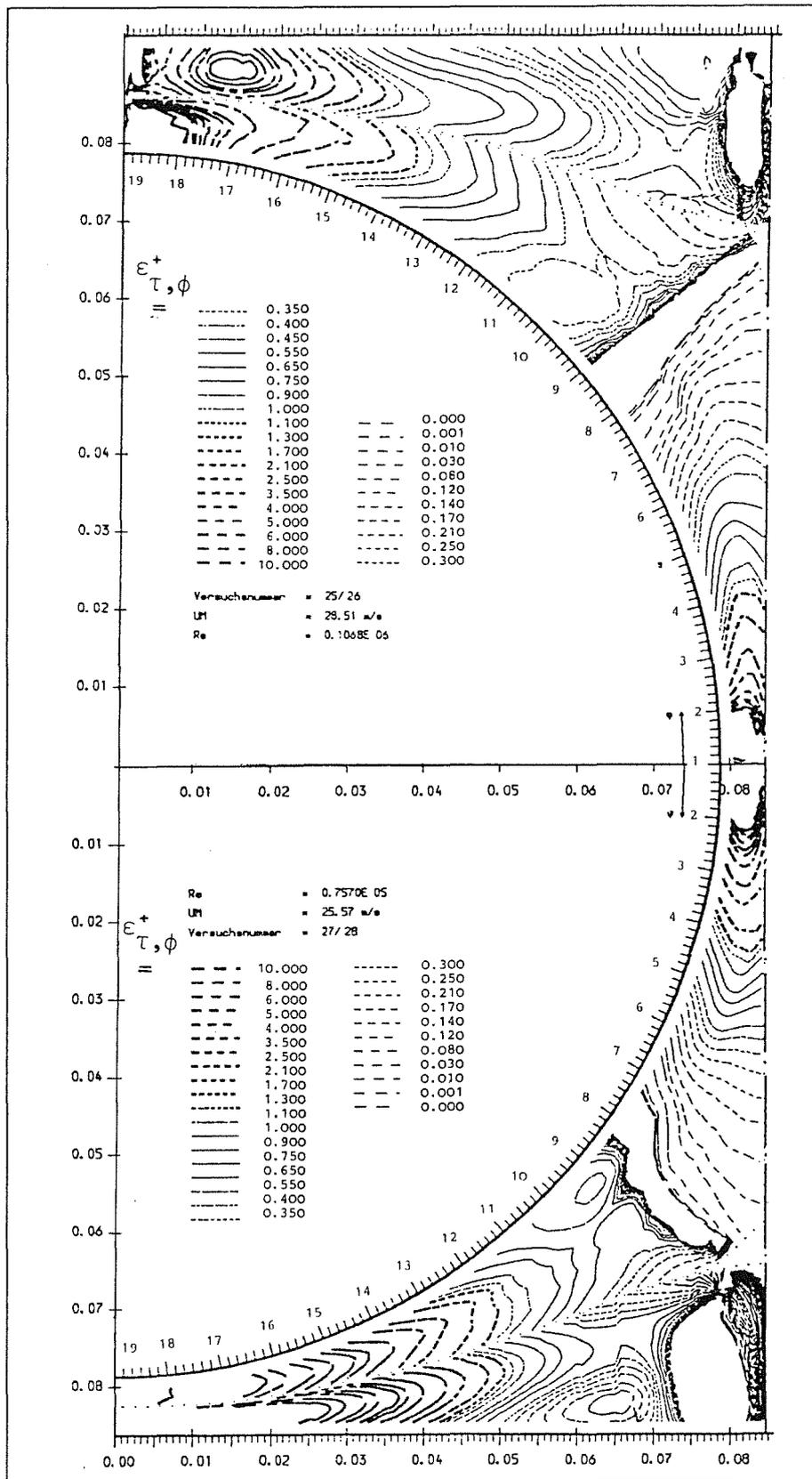


Abb. 3.4: Höhenliniendarstellung der wandparallelen Wirbelviskosität nach gefitteten Meßwerten von REHME (aus NEELEN [3])

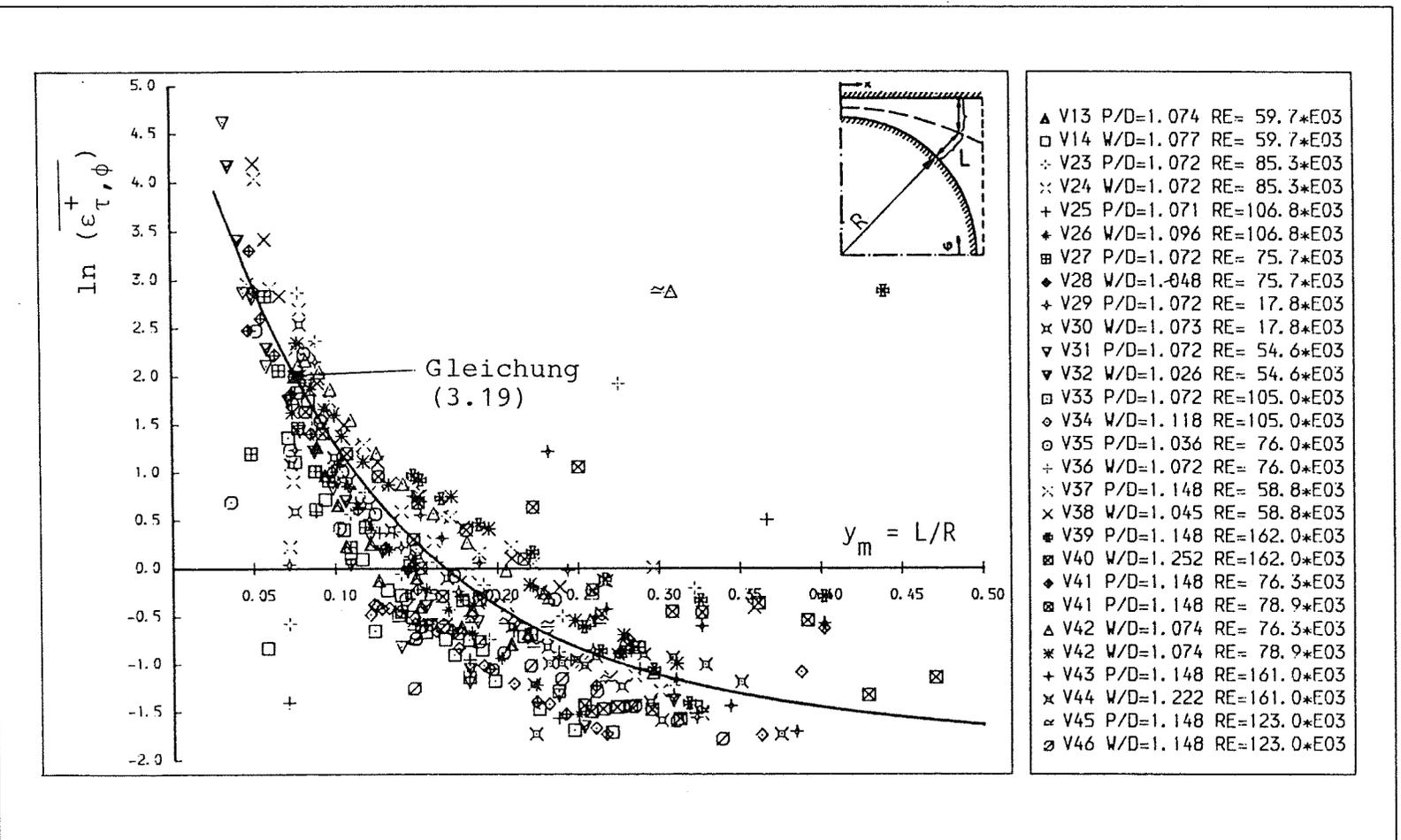


Abb. 3.5: Gemittelte Meßwerte der radial gemittelten, dimensionslosen wandparallelen Wirbelviskosität über der dimensionslosen Profillänge (aus NEESEN [3])

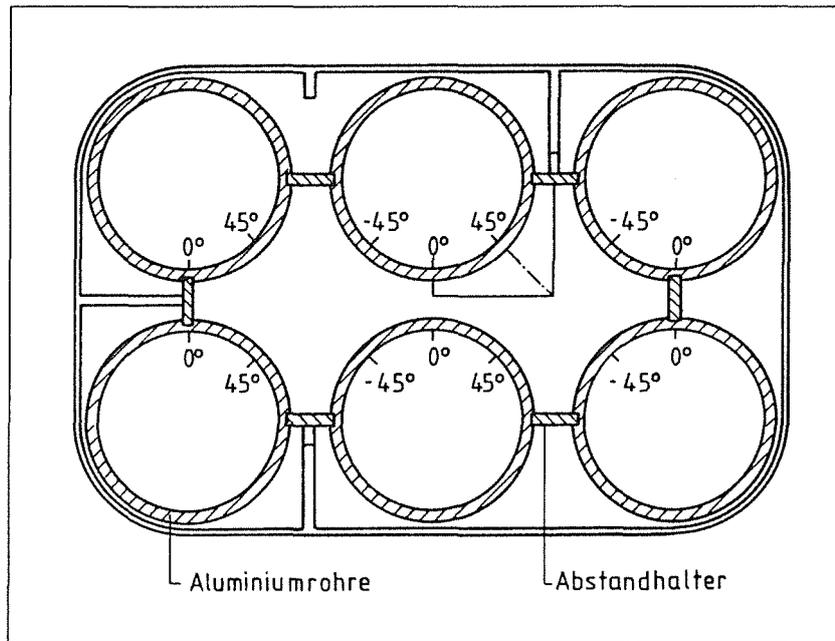
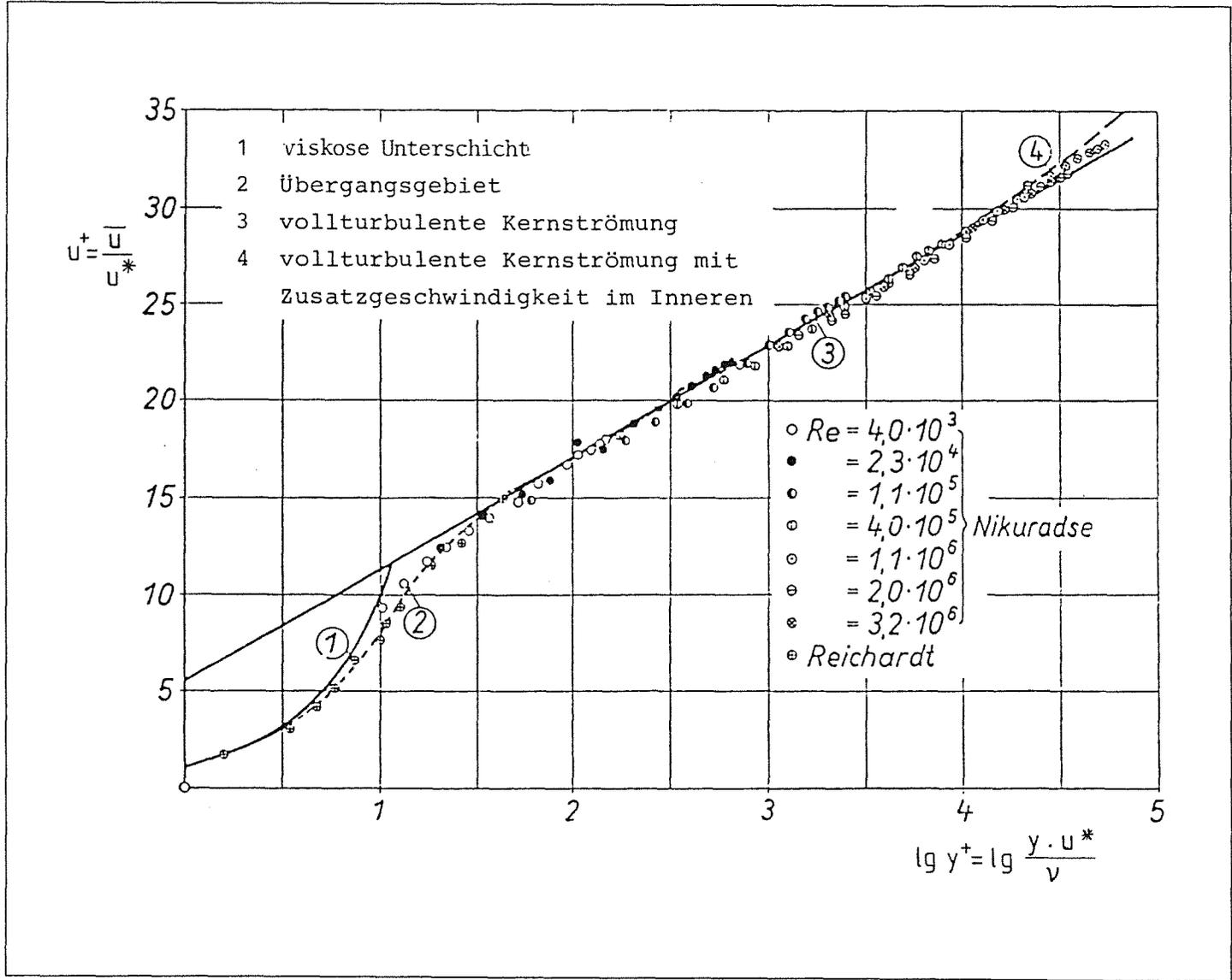


Abb. 3.6: Versuchsstreckenquerschnitt von HOOPER [47]

Abb. 3.7: Die dimensionslose Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom dimensionslosen Wandabstand



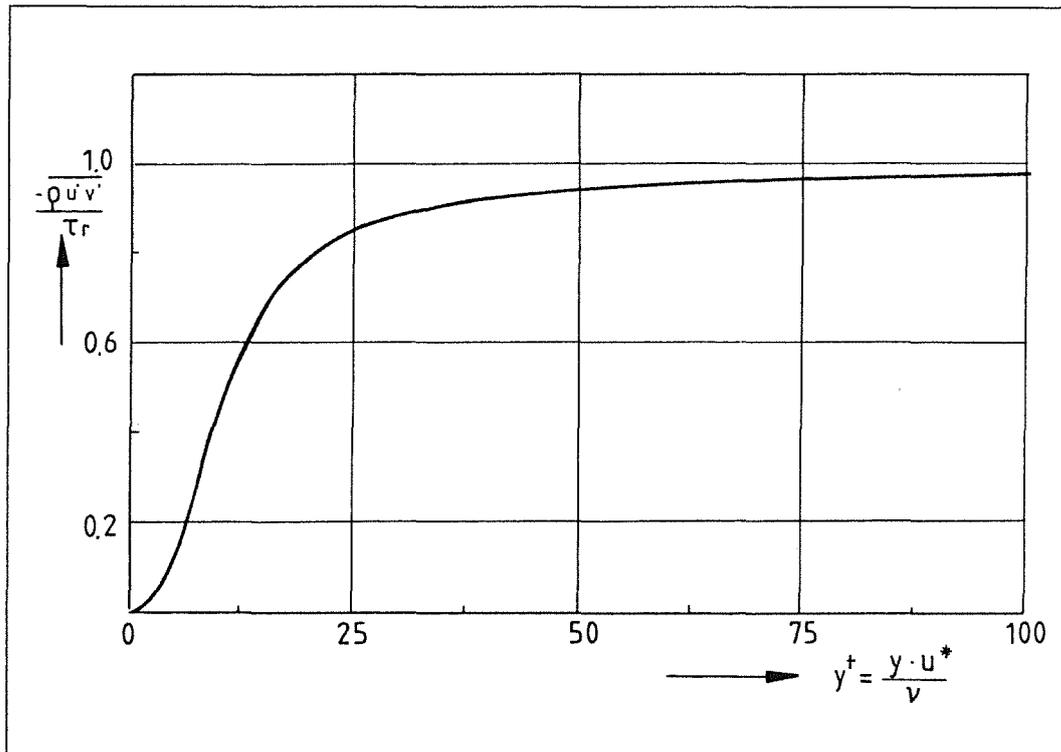


Abb. 3.8: Die relative turbulente Schubspannung über dem dimensionslosen Wandabstand in einem Kreisrohr (nach REICHARDT [21])

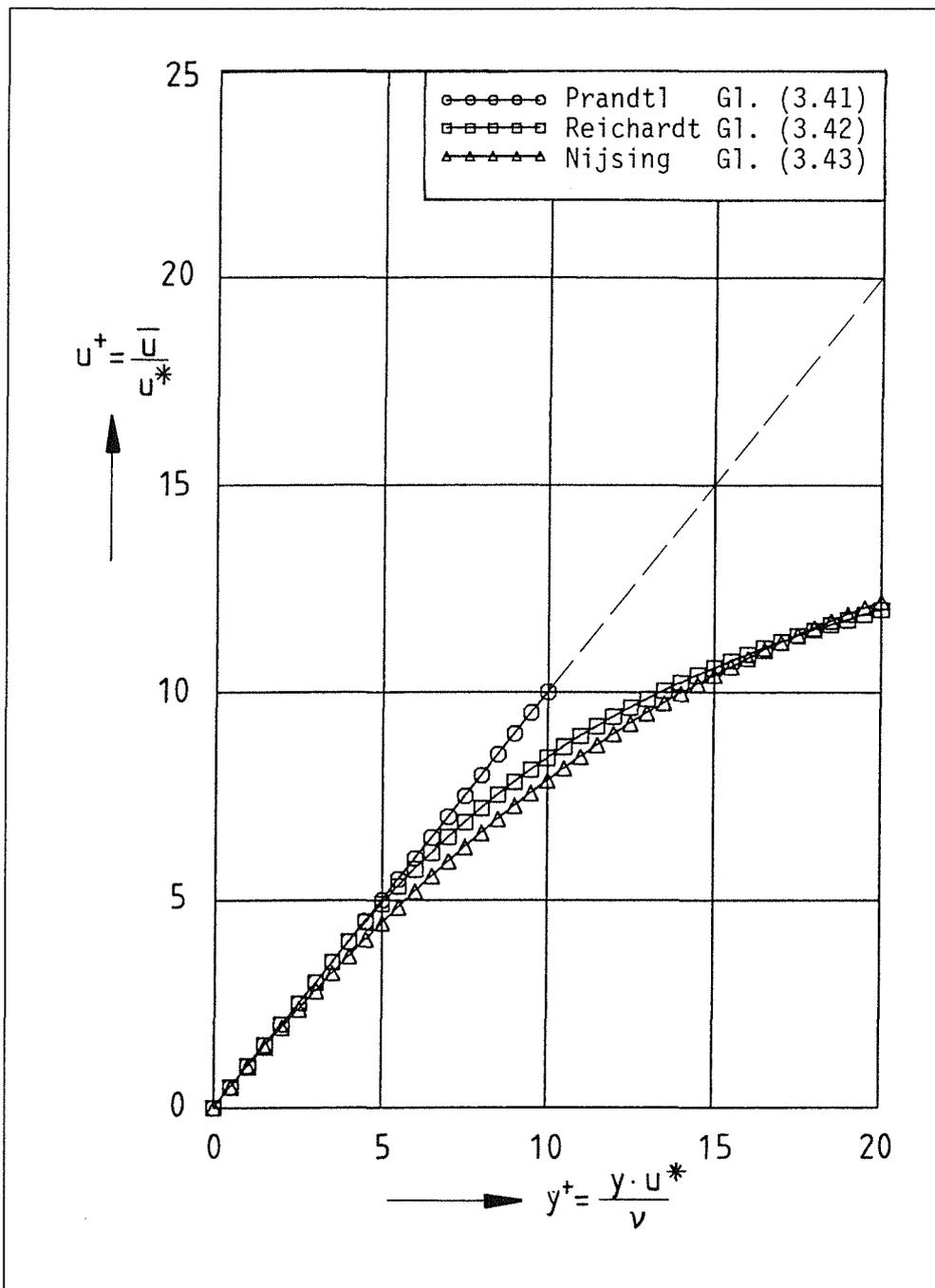


Abb. 3.9: Die dimensionslose Geschwindigkeit  $u^+ = \bar{u}/u^*$  in Abhängigkeit vom dimensionslosen Wandabstand  $y^+ = \frac{y \cdot u^*}{\nu}$  im Bereich der viskosen Unterschicht ( $y^+ \leq 20$ )

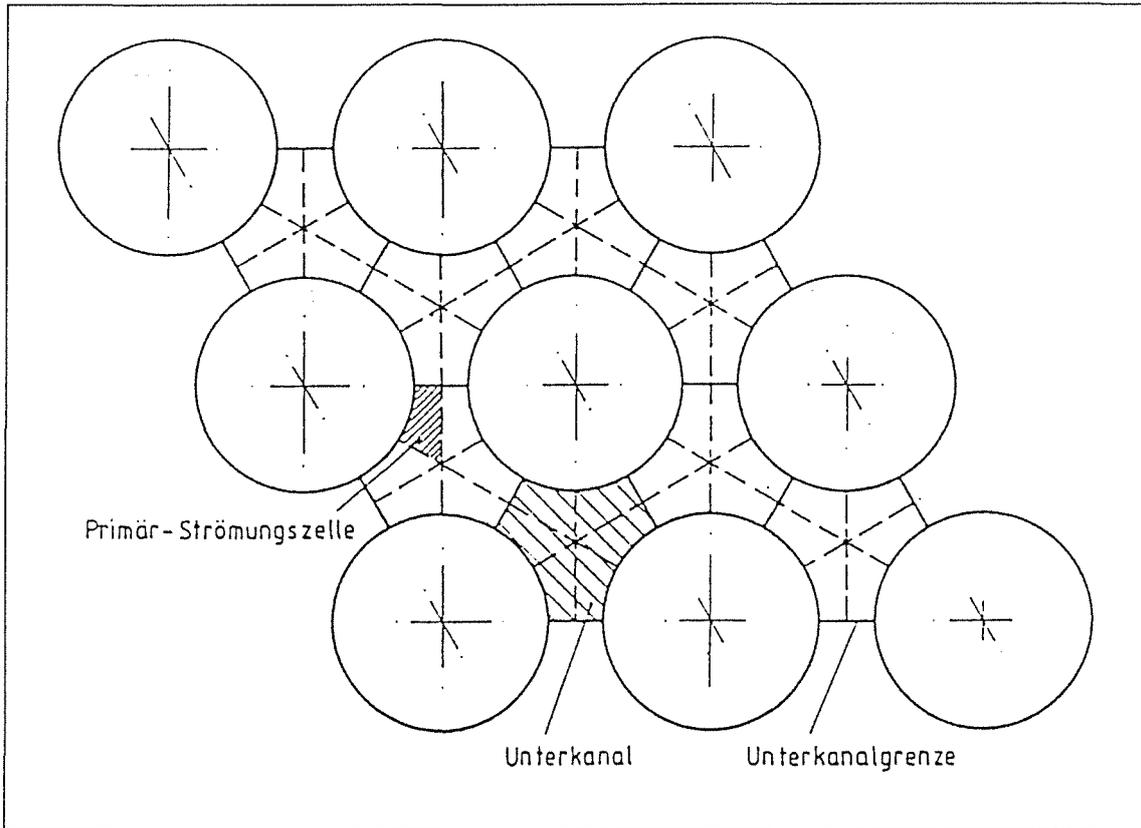


Abb. 3.10: Unendliches hexagonales Gitter

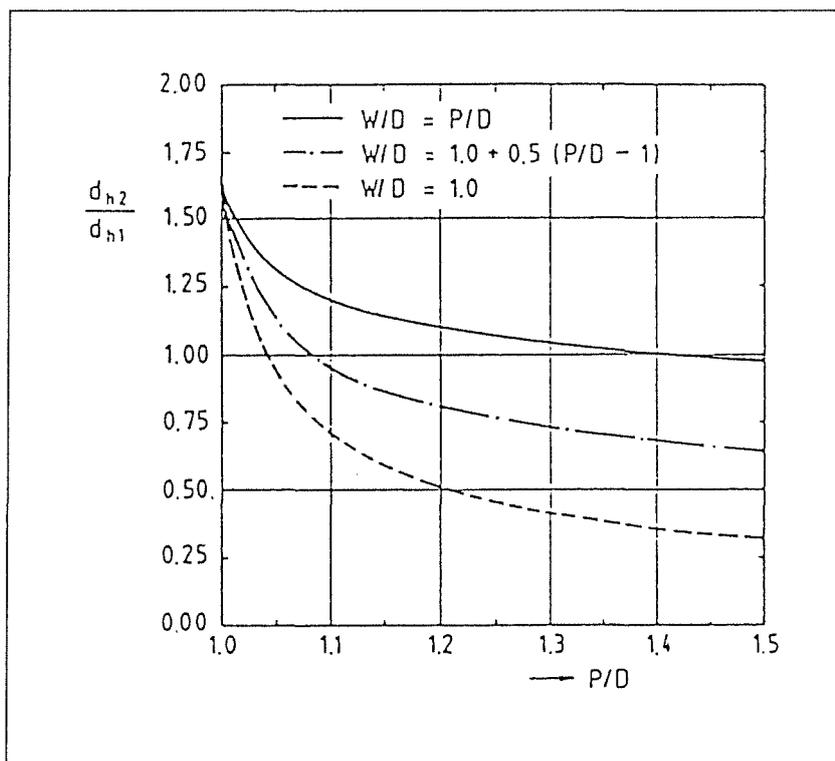


Abb. 3.11: Verhältnis der hydraulischen Durchmesser von Wand-(2) zu Zentral-(1)Kanal über dem relativen Stabmittenabstand für verschiedene relative Wandabstandsverhältnisse

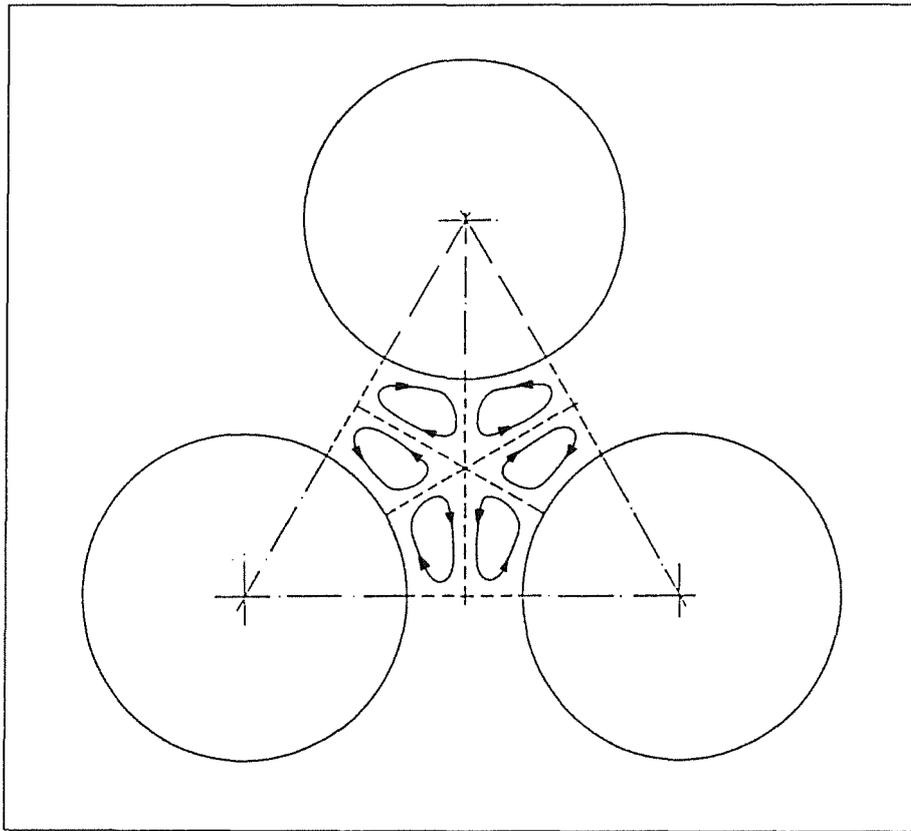


Abb. 3.12: Schematischer Verlauf der Sekundärströmungswirbel in einem Zentralkanal

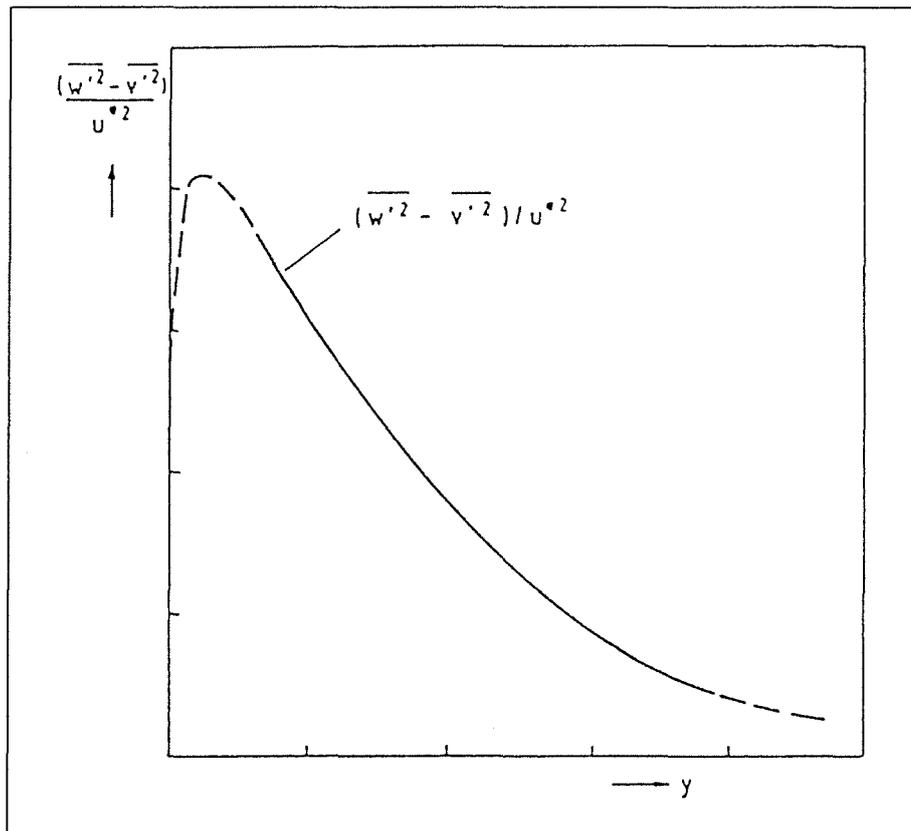


Abb. 3.13: Schematischer Verlauf der Differenz  $\overline{w'^2} - \overline{v'^2}$  der REYNOLDS'schen Normalspannungen in einem Kreisrohr (nach HAQUE ET AL. [59])

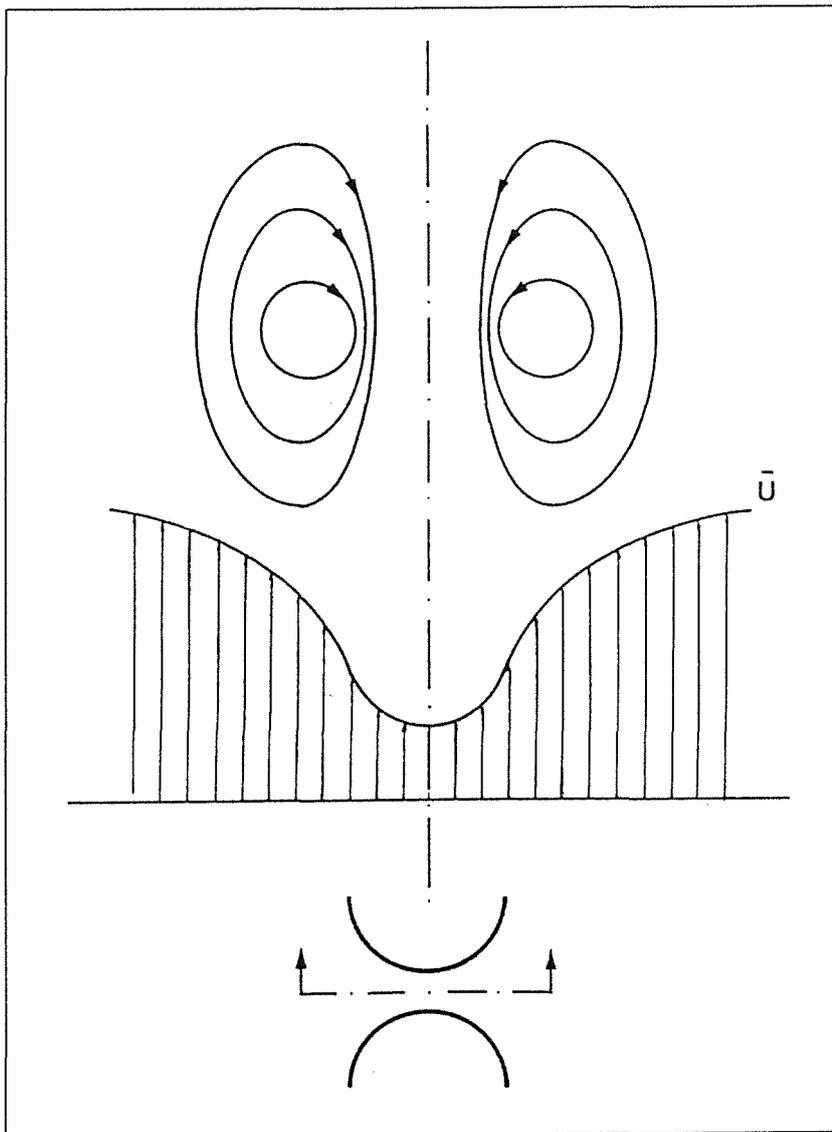


Abb. 3.14: Schematische Darstellung der Wirbel im Spalt zwischen zwei Stäben — idealer Zustand  
(aus MÖLLER [61])

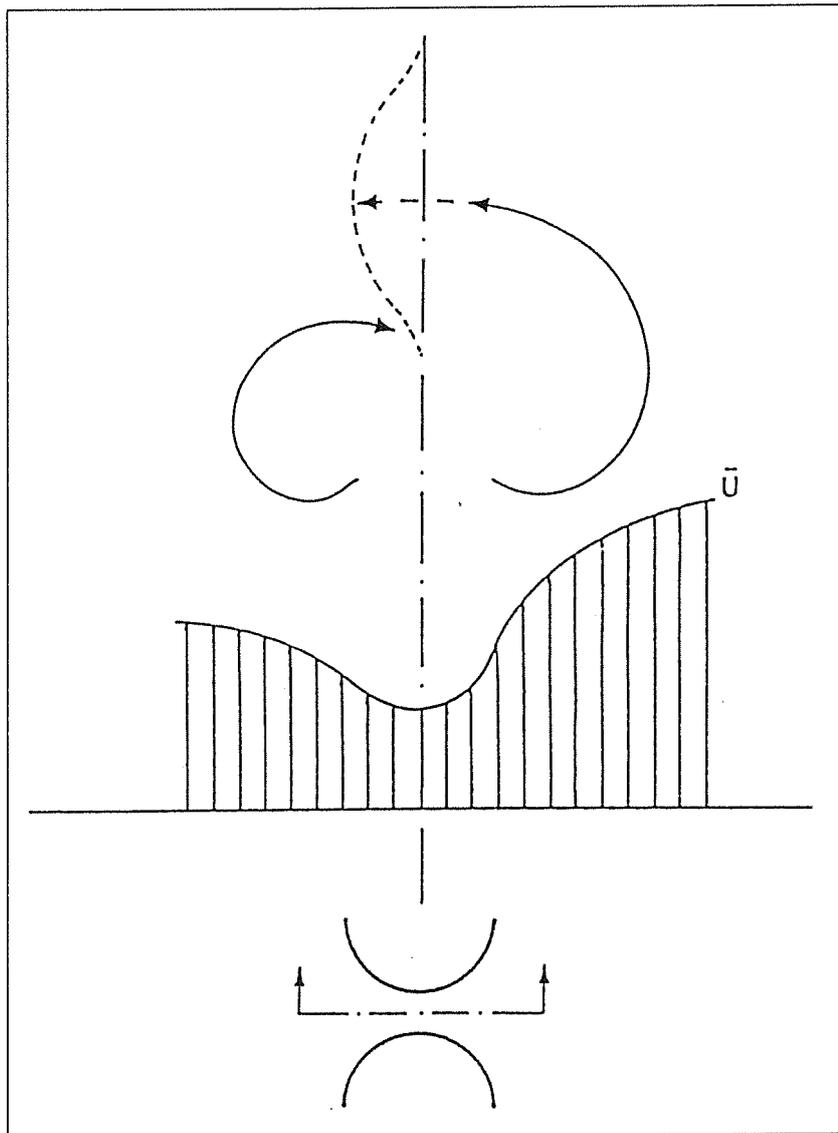


Abb. 3.15: Schematische Darstellung der Wirbel im Spalt zwischen zwei Stäben — realer Zustand  
(aus MÖLLER [61])

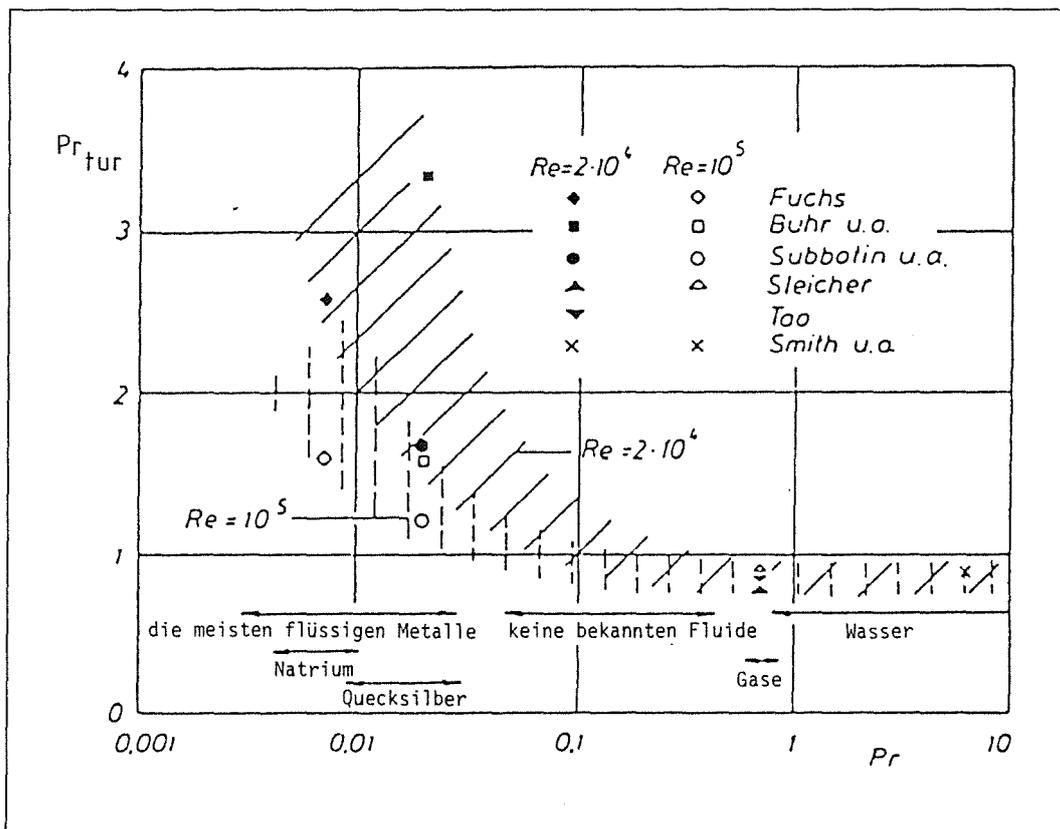


Abb. 4.1: Experimentelle Ergebnisse für die turbulente PRANDTL-Zahl bei ausgebildeter Kreisrohrströmung in Abhängigkeit von der molekularen PRANDTL-Zahl (aus RIEKE [64])

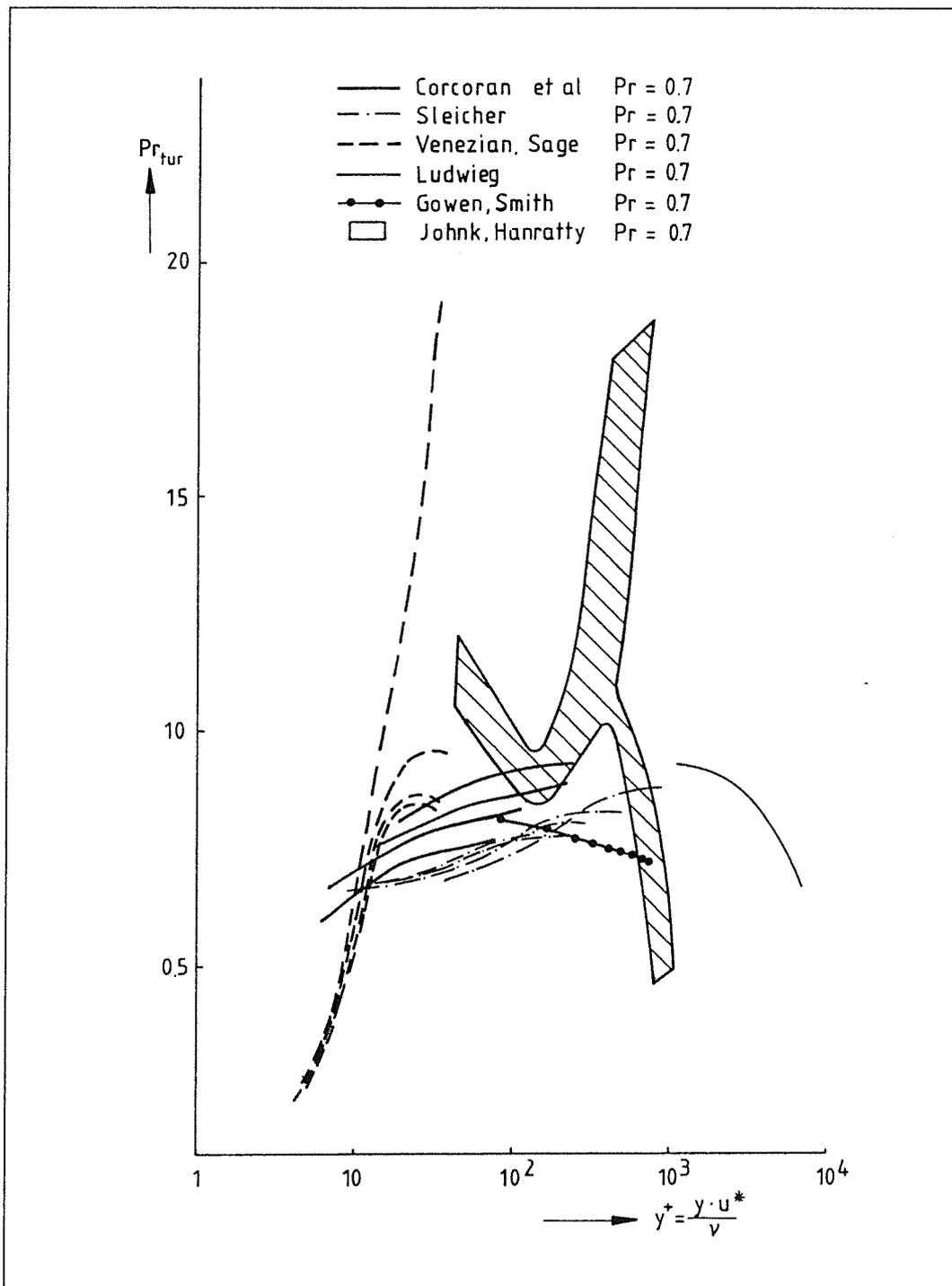


Abb. 4.2: Aus experimentell ermittelten Daten abgeleitete turbulente PRANDTL-Zahlen bei ausgebildeten Luftströmungen durch Kreisrohre bzw. Rechteckkanäle in Abhängigkeit vom normierten Wandabstand  $y^+ = \frac{y \cdot u^*}{\nu}$  (nach BLOM [70])

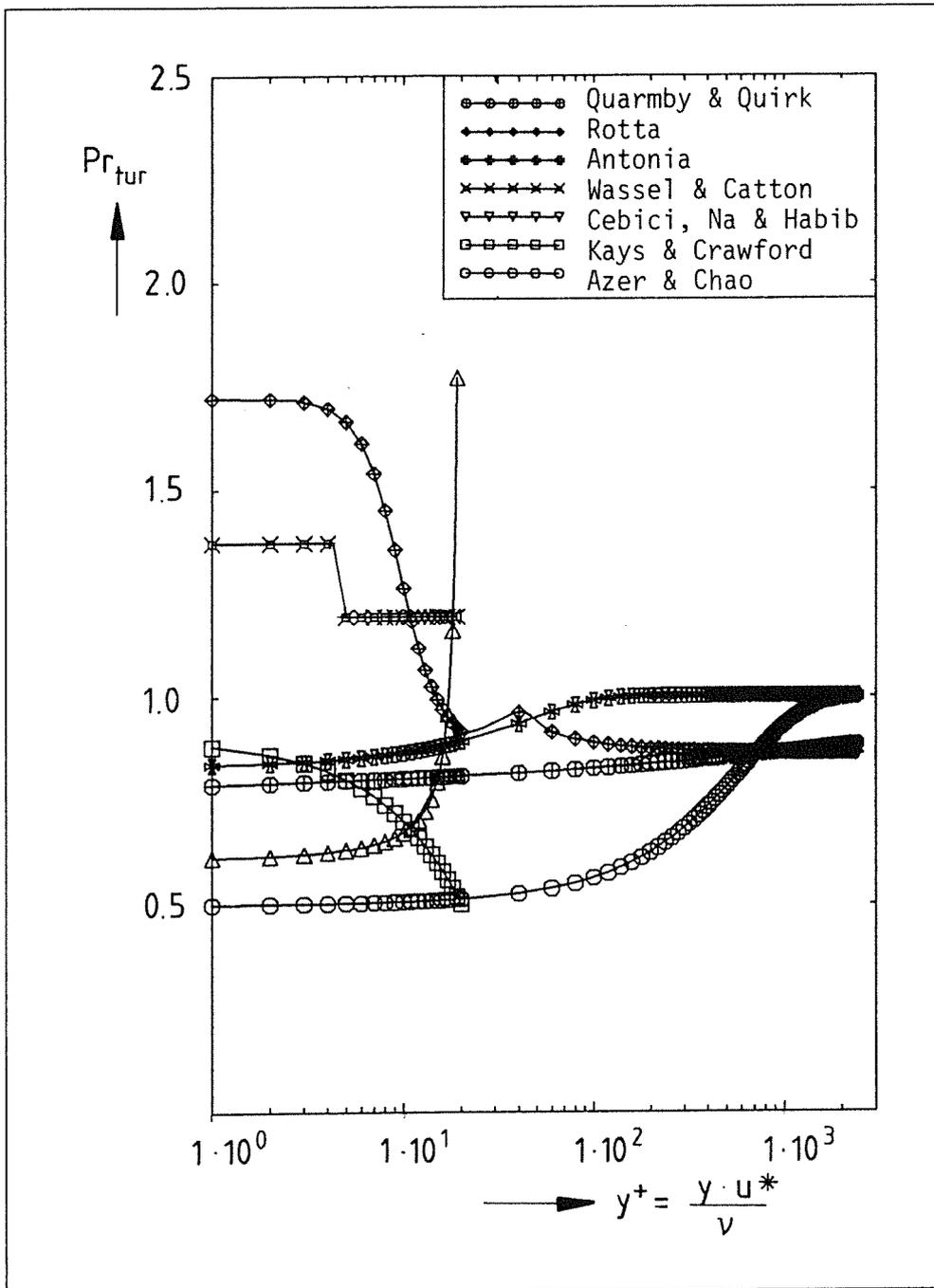


Abb. 4.3: Turbulente PRANDTL-Zahl  $Pr_{tur}$  im Kreisrohr in Abhängigkeit vom normierten Wandabstand  $y^+ = y \cdot u^* / \nu$  — Vergleich verschiedener Beziehungen der Literatur.  
 ( $Re = 10^5$ ; Fluid: Luft;  $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ ;  $T = 25^\circ\text{C}$ ;  $Pr = 0.69$ )

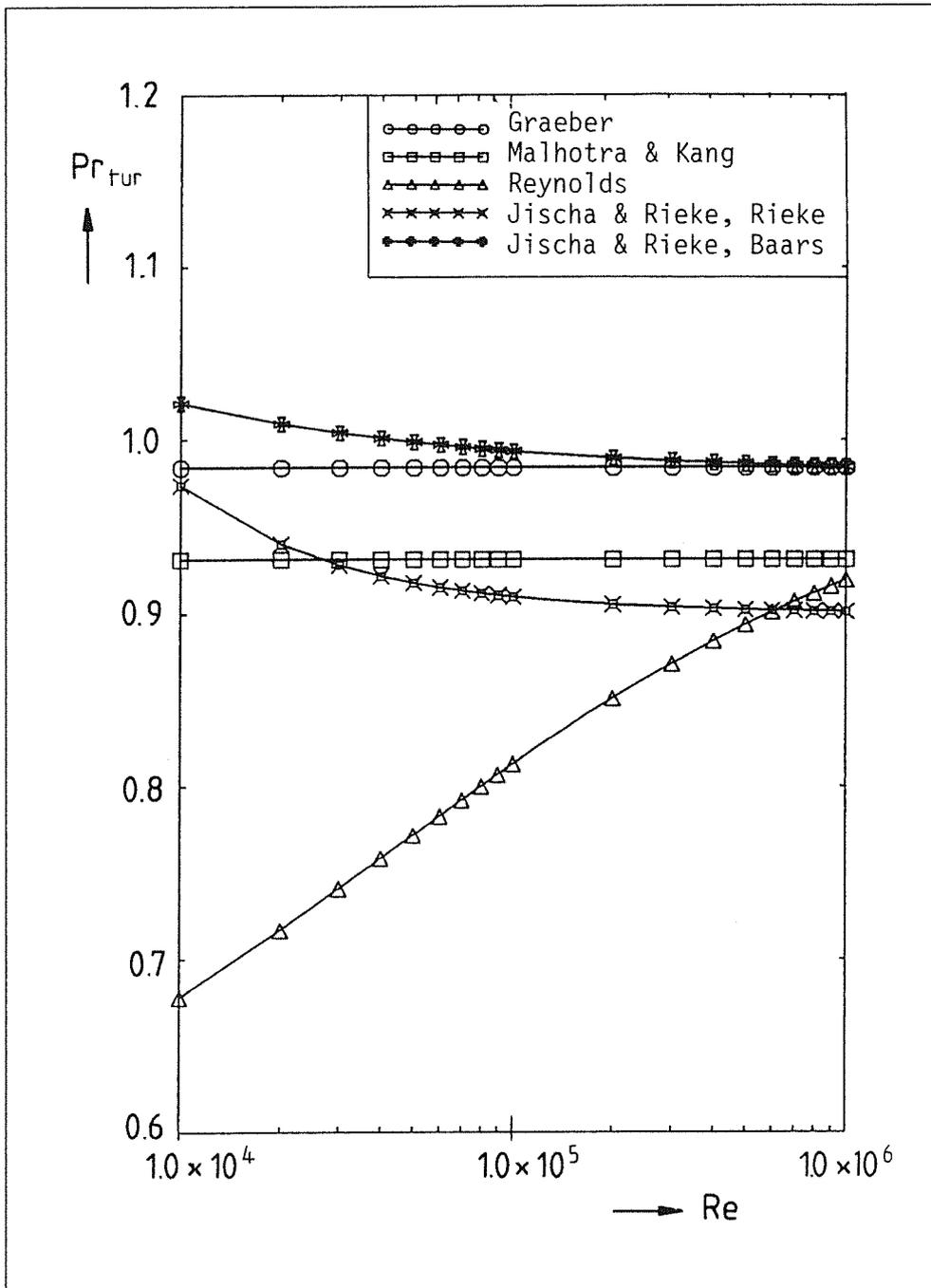


Abb. 4.4: Turbulente PRANDTL-Zahl  $Pr_{tur}$  im Kreisrohr in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl  $Re$  — Vergleich verschiedener Beziehungen der Literatur.

(Fluid: Luft;  $p = 10^5 \text{ N/m}^2$ ;  $T = 25^\circ\text{C}$ ;  $Pr = 0.69$ )

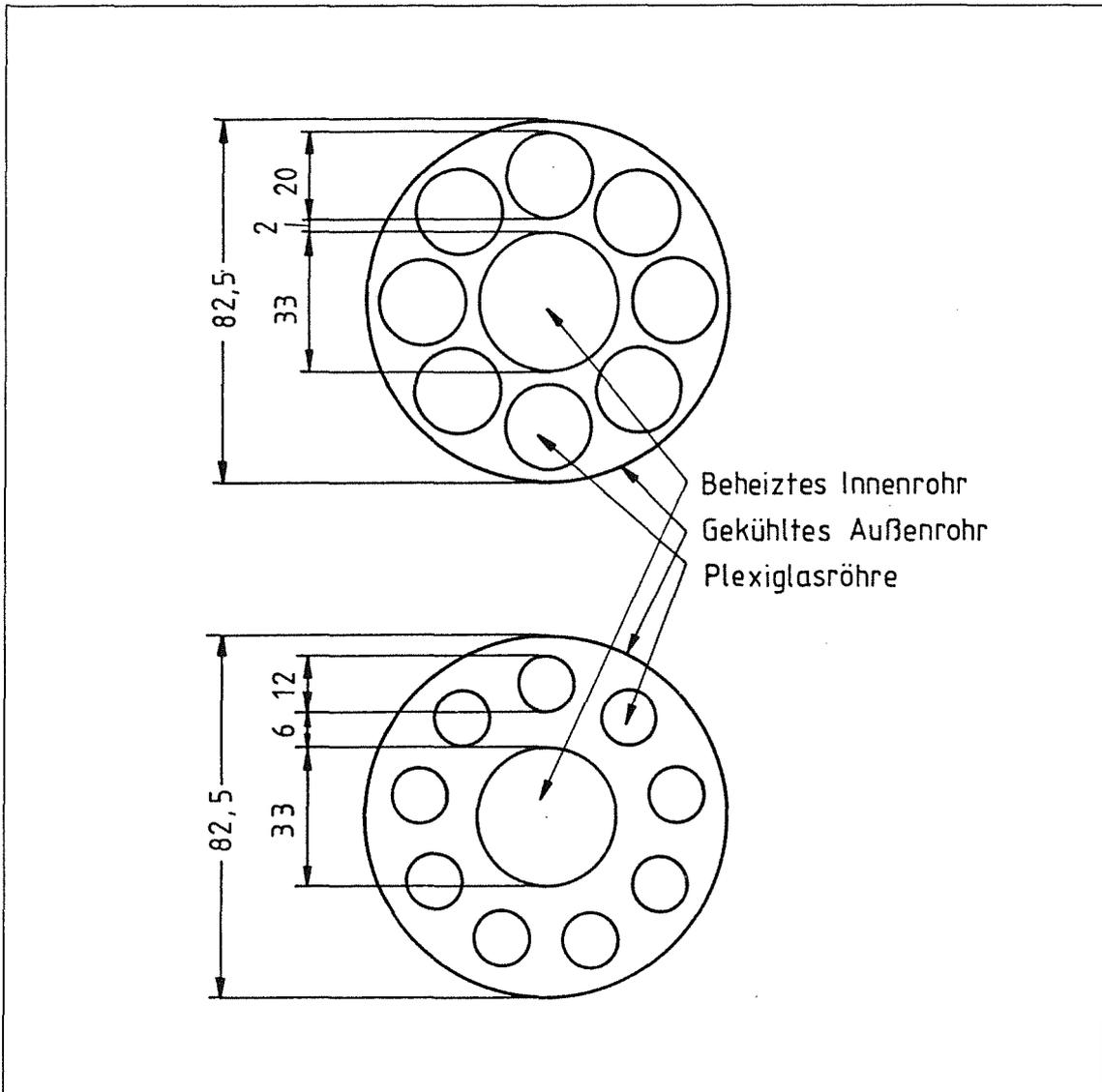


Abb. 4.5: Testbündel von INGESSON ET AL. [104]

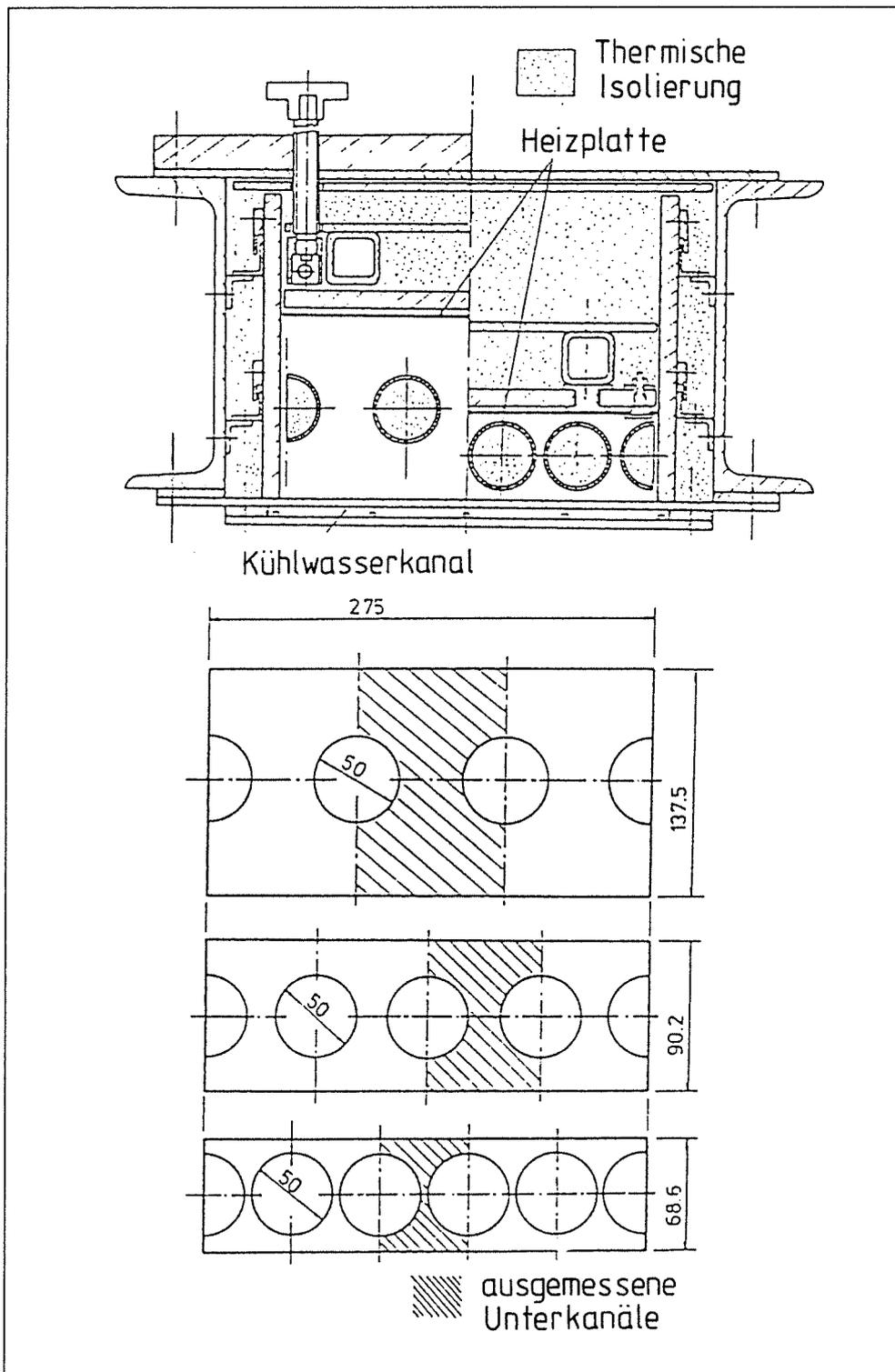


Abb. 4.6: Testbündel von SEALE [7]

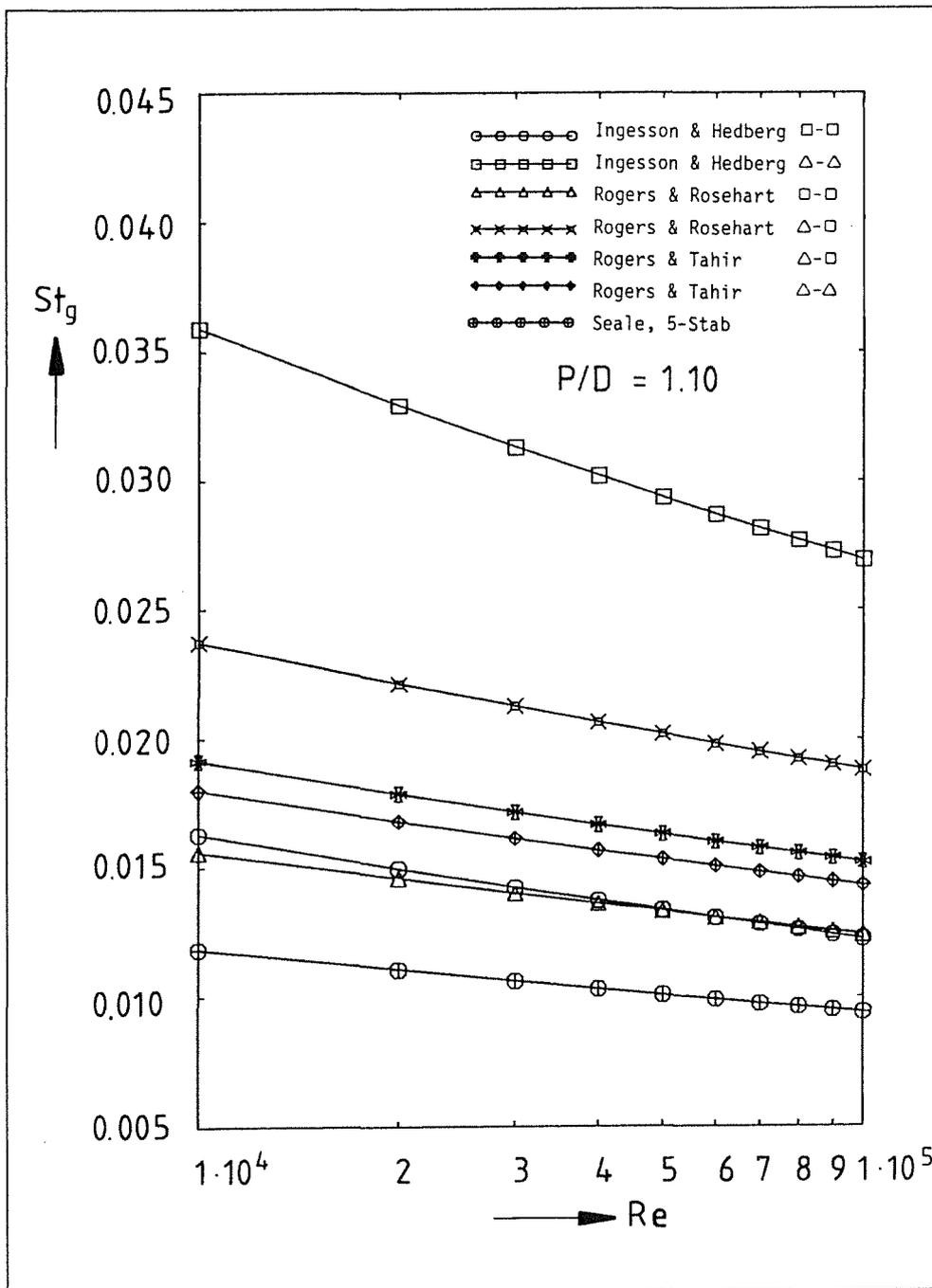


Abb. 4.7: STANTON- Zahl im Spalt  $St_g$  in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl  $Re$  — Vergleich verschiedener Beziehungen der Literatur für einen relativen Stabmittenabstand  $P/D = 1.10$

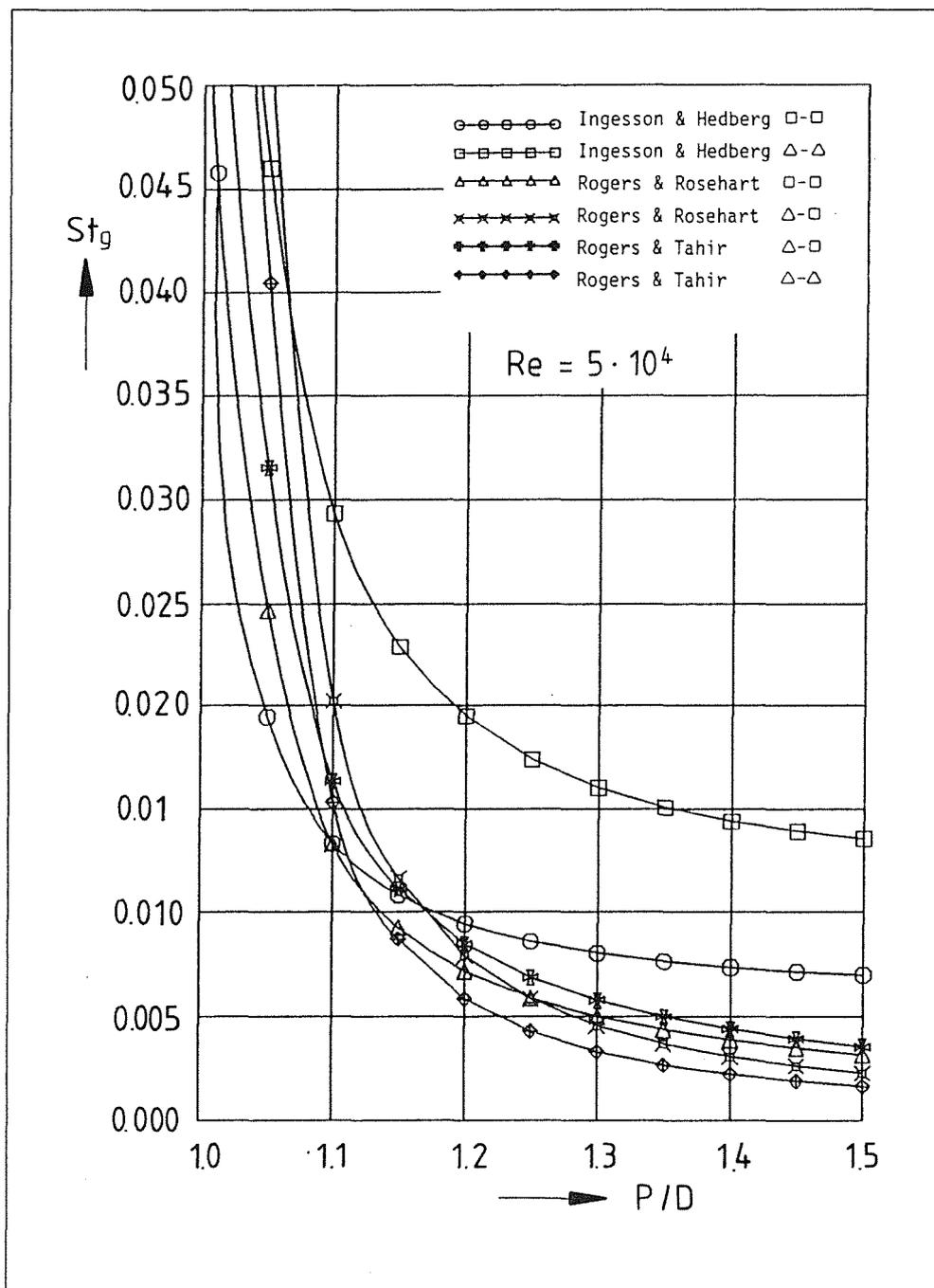


Abb. 4.8: STANTON- Zahl im Spalt  $St_g$  in Abhängigkeit von dem relativen Stabmittenabstand  $P/D$  — Vergleich verschiedener Beziehungen der Literatur für eine REYNOLDS-Zahl  $Re = 5 \cdot 10^4$

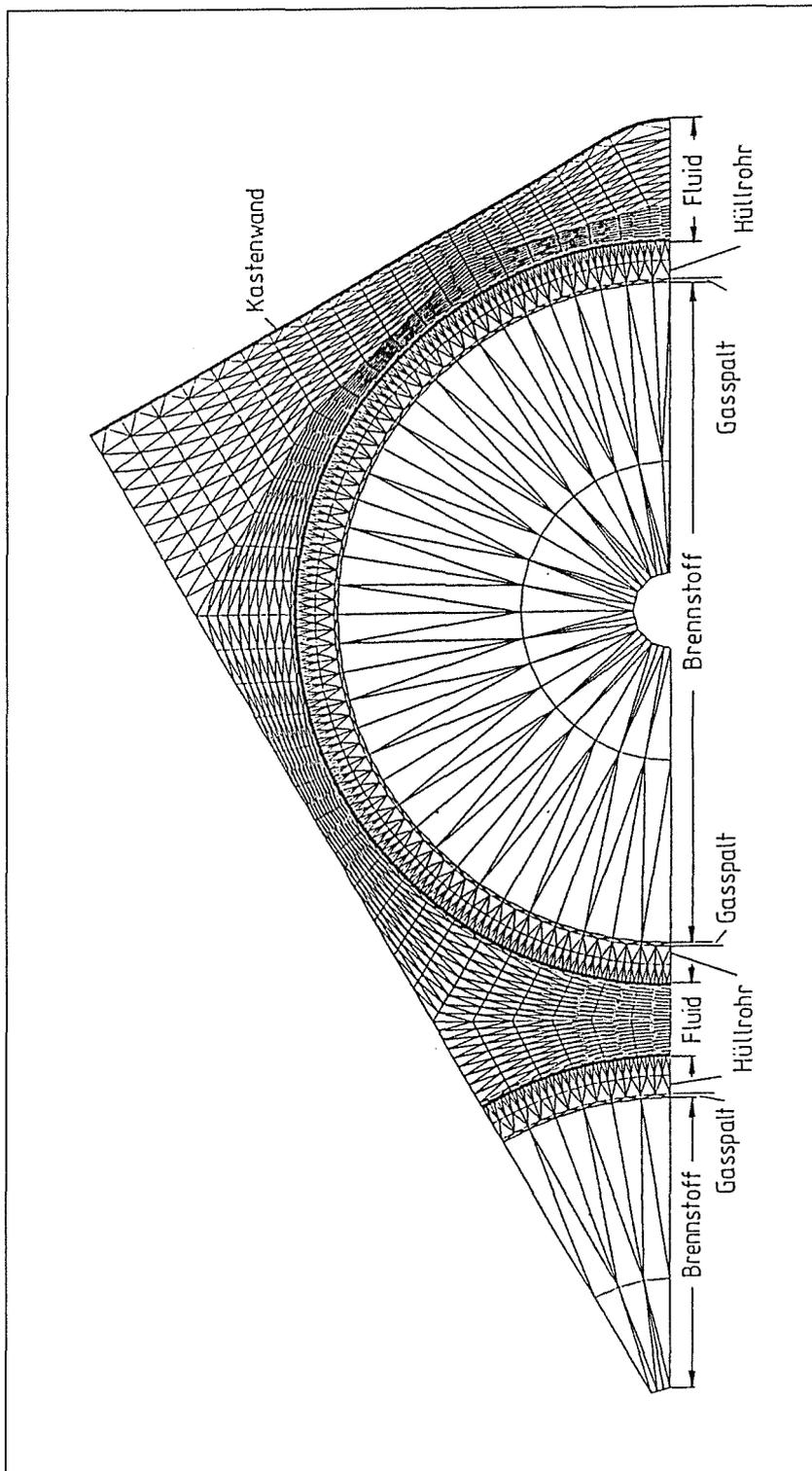


Abb. 5.1: Finite Elemente-Netz für einen 7-Stabbündel-Ausschnitt (1/12-Ausschnitt)

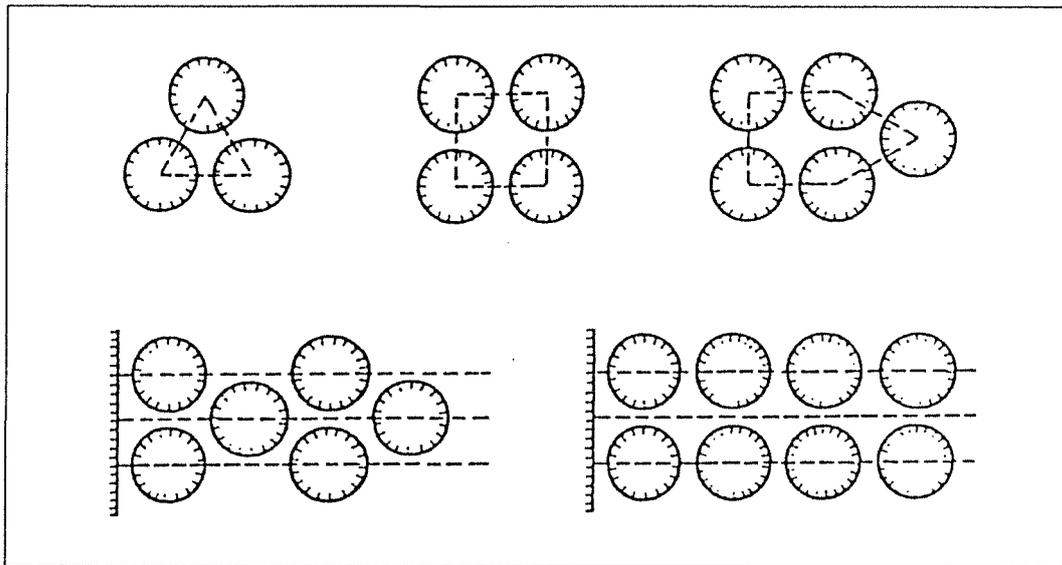


Abb. 5.2a: Unendliche und halbunendliche Stabanordnungen

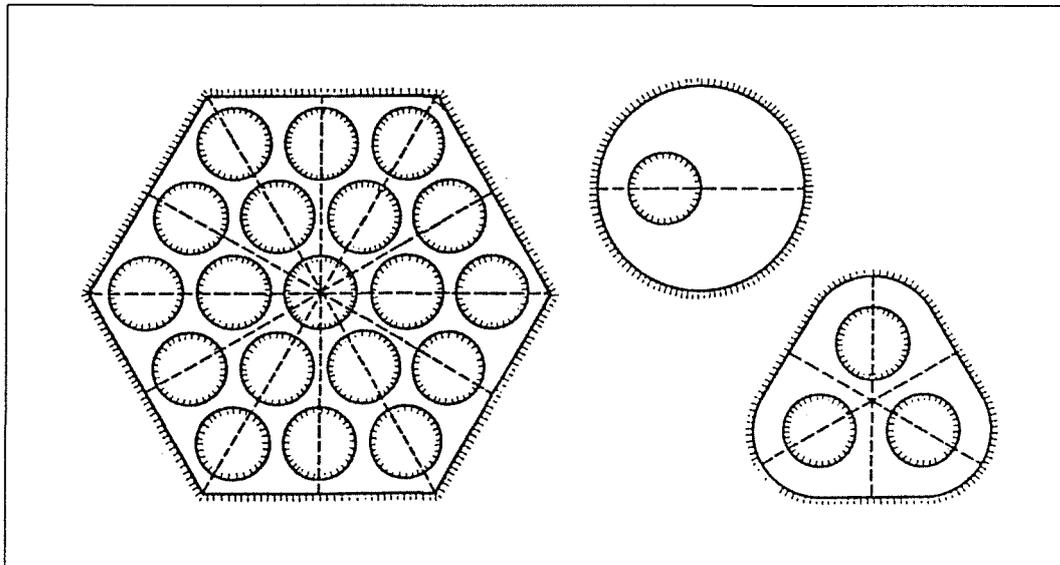


Abb. 5.2b: Endliche Stabanordnungen

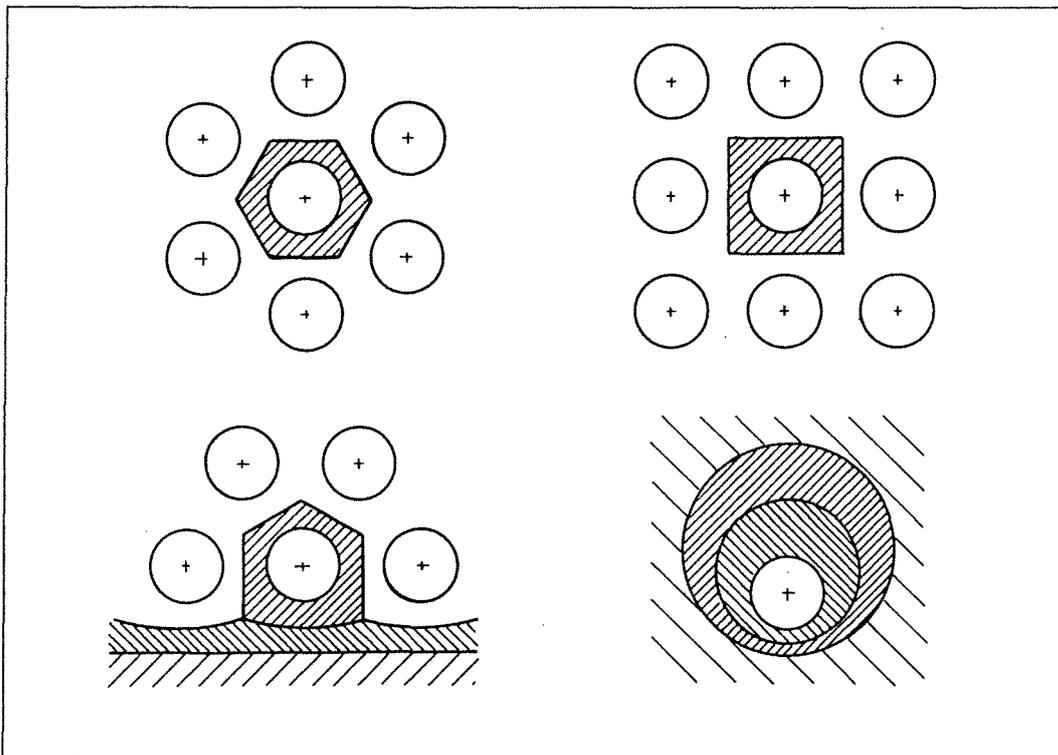


Abb. 5.3: Einteilung verschiedener Strömungsquerschnitte in impulsneutrale Zonen

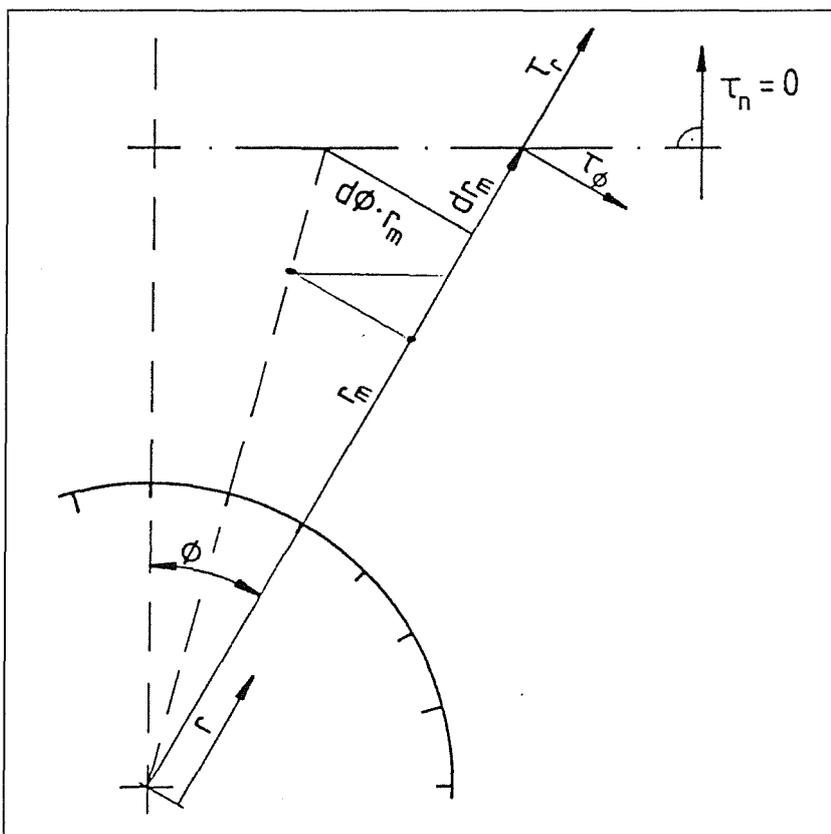


Abb. 5.4: Darstellung der Randbedingungen auf der Schubspannungsnulllinie

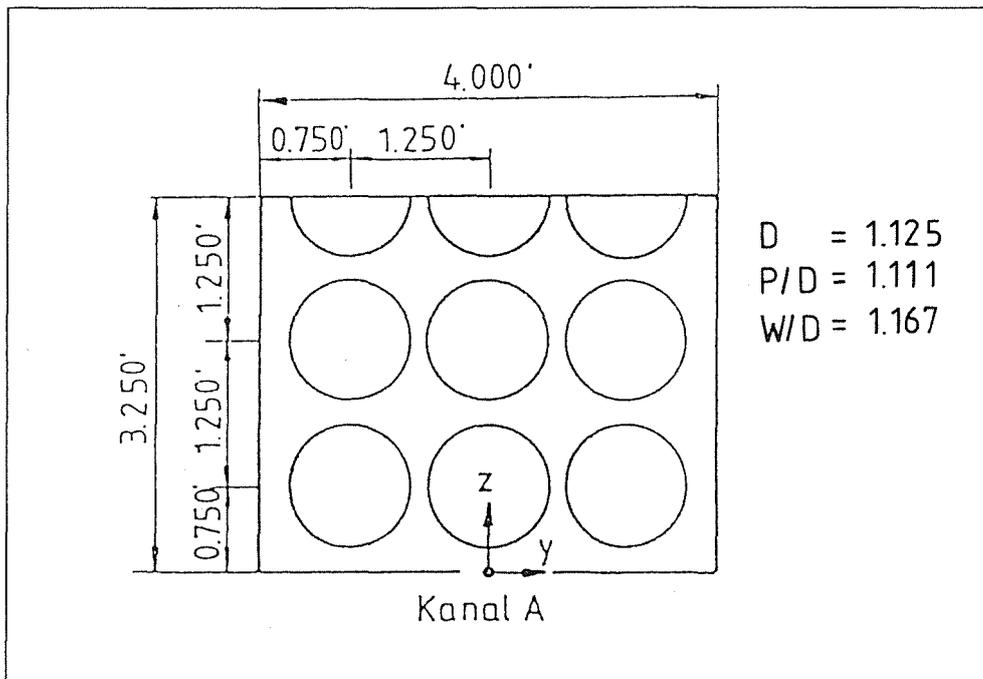


Abb. 5.5a: Versuchsstreckenquerschnitt von ROWE [1], Kanal A

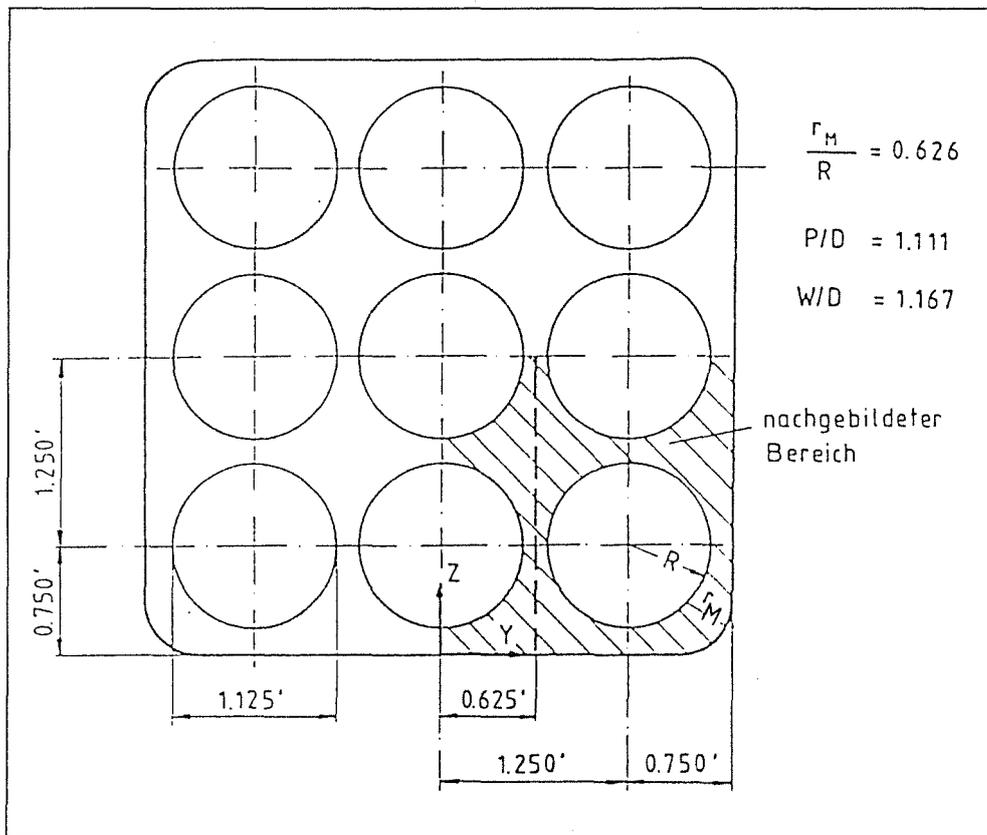


Abb. 5.5b: Modellgeometrie zur Nachrechnung der Experimente von ROWE [1], Kanal A, mit dem FDM-Code VELASCO-TUBS [3]

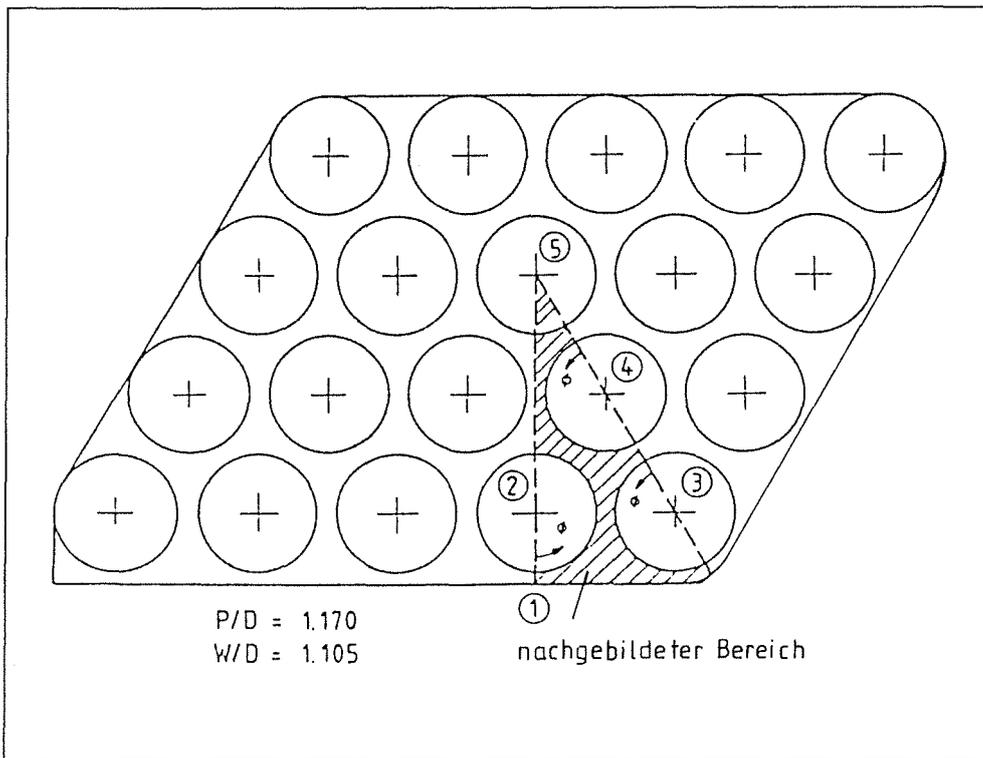


Abb. 5.6: Versuchsstreckenquerschnitt von HEJNA ET AL. [108]

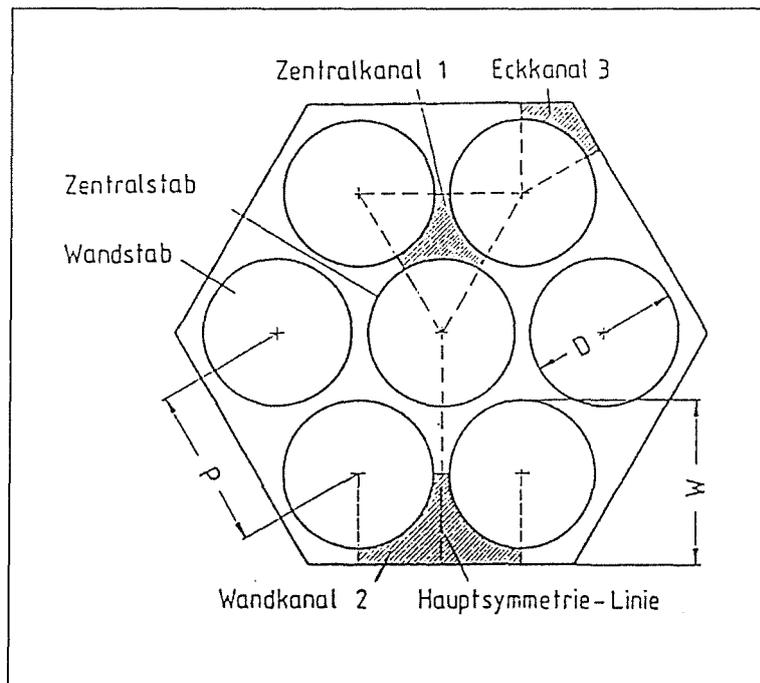


Abb. 5.7: Geometrie eines regelmäßigen 7-Stabbündels

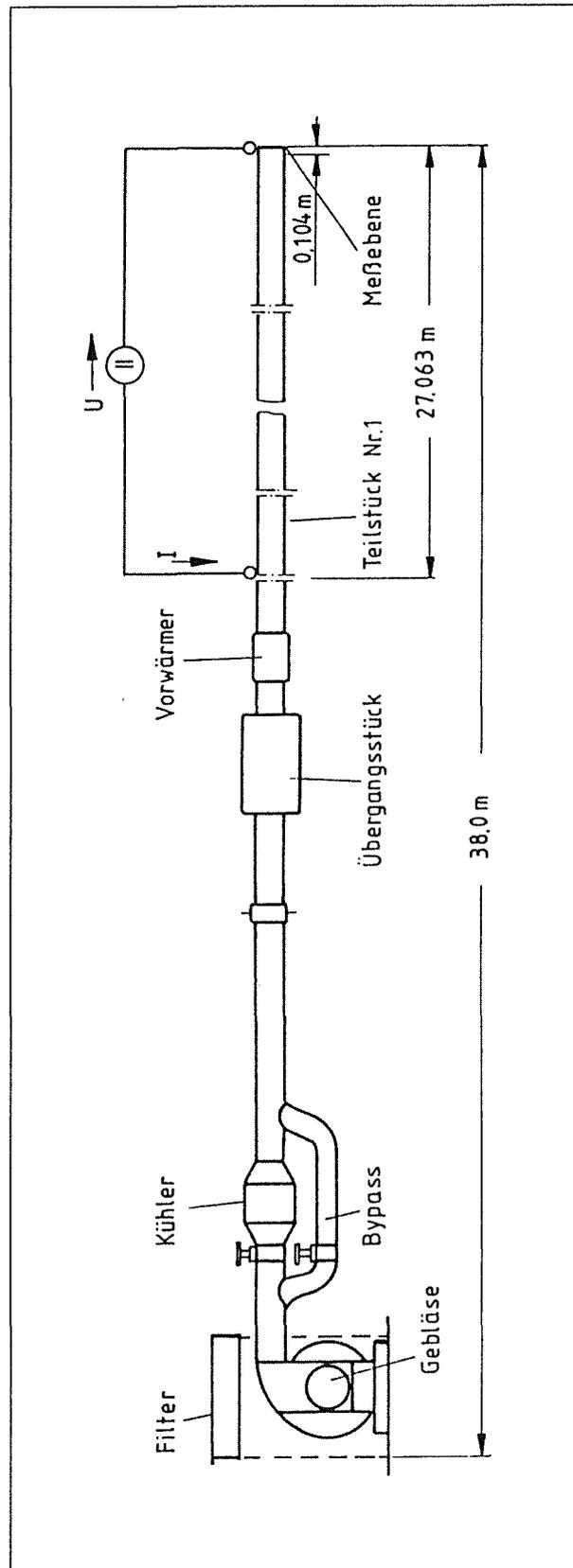


Abb. 6.1: Prinzipieller Aufbau des Windkanals von SEALE [7]

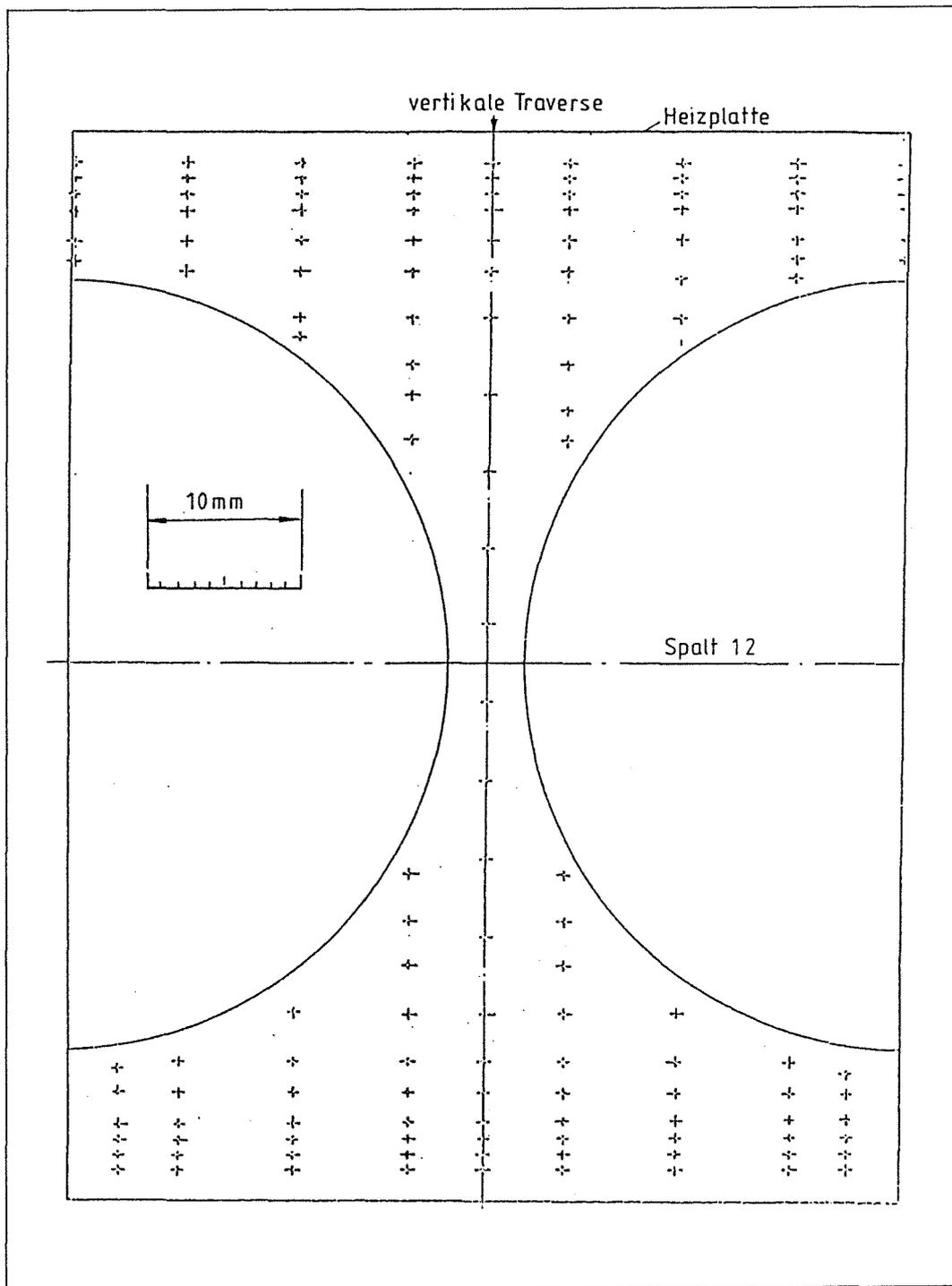


Abb. 6.2: Anordnung der Meßpunkte für die Geschwindigkeits- und Fluidtemperaturmessungen in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]

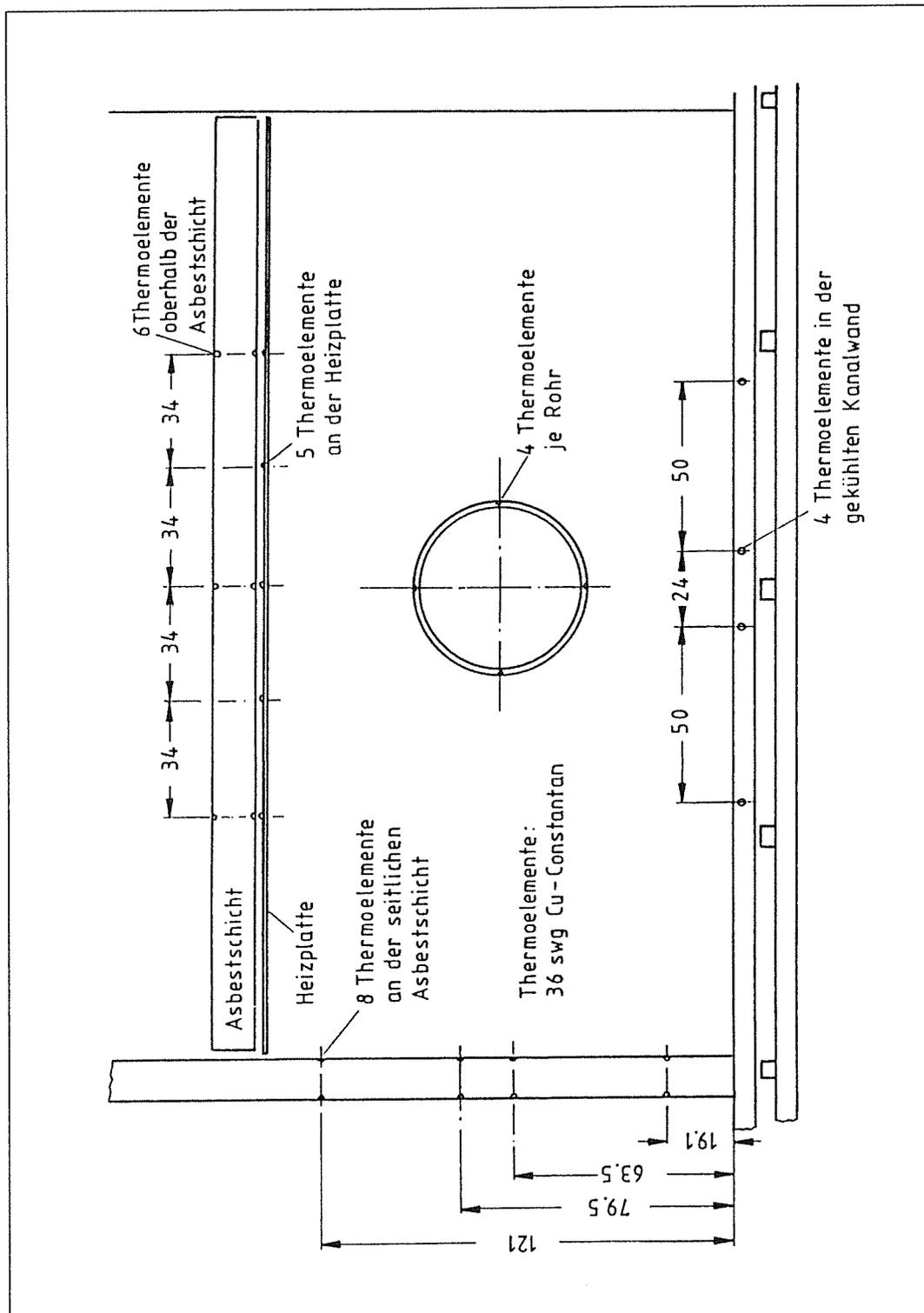


Abb. 6.3: Positionierung der Thermoelemente zur Wandtemperaturmessung im Teststreckenquerschnitt von SEALE [7]

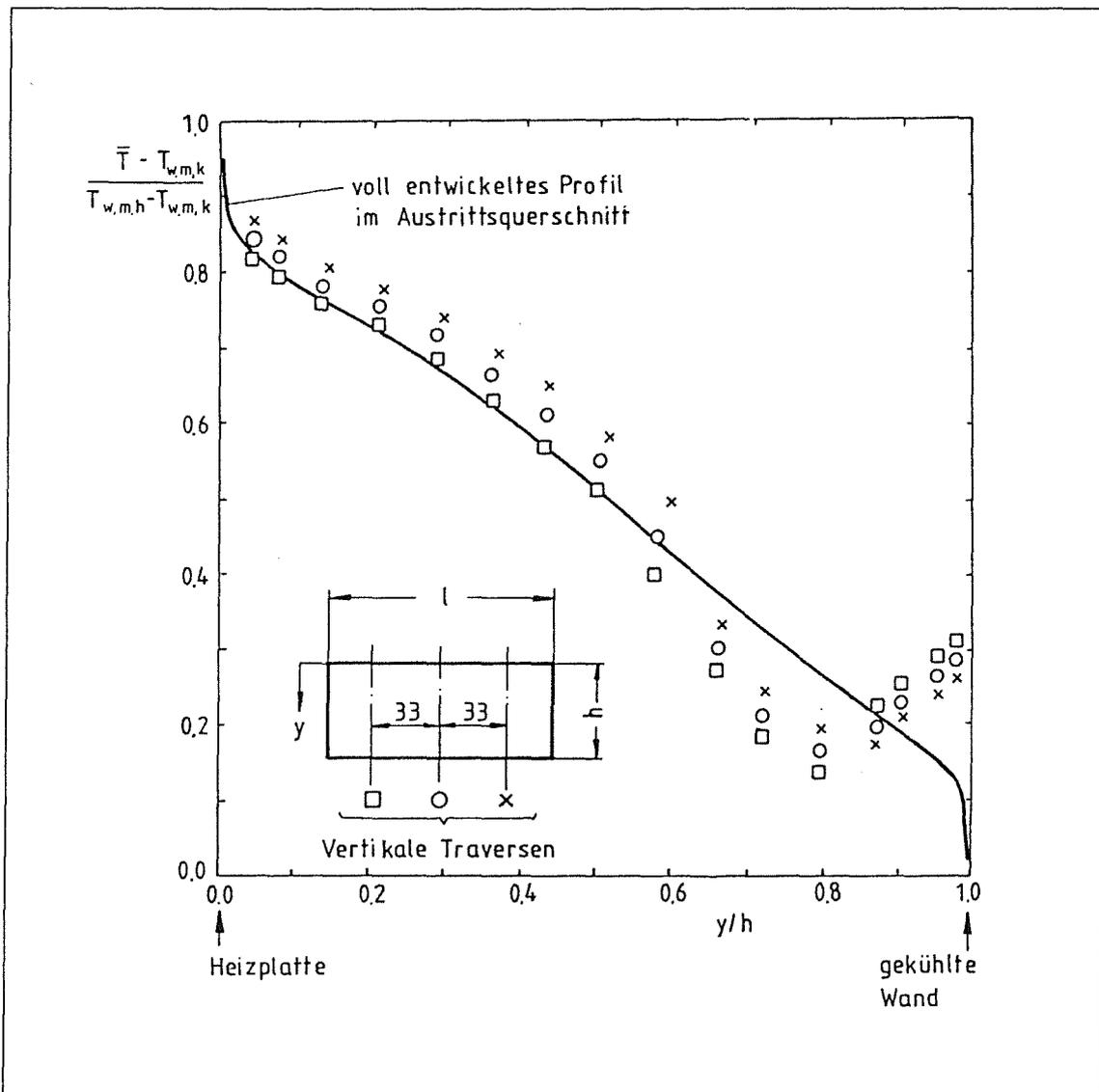


Abb. 6.4: Temperaturprofil im Windkanaleintritt für die 3-Stab-Anordnung von SEALE [7]

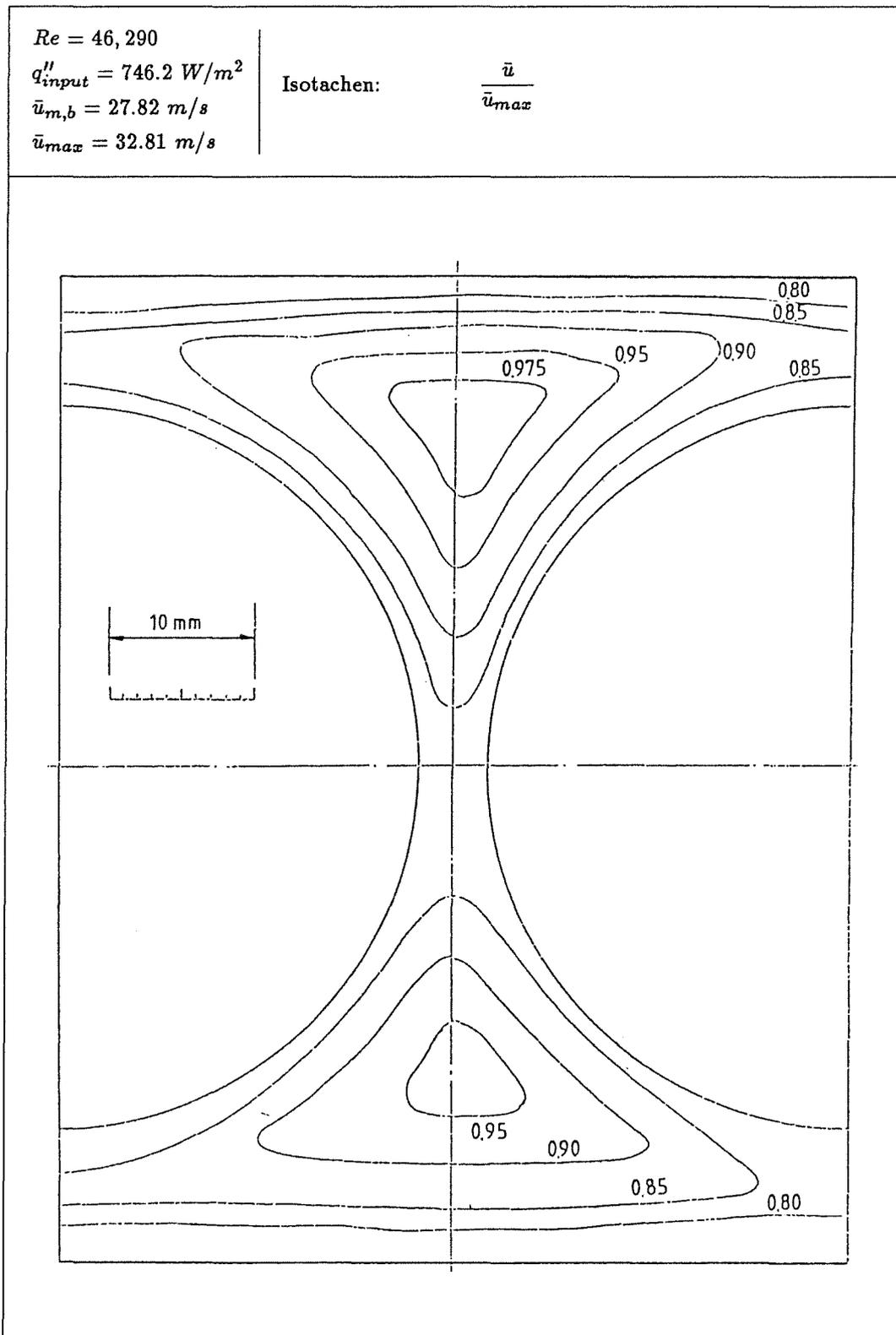


Abb. 6.5a: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/4.6 (aus SEALE [7])

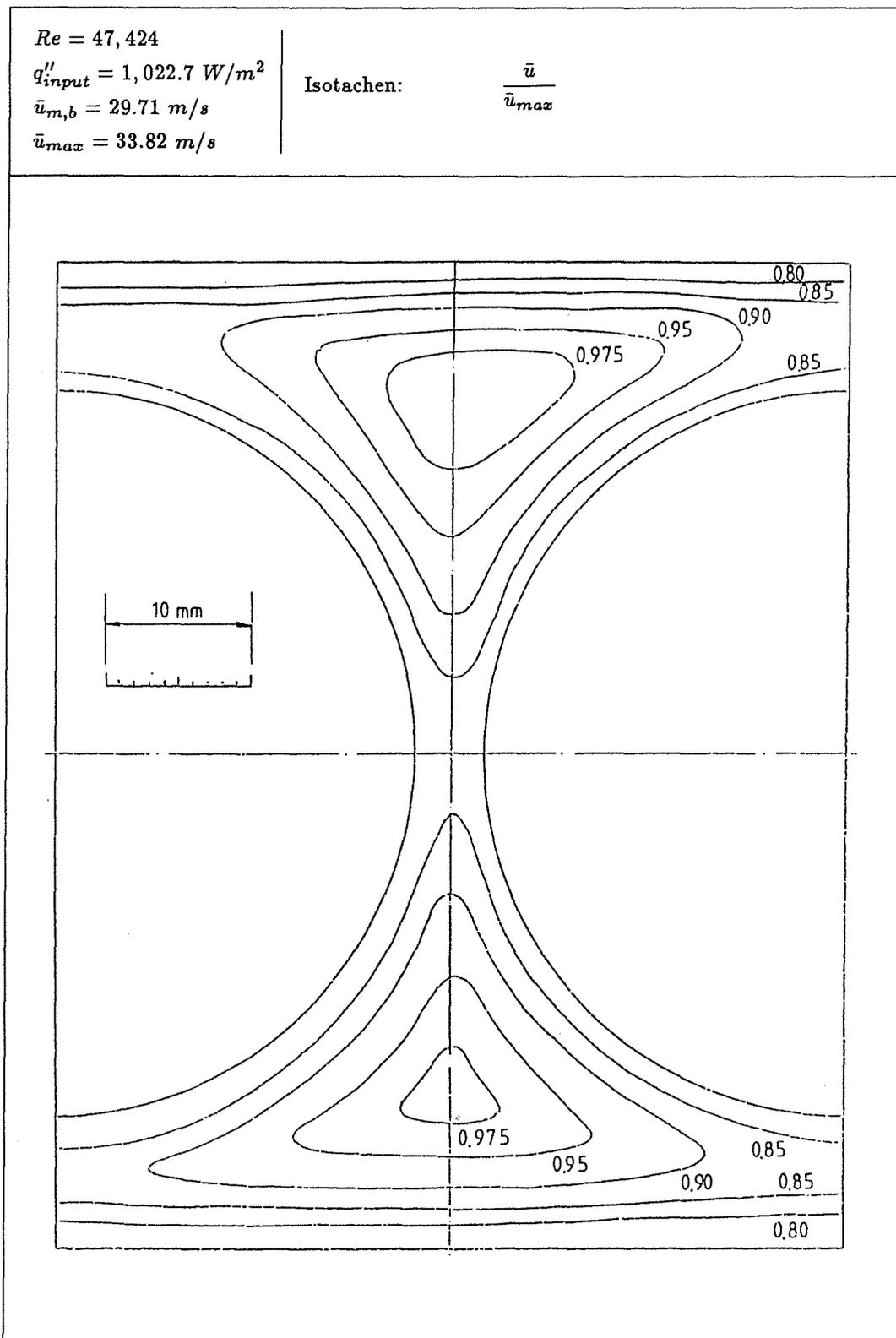


Abb. 6.5b: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/4.7 (aus SEALE [7])

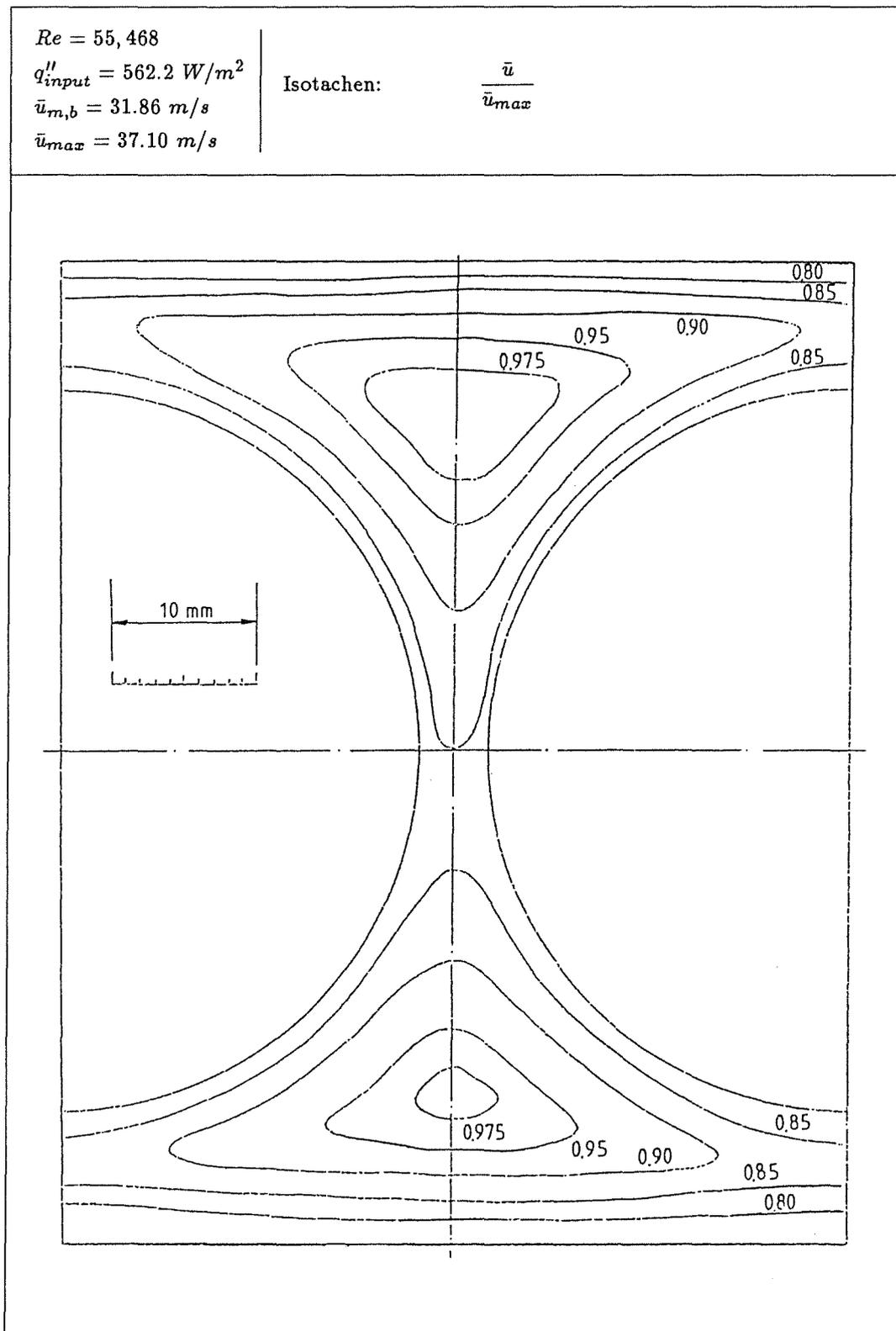


Abb. 6.5c: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/5.5 (aus SEALE [7])

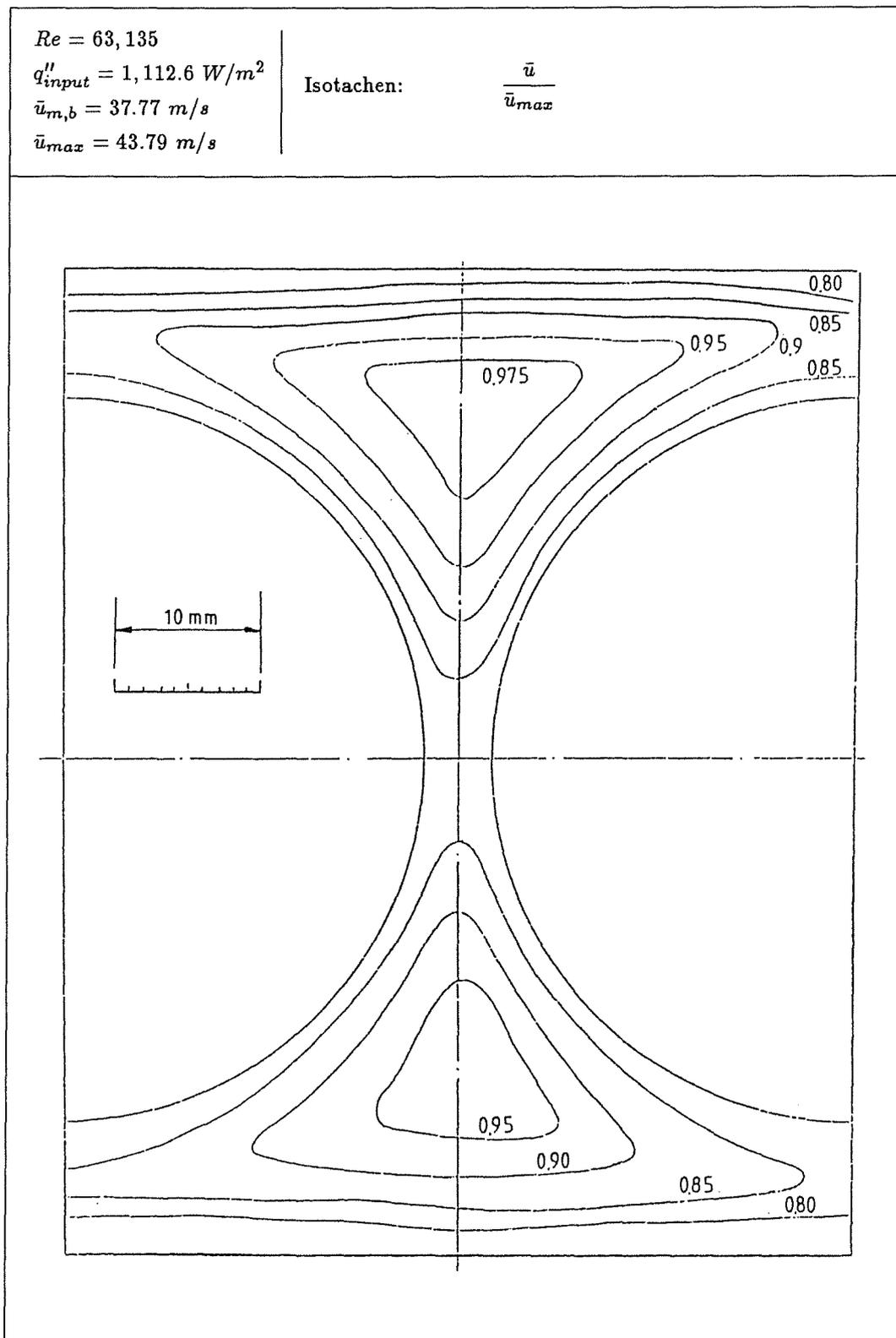


Abb. 6.5d: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/6.3 (aus SEALE [7])

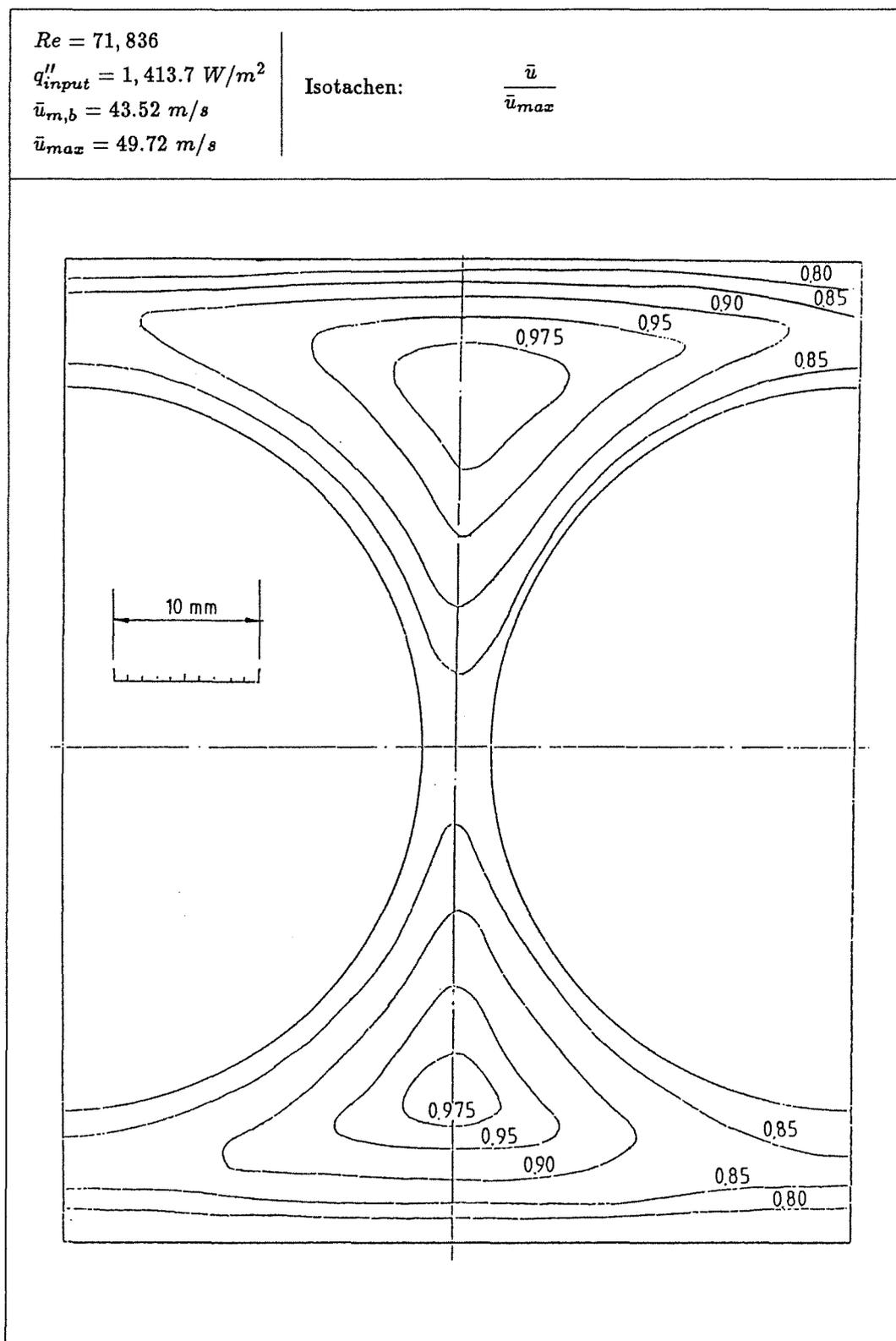


Abb. 6.5e: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/7.2 (aus SEALE [7])

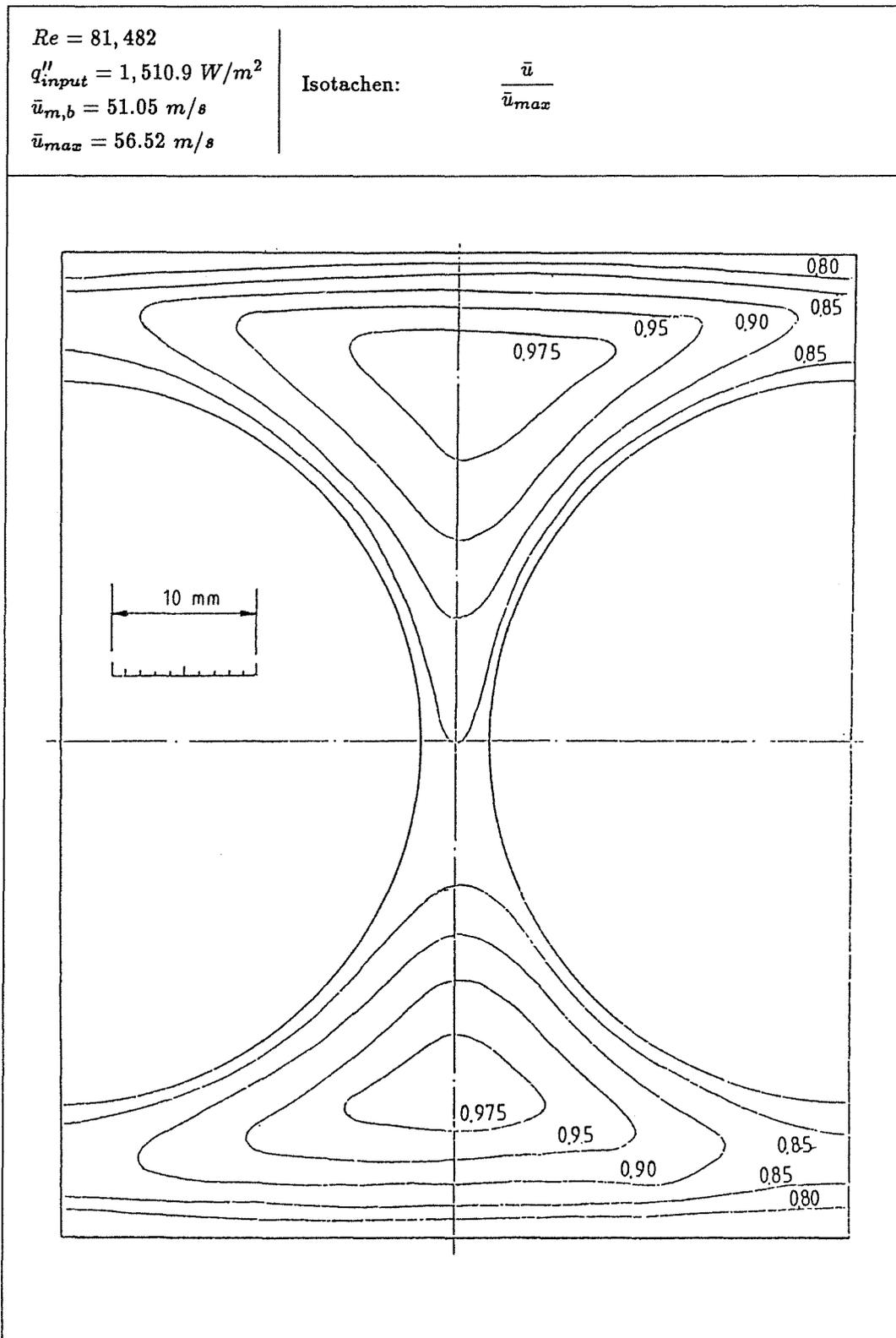


Abb. 6.5f: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/8.1 (aus SEALE [7])

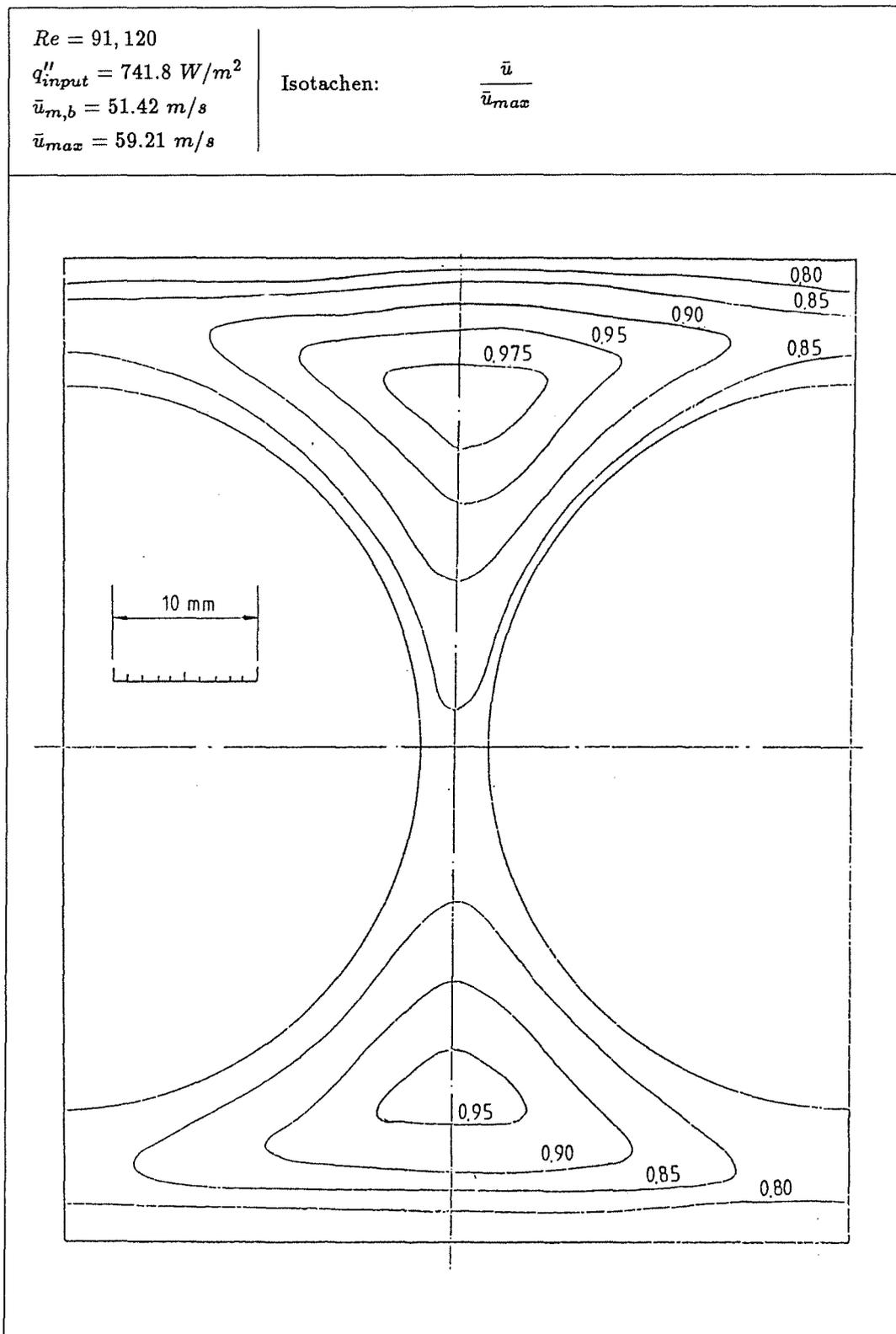


Abb. 6.5g: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/9.1 (aus SEALE [7])

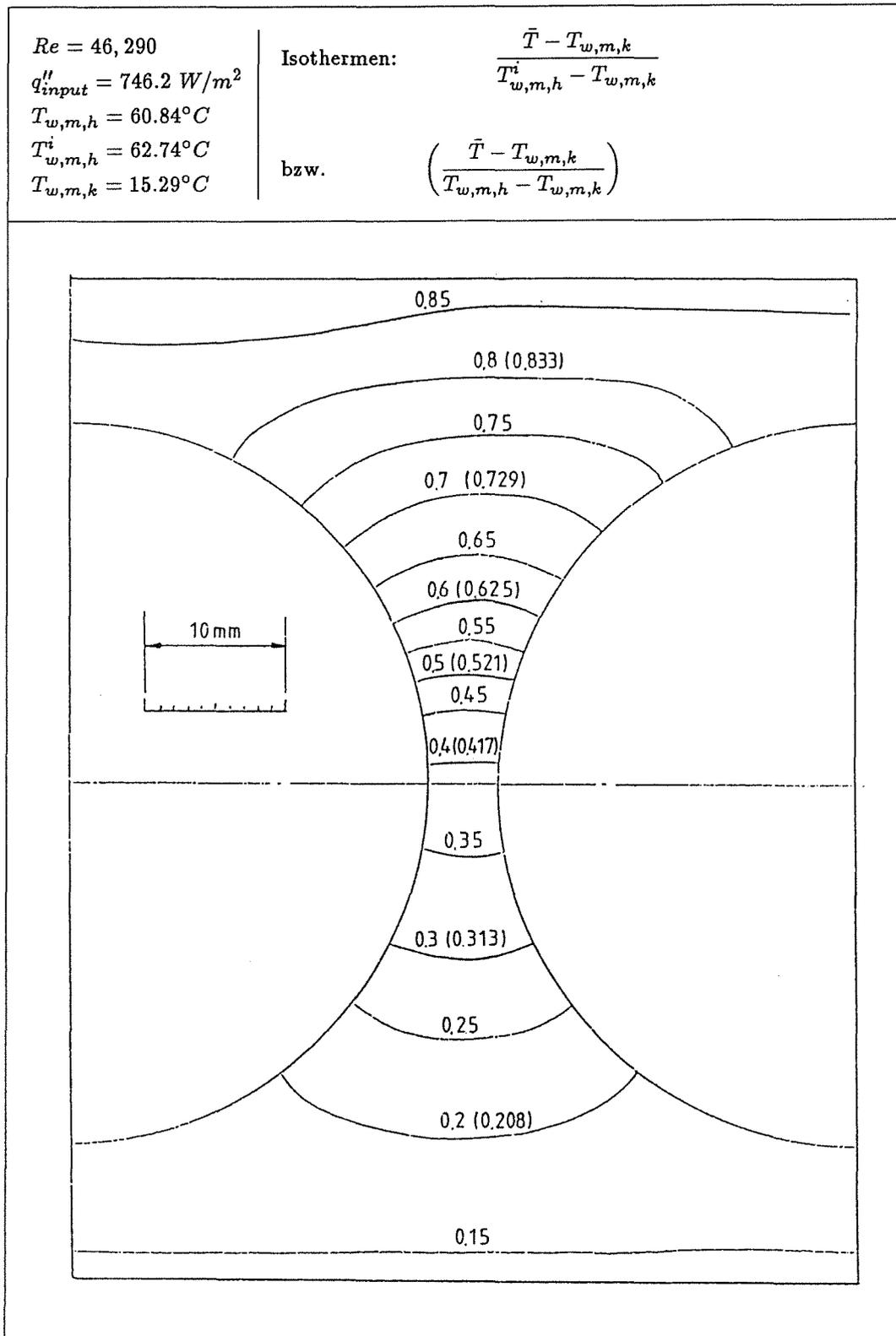


Abb. 6.6a: Gemessene Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/4.6 (aus SEALE [7])

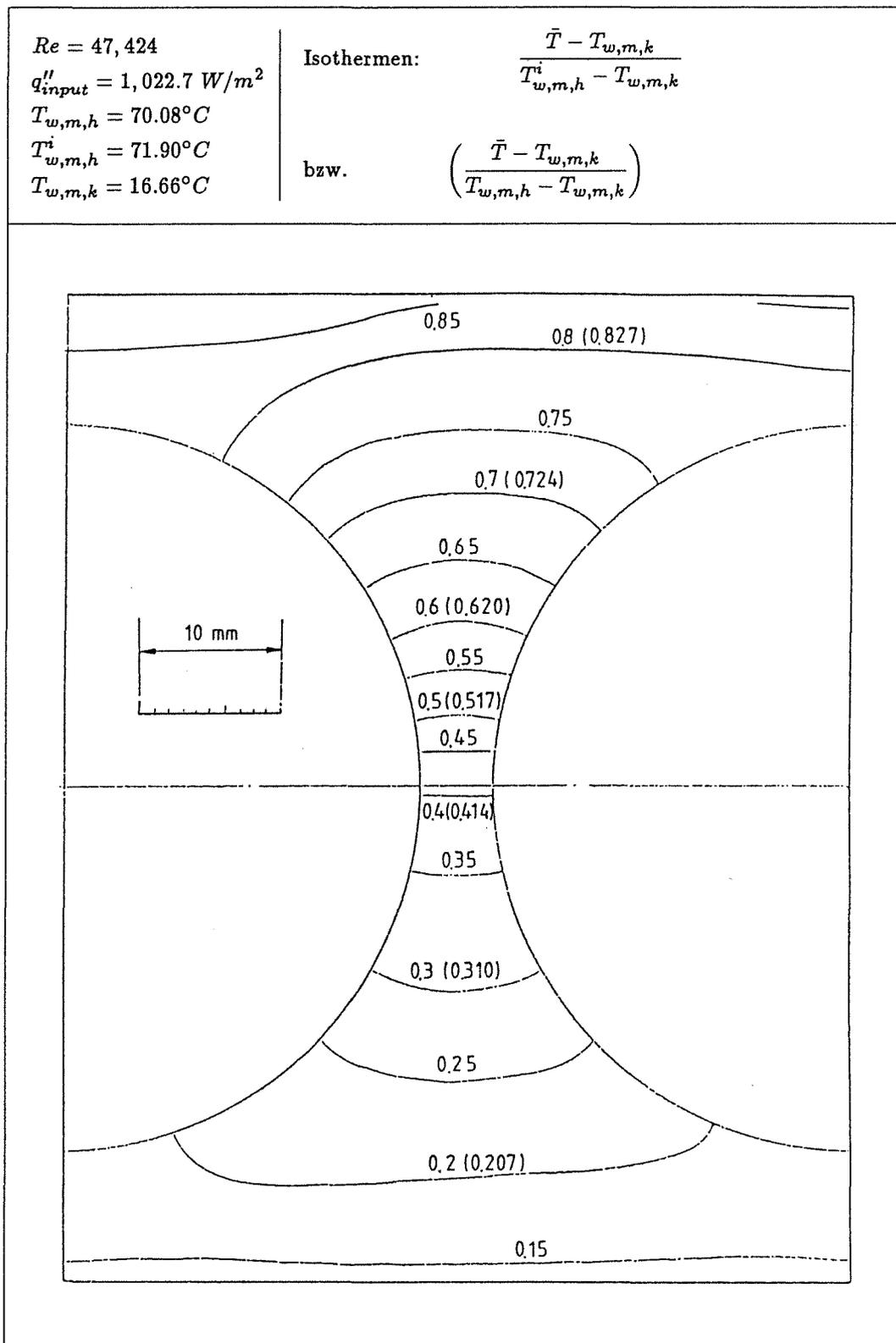


Abb. 6.6b: Gemessene Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/4.7 (aus SEALE [7])

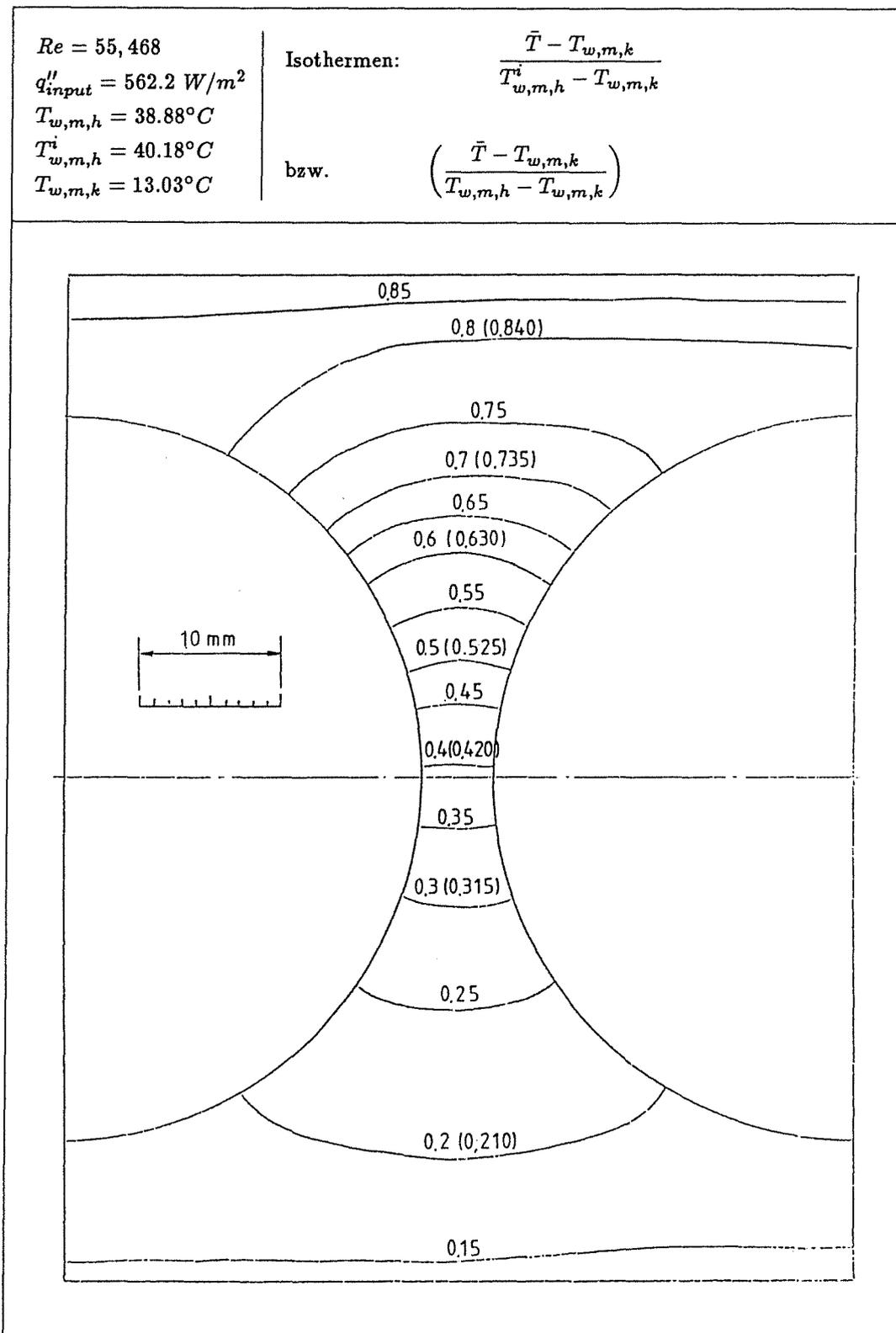


Abb. 6.6c: Gemessene Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/5.5 (aus SEALE [7])

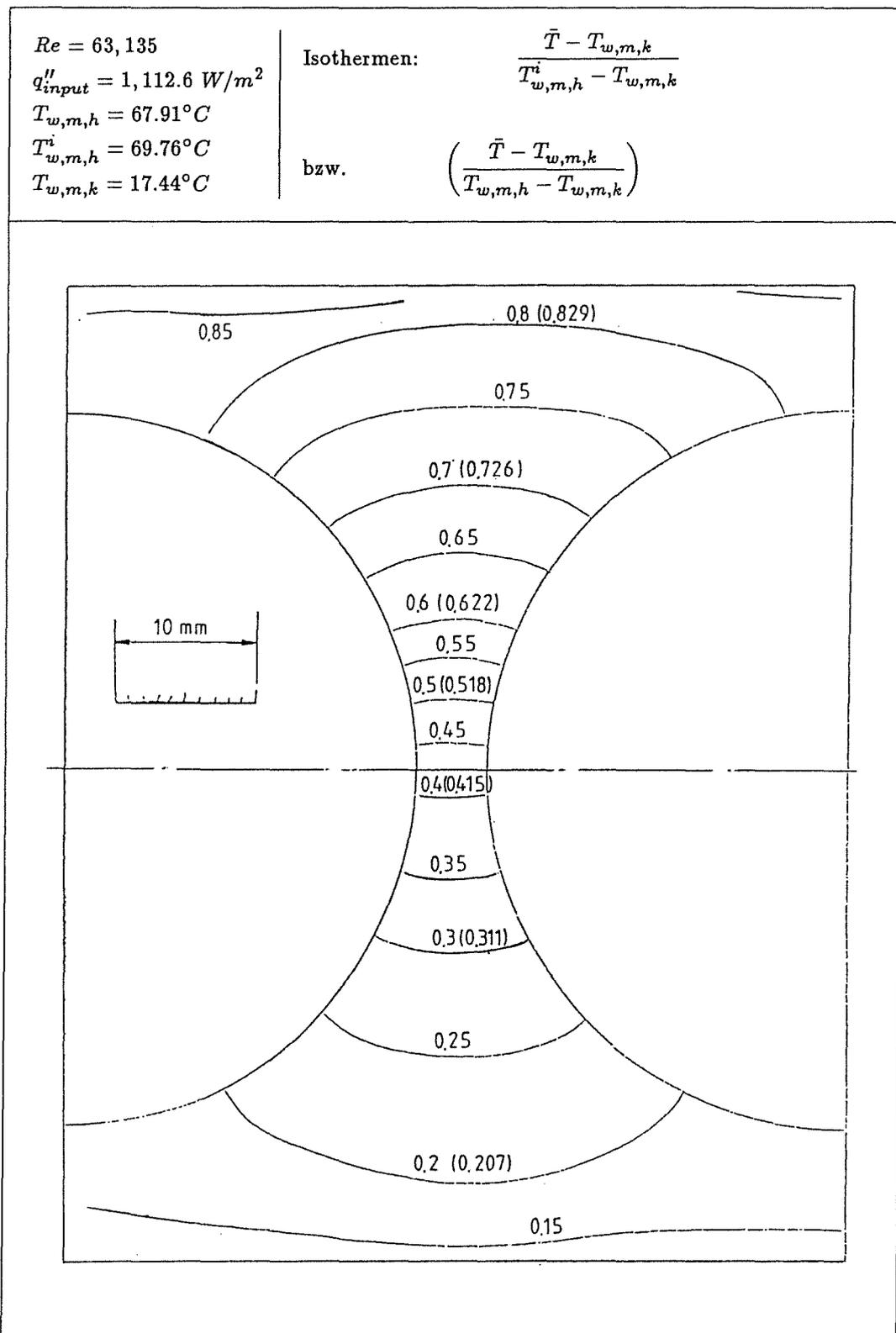


Abb. 6.6d: Gemessene Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/6.3 (aus SEALE [7])

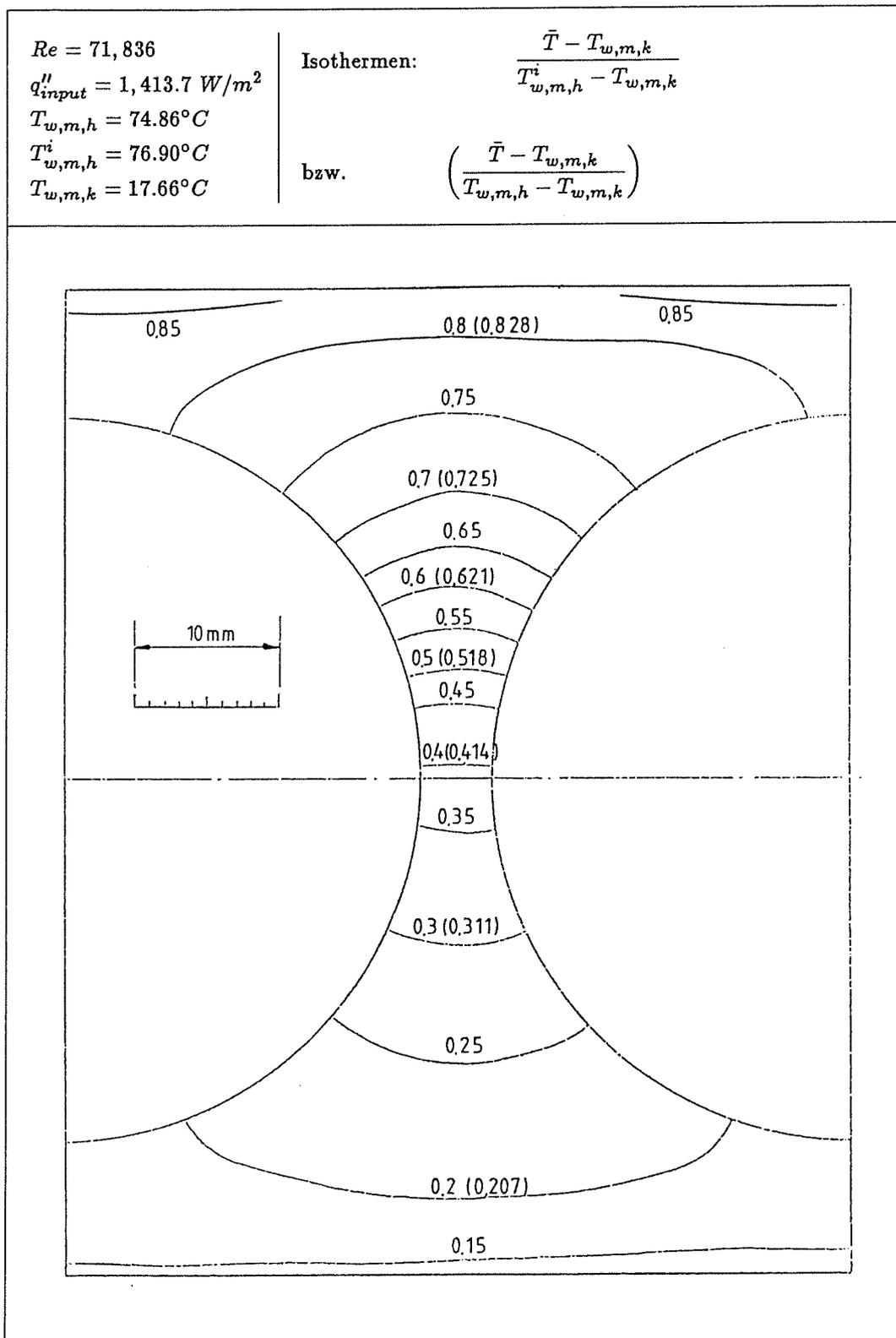


Abb. 6.6e: Gemessene Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/7.2 (aus SEALE [7])

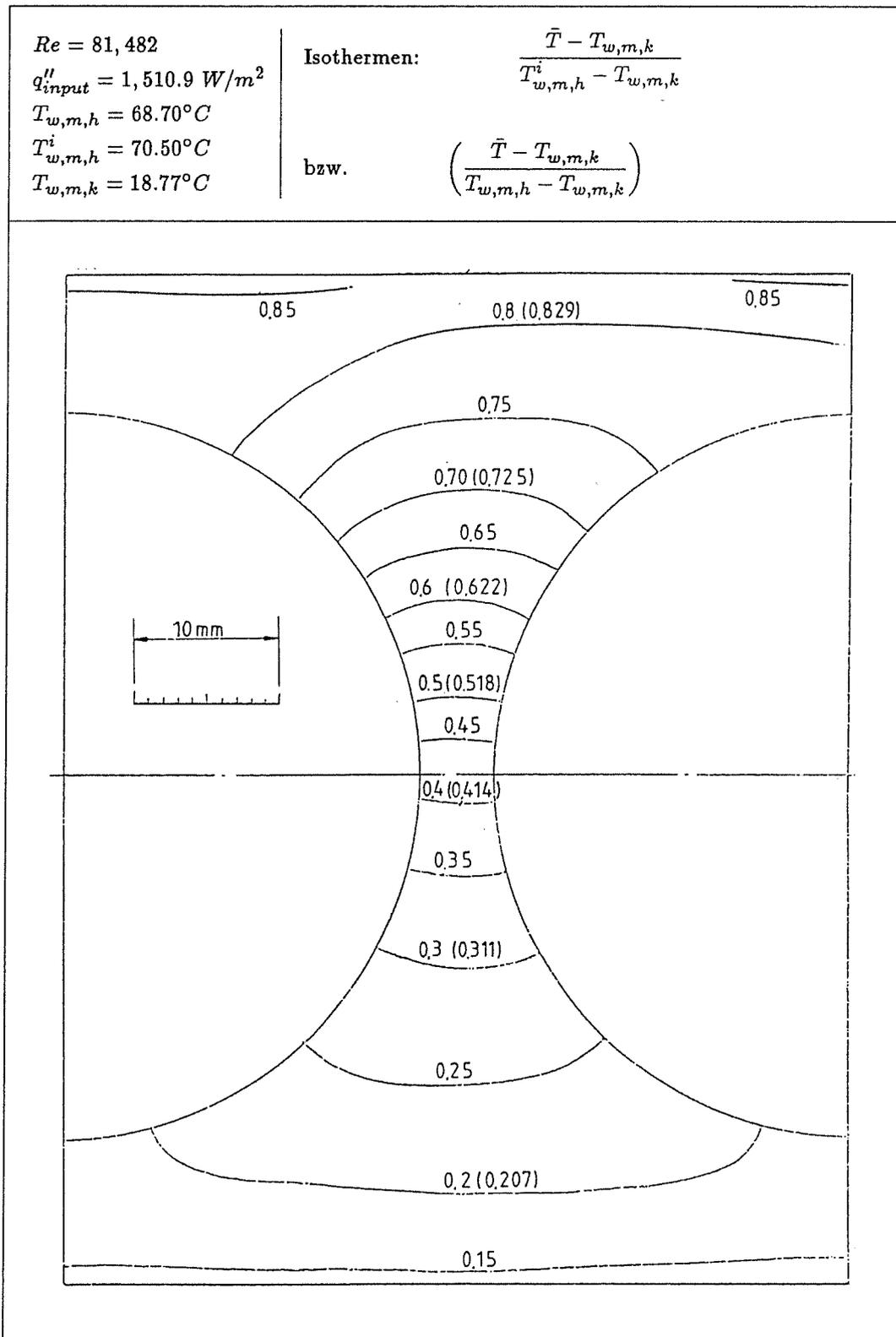


Abb. 6.6f: Gemessene Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/8.1 (aus SEALE [7])

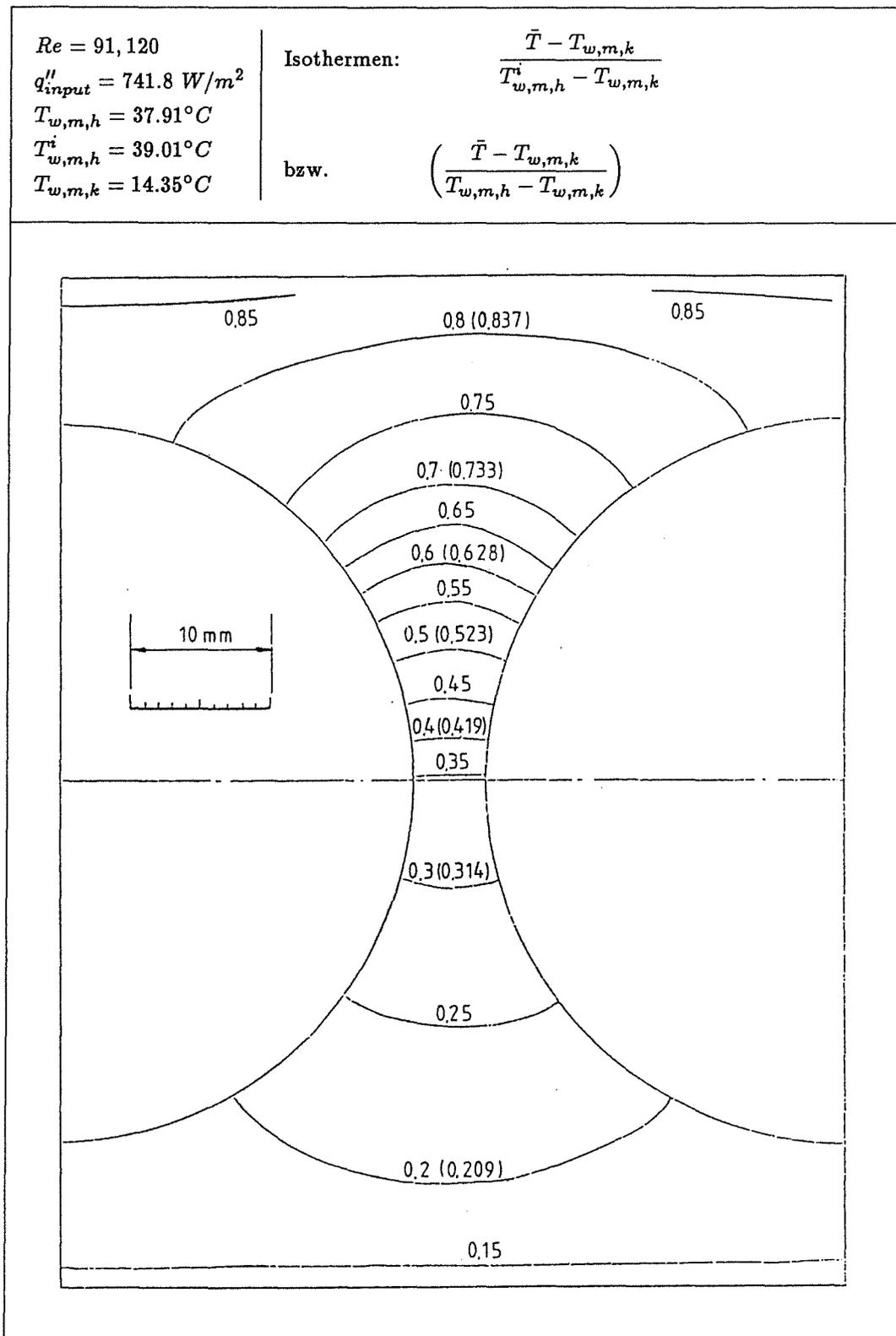


Abb. 6.6g: Gemessene Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/9.1 (aus SEALE [7])

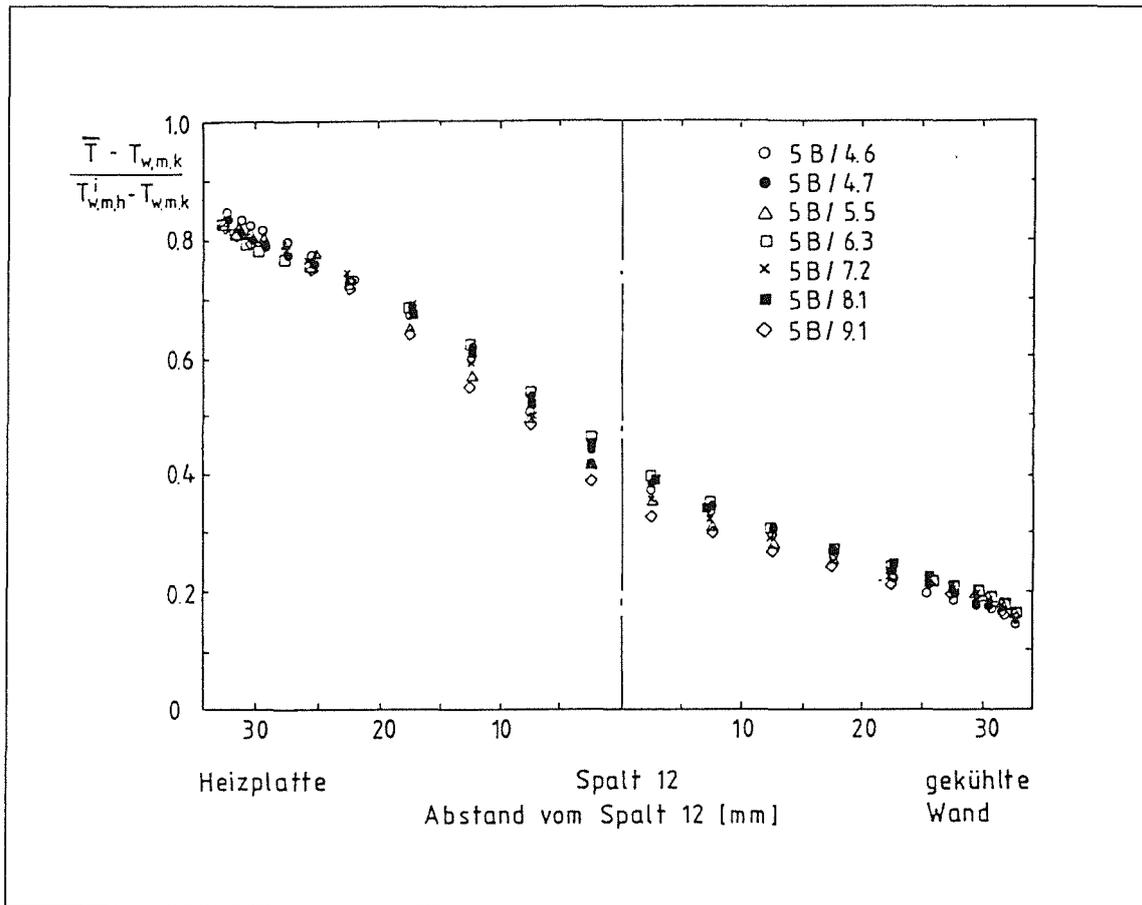


Abb. 6.7: Wandsenkrechte Temperaturprofile  $(\bar{T} - T_{w,m,k}) / (T_{w,m,h}^i - T_{w,m,k})$  entlang der vertikalen Traverse von der beheizten zur gekühlten Kanalwand für alle von SEALE [7] in der 5-Stab-Anordnung untersuchten Fälle (nach SEALE [7])

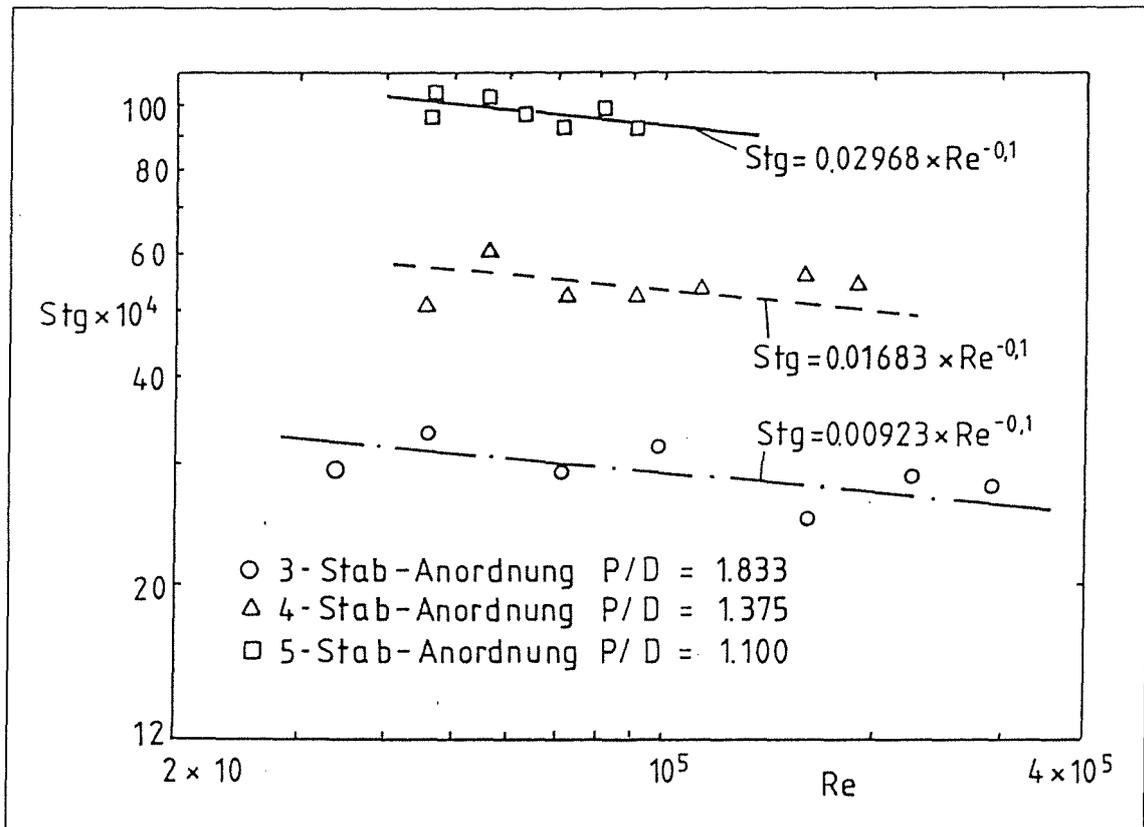


Abb. 6.8: Gemessene STANTON-Zahlen im Spalt  $St_g$  in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl  $Re$  für alle von SEALE [7] untersuchten Fälle (nach SEALE [7])

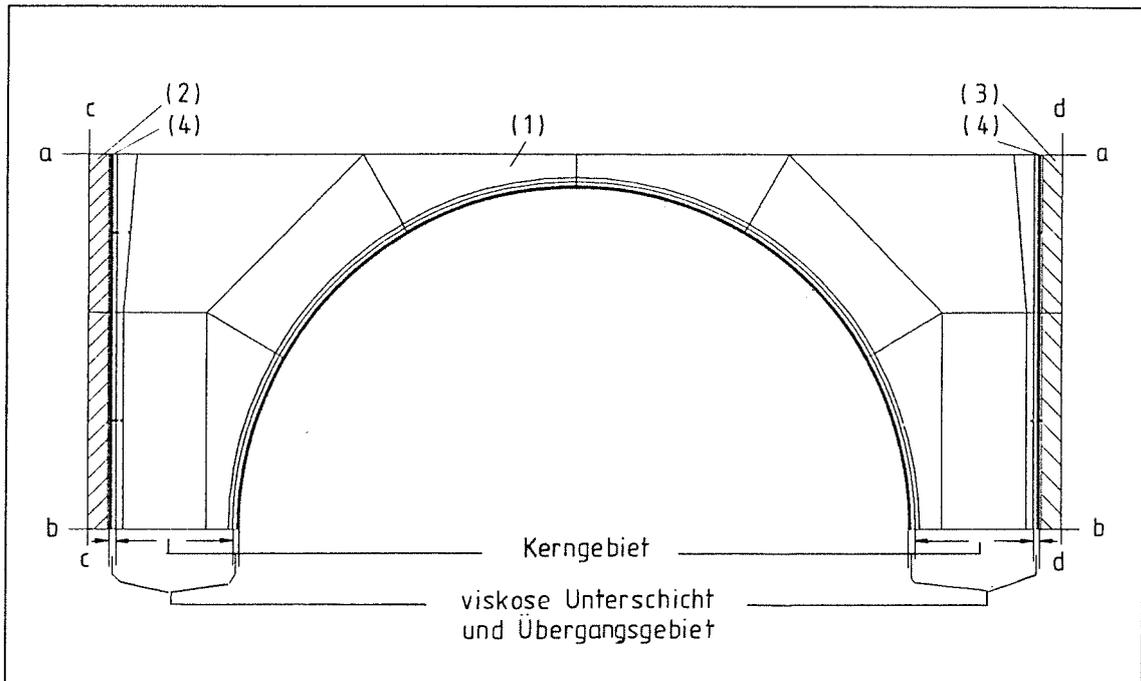


Abb. 6.9a: Struktur des numerischen Modells zur Simulation der Versuche von SEALE [7] in der 5-Stab-Anordnung mit dem FEM-Code VANTACY-II

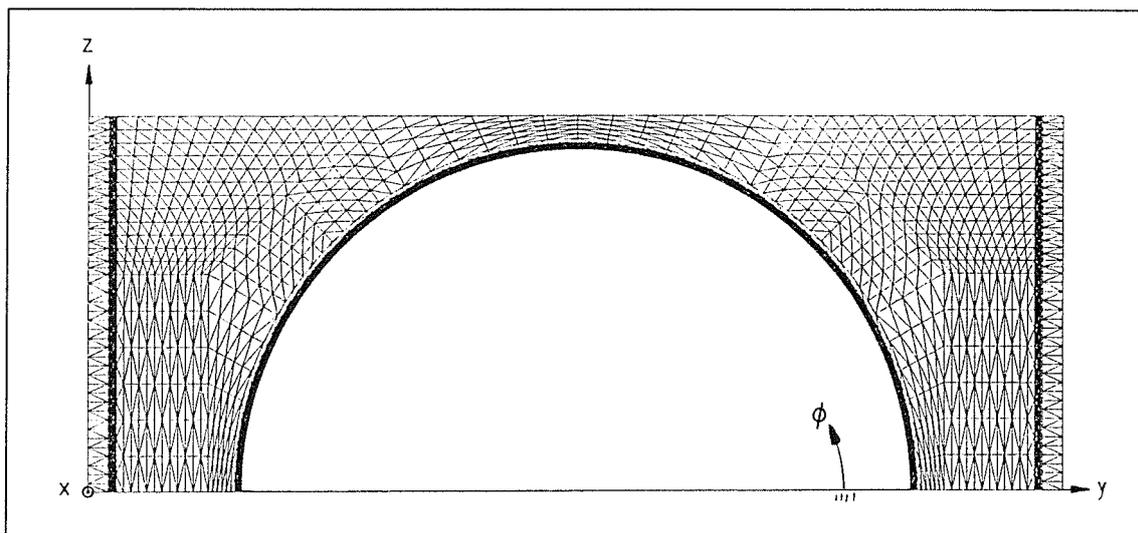


Abb. 6.9b: Finite Elemente-Netz zur Simulation der Versuche von SEALE [7] in der 5-Stab-Anordnung mit dem FEM-Code VANTACY-II

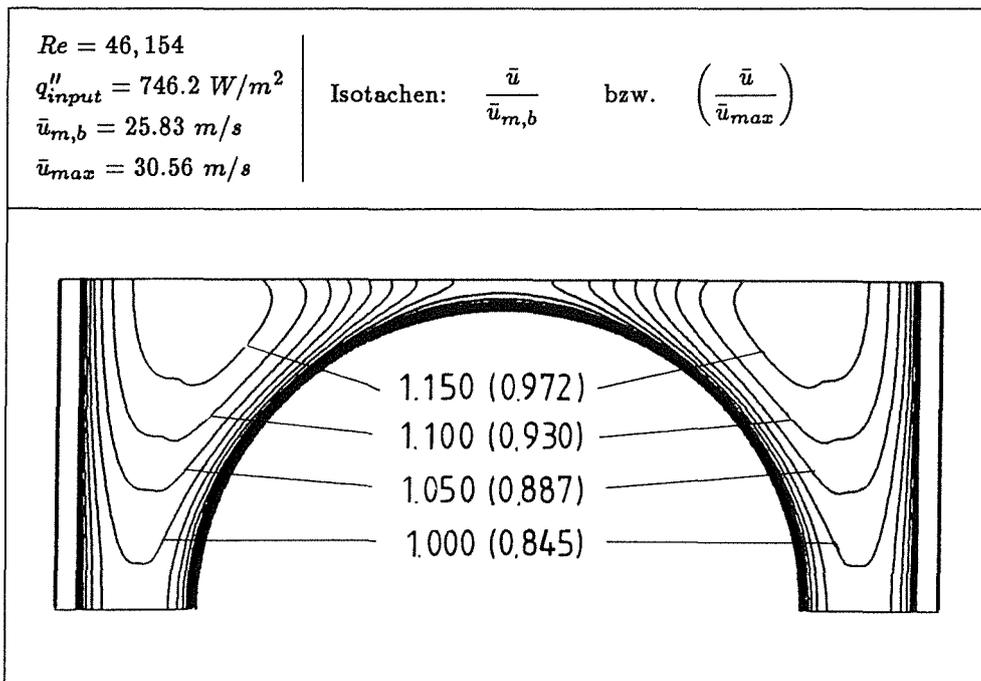


Abb. 6.10a: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung in der 5-  
 Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/4.6

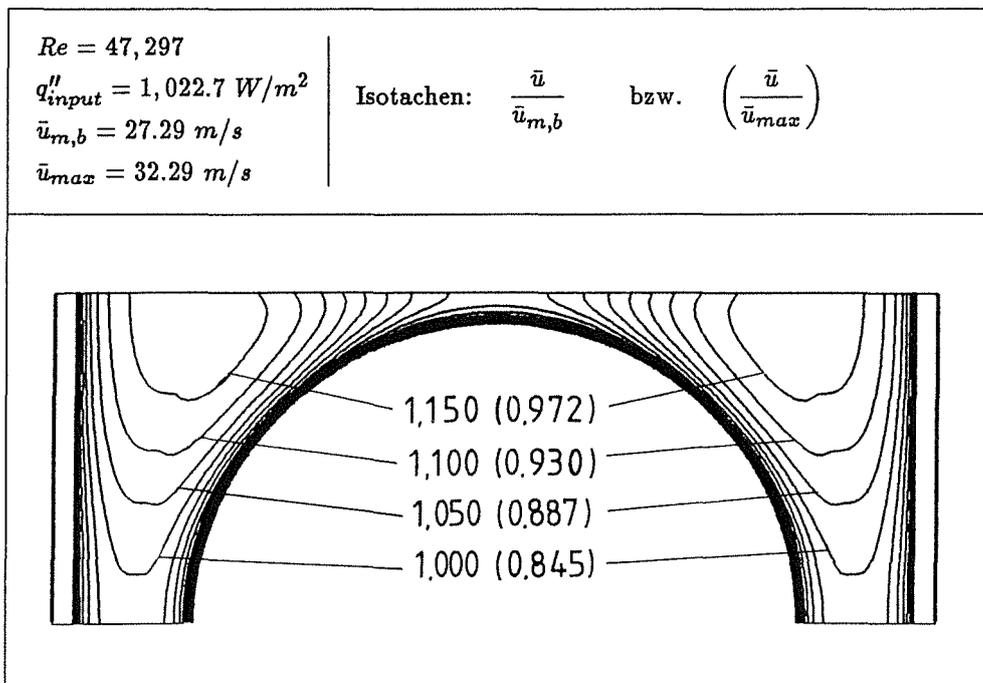


Abb. 6.10b: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung in der 5-  
 Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/4.7

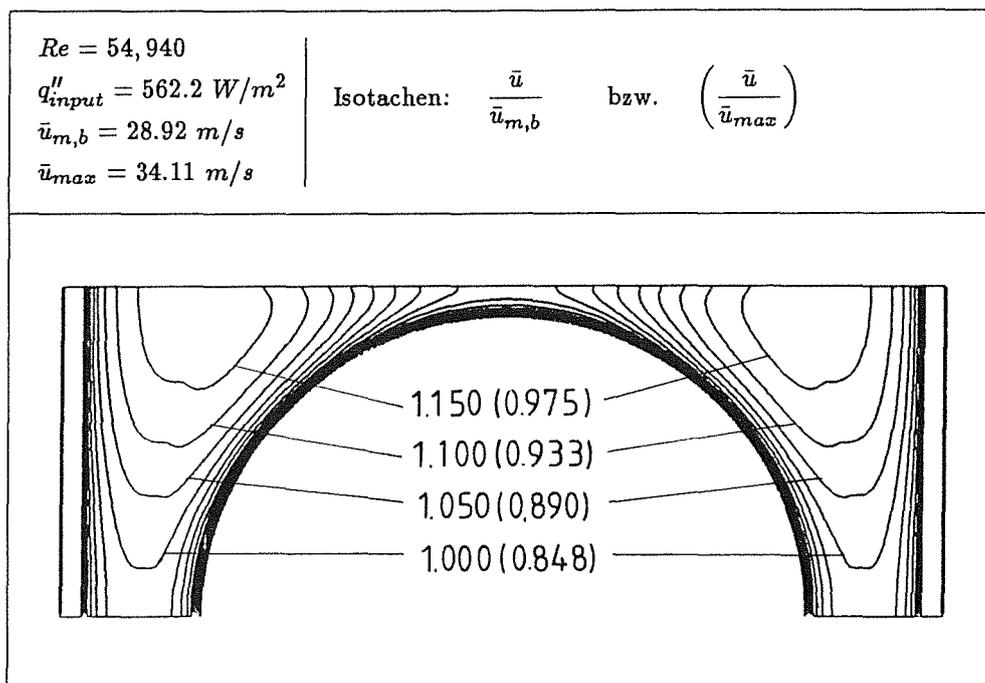


Abb. 6.10c: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung in der 5-  
 Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/5.5

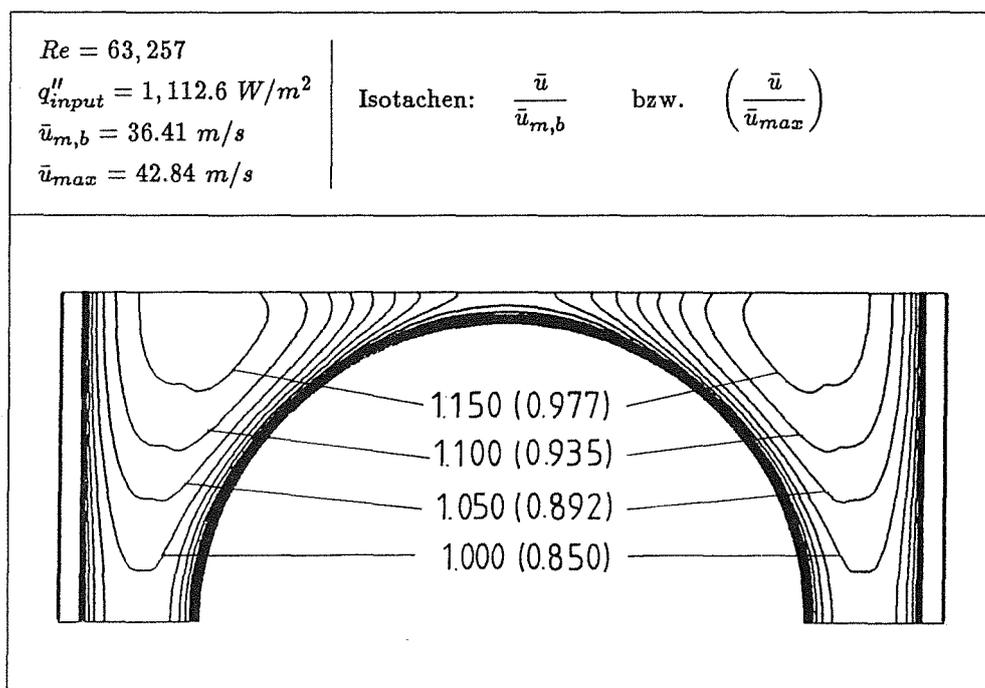


Abb. 6.10d: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung in der 5-  
 Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/6.3

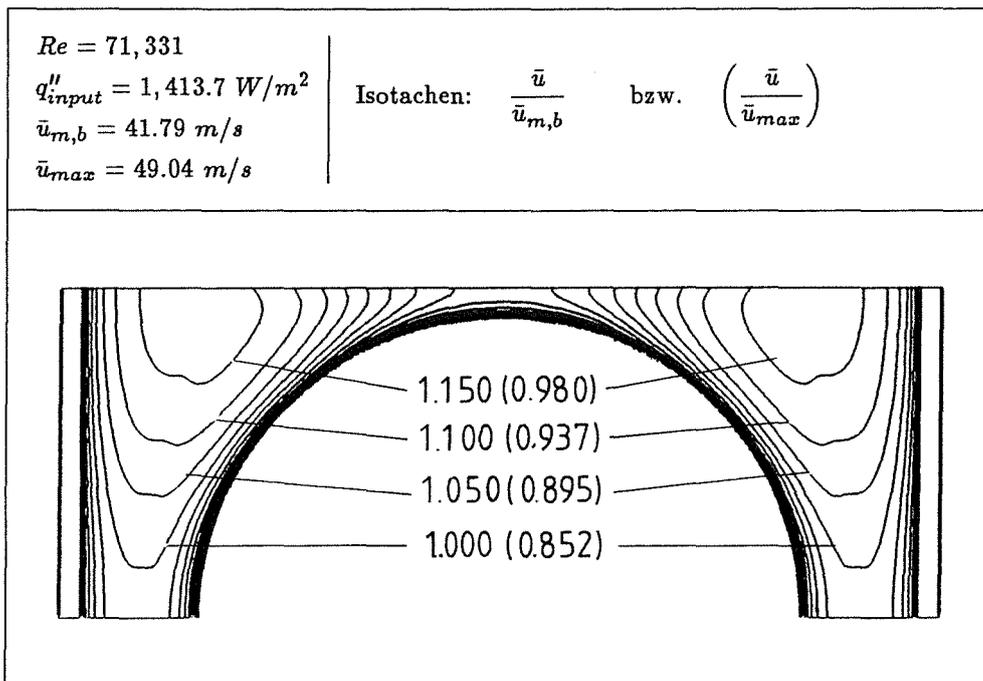


Abb. 6.10e: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung in der 5-  
 Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/7.2

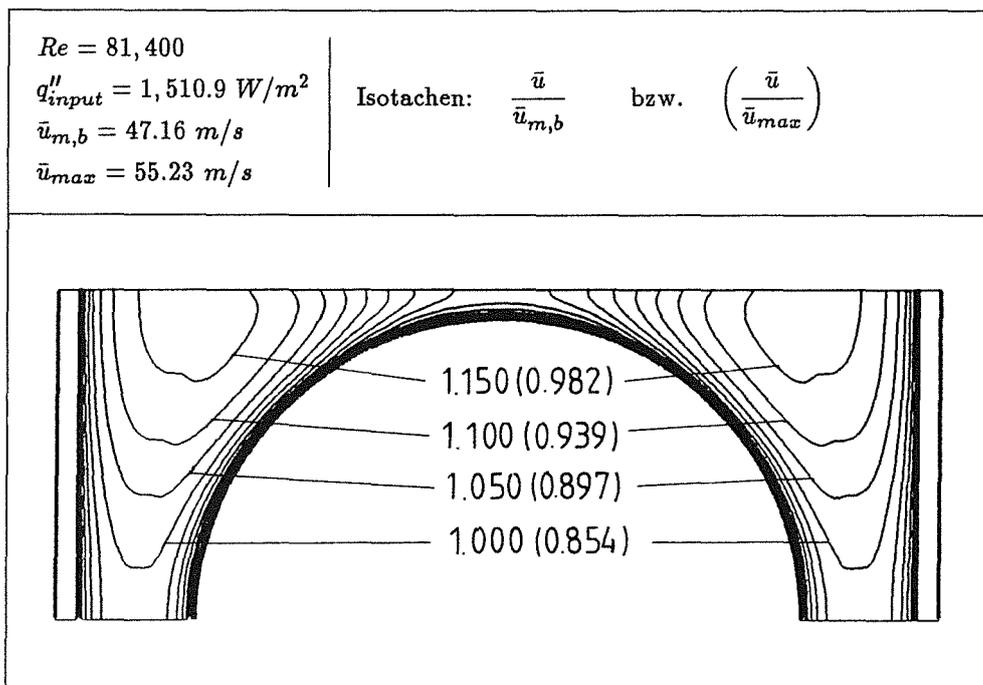


Abb. 6.10f: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung in der 5-  
 Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/8.1

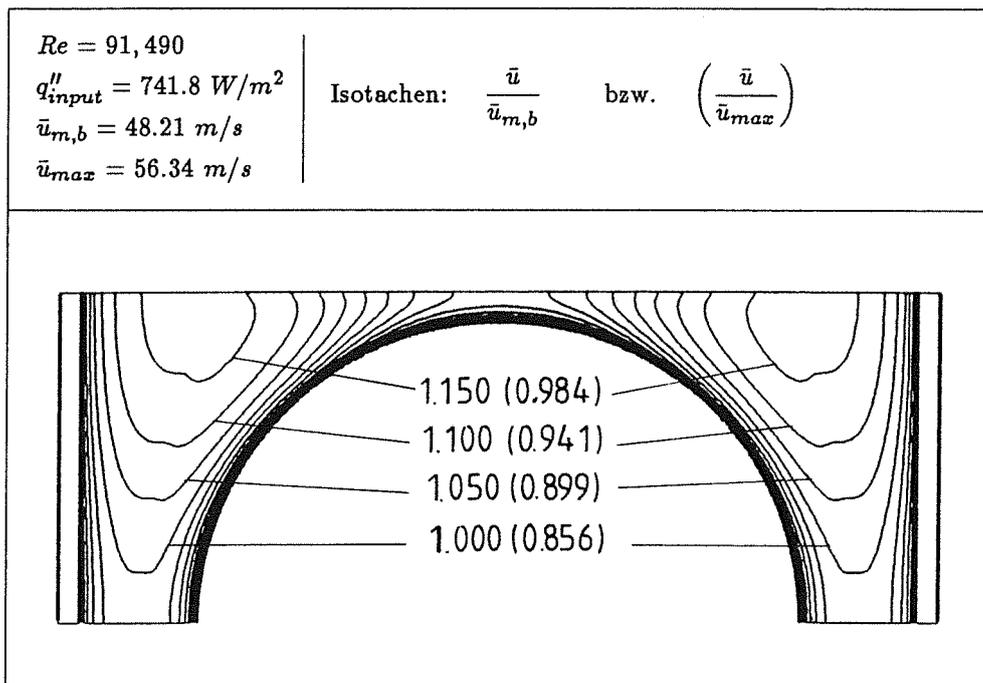


Abb. 6.10g: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/9.1

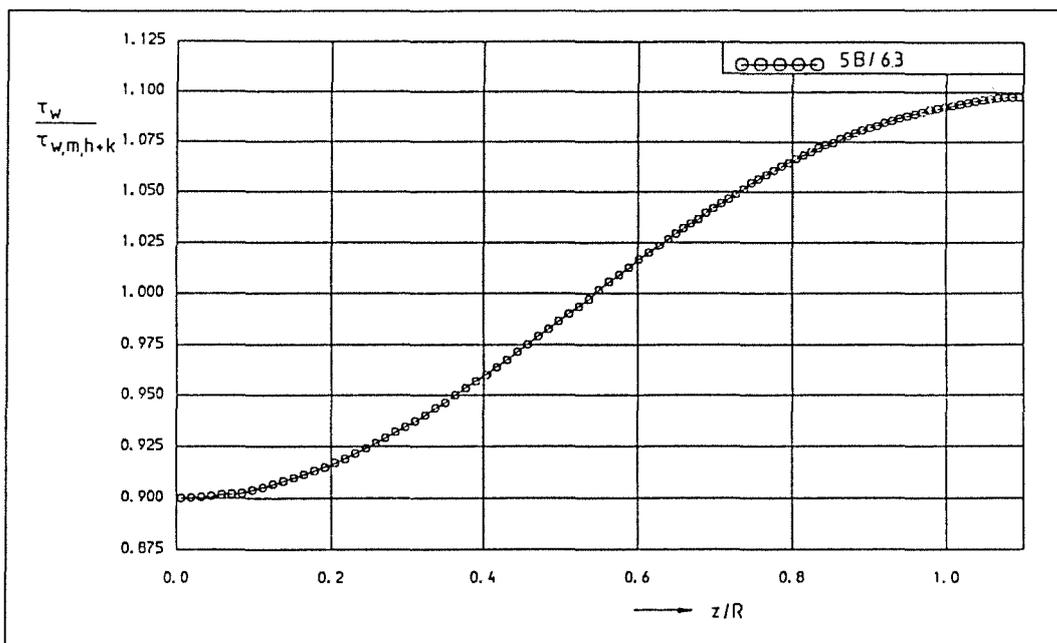


Abb. 6.11a: Wandschubspannungsverteilung an den Kanalwänden der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]. Ergebnis der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II für den Fall 5B/6.3

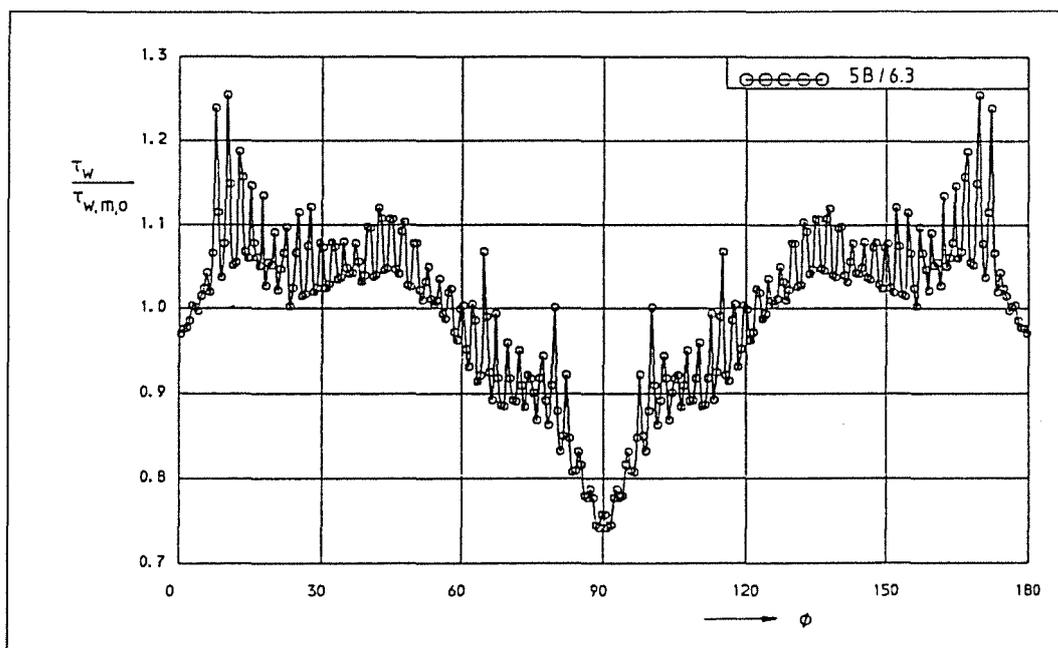


Abb. 6.11b: Wandschubspannungsverteilung am Kreisrohr der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]. Ergebnis der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II für den Fall 5B/6.3

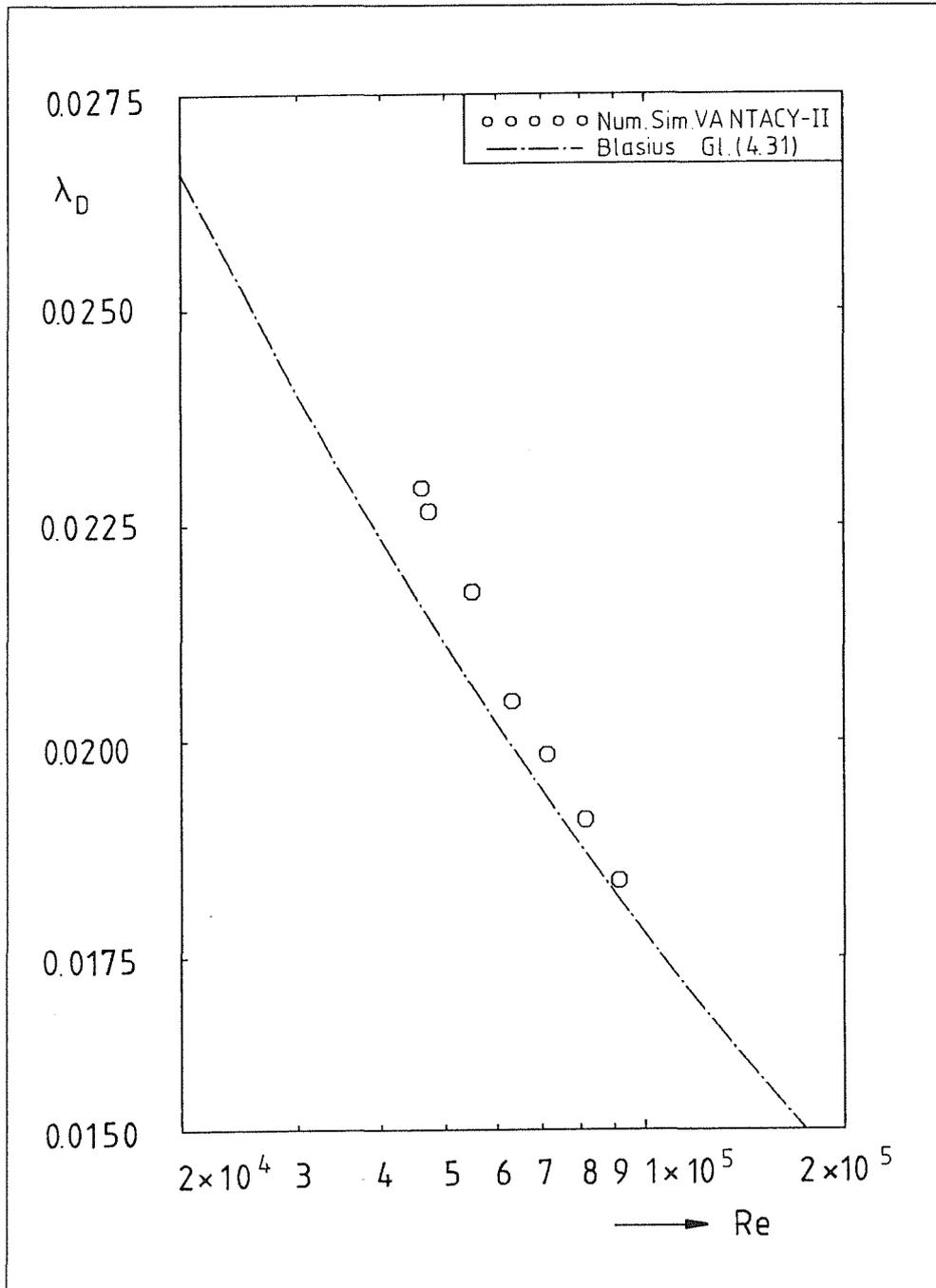


Abb. 6.12: Druckverlustkoeffizienten der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7] in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl. Vergleich der Ergebnis der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II mit der BLASIUS'schen Beziehung (4.31)

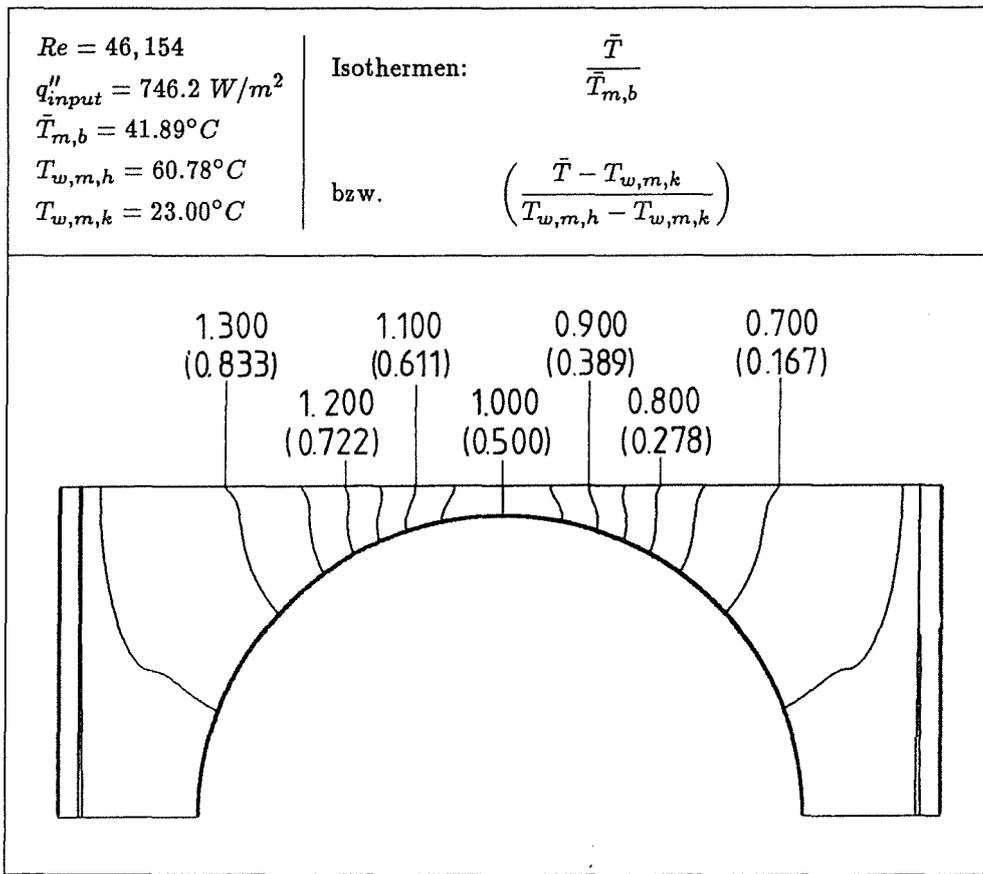


Abb. 6.13a: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/4.6

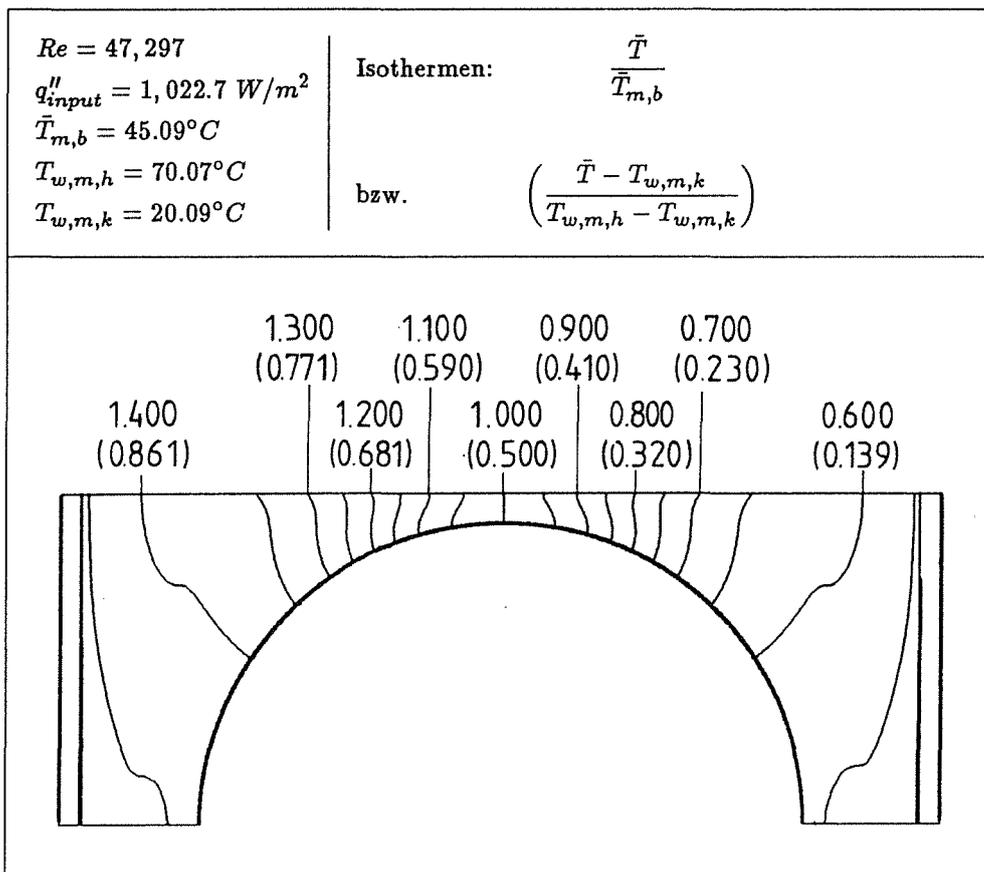


Abb. 6.13b: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/4.7

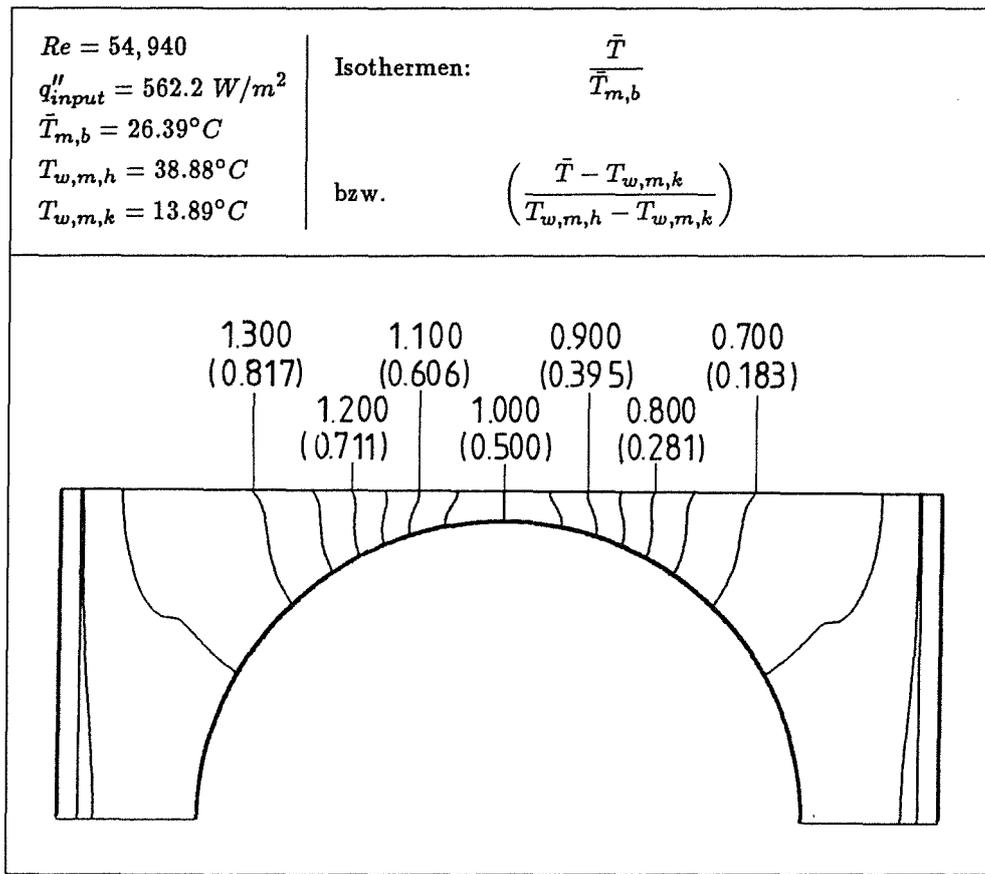


Abb. 6.13c: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/5.5

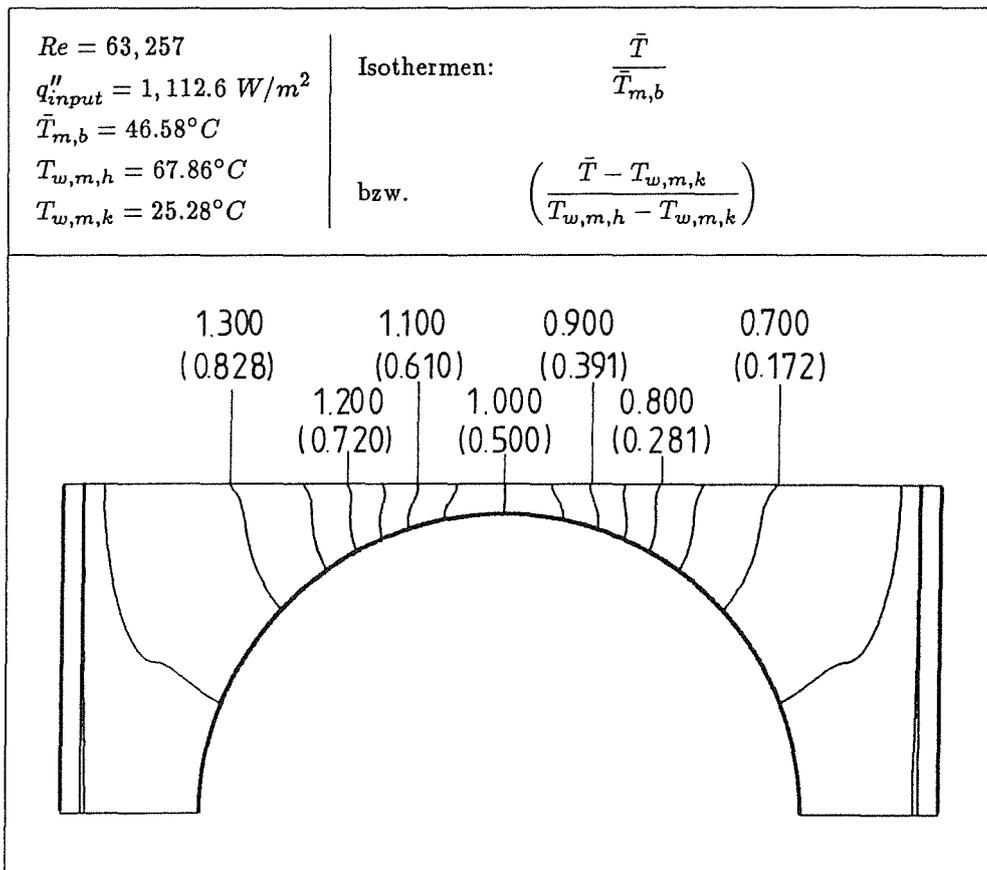


Abb. 6.13d: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/6.3

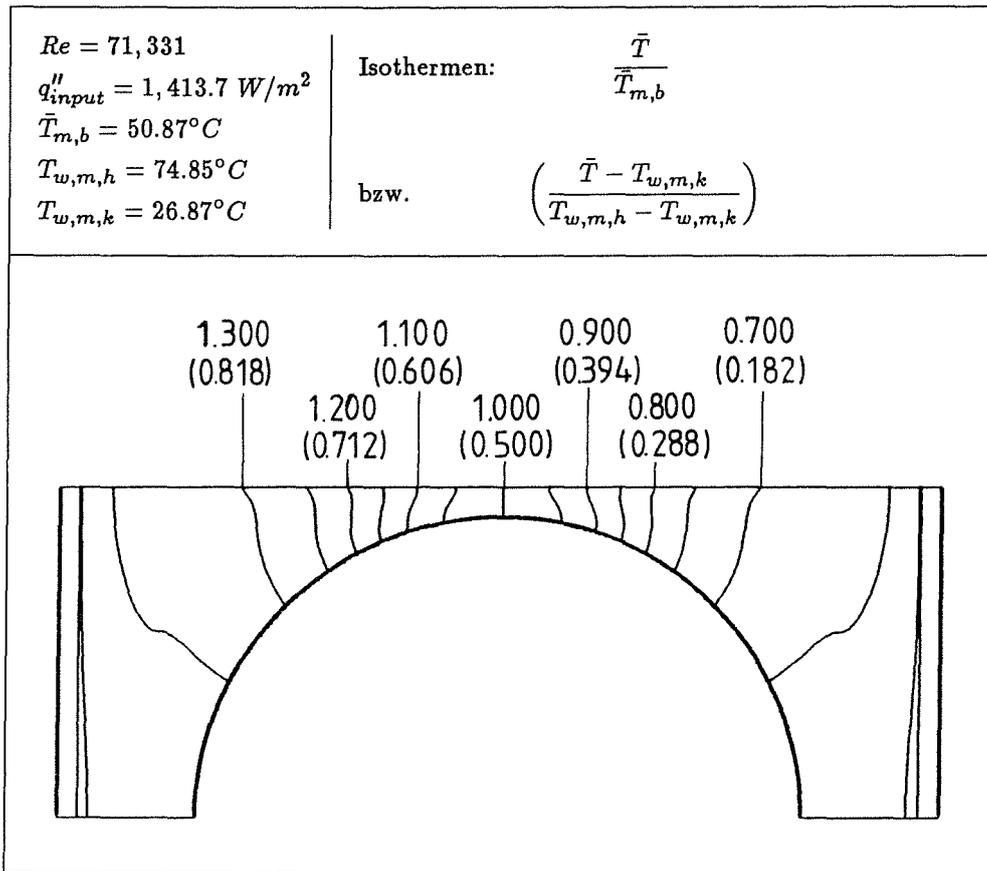


Abb. 6.13e: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/7.2

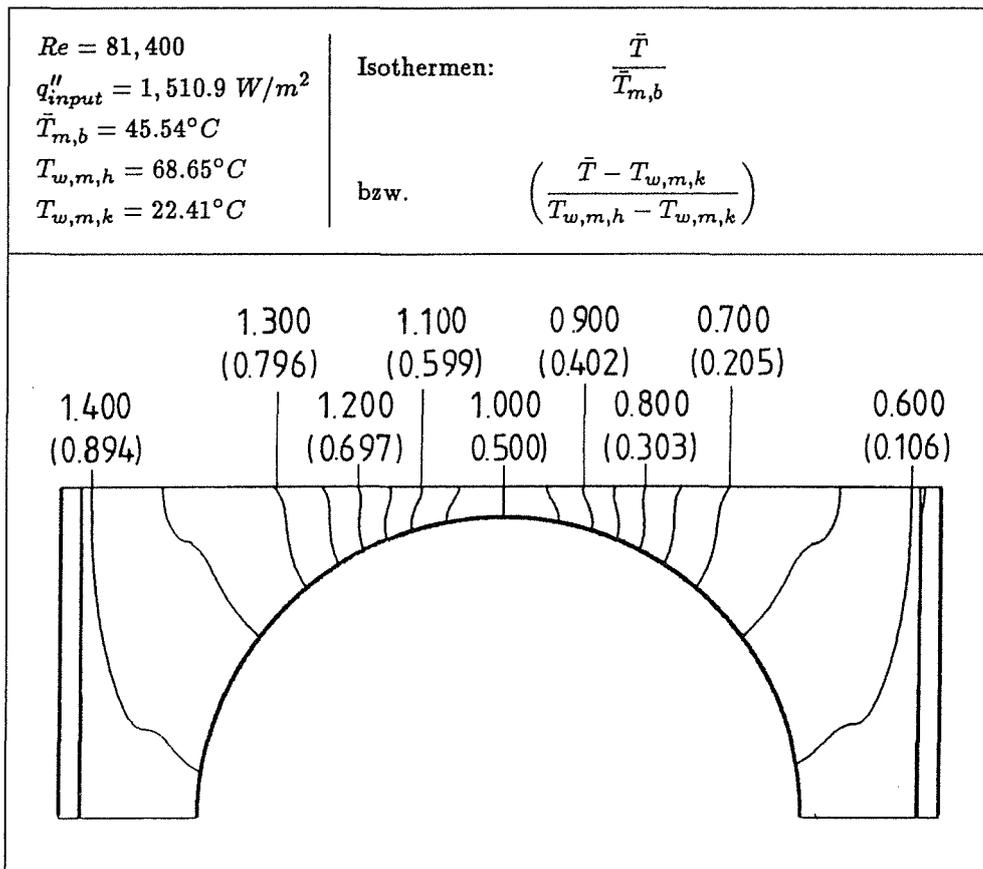


Abb. 6.13f: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/8.1

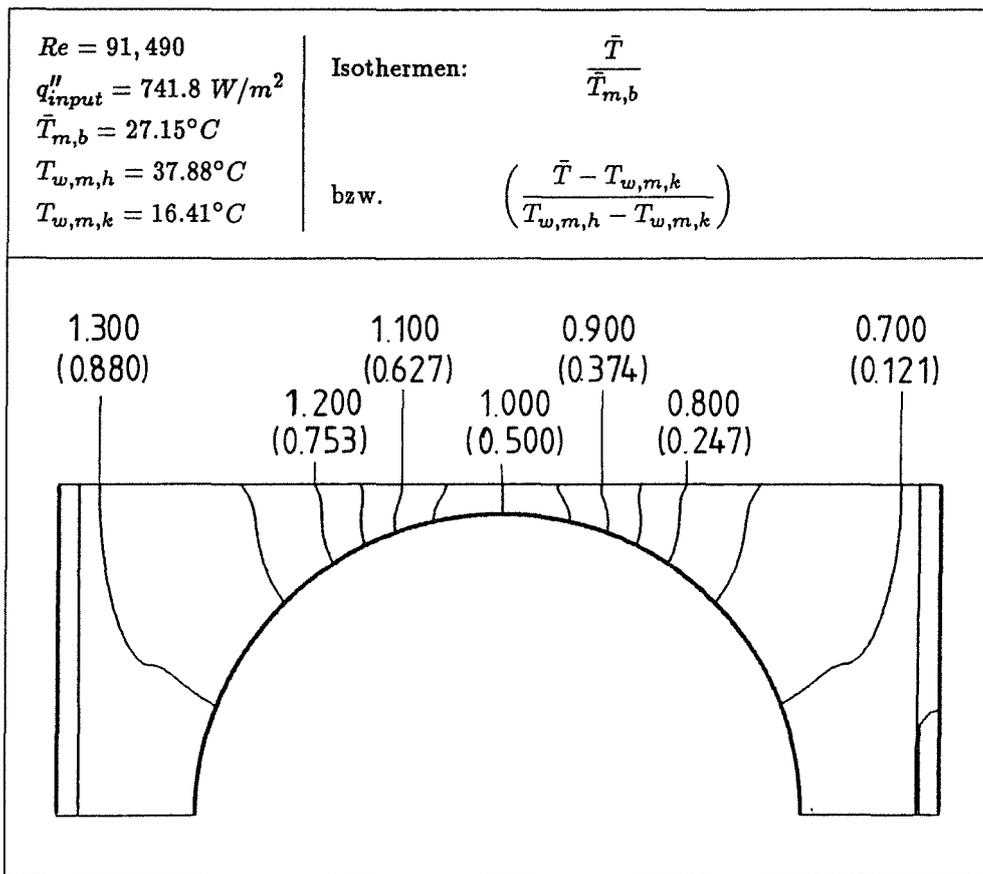


Abb. 6.13g: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung in der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]; Versuch 5B/9.1

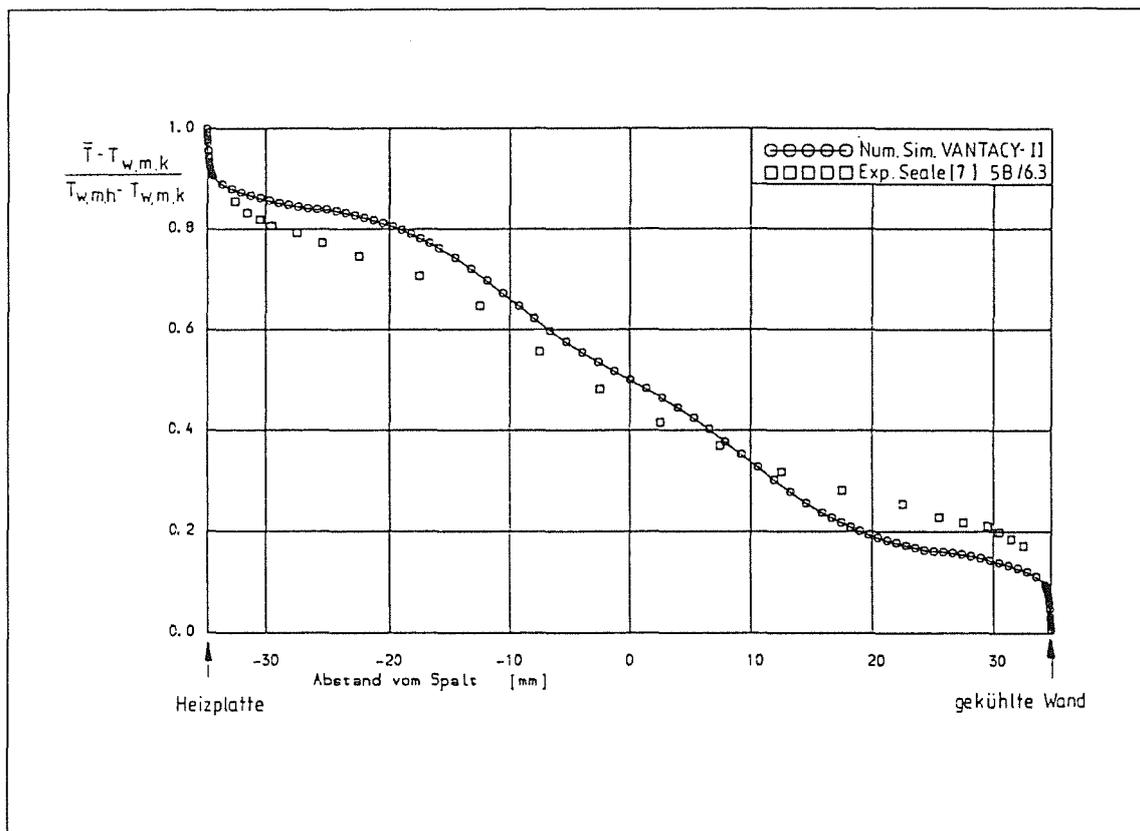


Abb. 6.14: Wandsenkrecht Temperaturprofil  $(\bar{T} - T_{w,m,k}) / (T_{w,m,h} - T_{w,m,k})$  entlang der Symmetrielinie ( $a-a$ ) von der beheizten zur gekühlten Kanalwand. Vergleich der Ergebnisse der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II mit dem Experiment 5B/6.3 von SEALE [7]

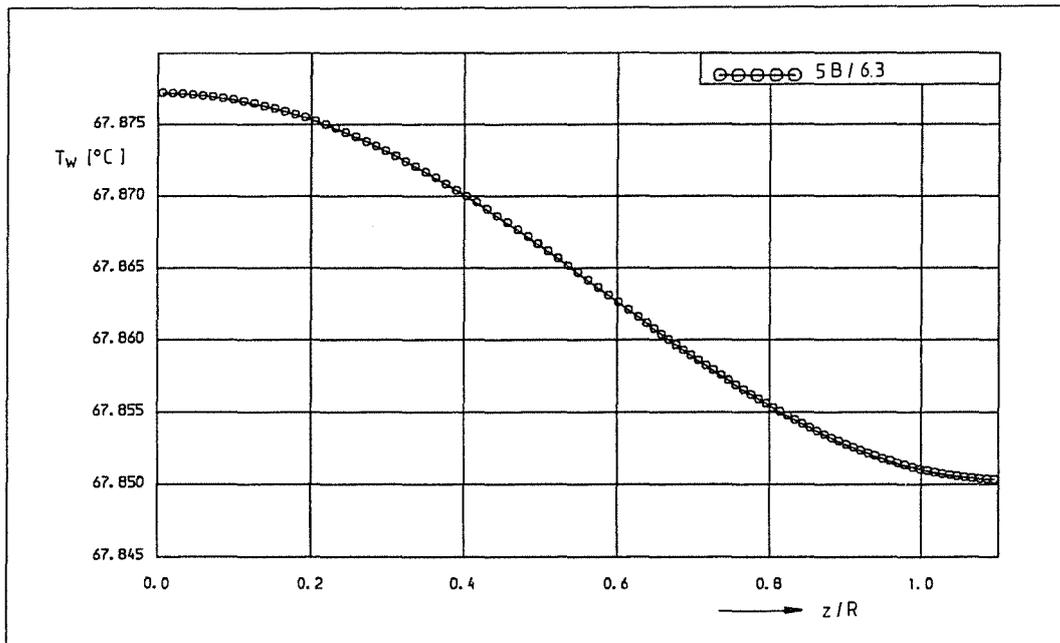


Abb. 6.15a: Wandtemperaturverlauf an der Heizplatte. Ergebnis der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II für den Fall 5B/6.3 von SEALE [7]

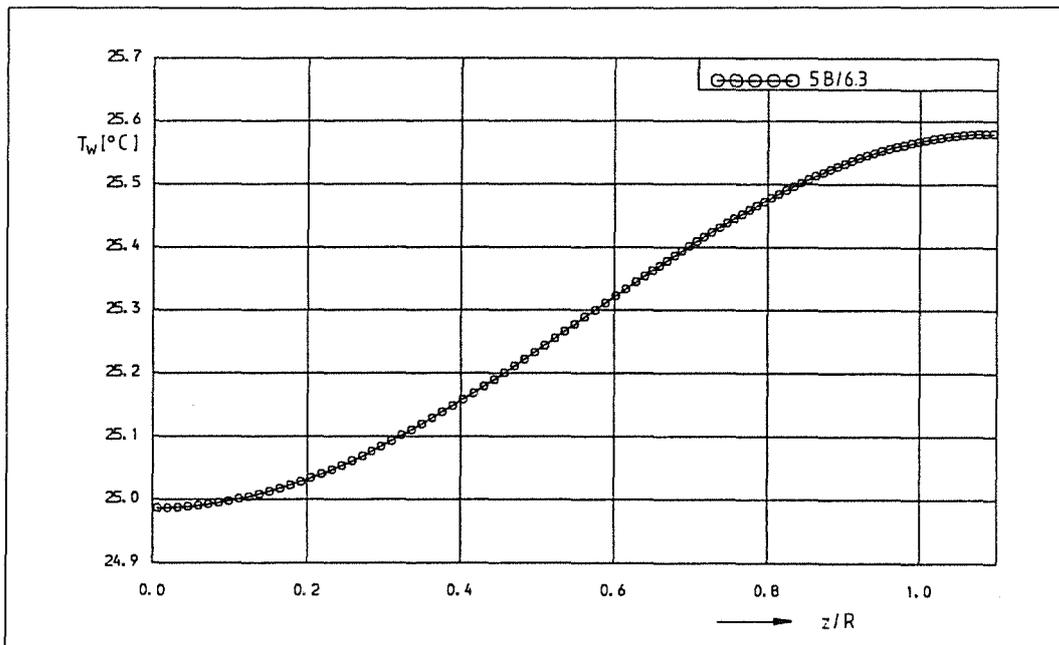


Abb. 6.15b: Wandtemperaturverlauf an der gekühlten Kanalwand. Ergebnis der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II für den Fall 5B/6.3 von SEALE [7]

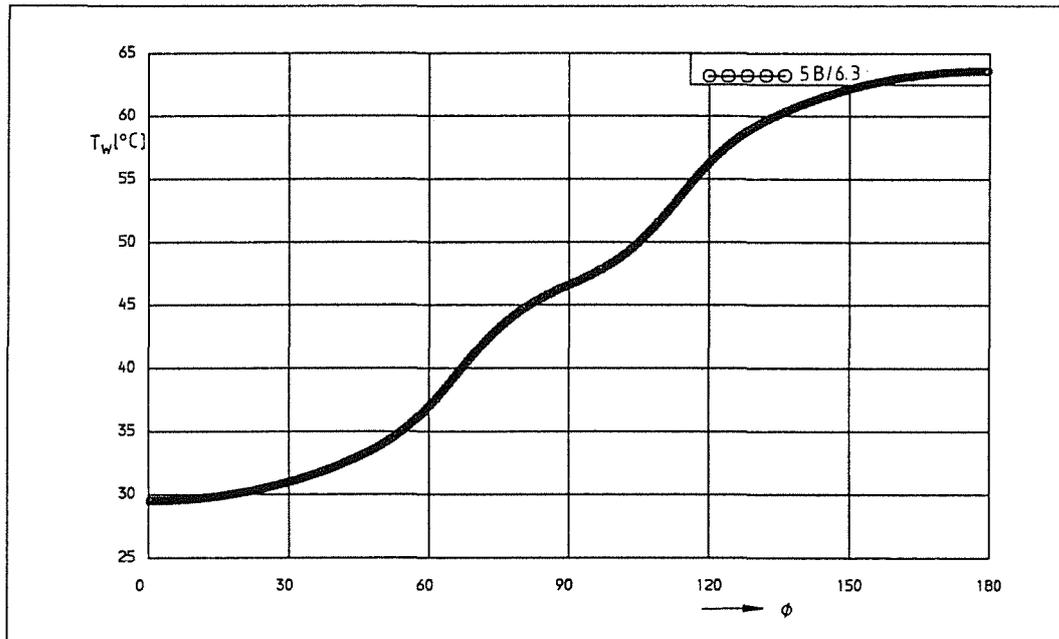


Abb. 6.15c: Wandtemperaturverlauf am Kreisrohr. Ergebnis der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II für den Fall 5B/6.3 von SEALE [7]

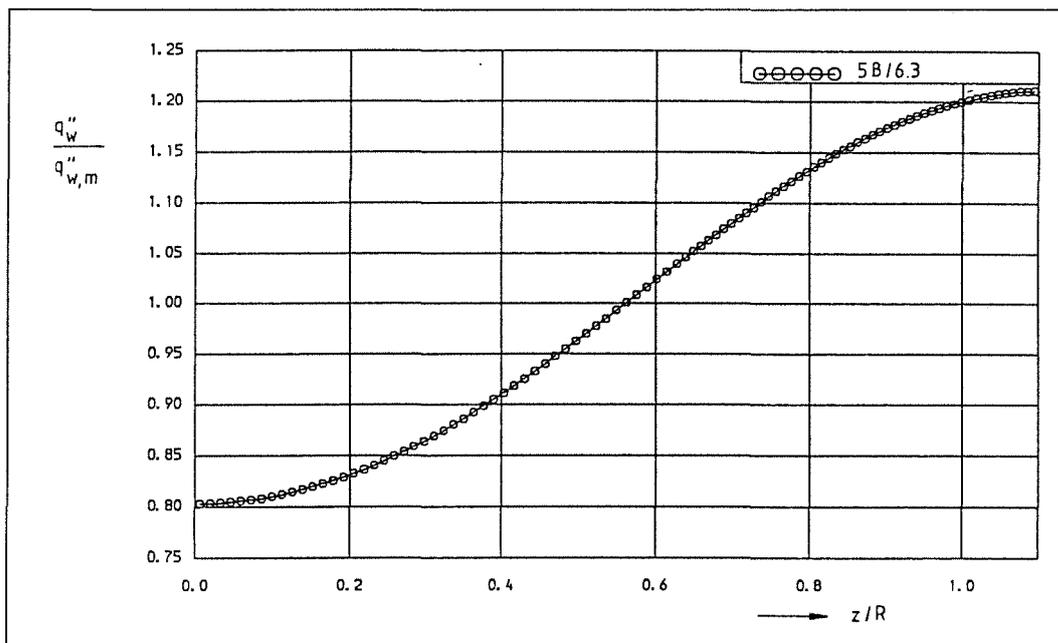


Abb. 6.16: Wandwärmestromverteilung an den Kanalwänden der 5-Stab-Anordnung von SEALE [7]. Ergebnis der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II für den Fall 5B/6.3

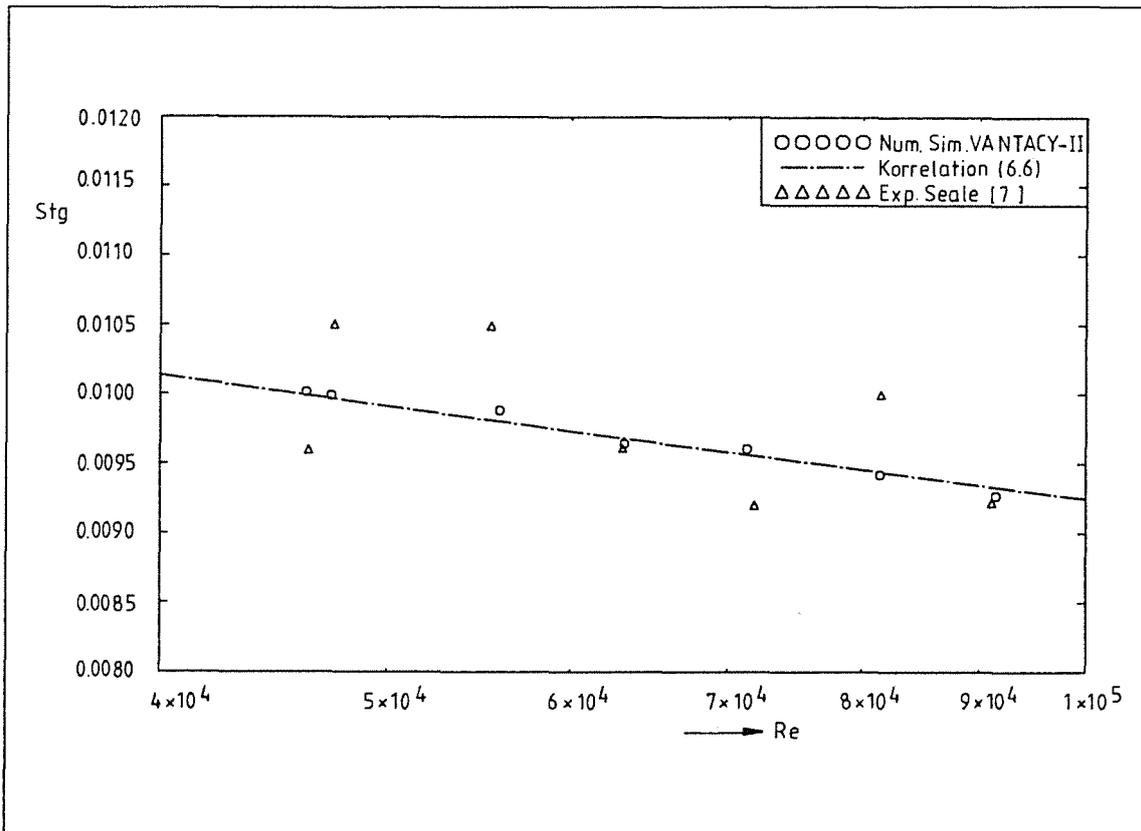


Abb. 6.17: STANTON-Zahl im Spalt  $St_g$  in Abhängigkeit von der REYNOLDS-Zahl  $Re$ . Vergleich der Ergebnisse der numerischen Simulation mit dem FEM-Code VANTACY-II mit den von SEALE [7] experimentell in der 5-Stab-Anordnung ermittelten Daten

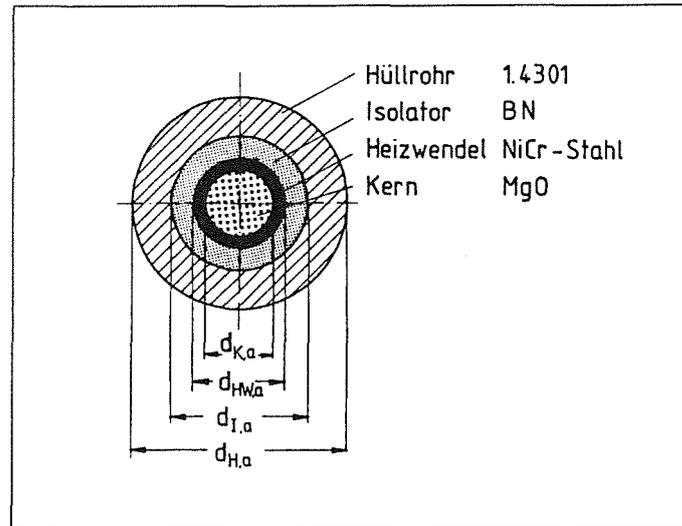


Abb. 6.18: Aufbau eines Brennstabsimulators des im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels

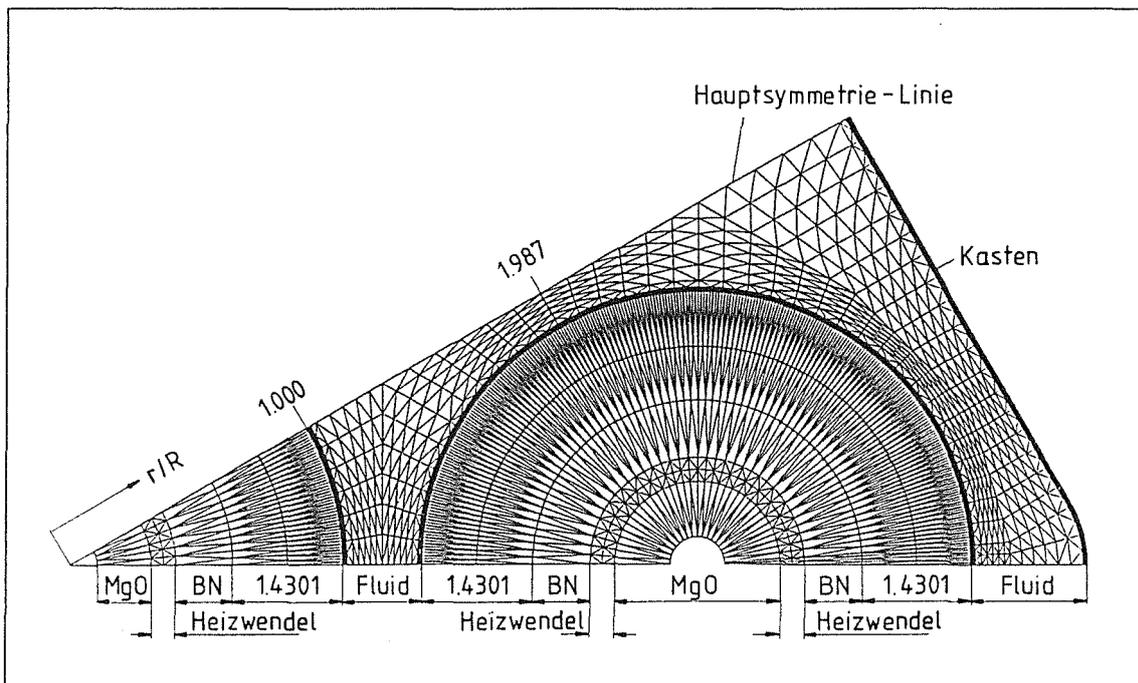


Abb. 6.19: Finite Elemente-Netz zur numerischen Nachbildung des im KRISTA-Versuchsstand am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe untersuchten 7-Stabbündels

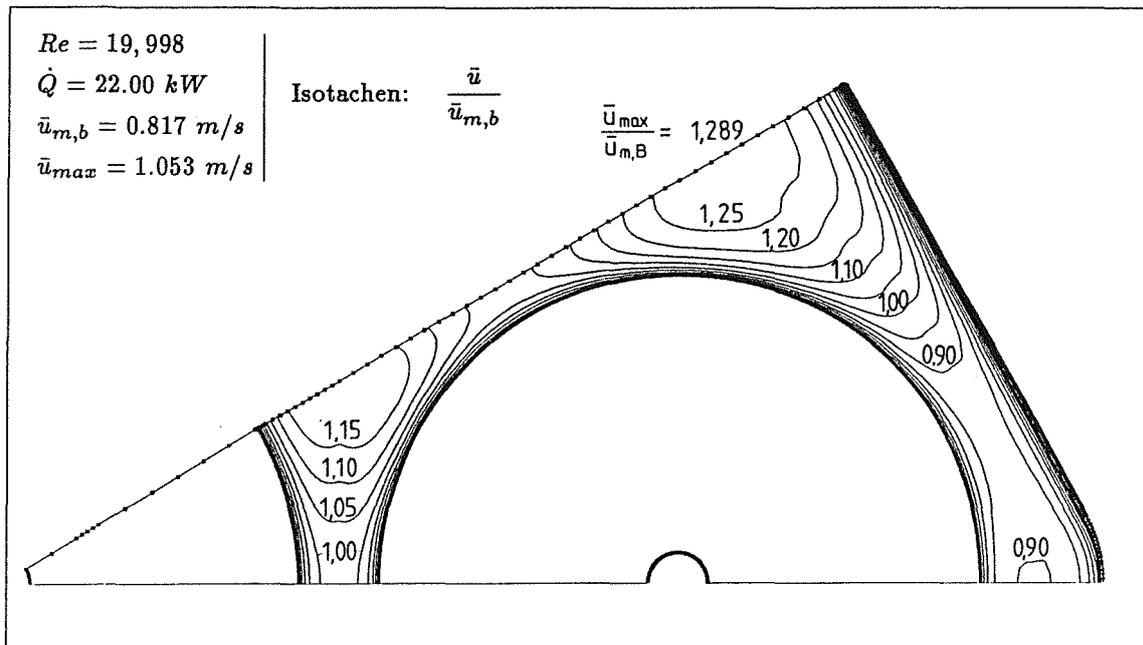


Abb. 6.20a: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung im 7-Stabbündel des KRISTA-Versuchsstandes am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe; Fall KR15FH

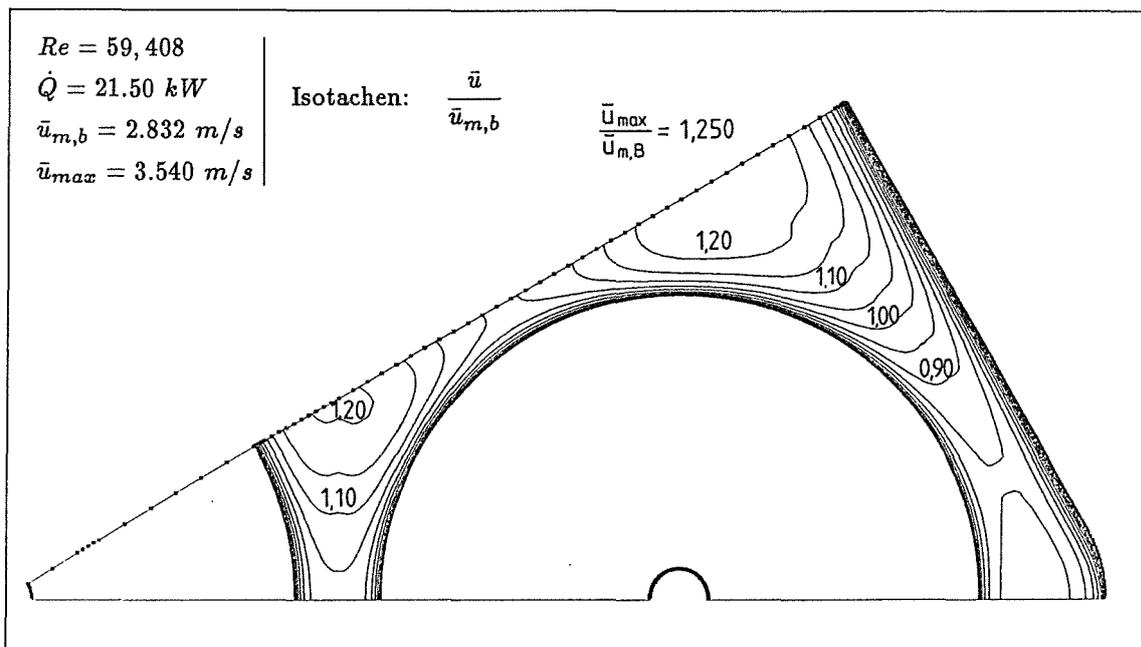


Abb. 6.20b: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung im 7-Stabbündel des KRISTA-Versuchsstandes am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe; Fall KR15FF

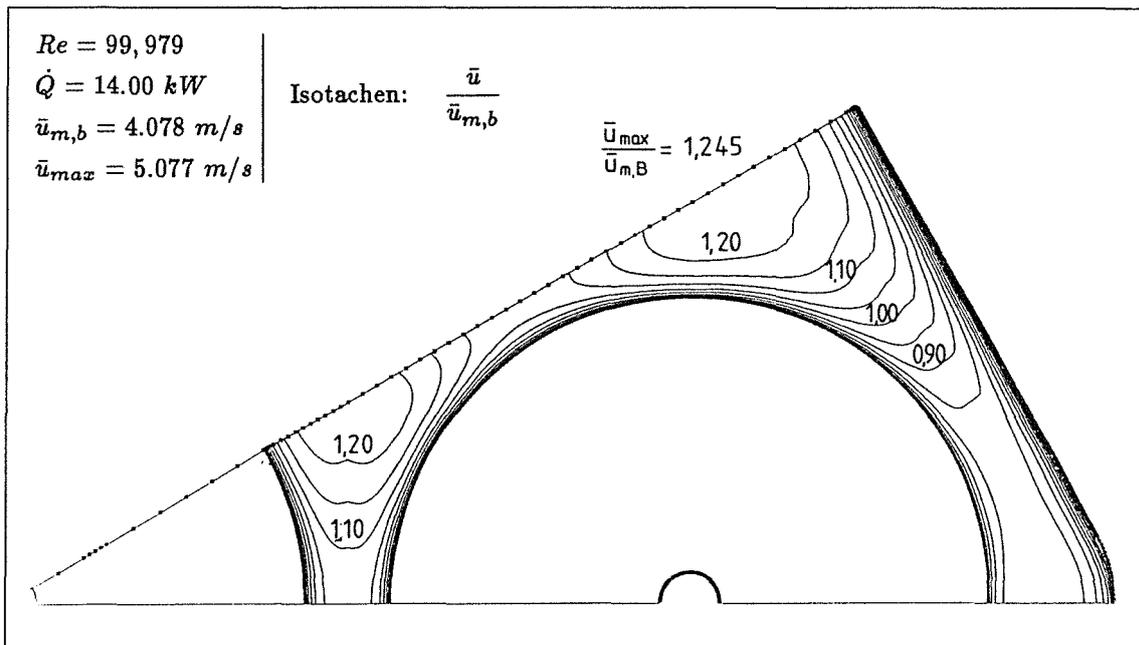


Abb. 6.20c: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung im 7-Stabbündel des KRISTA-Versuchsstandes am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe; Fall KR15FE

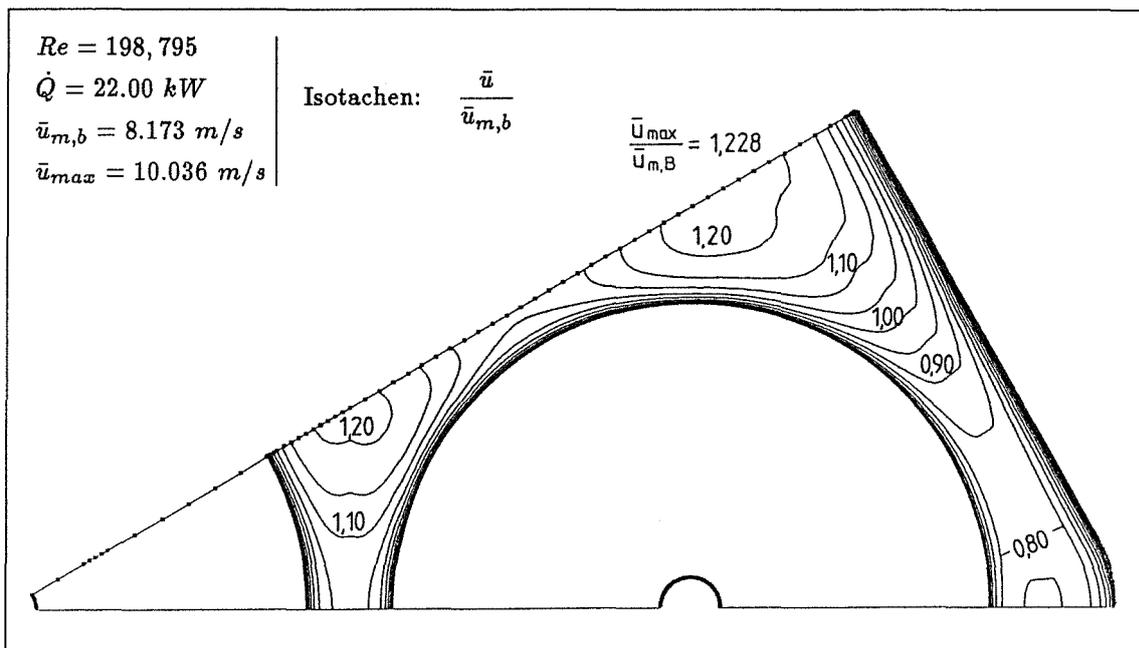


Abb. 6.20d: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Geschwindigkeitsverteilung im 7-Stabbündel des KRISTA-Versuchsstandes am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe; Fall KR15FG

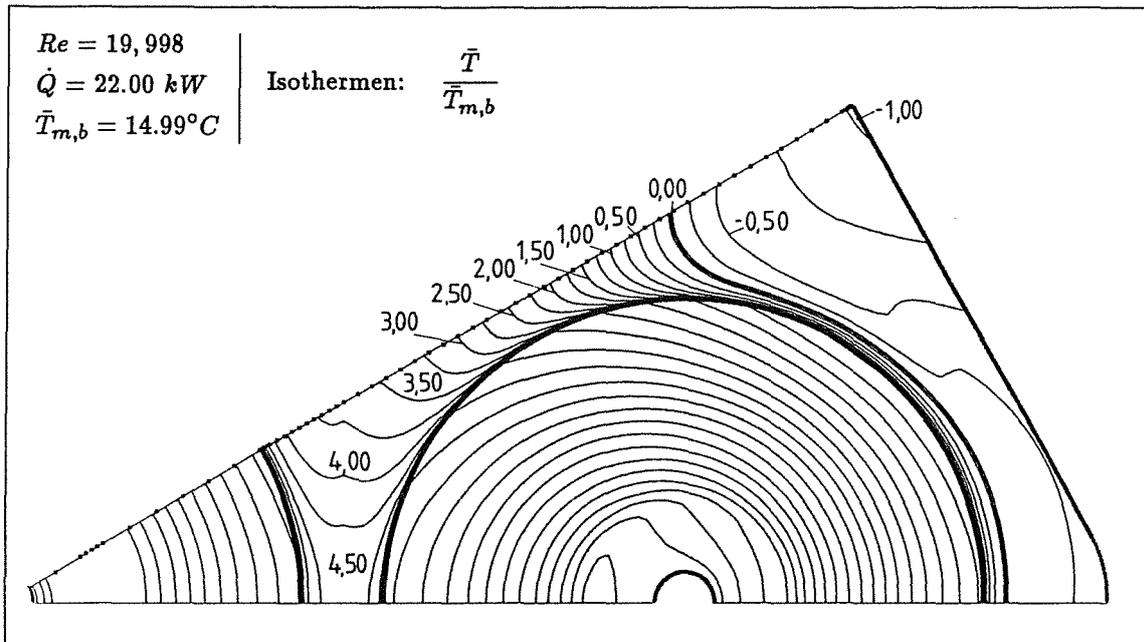


Abb. 6.21a: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung im 7-Stabbündel des KRISTA-Versuchsstandes am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe; Fall KR15FH

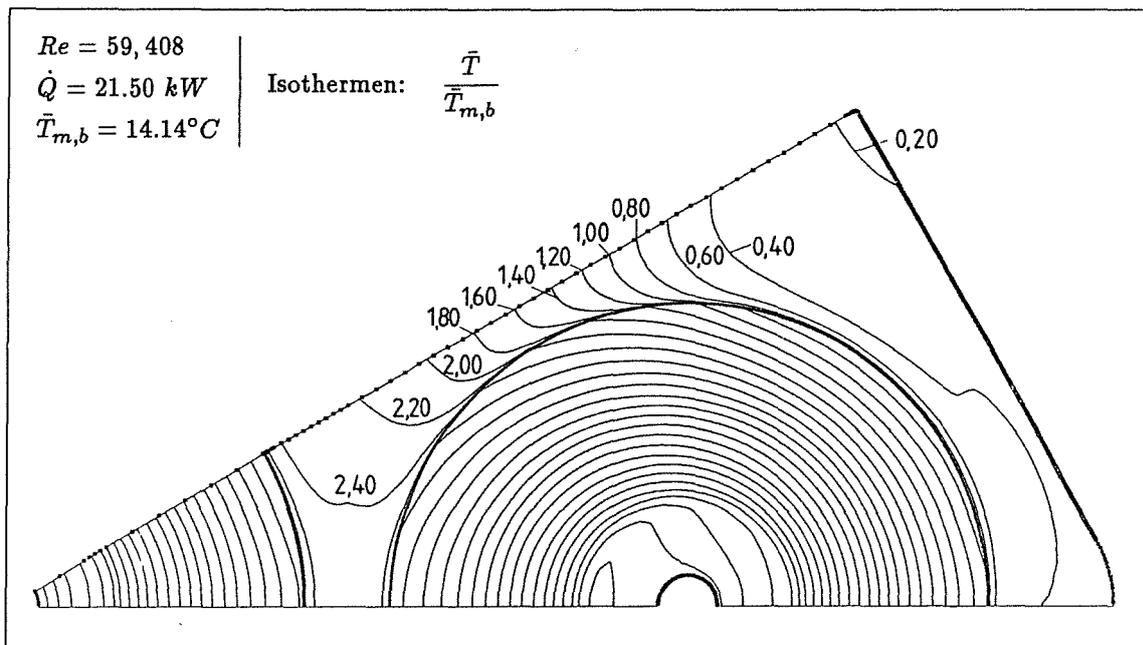


Abb. 6.21b: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung im 7-Stabbündel des KRISTA-Versuchsstandes am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe; Fall KR15FF

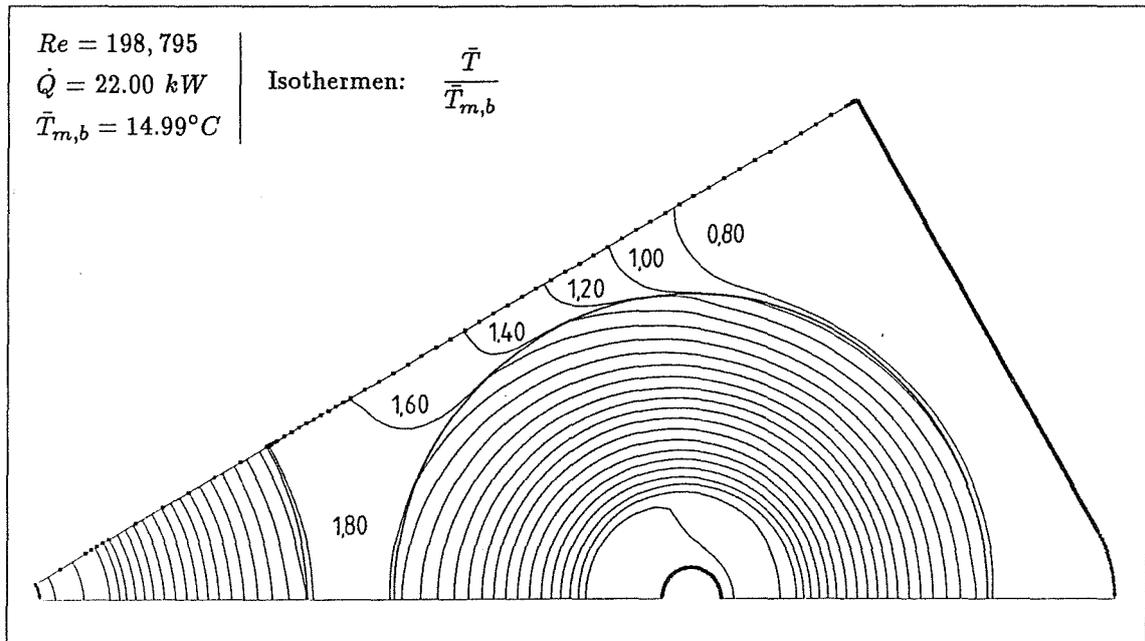


Abb. 6.21c: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Temperaturverteilung im 7-Stabbündel des KRISTA-Versuchsstandes am Institut für Reaktorbauelemente des Kernforschungszentrums Karlsruhe; Fall KR15FG

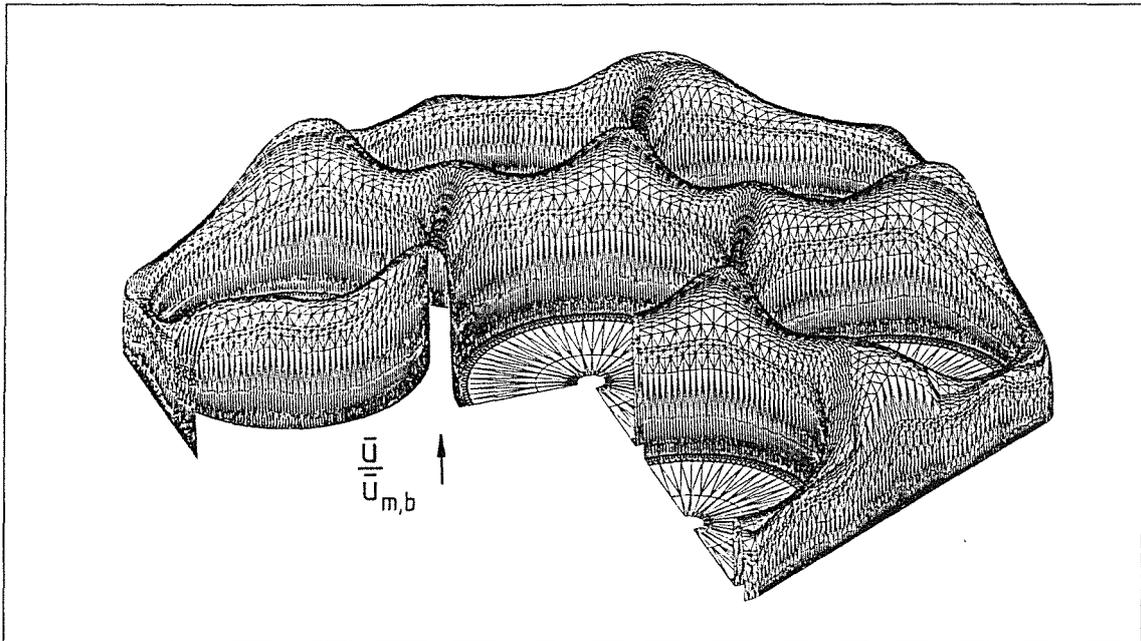


Abb. 6.22a: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete turbulente Geschwindigkeitsverteilung  $\bar{u}/\bar{u}_{m,b}$  für den Fall D0.5 ( $P/D = 1.10$ ;  $W/D = 1.05$ ;  $Re = 10^5$ )

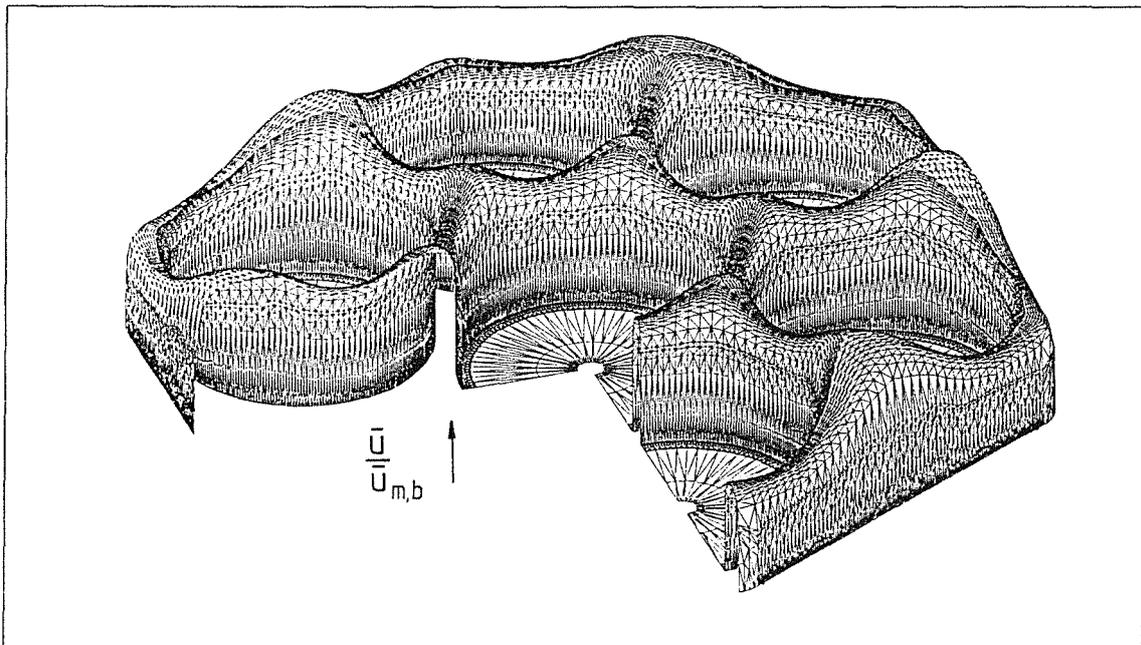


Abb. 6.22b: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete turbulente Geschwindigkeitsverteilung  $\bar{u}/\bar{u}_{m,b}$  für den Fall D1.0 ( $P/D = 1.10$ ;  $W/D = 1.10$ ;  $Re = 10^5$ )

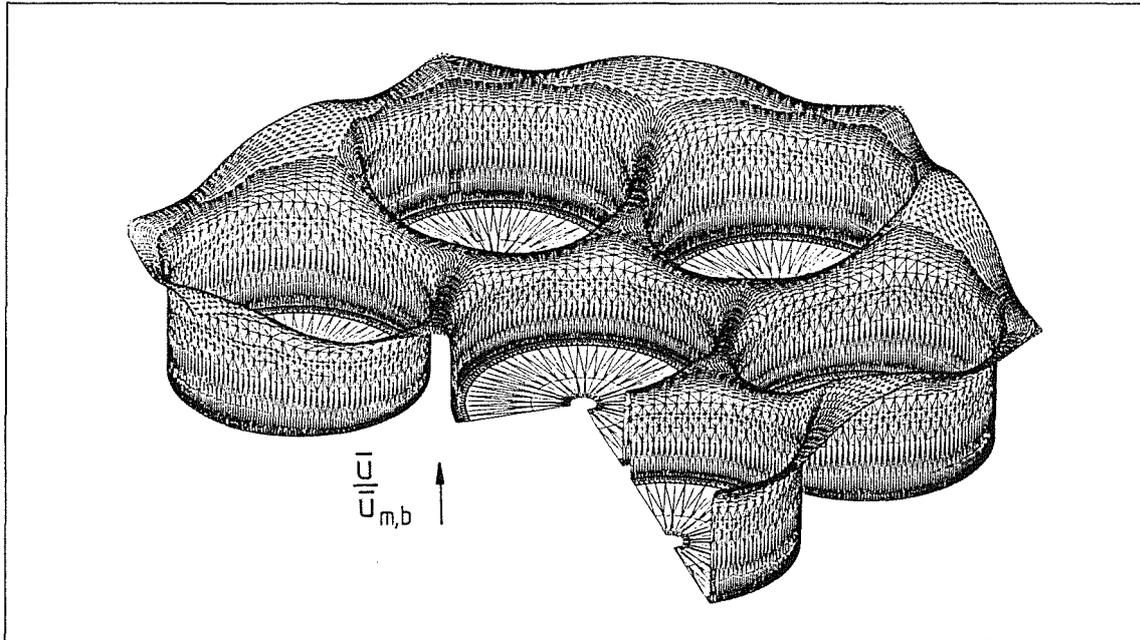


Abb. 6.22c: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete turbulente Geschwindigkeitsverteilung  $\bar{u}/\bar{u}_{m,b}$  für den Fall S1.0 ( $P/D = 1.10$ ; kein Kasten;  $Re = 10^5$ )

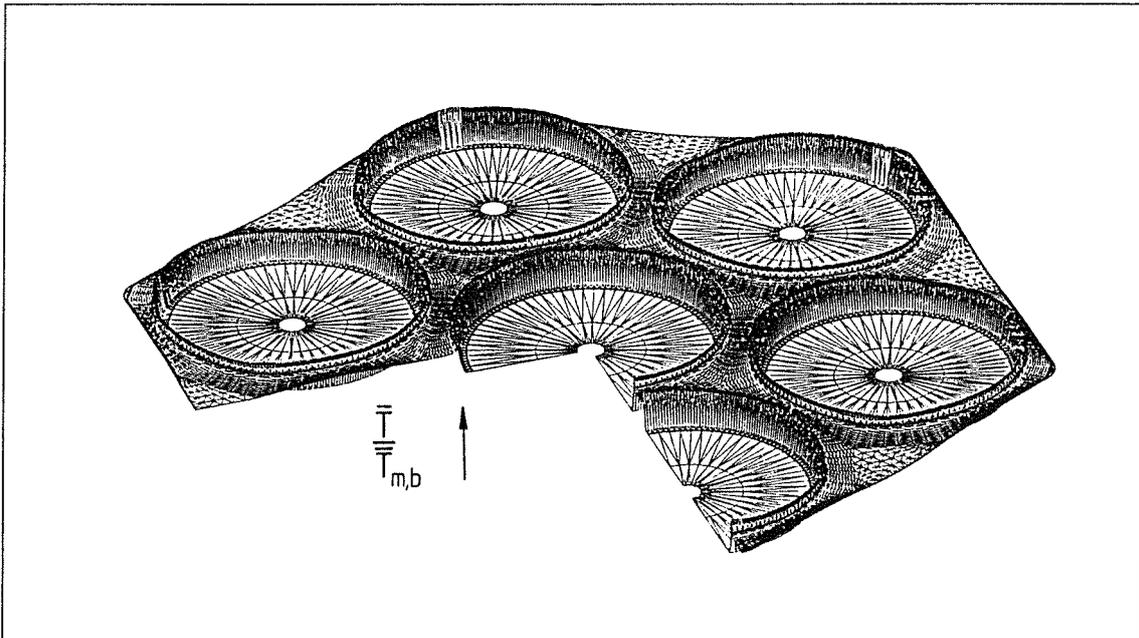


Abb. 6.23a: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete turbulente Temperaturverteilung  $\bar{T}/\bar{T}_{m,b}$  für den Fall D0.5H7 ( $P/D = 1.10$ ;  $W/D = 1.05$ ;  $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ kW}$ ; alle Stäbe beheizt)

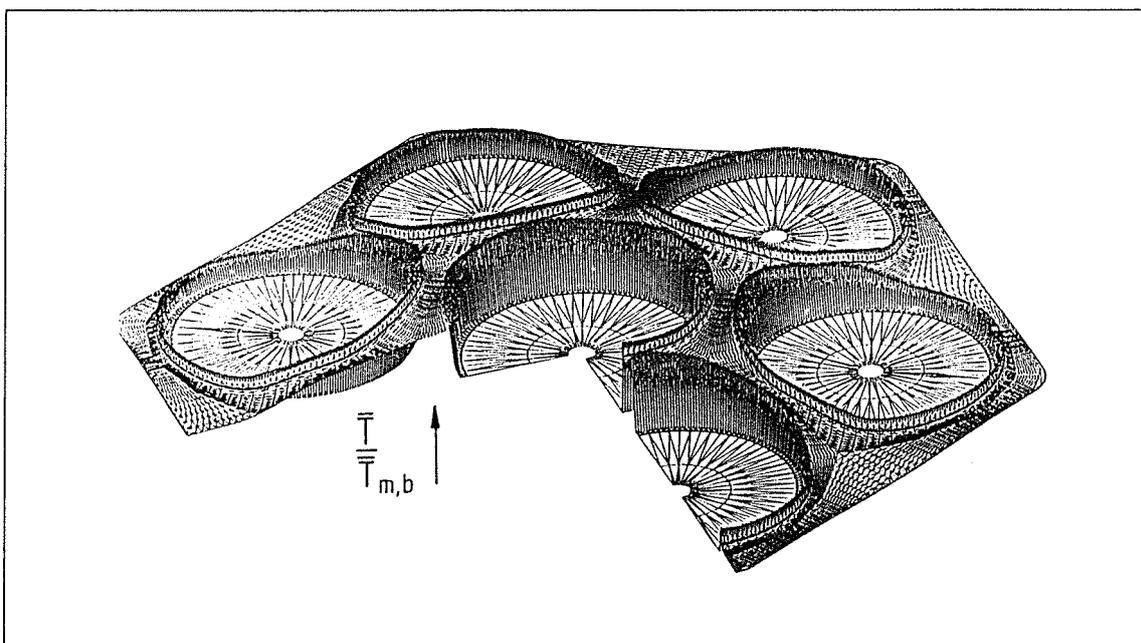


Abb. 6.23b: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete turbulente Temperaturverteilung  $\bar{T}/\bar{T}_{m,b}$  für den Fall D1.0H7 ( $P/D = 1.10$ ;  $W/D = 1.10$ ;  $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ kW}$ ; alle Stäbe beheizt)

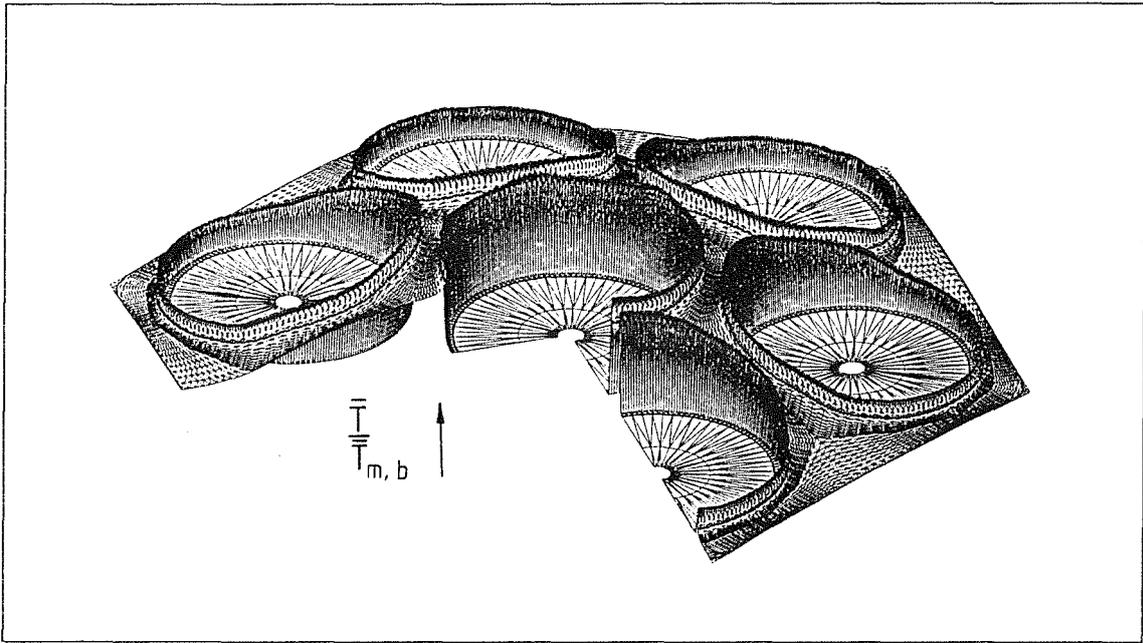


Abb. 6.23c: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete turbulente Temperaturverteilung  $\bar{T}/\bar{T}_{m,b}$  für den Fall S1.0H7 ( $P/D = 1.10$ ; kein Kasten;  $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ kW}$ ; alle Stäbe beheizt)

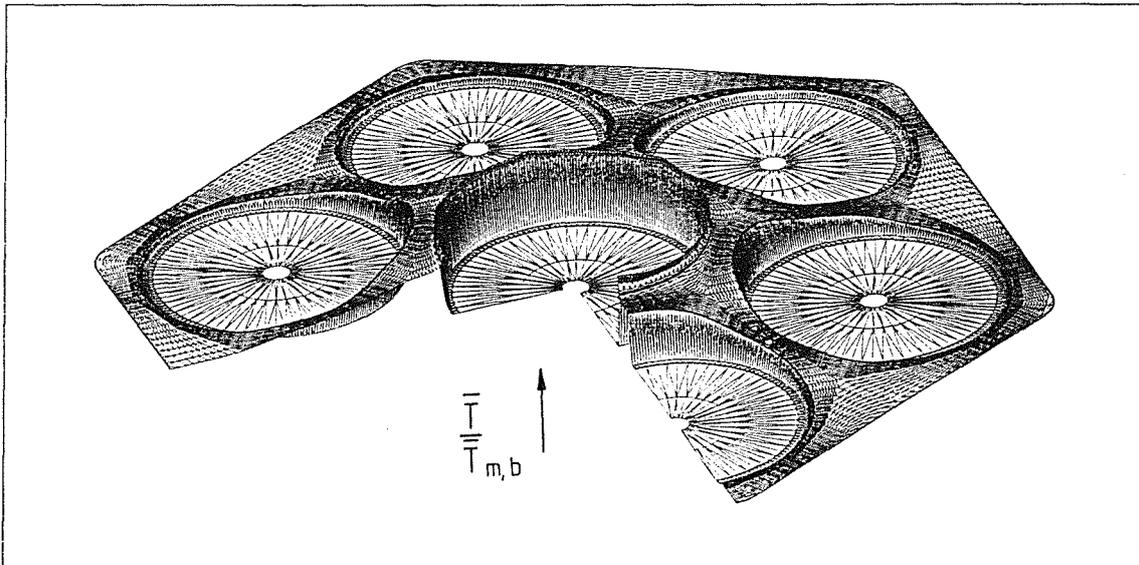


Abb. 6.24a: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete turbulente Temperaturverteilung  $\bar{T}/\bar{T}_{m,b}$  für den Fall  $D1.0H1$  ( $P/D = 1.10$ ;  $W/D = 1.10$ ;  $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ kW}$ ; Zentralstab beheizt)

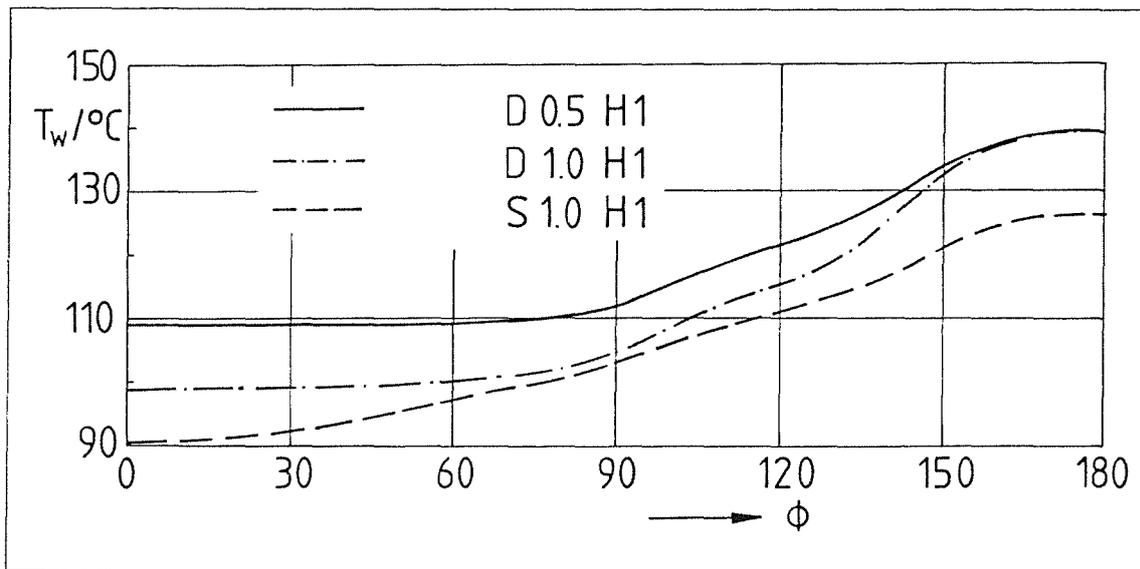


Abb. 6.24b: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Wandtemperaturverläufe für die Fälle  $D0.5H1$ ,  $D1.0H1$  und  $S1.0H1$  ( $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ kW}$ ; Zentralstab beheizt)

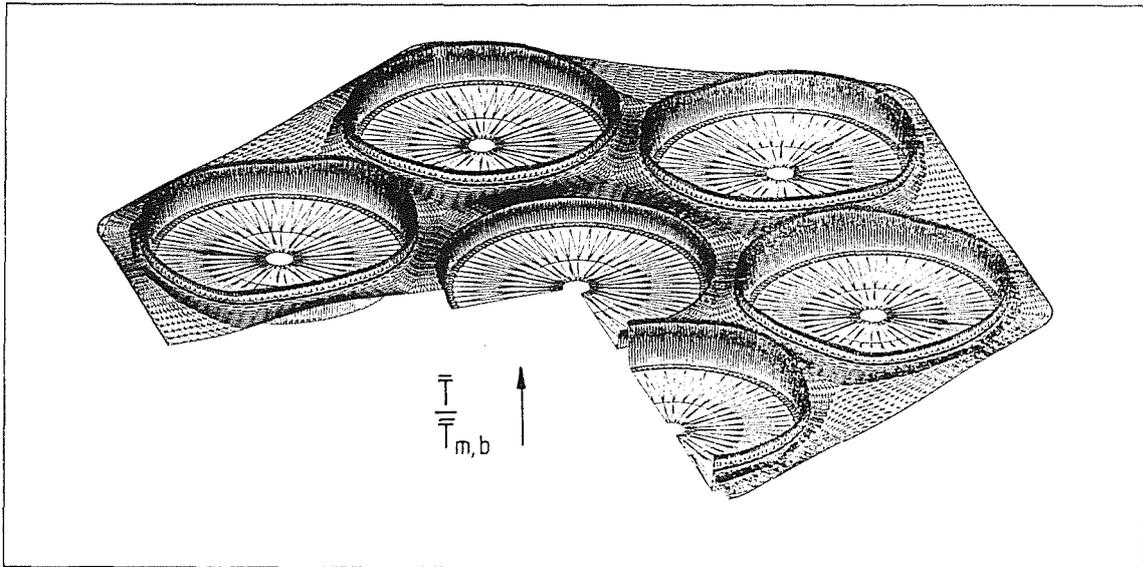


Abb. 6.25a: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete turbulente Temperaturverteilung  $\bar{T}/\bar{T}_{m,b}$  für den Fall  $D1.0H6$  ( $P/D = 1.10$ ;  $W/D = 1.10$ ;  $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ kW}$ ; Wandstäbe beheizt)

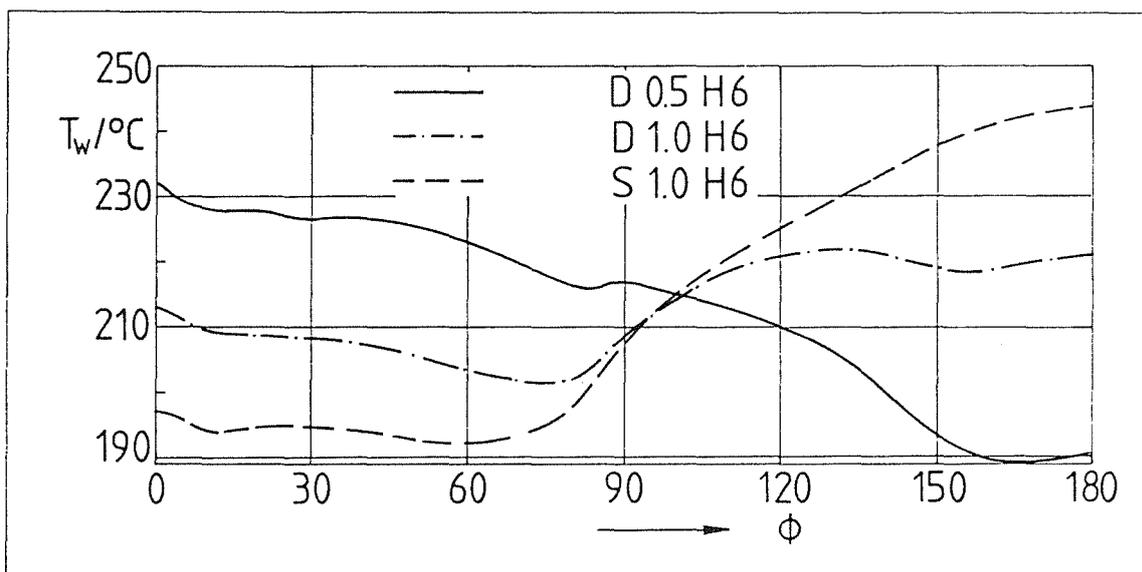


Abb. 6.25b: Mit dem FEM-Code VANTACY-II errechnete Wandtemperaturverläufe für die Fälle  $D0.5H6$ ,  $D1.0H6$  und  $S1.0H6$  ( $Re = 10^5$ ;  $q' = 450 \text{ kW}$ ; Wandstäbe beheizt)

**Anhang A. Zusammenstellung der Beziehungen für die  
turbulente Prandtl-Zahl**

A.1. REIN EMPIRISCHE ANSÄTZE

QUARMBY & QUIRK [77]

$$Pr_{tur} = \left(1 + 400^{-y/R}\right)^{-1} \quad (4.7)$$

ROTTA [78]

$$Pr_{tur} = 0.9 - 0.4(y/\delta) \quad (4.8)$$

ANTONIA [79]

$$Pr_{tur} \simeq 0.61 \frac{(1 - 0.045y^+)}{(1 - 0.05y^+)} \quad \text{mit } 0 \leq y^+ \leq 20 \quad (4.9)$$

GRÄBER [80]

$$Pr_{tur} = \left(0.91 + 0.13Pr^{0.545}\right)^{-1} \quad \text{für } 0.72 \leq Pr \leq 100 \quad (4.10)$$

MALHOTRA & KANG [81]

$$Pr_{tur} = 1.01 - 0.09Pr^{0.36} \quad \text{für } 1 < Pr < 145 \quad (4.11a)$$

$$Pr_{tur} = 1.01 - 0.25 \log Pr \quad \text{für } 145 < Pr < 1800 \quad (4.11b)$$

$$Pr_{tur} = 0.99 - 0.44(\log Pr)^{0.5} \quad \text{für } 1800 < Pr < 12500 \quad (4.11c)$$

## A.2. ANSÄTZE AUF DER GRUNDLAGE VON THEORIEN ERSTER ORDNUNG

## A.2.1. MISCHUNGSWEG-MODELLE

JENKINS [82]

$$Pr_{tur} = \frac{1}{Pr} \frac{1 - (90/\pi^2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} e^{\left(-n^2 \pi^2 l \nu / r^2 \nu^{1/2}\right)}}{1 - (90/\pi^2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} e^{\left(-n^2 \pi^2 l a / r^2 \nu^{1/2}\right)}} \quad (4.12)$$

WASSEL & CATTON [84]

$$Pr_{tur} = \frac{C_3}{C_1 Pr} \frac{1 - e^{-\frac{C_4}{\epsilon_r \nu}}}{1 - e^{-\frac{C_2}{Pr \epsilon_r \nu}}} \quad (4.13)$$

mit

$$C_1 = 0.21 ; \quad C_2 = 5.25 ; \quad C_3 = 0.20 ; \quad C_4 = 5.00 \quad (4.13a)$$

CEBECI [86], NA & HABIB [87]

$$Pr_{tur} = \frac{\kappa}{\kappa_q} \frac{1 - e^{(-y^+/A^+)}}{1 - e^{(-y^+/B^+/Pr)}} \quad (4.15)$$

mit

$$\kappa_q = \kappa \quad (4.15a)$$

$$B^+ = \sum_{i=1}^5 C_i (\log Pr)^{i-1} \quad (4.15b)$$

und

$$C_1 = 34.96 ; \quad C_2 = 28.79 ; \quad C_3 = 33.95 ; \quad C_4 = 6.33 ; \quad C_5 = -1.186 \quad (4.15c)$$

KAYS & CRAWFORD [88]

$$Pr_{tur}^{-1} = \frac{1}{2Pr_{tur,\infty}} + C \frac{\epsilon_\tau}{\nu} Pr \sqrt{Pr_{tur,\infty}^{-1}} - \left( C \frac{\epsilon_\tau}{\nu} Pr \right)^2 \left[ 1 - e^{(-C \frac{\epsilon_\tau}{\nu} Pr Pr_{tur,\infty}^{0.5})^{-1}} \right] \quad (4.16)$$

mit

$$Pr_{tur,\infty} = 0.86 ; \quad C = 0.20 \quad (4.16a)$$

AZER & CHAO [89]

$$Pr_{tur} = \frac{1 + 57f(y/R) / (Re^{0.46} Pr^{0.58})}{1 + 135f(y/R) / Re^{0.45}} \quad (4.17)$$

mit

$$f(y/R) = e^{-(y/R)^{0.25}} \quad (4.17a)$$

## A.2.2. WEITERE ANSÄTZE AUF DER GRUNDLAGE VON THEORIEN ERSTER ORDNUNG

REYNOLDS [90]

$$Pr_{tur} = \frac{1 + C_1 / (Re Pr)^{0.5}}{1 + C_2 / Re^{0.5}} \quad (4.18)$$

mit

$$C_1 = 86 ; \quad C_2 = 200. \quad (4.18a)$$

THOMAS [91]

$$Pr_{tur} = \frac{Pr + \nu / \epsilon_\tau}{1 + \nu / \epsilon_\tau} \cdot \frac{e^{(-y + \frac{\nu^*}{\delta_m} Pr^{0.5})}}{e^{(-y + \frac{\nu^*}{\delta_m})}} \quad (4.19)$$

## A.3. ANSÄTZE AUF DER GRUNDLAGE VON THEORIEN HÖHERER ORDNUNG

JISCHA & RIEKE [93], RIEKE [64]

$$Pr_{tur} = K_1 + \frac{K_2}{Pr Re^m} \quad (4.29)$$

mit

$$K_1 = 0.9; \quad K_2 = 182.4; \quad m = 0.888; \quad Pr_{tur} < 0.5 \quad (4.29a)$$

JISCHA & RIEKE [93], BAARS [96]

$$Pr_{tur} = K_1 + \frac{K_2}{Pr Re^m} \quad (4.29)$$

mit

$$K_1 = 0.98; \quad K_2 = 2.87; \quad m = 0.5; \quad Pr_{tur} \leq 1.0 \quad (4.30)$$