



KfK 4920  
August 1991

# **Zur Ausbreitung schwacher Stoßwellen in Lüftungssystemen**

**M. Neuberger**  
**Laboratorium für Aerosolphysik und Filtertechnik**  
**Projekt Nukleare Sicherheitsforschung**

**Kernforschungszentrum Karlsruhe**



**KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE**  
**Laboratorium für Aerosolphysik und Filtertechnik**  
**Projekt Nukleare Sicherheitsforschung**

**KfK 4920**

**Zur Ausbreitung schwacher Stoßwellen in Lüftungssystemen**

**M. Neuberger**

**Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe**

**Zur Ausbreitung schwacher Stoßwellen in Lüftungssystemen**

von

Martin Neuberger, Durmersheim

Vom Fachbereich für Maschinentechnik der Universität – Gesamthochschule – Essen  
genehmigte Dissertation zum Erwerb des akademischen Grades Doktor – Ingenieur

Tag der mündlichen Prüfung: 15.02.91

Referent: Prof. Dr. rer. nat. W. Merzkirch

Korreferent: Priv. – Doz. Dr. – Ing. F. Peters

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

## **Zur Ausbreitung schwacher Stoßwellen in Lüftungsanlagen**

### **Zusammenfassung**

Um die Sicherheitsreserven von Schwebstofffiltern zu bestimmen, müssen sowohl die strömungsdynamischen Belastungen als auch die mechanische Festigkeit der Filtereinheiten bekannt sein. Aus diesem Grund ist die Entwicklung eines Rechencodes zur Bestimmung instationärer Strömungsgrößen und Explosionswellen notwendig. Daher wurde die Wechselwirkung einer Stoßwelle mit einer Abzweigung untersucht. Der Bericht überprüft die Brauchbarkeit zweier Theorien. Die erste berechnet die Stoßstärke nach dem Abzweig nur über geometrische Betrachtungen. Ein Vergleich mit experimentellen Werten zeigt nur ein unbefriedigendes Ergebnis für schwache Stoßwellen. Die zweite Theorie geht davon aus, daß die Druckänderung nach der Druckwelle über den Abzweig die gleiche ist, wie bei einer stationären Strömung. Die Stoßwellen wurden für verschiedene Abzweigkonfiguration gemessen und die Ergebnisse der Berechnung mit den experimentellen Werten am Stoßwellenrohr sowohl für runde als auch für quadratische Kanäle verglichen. Dabei konnte eine gute Übereinstimmung erzielt werden. Außerdem wurde die Wechselwirkung einer Stoßwelle mit einem Kanal veränderlichen Querschnitts untersucht. Dabei wird eine neue Theorie zur Berechnung der Stoßstärkenänderung nach einer Düse bzw. eines Diffusors beschrieben. Die Theorie bietet die Möglichkeit reflektierte Wellen zu berechnen, wie Stoßwellen am Eintritt in eine Düse und Expansionswellen im Diffusor. Auch der Einfluß der Wandreibung und von Ablösererscheinungen kann berücksichtigt werden. Die Theorie erlaubt die Berechnung des Drucksprungs über einen "Sekundärstoß", der in einem Diffusor auftritt, wenn die Strömung nach einer starken Expansionswelle Schallgeschwindigkeit erreicht. Auch hier werden die theoretischen Ergebnisse für verschiedene Flächenverhältnisse mit experimentellen Werten an einem Stoßwellenrohr verglichen. Es konnte wiederum eine gute Übereinstimmung erzielt werden.

## **On the propagation of weak shock waves in air cleaning systems**

### **Abstract**

In order to be able to calculate HEPA filter margins, both the mechanical loading at the service location and the structural strength of the filter unit must be known. This makes necessary the development of suitable computer codes for modelling fluid dynamic transients and, for extrem accidents, the propagation of weak shock waves. So the interaction of a shock wave with a junction of a straight duct having a side branch is considered. The paper checks the validity of two hypotheses. The first one calculates the shock waves after the junctions only by a geometrical consideration. A comparison with experimental values shows only an unsatisfactory result for weak shock waves. The second theory assumes that the pressure drop across the junction, in the quasi-steady flow which takes place after the incident shock waves, is the same as in steady flow tests. The pressure drops were measured for different junctions and the results of the calculation were compared with experimental values from a shock tube, both for circular and rectangular channels. A good agreement was obtained. Also the interaction of a shock wave with a channel of varying cross section is considered. So a new theory to calculate the changes in shock strength after a nozzle and a diffuser is described. There is the possibility to calculate reflected waves, as shock waves in front of a converging channel and an expansion wave in front of a diverging channel. Also the problem of the influence of dissipation to the change in shock strength is solved. The theory calculates the pressure drop of the "shock-shock", which takes place in a diffuser, if the flow is accelerated to the velocity of sound from a strong expansion wave. The shock strength were measured for different area ratios and the results of the calculation were compared with experimental values from a shock tube. A good agreement was obtained.

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
<b>1. Einleitung und Problemstellung</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelltheoretische Beschreibung der Stoßausbreitung in Kanalsystemen</b>	<b>5</b>
2.1 Berechnung der Stoßausbreitung in konvergenten und divergenten Kanälen	6
2.1.1 Theorie nach Whitham	7
2.1.2 Theorie nach der modifizierten Charakteristikenmethode	13
2.2 Berechnung der Stoßausbreitung in verzweigten Kanälen	23
2.2.1 Berechnung der Stoßstärke nach Peters und Merzkirch	23
2.2.2 Berechnung der Stoßstärke mit der modifizierten Charakteristiken – methode	27
2.3 Berechnung der Stoßdämpfung durch Reibung in geraden Kanälen	29
2.4 Berechnung der Stoßausbreitung im gesamten Kanalsystem	32
<b>3. Visualisierung der Stoßwelle zur Untersuchung der Beugungs – vorgänge</b>	<b>34</b>
3.1 Aufbau des Stoßwellenrohres	34
3.2 Beschreibung der benutzten Schatten – und Schlierenverfahren	35
3.2.1 Schattenverfahren	35
3.2.2 Schlierenverfahren	38
3.2.3 Funkenkamera	39
3.3 Auswertung der Messungen und Beschreibung der auftretenden Phänomene	39
3.3.1 Konvergente Flächenänderung	39
3.3.2 Divergente Flächenänderung	44
3.3.3 Grenzkurven aus experimentellen und theoretischen Betrach – tungen für das Auftreten eines Sekundärstoßes	50
3.3.4 Verzweigte Kanäle	53

<b>4.</b>	<b>Bestimmung der Stoßstärke durch direkte Druckmessung</b>	<b>57</b>
4.1	Aufbau des Stoßwellenrohres	57
4.1.1	Verzweigungen	57
4.1.2	Querschnittsvariation	59
4.2	Beschreibung der Meßtechnik zur Bestimmung der Drucksprünge	59
4.3	Auswertung der Messungen und Beschreibung der auftretenden Phänomene	61
4.3.1	Vorausgehende Untersuchungen zur Bestimmung möglicher Meß – fehler	61
4.3.2	Versuchsprotokoll, Bestimmung der experimentellen Stoßstärken	63
4.3.3	Druckverläufe im Stoßrohr	65
4.4	Experimentelle Bestimmung des Druckbeiwerts $q$	73
<b>5.</b>	<b>Vergleich der experimentell und modelltheoretisch bestimmten Stoßstärken</b>	<b>75</b>
5.1	Stoßstärkenänderung in querschnittsvariierenden Kanälen	76
5.2	Stoßaufteilung in verzweigten Kanälen	81
5.3	Stoßdämpfung in geraden, reibungsbehafteten Kanälen	87
5.4	Stoßausbreitung im gesamten Kanalsystem	89
<b>6.</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>91</b>
<b>7.</b>	<b>Anhang</b>	<b>93</b>
<b>8.</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>118</b>

# Formelzeichen

## Lateinische Buchstaben

$A_i$	Polynomkoeffizienten für Abzweigrohr
$A(x)$	Querschnittsfläche
$A_{24} = A_2/A_4$	Verhältnis der Querschnittsflächen $A_{24} > 1$ : Verengung und $A_{24} < 1$ : Erweiterung
B	Bestrahlungsstärke
c	Schallgeschwindigkeit
$c_{21}$	Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten
$c_p, c_v$	spezifische Wärmekapazität bei $p = \text{const}$ bzw. $V = \text{const}$
$\tilde{C}$	Kontaktfläche bzw. Mediengrenze
$C^+, C^-$	positive bzw. negative Charakteristik nach Whitham /14,15/
d, d/dt	totales Differential
D	lichter Rohrdurchmesser
$D_i$	Polynomkoeffizienten für Durchgangsrohr
e	innere Energie
$e_{\text{tot}}$	totale innere Energie: $e_{\text{tot}} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + e$
f	Funktion
G	Gladstone – Dale – Konstante
H	Householder – Matrix
i	Enthalpie
I	Intervall
J	Jacobi – Determinante
k	Flächenverhältnis am Ort des Sekundärstoßes
$k_s$	Sandkornrauigkeit
$K(M)$	siehe Gleichung 2.7
$L, \ell$	Rohrlänge
m	Masse
m	siehe Gleichung 2.43
$\dot{m}$	Massenstrom
M	Machzahl
$M_s = v/c_1$	Stoßmachzahl
$M_2, M_{\text{Ström}} = u_2/c_2$	Strömungsmachzahl
n	Brechungsindex
p	Druck



$p_{21} = p_2/p_1$	Stoßstärke
$p_{41} = p_4/p_1$	Vordruckverhältnis über die Membran im Stoßrohr
$q$	spezifische Wärme
$q$	Druckbeiwert
$\hat{R}$	Verdünnungs- bzw. Expansionswelle
$R$	molare Gaskonstante (Luft: 286.7 J/kg K)
$Re$	Reynolds – Zahl
$s$	natürliche Koordinate
$s$	Entropie
$\hat{S}$	einfallender bzw. durchgehender Stoß
$\hat{S}_R$	reflektierter Stoß
$\hat{S}_L$	lokaler Stoß
$\hat{S}_W$	konzentrische Verdichtungswellen um einen Wirbel
$\hat{S}_{II}$	Sekundärstoß
$t$	Zeit
$T$	Temperatur
$T_{21} = T_2/T_1$	Verhältnis der Temperaturen
$\vec{u} = (u, v, w)$	Geschwindigkeitsvektor
$U_{21} = u_2/c_1$	Nachströmgeschwindigkeit des Gases hinter dem Stoß
$v$	Stoßwellengeschwindigkeit
$v_R$	Geschwindigkeit des reflektierten Stoßes
$v_2, v_3$	Quergeschwindigkeiten
$x, y$	kartesische Koordinaten
$z = \hat{p}/p$	Stoßstärke

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Krummlinige Koordinaten nach Whitham ("Stoß")
$\beta$	Krummlinige Koordinaten nach Whitham ("Strahl")
$\gamma$	Kontraktionszahl
$\Delta$	Differenz
$\delta(x)$	Grenzschichtdicke
$\partial, \partial/\partial t$	Partielles Differential
$\epsilon$	Winkel der Lichtstrahlablenkung durch eine Dichteänderung
$\varepsilon$	Fehlergrenze
$\theta$	Ablenkungswinkel zwischen Stoß und Wand
$\kappa = c_p/c_v$	Isentropenexponenten

$\lambda$	Rohrreibungskoeffizient
$\mu$	siehe Gleichung 2.7
$\xi, \eta$	transformierte Koordinaten, Charakteristiken
$\rho$	Dichte des Strömungsmediums
$\rho_{21} = \rho_2/\rho_1$	Verhältnis der Dichten
$\Sigma$	Objektebene
$\Sigma'$	Abbildungsebene
$\tau$	Kanaltiefe
$\varphi$	Flankenwinkel für Diffusor

## Indizes

L	Laufrohr
naa	nach Abzweig, Abzweigrohr
nad	nach Abzweig, Durchgangrohr
ndi	nach Diffusor
ndu	nach Düse
r	reflektiert
t, x, y, z	Partielles Differential
u	Umgebung
va	vor Abzweig
vdi	vor Diffusor
vdu	vor Düse

## Sonderzeichen

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathfrak{R}$	allgemeine Gaskonstante (8.31433 J/mol K)
$\sim$	Zustände nach dem Stoß
$\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow$	reflektierte Stöße an Kanalwänden
$\rightarrow, \leftarrow$	Laufrichtung eines Stoßes

# 1. Einleitung und Problemstellung

In Lüftungssystemen großtechnischer Anlagen bilden Filter eine wirkungsvolle Barriere zum Einschluß gefährlicher Stoffe und dienen daher der Luftreinhaltung bzw. Abgasreinigung. Insbesondere im Bereich der Verfahrens- oder Kerntechnik halten Schwebstofffilter luftgetragene partikelförmige Toxine oder Radioaktivität mit extrem hoher Abscheideleistung zurück /1/. Als Beispiel sei hier eine Müllverbrennungsanlage genannt, bei der größere Mengen kondensierte und partikelgebundene Dioxine entstehen können /2/. Die Filterstrecken sind daher für den Umgebungsschutz von besonderer Bedeutung und ihrer Auslegung und ihrem Betrieb muß ein hohes Maß an Sorgfalt gewidmet werden. Das gilt speziell für Störfälle, bei denen nicht nur mit erhöhten Beanspruchungen zu rechnen ist, sondern auch erhöhte Mengen toxischer Stoffe zurückzuhalten sind. Um das Risiko des Versagens von Filterelementen und somit einer erhöhten Abgabe gefährlicher Stoffe in die Umgebung bei nicht bestimmungsgemäßem Betrieb der Anlage beurteilen zu können, müssen die möglichen strömungs- und thermodynamischen Belastungen innerhalb von Lüftungsanlagen bekannt sein. Daher wurden gerade in der Kerntechnik in den letzten Jahren verschiedene Rechencodes entwickelt /3/, mit deren Hilfe die Belastungen des Containments und der umliegenden Hilfsanlagegebäude modelliert werden können. Besonderes Augenmerk lag dabei auf der Bestimmung der Quellstärke für radioaktive Aerosole nach einem teilweisen oder vollständigen Kernschmelzen /4/. Die dabei auftretenden instationären Strömungsvorgänge liefern endliche Gradienten der Zustandsänderung, und die Ausbreitung von Störungen geschieht maximal mit Schallgeschwindigkeit.

Bei Untersuchungen verschiedener Störfallabläufe in DWR – Kernkraftwerken wurden jedoch Szenarien bekannt, die unter ungünstigen Umständen zu einem plötzlichen, stoßartigen Druckanstieg führen können, der sich mit Überschallgeschwindigkeit durch das Lüftungssystem ausbreitet /5/. Wenn das Ausbreitungsverhalten dieser Stoßwellen in den Kanälen bekannt ist, kann die maximal auftretende Druckstoßbelastung am Ende eines Lüftungssystems bestimmt werden. Damit besteht die Möglichkeit, durch experimentelle und theoretische Untersuchungen die Sicherheitsreserven von Filterelementen am Ende von Lüftungssystemen zu quantifizieren und durch geeignete Maßnahmen eine mögliche Gefährdung zu minimieren. Im weiteren sollen zwei Störfallabläufe, die zum Auftreten solcher Druckwellen führen können, kurz erläutert werden. Prinzipiell unterscheidet man dabei Störfallereignisse, die die Anlage von außen belasten (z.B. Flugzeugabsturz, Erdbeben, Gasexplosion etc.) und Störfälle in der Anlage selbst durch nicht bestimmungsgemäßen Betrieb (z.B. Kühlmittelverlust, Kernschmelzen, Bruch einer Leitung, interne Explosion, Brand etc.).

a.) Äußere Druckbelastung von Kernkraftwerken durch Gasexplosionen

Bei der Auslegung von Kernkraftwerken gegen äußere Einwirkungen wird in der BRD unter anderem die mögliche äußere Druckbelastung durch eine Gasexplosion in der Umgebung der Anlage berücksichtigt. Dieser Lastfall ist besonders im Zusammenhang mit möglichen Unglücksfällen beim Transport oder bei der Lagerung flüssiger Kohlenwasserstoffe in der Nähe des Kraftwerks zu sehen. Im Falle der Freisetzung großer Mengen eines solchen Stoffes könnte nach der Verdunstung und Durchmischung mit Luft eine zündfähige Gaswolke großer Explosionsenergie entstehen /6/.

Für den Fall der Druckwellen mit einer deutlich ausgeprägten Stoßfront wurden am Ernst – Mach – Institut in Freiburg Untersuchungen zur Druckverteilung um Kraftwerksgebäude durchgeführt /7/. Druckwellen dieser Art sind bei Detonationen oder detonationsähnlichen Explosionen (Ausbreitungsgeschwindigkeit der Reaktionsfront größer als Schallgeschwindigkeit) zu erwarten. Aus den Ergebnissen geht hervor, daß sich zwischen dem Reaktorgebäude und den Hilfsgebäuden aufgrund von Reflexions – und Beugungsvorgängen ein relativ komplexes Wellenfeld ausbildet. So kann sich zum Beispiel aufgrund einer Stoßfokussierung und –reflexion in einer Gasse zwischen zwei Gebäuden ein Spitzendruck ergeben, der um den Faktor zwei bis drei über dem Initialisierungsdruck liegt. Bei Stoßbelastungen sind deshalb gerade die scheinbar geschützten Stellen, häufig Zu – und Abgänge des Reaktorgebäudes, am stärksten gefährdet. Somit könnte eine Stoßwelle ins Gebäudeinnere eindringen und Filtereinrichtungen gefährden.

b.) Dampfexplosionen in einem Druckwasserreaktor

Unter einer Dampfexplosion versteht man das explosionsartige Verdampfen einer kalten, leichtflüchtigen Flüssigkeit (z.B. Wasser) durch Wärmezufuhr aus einem heißen, schwerflüchtigen Material (z.B. flüssiges Metall) /8/. Voraussetzung für eine solche Dampfexplosion in einem Druckwasserreaktor ist das vollständige Aufschmelzen des Kernes. In diesem Fall wird Lüftungsabschluß angenommen.

Bei schwachen oder mehreren kleinen Dampfexplosionen sind die Containmentdurchbrüche und insbesondere die Lüftungskanäle gefährdet. Hierbei können Verdichtungswellen in die Lüftungsanlage eindringen. Der Druck im Ventilationssystem steigt sehr steil an und es kann zu einem schwachen Verdichtungsstoß kommen. Je nach

Randbedingungen treten danach reflektierte Verdichtungswellen auf. Im Sog dieser Wellen fällt der Druck wieder stark ab (Expansionswellen), möglicherweise unter den Ausgangsdruck. Daher ist die Kenntnis des Ausbreitungsverhaltens der Kompressions- und Expansionswellen in den Lüftungskanälen von besonderer Bedeutung, um eine mögliche Gefährdung der Filter nach einer Dampfexplosion abzuschätzen.

Als weitere, nicht näher erläuterte Beispiele, seien hier mögliche Explosionen in der Wiederaufarbeitung genannt (WAA), die jedoch weniger im nationalen als im internationalen Zusammenhang zu sehen sind (WAA in Frankreich, Japan). Auch im Bereich der konventionellen Technik muß mit einer Gefährdung der Umgebung oder des internen Personals nach einem Störfallereignis gerechnet werden. In der Einleitung wurde bereits eine Explosion in der Müllverbrennungsanlage angesprochen. Ebenso können als mögliche Gefahrenquellen Reaktionen in der chemischen Industrie oder sogenannte "Staubexplosionen" in Bergwerken genannt werden /9/.

Allen Beispielen gemeinsam ist, daß neben stationären oder transienten Störfallereignissen, bei denen sich die Störgrößen maximal mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, auch stoßartige Belastungen auftreten können, bei denen sich die Störgrößen mit Überschallgeschwindigkeit fortbewegen und unter Umständen die Funktionstüchtigkeit der Lüftungssysteme gefährden können. Diese Stoßphänomene werden von Lüftungsodes üblicherweise nicht berücksichtigt, da aufgrund der Wellennatur dieser Belastungsgrößen die Zustände nach einem Verdichtungsstoß nur mit instationären, stark nichtlinearen Gleichungssystemen berechnet werden können. Bei Nichtberücksichtigung dieser Vorgänge können die zu erwartenden Sicherheitsreserven gegenüber einem Filterversagen nicht mit der notwendigen Genauigkeit bestimmt werden. Genaue und belastbare Daten sind aber sowohl für die Genehmigungsbehörde als auch für den staatlichen Gutachter in Hinsicht auf die Beurteilung des sicheren Umgebungsschutzes von großer Bedeutung.

Zur Berechnung komplexer Lüftungssysteme müssen daher die Druckänderungen an Kanalverzweigungen und Querschnittserweiterungen bzw. -verengungen beim Durchlaufen einer Stoßwelle bekannt sein. Die genaue Kenntnis des Weg-Zeit-Verhaltens eines Verdichtungsstoßes innerhalb der Lüftungsanlage, insbesondere einzelner Komponenten, bilden die Grundlage einer theoretischen Berechnung der Stoßausbreitung. Als geeignetes Verfahren zur Sichtbarmachung der Stoßfronten hat sich die Schlierenoptik erwiesen. Sie ermöglicht es, den Dichtesprung in genau definierten zeitlichen Abständen fotografisch zu erfassen und das Ausbreitungsverhalten des Stoßes zu bestimmen. Druckmessungen an querschnittsvariierenden Kanälen untermauern eine neu erstellte Theorie. Es wurde gerade für den Bereich

der konventionellen Technik auf die Ausarbeitung eines ingenieurmäßigen Rechenmodells besonderer Wert gelegt, um dem Konstrukteur der oben angesprochenen Zu – und Abluftanlagen ein einfaches, aber wirkungsvolles Instrumentarium an die Hand zu geben, mit dem sich schnell ändernde Zustandsgrößen in der Strömung berechnet werden können.

Mit Hilfe dieser Daten kann die Belastung der Kanal – und Filtersysteme mit ausreichender Genauigkeit erfaßt und die vorliegenden Sicherheitsreserven gegenüber einer möglichen Gefährdung dieser Rückhalteinrichtung abgeschätzt werden. Somit sind diese Arbeiten sowohl bezüglich der kerntechnischen Sicherheit als auch für Störfälle in konventionellen Anlagen von Interesse.

## 2. Modelltheoretische Beschreibung der Stoßausbreitung in Kanalsystemen

Modellrechnungen dienen der Beschreibung verschiedener physikalischer oder chemischer Phänomene in Natur und Technik. Ziel ist dabei meist eine Vorhersage der Abläufe dieser Vorgänge oder die Berechnung von Spitzenwerten diverser abhängiger und unabhängiger Einflußgrößen. Besondere Bedeutung kommt solchen Modellberechnungen immer dann zu, wenn die zur Bestimmung dieser Einflußgrößen notwendigen "large – scale" – Experimente entweder zu aufwendig oder gar unmöglich sind. Als Beispiel seien hier die Klimaforschung und die Raumfahrt genannt.

Daher müssen auf der Grundlage mehr oder weniger einfacher physikalischer Zusammenhänge, die alle einzeln experimentell bestätigt sind, Rechenmodelle erstellt werden, die die oben angeführten, komplexen Vorgänge beschreiben können. Dabei ist es nicht immer notwendig, alle Größen zu erfassen bzw. alle Vorgänge im Detail zu beschreiben. Oft genügt es, die größten oder kleinsten auftretenden Zustandsgrößen zu kennen, um, z.B. in der Sicherheitstechnik, eine verlässliche Aussage über möglicherweise auftretende Belastungen machen zu können. Bei solch integralen Beschreibungen kann meist auf aufwendige Computersimulationen verzichtet werden, wenn es gelingt, die physikalischen Zusammenhänge analytisch darzustellen und, wenn auch mit eingeschränkter Genauigkeit, zu lösen. Dabei kann zwar nicht immer ganz auf den Einsatz eines Rechners verzichtet werden, der numerische Aufwand muß sich jedoch in Grenzen halten und sich auf die Benutzung z.B. eines Personal – Computers beschränken. Damit kann dem Ingenieur ein Instrument an die Hand gegeben werden, mit ihm meist zur Verfügung stehenden Mitteln und auch Fachwissen die Belastungen seiner Konstruktionen abzuschätzen und so Zeit und Geld zu sparen, die er für eine Simulation z.B. nach der "Finite Elemente" – Methode bereitstellen müßte. Bei sehr komplexen Vorgängen, insbesondere z.B. in der Gasdynamik, ist es aber oft notwendig, neben den theoretischen Überlegungen auch noch umfangreiche Experimente im Labormaßstab durchzuführen, um ein Verständnis für die auftretende Phänomene zu bekommen. Erst mit Hilfe der empirisch ermittelten Daten und Zusammenhänge ist eine theoretische Beschreibung der Zustandsänderung möglich.

Nachfolgend werden aufbauend auf den gasdynamischen Grundgleichungen einige aus der Literatur entnommene und selbsterstellte Theorien zur Beschreibung der Stoßausbreitung in einzelnen Anlagenkomponenten dargestellt (Abzweige, konvergierende und divergierende Kanalstücke und reibungsbehaftete Rohre) und damit ein Modell zur Berechnung der Druckbelastungen des gesamten Kanalsystems entwickelt.

## 2.1 Berechnung der Stoßausbreitung in konvergenten und divergenten Kanälen

Wichtige Bestandteile eines Lüftungssystems sind sich erweiternde und verengende Übergangsstücke, die Kanäle mit verschiedenen Querschnitten miteinander verbinden. Solche Übergangsstücke stellen für eine durchlaufende Welle immer eine starke Störquelle dar und beeinflussen daher abhängig von der Art des Übergangs die Form und die Stärke der Stoßfront. Aus der Literatur /10,11,12/ ist bekannt, daß ein konvergentes Kanalstück eine Druckwelle verstärkt, eine Kanalerweiterung jedoch eine Dämpfung bewirkt.

Beim Auftreffen einer Stoßwelle auf eine Querschnittsänderung können abhängig von dem Flächenverhältnis und der Strömungsmachzahl  $M_{\text{Ström}}$  reflektierte Wellen an der Knickstelle des Kanals entstehen. Bei einer Flächenerweiterung führen diese Wellen zu einer Expansion, die den Druck vor der Querschnittsänderung absenkt und das Gas beschleunigt. Diese Expansionswelle läuft stromauf (solange  $M_{\text{Ström}} < 1$ ), der durchgehende Stoß bewegt sich dagegen stromab. Die Geschwindigkeit der stationären Nachlaufströmung verringert sich und der Druck im Diffusor nimmt wieder zu. Diese Zunahme kann jedoch die Abnahme des Drucks aufgrund der Expansion nicht ausgleichen, der Stoß verliert daher im divergenten Kanalteil an Intensität.

Bei einer Flächenverengung wird ein Teil des Stoßes reflektiert und läuft stromauf, der Druck vor der Querschnittsänderung steigt stark an und die Eintrittsgeschwindigkeit in die Düse erniedrigt sich. Die stationäre Nachlaufströmung wird nun wieder beschleunigt und der Druck fällt ab, jedoch nicht unter den Wert des einfallenden Stoßes, so daß in der Düse insgesamt eine Zunahme der Stoßintensität zu verzeichnen ist.

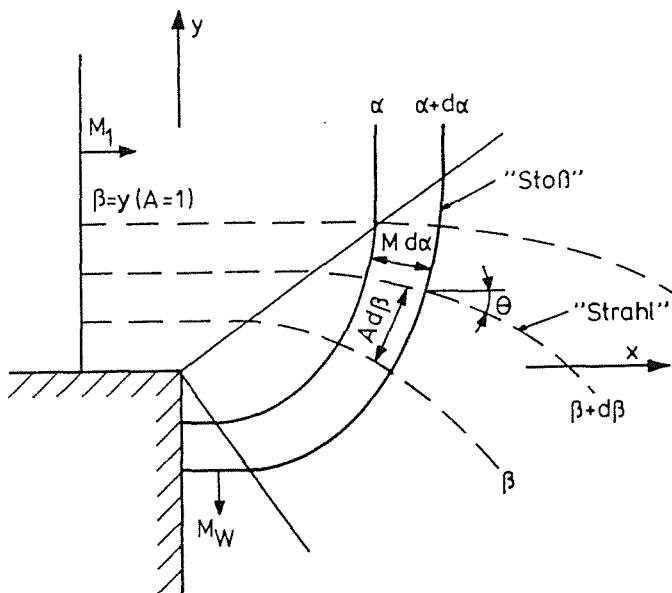
Je nach Ausführung der Querschnittsänderung wird aufgrund der Reibungs- und Umlenkverluste im Übergangsstück der Druck im Diffusor weniger stark ansteigen bzw. in der Düse stärker abfallen. Entsprechend können sich auch die reflektierte Stoß- bzw. Expansionswelle ändern /13/.

Im weiteren sollen zwei Theorien vorgestellt werden, die es ermöglichen, die Druckänderungen in querschnittsvariierenden Kanälen zu berechnen. Das zuerst beschriebene Modell ist der Literatur entnommen und stützt sich auf Überlegungen von Whitham /14,15/, Chester /16/ und Chisnell /17/. Das zweite Modell basiert auf einer Idee von Dadone et al. /18/ zur Berechnung der Stoßaufteilung in verzweigten Kanälen, die entsprechend modifiziert wurde und im weiteren die Beschreibung der Stoßausbreitung mit Hilfe der Charakteristiken-gleichungen ermöglicht und kurz modifizierte Charakteristikenmethode genannt wurde.

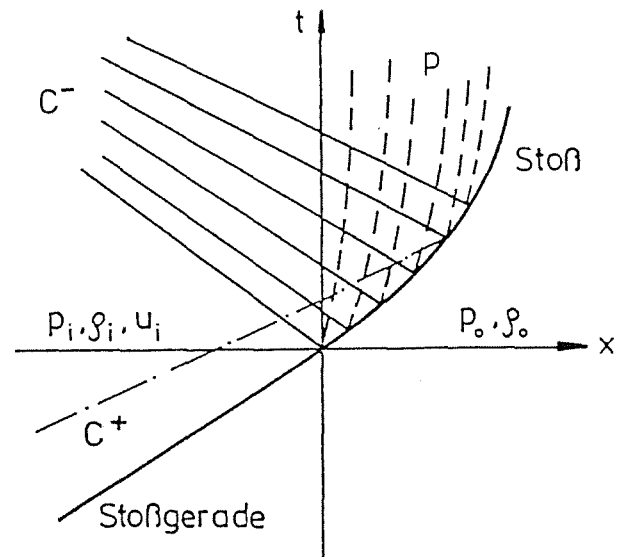


### 2.1.1 Theorie nach Whitham

Die Beugung um eine Ecke oder Kante stellt für eine Stoßwelle immer eine Erweiterung des zu durchlaufenden Querschnitts dar. Es kommt dabei zu einer Stoßabschwächung und Drehung der Laufrichtung, da die Stoßfront bestrebt ist, parallel zur Wandkontur zu laufen (Bild 2.1).



**Bild 2.1:** Beugung eines Stoßes um eine  $90^\circ$ -Ecke nach Whitham /14/, Stöße und Strahlen bilden ein orthogonales  $\alpha, \beta$ -Koordinatensystem



**Bild 2.2:** Die  $(x, t)$ -Ebene zur Darstellung der Wechselwirkung zwischen einer Stoßwelle und einem Kanal veränderlichen Querschnitts

Whitham /14/ führt eine Schar von Kurven in der  $x-y$ -Ebene ein (Bild 2.1), die die nacheinander folgenden Lagen des nun gekrümmten Stoßes darstellen. Diese Kurven nennt er "Stöße" und sie werden durch  $\alpha = \text{const}$  gekennzeichnet. Orthogonal zu den "Stößen" führt er Kurven, die sogenannten "Strahlen" ein, auf denen  $\beta = \text{const}$  gilt. In Bild 2.1 sind die "Stöße" als durchgezogene Linien und die "Strahlen" als gestrichelte Linien gekennzeichnet. Außerdem sind die  $90^\circ$ -Ecke und ein kartesisches  $x-y$ -Koordinatensystem dargestellt. Durch  $\alpha = \text{const}$  und  $\beta = \text{const}$  wird ein  $\alpha-\beta$ -Koordinatensystem aufgespannt.  $\alpha$  kann als  $\alpha = c_1 t$  dargestellt werden, mit  $c_1$  als der Schallgeschwindigkeit vor dem Stoß und  $t$  der Zeit, die der ungestörte Teil der Stoßwelle benötigt, um von  $x = 0$  bis  $x = \alpha$  zu gelangen. Damit

wird der räumliche Abstand längs eines Strahls zwischen zwei Stößen von  $\alpha$  nach  $\alpha + d\alpha$  gleich  $M d\alpha$  ( $ds = v dt = v/c c dt = M d\alpha$ ), mit  $M$  als Stoßmachzahl in einem beliebigen Punkt  $P(\alpha, \beta)$ . Wird der entsprechende Abstand zwischen zwei Strahlen  $\beta$  und  $\beta + d\beta$  als  $A d\beta$  angenommen, folgt aus rein geometrischen Gründen nach Whitham /14/:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{M} \frac{\partial A}{\partial \alpha} ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = - \frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial \beta} \quad (2.1), (2.2)$$

$\theta$  ist dabei der momentane Ablenkwinkel zwischen der ursprünglichen Stoßrichtung und dem Strahl. Die Gleichungen (2.1) und (2.2) stellen ein System von homogenen quasilinearen partiellen Differentialgleichungen mit den beiden abhängigen Variablen  $\theta$  und  $A(M)$  und den beiden unabhängigen Variablen  $\alpha$  und  $\beta$  dar. Unter der Annahme, daß  $M$  nur von  $A$  abhängt bzw. umgekehrt und sich eine explizite Relation zwischen beiden finden läßt, können die beiden Gleichungen gelöst und die Stoßlagen bestimmt werden (siehe auch Kap. 2.2.1).

Whitham betrachtet dazu die Ausbreitung einer Stoßwelle durch ein Rohr konstanten Querschnitts, bei dem ab einer bestimmten Stelle  $x = 0$  ein variabler Querschnitt  $A(x)$  vorliegt. Das Gas vor der Stoßfront ist in Ruhe und hat die konstante Dichte  $\rho_0$  und den konstanten Druck  $p_0$ . Der Stoß läuft vor der Flächenänderung mit der Geschwindigkeit  $v_1$  und die Größen nach dem Stoß  $p_1, \rho_1, c_1$  und  $u_1$  sind durch die Stoßgleichungen (siehe Anhang A2) in Abhängigkeit von  $v_1$  bestimmbar. Wenn die Stoßfront die Stelle  $x = 0$  am Anfang der Querschnittsänderung erreicht, breiten sich die Störungen wie in Bild 2.2 gezeigt stromauf aus und das Ausbreitungsverhalten des Stoßes ändert sich. Diese Störungen bewegen sich entlang der negativen Charakteristiken in der  $x-t$ -Ebene, die in Bild 2.2 nach Whitham mit  $C^-$  bezeichnet werden. Eingang in die Literatur hat auch die Bezeichnung  $\xi$  für  $C^-$  bzw.  $\eta$  für  $C^+$  gefunden (siehe auch Kap. 2.1.2).

Eine Änderung der Entropie findet entlang der Partikelbahnen statt, die mit  $P$  bezeichnet sind. Die positiven Charakteristiken  $C^+$  spielen physikalisch eine untergeordnete Rolle, werden aber zur Ableitung der beschreibenden Gleichungen benötigt. Für  $x < 0$  kann die  $C^-$ -Charakteristik als einfache, gerade Welle betrachtet werden, die der formalen Charakteristikenbedingung gehorcht (siehe Anhang A4).

$$\frac{2c}{\kappa - 1} + u = \frac{2c_1}{\kappa - 1} + u_1 \quad (2.3)$$

Zur Aufstellung der notwendigen Gleichungen geht Whitham von den eindimensionalen Erhaltungssätzen der Masse, des Impulses und der Energie aus /14,19/. Eine ausführliche Ableitung der Gleichungen wurde in /19/ gegeben.

Massenerhaltung:  $A \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial}{\partial x} (uA) = 0$

$$\rightarrow \rho_t + u\rho_x + \rho \left[ u_x + u \frac{A'}{A} \right], \text{ mit } A' = \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.4a)$$

Impulserhaltung:  $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

$$\rightarrow u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0 \quad (2.4b)$$

Energieerhaltung:  $\frac{dp}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} = 0 \left[ \text{isentrop } c^2 = \frac{dp}{d\rho} \right]$

$$\rightarrow p_t + up_x - c^2 (\rho_t + u\rho_x) = 0 \quad (2.4c)$$

Durch Kombination der Massenerhaltung, des Impulssatzes und des Energiesatzes erhält man schließlich /14,19/:

$$\left[ \frac{p_t}{u \pm c} + p_x \right] \pm \rho c \left[ \frac{u_t}{u \pm c} + u_x \right] + \frac{\rho c^2 u}{(u \pm c)} \frac{A'}{A} = 0 \quad (2.5a,b)$$

$$\left[ \frac{p_t}{u} + p_x \right] - c^2 \left[ \frac{\rho_t}{u} + \rho_x \right] = 0 \quad (2.5c)$$

Mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens (siehe Anhang A4) können die Bilanzgleichungen in der  $x-t$ -Ebene transformiert werden /14,19/.

$$dp + \rho c du + \frac{\rho u c^2}{u+c} \frac{dA}{A} = 0 \text{ auf } C^+ : \frac{dx}{dt} = u+c \quad (2.6a)$$

$$dp - \rho c du + \frac{\rho u c^2}{u-c} \frac{dA}{A} = 0 \text{ auf } C^- : \frac{dx}{dt} = u-c \quad (2.6b)$$

$$dp - c^2 d\rho = 0 \text{ auf } P : \frac{dx}{dt} = u \quad (2.6c)$$

Die Zusammenhänge zwischen Druck  $p$ , Dichte  $\rho$ , Strömungsgeschwindigkeit  $u$  und der Stoßmachzahl  $M = v/c$  (siehe Anhang A2) liefern:

$$\text{Stoßstärke } z = \frac{p}{p_0} = 1 + \frac{2}{\kappa+1} (M^2 - 1)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{(\kappa+1)M^2}{(\kappa-1)M^2+2}$$

$$\frac{u}{c_0} = \frac{2}{\kappa+1} \left[ M - \frac{1}{M} \right]$$

Zur Substitution in Gleichung (2.6a) werden die Zusammenhänge für den Druck und die Geschwindigkeit in differentieller Form benötigt:

$$dp = \rho_0 c_0^2 \frac{4M}{\kappa+1} dM$$

$$du = \frac{2c_0}{\kappa+1} dM \left[ 1 + \frac{1}{M^2} \right]$$

Daraus ergibt sich ein Zusammenhang<sup>1</sup> zwischen der Flächenänderung  $dA$  und der Änderung der Stoßmachzahl  $dM$  und damit der Stoßstärke  $dz$ :

$$\frac{2M}{(M^2-1)} \frac{dM}{K(M)} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{mit } K(M) = 2 \left[ \left[ 1 + \frac{2}{\kappa+1} \frac{1-\mu^2}{\mu} \right] (2\mu + 1 + 1/M^2) \right]^{-1}$$

$$\text{und } \mu = \left[ \frac{v-u}{c} \right]^2 = \frac{(\kappa-1)M^2+2}{2\kappa M^2 - (\kappa-1)}$$

Mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen der Stoßstärke  $z$  und der Stoßmachzahl  $M$  und dessen Differenzenform

$$\frac{dz}{dM} = \frac{4\kappa}{\kappa+1} M$$

kann obige Bestimmungsgleichung umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A} \frac{\delta A}{\delta z} &= \frac{1}{\kappa z} + \frac{1}{(z-1)} - \frac{(\kappa+1)}{2((\kappa+1)z + (\kappa-1))} + \left[ \frac{2}{\kappa z((\kappa-1)z + (\kappa+1))} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \left[ 1 - \frac{(\kappa+1)(z-1)}{2((\kappa+1)z + (\kappa-1))} + \frac{(\kappa-1)z + (\kappa+1)}{2(z-1)} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

<sup>1</sup> Der angesprochene Zusammenhang wurde noch von Chisnell /17/ und Chester /16/ angegeben. Doch beiden konnte in ihren Ableitungen der entsprechenden Gleichungen ein Fehler nachgewiesen werden /19/. Warum sie dennoch auf das von Whitham richtig abgeleitete Ergebnis kamen, ist nicht nachvollziehbar.

Dieser Zusammenhang wurde unter der Annahme kleiner Flächengradienten, aber ohne Einschränkung der Stoßstärke von Chisnell /17/ analytisch integriert. Daraus ergibt sich eine Beziehung zwischen der Änderung der Intensität der Stoßwelle und der Querschnittsvariation:

$$A \cdot f(z) = \text{const.}$$

mit  $f(z) = z^{\frac{1}{\kappa}} (z-1) \left[ z + \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)} \right]^{-\frac{1}{2}}$ .

$$\begin{aligned} & \cdot \left[ \frac{1 + \left[ 1 + \frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)z} \right]^{-\frac{1}{2}}}{1 - \left[ 1 + \frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)z} \right]^{-\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}} \cdot \left[ \frac{\left\{ 1 + \frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)z} \right\}^{-\frac{1}{2}} - \left[ \frac{\kappa-1}{2\kappa} \right]^{\frac{1}{2}}}{\left\{ 1 + \frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)z} \right\}^{-\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\kappa-1}{2\kappa} \right]^{\frac{1}{2}}} \right] \\ & \cdot \exp \left[ \left[ \frac{2}{\kappa-1} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \arctan \left\{ \left[ \frac{2}{\kappa-1} \right] \cdot \left[ \frac{\kappa z}{z + \frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

In Gleichung 2.9 ist die Stoßstärke nur implizit enthalten, so daß eine Berechnung der Stoßwellenintensität nur numerisch geschehen kann. Weil die Funktion  $K(M)$  nur in den Grenzen  $K = 0.5$  für schwache Stöße und  $K = 0.3941$  ( $\kappa = 1.4$ , Luft) für starke Stöße variiert, kann Gleichung 2.7 für konstantes  $M = M_1$  und damit  $K(M) = K(M_1)$  integriert werden.

$$A^K (M^2 - 1) = \text{const.} \quad (2.10)$$

Damit ist eine explizite Darstellung der Stoßmachzahl möglich. Diese Vereinfachung erlaubt eine geschlossene Integration der Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.10) nach dem Charakteristikenverfahren. Führt man diese Rechnung durch, so erhält man die Koordinaten der Stoßfront ( für  $\alpha = \text{const}$ ) in der  $x-y$ -Ebene /20/:

$$\begin{aligned} \frac{x}{M_1 \alpha} &= \cos \theta \cosh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] - \sqrt{\frac{K}{2}} \sin \theta \sinh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] + \\ &+ \sqrt{1 - \frac{1}{M_1^2}} \left\{ \cos \theta \sinh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] - \sqrt{\frac{K}{2}} \sin \theta \cosh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{M_1 \alpha} &= \sin \theta \cosh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] + \sqrt{\frac{K}{2}} \cos \theta \sinh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] + \\ &+ \sqrt{1 - \frac{1}{M_1^2}} \left\{ \sin \theta \sinh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] + \sqrt{\frac{K}{2}} \cos \theta \cosh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Stoßmachzahl  $M$  längs des Stoßes kann durch die Beziehung

$$\frac{M}{M_1} = \cosh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] + \sqrt{1 - \frac{1}{M_1^2}} \sinh \left[ \sqrt{\frac{K}{2}} \theta \right] \quad (2.13)$$

bestimmt werden. Nach /20/ gilt außerdem:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{K}{2}} \frac{(M^2 - 1)^{\frac{1}{K} + \frac{1}{2}}}{(M_1^2 - 1)^{\frac{1}{K}}} . \quad (2.14)$$

In den Gleichungen (2.11) bis (2.14) kann man erkennen, daß  $\frac{x}{M_1 \alpha}$  und  $\frac{y}{M_1 \alpha}$  nur von  $\frac{\beta}{\alpha}$  allein abhängen, so daß die Stoßausbildung mit der Zeit ähnlich verläuft.

In den Grenzfällen schwacher ( $M \approx 1$ ) und starker Stöße ( $M \gg 1$ ) reduziert sich Gleichung (2.9) auf die Darstellung in Gleichung (2.10), mit konstantem  $K(M_1)$ .

Für  $M \approx 1$  wird  $K(M) = 0.5$  und man erhält die Lösung für eine akustische Welle:

$$(M - 1) \approx A^{-\frac{1}{2}},$$

d.h. die Intensität der Störung nimmt mit dem Quadrat der Entfernung von der Störquelle ab.

Beim Übergang von Gleichung (2.8) zu Gleichung (2.9) macht Chisnell /17/ zwei Annahmen, die hier näher beschrieben werden sollen:

Die Änderung der Intensität des Stoßes über seine Wellenfront kann vernachlässigt werden, so daß der Stoß über seine mittlere Stärke beschrieben werden kann. Für das vorliegende linearisierte Problem ist Gleichung (2.5) während des gesamten Ausbreitungsvorgangs gültig und nicht nur, wenn der Stoß nach einer gewissen Laufzeit wieder gleichförmig ist. Voraussetzung dafür ist jedoch, daß die Machzahl aus dem Durchschnittsdruck direkt hinter der Stoßfront berechnet wurde. Daher dürfte diese Einschränkung nur geringe Bedeutung haben, wenn die Änderung der Querschnittsfläche nur klein ist. Diese Methode kann nur dann benutzt werden, wenn die tatsächliche Stoßfront durch eine äquivalente, mittlere Stoßstärke beschrieben werden kann.

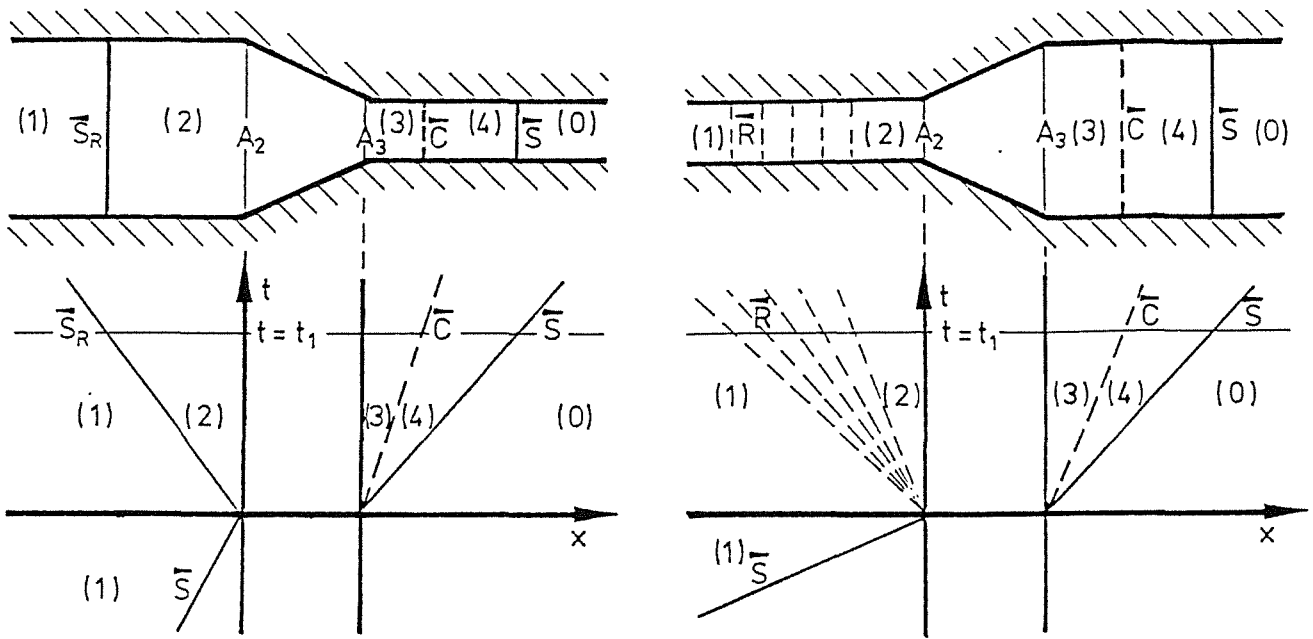
Weiter nimmt Chisnell an, daß die Störungen, die hinter der Stoßwelle entstehen, die Stoßfront selbst nicht beeinflussen. Als Störungen werden dabei die reflektierte Welle (Expansionswelle oder reflektierter Stoß) und die Kontaktfläche an der Eintrittskante in die Flächenänderung angesehen. Diese Voraussetzung ist umso besser erfüllt, je geringer der Gradient der Flächenänderung ist. Damit wird auch der Gültigkeitsbereich der Theorie für kleine Flächenänderungen abgesteckt.

### 2.1.2 Theorie nach der modifizierten Charakteristikenmethode

Alternativ zur Theorie von Whitham /14,15/ soll hier ein Verfahren beschrieben werden, das es ermöglicht, bei der Berechnung der Stoßstärkenänderung in konvergierenden und divergierenden Kanälen teilweise auch dissipative Effekte zu berücksichtigen. Damit kann die Stoßdämpfung aufgrund Wandreibung und Strömungsablösung bei der Wellenausbreitung bestimmt werden. Eine Berechnung von reflektierten Wellen und Beschleunigungseffekten kann ebenfalls durchgeführt werden.

Zur Vereinfachung wird angenommen, daß der Durchmesser des Kontrollvolumens klein ist gegenüber seiner Länge und die auftretenden Stoßwellen in einiger Entfernung von der Flächenänderung eben sind. Somit gelten die Gleichungen der Stromfadentheorie bei instationärer Strömung. Es wird vorausgesetzt, daß an jeder Stelle im Rohr Unterschallströmung herrscht (gilt bis  $z \leq 4.8$  bzw.  $M_s < 2.07$ ). Die Bilder 2.3 a und b zeigen ein vereinfachtes Strömungsschema für den Übergang einer Stoßwelle in eine Düse bzw. einen Diffusor. Der einfallende Stoß  $\tilde{S}$  wird über die *Düse* beschleunigt bzw. über den Diffusor verzögert, wobei gleichzeitig eine Kontaktfläche  $\tilde{C}$  entsteht. Sie trennt das Gas, welches sich zu der Zeit des

Auftreffens der Stoßwelle auf die Querschnittsänderung im Kanal mit der Fläche  $A_2$  befand, von dem Gas, das den Kanal mit der Fläche  $A_3$  ausfüllt. Ein Teil des einfallenden Stoßes wird an der Verengung reflektiert ( $\bar{S}_R$ ) und läuft stromauf. Das Gas wird stromab beschleunigt, bzw. die Nachlaufströmung der einfallenden Stoßwelle verzögert. Beim Eintritt in den *Diffusor* entsteht eine Expansionswelle  $\bar{R}$ , die ebenfalls stromauf läuft und das Gas stromab beschleunigt. Für schwache Stöße kann näherungsweise isentrop gerechnet werden (siehe Anhang A3). Über einen Stoß oder eine Welle hinweg gelten die nichtlinearen Erhaltungssätze der Masse, des Impulses und der Energie. Das sich aus der Massen- und Impulserhaltung ergebende nichtlineare, gekoppelte Differentialgleichungssystem kann mit Hilfe eines Charakteristikenverfahrens für die  $x-t$ -Ebene nach Transformation in eine  $\xi-\eta$ -Ebene streng formal gelöst werden. Störungen können sich nur längs Linien  $\xi, \eta = \text{const.}$  ausbreiten, ähnlich wie Druckstörungen innerhalb eines Mach'schen Kegels bei einem Überschallflugzeug. Eine ausführliche Ableitung ist in Anhang A4 gegeben.



**Bild 2.3 a,b:** Vereinfachtes Strömungsschema für den Übergang einer Stoßwelle in eine Düse (a) bzw. einen Diffusor (b)

Die Bestimmungsgleichungen der modifizierten Charakteristikenmethode über Stoß und Welle lauten dann:

$$u + \frac{2c}{\kappa-1} = \text{const längs Kurven } \eta = \text{const,}$$

$$u - \frac{2c}{\kappa-1} = \text{const längs Kurven } \xi = \text{const.}$$



Die Energieerhaltung über die Kompressions – und Expansionswellen wird in Form der isentropen Zustandsänderung benutzt

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const.}$$

Mit der Definition der Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \kappa \frac{p}{\rho}$$

geht die isentrope Zustandsänderung über in

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[ \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]^\kappa = \left[ \frac{p_2}{p_1} \right]^\kappa \left[ \frac{c_1}{c_2} \right]^{2\kappa}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[ \frac{c_1}{c_2} \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}.$$

Über den durchgehenden Stoß  $\vec{S}$  vom Zustand 0 nach 4 gilt die Charakteristikenbeziehung längs einer Linie  $\xi = \text{const.}$  Das Gas im Zustand 0 befindet sich in Ruhe, d.h.  $u_0 = M_0 = 0$ .

$$u_4 - \frac{2}{\kappa-1} c_4 = \frac{2}{\kappa-1} c_0.$$

Normiert man diese Gleichung auf  $c_0$  und definiert  $M_i = u_i/c_i$  ( $i = 0$  bis 4), ergibt sich eine dimensionslose Charakteristikenbeziehung, Gleichung (2.15). Aus der isentropen Zustandsänderung über den Stoß  $\vec{S}$  folgt Gleichung (2.16).

$$0 \xrightarrow{\vec{S}} 4: \quad \frac{c_4}{c_0} \left[ \frac{2}{\kappa-1} - M_4 \right] = \frac{2}{\kappa-1} \quad (2.15)$$

$$\frac{p_4}{p_0} = \left[ \frac{c_4}{c_0} \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}. \quad (2.16)$$

Über die Kontaktfläche  $\vec{C}$  vom Zustand 3 nach 4 gilt die Invarianz von Geschwindigkeit und Druck. Normiert mit  $c_0$  und  $p_0$  ergeben sich somit:

$$3 \xrightarrow{\check{C}} 4: \quad M_3 \frac{c_3}{c_0} = M_4 \frac{c_4}{c_0} \quad (2.17)$$

$$\frac{p_3}{p_0} = \frac{p_4}{p_0} \quad (2.18)$$

Für den reflektierten Stoß  $\check{S}_R$  (Düse) bzw. die Expansionswelle  $\check{R}$  (Diffusor) vom Zustand 1 nach 2 gilt längs einer Linie  $\eta = \text{const}$

$$1 \xrightarrow{\check{S}_R, \check{R}} 2: \quad \frac{c_2}{c_0} \left[ \frac{2}{\kappa-1} + M_2 \right] = \frac{c_1}{c_0} \left[ \frac{2}{\kappa-1} + M_1 \right] \quad (2.19)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[ \frac{c_2}{c_1} \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}. \quad (2.20)$$

Stellt man das Strömungsproblem in dieser Weise dimensionslos dar, ergeben sich neun Unbekannte  $p_i/p_0$ ,  $c_i/c_0$  und  $M_i/M_0$  mit  $i = 2, 3, 4$ , wobei die Anfangszustände  $i = 0, 1$  und das Flächenverhältnis  $A_{23} = A_2/A_3 \gtrsim 1$  bekannt sind. Um das Problem vollständig zu beschreiben, müssen neben den Gleichungen 2.15 – 2.20 noch 3 weitere Beziehungen gefunden werden, die die Zustände 2 und 3 über die Flächenänderung bei stationärer Strömung miteinander verbinden.

Normiert man die Kontinuitätsgleichung auf  $p_0$ ,  $c_0$  und benützt die Definition der Schallgeschwindigkeit und der Machzahl  $M_i = u_i/c_i$ , erhält man über die Flächenänderung  $A_{23}$

$$2 \xrightarrow{A_{23} \gtrsim 1} 3: \quad \frac{p_2}{p_0} \frac{M_2}{\frac{c_2}{c_0}} \frac{A_2}{A_3} = \frac{p_4}{p_0} \frac{M_3}{\frac{c_3}{c_0}} \quad (2.21)$$

Aus der Energieerhaltung folgt mit der Definition der Schallgeschwindigkeit und der Machzahl durch Normierung mit  $c_0$ :

$$2 \xrightarrow{A_{23} \gtrsim 1} 3: \quad \left[ \frac{c_2}{c_0} \right]^2 \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2 \right] = \left[ \frac{c_3}{c_0} \right]^2 \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2 \right]. \quad (2.22)$$

Wird auch für die stationär angenommene Nachlaufströmung durch die Querschnittsänderung Isentropie vorausgesetzt, kann die Änderung des statischen Druckes durch die Geschwindigkeitsänderung bestimmt werden (siehe Tabelle im Anhang A1).

Aus Gleichung (2.22) ergibt sich dann mit der Isentropiebedingung

$$2 \xrightarrow{A_{23} \geq 1} 3: \quad \frac{p_3}{p_2} = \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (2.23)$$

Die Gleichung (2.23) verknüpft die Druckänderung mit der Änderung der Machzahl bei isentroper Strömung über eine Flächenverengung oder –erweiterung  $A_{23}$ . Rohrreibung und Wirbelablösung an Kanten werden nicht berücksichtigt.

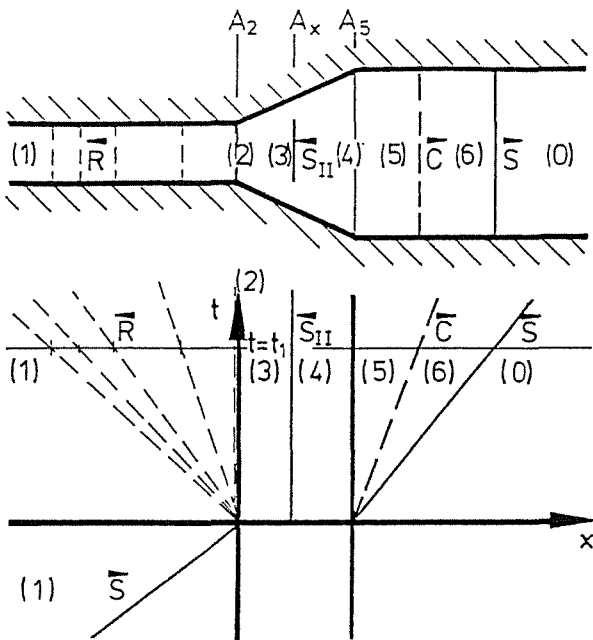
Dieses nichtlineare Gleichungssystem ermöglicht somit eine Berechnung der durchgehenden Stoßwelle, solange keine Sekundärstöße aus der Strömung heraus entstehen. Abhängig von der Flächenänderung und der Eintrittsstoßstärke kann die Strömung nach der Expansionswelle am Eintritt in den Diffusor Schallgeschwindigkeit erreichen. Sie wird dann im divergenten Teil weiter beschleunigt und der Druck sinkt ab, ähnlich wie nach dem Schalldurchgang in der engsten Stelle einer Lavaldüse. Diese Beschleunigung auf Überschallgeschwindigkeit wird nach einer gewissen Laufstrecke durch einen aus der Strömung heraus entstehenden zweiten Verdichtungsstoß abgeschlossen /24,36/. Es herrscht nun wieder Unterschallströmung und der Druck steigt sprunghaft an. Die Lage dieses Sekundärstoßes ist unbekannt. Nach dem Stoß wird die Strömung weiter abgebremst und der Druck steigt im restlichen Teil des Diffusors wieder an (siehe Bilder 2.4 und 2.5).

Analog kann dieser Vorgang in der Düse beobachtet werden. Am Austritt des konvergenten Kanals kann wieder abhängig von der Eingangsstoßstärke und dem Flächenverhältnis Schallgeschwindigkeit herrschen. Am Übergang zum geraden Kanalstück wird dann die Strömung aufgrund der lokalen Expansion weiter beschleunigt. Aus dieser Strömung heraus entsteht ein Sekundärstoß, der diese wieder auf Unterschall abbremst. Der reflektierte Stoß bewirkt eine Verzögerung der Strömung vor dem konvergenten Kanal. Vor dem divergenten Kanal wird die Strömung durch die Expansionswelle beschleunigt. Dadurch wird die Bedingung für einen Sekundärstoß ( $M = 1$ ) beim Diffusor bei niedrigeren Eingangsstoßstärken erreicht als bei der Düse. Bei konvergenten Flächenänderungen liegen diese Phänomene weit außerhalb des hier betrachteten Bereichs, so daß im weiteren nur der Sekundärstoß im Diffusor erläutert werden soll.

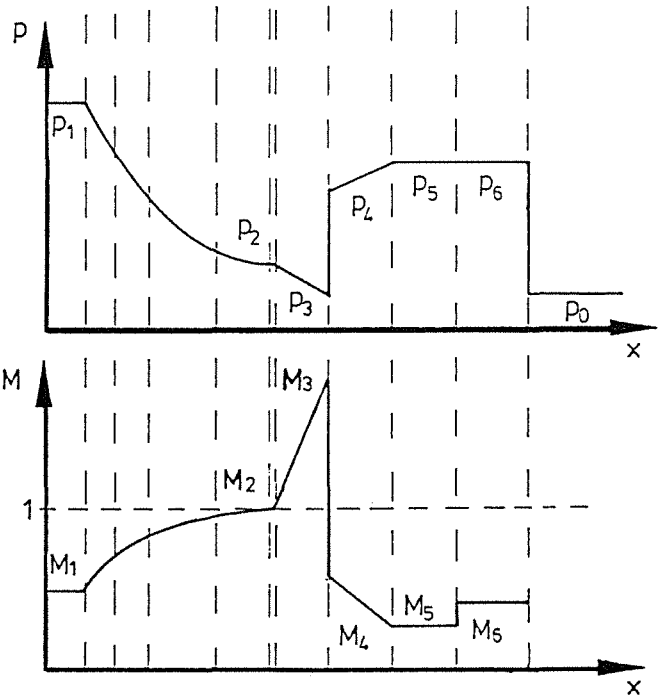
Zur Berechnung gelten folgende Voraussetzungen:

1. Durchgehende Stoßwelle  $\hat{S}$ , Expansionswelle  $\hat{R}$  und Kontaktfläche  $\hat{C}$  sind nach kurzer Zeit ebene Wellen.

2. Der Sekundärstoß  $\bar{S}_{II}$  an der Stelle k sei eben und nehme eine unbekannte Fläche  $A_x$  ein.
3. In den Zustandsgebieten (1) – (6) sei stationäre Strömung gegeben.



**Bild 2.4:** Vereinfachtes Strömungs –  
schema für den Übergang einer Stoß –  
welle in einem Diffusor nach Auf –  
treten eines Sekundärstoßes



**Bild 2.5:** Änderung von Druck und  
Machzahl längs eines Diffusors nach  
Auftreten eines Sekundärstoßes

Formal gelten dieselben Gleichungen wie ohne Sekundärstoß für die Expansionswelle  $\bar{R}$ , die durchgehende Welle  $\bar{S}$  und die Kontaktfläche  $\bar{C}$ . Die Beziehungen für die stationäre Nachlaufströmung müssen jedoch für die Gebiete vor und nach der zweiten Stoßwelle aufgestellt werden. Für den Sekundärstoß werden die anisentropen Stoßgleichungen benutzt.

– Charakteristengleichungen

Von Zustand 0 nach Zustand 6 über Stoßfront

$$\frac{c_6}{c_0} \cdot \left[ \frac{2}{\kappa - 1} - M_6 \right] = \frac{2}{\kappa - 1} \tag{2.24}$$

Von Zustand 1 nach Zustand 2 über Expansionswelle

$$\frac{c_2}{c_0} \left[ \frac{2}{\kappa-1} + M_2 \right] = \frac{c_1}{c_0} \left[ \frac{2}{\kappa-1} + M_1 \right] \quad (2.25)$$

– Isentropiebedingung

Von Zustand 0 nach Zustand 6 über Stoßfront

$$\frac{p_6}{p_0} = \left( \frac{c_6}{c_0} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \quad (2.26)$$

Von Zustand 1 nach Zustand 2 über Expansionswelle

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \quad (2.27)$$

– Invarianz von Druck und Geschwindigkeit von Zustand 5 nach Zustand 6 über Kontaktfläche

$$M_5 \frac{c_5}{c_0} = M_6 \frac{c_6}{c_0} \quad (2.28)$$

$$\frac{p_5}{p_0} = \frac{p_6}{p_0} \quad (2.29)$$

– Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung)

Von Zustand 2 nach Zustand 3 mit  $A_{32} = k \cdot A_{52}$

$$\frac{p_2}{p_0} \frac{M_2}{\frac{c_2}{c_0}} = \frac{p_3}{p_0} \frac{M_3}{\frac{c_3}{c_0}} k \cdot A_{52} \quad (2.30)$$

Von Zustand 4 nach Zustand 5 mit  $A_{45} = k$

$$\frac{p_4}{p_0} \frac{M_4}{\frac{c_4}{c_0}} k = \frac{p_5}{p_0} \frac{M_5}{\frac{c_5}{c_0}} \quad (2.31)$$

– Energiegleichung

Von Zustand 2 nach Zustand 3

$$\left[\frac{c_2}{c_0}\right]^2 \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2\right] = \left[\frac{c_3}{c_0}\right]^2 \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2\right] \quad (2.32)$$

Von Zustand 4 nach Zustand 5

$$\left[\frac{c_4}{c_0}\right]^2 \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M_4^2\right] = \left[\frac{c_5}{c_0}\right]^2 \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M_5^2\right] \quad (2.33)$$

– Isentropiebeziehung eingesetzt in die Gleichungen 2.32 und 2.33

Von Zustand 2 nach Zustand 3

$$\frac{p_3}{p_2} = \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (2.34)$$

Von Zustand 4 nach Zustand 5

$$\frac{p_5}{p_4} = \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_4^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_5^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (2.35)$$

Sekundärstoß von Zustand 3 nach 4: Da der Sekundärstoß abhängig von der Eingangsmachzahl und dem Flächenverhältnis meist eine größere Intensität besitzt als der einfallende Stoß, wird hier auf die anisotropen Stoßgleichungen zurückgegriffen (siehe Anhang A6).

$$\frac{p_4}{p_3} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} [M_3^2 - 1] \quad (2.36)$$

$$\left[\frac{c_4}{c_3}\right]^2 = 1 + \frac{2(\kappa-1)\kappa}{(\kappa+1)^2} \frac{M_3^2}{M_3^2} [M_3^2 - 1] \quad (2.37)$$

$$M_4^2 = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2}{\kappa M_3^2 - \frac{\kappa-1}{2}} \quad (2.38)$$

Bekannt ist die Stoßstärke  $p_{10}$ , woraus sich  $M_1$  berechnen läßt. Ferner ist das Flächenverhältnis  $A_{25}$  gegeben. Beim Eintrittsquerschnitt  $A_2$  des Diffusors wird die Machzahl  $M_2 = 1$  gesetzt. Nur wenn am Eintritt (Zustand 2) die Strömung Schallgeschwindigkeit  $u_2 = c_2$

erreicht, kann der Druck im Diffusor absinken ( $p_3 < p_2$ ) und die Strömung ( $M_3 > M_2$ ) auf Überschall beschleunigt werden (Bild 2.5).

Die Flächenänderung von  $A_2 \rightarrow A_5$  wird in zwei Bereiche aufgeteilt,  $A_2 \rightarrow A_3$  und  $A_4 \rightarrow A_5$ , in denen die Erhaltungssätze der stationären Strömung gelten sollen. Die Variable  $k$  liegt hierbei in ihren Grenzwerten fest und beschreibt die Lage des unbekanntes Flächenquerschnitts  $A_3 = A_4$ . Sie wird wie folgt definiert:

$$1) \quad \frac{A_3}{A_2} = A_{32} = k \cdot A_{52}$$

$$2) \quad \frac{A_4}{A_5} = k$$

$$k \text{ liegt somit zwischen:} \quad \frac{A_2}{A_5} < k < 1.$$

Die ersten zwölf Gleichungen (2.24) – (2.35) entsprechen formal den Gleichungen zur Berechnung einer Stoßwelle beim Übergang in einen Diffusor ohne Sekundärstoß, wobei dann  $k = 1$  gilt.

### **Abschätzung der Druckverluste der stationären Nachlaufströmung**

Die bisher beschriebenen Gleichungen ermöglichen die Berechnung der Zustandsgrößen vor und nach der Flächenänderung bei verlustfreier Strömung. Um jedoch ein gutes Ergebnis im Vergleich mit den Experimenten zu erzielen, müssen die realen Verhältnisse im Übergangsstück berücksichtigt werden. Dazu wird die Druckänderung über eine Flächenvariation, die über Gleichung (2.23) ohne Berücksichtigung der Dissipation ermittelt wird, durch verschiedene Zusatzterme korrigiert.

### ***Druckverluste in der Verengung***

Zuerst wird ein Druckverlust  $\Delta p_{23,GS}$  abgeschätzt, der die Grenzschichtablösung und die Wirbelbildung berücksichtigt. Bei einer unstetigen Verengung ergibt sich daraus eine Kontraktion mit anschließender Expansion der Strömung. Dabei kommt es zu einer Vermischung mit dem Totwassergebiet hinter den abgelösten Wirbeln. Kontraktion und Wiederausbreitung unter Vermischung mit der abgelösten Grenzschicht führen zu erheblichen Druckverlusten [21,22]. Der engste Querschnitt ist somit  $A_3' = \gamma A_3$  mit  $\gamma < 1$  als Kontraktionsziffer. Die

Kontraktionsziffer kann nach Weisbach /21/ mit

$$\gamma = 0.63 + 0.37 \left[ \frac{A_3}{A_2} \right]^3$$

angegeben werden.

Der entsprechende Druckverlust  $\Delta p_{23} = p_2 - p_3$  zwischen den Querschnitten  $A_2$  und  $A_3$  aufgrund der Kontraktion wird im Impulssatz berücksichtigt.

$$p_2 - p_3 = \frac{\rho u_2^2}{2} (A_{23}/\gamma - 1)^2. \quad (2.39)$$

Normiert man den Druckverlust  $\Delta p_{23}$  auf den Eingangsdruck  $p_2$  und verwendet die Definition für die Schallgeschwindigkeit und die Machzahl, erhält man

$$\left[ \frac{\Delta p_{23}}{p_2} \right]_{\text{GS,Düse}} = \frac{\kappa}{2} M_2^2 (A_{23}/\gamma - 1)^2 \quad (2.40)$$

als Druckverlust aufgrund von Grenzschichteinflüssen.

### *Druckverluste in der Erweiterung*

Bei der Berechnung der Erweiterung wird ein äquivalenter Druckverlust über die Flächenänderung benutzt. Die Kontraktion auf einen engeren Querschnitt entfällt. Der Druckverlust, der die Ablösung der Grenzschicht berücksichtigen soll, ist für die unstetige Erweiterung folgendermaßen beschrieben /22,23/:

$$\left[ \frac{\Delta p_{23}}{p_2} \right]_{\text{GS,Diffusor}} = \frac{\kappa}{2} M_2^2 \left[ 1 - \left[ \frac{A_2}{A_3} \right] \right]^2.$$

Zur Berechnung eines stetigen Diffusors wird ein winkelabhängiger Faktor  $\eta(\varphi)$  mit dem Öffnungswinkel  $2\varphi$  eingeführt /22,23/:

$$\left[ \frac{\Delta p_{23}}{p_2} \right]_{\text{GS,Diffusor}} = \eta \frac{\kappa}{2} M_2^2 \left[ 1 - \left[ \frac{A_2}{A_3} \right] \right]^2. \quad (2.41)$$

Der jeweilige Druckverlust für Düse bzw. Diffusor muß von der reibungsfreien Druckänderung subtrahiert werden.



## 2.2 Berechnung der Stoßausbreitung in verzweigten Kanälen

Als weitere wichtige Komponenten eines Lüftungssystems wurden Kanalverzweigungen untersucht. Sie verteilen z.B. die Zuluft in einzelne Anlagenräume oder führen die Abluft einer gemeinsamen Filteranlage oder einem Gebläse zu. Ähnlich wie bei der Wellenausbreitung in Düse und Diffusor stellt der Abzweig je nach Art der Strömungsverteilung eine mehr oder weniger starke Störung der Stoßfront dar. Speziell wurden hier nur Abzweigkonfigurationen untersucht, bei denen ein durchgehender Kanal und ein davon seitlich abzweigender Kanal die Strömung nach den Stoßwellen aufteilt. Zur Vereinfachung sollen die Querschnitte des Durchgangs – und Abzweigrohrs gleich und konstant sein. Diese Voraussetzung kann, wie später gezeigt wird, fallengelassen werden.

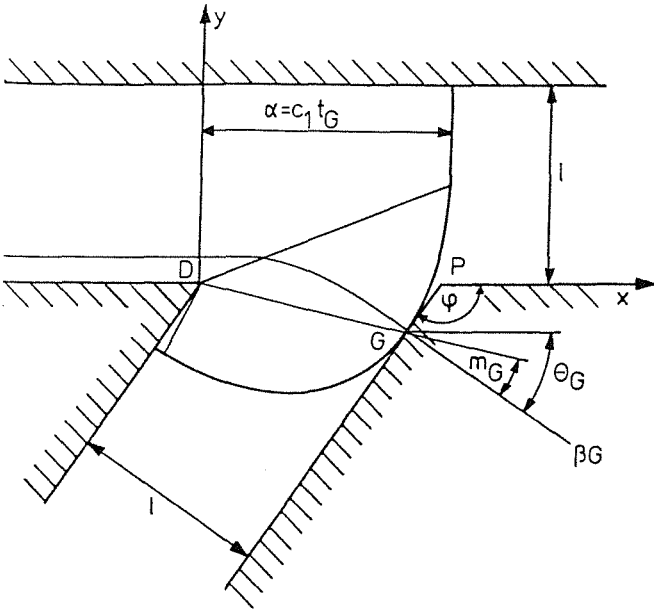
Trifft unter diesen Randbedingungen eine senkrechte Stoßwelle auf eine Verzweigung, entsteht an der Knickstelle zwischen durchgehendem und abgezweigtem Rohr eine Expansionswelle, ähnlich wie bei einem Diffusor. Die dieser Knickstelle gegenüberliegende Kante teilt die Welle in zwei Stoßfronten auf: eine nur wenig gebeugte, die geradeaus weiterläuft und eine je nach Abzweigwinkel stark gebeugte, die in den Abzweigkanal eindringt. Beim Auftreffen auf die Kante entsteht außerdem eine reflektierte Welle, die ebenso wie die Expansionswelle stromauf läuft /24/.

Zur Berechnung dieser komplexen Beugungsvorgänge sollen zwei Theorien vorgestellt werden. Die erste wurde 1975 von Peters und Merzkirch /25,26/ veröffentlicht und stützt sich auf die Beugungstheorie von Whitham /15/ (siehe Kapitel 2.1). Das zweite Rechenmodell wurde 1971 von Dadone /18/ entwickelt und bildet auch die Grundlage der in Kapitel 2.1 beschriebenen Charakteristikenmethode.

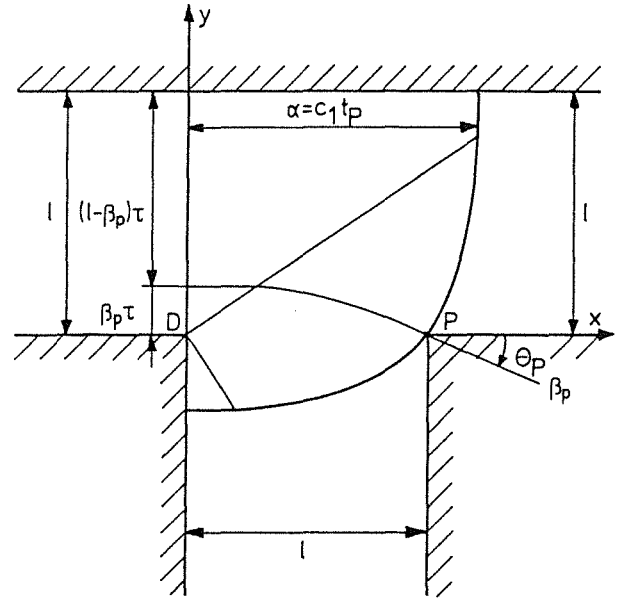
### 2.2.1 Berechnung der Stoßstärke nach Peters und Merzkirch

Peters und Merzkirch /25,26/ gehen von geometrischen Überlegungen aus und legen einen Rechteckkanal zugrunde. Sie nehmen als Ausgangspunkt ihrer Betrachtung das Auftreffen der gekrümmten Stoßfront auf die gegenüberliegende Ecke im Punkt P (Bild 2.6). Der senkrecht zur gekrümmten Stoßfront verlaufende Strahl im Whitham'schen Koordinatensystem (siehe Kap. 2.2.1) mit  $\beta = \text{const.}$  durch den Punkt P schneidet die Ebene  $x = 0$  im Abstand  $\beta = \beta_P$  und kann als Grenzfläche interpretiert werden, die die Gesamtfläche des Kanals  $\ell \cdot \tau$  aufteilt in eine obere Fläche  $(\ell - \beta_P) \tau$  und eine untere Fläche  $\beta_P \tau$ . Der obere Teil des Stoßes erfährt somit eine Flächenerweiterung um den Faktor  $\frac{(\ell - \beta_P) \tau}{\ell \tau}$  und läuft in der ursprünglichen Richtung weiter. Für den unteren Teil dagegen erweitert sich die Fläche

um den Faktor  $\frac{A}{A_1} = \frac{\beta_P \tau}{\ell \tau}$ , wobei  $\tau$  die Kanalbreite darstellt. Da die Stoßmachzahl  $M_1$  der einfallenden Welle als bekannt angenommen und  $\beta_P$  durch die Whitham'sche Beugungstheorie in Abhängigkeit von  $M_1$ ,  $\kappa$  und dem Wandwinkel berechnet werden kann (siehe Kapitel 2.1.1), wird von Peters und Merzkirch (für Wandwinkel  $< 90^\circ$ ) und Waskönig /27/ (für Wandwinkel  $> 90^\circ$ ) die Chisnell – Gleichung (2.9) benutzt.



**Bild 2.6:** Kanalabzweig von  $90^\circ$ ; gezeigt ist der Zeitpunkt des Auftreffens des gebeugten Stoßes auf der gegenüberliegenden Kante in P



**Bild 2.7:** Kanalabzweig für einen Winkel größer  $90^\circ$ ; gezeigt ist der Zeitpunkt des Auftreffens des gebeugten Stoßes im Punkt G

In ihren Arbeiten wird eine implizite Formel für die Stoßmachzahl im Abzweig angegeben, die von der Stoßmachzahl  $M_P$  auf dem Strahl mit  $\beta_P = \text{const.}$ , dem Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa$  und dem Wandwinkel abhängt, nicht aber von dem Verhältnis der Kanalhöhen. Abhängig von dem Verhältnis der Kanalhöhen ist dagegen die Stoßmachzahl im Durchgangskanal, die ebenfalls aus einer impliziten Gleichung gewonnen werden kann. Peters /26/ bestimmt die Stoßmachzahl  $M_P$  auf dem Strahl  $\beta_P = \text{const.}$  aus einer impliziten, graphisch dargestellten Integralbeziehung.

In der Arbeit von Grönig /20/ wurde für dieses Modell für den flächengleichen ( $\ell_d = \ell_a$  und  $\tau_d = \tau_a$ )  $90^\circ$  – Abzweig die Annahme eines konstanten  $K (M_1)$  benutzt, um die nachfolgenden Beziehungen zu vereinfachen und eine geschlossene Darstellung zu erreichen. Die

Strahlen in der Strömungsebene sind nach /28/ gegeben durch:

$$y = x \tan (\theta + m) \quad (2.42)$$

$$\text{mit } m = \arctan \sqrt{\frac{K}{2} \left[ 1 - \frac{1}{M^2} \right]} \quad (2.43)$$

Da  $K(M_1)$  als konstant angenommen wird, kann eine zu der von Peters /26/ aufgestellten analoge Gleichung gefunden werden. Da  $y_P = 0$  (siehe Bild 2.1), folgt aus (2.43) und (2.42)

$$m = \arctan \sqrt{\frac{K}{2} \left[ -\frac{1}{M_P^2} \right]} = -\theta_P \quad (2.44)$$

wobei  $\theta_P$  in Abhängigkeit von  $M_1$  und  $M_P$  aus Gleichung (2.13) zu bestimmen ist. Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung (2.44) ein, erhält man

$$\sqrt{\frac{K}{2}} \arctan \sqrt{\frac{K}{2} \left[ 1 - \frac{1}{M_P^2} \right]} = \text{arch} \left[ M_P M_1 - \sqrt{(M_P^2 - 1)(M_1^2 - 1)} \right] \quad (2.45)$$

Diese Form ist immer noch implizit in  $M_P$ , enthält aber die Stoßmachzahl auf dem Strahl mit  $\beta_P = \text{const.}$  nicht mehr in den Integrationsgrenzen wie bei /26,27/. Zunächst kann man, konstantes  $K(M_1)$  vorausgesetzt,  $M_P$  als Funktion von  $M_1$  und  $\kappa$  aus Gleichung (2.45) iterativ bestimmen und  $\alpha_P = c_1 t_P$  stellt sich dar als

$$\alpha_P = \frac{\ell}{M_P \cos m_P \sin \varphi} .$$

Die so aufgestellte Methodik kann nur bis zu einem bestimmten Grenzwinkel  $\varphi^*$  benutzt werden. Ab diesem Winkel  $\varphi^*$  trifft die gebeugte Stoßfront nicht mehr auf den gegenüberliegenden Punkt P auf. Sie wird, bedingt durch den nun nach hinten gerichteten Abzweig, von einem Punkt G (Bild 2.7) aus reflektiert. Diesen Grenzwinkel  $\varphi^*$  gibt Peters /26/ mit  $\varphi^* = 113.94^\circ$  für  $M \rightarrow \infty$  an. Der Punkt G liegt nun nicht mehr auf der Linie  $y_a = 0$  und muß anders bestimmt werden.

Im Punkt G muß die Steigung der Nebenkanalwand gleich der Steigung des Stoßes mit  $\alpha_G = \text{const.}$  sein. Daraus folgt, daß  $\theta_G$  mit

$$\theta_G = -|\varphi - 90^\circ|$$

angegeben bzw. der Winkel  $m_G$  (2.43) zu  $m_G = \arctan \sqrt{\frac{K(M_1)}{2} \left[1 - \frac{1}{M_G^2}\right]}$  bestimmt werden kann.

Die Stoßlage  $\alpha = \text{const.}$  ergibt sich zu  $\alpha_G = \frac{\ell}{M_G \cos^2 m_G}$ .

Je nach Abzweigwinkel  $\varphi \gtrless \varphi^*$  kann man nun den Strahl  $\beta_P = \text{const.}$  bzw.  $\beta_G = \text{const.}$  aus Gleichung (2.14) bestimmen

$$\beta_P = \sqrt{\frac{K}{2}} \frac{[M_P^2 - 1]^{\frac{1}{K} + \frac{1}{2}}}{[M_1^2 - 1]^{\frac{1}{K}}} \alpha_P \quad \text{für } \varphi < \varphi^* = 90^\circ \quad (2.46a)$$

$$\beta_G = \sqrt{\frac{K}{2}} \frac{[M_G^2 - 1]^{\frac{1}{K} + \frac{1}{2}}}{[M_1^2 - 1]^{\frac{1}{K}}} \alpha_G \quad \text{für } \varphi > \varphi^* = 90^\circ \quad (2.46b)$$

dabei ist  $\alpha_P = \text{const.}$  längs des Stoßes durch Punkt P und  $\alpha_G = \text{const.}$  längs des Stoßes durch Punkt G.

Wendet man nun die Whitham-Formel mit den von Grönig /20/ gemachten Näherungen auf die Verzweigung an, erhält man einen Zusammenhang zwischen der Ausgangsstoßstärke und der Stoßstärke nach dem Abzweig:

$$\frac{z_{nad}}{z_{va}} = \frac{1}{z_{va}} \left[ 1 + \left[ \frac{A_d}{A_0} \right]^{K(M_1)} [z_{va} - 1] \right], \quad (2.47)$$

$$\frac{z_{naa}}{z_{va}} = \frac{1}{z_{va}} \left[ 1 + \left[ \frac{A_a}{A_0} \right]^{K(M_1)} [z_{va} - 1] \right], \quad (2.48)$$

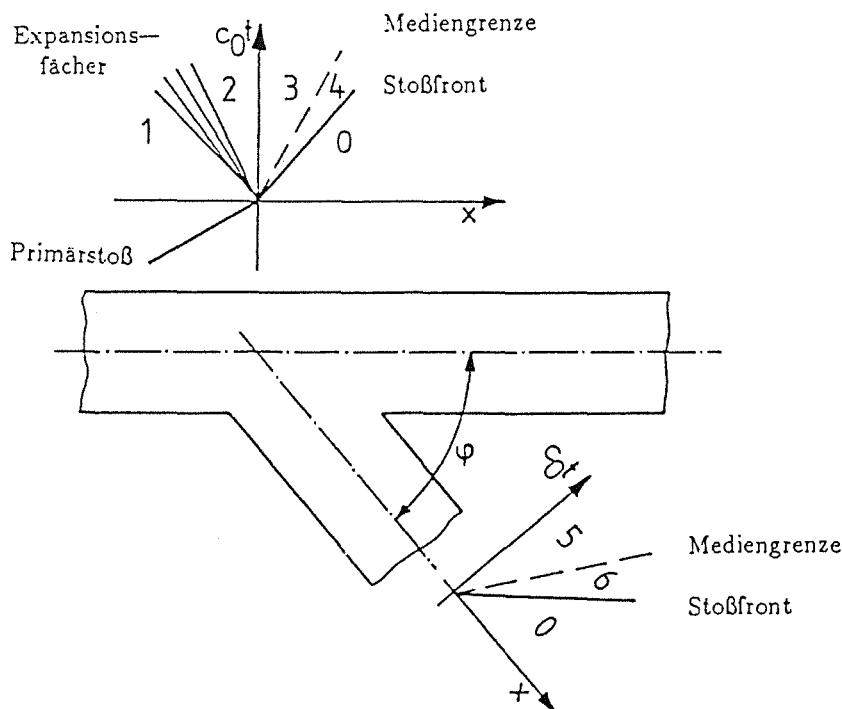
mit  $z_{va}$  = Stoßstärke vor dem Abzweig,  
 $z_{nad}$  = Stoßstärke nach dem Abzweig im Durchgangsrohr,  
 $z_{naa}$  = Stoßstärke nach dem Abzweig im Abzweigrohr.

Diese Beziehungen lassen sich, wie von Peters /26/ gezeigt wurde, ohne Schwierigkeiten auch auf Abzweigungen ungleicher Querschnitte anwenden.

## 2.2.2 Berechnung der Stoßstärke mit der modifizierten Charakteristikenmethode

Zur Berechnung seines Gleichungssystems betrachten Dadone et al. /18/ den Abzweig und die Weg-Zeit-Diagramme, wie sie in Bild 2.5 dargestellt sind. Die Indizes beziehen sich auf die einzelnen Zustände vor und hinter dem Stoß im Abzweig- und Durchgangrohr:

- 0: Ruhezustand im Rohr vor dem Stoß
- 1: Zustand nach dem Stoß vor dem Abzweig
- 2: Zustand hinter der reflektierten Expansionswelle
- 3: Zustand nach dem Stoß im Durchgangrohr
- 4: Zustand hinter der Kontaktfläche im Durchgangrohr
- 5: Zustand nach dem Stoß im Abzweigrohr
- 6: Zustand hinter der Kontaktfläche im Abzweigrohr



**Bild 2.8:** Abzweiggeometrie und Stoßdiagramme zur Aufstellung des Gleichungssystems für die Stoßabschwächung nach Dadone /18/.

Unter der Annahme, daß der Durchmesser des Rohres klein ist gegenüber der Rohrlänge, kann mit der Stromfadentheorie gerechnet werden. Wird zusätzlich vorausgesetzt, daß an jeder Stelle im Rohr Unterschallströmung herrscht (gilt bis Stoßstärken von  $z = 4.8$ ), ergeben sich aus der Wechselwirkung zwischen dem einfallenden Stoß, bezeichnet mit " $z_{va}$ ", und dem Abzweig eine reflektierte Expansionswelle " $z_r$ ", zwei durchgehende Stoßwellen " $z_{nad}$ " und " $z_{naa}$ " und zwei Kontaktflächen. Nimmt man nur kleine Stöße an, kann näherungsweise

isentrop gerechnet werden. Sind die einfallende Stoßwelle und die Rohrgeometrie bekannt, kann folgendes Gleichungssystem aufgestellt werden, um die durchgehenden und reflektierten Wellen zu berechnen:

Mit Hilfe der Charakteristikenbedingungen (siehe auch Kap. 2.1) ergeben sich für die Zustandsänderungen folgende Bestimmungsgleichungen /18/:

Vom Zustand "1" nach "2" ergibt sich auf einer Linie  $\eta = \text{const}$

$$\frac{c_2}{c_0} \left[ \frac{2}{\kappa-1} + M_2 \right] = \frac{c_1}{c_0} \left[ \frac{2}{\kappa-1} + M_1 \right] . \quad (2.49)$$

Vom Zustand "0" nach "3" ergibt sich auf einer Linie  $\xi = \text{const}$

$$\frac{c_3}{c_0} \cdot \left[ \frac{2}{\kappa-1} - M_3 \right] = \frac{2}{\kappa-1} , \quad (2.50)$$

analog von "0" nach "5"

$$\frac{c_5}{c_0} \cdot \left[ \frac{2}{\kappa-1} - M_5 \right] = \frac{2}{\kappa-1} . \quad (2.51)$$

Nach Voraussetzung kann mit isentroper Zustandsänderung gerechnet werden:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[ \frac{c_2}{c_1} \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} , \quad (2.52)$$

analog von "0" nach "3" und "0" nach "5"

$$\frac{p_3}{p_0} = \left[ \frac{c_3}{c_0} \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} ; \quad \frac{p_5}{p_0} = \left[ \frac{c_5}{c_0} \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} . \quad (2.53,2.54)$$

Die Invarianz von Druck und Geschwindigkeit über die Mediengrenze bzw. Kontaktfläche ergibt:

$$M_3 \frac{c_3}{c_0} = M_4 \frac{c_4}{c_0} \quad ; \quad \frac{p_3}{p_0} = \frac{p_4}{p_0} \quad (2.55,2.56)$$

$$M_5 \frac{c_5}{c_0} = M_6 \frac{c_6}{c_0} \quad ; \quad \frac{p_5}{p_0} = \frac{p_6}{p_0} \quad (2.57,2.58)$$

Nach der Stromfadentheorie bei konstantem Querschnitt ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung (Kap. 2)

$$\frac{p_2}{p_0} \frac{M_2}{\frac{c_2}{c_0}} = \frac{p_4}{p_0} \frac{M_4}{\frac{c_4}{c_0}} + \frac{p_6}{p_0} \frac{M_6}{\frac{c_6}{c_0}}. \quad (2.59)$$

Der Energiesatz liefert für isentrope Zustandsänderungen

$$\left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2 \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2\right] = \left(\frac{c_4}{c_0}\right)^2 \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M_4^2\right] = \left(\frac{c_6}{c_0}\right)^2 \left[1 + \frac{\kappa-1}{2} M_6^2\right] \quad (2.60, 2.61)$$

Als weitere Gleichung steht noch die Impulserhaltung zur Verfügung. Nach Kap. 2 gilt

$$\text{Durchgang: } \frac{p_3}{p_2} - 1 = D_n \left[\frac{M_3}{M_2}\right]^n + D_{n-1} \left[\frac{M_3}{M_2}\right]^{n-1} + \dots + D_0 \quad (2.62)$$

$$\text{Abzweig: } \frac{p_5}{p_2} - 1 = A_n \left[\frac{M_5}{M_2}\right]^n + A_{n-1} \left[\frac{M_5}{M_2}\right]^{n-1} + \dots + A_0. \quad (2.63)$$

Die Koeffizienten  $D_i$  und  $A_i$  wurden von Dadone et al. /29/ für runde ( $i=0.2$ ) und vom Autor für quadratische Kanäle ( $i=0.6$ ) in stationären Strömungsversuchen bestimmt und hängen lediglich von der Abzweiggeometrie ab (siehe Anhang A9). Eine Beschreibung der Versuchsanlage und der Durchführung ist in Kap. 4.4 zu finden.

Die Gleichungen (2.49) bis (2.63) geben somit 15 Beziehungen für die 15 Unbekannten,  $\frac{p_i}{p_0}, \frac{c_i}{c_0}, M_i$  ( $i=2,3,4,5,6$ ) an.

Zur Lösung des Systems werden die Anfangsstoßstärke  $z_{va}$ , das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten und die Strömungsmachzahl  $M_1$  als bekannt angenommen. Dadone et al. haben diese Gleichungen numerisch gelöst und die Ergebnisse graphisch in /18/ dargestellt.

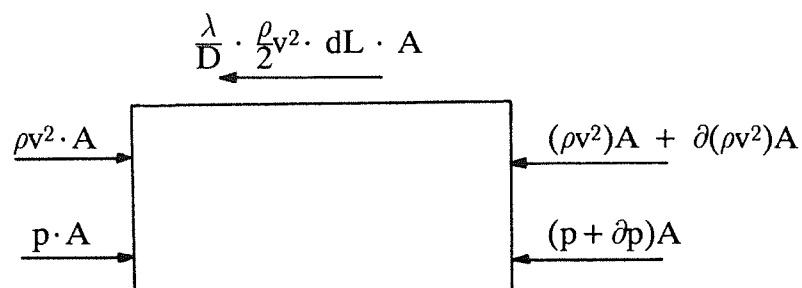
### 2.3 Berechnung der Stoßdämpfung durch Reibung in geraden Kanälen

Gerade Rohre dienen als Verbindungsstück zwischen den einzelnen Komponenten. Ebenso wie die zuvor beschriebenen Querschnittsänderungen und Abzweige setzen sie der Nachlaufströmung und somit der Stoßwelle einen Widerstand entgegen. Die Intensität wird

sich bei gleichbleibender Fläche verringern. Diese Abschwächung der Stoßfront kann wieder über die Druckänderung der Nachlaufströmung berechnet werden. Dazu muß zuerst der Druckabfall einer kompressiblen, stationären Strömung theoretisch beschrieben werden. Aufgrund der Reibung wird der Gesamtdruck in der Strömung im Rohr abnehmen. Entsprechend sinkt der statische Druck und damit die Dichte des strömenden Fluids ebenfalls ab. Zur Erfüllung der Massenerhaltung muß bei konstanter Fläche die Strömungsgeschwindigkeit ansteigen und der statische Druck sinkt weiter ab. Eine Erhöhung der Geschwindigkeit bewirkt aber auch einen starken Gesamtdruckabfall aufgrund der Reibungseffekte ( $\Delta p \sim v^2$ ). Dadurch ist ein höherer Druckabfall bei kompressibler Strömung zu erwarten, als dies bei einem Fluid konstanter Dichte der Fall ist. Die Nachlaufströmung eines Verdichtungsstoßes, der in ein gerades Rohr konstanten Querschnitts eindringt, wird also eine Druckabnahme und eine entsprechende Beschleunigung erfahren. Dieses Phänomen kann auch bei der Stoßfokussierung zu einer Düse beobachtet werden. Daher liegt es nahe, den Fall der Stoßausbreitung im Rohr und in der Düse mathematisch gleich zu behandeln. Bei der Bewegung der Stoßfront durch das Rohr entstehen infinitesimal kleine reflektierte Wellen, die stromauf laufen. Dabei entsteht im Gegensatz zur Düse kein senkrechter reflektierter Stoß, sondern ein kontinuierlicher Druckanstieg vor dem betrachteten Kontrollvolumen des Rohres. Dadurch entsteht ein gewisser Fehler bei der Berechnung der Stoßstärke am Ende des Rohres. Die Zunahme des Druckes vor dem Rohr ist jedoch immer geringer als die Druckabnahme aufgrund der Reibung im Rohr. Daraus resultiert insgesamt eine Abnahme der Stoßstärke trotz der Beschleunigung der Strömung. Die Berechnung der Stoßdämpfung reduziert sich somit auf die Bestimmung des Druckabfalls in kompressibler stationärer Strömung im Rohr konstanten Querschnitts. Dazu wird an einem Kontrollvolumen mit Ein- und Austrittsfläche  $A$  und Länge  $dL$  das Kräftegleichgewicht aus Impuls-, Druck- und Reibungskräften aufgestellt (siehe Bild 2.9).

### Impulssatz (stationär, kompressibel)

Kräftegleichgewicht am Volumenelement  $A \cdot dL$ :



**Bild 2.9:** Zur Aufstellung der Bilanzgleichungen am reibungsbehafteten Rohr



$$\Sigma F = 0: \quad \rho v^2 \cdot A + p \cdot A - (\rho v^2)A - \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} dx A - p \cdot A - \frac{\partial p}{\partial x} dx A - \\ - \frac{\lambda}{D} \frac{\rho}{2} v^2 dL \cdot A = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \text{mit } v = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A} \text{ gilt: } dp + d(\rho v^2) = - \lambda \frac{\rho}{2} v^2 \frac{dL}{D} \quad (2.64)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung  $\rho \cdot A \cdot v = \text{const}$ ;  $A = \text{const}$ ; kann folgende Differentialgleichung aufgestellt werden:

$$\frac{A^2 \rho_1}{\dot{m}^2 p_1^{1/\kappa}} p^{1/\kappa} dp - \frac{1}{\kappa p} dp = - \frac{\lambda}{2D} dL. \quad (2.65)$$

Integration über die gesamte Rohrlänge  $L$  ergibt eine Bestimmungsgleichung für die Drücke vor und nach dem reibungsbehafteten Strömungskanal:

$$\frac{\kappa}{\kappa+1} \frac{A^2 \rho_1}{\dot{m}^2 p_2^{1/\kappa}} \left[ p_3^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} - p_2^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right] - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{p_3}{p_2} = - \lambda \frac{L}{2D} \quad (2.66)$$

$$\dot{m}^2 = \rho_2^2 v_2^2 A^2.$$

Mit der Definition der Schallgeschwindigkeit  $c_1^2 = \kappa \frac{p_1}{\rho_1}$  kann schließlich das Druckverhältnis  $p_3/p_2 = p_{32}$  in Abhängigkeit von der Anströmmachzahl  $M_2$  berechnet werden:

$$\Rightarrow \quad p_{32}^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} - \frac{\kappa+1}{\kappa} M_2^2 \ln p_{32} + (\kappa+1) \lambda \frac{M_2^2 L}{2D} = 1. \quad (2.67)$$

1. Term: statischer Druckänderung,
2. Term: Druckänderung aufgrund der Beschleunigung,
3. Term: dissipative Effekte.

Gleichung (2.67) ersetzt nun für die Berechnung der Stoßdämpfung im geraden Rohr den Impulssatz, Gleichung (2.23), Kap. 2.1, im Gleichungssystem für divergente und konvergente Kanäle.

Bei hohen Werten der Machzahl  $M_2 \leq 1$  in der Unterschallanströmung kann aufgrund der Druckabsenkung und der damit verbundenen Beschleunigung der Strömung Schallgeschwindigkeit erreicht werden.

In diesem Fall kommt es, ähnlich wie bei der Düse bzw. dem Diffusor, zu einem zweiten Verdichtungsstoß (Sekundärstoß). Dieses Phänomen ist ausführlich in /30/ beschrieben. Im betrachteten Bereich kleiner Stoßstärken tritt dieses Phänomen jedoch nicht auf, so daß mit oben beschriebener Systematik die Abschwächung der Stoßintensität bestimmbar ist.

## 2.4 Berechnung der Stoßausbreitung im gesamten Kanalsystem

In den vorangestellten Kapiteln wurde die Stoßausbreitung in den einzelnen Komponenten einer Lüftungsanlage beschrieben. Hier soll nun eine Möglichkeit aufgezeigt werden, die Gesamtanlage zu modellieren und durch eine Verknüpfung der Lösungen für die einzelnen Anlagenteile auch einfache Netzwerke berechnen zu können. Die Gesamtanlage besteht aus einer Aneinanderreihung der einzelnen Komponenten. So wurden zum Beispiel die Experimente an Düse und Diffusor mit der Lösung des Systems "Rohr – Düse/Diffusor – Rohr" verglichen, da die Druckaufnehmer nicht unmittelbar vor und nach der Querschnittsänderung angebracht waren, sondern jeweils einen Meter davon entfernt. Zur Berechnung solcher und noch komplexerer Netzwerke wurde das modular aufgebaute Programm SHOCK – WAVE entwickelt, das nacheinander die einzelnen Komponenten abarbeitet. Jede einzelne Komponente wird dabei nach der in Kap. 2.1 bis 2.3 beschriebenen Systematik betrachtet. So muß für jedes Anlagenteil ein System mit 9 bzw. 15 Gleichungen gelöst werden. Die Lösungen dieses Systems (Druck  $p$ , Schallgeschwindigkeit  $c$  und Machzahl  $M$ ) werden als Eingangsgrößen für die nächste Komponente benutzt, bis das Netzwerk abgearbeitet ist.

Die Art und Anzahl der Komponenten werden über eine Eingabedatei eingelesen. So wird z.B. "FR – FDU – FR" als Kombination "Rohr – Düse – Rohr" angesehen. Weiterhin ist in dieser Eingabedatei jeweils für jede Komponente der Name des Datenfiles angegeben, in dem alle zur Berechnung notwendigen Informationen abgespeichert sind. Für ein Rohr wird z.B. die Rohrlänge, der Durchmesser und die Rauigkeit verlangt. Für eine Düse bzw. einen Diffusor wird das Flächenverhältnis und der Öffnungswinkel benötigt. Die Abzweige können über den in Kap. 2.2 erwähnten Druckbeiwert  $q(M)$  beschrieben werden. Außerdem können weitere, benutzerdefinierte  $q(M)$  – Verläufe integriert werden, um zum Beispiel einen Krümmer oder ein Ventil zu berechnen. So kann über eine externe Definition des Impulssatzes jede beliebige Komponente berechnet werden. Expansionswellen oder reflektierte Stoßwellen ergeben sich je nach Verlauf des Druckbeiwertes  $q(M)$  direkt aus der Rechnung.

Nach Generierung des Netzwerks wird das Gleichungssystem für die erste Komponente gelöst. Damit erhält man bei bekannten Werten von Druck  $p$ , Schallgeschwindigkeit  $c$  und Machzahl  $M$  am Eintritt der Komponente diese Größen auch am Austritt. Die erhaltenen

Lösungen werden zwischengespeichert und als neue Eingangsgrößen für die nächste Komponente benutzt. Die Werte der letzten Komponenten werden als Ergebnis ausgewiesen.

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird ein modifiziertes Newton-Verfahren benutzt. Eine genaue Beschreibung dieses Lösungsalgorithmus ist in /31,32 / zu finden (siehe auch Anhang). Problematisch ist dabei die Wahl der Startwerte. Insbesondere bei den 15 Gleichungen für den Diffusor mit Sekundärstoß reagiert das System sehr empfindlich auf kleine Änderungen der Anfangsbedingungen. Eine physikalisch sinnvolle Lösung kann meist nur dann erzielt werden, wenn man als Startwerte für die Iteration bei einer bestimmten Stoßstärke die Lösungen der Rechnung bei einer geringfügig niedrigeren Stoßstärke benutzt. So ist es notwendig, die Rechnung bei sehr kleinen Eingangsstoßmachzahlen zu beginnen und sich an die gewünschte Lösung in kleinen Schritten heranzutasten. Die Erfahrung hat gezeigt, daß im Stoßstärkenbereich von  $z = 1$  bis  $z = 2.5$  eine Schrittweite von  $\Delta z = 0.01$  in den meisten Fällen zu schnell konvergierenden Ergebnissen führt. Ansonsten muß eine kleinere Schrittweite  $\Delta z$  gewählt werden. Bei der Lösung des Gleichungssystems für den Diffusor mit Sekundärstoß tritt das Phänomen auf, daß sich die Ergebnisse für die Stoßstärke nach dem Diffusor für reibungsfreie und reibungsbehaftete Strömung nicht unterscheiden. Der dissipative Term im Impulssatz wirkt sich nur auf die Schallgeschwindigkeit und die Machzahl im Gebiet vor und nach dem Sekundärstoß aus, nicht aber auf den Druck. Ein Vergleich mit den Experimenten muß dann zeigen, inwieweit dieser Fehler tolerierbar ist. Durch den modularen Aufbau des Programms und der Integration von benutzerdefinierten  $\Delta p - \dot{V}$ -Kennlinien in den Impulssatz ist eine Modellierung jedes beliebigen Netzwerkes möglich. Durch die Entkoppelung der einzelnen Komponenten ist die Größe der Gesamtanlage bzw. die Anzahl der Komponenten nur durch die zur Verfügung stehende Rechenzeit beschränkt. Komplexere Beugungs- und Reflexionsvorgänge können nur durch mehrere Programmdurchläufe bestimmt werden, bei denen jeweils eine reflektierte Welle als Eingangsstoßstärke für den nächsten Lauf benutzt wird.

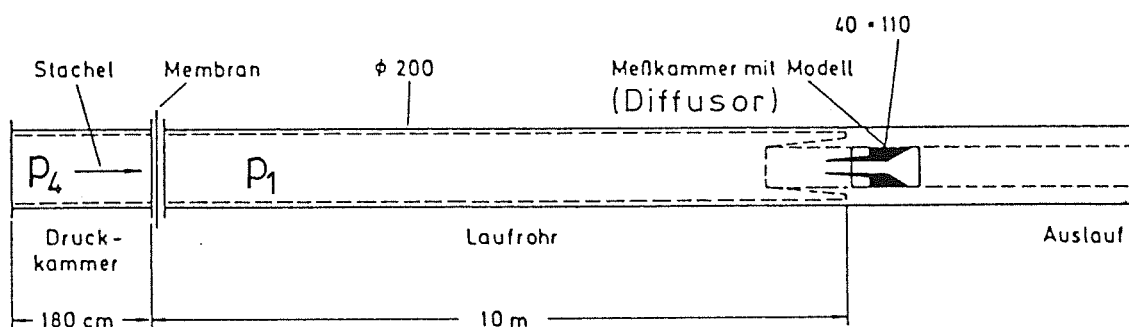
Das Programm bietet die Möglichkeit, eine Berechnung der Stoßausbreitung in Lüftungssystemen mit Hilfe stationärer Druckbeiwerte durchzuführen. Meist können diese Werte lüftungstechnischen Handbüchern oder Tabellenwerken entnommen werden oder sind Auslegungsdaten des Strömungsnetzwerkes. Die Rechenzeit liegt selbst auf kleineren Personal-Computern weit unter den großen FEM oder Fluidynamikcodes. Künftige Arbeiten können sich so hauptsächlich auf die Integration eines stabileren Lösungsalgorithmus beschränken.

### 3. Visualisierung der Stoßwelle zur Untersuchung der Beugungsvorgänge

Aus der Literatur /24/ war bekannt, daß der in Kap. 4.1 erwähnte Sekundärstoß nicht den ganzen Kanalquerschnitt einnimmt. Daher ist es nicht möglich, ihn durch eine direkte Druckmessung, z.B. durch eine Wandanbohrung, zu erfassen. Für die Erstellung des Modells nach dem Charakteristikenverfahren war jedoch die genaue Kenntnis seiner Lage und des Zeitpunktes seines Auftretens im Diffusor bzw. in der Düse erforderlich. Als geeignete Verfahren zur Sichtbarmachung der durchgehenden und reflektierten Wellen und damit zur Erstellung des Weg-Zeit-Diagrammes haben sich die Schlieren- und Schattenoptik erwiesen. Die entsprechenden Versuche wurden an einer vorhandenen Stoßrohranlage im Ernst-Mach-Institut der Fraunhofergesellschaft in Freiburg i.Br. durchgeführt.

#### 3.1 Aufbau des Stoßwellenrohres

Das Stoßwellenrohr wird mit Luft als Treib- und als Laufrohrgas betrieben. Das Treibrohr kann mit einem maximalen Druck  $p_4$  von 10 bar gefüllt werden. Um höhere Stoßstärken  $p_{21}$  zu erzielen, kann durch Evakuieren des Laufrohres ein höheres Vordruckverhältnis  $p_{41}$  über die Membran erreicht werden. Auf diese Weise wird mit dem Treibgas Luft eine maximale Stoßmachzahl von etwa  $M_s = 3.0$  ermöglicht. Für die Versuche war eine Stoßmachzahl von  $M_s < 2.07$  gefordert, was einer Unterschallnachlaufströmung vor dem Modell entspricht.



**Bild 3.1:** Schematische Darstellung des Stoßwellenrohres am Ernst-Mach-Institut in Freiburg

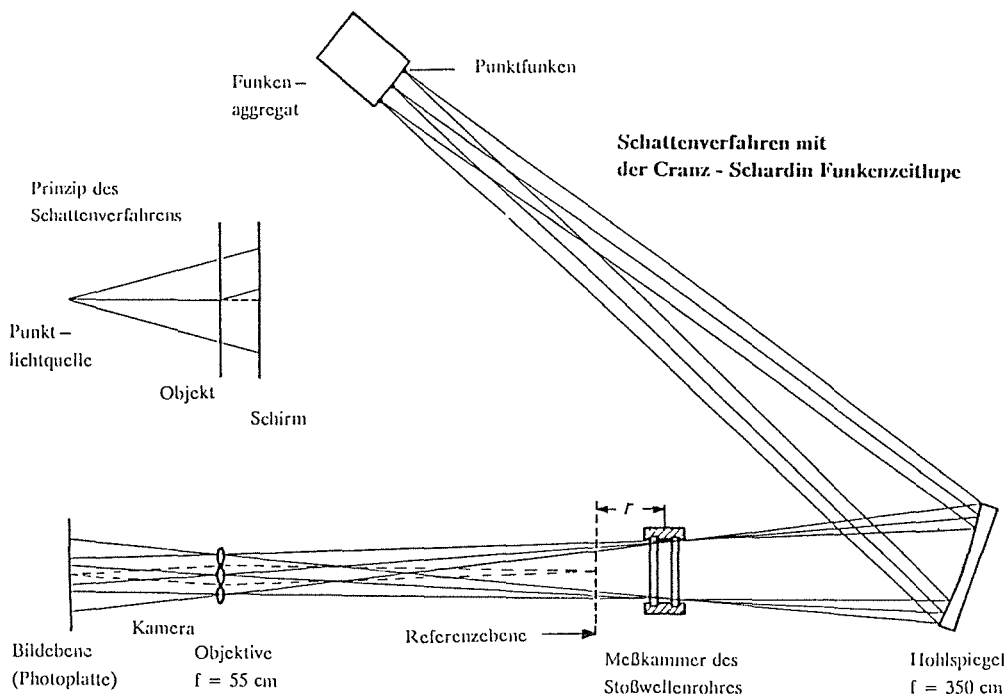
Die Modelle für das Stoßwellenrohr mit Visualisierungseinrichtung wurden so konstruiert, daß mit wenigen, einfachen Komponenten eine hohe Modellvielfalt erreicht wird. Durch Umdrehen eines Modells konnte es jeweils als konvergierender oder divergierender Einbau verwendet werden. Dabei wurde das Flächenverhältnis zwischen  $A_{23} = 1.5$  bis  $6.2$  für eine Düse und  $A_{23} = 1/1.5$  bis  $1/6.2$  für einen Diffusor in kleinen Schritten variiert. Durch eine

Schlierenaufnahme gegen Ende der Bildfolge einer Serie konnte das Modell auf Dichtheit überprüft werden. Bei Schlierenaufnahmen wird die erste Ableitung der Dichte nach dem Ort sichtbar, es werden somit kleine Dichteänderungen aufgrund von Leckagen deutlich. Ist das Modell undicht, kommt es eventuell zum Massenverlust im untersuchten Kontrollraum und die Stoßwellenbeugung ist nicht mehr repräsentativ.

## 3.2 Beschreibung der benutzten Schatten- und Schlierenverfahren

### 3.2.1 Schattenverfahren

Bei dem benutzten Schattenverfahren (Bild 3.2) ist die Lichtquelle im Brennpunkt eines sphärischen Spiegels positioniert. Die Objektebene (Meßkammer des Stoßwellenrohrs) wird dann von einem Strahlenbündel in Zentralprojektion durchsetzt. Tritt das Strahlenbündel ungestört durch die Objektebene  $\Sigma$ , wird die Abbildungsebene  $\Sigma'$  gleichmäßig mit einer Bestrahlungsstärke  $B_0$  beleuchtet /33/.



**Bild 3.2:** Schematische Darstellung des Schattenverfahrens am Stoßwellenrohr am Ernst-Mach – Institut, Freiburg

Zwischen einer Dichteänderung  $d\rho/dx$  und der Änderung der Bestrahlungsstärke  $\Delta B/B_0$  besteht ein proportionaler Zusammenhang:

$$\frac{\Delta B}{B_0} \sim \frac{dn}{dx} \sim \frac{d\rho}{dx} \quad (3.1)$$

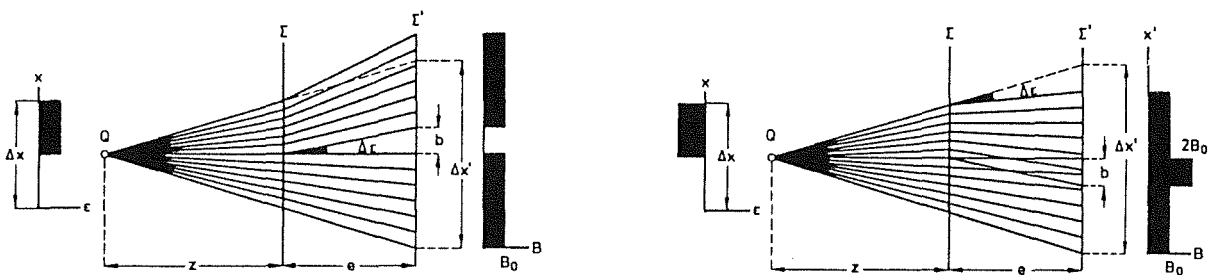
Einer Dichteänderung  $d\rho/dx$  entspricht eine Änderung des Brechungsindex  $dn/dx$ . Dies bewirkt eine Ablenkung des Strahlengangs um  $d\epsilon/dx$ , woraus eine Änderung der Bestrahlungsstärke  $\Delta B/B_0$  folgt. Über die Gladstone–Dale–Konstante  $G$  besteht eine Beziehung zwischen der Dichte  $\rho$  und der Abweichung  $(n-1)$  des Brechungsindex  $n$  gegenüber der Brechung eines Strahls im Vakuum  $n_{\text{vak}} \equiv 1$ :

$$(n-1) = G\rho \quad (3.2)$$

Ist die Dichteänderung groß, folgt hieraus auch eine große Strahlablenkung um große Winkel  $\epsilon$ . Es gilt das Snellin'sche Brechungsgesetz

$$\sin \epsilon \sim \frac{1}{n} \quad (3.3)$$

Eine sprunghafte Ablenkung des Strahles um  $\Delta\epsilon$  aufgrund einer Dichteänderung  $\Delta\rho$  in der Objektebene  $\Sigma$  hat bei positivem Sprung  $\Delta\epsilon$  eine Ausblendung  $B = 0$  (Bild 3.3 a) mit der Breite  $b = e\Delta\epsilon$  in der Abbildungsebene  $\Sigma'$  zur Folge. Der Abstand zwischen der Objektebene  $\Sigma$  und der Abbildungsebene  $\Sigma'$  wird mit  $e$  bezeichnet. Die Abbildungsebene oder Schattenebene  $\Sigma'$  entspricht der Referenzebene, auf die die Kamera fokussiert ist. Bei negativem Sprung  $\Delta\epsilon$  (Bild 3.3 b) erscheint ein doppelt beleuchtetes Band  $B = 2B_0$  gleicher Breite.



**Bild 3.3:** Ablenkung eines Lichtstrahles um den Winkel  $\Delta\epsilon$  in einem zentral projizierenden Schattenverfahren: a)  $\Delta\epsilon/\Delta x > 0$ , b)  $\Delta\epsilon/\Delta x < 0$  /8/.

Aus einer Dichteänderung folgt eine Bildschattierung in der Abbildungsebene. Eine Dichteabnahme erscheint schwarz, eine Dichtezunahme erscheint weiß, jeweils unabhängig von der Stärke der Dichtezu- oder -abnahme. Sichtbar wird die Ablenkung der Winkel,

was der zweiten Ableitung der Dichte nach dem Ort entspricht. Man kann eine Dichtezu- oder -abnahme erkennen, sie aber nicht quantitativ bestimmen. Die Empfindlichkeit  $(\Delta B/B_0)/(\partial \epsilon/\partial x)$  des Schattenverfahrens läßt sich anhand folgender Beziehung abschätzen (Bild 3.4) /33,34/:

$$\frac{\Delta B/B_0}{\partial \epsilon/\partial x} = -r \left[ 1 - \frac{e}{r} \right] \frac{e}{r} \quad (3.4)$$

$\Delta B/B_0$  = Änderung der Bestrahlungsstärke

$\partial \epsilon/\partial x$  = stetige Änderung der Ablenkung in positiver x-Richtung

$r$  = Abstand zwischen Lichtquelle Q und Abbildungsebene  $\Sigma'$

$e$  = Referenzebene; Schattenebene; Abstand zwischen Objektebene  $\Sigma$  mit Dichtestetigkeit (Schliere S) und Abbildungsebene  $\Sigma'$ .

Eine große Empfindlichkeit ergibt sich bei großem Abstand  $r$ . Mit zunehmendem  $r$  wächst aber die Unschärfe. Ein Maximum der Empfindlichkeit ergibt sich für  $e/r = 0,5$ . Die Referenzebene  $e$  wird meist klein gewählt, d.h. die Abbildungsebene  $\Sigma'$  ist nahe an der Objektebene  $\Sigma$ , um scharfe Abbildungen und eindeutige Zuordnung der Lichtablenkungen (schwarze und weiße Bänder) zu bekommen.

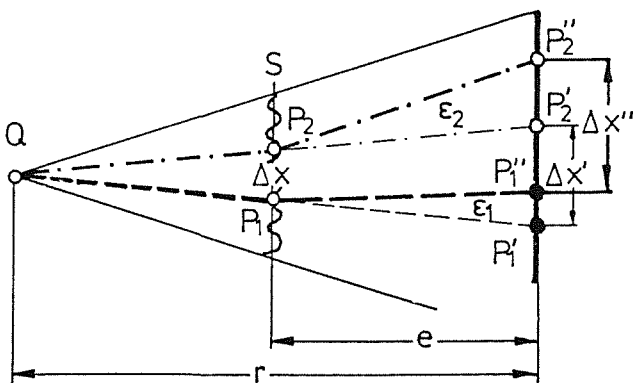


Bild 3.4: Geometrische Abmessungen zur Empfindlichkeit des Schattenverfahrens

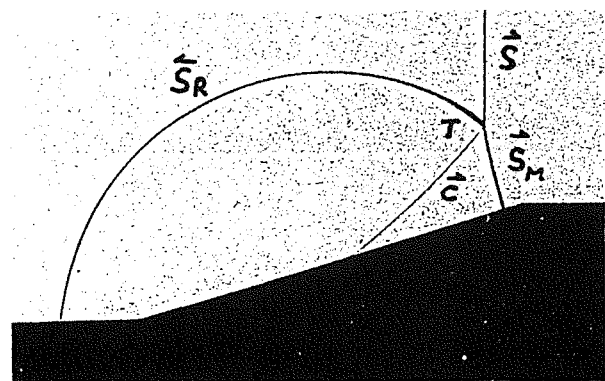


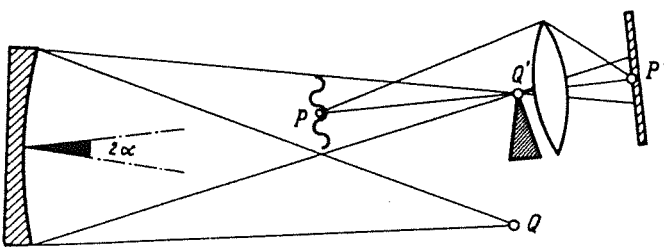
Bild 3.5: Machreflexion eines ebenen Stoßes auf einer schrägen Wand

Das Schattenverfahren eignet sich besonders gut zur Visualisierung von Verdichtungsstößen. Bild 3.5 zeigt die irreguläre, sogenannte Machreflexion eines ebenen Verdichtungsstoßes. Eine Kontaktfläche  $\check{C}$  wird aber genauso scharf wiedergegeben. Über die Kontaktfläche  $\check{C}$  ändert sich die Dichte, nicht aber der Druck und die Strömungsgeschwindigkeit. Das

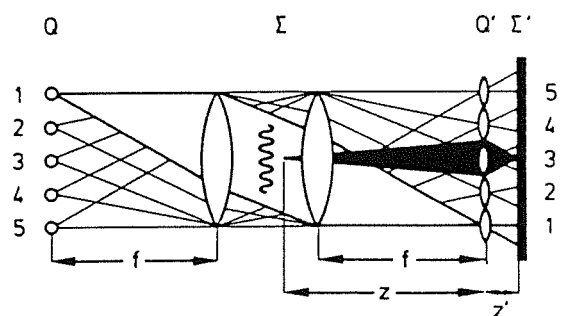
dunkle Band ist auf der Seite der kleineren und das helle auf der Seite der größeren Dichte. Man erkennt, daß sich der Druck und somit die Entropie über den Machstoß  $\xi_M$  mehr erhöhen als über die beiden anderen Stöße  $\xi_R$  und  $\xi$ . Anhand solcher schwarz – weißer Bänder lassen sich bei komplizierten Stoßbeugungen Stöße und Gleit – bzw. Kontaktflächen identifizieren.

### 3.2.2 Schlierenverfahren

Um die erste Ableitung der Dichte nach dem Ort zu untersuchen, muß die Strahlenablenkung, also der Winkel selbst, betrachtet werden. Hierzu wird eine Schneide in den Brennpunkt  $f_2$  zwischen Hohlspiegel und Objektiv gesetzt und der halbe Strahlengang abgedeckt. Ändert sich die optische Dichte (sie ist einfach proportional zur Massendichte) des Objekts quer zur Lichtstrahlrichtung, folgt hieraus eine Lichtstrahlenablenkung in Richtung des Dichtegradienten. Durch die Verschiebung des Lichtfleckes an der Schlierenblende B wird der entsprechende Objektteil auf dem Schirm erhellt oder verdunkelt. Die erste Ableitung der Dichte wird normal zur Schlierenblendenkante B beobachtet. Der Abstand zwischen Blende und Objektiv ist vernachlässigbar klein (Bild 3.6). Je größer die Brennweite  $f_2$ , umso empfindlicher wird das Schlierenverfahren. Die meisten Schlierenbilder werden wie die Schattenbilder zur Bestimmung der Strömungsgeometrie aufgenommen. Quantitative Dichtemessungen sind möglich unter Verwendung einer Normalschliere als Bezugsschliere mit bekannter Dichte /34/.



**Bild 3.6:** Schlierenverfahren mit sphärischem Spiegel



**Bild 3.7:** Schematische Anordnung der Cranz – Schardin – Zeitlupe /35/



### 3.2.3 Funkenkamera

Zur optischen Bildtrennung entwickelten C. Cranz und H. Schardin /35/ 1929 eine Funkenkamera, bei der der Film  $\Sigma'$  ruht und das Objekt  $\Sigma$  mit verschiedenen Objektiven  $Q'$  aus leicht unterschiedlichen Richtungen fotografiert wird. Die Kamera besteht aus 24 Objektiven  $Q'$ , die recheckförmig angeordnet sind (Bild 3.7). Kürzeste Belichtungszeiten werden erreicht, indem das Objekt  $\Sigma$  von räumlich getrennten Lichtfunken durchleuchtet wird. Es werden 24 getrennte Funkenstrecken  $Q$  so angeordnet, daß das Licht jeder Funkenstrecke durch je ein Objektiv  $Q'$  auf dem Film  $\Sigma'$  abgelichtet wird.

Während sich der geometrische Aufbau der Aufnahmeoptik seit 1929 nur geringfügig geändert hat, ist die Elektronik zur Erzeugung der Lichtfunken hin zu kürzeren Belichtungszeiten  $\Delta t$  und zu größerer Unempfindlichkeit gegenüber Spannungsschwankungen weiterentwickelt worden /33/. Die leicht schräge Durchstrahlung des Objekts und der Objektive führt zur Parallaxe. Fotos, die durch Objektive aufgenommen wurden, die nicht nahe der optischen Mittelachse liegen, haben eine Maßstabsverzerrung. Durch "Randobjektive" aufgenommene Verdichtungsstöße, z.B. mit dem Schattenverfahren, haben eine andere Bänderbreite  $\Delta b$  als jene, die durch Objektive nahe der optischen Mittelachse aufgenommen wurden. Dies resultiert aus der Überlagerung der Strahlableitung  $\Delta \epsilon$  und der schrägen Durchstrahlung.

## 3.3 Auswertung der Messungen und Beschreibung der auftretenden Phänomene

In diesem Kapitel werden einige Serien von Schattenaufnahmen beschrieben, die die auftretenden Phänomene bei unterschiedlichen Flächenänderungen zeigen. Anhand der visualisierten Stoßbeugung konnte die Gültigkeit der in Kapitel 2 beschriebenen Theorie überprüft werden.

### 3.3.1 Konvergente Flächenänderung

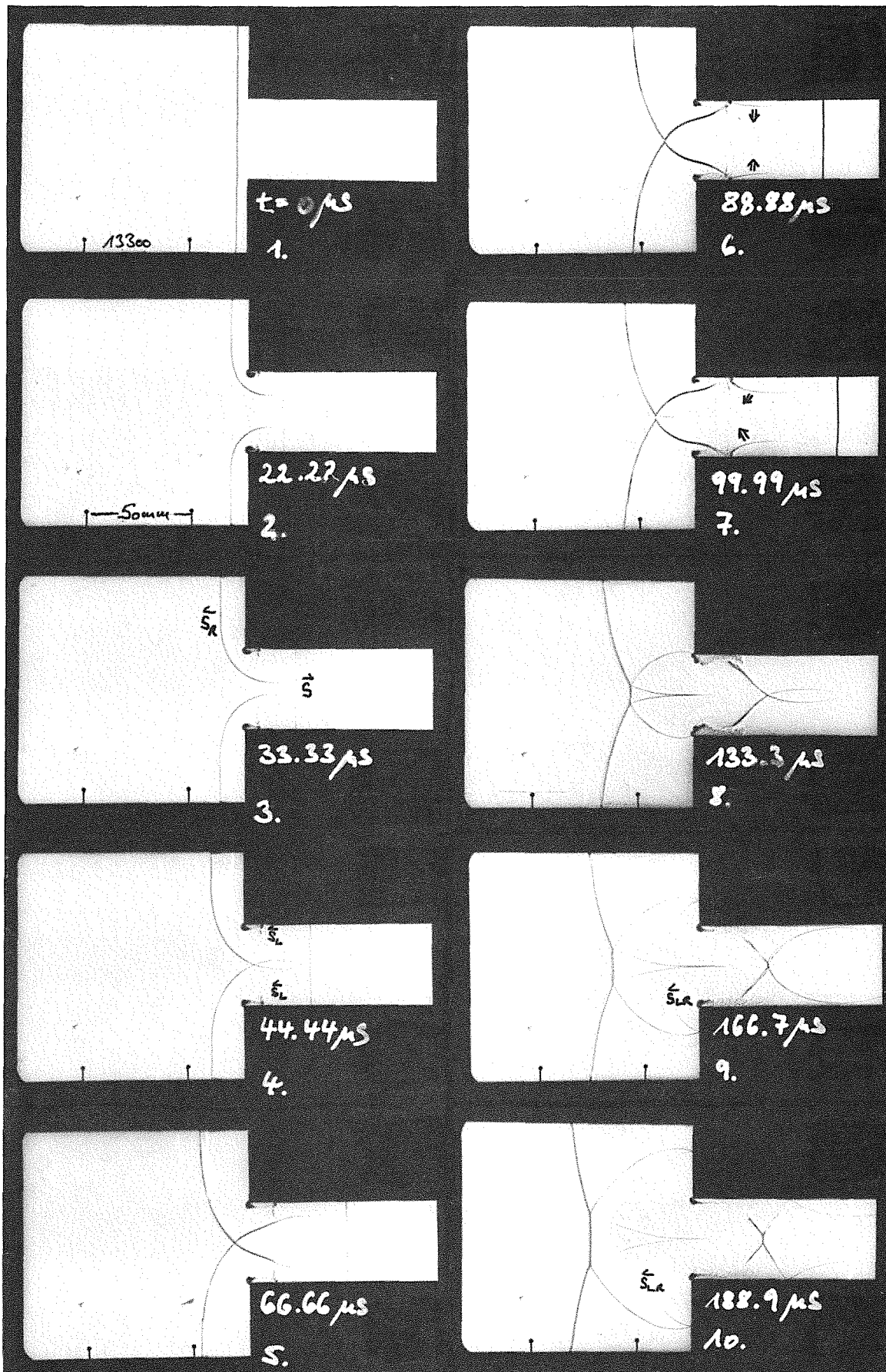
#### *Unstetige Verengung*

Bild 3.8 zeigt die Stoßwellenbeugung an einer unstetigen Verengung mit dem Flächenverhältnis  $A_{23} = 2.84$  und der Eingangsstoßstärke  $M_s = 1.93$  (entspricht einer Stoßstärke  $z = 4.2$ ) /36/. Die zeitlichen Abstände zwischen den Fotos sind in den Bildern eingetragen. Der Stoß  $\tilde{S}$  wird teilweise an den senkrechten Wänden reflektiert und zum Teil läuft er als

ebene, beschleunigte Stoßwelle in den verengten Kanal (Bild 3.8,2–5). Bei der Stoßwellenbeugung über die Flächenänderung hinweg kommt es zur Ausbildung von Kantenwirbeln. Hinter den Wirbeln baut sich stromab ein sogenanntes "Totwassergebiet" auf und es entsteht eine turbulente Grenzschicht. Löst sich die Strömung von der Wand ab, kommt es stromab zur Ausbildung eines Gebietes, in dem Wirbel entstehen, die eine teilweise Rückströmung bewirken. Die dazu erforderliche Energie wird dem vorbeiströmenden Gas entnommen, dessen Gesamtenergie sich somit verringert. Die Wirbel verengen hier den freien Querschnitt auf ein Verhältnis  $A'_{23} \approx 3.4$ ; dabei wird die Nachlaufströmung auf Überschall beschleunigt. Aus den Bildern 3.8,5–7 kann der beschleunigte Stoß  $\check{S}$  auf der Mittelachse ausgemessen werden. Der Abstand zwischen den Markierungen beträgt 50 mm, die Zeit  $\Delta t_{\text{Bild } 5 \rightarrow 7} = 33 \mu\text{s}$  und die Ruheschallgeschwindigkeit dieser Versuchsreihe beträgt  $c_1 = 345.7 \text{ m/s}$ . In Bild 3.8, 2 und 3 ist die Stoßwelle auf der Mittelachse noch nicht beschleunigt, sie besitzt noch ihre Eingangsstoßstärke. Erst die gebeugten Stoßwellen, mit einem Pfeil ( $\uparrow$ ) gekennzeichnet (Bild 3.8, 4), beschleunigen den Stoß  $\check{S}$ . Die Stoßmachzahl des durchgehenden Stoßes beträgt  $M_S = 2.1$  ( $z = 5.0$ ), was einer Überschallnachlaufströmung von  $M_3 = 1.02$  im verengten Querschnitt entspricht. Die gebeugte Stoßwelle ( $\uparrow$ ) trifft in Bild 3.8 auf die gegenüberliegende Kanalwand und wird reflektiert. Es kommt zur Wechselwirkung zwischen Stoß und Wirbel, wobei der gebeugte Stoß stark verzerrt und lokal (im Wirbel) aufgelöst wird. Um den Wirbel bilden sich konzentrische Verdünnungs- und Verdichtungswellen (Bild 3.8,8), aus denen sich ein lokaler Stoß  $\check{S}_{LR}$  aufbaut, der über die vertikalen Flanken im erweiterten Kanal in Richtung Wand und dann an der Kanalwand entlang stromauf läuft (Bild 3.8,8–10).

Hinter den Wirbeln entstehen ebenfalls lokale Stöße  $\check{S}_L$ , die lokale Überschallgebiete begrenzen (Bild 3.8,2–7). Diese Stöße breiten sich zur Rohrmitte hin aus und bilden den Sekundärstoß  $\check{S}_{II}$ .

Die gebeugten und reflektierten Stöße ( $\uparrow$ ) (Bild 3.8,6) steilen sich stromab hinter den Wirbeln auf (Bild 3.8,5–7) und laufen stromaufwärts. Dabei verschmelzen sie mit dem Sekundärstoß  $\check{S}_{II}$ , und dieser wird ortsfest. Während die gebeugten reflektierten Stöße ( $\uparrow$ ) anfangs die Rückseite (stromab) der Wirbel begrenzen (Bild 3.8,6,7), breitet sich später die turbulente Grenzschicht zwischen ihnen und der Wand aus. Der Sekundärstoß  $\check{S}_{II}$  hat vertikal die Ausdehnung des restlichen freien Strömungsquerschnitts  $A'_{23}$  (Bild 3.8, 10). Mit zunehmender Zeit verschmelzen die in Bild 3.8,10 noch schrägen Stöße zu einem ebenen senkrechten Stoß  $\check{S}_{II}$ . Der hier entstehende Stoß  $\check{S}_{II}$  ist kein reiner Sekundärstoß. Er entsteht aus den gebeugten ( $\uparrow \downarrow$ ) und den lokalen Stößen  $\check{S}_L$ , wobei die gebeugten Stöße den größeren Anteil zur Entstehung des Stoßes  $\check{S}_{II}$  beitragen. Der Sekundärstoß  $\check{S}_{II}$  entsteht nur aus der Strömung heraus.



**Bild 3.8:** Stoßbeugung an einer un stetigen Verengung; Auftreten eines Sekundärstoßes  $\hat{S}_{II}$  im verengten Kanal (Eingangsstoßstärke  $M_S = 1.93$ ,  $z = 4.2$ , Flächenverhältnis  $A_{23} = 2.84$ ,  $c_1 = 345.7$  m/s).

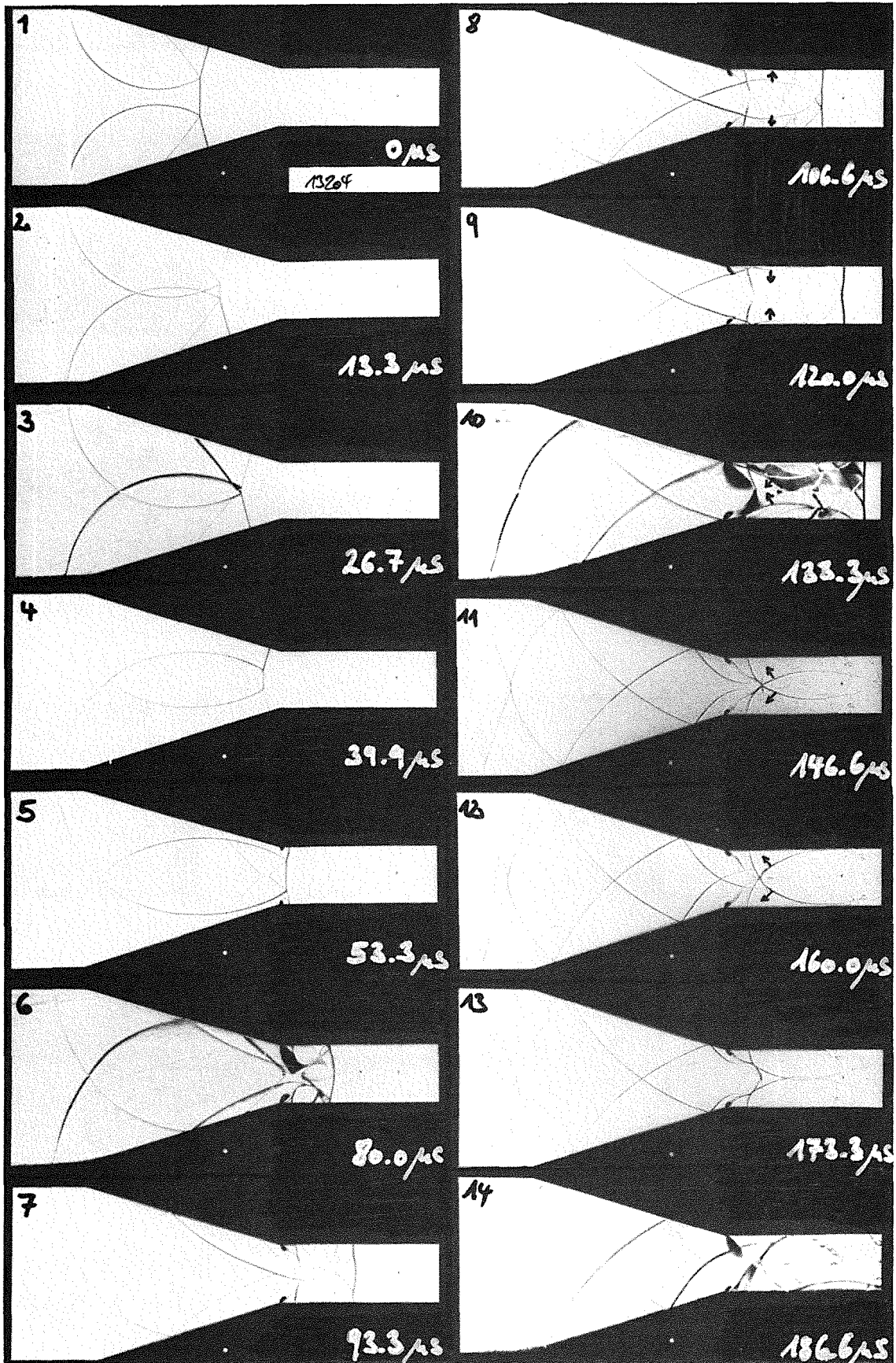


Bild 3.9: Stoßbeugung an einer stetigen Verengung, Düse; Auftreten eines Sekundärstoßes ( $M_s = 1.93$ ,  $z = 4.2$ ,  $A_{23} = 3.00$ ,  $c_1 = 343.9$  m/s)

Die lokalen Stöße dehnen sich hier fast bis zur Kanalmitte aus. Die Stoßmachzahl  $M_S = 2.1$  im verengten Kanal entspricht einer Überschallnachlaufströmung von  $M_2 = u_2/c_2 \approx 1.02$ . Diese Aufnahmeserie markiert für das gegebene Flächenverhältnis  $A_{23}$  einen Grenzpunkt zwischen Überschall- (Auftreten eines Sekundärstoßes) und Unterschallströmung im verengten Querschnitt. Der Punkt ist später in einem Diagramm markiert. Die Einschnürung durch die abgelöste Grenzschicht führt zu einem kleineren freien Strömungsquerschnitt  $A'_{23} < A_{23}$ . Dieser Effekt wurde in der Theorie durch Einführen einer Kontraktionszahl  $\alpha$  berücksichtigt (Kapitel 2.1).

Der stromauflaufende, reflektierte Stoß  $\xi_R$  bildet einen Machstoß, symmetrisch zur Kanalmittelachse, aus (Bild 3.8,8 – 10). Der Stoß  $\xi_R$  kann in kurzer Entfernung vor und nach der Flächenänderung als eben betrachtet werden.

### Stetige Verengung

Eine stetige Verengung, in der im verengten Kanal in der Nachlaufströmung Überschall und somit ein Sekundärstoß  $\xi_{II}$  auftritt, ist in Bild 3.9 dargestellt /36/. Die Eingangsstoßstärke beträgt  $M_S = 1.93$ , das Flächenverhältnis  $A_{23} = 3.0$  bei einem gesamten Öffnungswinkel von  $35^\circ$ . Die Zeitdifferenz zwischen den Fotos ist im Bild 3.9 eingetragen, die Schallgeschwindigkeit ist  $c_1 = 343.9$  m/s.

Nach Beschleunigung des einfallenden Stoßes in der Düse unter Bildung einer Machreflexion löst sich die Kontaktfläche  $\tilde{C}$  in der Kanalmitte in zwei Teile auf (ab Bild 3.9,4). Die Strömung mit der Geschwindigkeit  $u_4$  hinter dem Machstoß transportiert die Teilchen parallel zur Schräge. Dabei löst sich die Kontaktfläche  $\tilde{C}$  dort auf, wo Teilchen aus verschiedenen Richtungen aufeinandertreffen, sie werden jeweils oben und unten parallel zur Wand transportiert. Diese Erscheinungen treten nur bei völliger Modellsymmetrie auf.

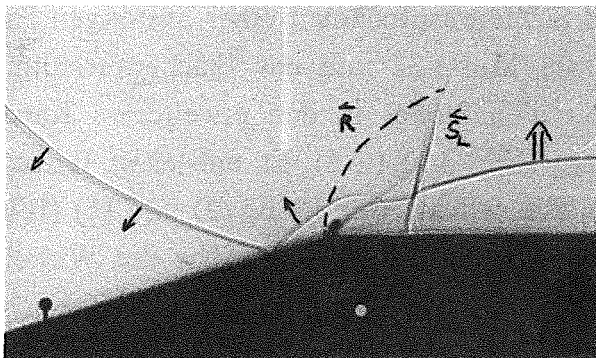


Bild 3.10: Ausbildung eines lokalen Stoßes in einer Düse ( $M_S = 1.89$ ,  $z = 4.05$ )

Ab Bild 3.9,5 bilden sich kleine Wirbel am scharfkantigen Übergang in den verengten Kanal, die wesentlich kleiner sind als bei der un stetigen Verengung. Rundet man diese Kanten ab, so treten geringere Verluste auf, was zu einer höheren Beschleunigung des durchgehenden Stoßes führt /13,37/. An der Vorderseite (stromauf) des Wirbels bildet sich eine Expansionswelle  $\check{R}$ , deren Kopf an der Kante stehen bleibt. Da sich der Kopf einer Expansionswelle mit Schallgeschwindigkeit  $c$  ausbreitet, bedeutet dies, daß die Nachlaufströmung  $u$  hier Schallgeschwindigkeit  $c$  erreicht (Bild 3.10).

Über die Expansionswelle  $\check{R}$  wird die Nachlaufströmung weiter beschleunigt. Es entsteht ein lokales Überschallgebiet, das durch einen lokalen schrägen Stoß stromab begrenzt wird. Bei entsprechender Eingangsstoßmachzahl  $M_s$  und Flächenverhältnis  $A_{23}$  wachsen die beiden lokalen Stöße auf der Kanalmittelachse zusammen und bilden einen Sekundärstoß  $\check{S}_{II}$  (Bild 3.9,9 – 11). Erreicht die Nachlaufströmung nicht im gesamten verengten Kanal Überschall, so bleiben die Stöße lokal und stehen ortsfest in der Nähe der Kante. Ein Teil des reflektierten Stoßes  $\check{S}_R$  wird im verengten Kanal an den Wänden erneut reflektiert (Bild 3.9,5 – 9); der stromauf gerichtete Teil verschmilzt mit dem Sekundärstoß  $\check{S}_{II}$  (Bild 3.9,10 – 14). Der stromauf laufende, reflektierte Stoß  $\check{S}_R$  im erweiterten Kanal ist schwächer als bei einer un stetigen Verengung (Bild 3.8), er benötigt mehr Zeit, bis er als eben betrachtet werden kann. Bei dem reflektierten Stoß  $\check{S}_R$  kommt es zur Verschmelzung zweier Stöße (Bild 3.9,11 – 14). Durch die Wirbelbildung verbleibt auch hier ein freier Strömungsquerschnitt von  $A'_{23} \approx 3.75$  bei gegebenen Versuchsdaten. Zuerst wachsen die lokalen Stöße  $\check{S}_L$  auf der Kanalmitte zusammen, bevor die reflektierten, gebeugten Stöße ( $\uparrow \downarrow$ ) mit dem entstandenen Sekundärstoß  $\check{S}_{II}$  in Wechselwirkung treten.

### 3.3.2 Divergente Flächenänderung

#### *Unstetige Erweiterung*

Bild 3.11 zeigt eine Serie von Schatten – und Schlierenaufnahmen einer un stetigen Erweiterung. Dabei beträgt die Eingangsstoßmachzahl  $M_s = 1.32$  und das Flächenverhältnis  $A_{23} = 1/2.84$  /36/. Nach der Beugung des einfallenden Stoßes in den erweiterten Kanal kommt es an den Kanten zur Grenzschichtablösung (Bild 3.11,1 – 5). Es entstehen Wirbel, die stromab treiben und eine Wirbelstraße bilden. Die reflektierten Stöße ( $\downarrow$ ) und ( $\uparrow$ ) (Bild 3.11,6) sind nicht an der Bildung des Sekundärstoßes  $\check{S}_{II}$  (Bild 3.11,7 auf Höhe der Wirbel) beteiligt, sondern der Sekundärstoß  $\check{S}_{II}$  entsteht allein aus der Strömung heraus. Die Nachlaufströmung wird durch die bei der Beugung entstehende, stromauf laufende Expansionswelle  $\check{R}$  beschleunigt. In Bild 3.11,1 – 3 ist sie gestrichelt eingezeichnet. Der Kopf läuft mit



Schallgeschwindigkeit  $c_3$  stromauf und die Gasteilchen werden kontinuierlich beschleunigt, solange das Ende der Expansionswelle nicht erreicht ist. Endet die Beschleunigung der Teilchen im Überschall, bildet sich aus der Strömung heraus ein Verdichtungsstoß. Dieser Sekundärstoß  $\tilde{S}_{II}$  ist stets stromauf gerichtet, d.h. die Teilchen strömen hier von links nach rechts über den Stoß  $\tilde{S}_{II}$ , wobei sie von Überschall auf Unterschall verzögert werden. Der Stoß  $\tilde{S}_{II}$  wird hier aber von der Strömung stromab mitgeführt. Ist das Ende der Expansionswelle  $\tilde{R}$  noch nicht erreicht, nimmt die Stoßstärke von  $\tilde{S}_{II}$  zu. Bei dem hier gezeigten Flächenverhältnis wird das Ende der Erweiterung der Expansionswelle  $\tilde{R}$  über die reflektierten Stöße ( $\uparrow$ ) und ( $\downarrow$ ) mitgeteilt. Teile der Stöße ( $\uparrow$ ) und ( $\downarrow$ ) verschmelzen mit dem aus der Strömung entstandenen Sekundärstoß  $\tilde{S}_{II}$ . Der Stoß  $\tilde{S}_{II}$  hat eine vertikale Ausdehnung, die dem ursprünglich verengten Kanal entspricht. Nur auf diesem Querschnitt können Teilchen beschleunigt werden. Die durch Grenzschichtablösung entstandene Wirbelstraße (Bild 3.11,7) verhindert die Ausbreitung der Strömung in dem erweiterten Kanal, es entsteht ein "Totwassergebiet". Im erweiterten Kanal stellt sich eine stark turbulente Strömung ein.

### *Stetige Erweiterung*

Bild 3.12 zeigt die Entstehung eines Sekundärstoßes in einem Diffusor mit dem Flächenverhältnis  $A_{23} = 1/2.0 / 36/$ . Die einfallende Stoßwelle  $\tilde{S}$  ( $M_s = 1.38$ ) wird bei Eintritt in den Diffusor gebeugt, wobei eine Expansionswelle  $\tilde{R}$  stromauf läuft, die die Nachlaufströmung beschleunigt (Bild 3.12,1 – 5), der Kopf der Expansionswelle ist gestrichelt eingezeichnet. An den Eintrittskanten des Diffusors entstehen kleine Wirbel durch Ablösen der Grenzschicht. Hinter den Wirbeln entstehen lokale Überschallgebiete, die stromab durch einen lokalen Stoß begrenzt sind. Die Gebiete mit Überschallströmung wachsen mit zunehmender Zeit  $t$  zur Rohrmitte hin, womit auch die Ausdehnung der lokalen Stöße zur Mitte hin wächst (Bild 3.12,6 – 10), dabei nimmt die Stoßstärke zu. Ab Bild 3.12,7 ist das Ablösen der Grenzschicht hinter den Wirbeln sichtbar, es entsteht ein turbulentes Strömungsgebiet, das mit wachsender Zeit  $t$  den erweiterten Querschnitt  $A_3$  ausfüllt.

Trifft der primäre Stoß  $\tilde{S}$  auf den erweiterten Kanal am Ende des Diffusors, so tritt Machreflexion auf und eine reflektierte Welle  $\tilde{S}_R$  läuft stromauf (Bild 3.12,4 – 10). Die reflektierte Stoßwelle tritt in Wechselwirkung mit den bis zur Mitte angewachsenen, lokalen Stößen. Nun ist der entstehende Sekundärstoß  $\tilde{S}_{II}$  kein ebener Stoß, wie bei der un stetigen Erweiterung (Bild 3.11,8 – 10), sondern er besteht aus zwei Dreistoßkonfigurationen, aus zwei stationär durchströmten Machstößen, die zur Rohrmittelachse symmetrisch sind (Bild 3.12,15 – 20). Verschmilzt der reflektierte Stoß  $\tilde{S}_R$  mit den lokalen Stößen (Bild 3.12,12), wird der Sekundärstoß  $\tilde{S}_{II}$  in der Strömung ortsfest (ab Bild 3.12,14).

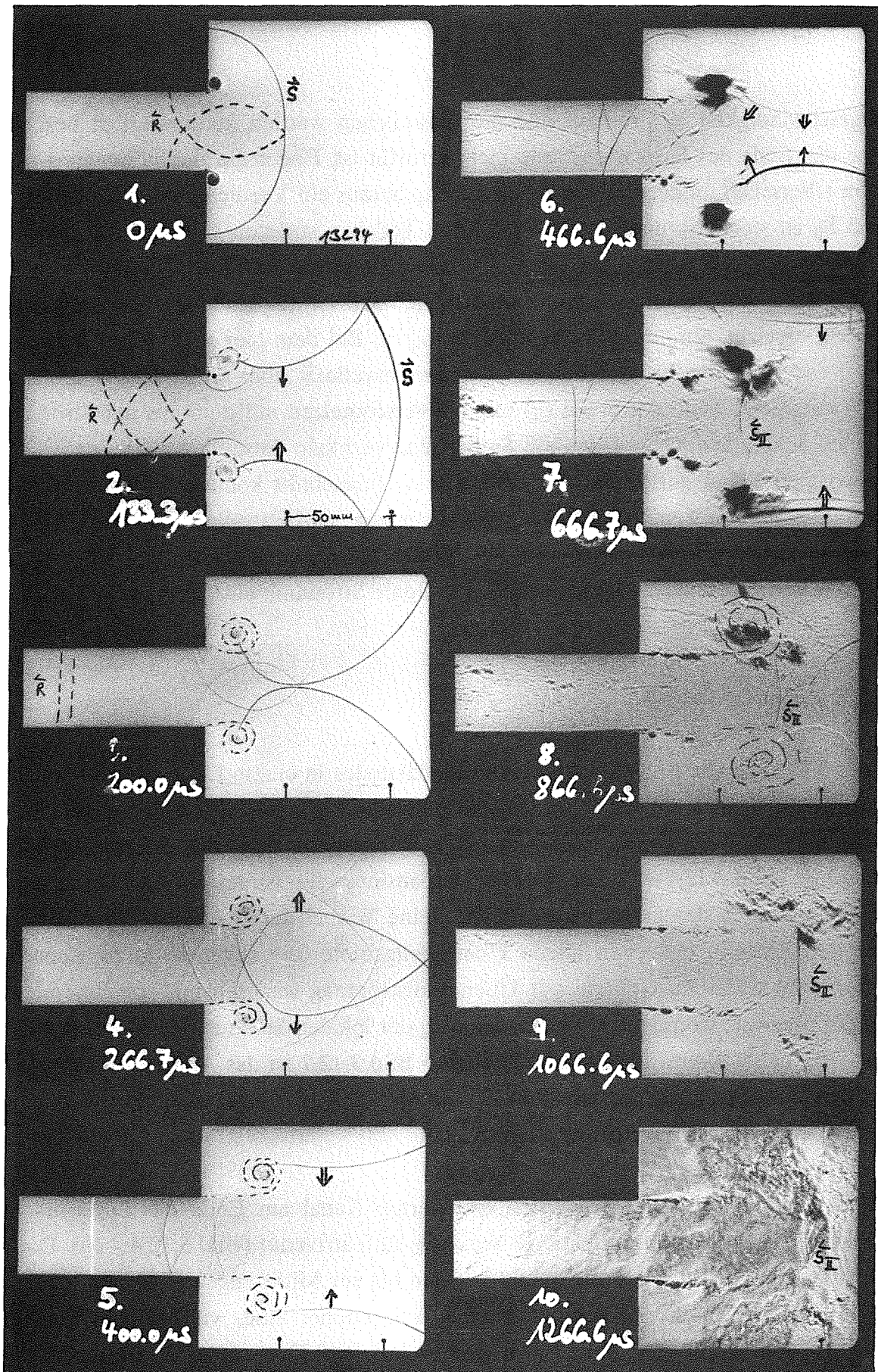


Bild 3.11:

Stoßbeugung an einer unstetigen Erweiterung; Auftreten eines Sekundärstoßes ( $M_s = 1.32$ ,  $z = 1.88$ ,  $A_{23} = 1/2.84$ ,  $c_1 = 345.8$  m/s)



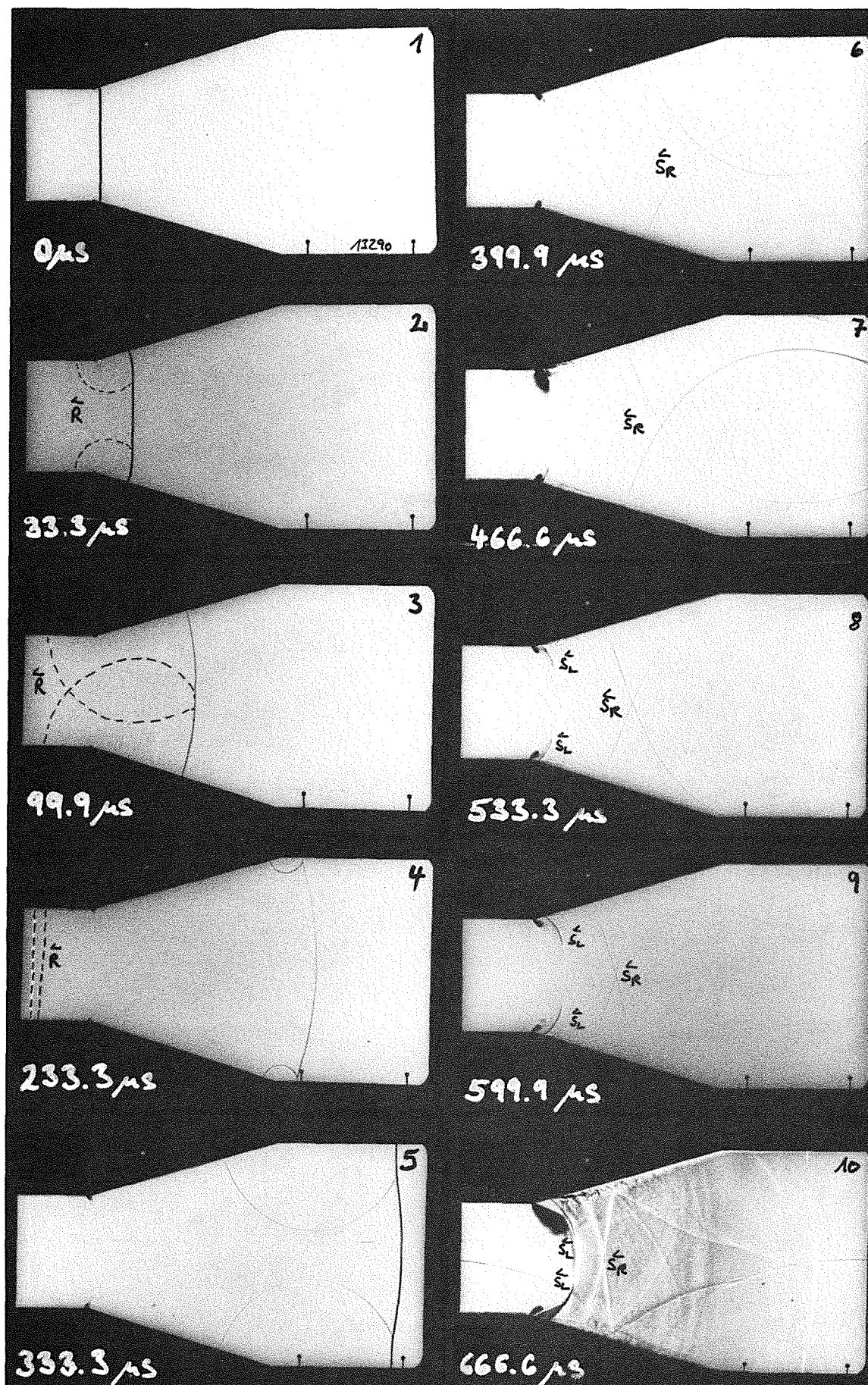
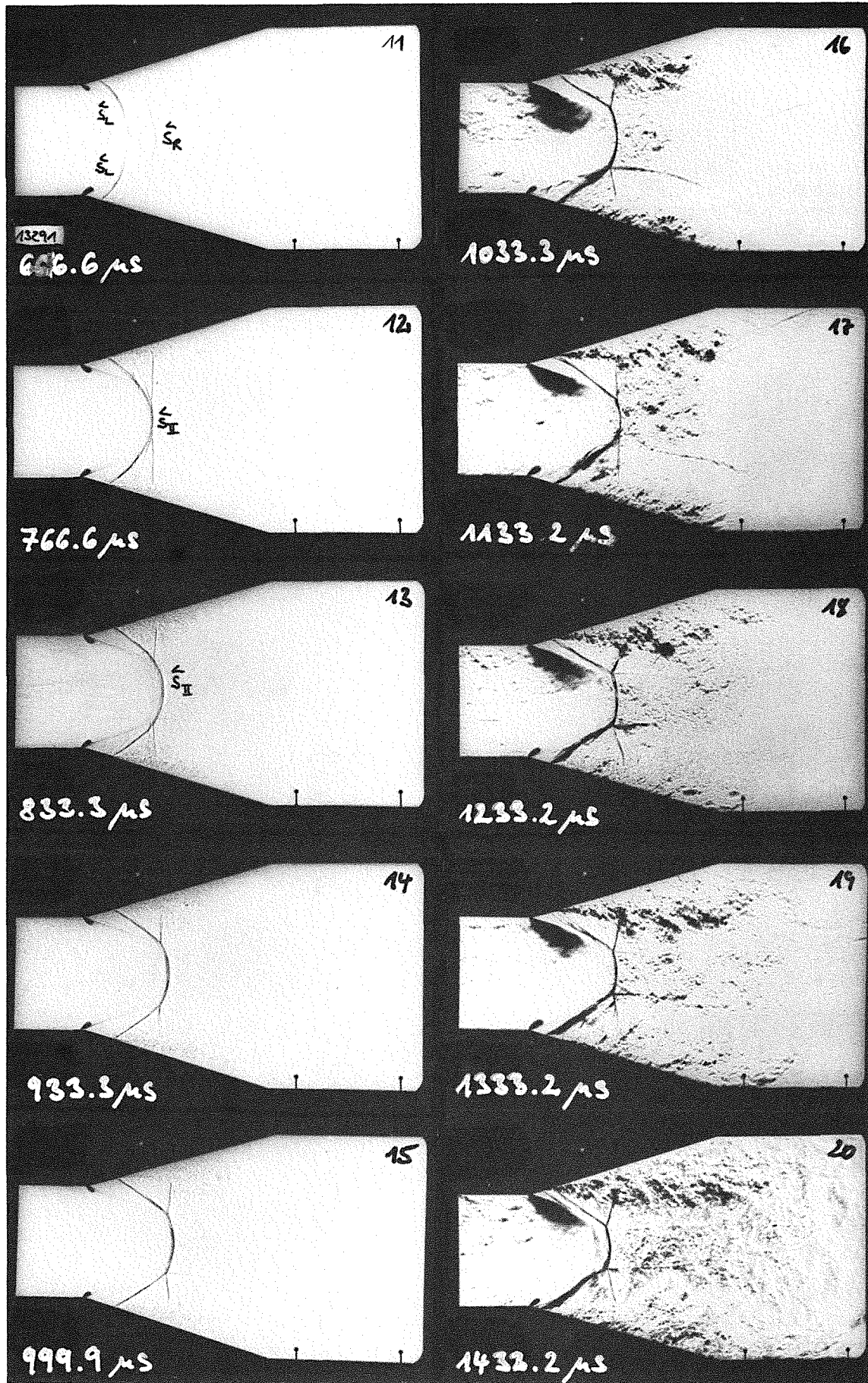


Bild 3.12: Stoßbeugung an einer stetigen Erweiterung; Auftreten eines Sekundärstoßes ( $M_s = 1.38$ ,  $z = 2.06$ ,  $A_{23} = 1/2.0$ ,  $c_1 = 345.6$  m/s)



Fortsetzung Bild 3.12: ( $M_s = 1.38$ ,  $z = 1.95$ ,  $A_{23} = 1/2.0$ ,  $c_1 = 345.6$  m/s)

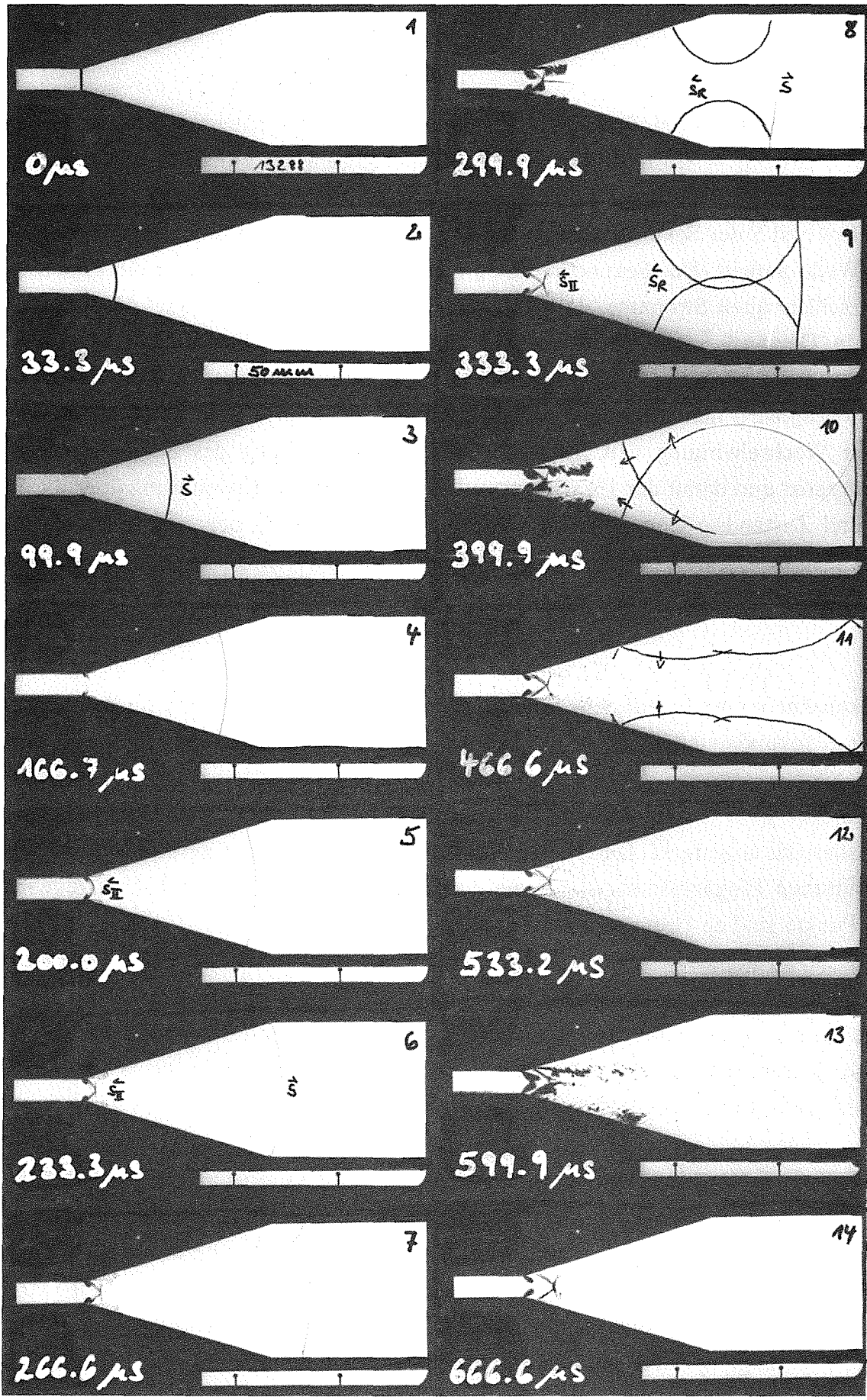


Bild 3.13: Stoßbeugung an einer stetigen Erweiterung; Auftreten eines Sekundärstoßes ( $M_s = 1.35$ ,  $z = 1.95$ ,  $A_{23} = 1/6.14$ ,  $c_1 = 345.6 \text{ m/s}$ )



Um die gegenseitige Beeinflussung dieser Stöße besser abzuschätzen, wurde ein größeres Flächenverhältnis  $A_{23} = 1/6.14$  untersucht. Die Stoßmachzahl des einfallenden Stoßes  $\tilde{S}$  betrug dabei  $M_s = 1.35$  (Bild 3.13). Nach der Beugung des Stoßes im Diffusor entsteht in den Bildern 3.13,4 und 5 der Sekundärstoß  $\tilde{S}_{II}$  aus den anfangs lokalen Stößen, ohne daß eine reflektierte Welle auftritt. Der Sekundärstoß  $\tilde{S}_{II}$  entsteht allein aus der durch die Expansionswelle  $\tilde{R}$  beschleunigten Strömung, dabei kommt es zeitgleich zur Strömungsablösung hinter den Wirbeln. Der Stoß  $\tilde{S}_{II}$  nimmt die zur Rohrachse symmetrische Dreistoßkonfiguration an, ohne daß der durchgehende Stoß  $\tilde{S}$  das Ende der Erweiterung erreicht hat (Bild 3.13,6). Der Sekundärstoß  $\tilde{S}_{II}$  wird nun stromab mitgeführt, bis der reflektierte Stoß  $\tilde{S}_R$  (Bild 3.13,10,11) mit ihm in Wechselwirkung tritt. Dadurch wird die Ausbreitung des Sekundärstoßes  $\tilde{S}_{II}$  stromab begrenzt und damit der Expansionswelle  $\tilde{R}$  das Ende der Erweiterung über die Strömungs- und Zustandsgrößen mitgeteilt. Der reflektierte Stoß  $\tilde{S}_R$  begrenzt also die Stärke des Sekundärstoßes  $\tilde{S}_{II}$  und beeinflusst den Ort des Auftretens im Diffusor, trägt aber nicht zur Entstehung des Sekundärstoßes  $\tilde{S}_{II}$  bei.

### 3.3.3 Grenzkurven aus experimentellen und theoretischen Betrachtungen für das Auftreten eines Sekundärstoßes

In Bild 3.14 wird für die entwickelte Theorie (Kap. 2.1) über Flächenänderungen ein Gültigkeitsbereich abgesteckt. Die Theorie ohne Sekundärstoß liefert gute Ergebnisse bis zu einer bestimmten Eingangsstoßstärke  $z$ , die einem definierten Flächenverhältnis zugeordnet ist. Diese Punkte sind zu Grenzkurven zusammengefaßt.

Die modifizierten Grenzkurven berücksichtigen die Reibungseinflüsse und die Art der Flächenänderung, stetiger oder unstetiger Übergang. Je nach Grad der Dissipation verschieben sich die Kurven hin zu größeren Stoßstärken. Die zuvor beschriebenen Schattenaufnahmen sind zur Orientierung als Punkte im Bild 3.14 eingetragen.

Die Darstellung für die Grenzkurven ist so gewählt, daß Verengung und Erweiterung gemeinsam in einem Diagramm behandelt werden können. Die Eingangsstoßstärken  $z = 1.0$  bis 5.0 auf der Abszisse sind linear aufgetragen, was einer Berechnung der Stoßbeugung im Unterschall ( $z < 4.8$ ) entspricht. Für die Erweiterung ( $A_{23} < 1$ , im unteren Teil von Bild 3.14) eignete sich am besten ein linearer Maßstab für das Flächenverhältnis  $A_{23}$  auf der Ordinate. Für die Verengung wurde ein logarithmischer Maßstab benutzt.

Einem Flächenverhältnis  $A_{23} = 0$  entspricht eine Stoßwellenbeugung aus einem kleinen Loch (Eintrittsquerschnitt  $A_2 \rightarrow 0$ ) in einen vergleichbar unendlich großen Raum (Austritts-

querschnitt  $A_3 \rightarrow \infty$ ). Die reibungsfreie Berechnung (durchgezogene Linie) ergibt hier einen Grenzwert von  $z = 1.32$ , d.h. ab  $z > 1.32$  gilt die in Kapitel 2.1 aufgestellte Theorie ohne Sekundärstoß nicht mehr. Danach muß auf die Lösung der 15 Gleichungen zurückgegriffen werden.

Bei  $A_{23} = 1.0$  geht die Flächenänderung in das gerade Rohr über. Die entsprechende Stoßstärke  $z = 4.8$  ist gesondert markiert. Bei  $z > 4.8$  entsteht in einem geraden Rohr eine Überschallnachlaufströmung. An diesem Punkt  $A_{23} = 1$  und  $z \simeq 4.8$  gehen beide reibungsfrei behandelten Gleichungssysteme für Düse und Diffusor ineinander über. Da sich für Verengung und Erweiterung formal identische Gleichungssysteme ergaben (Kapitel 2.1), ist dies leicht einsehbar.

Im oberen Teil von Bild 3.14 ist die reibungsfreie Grenzkurve (durchgezogene Linie) für die Verengung bzw. Düse  $A_{23} > 1.0$  dargestellt. Mit zunehmender Verengung ist eine geringere Stoßstärke  $z$  zur Bildung eines Sekundärstoßes  $\hat{S}_{II}$  im engsten Querschnitt  $A_3$  notwendig. Aus der reibungsfreien Berechnung ergibt sich ein Grenzwert von  $z = 3.38$  bei einer Verengung mit  $A_3 \rightarrow 0$ , was einer totalen Reflexion an einer senkrechten Wand entspricht. Links von den Grenzkurven ist eine Berechnung ohne Sekundärstoß nach der reibungsfreien bzw. reibungsbehafteten Theorie möglich.

Berücksichtigt man die dissipativen Effekte, so verschieben sich die Grenzkurven hin zu höheren Eingangsstoßstärken  $z$  nach rechts, da die Verluste kompensiert werden müssen. Diese Kurven sind den schattenoptischen Versuchsserien entnommen. Gleichzeitig wurde die Theorie um Reibungskorrekturfaktoren in Form von Druckverlusten (Kapitel 2.1) erweitert. In der erweiterten Form ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten, wobei auch die geometrische Form der Flächenänderung berücksichtigt wird.

Bei der Düse sind zwei weitere Grenzkurven eingezeichnet. Die gestrichelte Kurve gilt für eine unstetige Verengung. Hier entstehen die größten Verluste durch Wirbelbildung an den Kanten des verengten Querschnitts  $A_3$  und Grenzschichtablösung. Die Kurve entspricht etwa einer in Bild 3.8 dargestellten Serie, der Punkt ( $z = 4.2$  und  $A_{23} = 2.84$  von Bild 3.8) ist im Diagramm eingetragen. Er stellt den Grenzfall der Entstehung eines Sekundärstoßes  $\hat{S}_{II}$  durch Zusammenwachsen der beiden lokalen Stöße auf der Kanalmitte dar. Zwischen dieser Kurve und der die reibungsfreie Strömung beschreibende Linie liegen die Grenzwerte für die stetige Verengung. Die Lage ist abhängig vom Flankenwinkel  $\beta$  und von der Form der Kanten (scharfkantig oder abgerundet /13/). Die strichpunktierte Linie gilt für einen Flankenwinkel  $\beta = 17,5^\circ$  und einen scharfkantigen Übergang. Das Kriterium für die Grenzkurven bei einer Verengung lautet  $M_3 = 1$  im verengten Kanal.

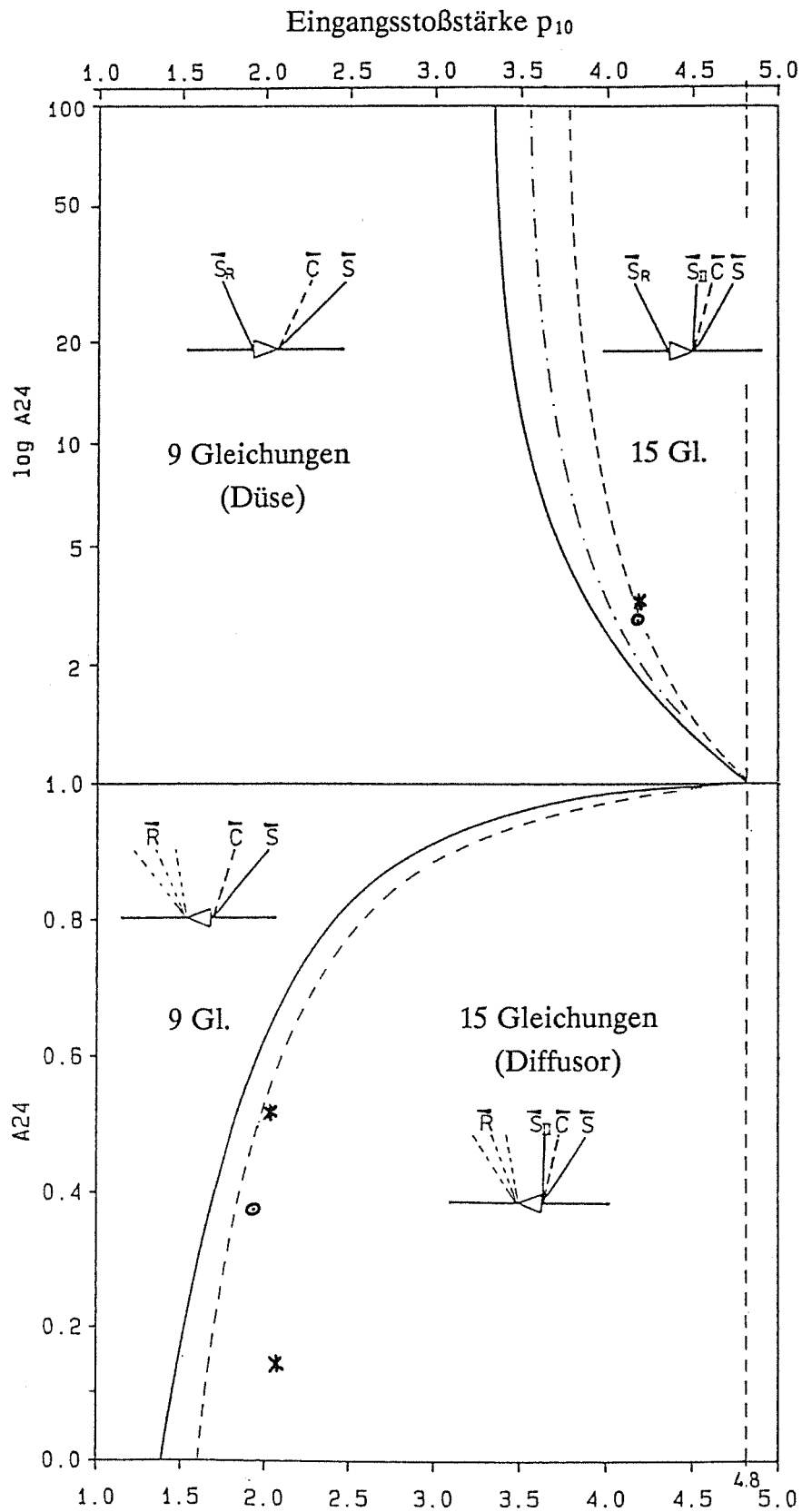


Bild 3.14:

Darstellung des Gültigkeitsbereiches für eine Berechnung ohne Sekundärstoß für Düse und Diffusor in Abhängigkeit von der Stoßstärke  $z$ .

Bei der Erweiterung im unteren Teil des Bildes ist neben der Linie für reibungsfreie Strömung nur eine Grenzkurve eingezeichnet. Sie gilt für stetige und unstetige Erweiterung gleichermaßen und berücksichtigt die Reibung. Wie aus den Schattenbildserien Bild 3.14 – 3.16 ersichtlich, kommt es in beiden Fällen zur turbulenten Grenzschichtablösung zwischen Sekundärstoß und Kanalwand. Der Reibungseinfluß auf die Berechnung eines Diffusors ist wesentlich geringer. Die Grenzkurven liegen so nahe beieinander, daß in guter Näherung reibungsfrei gerechnet werden kann. Das Kriterium zur Berechnung der Grenzkurve bei einer Erweiterung ist  $M_2 = 1$  im Eingangsquerschnitt  $A_2$ .

### 3.3.4 Verzweigte Kanäle

Zur Beschreibung der Rückwirkung einer Kanalverzweigung auf einen durchlaufenden, senkrechten Verdichtungsstoß sollen die dabei auftretenden Phänomene anhand der Bildfolge in Bild 3.15 qualitativ beschrieben werden. Darin ist die Stoßausbreitung durch einen  $90^\circ$ -Abzweig eines Rechteckkanals dargestellt [24]. Die Eingangsstoßstärke beträgt dabei  $z = 1.92$ .

Ein Rohrabzweig stellt für eine Stoßwelle immer eine unstetige Querschnittserweiterung dar und kann entsprechend theoretisch behandelt werden. Eine exakte mathematische Darstellung wird noch durch die Aufteilung des Stoßes und mehrere relativ komplizierte Reflexionen an der Rohrwandung erschwert. In Bild 3.15,1 erkennt man den einfallenden senkrechten Stoß, der sich aufgrund des gewählten Schattenverfahrens als schwarze Linie darstellt. Trifft nun der senkrechte Verdichtungsstoß auf die Abzweigungskante, wird er gebeugt, und eine Expansionswelle läuft stromauf in Richtung Treibrohr (Bild 3.15,2). Diese Expansionsfront stellt sich in der Schattenaufnahme als helle, gekrümmte Linie dar. Die Verdünnungswelle sorgt für eine Beschleunigung des Gases in Richtung Rohrabzweig. Gleichzeitig bildet sich an der Abzweigungskante ein Wirbel. Trifft der weiterlaufende Stoß auf die gegenüberliegende Kante, tritt, da die Stoßfront gekrümmt ist, schiefe Reflexion ein (Bild 3.15,3). Am Fußpunkt der durchlaufenden Wellenfront bildet sich eine Mach'sche Welle, deren Tripelpunkt nach oben wandert (Bild 3.15,4). Der Wirbel löst sich nun ab und wird durch die stromaufwärts gerichtete, reflektierte Stoßwelle abgeschwächt (Bild 3.15,5). Die Stoßfront im Durchgangskanal bewegt sich nach wenigen Durchmesser-Lauflänge (5 – 10) wieder senkrecht durch den Kanal. Im abgezweigten Kanalstück dauert dieser Vorgang erwartungsgemäß etwas länger, da diese Front stärker gebeugt wurde. Im letzten Bild (3.15,6) ist dann noch die Reflexion des Stoßes am Ende des Kanals zu erkennen.

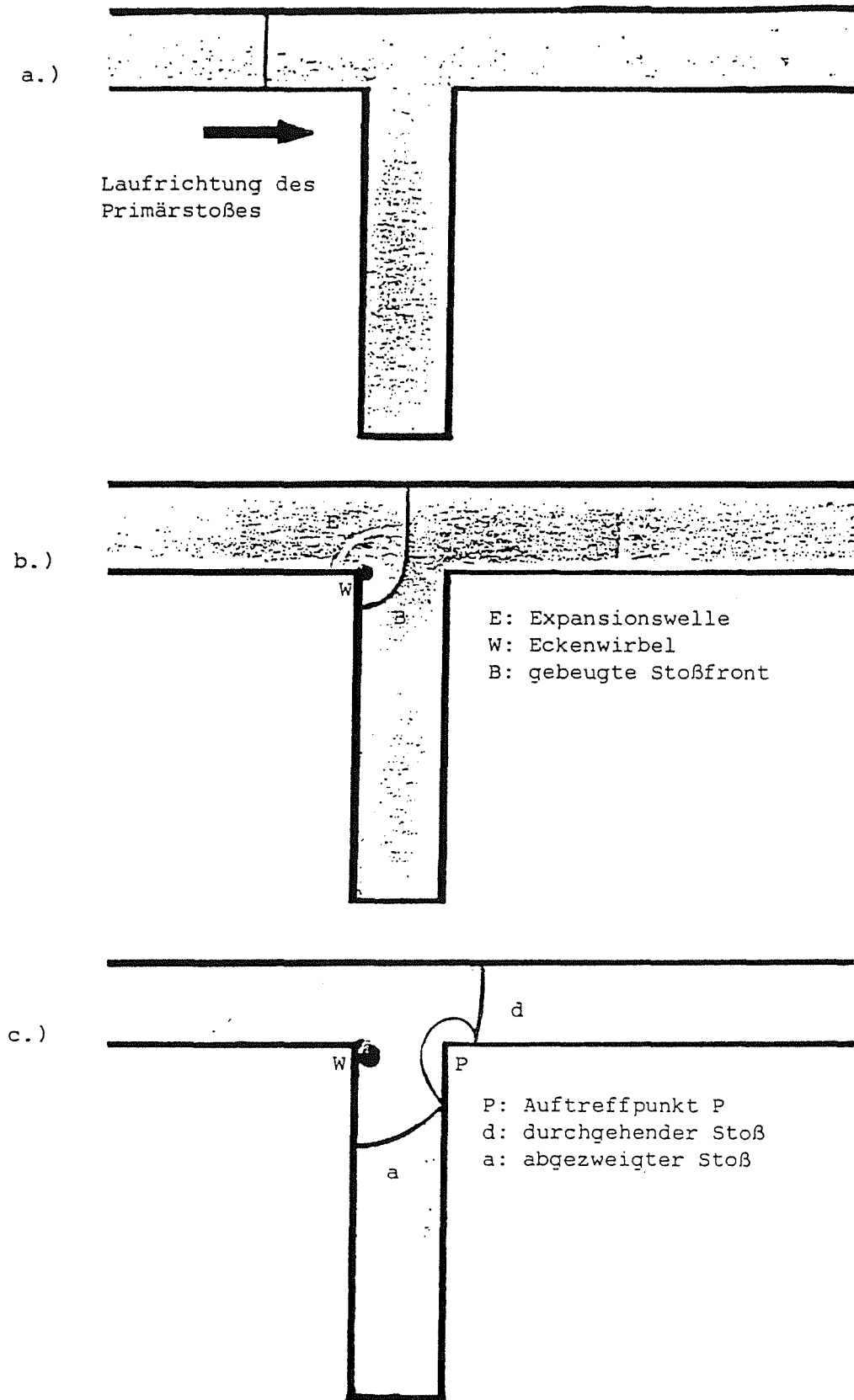


Bild 3.15:

Schattenaufnahme vom Verhalten einer Stoßwelle an einer Kanalabzweigung von  $90^\circ$ ,  $z = 1.92$



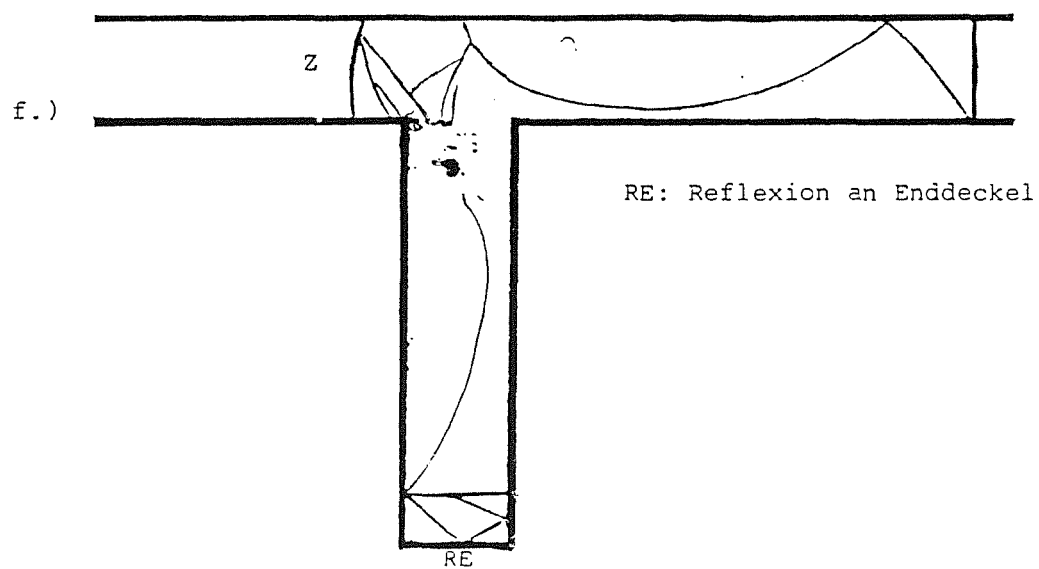
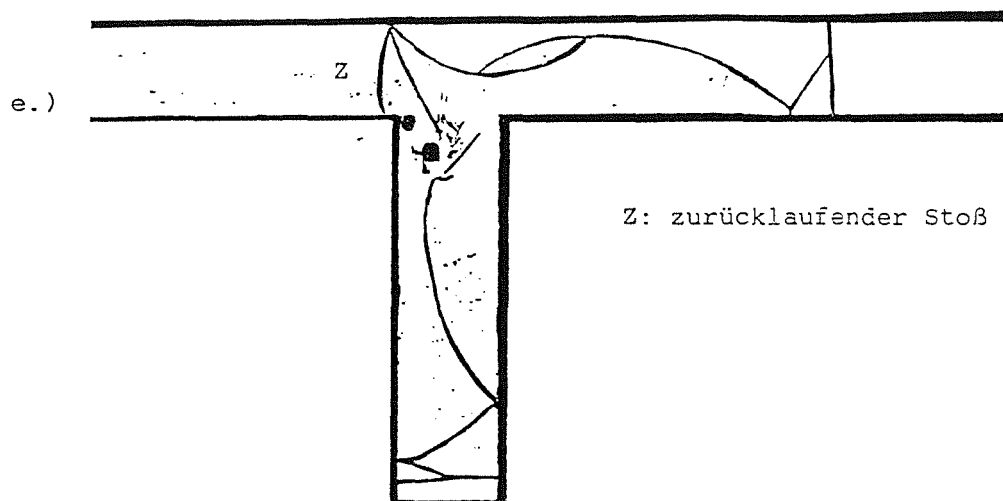
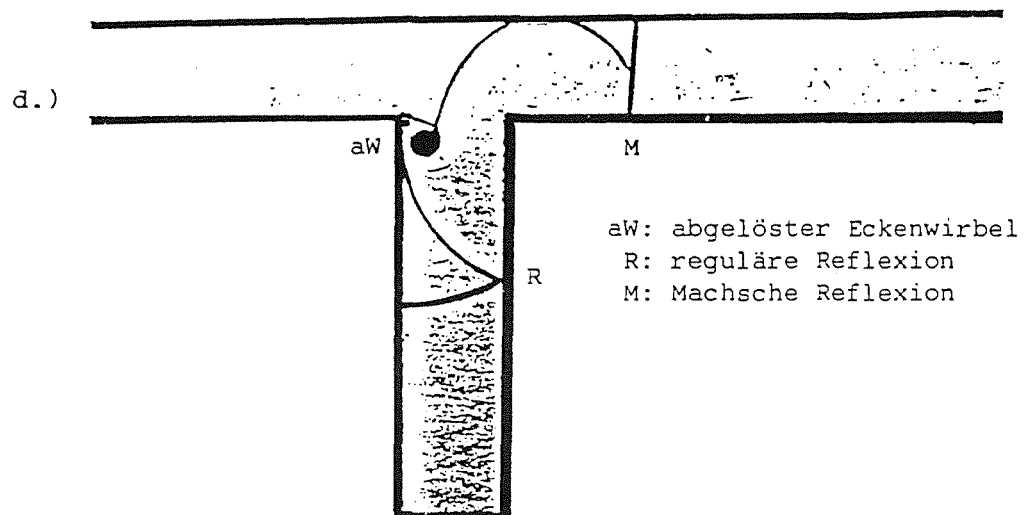


Bild 3.15, Fortsetzung

Der Vorgang des Stoßaufsteilens wird durch eine Reihe Mach'scher Reflexionen bewirkt, die an den sich gegenüberliegenden Wänden stattfinden. Die Aufsteilung läuft nach diesem Prozeß asymptotisch mit der Zeit ab; man kann jedoch näherungsweise den Stoß nach 5 – 10 Durchmessern nach dem Abzweig als senkrecht betrachten.

Durch den Vorgang der Mach – Reflexionen läßt sich erklären, warum die Aufsteilung des Stoßes bei kleinerem Rohrdurchmesser bei einer kleineren absoluten Lauflänge beendet wird. Entscheidend für den Aufsteilungsprozeß ist demnach die relative Lauflänge, also die Lauflänge bezogen auf den Rohrdurchmesser.

## 4. Bestimmung der Stoßstärke durch direkte Druckmessung

Die wichtigsten Größen zur Beschreibung der Intensität bzw. des Energieinhaltes eines Verdichtungsstoßes sind die Stoßstärke, also das Verhältnis des Druckes nach der Wellenfront zum Druck davor, sowie die Stoßmachzahl, die Geschwindigkeit der Stoßfront bezogen auf die Schallgeschwindigkeit des ruhenden Gases. Zum Vergleich mit den in Kapitel 2 beschriebenen Theorien wurde nur die Stoßstärke experimentell bestimmt, die Stoßmachzahl ließ sich daraus unmittelbar berechnen.

### 4.1 Aufbau des Stoßwellenrohres

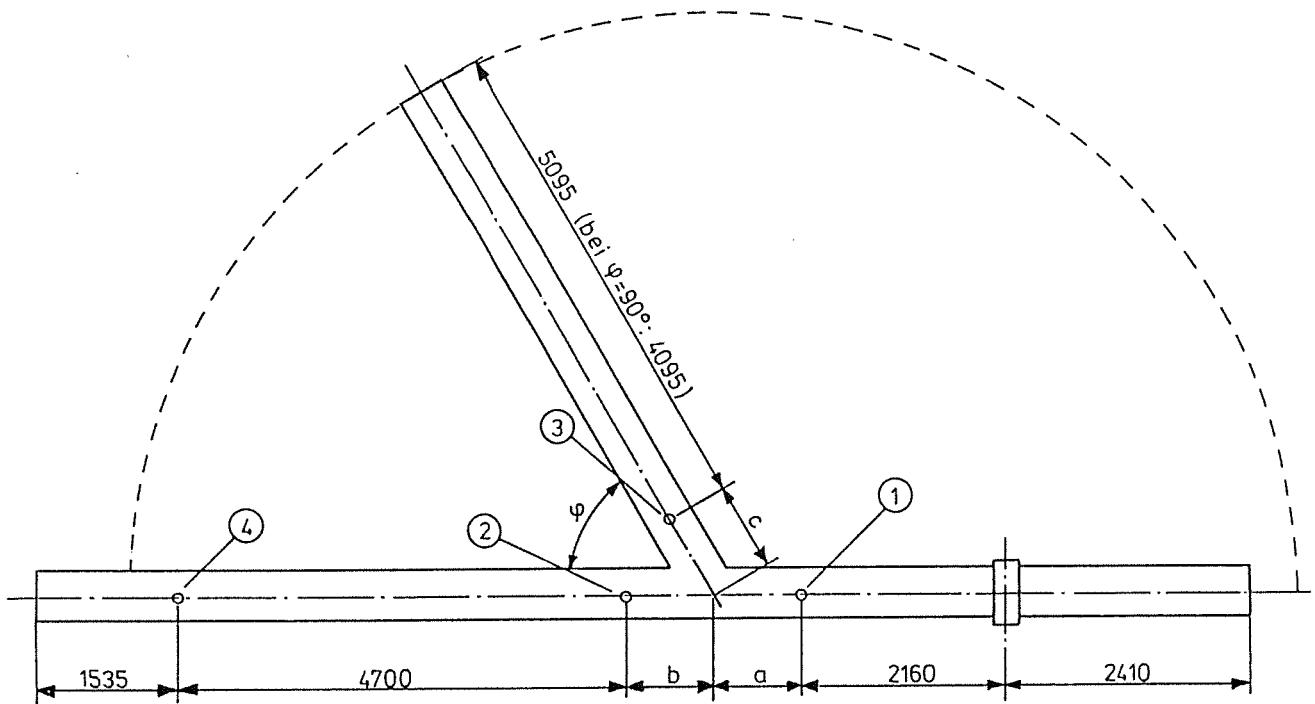
Zur Durchführung der Versuche wurde eine Stoßrohranlage im Laboratorium für Aerosolphysik und Filtertechnik des Kernforschungszentrums Karlsruhe aufgebaut.

Die Anlage zur Bestimmung der Drucksprünge bestand aus einem Treibrohr (Hochdruckteil) und einem Laufrohr (Niederdruckteil). Beide waren durch eine Kunststoffmembran in einer speziellen Halterung voneinander getrennt. Je nach der zu untersuchenden Geometrie (Abzweig, Düse, Diffusor jeweils quadratischer oder runder Kanal) wurde das Laufrohr entsprechend modifiziert. Das Treibrohr und der Membranhalter konnten für alle Versuche unverändert benutzt werden.

#### 4.1.1 Verzweigungen

Die Anlage zur Bestimmung der Stoßaufteilung setzte sich aus einem durchgehenden Kanal (bestehend aus Treibrohr und Laufrohr) mit einer Gesamtlänge von ca. 13 m und einem abzweigenden Rohr von 6 m Länge zusammen. Der Innendurchmesser aller Rohre betrug 76 mm, die Wandstärke wurde mit 2 mm angegeben. Die Rohre waren innen und außen grundiert, aber nicht sehr glatt. Manche Rohrwandungen zeigten Rauigkeitswerte bis zu 1 mm.

Die Modelle, mit denen die Stoßdämpfung in runden Kanälen untersucht wurde, hatten ebenfalls einen Durchmesser von 76 mm. Die verwendeten Abzweigwinkel waren 30, 45, 60 und 90°. Um auch Winkel von 120, 135 und 150° untersuchen zu können, wurden die Abzweige umgedreht. Die Druckaufnehmer wurden jeweils 760 mm vor der Verzweigung bzw. nach der Verzweigung im Durchgangs- bzw. Abzweigrohr angebracht (Bild 4.1).



**Bild 4.1:** Schematische Darstellung der Anlagengeometrie

Die quadratischen Modelle hatten eine Kantenlänge von 64 mm bei einer Wandstärke von 2 mm. Untersucht wurde jeweils ein  $30^\circ$  – ,  $60^\circ$  – ,  $90^\circ$  – , bzw.  $120^\circ$  – und  $150^\circ$  – Winkel. Dem Treibrohr und dem sich anschließenden runden Rohr mit dem Übergangstück folgte der erste Rechteckkanal. Diesem Kanal schloß sich der Abzweig an, der in 5 Winkeln variiert werden konnte. Nach dem Abzweig folgte in beiden Armen ein rechteckiger Kanal mit anschließendem Übergang auf runden Querschnitt. Zu den Kanalenden hin hatte die Stoßrohranlage wieder einen runden Querschnitt. Die Druckaufnehmer wurden auch hier jeweils 760 mm von der Verzweigungsstelle entfernt angebracht. Durch die geringere Steifigkeit gegenüber der runden Rohrkonstruktion war bei den Stoßversuchen mit einem erhöhten Schwingen der Anlage beim Durchlaufen der Schockwelle zu rechnen. Um bei den Aufzeichnungen Störeinflüsse zu vermeiden, wurde mittels mehrerer Maßnahmen die mechanische Dämpfung (Gummipuffer, Sandsäcke) der Anlage erhöht.

Die Reproduzierbarkeit der Versuche erwies sich als recht gut und die Abweichungen lagen unter 5%, dabei wurde die Differenz der größten und kleinsten mit einem Druckverhältnis erzielten Stoßstärke, bezogen auf die kleinste Stoßstärke, zugrundegelegt.

### 4.1.2 Querschnittsvariation

Bei der Untersuchung der Änderung der Stoßintensität in querschnittsvariierenden Kanälen konnte dieselbe Anlage benutzt werden.

Die Modelle (Düse/Diffusor) wurden aus handelsüblichen quadratischen Rohren mit jeweils 64, 45, 32 und 22 mm Kantenlänge hergestellt. Der eingeschweißte stetige Übergang hat einen Flankenwinkel von  $\beta = 50^\circ$ . Die Flanschverbindungen sind über O-Ringe abgedichtet und so gestaltet, daß sie als unstetige Verengungen oder Erweiterungen benutzt werden können. Die Abstände der benutzten Druckaufnehmer vor und hinter den Modellen betragen jeweils 550 mm. Die angegebenen Abstände gelten für alle drei benutzten Flächenänderungen  $A_{23} = 2.0$ , 4.0 bzw. 8.4 für eine Verengung als auch für eine Erweiterung  $A_{23} = 1/2.0$ , 1/4.0 bzw. 1/8.4.

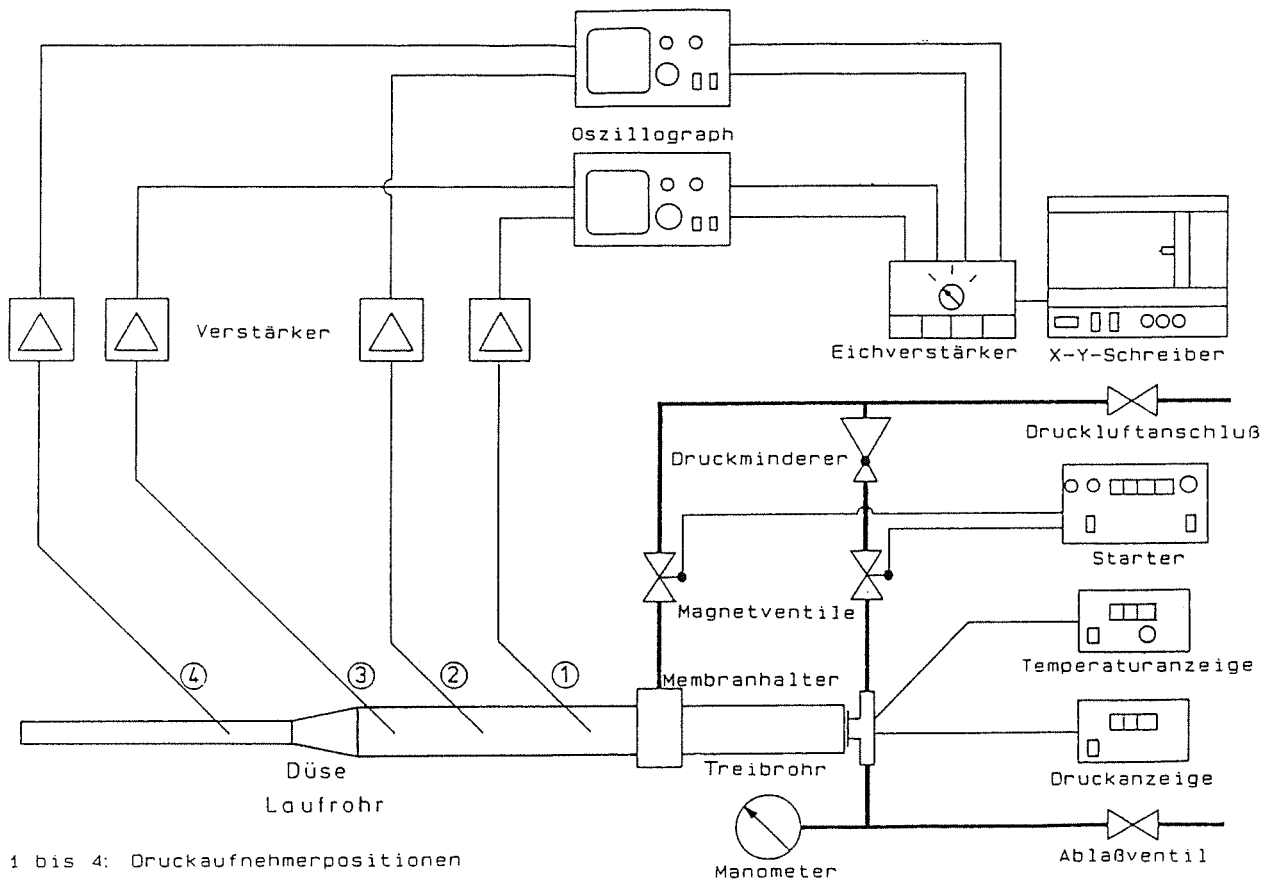
## 4.2 Beschreibung der Meßtechnik zur Bestimmung der Drucksprünge

Die Messung und Speicherung sehr schneller transients Vorgänge erfordert eine hochauflösende Registriereinrichtung. Dabei soll einerseits eine möglichst hohe zeitliche Auflösung gewährleistet sein, andererseits muß ein genügend großer Speicherplatz zur Verfügung stehen, um eine Stoßausbreitung im Versuchskanal ganz erfassen zu können. Da die beiden Forderungen konträr zueinander stehen, mußte ein Kompromiß eingegangen werden. Der Stoß sollte mindestens solange verfolgt werden können, bis die erste reflektierte Stoßwelle erkennbar würde. Die zeitliche Auflösung sollte dabei so groß sein, daß ein eventuelles Überschwingen des Druckaufnehmers als solches zu erkennen wäre.

Um eine möglichst gute Reproduzierbarkeit und exakte Ausgangsbedingungen für die Stoßausbreitung zu erreichen, war es notwendig, den Überdruck im Treibrohr sehr exakt und jederzeit nachvollziehbar einstellen zu können. Bei Überdrücken über 1 bar wurde ein Differenzdruckmanometer mit Rohrfeder und einem Ablesebereich von 0–6 bar benutzt. Die Ablesegenauigkeit betrug hier etwa  $\pm 2$  kPa. Bei niedrigen Differenzdrücken konnte auf ein digitales Absolutdruckmanometer umgeschaltet werden. Es hatte bei einem Meßbereich von 0 bis 2 bar absolut eine Genauigkeit von  $\pm 1$  Digit, was in etwa 100 Pa entspricht. Um die Temperatur im Rohr bestimmen zu können, wurde ein Pt–100–Thermoelement eingebracht.

Zur Aufnahme der schnellen Drucksprünge beim Durchlaufen der Stoßfront wurden piezoelektrische Druckaufnehmer (Fa. ENDEVCO, Heidelberg) mit einem Meßbereich von 15 psi ( $\equiv 105$  kPa) benutzt. An deren Spitze ist ein hauchdünnes Einkristall–Siliziumplätt–

chen angebracht. Bei Belastung entstehen auf dieser Membran dielektrische Verschiebungen, die proportional den daraus resultierenden freien Oberflächenspannungen sind. Die so entstandene Spannung wird über einen Wheatstone'schen Meßkreis verstärkt und kann als Maß für die Druckerhöhung angesehen werden. Um einen Differenzdruck zu messen, ist der Hohlraum hinter der Membran mit der Umgebung verbunden. Die Membran selbst ist durch ein Metallgitter gegen mechanische Einflüsse geschützt. Für alle Messungen wurden vier Druckaufnehmer des gleichen Typs verwendet.



**Bild 4.2:** Anlagenschema: Blockschaltbild der Meßtechnik und Druckluftanschlüsse bei einer Düsenmessung

Zur Messung und Registrierung wurden zwei digitale Speicheroszilloskope mit je zwei Kanälen benutzt. Die maximale Abtastrate beträgt bei diesen Geräten 10 MHz, die Speichertiefe je Kanal wird mit 1 Kbyte angegeben. Die Zeitbasis kann im Speicherbetrieb von 10  $\mu\text{s}/\text{cm}$  bis 50  $\text{ms}/\text{cm}$  gewählt werden, die Vertikalverstärkung erstreckte sich von 5  $\text{mV}/\text{cm}$  bis 20  $\text{V}/\text{cm}$ . Die Ausgabe der vier gespeicherten Signale erfolgte über einen Analogausgang auf einen X-Y-Schreiber. Zwischen Schreiber und Oszillograph wurde ein stufenlos regelbarer Kalibrierverstärker geschaltet. Außerdem wurden noch der Differenzdruck über der Membran und die Temperatur sowie der Umgebungsdruck mit aufs Blatt übernommen. Das

Blockschaltbild der gesamten Anlage ist in Bild 4.2 exemplarisch bei einer Düsenmessung dargestellt. Hierin stellen starke Linien Druckluftleitungen dar, dünne Linien repräsentieren elektrische Verbindungen. Bemerkte sei noch zum Schluß, daß alle Geräte über einen Netzfilter mit Spannung versorgt wurden, um eventuelle Störungen aus dem Netz zu unterdrücken.

### **4.3 Auswertung der Messungen und Beschreibung der auftretenden Phänomene**

#### **4.3.1 Vorausgehende Untersuchungen zur Bestimmung möglicher Meßfehler**

Außer den Messungen an verzweigten und querschnittsvariierenden Kanälen wurden noch einige ergänzende Untersuchungen und Überlegungen angestellt, um verschiedene Einflüsse auf die Stoßausbreitung besser verstehen zu können und die Genauigkeit der Versuchsergebnisse zu erfassen bzw. mögliche Meßfehler rechtzeitig zu erkennen.

Ein möglicher Meßfehler kann mit dem Einfluß der Grenzschicht auf die Druckstoßmessung genannt werden /47,48,49/. Die Stoßmachzahl und damit verbunden die Stoßstärke wird zwar durch den Grenzschichteinfluß verringert, ist jedoch über den Rohrquerschnitt nahezu konstant, da der Primärstoß eine Strömung bzw. eine Grenzschicht nach sich zieht und nicht mit ihr oder gegen sie läuft. Anders verhält sich ein Stoß, dem eine Strömung überlagert ist. Die Geschwindigkeitskomponenten in der Grenzschicht und hinter dem Stoß überlagern sich und können zu einer inhomogenen Geschwindigkeitsverteilung führen. Dies hat zur Folge, daß an der Innenseite der Rohre eine falsche Stoßstärke gemessen werden kann. Läuft der Stoß mit der Strömung, wird eine zu geringe Stoßstärke angezeigt. Bei einem reflektierten Stoß (der Stoß läuft gegen die Grenzschicht) mißt man eine zu große Stoßstärke /50,51/. Wie durch Experimente von Kneer /38/ jedoch gezeigt wurde, kann dieser Effekt bei sehr kleinen Stoßstärken ( $z < 2.0$ ) vernachlässigt werden. Für den Primärstoß bei den hier durchgeführten Versuchen gilt dieser Einfluß nicht, da der Stoß in ein ruhendes Gas läuft. Auch bei der reflektierten Stoßwelle wurde das Vorlaufen in Wandnähe nicht berücksichtigt, da diese Übergeschwindigkeiten keinen größeren Einfluß auf die Versuchsergebnisse zeigten /38/.

Ein weiterer wichtiger Punkt der Untersuchung war die Bestimmung der Homogenität des Stoßes in einer Ebene senkrecht zur Rohrachse. Dazu wurden drei Druckaufnehmer gleichmäßig über den Umfang verteilt. Die Abweichungen liegen im Bereich um 1%, erhöhen sich jedoch geringfügig ab Stoßstärken über 1.8. Die Meßpunkte bei den Dämpfungsversuchen lagen alle auf einer Linie, d.h. die Druckaufnehmer waren direkt oben am Rohr angebracht. Nimmt man an, daß der Stoß sich senkrecht zur Rohrachse nicht dreht, kann die

Messung der Stoßstärke in erster Näherung als repräsentativ für die gesamte Stoßfront angesehen werden. Die Inhomogenität des Stoßes über den Rohrquerschnitt basiert auf dem unregelmäßigen Platzen der Membran und pflanzt sich somit durch das ganze Rohr fort. Daher muß bei einer Messung nur gewährleistet werden, daß der Drucksprung immer an der gleichen Stelle des Rohrquerschnittes für den primären und verzweigten Stoß aufgenommen wird. Dies war bei den hier durchgeführten Experimenten, soweit dies möglich war, auch der Fall.

Um den Anstieg des Drucksprungs zu bestimmen, wurden zwei Druckaufnehmer direkt hinter die Membran gesetzt. Der erste Druckaufnehmer wurde 170 mm von der Membran entfernt eingeschraubt, der zweite in einem Abstand von 420 mm. Die Zeitbasis betrug dabei 0.1 msec. Bei einer Stoßstärke von  $z = 1.1$  dauerte es z.B. 0.9 msec, bis der Stoß seine größte Stärke erreicht hatte. Auch bei Meßstelle 2 konnte kein schnellerer Anstieg verzeichnet werden. Mit steigender Stoßstärke wurde der Anstieg immer steiler, auch wurde bei Meßstelle 2 früher der Maximaldruck erreicht. War zum Beispiel bei einem Überdruck im Treibrohr von 100 kPa bei Meßstelle 1 nur ein leichter Druckanstieg (Anstiegszeit 0.3 msec) zu erkennen, konnte bei Meßstelle 2 ein "Stoß" erkannt werden, also eine sprunghafte Druckänderung. Der erste Anstieg wurde nun mit steigender Stoßstärke  $z$  immer steiler, bis schließlich bei einem Membrandruckverhältnis von  $p_v = 4.3$  schon an Meßstelle 1 ein Stoß zu verzeichnen war. Es ist also gerade bei kleinen Stößen wichtig, einen genügend großen Abstand zur Membran einzuhalten, um eine richtige Messung garantieren zu können.

Um nun den Effekt des Überschwingens des Druckaufnehmers interpretieren zu können, wurden mehrere Versuche mit der höchsten zeitlichen Auflösung des Speicheroszillographen aufgenommen. So wurde bei einem Membrandruckverhältnis von  $p_v = 4.3$  die Zeitbasis von 10  $\mu$ sec bis 5 msec durchfahren. Dabei konnte bei 10  $\mu$ sec der Stoß nur als Schwingung mit einer Frequenz von etwa 150 kHz registriert werden. Das Wellental reicht dabei fast bis auf das Anfangsdruckniveau herunter. Wird nun der Versuch mit gleichem Vordruckverhältnis wiederholt und eine größere Zeitbasis gewählt, ist der Versuch für die ersten fünf bis sechs Schwingungen exakt reproduzierbar. Die Wellen stimmen in Amplitude wie in Wellenlänge überein. Mit zunehmender Zeitbasis erkennt man nun das Einschwingen auf ein bestimmtes Druckniveau. Die Schwingungsbreite nimmt dabei immer mehr ab, bis bei einer Zeitbasis von 5 msec nur noch ein kurzes Überschwingen und ein relativ glattes Druckplateau zu erkennen ist. Diese Versuche wurden mit einem Membrandruckverhältnis von  $p_v = 2.0$  wiederholt und ergaben qualitativ die gleichen Ergebnisse. Nur die Amplitude der Schwingungen war erheblich kleiner, die Frequenz lag bei etwa dem gleichen Wert wie bei  $p_v = 4.3$ .



Um das Nahfeld eines  $90^\circ$ -Abzweigs zu untersuchen, wurden drei Druckaufnehmer unmittelbar vor und nach dem Abzweig angebracht. Dabei wurde der erste Aufnehmer 150 mm von der Abzweigkante entfernt eingeschraubt. Die beiden anderen folgten mit jeweils 210 mm Abstand. Bei der Messung vor der Abzweigstelle sollte hauptsächlich die Expansionswelle der Kante beobachtet werden. Direkt vor dem Abzweig erkennt man nur noch einen schmalen Druckstoß, der ziemlich schnell von der Expansionswelle erfaßt wird. Mit steigender Entfernung vom Abzweig wird der Stoß immer breiter. Die Stärke der Expansionswelle nimmt ab, d.h. der Druckabfall wird immer geringer. Der Verlauf der Expansionswelle ist für alle Stoßstärken qualitativ gleich. Werden die Druckaufnehmer im gleichen Abstand nach dem Abzweig im Abzweigrohr eingebracht, erkennt man nur einen sehr langsamen Anstieg. Selbst bei großen Stoßstärken ist bei Meßstelle 1 kein senkrechter Anstieg zu erkennen. Der Stoß fällt dabei sogar sehr schnell wieder ab und bleibt bei einem viel niedrigeren Druckniveau als bei Meßstelle 3. Dort hat sich der Stoß aufgestellt und das Niveau hat die Höhe des anfänglichen Drucksprunges bei Meßstelle 1. Ein Abfallen des Druckes ist hier nicht mehr zu erkennen. Bei kleineren Stoßstärken ist diese Expansion nur noch schwach zu erkennen, bis sie ganz verschwindet. Die gleichen Untersuchungen wurden nun auch noch im Durchgangrohr durchgeführt. Der Stoß hat sich bereits bei Meßstelle 1 nahezu aufgestellt, und der Unterschied zu Meßstelle 3 ist nur gering. Selbst bei kleinen Stoßstärken verzögert sich der Anstieg nur wenig und ist spätestens bei Meßstelle 3 konstant. Der Stoß scheint also hier nahezu ungehindert durchgelaufen zu sein. Auch eine Expansionswelle wie bei dem Abzweigrohr ist nicht zu erkennen.

Die hier gemachten Ausführungen sollen das Verständnis für die Vorgänge in einem Stoßwellenrohr vertiefen und eine Reproduktion der durchgeführten Experimente erleichtern. Auch sollen weitere mögliche Fehlerquellen bei der Messung von Verdichtungswellen angesprochen werden, um eine hohe Meßgenauigkeit zu erreichen.

#### 4.3.2 Versuchsprotokoll, Bestimmung der experimentellen Stoßstärken

Die zeitlichen Verläufe des Druckes der vier Meßstellen wurden mit einem X-Y-Schreiber aufgezeichnet. In das Protokoll wurden neben dem Abzweigwinkel noch der Umgebungsdruck  $p_u$  (= Druck im Laufrohr vor dem Platzen der Membran bzw. Ruhedruck  $p_1$ ), der Überdruck im Treibrohr  $p_{ue}$  und die Umgebungstemperatur  $T_u$  eingetragen. Aus Umgebungsdruck und Überdruck berechnet sich dann das Druckverhältnis:

$$p_v = p_4/p_1 = (p_u + p_{ue})/p_u$$

Um eine einheitliche Darstellung zu gewährleisten und einen Vergleich der Protokolle untereinander zu erleichtern, wurden die Zeit- und Druckkoordinaten mit angegeben. Zu jedem Versuch wurden vier Protokolle angefertigt (ein Druckaufnehmer vor dem Abzweig, jeweils einer nach dem Abzweig im Durchgangs- und Abzweigrohr und einer im Fernfeld, bzw. jeweils drei Druckaufnehmer vor Düse und Diffusor und einer danach). Die Spannungssignale wurden dabei zeitgleich und druckmaßstäblich aufgezeichnet.

Die Bestimmung des Druckniveaus war schwierig, da es durch den enorm schnellen Druckanstieg im Rohr zu einem Überschwingen der Meßsignale des Druckaufnehmers kam. Bei einigen Versuchen (ca. 10%) ergaben sich leicht abfallende oder ansteigende Plateaus, oder es waren treppenförmige Verläufe zu erkennen.

Um diesen unterschiedlichen Phänomenen Rechnung zu tragen, mußte eine bestimmte Systematik beim Ausmessen des Druckniveaus zugrunde gelegt werden. Das Überschwingen am Anfang des ersten Plateaus wurde grundsätzlich nicht berücksichtigt. Auch eventuelle Einbrüche kurz nach dem Spannungs-Peak wurden nicht mit in die Druckerhöhung einbezogen. Bei ansteigenden oder abfallenden Plateaus wurden die beiden Eckpunkte bestimmt und eine Mittelwertbildung vorgenommen. Bei den treppenförmigen Verläufen wurde auf die Breite der einzelnen Stufen geachtet. War ein Druckniveau länger als 75% des Zeitraumes bis zum Eintreffen der Expansionswelle des Abzweiges konstant, wurde dieser Wert übernommen. Bei anderen Druckverläufen wurde eine Flächenmittelung über die Treppenfunktion vorgenommen. Dabei wurden jeweils der unterste und oberste Wert als Grenzwert benutzt und dazwischen die Flächen der einzelnen Stufen (Druckamplitude x Breite der Stufe in msec) ausgemittelt.

Doch bei mehr als 90% der Versuche waren die Plateaus deutlich zu erkennen und gut auswertbar. Als Drucksprung wurde schließlich die Differenz zwischen der nach obigen Methoden bestimmten Höhe des Plateaus und dem Druck an der Meßstelle vor Einlaufen der Stoßwelle genommen. Dieser Druck konnte geringfügig um  $\Delta p'$  vom Umgebungsdruck  $p_u$  abweichen. Als Ruhedruck wurde also der tatsächlich vor dem Stoß im Laufrohr herrschende Druck  $p_L$  angenommen und auch so die Druckerhöhung bestimmt. Die Stoßstärke  $z$  berechnete sich dann aus:

$$z = \frac{p_L + \Delta p}{p_L},$$

mit  $p_L = p_u + \Delta p'$ .

$\Delta p'$  lag bei wenigen hundert Pascal, so daß sich dieser Effekt erst bei sehr kleinen Stoßstärken bemerkbar machte. Durch den Leckvolumenstrom aus dem Membranhalter und einer fehlenden Verbindung mit der Umgebung während des Versuchs (Anlage geschlossen) konnte dieses Phänomen leicht erklärt werden.

### *Reproduzierbarkeit*

Bedingt durch das unterschiedliche Reißen der Membran konnte selbst bei exakt gleichem Differenzdruck über die Membran nicht die gleiche Anfangsstoßstärke bei Meßstelle 1 erreicht werden. So war der spätere Druckverlauf immer gewissen Streuungen unterworfen. Als Ausgangszustand für spätere Berechnungen wurde deshalb immer der tatsächliche Druckverlauf benutzt.

Zur Bewertung der Reproduzierbarkeit der einzelnen Versuche wurde die prozentuale Abweichung des größten mit einem bestimmten Druckverhältnis erreichten Stoßdifferenzdrucks

$$\left[ \Delta p_z = p_u (z - 1) \right]$$

bei Meßstelle 1 zum kleinsten in Abhängigkeit von der minimalen Stoßstärke aufgetragen. Mit zunehmender Stoßstärke, also größer werdendem Druckverhältnis über die Membran, wird die Reproduzierbarkeit immer besser. Die Abweichung liegt bei Stoßstärken über 1,2 i.a. unter 5%. Würde man die Stoßstärke anstelle der Druckerhöhung als Basis nehmen, läge dieser Wert noch eine Größenordnung darunter. Man kann also die Reproduzierbarkeit der einzelnen Versuche untereinander als sehr gut (bei den runden Rohren) bis gut (bei den quadratischen Rohren) bezeichnen. Dies bestätigt die Annahme, daß der Stoß sehr sauber und definiert durch das Rohr läuft und keinen allzu großen Störungen oder zufälligen Schwankungen unterworfen war. Die Messungen können somit als recht zuverlässig eingestuft werden.

### 4.3.3 Druckverläufe im Stoßrohr

An dieser Stelle sei versucht, die vier bei jedem Experiment aufgenommenen Druckverläufe kurz zu erklären, um eine Übersicht über die relativ komplizierten Wechselwirkungen zwischen durchlaufender und reflektierter oder gebeugter Stoßwelle bzw. Expansionswelle zu geben. Mit zunehmender Meßdauer überlagern sich die gasdynamischen Effekte immer mehr

und eine Deutung der einzelnen Vorgänge wird immer schwieriger. Deswegen soll nur der Zeitraum der ersten 50 msec nach dem Primärstoß berücksichtigt werden.

### *Querschnittsvariierende Kanäle*

Nachfolgend soll das reale Verhalten eines Stoßes in einem Diffusor und einer Düse anhand des zeitlichen Druckverlaufs beschrieben werden. Dabei wurde jeweils mit Druckaufnehmer 1 der Druck vor der Flächenänderung, mit Druckaufnehmer 2 der nach der Flächenänderung aufgenommen.

#### – Stoßverhalten im Diffusor –

In den Bildern 4.3a und b sind die charakteristischen Druckverläufe eines Verdichtungsstoßes vor und nach Durchlaufen eines Diffusors dargestellt. Der Verdichtungsstoß ist als sprunghafter Druckanstieg mit anschließendem Druckplateau zu erkennen. Die Dauer dieser Druckerhöhung ist abhängig von der Laufzeit der Expansionswelle, die von der Flächenerweiterung zur Stelle 3 zurückläuft, und beträgt in diesem Fall ca. 4,2 ms. Die vom Diffusor ausgehende und in den Kanal zurücklaufende Expansionswelle sorgt daraufhin für eine Druckabsenkung in der Meßebene des Druckaufnehmers 3. Dabei ist die Stärke abhängig vom Grad der Flächenerweiterung. Nach ca. 8 ms sorgt die am Ende des Treibrohres reflektierte Expansionswelle des Membranhalters für eine weitere Absenkung unter den Umgebungsdruck. Der Druckverlauf an Meßstelle 4 (Bild 4.3b) ist durch einen geringeren Überdruck gekennzeichnet, da sich der Stoß beim Durchlaufen des Diffusors abgeschwächt hat. Die am Treibrohrende reflektierte Expansionswelle des Membranhalters wird durch den Diffusor ebenfalls abgeschwächt und sorgt anschließend für ein weniger schnelles Absinken des Drucks an Stelle 4. Ca. 18 ms nach Passieren des Stoßes trifft der am Ende des großen Kanals teilreflektierte Stoß wieder an Meßstelle 4 ein. Dies ist an der darauffolgenden Druckabsenkung durch die ebenfalls reflektierte Expansionswelle erkennbar.

#### – Stoßverhalten in der Düse –

Bild 4.4a stellt den Druckverlauf an der Stelle 3 vor der Düse mit Flächenverhältnis  $A_2/A_1 = 0.5$  dar. Der sprunghafte Druckanstieg ist gut ausgebildet. Nach etwa 4 ms wird an dieser Meßstelle eine weitere Druckerhöhung registriert.

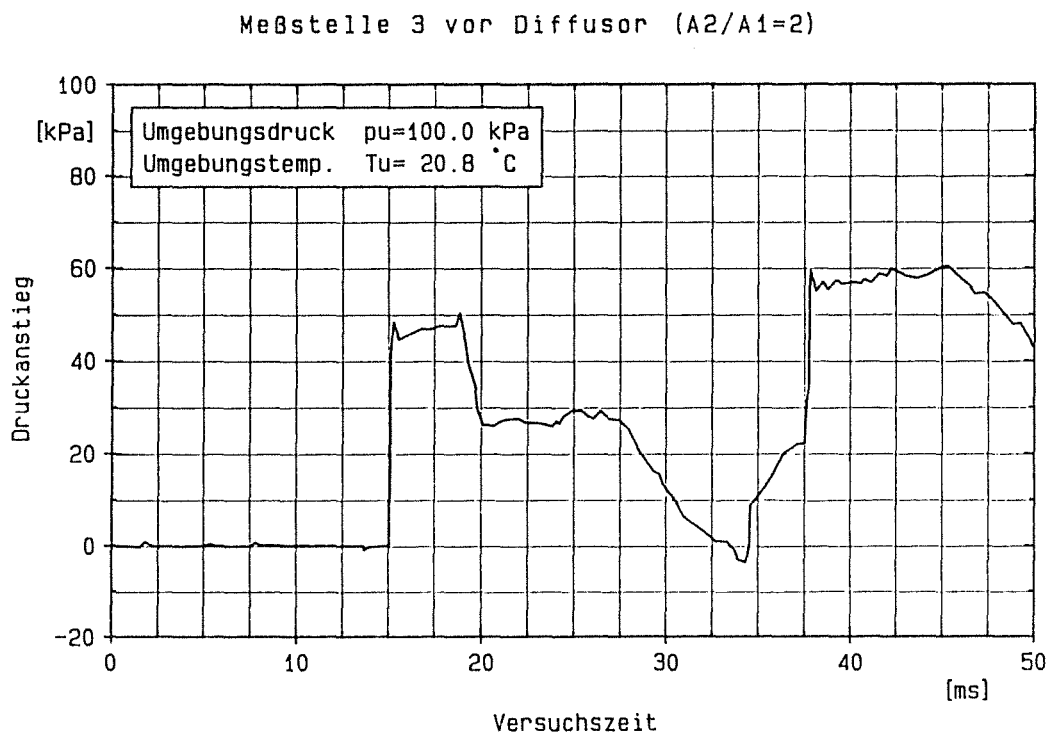


Bild 4.3a: Druckverlauf vor dem Diffusor (an Meßstelle 3)

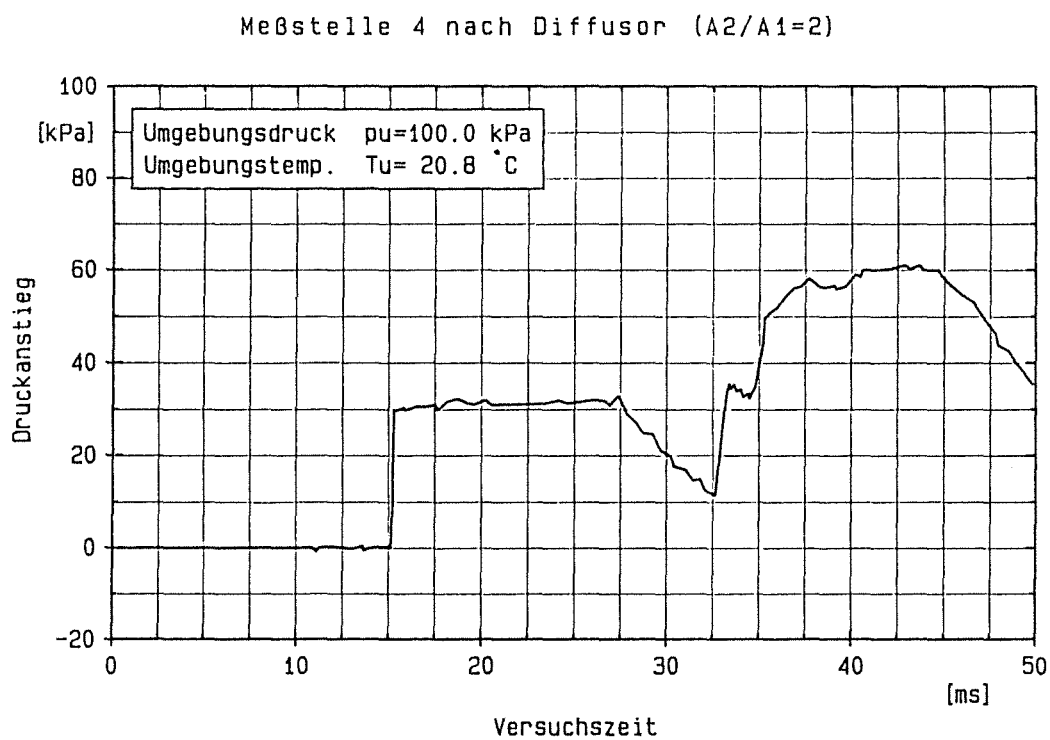


Bild 4.3b: Druckverlauf nach dem Diffusor (an Meßstelle 4)

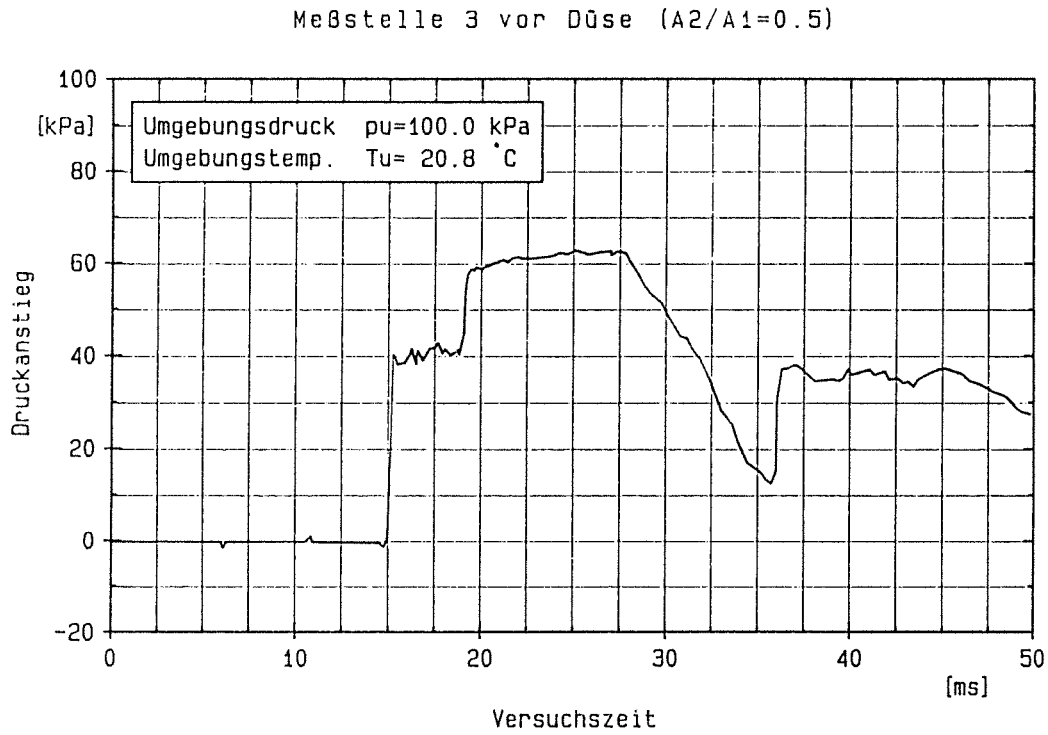


Bild 4.4a: Druckverlauf vor der Düse (an Meßstelle 3)

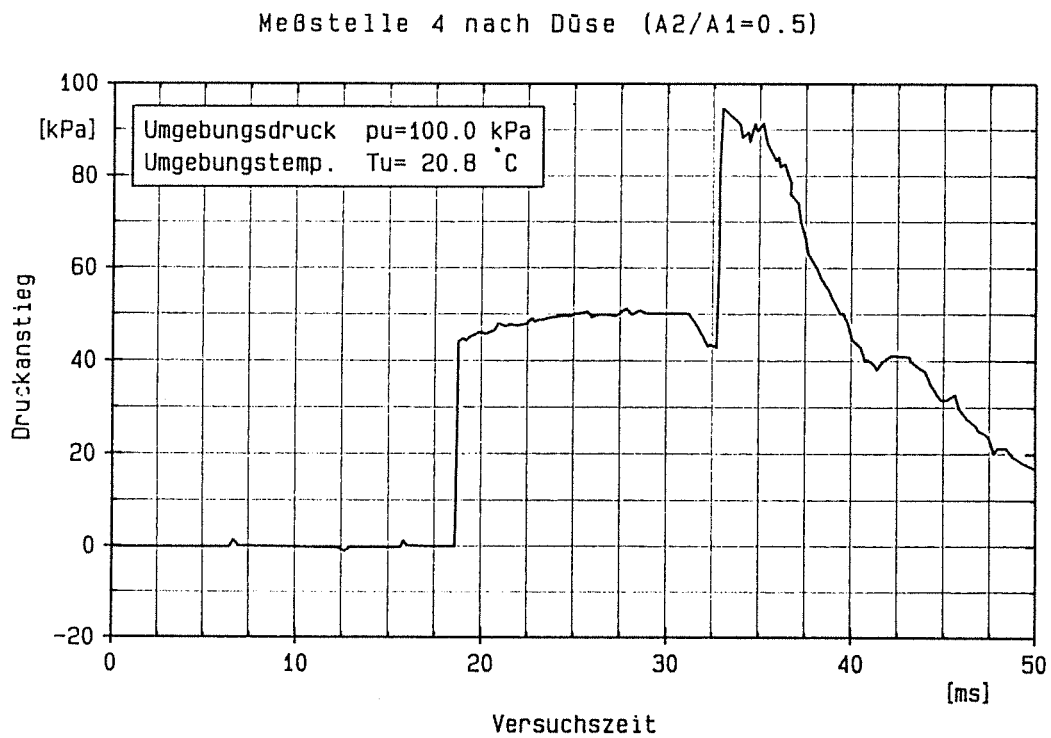


Bild 4.4b: Druckverlauf nach der Düse (an Meßstelle 4)

Diese resultiert aus dem am Eintritt zum konvergenten Kanal entstandenen reflektierten Stoß, der stromauf läuft und die Strömung vor der Düse verzögert. Das Druckniveau dieser Stoßwelle bleibt etwa 9 ms erhalten, bevor die am Ende des Treibrohrs reflektierte Expansionswelle des Membranhalters dort eintrifft. Nun sinkt der Druck wieder etwa 7 ms ab, bis die am Ende des Laufrohrs reflektierte Stoßwelle den Druck wieder erhöht.

Die Intensität des Stoßes hat sich nach der Düse erhöht (Bild 4.4b). Der erhöhte Druck bleibt etwa 12 ms erhalten, bis auch an Meßstelle 4 nach der Düse die reflektierte Expansionswelle des Membranhalters eintrifft. Nach etwa 1.5 ms wird der Druck jedoch durch den reflektierten Stoß im Laufrohr wieder stark erhöht. Dabei ist die Stoßstärke höher als die an Meßstelle 3, da der reflektierte Stoß nun entgegen der Strömung läuft und die Düse für ihn ein divergentes Kanalstück, also eine Dämpfung, darstellt. Die Überlagerung der reflektierten Expansionswelle und des reflektierten Stoßes bewirkt sofort wieder eine Druckabsenkung, die etwa 9 ms andauert. Danach trifft die am Laufrohrende reflektierte Expansionswelle der für den reflektierten Stoß als Diffusor wirkenden Düse ein und senkt den Druck weiter ab.

Sowohl bei Meßstelle 3 (hauptsächlich beim reflektierten Stoß) als auch an Meßstelle 4 (beim durchgehenden Stoß) erkennt man nach dem sprunghaften Druckanstieg ein weiteres kontinuierliches Ansteigen des Druckes. Wie schon in Kapitel 4.3 erwähnt, kann ein reibungsbehaftetes Rohr als eine Art Düse betrachtet werden. Der Druck nimmt aufgrund der Reibung längs des geraden Rohres ab und die Geschwindigkeit, bedingt durch Kompressibilitätseffekte, zu. Die Strömungsgrößen verhalten sich also wie beim Auftreffen einer Stoßwelle auf ein konvergentes Kanalstück. Dort entsteht ein reflektierter Stoß, der stromauf läuft. Ein ähnlicher Effekt kann auch beim geraden Rohr beobachtet werden. Der Druck nach dem einfallenden Stoß nimmt kontinuierlich zu, eine tatsächliche Wellenfront ist jedoch nicht erkennbar.

### *Verzweigte Kanäle*

Die Bilder 4.5a bis 4.5c (Meßstellen 1 bis 3) zeigen vier Druckprotokolle bei einem Abzweigwinkel von  $45^\circ$ . Der Druckmaßstab beträgt 20 kPa/Einheit, und der Zeitmaßstab liegt bei 5 msec/Einheit.

In Bild 4.5a (Meßstelle 1) erkennt man den sehr schnellen Anstieg des Druckes und das Einpendeln auf das charakteristische Druckniveau. Nach etwa 5 msec fällt der Druck relativ schnell wieder ab. Zu diesem Zeitpunkt hat die Expansionswelle vom Abzweig den ersten

Druckaufnehmer erreicht. Es dauert 5 msec, bis der Stoß die Abzweigkante erreicht hat und die Expansionswelle zurück zum ersten Druckaufnehmer gelaufen ist. Experimente ohne Abzweig ergaben keinen solchen Druckabfall, womit die Existenz dieser rückläufigen Expansionswelle auch durch Druckmessungen belegt werden konnte.

Weitere 5 msec später erreicht erneut eine Expansionswelle den ersten Druckaufnehmer. Es handelt sich dabei um die beim Reißen der Membran entstehende Welle, die an das hintere Ende des Treibrohrs lief, dort reflektiert wurde und mit erhöhter Geschwindigkeit hinter dem Stoß herlief. Sie hatte einen um doppelte Treibrohlänge weiteren Weg zurückzulegen. Die Expansionswelle breitet sich mit der Schallgeschwindigkeit des zuvor von dem Verdichtungsstoß komprimierten Gases aus. Dadurch hat sie eine höhere Geschwindigkeit als der Stoß selbst.

Durch die zweifache Expansion kann es sogar zu einem Unterdruck im Rohr kommen. Dies hängt jedoch weitgehend vom Abzweigwinkel und der damit verbundenen Stärke der Expansionswelle der Abzweigkante ab. So ergibt sich bei  $135^\circ$  kein Unterdruck, da die erste Expansion dort niedriger ausfällt. Die zweite Expansion dagegen ist bei beiden gleich.

Der Druck (Bild 4.5a) steigt wieder auf den Ausgangsdruck an und bleibt dann nahezu konstant, bis ihn erneut eine Stoßwelle sprunghaft erhöht. Diese Erhöhung resultiert aus der am Abzweig gebeugten und am Deckel des Abzweigrohrs reflektierten Stoßfront. Die am Deckel des Durchgangsrohrs reflektierte Stoßwelle trifft später ein und ist daher im Bild nicht mehr erkennbar. Bei genügend langer Aufnahmedauer würde sich schließlich im Rohr der Ausgleichsdruck einstellen.

Bild 4.5b zeigt das Meßprotokoll des zweiten Druckaufnehmers, der im Durchgangsrohr hinter dem Abzweig angebracht war. Man sieht wieder den schnellen Druckanstieg und das Auftreffen der am Treibrohrende reflektierten Expansionsfront. Der erste Druckabfall wie bei Bild 4.5a entfällt hier, da diese Expansionswelle nun zum Treibrohr hin gerichtet ist. Die Breite des Druckplateaus ist insgesamt geringfügig kleiner, da die Expansionsfront die Stoßfront bei Meßstelle 2, vom ersten Anstieg aus gerechnet, früher eingeholt hat als bei Meßstelle 1. Die Expansionswelle ist nun schneller als die Stoßwelle. Es kommt auch hier wieder zu einem zweiten Stoß, der aus der Reflexion am Deckel im Abzweigrohr resultiert. Die Druckaufnehmer 1 und 2 registrieren den reflektierten Stoß vom Enddeckel des Abzweigrohrs wie die Beugung eines Primärstoßes an einem T–Stück. Die Reflexion erreicht die beiden Druckaufnehmer praktisch gleichzeitig. Bei Aufnehmer 2 fällt der Druck sofort wieder ab. Hier ist die am Diffusor am Ende des Durchgangsrohrs entstandene Expansionswelle auf den reflektierten und gebeugten Stoß vom Abzweigrohr getroffen. Sie erreicht den reflektierten



Stoß bei Meßstelle 1 später, weshalb dort das Druckniveau länger erhalten bleibt.

Bild 4.5c zeigt das Druck – Zeit – Diagramm des Meßaufnehmers 3. Der schnelle Druckanstieg findet nahezu gleichzeitig mit dem von Aufnehmer 2 statt, bedingt durch die gleichen Lauflängen von Meßstelle 1 nach 2 und 1 nach 3. Der Druck fällt dann wieder ab, was aus der am Treibrohrendeckel reflektierten, nun aber zusätzlich noch gebeugten Expansionswelle resultiert. Das Druckniveau bleibt ebenso lange erhalten wie bei Meßstelle 1 (gleiche Lauflängen). Es kommt wieder zu einem zweiten stoßhaften Druckanstieg. In diesem Fall erfolgt er zeitlich früher und mit größerer Amplitude. Dieser vom Enddeckel des Abzweigrohrs reflektierte Stoß stellt jetzt für den T – Abzweig den Primärstoß dar, der gebeugt und gedämpft wird. Er verteilt sich jetzt auf die Druckaufnehmer 1 und 2, die er gleichzeitig und mit gleicher Amplitude erreicht. Der Druck bei Meßstelle 3 fällt dann wieder stark ab. Die reflektierte Expansionswelle hat nun den reflektierten Stoß eingeholt.

Die Meßdiagramme ändern sich in Abhängigkeit von der Stoßstärke und dem Abzweigungswinkel nur wenig und können mit den hier aufgezeigten Vorgängen interpretiert werden. Bezüglich einer genauen Deutung aller gasdynamischen Vorgänge in und um einen Abzweig sei auf die Literatur verwiesen /z.B. 11,12,18,24,39,40 u.a./.

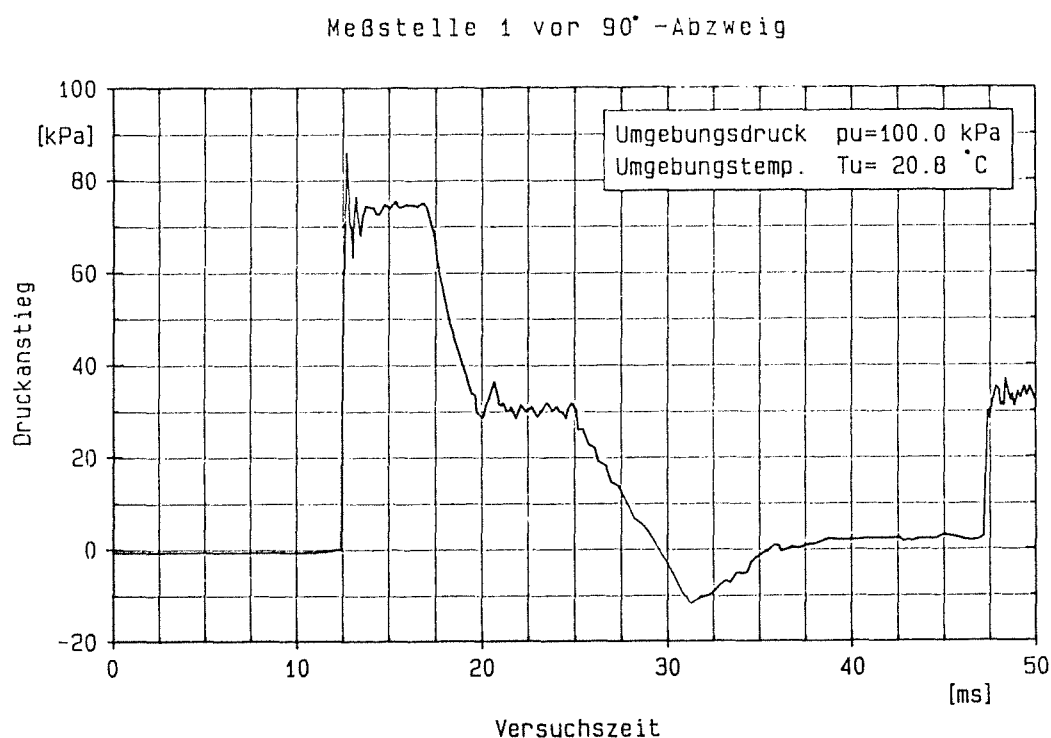
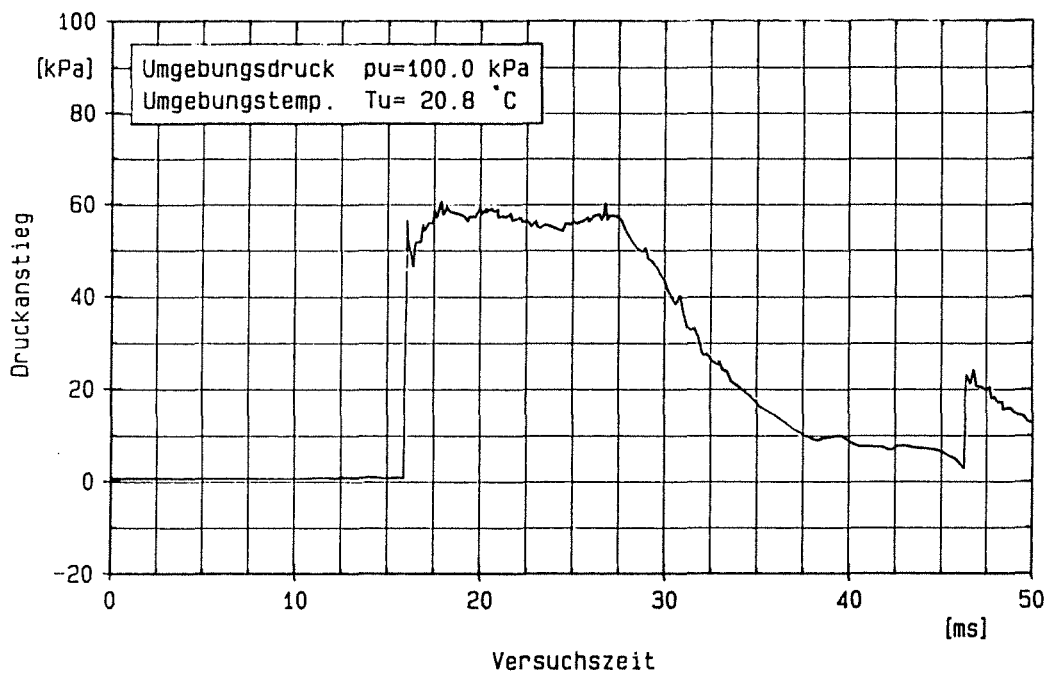
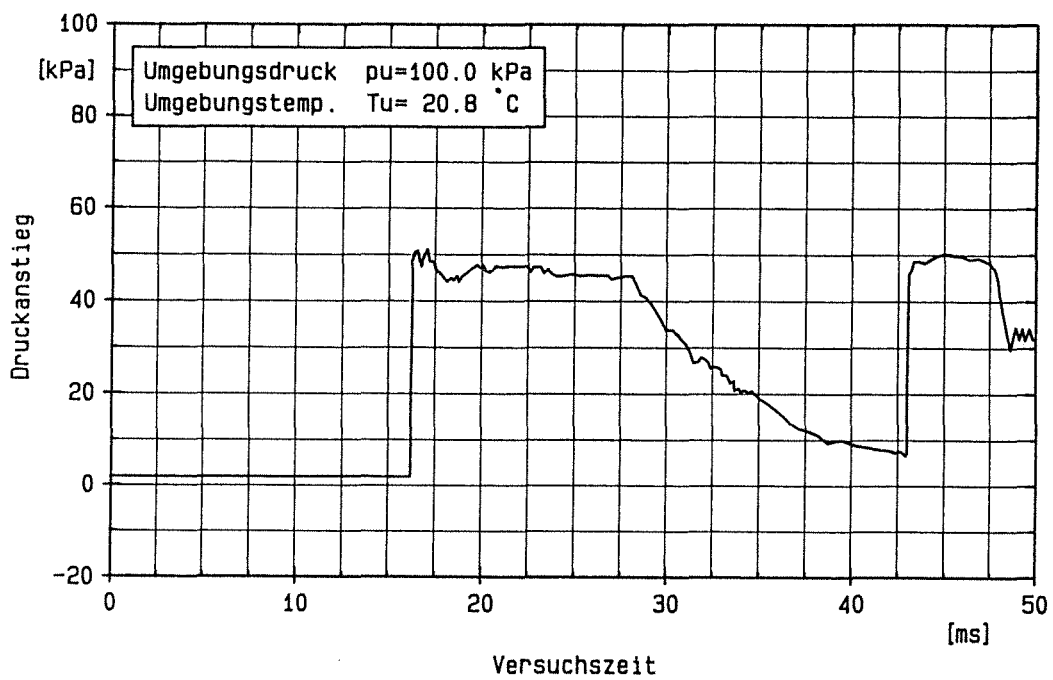


Bild 4.5a: Druck – Zeitverlauf bei einem 45° – Abzweig;  $z = 1.74$  (Meßstelle 1)

Meßstelle 2 nach 90°-Abzweig, Durchgangskanal

**Bild 4.5b:** Druck – Zeitverlauf hinter dem Abzweig, Durchgangrohr (Meßstelle 2)

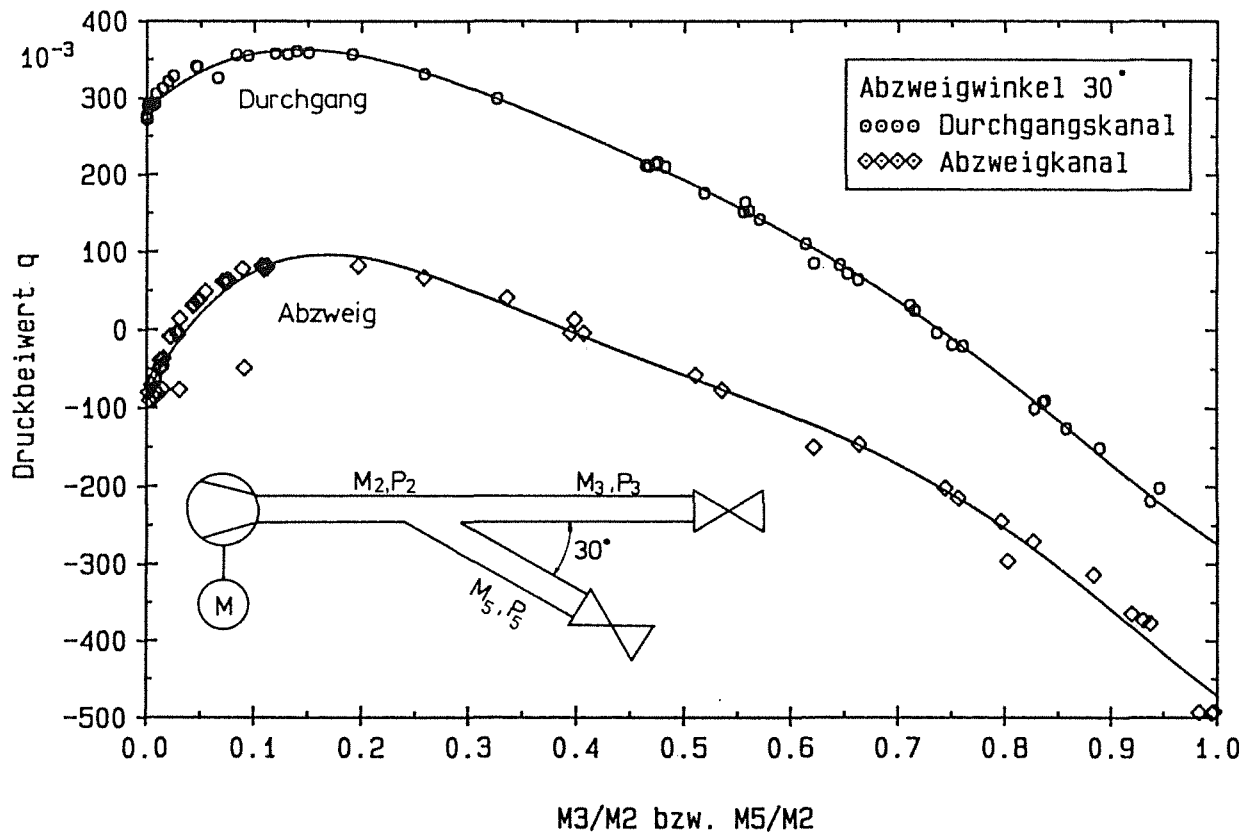
Meßstelle 3 nach 90°-Abzweig, Abzweigkanal

**Bild 4.5c:** Druck – Zeitverlauf hinter dem Abzweig, Abzweigrohr (Meßstelle 3)

#### 4.4 Experimentelle Bestimmung des Druckbeiwertes $q$

Voraussetzung für eine präzise Vorhersage der Stoßaufteilung in den verzweigten Kanälen ist eine sorgfältige Bestimmung des Druckbeiwerts  $q = \left[ \frac{p_1}{p_2} - 1 \right] / M_2^2$  (siehe auch Kap. 2.2., Gl. 2.62, 2.63) der Nachlaufströmung. Dazu wurde an der oben beschriebenen Anlage für die quadratischen Abzweige anstelle des Treibrohrs ein Radialgebläse angebracht. Der Gesamtvolumenstrom wurde über ein Einlaßventil am Anfang der Teststrecke geregelt. Des Weiteren war es möglich, am Ende beider Kanalabzweige die Teilvolumenströme unabhängig voneinander bis auf Null zu drosseln. Die Strömungsgeschwindigkeiten und damit die Machzahlen errechneten sich für die Stellen vor und nach dem Abzweig aus den aufgenommenen Volumenströmen und Temperaturen. Dabei wurde jeweils der statische Druck vor (Meßstelle 1) und nach dem Abzweig im Durchgangs- (Meßstelle 2) und Abzweigrohr (Meßstelle 3) aufgenommen. Weiterhin wurde der Differenzdruck zwischen 1 und 2 sowie zwischen 1 und 3 gemessen. Somit konnte für das Durchgangs- und Abzweigrohr die statische Druckänderung in Abhängigkeit vom Verhältnis der Strömungsmachzahlen aufgenommen werden. Der für alle Winkel charakteristische Druckverlauf soll im weiteren beschrieben werden. Der Druckbeiwert  $q$  bezieht sich immer auf den statischen Druck, so daß er sowohl positive (Druckzunahme) als auch negative Werte (Druckabnahme) annehmen kann, im Gegensatz zu dem Gesamtdruck, der längs der Kanäle aufgrund dissipativer Effekte stetig abnehmen muß. Bild 4.6 zeigt beispielhaft die Druckänderung eines quadratischen Durchgangsrohres für einen  $30^\circ$ -Abzweig. Die Indizierung bezieht sich auf die Gleichungen in Kapitel 2.2.

Für  $M_3/M_2 \rightarrow 0$  ist das Gas im Durchgangskanal in Ruhe, der dynamische Druck wird auf Null abgebaut, so daß der statische Druck ansteigen muß,  $q_3 > 0$ . Entsprechend muß bei diesem Zustand  $M_5/M_2 \rightarrow 1$  gelten. Aufgrund der dadurch bedingten hohen Strömungsgeschwindigkeit im Abzweigkanal und den damit verbundenen Reibungsverlusten muß  $q_5 < 0$  gelten. Für  $M_3/M_2 \rightarrow 1$  ist das Regelventil im Abzweigkanal geschlossen, die Strömungsgeschwindigkeit im Durchgangskanal ist relativ hoch, und damit gilt  $q_3 < 0$ . Daß bei diesem Zustand ebenfalls  $q_5 < 0$  gilt, ist durch die starken Verwirbelungen im Abzweigkanal zu erklären. Es entstehen "Totwassergebiete" direkt an der Abzweigstelle, die den statischen Druck absenken. Wird nun das Ventil im Abzweigkanal geöffnet,  $M_3/M_2 < 1$  und  $M_5/M_2 > 0$ , werden die starken Wirbel durch die gerichtete Strömung abgebaut, bis die Druckbeiwerte  $q_{3,5}$  ein Maximum erreichen. Danach sinken diese Werte wieder ab, da aufgrund der erhöhten Strömungsgeschwindigkeit der statische Druck in dynamischen Druck umgewandelt wird. Die gemessenen Drücke sind somit ein Maß für die dissipativen Effekte und die Wechselwirkung zwischen Ruhe- und dynamischem Druck. Durch die nach diesen Verfahren ermittelten Meßpunkte wurde mittels eines Polynomansatzes eine Kurve gelegt, die wie die Meßpunkte in Bild 4.6 zu sehen ist (siehe auch Anhang A9).



**Bild 4.6:** Druckbeiwertkennlinien für das Durchgangs- und Abzweigrohr in Abhängigkeit vom Verhältnis der Machzahlen  $M_3/M_2$  bzw.  $M_5/M_2$  bei quadratischen Kanalquerschnitten

## 5. Vergleich der experimentell und modelltheoretisch ermittelten Stoßstärken

In diesem abschließenden Kapitel soll aufgezeigt werden, inwieweit sich die experimentell bestimmten Strömungs- und Zustandsgrößen Geschwindigkeit  $u$ , Druck  $p$ , Strömungsmachzahl  $M$  und Schallgeschwindigkeit  $c$  modelltheoretisch beschreiben lassen. Dabei werden zuerst die einzelnen Komponenten eines Lüftungssystems untersucht, um dann durch deren Verknüpfung die Gesamtanlage zu erfassen. Sollte bei dem Vergleich der theoretisch und experimentell ermittelten Daten für die Einzelkomponenten eine gute Übereinstimmung erzielt werden, kann davon ausgegangen werden, daß damit auch für den gesamten Anlagenkomplex eine brauchbare Berechnungsmethode zur Verfügung steht. Um die Abweichungen zwischen theoretischen und experimentellen Daten zu erhalten, geht man auf folgende Weise vor: die Strömungs- und Zustandsgrößen vor und nach der zu untersuchenden Lüftungskomponente werden gemessen und dann Druck, Schallgeschwindigkeit und Strömungsmachzahl (über die Temperatur bzw. Geschwindigkeit) vor der Komponente als Eingangswerte für die Modellrechnung benutzt. Die daraus erhaltenen Ergebnisse werden dann mit den experimentellen Werten nach den Komponenten verglichen. Im vorliegenden Fall wurden nur die Drücke vor und nach dem Modell gemessen, Temperatur- und Dichteänderung über den Drucksprung wurden errechnet. So kann über mögliche Abweichungen dieser Größe keine Aussage gemacht werden. Die Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten Intensitäten der Stoßwellen muß die Stärken und Schwächen der Modellrechnung aufzeigen, d.h. der Gültigkeitsbereich der Theorie muß deutlich abgegrenzt werden.

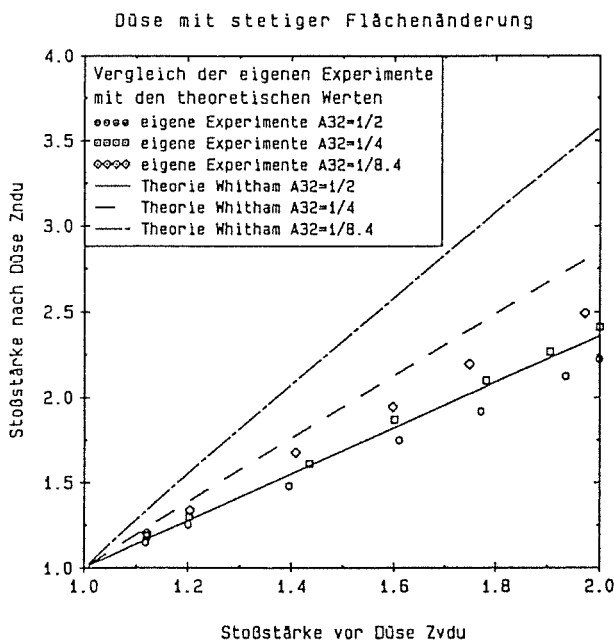
Um einen einheitlichen Vergleich durchführen zu können, werden jeweils die Stoßenergien vor einer Komponente denen danach gegenübergestellt. Als Maß für die Stoßintensität wird das Verhältnis des Druckes nach der Stoßwelle zu dem vor der Welle als Stoßstärke  $z$  definiert. Die Indizes beziehen sich auf die auf Seite  $v$  angeführten Formelzeichen.

Bevor jedoch eine Modellrechnung bewertet werden kann, muß nachgewiesen werden, daß die Experimente, mit denen später verglichen werden soll, mit größtmöglicher Sorgfalt durchgeführt worden sind. Abweichungen von den theoretischen Werten, die aufgrund falscher Messungen auftreten können, müssen mit hoher Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden. Neben einer ausführlichen Diskussion möglicher Fehlereinflüsse und, falls möglich, deren Beseitigung (siehe Kap. 4.2), ist ein Vergleich der eigenen Experimente mit in der Literatur beschriebenen Messungen meist sehr hilfreich. Voraussetzung dafür sind gleiche bzw. nicht zu sehr abweichende Randbedingungen bei der Erfassung der zu messenden Größen. Doch selbst bei stark geänderten Bedingungen können noch Tendenzen aufgezeigt werden, die eine eigene Messung verwerfen können.

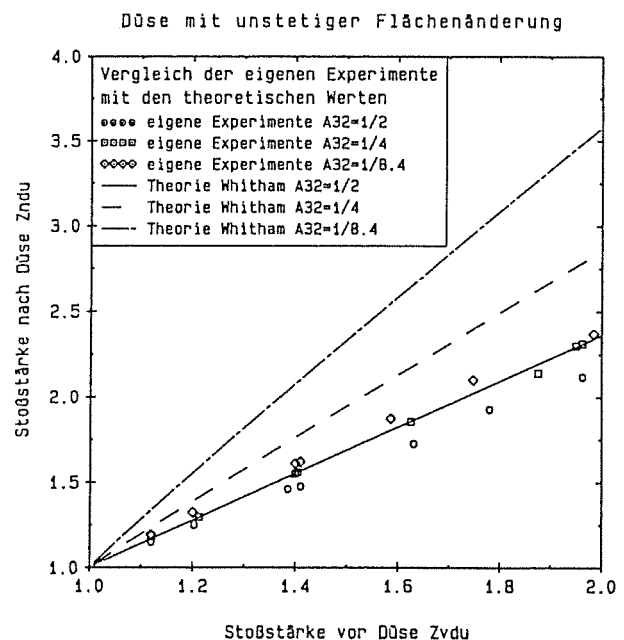
## 5.1 Stoßstärkenänderung in querschnittsvariierenden Kanälen

Wie zuvor angedeutet, wäre bei den Untersuchungen an Düse und Diffusor ein Vergleich mit Experimenten anderer Autoren sehr aufschlußreich gewesen. Doch konnten in der Literatur keine Messungen im interessierenden Stoßstärken – ( $z = 1$  bis  $2.5$ ) und Flächenverhältnisbereich ( $A_{21}$  bzw.  $A_{12} = 2, 4, 8.4$ ) gefunden werden. Die meisten Autoren beschäftigen sich nur mit sehr großen Explosionswellen, teilweise mit Stoßstärken bis  $z = 10$  /41,42/. Nur Heilig und Reichenbach geben in mehreren Arbeiten /43,44/ Stoßintensitätsänderungen im Bereich  $z = 1$  bis  $3$  an, jedoch bei Flächenverhältnissen, die mit den hier benutzten Kanälen nicht realisiert werden konnten. Aber zumindest konnte durch Inter- und Extrapolationen der eigenen bzw. fremden Meßergebnisse eine Tendenz aufgezeigt und auch bei den Untersuchungen an querschnittsvariierenden Kanälen die selbst durchgeführten Experimente im Rahmen der unterschiedlichen Randbedingungen bestätigt werden.

Neben der hier entwickelten Charakteristikenmethode zur Berechnung der Stoßausbreitung in Kanälen mit sich verengendem bzw. erweiterndem Querschnitt sollen die eigenen Experimente noch mit der Theorie von Whitham (besser bekannt unter dem Namen "Chester-Chisnell'sche Kanalformel"; Kap. 2.1) verglichen werden. Betrachtet wird hierbei der Bereich bis Stoßstärken  $z = 2.5$  für Düse und Diffusor.



**Bild 5.1:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Whitham, stetige Flächenänderung

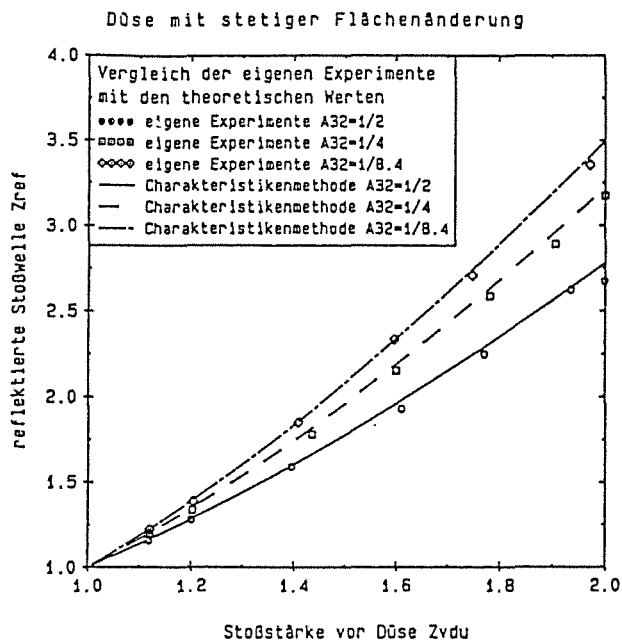


**Bild 5.2:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Whitham, unstetige Flächenänderung

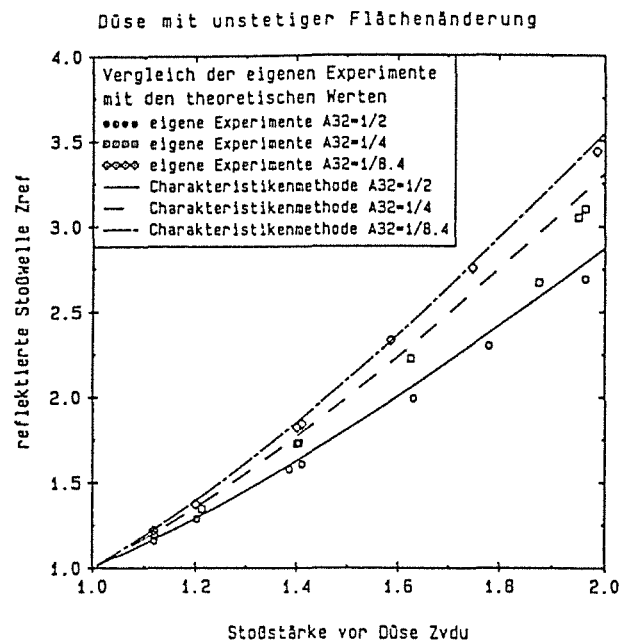
In den Bildern 5.1 bzw. 5.2 sind die eigenen Experimente den theoretischen Werten nach Whitham für eine *Düse* jeweils mit stetigem (Bild 5.1) bzw. unstetigem (Bild 5.2) Übergang gegenübergestellt. Die Flächenverhältnisse betragen dabei  $A_{21} = 1/2$  (Kreise),  $1/4$  (Quadrate) und  $1/8.4$  (Rauten). Es sind erhebliche Abweichungen festzustellen, die mit größer werdendem Flächenverhältnis stark zunehmen. Da Whitham reibungsfrei und unter der Voraussetzung sehr kleiner Flächenänderungen rechnet, sind die Unterschiede zwischen Theorie und Messung konsequenterweise bei der unstetigen Düse größer als bei der stetigen. Doch dissipative Effekte erklären nur einen Teil der Abweichungen. Hauptsächlich sind die Gründe für die starken Differenzen in der Vernachlässigung der reflektierten Stoßwelle zu suchen. Dadurch teilt sich der einfallende Stoß in eine reflektierte und eine in die Düse eindringende Welle auf. Durch die stromaufgerichtete, reflektierte Welle wird die Nachlaufströmung der einfallenden Welle stark verlangsamt, und erst diese reduzierte Welle erfährt eine Beschleunigung in der Düse, was gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Stoßintensität ist. Man kann daher nur bei sehr kleinen, kontinuierlichen Querschnittsänderungen die reflektierte Welle vernachlässigen. Eine Stoßwelle, die eine reale Düse durchläuft, wird immer eine geringere Intensität am Austritt des verjüngten Querschnitts besitzen, als nach der Theorie von Whitham berechnet. Die mit der reflektierten Welle verbundene Energie fehlt in der durchlaufenden Welle, diese ist deshalb schwächer als nach Whitham. Der Druck stromauf des konvergenten Bauteils wird jedoch aufgrund der Reflexion erheblich größer sein als der nach der einfallenden Stoßwelle und kann sogar den nach der Düse um ein Vielfaches übersteigen.

Die Bilder 5.3 und 5.4 zeigen die Druckerhöhung durch die reflektierte Welle in Abhängigkeit von der Eingangsstoßstärke jeweils für eine stetige und eine unstetige Düse. Dieser Druck ist höher als derjenige nach der Düse. Für eine Eingangsstoßstärke von  $z = 2$  und ein Flächenverhältnis  $A_{21} = 1/8.4$  ergibt sich eine Stoßstärke der durchgehenden Welle von  $z_{ndu} = 2.5$ , für die reflektierte Welle erhält man  $z_{ref} = 3.5$  für eine stetige Düse. Dieser Druck kann mit der Modellrechnung von Whitham nicht bestimmt werden, und eine Abschätzung der Kanalbelastung kann nur mit einem großen Unsicherheitsfaktor durchgeführt werden.

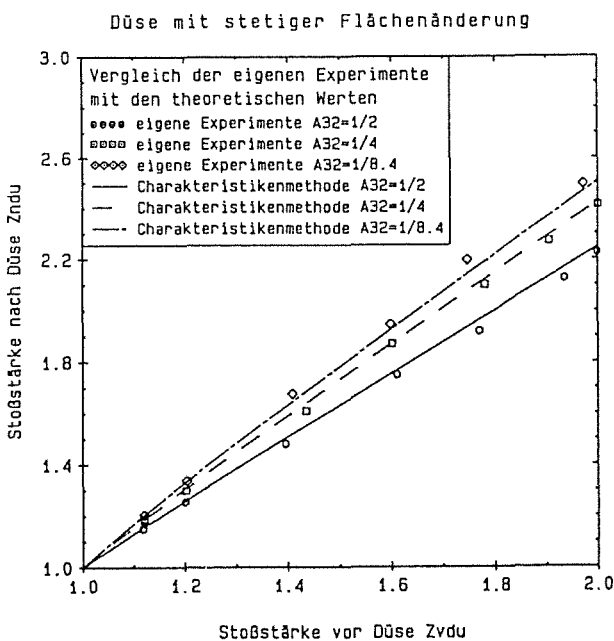
Mit Hilfe der Charakteristikenmethode ist es dagegen möglich, diese reflektierte Welle mit großer Genauigkeit zu erfassen und somit den Druck im Kanalteil mit größerem Querschnitt zu bestimmen. In den Bildern 5.3 und 5.4 sind neben den Experimenten noch die Ergebnisse dieser Rechnung mit eingetragen. Man kann für alle Flächenverhältnisse jeweils für stetige und unstetige Übergänge eine sehr gute Übereinstimmung feststellen.



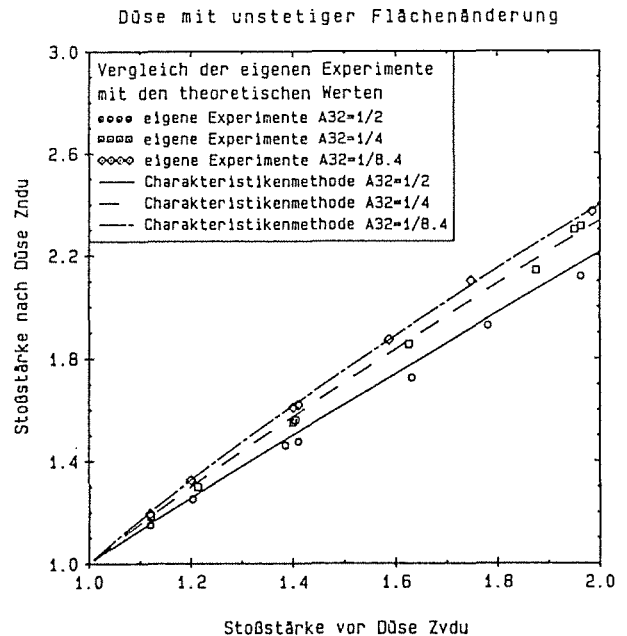
**Bild 5.3:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, refl. Stoß, stetige Flächenänderung



**Bild 5.4:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, refl. Stoß, unstetige Flächenänderung



**Bild 5.5:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, stetige Flächenänderung

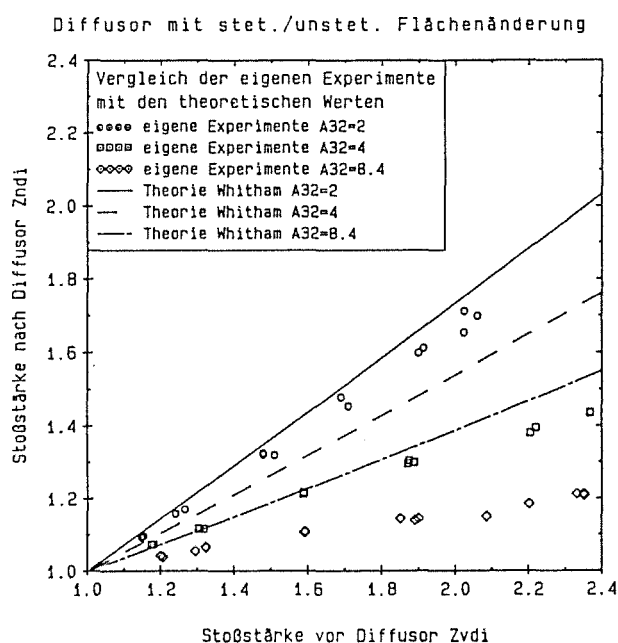


**Bild 5.6:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, unstetige Flächenänderung

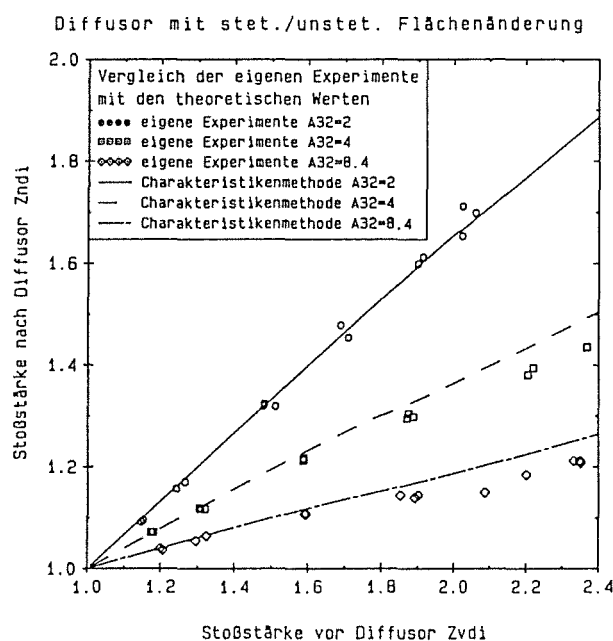


Die berechneten Stoßstärken geben systematisch leicht überhöhte Werte gegenüber den Messungen an, da die Stoßdämpfung der reflektierten Welle aufgrund der Reibungseinflüsse auf dem Weg der Stoßfront vom Eintritt in die Düse bis zum Druckaufnehmer nicht berücksichtigt wurde. Die Abweichungen sind jedoch so gering, daß auf eine Erweiterung der Rechnung verzichtet wurde.

Die Bilder 5.5 und 5.6 zeigen die Meßwerte für die durchgehende Welle im Vergleich mit der Stoßintensität nach der Charakteristikenmethode. Ebenso wie bei der Untersuchung der reflektierten Welle ist für alle Flächenverhältnisse eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen. Nur bei einer Halbierung der Fläche ist eine leichte Tendenz zur Überschätzung der Ergebnisse zu sehen, die Abweichungen der Experimente von der Theorie bei den anderen Flächenverhältnissen sind statistischer Natur.



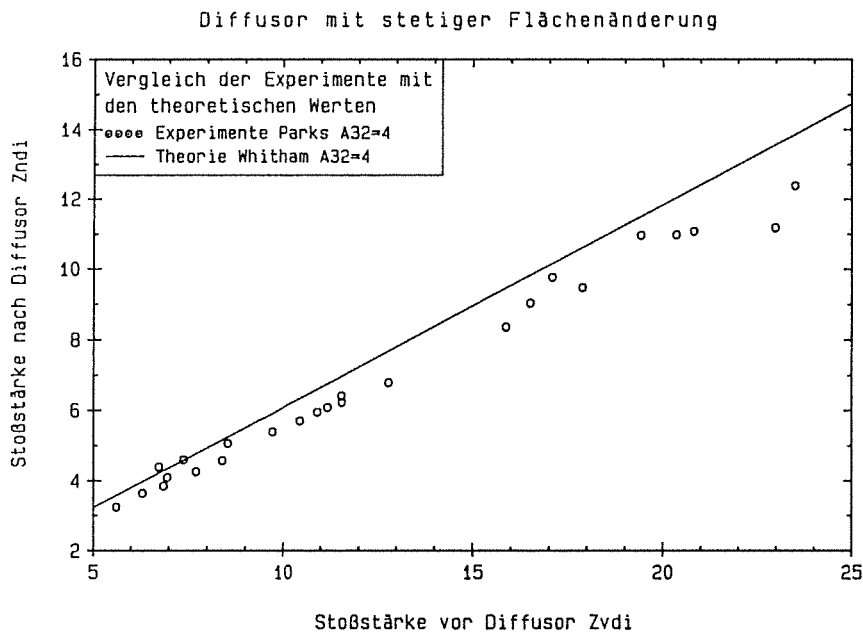
**Bild 5.7:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Whitham, stetige/unstetige Flächenänderung



**Bild 5.8:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, stetige/unstetige Flächenänderung

In den Bildern 5.7 und 5.8 sind die Experimente an den *Diffusoren* jeweils mit den theoretischen Ergebnissen von Whitham /14,15/ und den nach der Charakteristikenmethode ermittelten Stoßstärken verglichen. Die gemessenen Drücke für stetige und unstetige Diffusoren unterscheiden sich kaum, teilweise ergeben sich für den Carnot – Diffusor sogar höhere

Werte als für eine stetige Querschnittsänderung, wahrscheinlich aufgrund der Reibung innerhalb des Übergangsstückes /21,22,30/. Kann im Vergleich der berechneten Werte nach Whitham mit den Messungen für eine Flächenverdoppelung noch ein recht gutes Ergebnis erzielt werden, zeigen sich doch bei größeren Flächenänderungen erhebliche Abweichungen zwischen Theorie und Experiment. Für eine Eingangsstoßstärke von  $z = 2.4$  wurde beispielsweise eine Stoßdämpfung auf  $z = 1.22$  gemessen, nach Whitham wird eine Stoßintensität von  $z = 1.53$  angegeben, was einem Fehler von über 100% entspricht. Die Berechnung der Stoßdämpfung nach der Charakteristikenmethode zeigt dagegen für alle Flächenverhältnisse eine sehr gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Bis zum Eintreten des Sekundärstoßes können die gemessenen und berechneten Stoßstärken als identisch bezeichnet werden. Erst bei stärkeren Eingangswellen werden die Stoßintensitäten am Diffusoraustritt leicht überschätzt. Eine mögliche Ursache dafür wurde in Kapitel 2.4 angesprochen. Die Graphen für die reibungsbehaftete Strömung und die reibungsfreie Strömung gehen ineinander über, so daß die Kurve im oberen Stoßstärkenbereich – nach Einsetzen des Sekundärstoßes – über den Experimenten liegen muß. Doch auch hier sind die Abweichungen minimal.



**Bild 5.9:** Vergleich der Experimente von Parks /45/ mit der Theorie von Whitham /14,15/ bei stetiger Flächenänderung

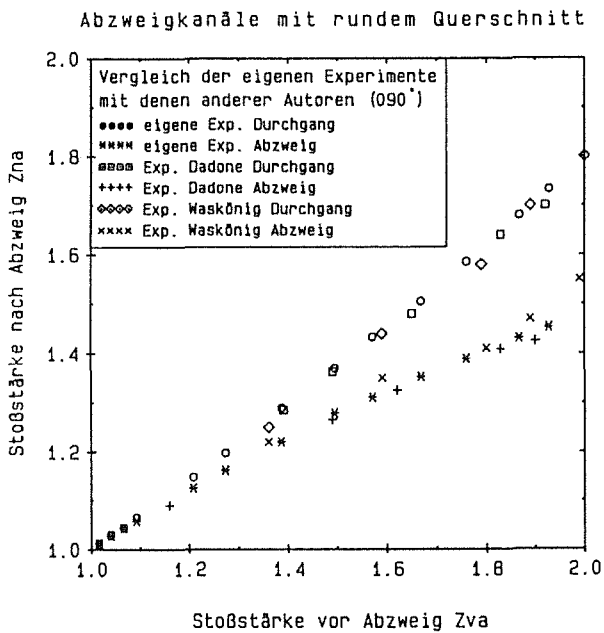
Diese Darstellung zeigt wieder deutlich die Grenzen der Berechnung nach der Charakteristikenmethode auf. Mit zunehmender Stoßstärke wird die Berechnung immer ungenauer, bis schließlich das Gleichungssystem keine Lösung mehr liefert. Aufgrund der Annahme isentroper Zustandsänderung über den Stoß kann das Modell nicht auf größere Stoßmachzahlen

erweitert werden, so daß auch hier, wie bei den Abzweigen und der Düse, eine Stoßstärke von etwa  $z = 2.5$  als obere Grenze angesehen werden muß, bei der noch zuverlässige Ergebnisse erzielt werden können.

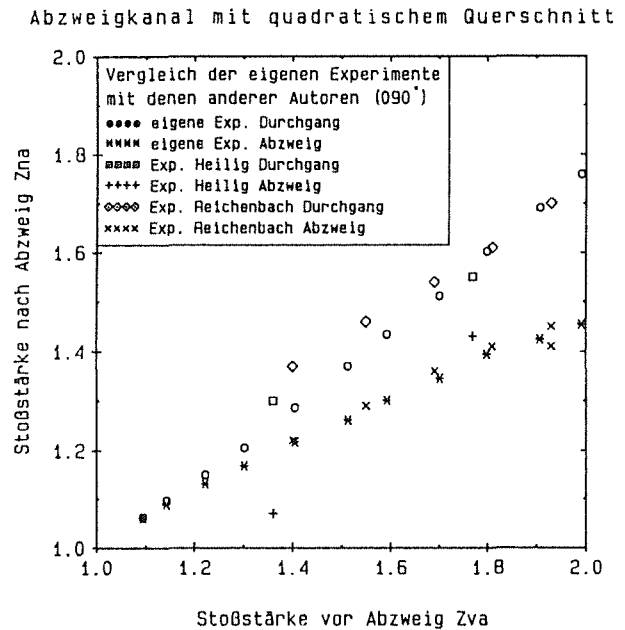
Zur Berechnung der Stoßintensität bzw. deren Änderung bei größeren Drucksprüngen liefert die Theorie von Whitham eine gute Lösung. Bild 5.9 zeigt den Vergleich mit Experimenten von Parks /45/ bei einem Flächenverhältnis von  $A_{21} = 4$ , der untersuchte Bereich liegt dabei zwischen  $z = 5$  und  $z = 25$ .

## 5.2 Stoßaufteilung in verzweigten Kanälen

Zum Vergleich mit den vom Autor gemessenen Stoßstärken wurden aus der Literatur Daten von Dadone et al. /18/ und Waskönig /27/ (für Abzweigkanäle mit rundem Querschnitt) bzw. von Heilig /40/, Reichenbach /24/ und Sloan/Nettleton /46/ (für Abzweigkanäle mit rechteckigem Querschnitt) herangezogen. Exemplarisch ist eine Gegenüberstellung für beide Querschnittsgeometrien an einem  $90^\circ$ -Abzweig in den Bildern (5.10 und 5.11) dargestellt. Die experimentell bestimmten Stoßstärken von Dadone et al. zeigen nur geringfügig niedrigere Werte als die der eigenen Messungen. Dies gilt sowohl für das Durchgangsrohr als auch für das senkrecht dazu verlaufende Rohr. Grund dafür dürfte der geringere Rohrdurchmesser bei Dadone et al. sein, der zu einem höheren Reibungsverlust führte. Allerdings wurde von ihnen nur 360 mm vor und nach der Abzweigstelle gemessen, im Gegensatz zu den eigenen Messungen, bei denen die Druckaufnehmer jeweils 760 mm von der Verzweigungsstelle entfernt waren. Weiterhin wurde bei den vom Autor benutzten Kanälen mit bis zu 0.5 mm eine relativ hohe Rauigkeit bestimmt. Aufgrund dieser Tatsache, der größeren Länge und dem gegensätzlich wirkenden größeren Rohrdurchmesser war die gleiche Dämpfung in den eigenen Rohren wie auch in den Kanälen von Dadone et al. zu erwarten. Durch diesen Vergleich konnte somit auch die Benutzung der von Dadone bestimmten Druckbeiwerte  $q$  für die Berechnung der Stoßaufteilung im eigenen Kanalsystem gerechtfertigt werden. Die Stoßstärken, die von Waskönig experimentell bestimmt wurden, liegen im Durchgangskanal nur unwesentlich unter den eigenen und den von Dadone durchgeführten Messungen. Im Abzweigkanal wurden geringfügig höhere Werte von Waskönig registriert. Auch er benutzte einen Kanal kleineren Querschnitts ( $\phi 56$  mm) aus sehr glattem Aluminium. Die Druckaufnehmer waren bei den beschriebenen Messungen 420 mm vor und nach dem Abzweig angebracht. Bei den anderen untersuchten Winkeln ( $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $150^\circ$ ) waren die Abweichungen zwischen den von unterschiedlichen Experimentatoren gemessenen Stoßstärken ebenfalls sehr gering, so daß systematische Fehler bei den eigenen Messungen an runden Kanälen nahezu ausgeschlossen werden können.



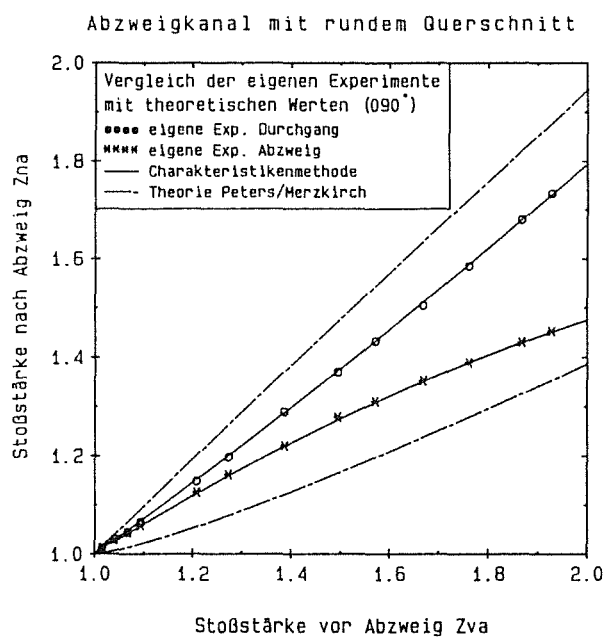
**Bild 5.10:** Vergleich der eigenen Experimente mit denen anderer Autoren, runder Querschnitt, 90° – Abzweig



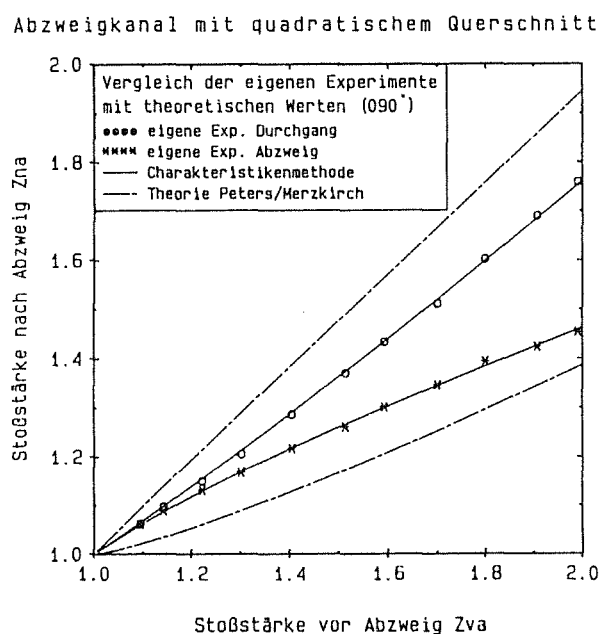
**Bild 5.11:** Vergleich der eigenen Experimente mit denen anderer Autoren, quadratischer Querschnitt, 90° – Abzweig

Die Experimente an rechteckigen Kanälen wurden mit Messungen von Reichenbach /24/ (bei 45, 90 und 135°), Heilig /40/ (bei 90°) und Sloan/Nettleton /46/ (bei 45 und 135°) verglichen. Da für 45 und 135° keine eigenen Versuche an rechteckigen Kanälen durchgeführt wurden, war es notwendig, diese Stoßstärken aus den Messungen an 30 – und 60° – bzw. 120 – und 150° – Abzweigen zu interpolieren. Die Abweichungen zwischen den Experimenten der einzelnen Autoren waren größer als bei runden Kanälen. Auch waren die Streubereiche der einzelnen Messungen untereinander breiter, da, wie aus eigenen Versuchen festzustellen war, die turbulenten Eckenwirbel in der Nachlaufströmung starke Druckschwankungen erzeugten und eine saubere und eindeutige Auswertung der Drucksprünge meist erschwerten. Demnach konnte der Vergleich der eigenen Experimente mit denen anderer Autoren die eigenen Messungen unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Randbedingungen bei allen untersuchten Winkeln bestätigen.

Nach dieser Vorbereitung kann ein Vergleich zwischen den eigenen, experimentell bestimmten Stoßstärken und den theoretisch berechneten Stoßintensitäten nach Peters und Merzkirch /25,26/ bzw. der Charakteristikenmethode die Gültigkeit der Modelle abgrenzen.



**Bild 5.12:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Peters/Merzkirch und der Theorie von Dadone et al., runder Querschnitt,  $90^\circ$  – Abzweig



**Bild 5.13:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Peters/Merzkirch und der Theorie von Dadone et al., quadratischer Querschnitt,  $90^\circ$  – Abzweig

Zuerst soll dies mit der 1974 entwickelten Theorie von Peters und Merzkirch /25,26/ geschehen. Bild 5.12 zeigt den Vergleich zwischen dem angesprochenen Modell und den vom Autor durchgeführten Experimenten an runden Kanälen bei einem  $90^\circ$  – Abzweig. Die gemessenen Drucksprünge werden im Durchgang deutlich überschätzt und im Abzweig unterschätzt. Auch zeigte der Graph der Experimente im Abzweigkanal mit steigender Eingangsstoßstärke einen degressiven Verlauf, die berechnete Kurve dagegen einen progressiven Verlauf. Für den Durchgangskanal ist eine gegenteilige Tendenz festzustellen. Ursache dafür dürfte die Nichtberücksichtigung der im Abzweig herrschenden komplexen Beugungs- und Reflexionsvorgänge sein. Die immer auftretende, stromaufgerichtete Expansionswelle wird nicht betrachtet und somit die Beschleunigung der Nachlaufströmung vernachlässigt. Auch müssen mögliche Fehlereinflüsse der Theorie von Whitham berücksichtigt werden, die die Grundlage für das Rechenmodell von Peters und Merzkirch bilden. So geht Whitham bei seiner Berechnung der Stoßstärkenänderung in querschnittsvariierenden Kanälen von einem infinitesimal kleinen Flächengradienten aus. Reibungseinflüsse werden vernachlässigt.

Als Alternative zur Berechnung der Stoßaufteilung in verzweigten Kanälen wurden die

Experimente noch mit der Theorie nach der Charakteristikenmethode von Dadone et al. /18/ verglichen. Da eine Gegenüberstellung der Experimente von Dadone et al. und der vom Autor gemessenen Drucksprünge an runden Kanälen eine Übereinstimmung brachte, konnte diese auch beim Vergleich mit der Theorie erwartet werden, da die von Dadone et al. ermittelten Druckbeiwerte  $q$  integriert worden waren. Bild 5.12 bestätigt diese Annahme exemplarisch für einen  $90^\circ$ -Abzweig. Im Rahmen der Meßungenauigkeiten und natürlichen Streuungen ist eine vollständige Übereinstimmung zu erkennen. Bei den anderen untersuchten Winkeln wurden ähnlich gute Ergebnisse erzielt. Da die eigenen Experimente und die von Dadone et al. nahezu identisch waren, kann davon ausgegangen werden, daß auch die Druckänderungen und die Massenaufteilung bei stationärer Strömung in beiden Kanälen gleich sind. Mit Hilfe der Charakteristikenmethode kann somit bei bekanntem Druckverlauf in stationärere Strömung (Druckbeiwert  $q$ ) die Stoßaufteilung in verzweigten Kanälen bestimmt werden.

Da die Theorie von Peters und Merzkirch /25/ ursprünglich zur Berechnung der Wellenaufteilung in rechteckigen Kanälen entwickelt wurde, soll auch ein Vergleich mit Experimenten an Abzweigen solcher Geometrie durchgeführt werden. Bild 5.13 zeigt wieder für ein  $90^\circ$ -Abzweig die Gegenüberstellung zwischen Modellrechnung und gemessener Stoßintensität. In den Tendenzen zeigt sich dasselbe Bild wie bei runden Rohren: die Druckstöße im Durchgang werden überbewertet, diejenigen im Abzweigrohr unterbewertet.

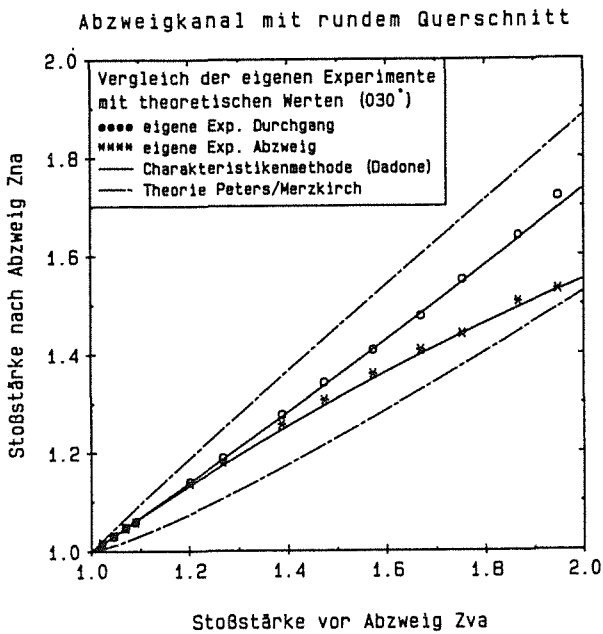
Um die guten Ergebnisse der Charakteristikenmethode, die bei runden Rohren erzielt wurden, auch bei Kanälen quadratischen Querschnitts erreichen zu können, wurden die Druckbeiwerte  $q$  für rechteckige Kanäle bestimmt, um somit die Grundlage für einen Vergleich mit an dieser Geometrie durchgeführten Stoßexperimenten zu schaffen. Für einen  $90^\circ$ -Abzweig ist diese Gegenüberstellung wieder exemplarisch in Bild 5.13 zu sehen. Der Graph der theoretischen Stoßintensität deckt sich mit den eingezeichneten, gemessenen Stoßstärken. Die Werte liegen insgesamt etwas unter denen in runden Kanälen, was auf deren geringfügig niedrigen Druckverlust (siehe Kapitel 6.4) zurückzuführen ist. Bei allen untersuchten Winkeln ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu verzeichnen.

Zu bemerken ist jedoch, daß bei sehr großen und sehr kleinen Abzweigwinkeln eine leichte Überschätzung der Stoßintensität gleichermaßen in Durchgangs- und Abzweigkanal zu verzeichnen ist. Insbesondere bei großen Stoßstärken fällt dieser Umstand mit bis zu 5% Abweichung ins Gewicht. Bei runden Kanälen konnte diese Tatsache nicht beobachtet werden. Grund dafür könnten die geringere Steifigkeit der quadratischen Kanäle gegenüber den runden Rohren sein. Dadurch ergab sich bei großen Stoßstärken eine Eigenschwingung der

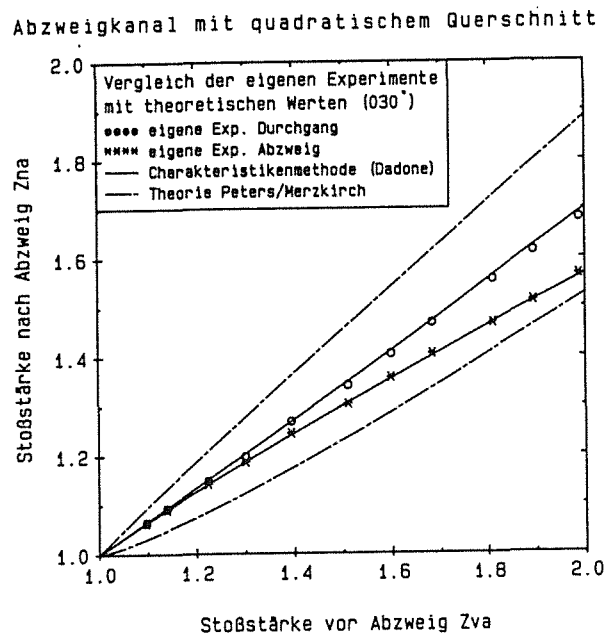
Kanäle, deren Amplitude teilweise mehrere Millimeter betrug. Dadurch könnte ein etwas höherer Strömungswiderstand entstehen, als dies bei stationären Untersuchungen der Fall war. Bei extrem steifen bzw. schweren Kanälen müßte dieser Effekt dann nahezu verschwinden. Eine weitere Fehlerquelle ist in der Bestimmung der Druckbeiwerte  $q$  zu suchen. Aus konstruktiven Gründen konnte der Druckaufnehmer zur Bestimmung des Stoßes nicht exakt an der gleichen Stelle angebracht werden wie die statischen Aufnehmer, so daß die Druckänderung der Nachlaufströmung des zu messenden Stoßes nicht identisch war mit der im stationären Fall gemessenen. Die Abweichungen sind jedoch selbst bei einem  $150^\circ$ -Abzweig und einem Drucksprung von einem Bar ( $z = 2$ ) so minimal, daß die angesprochene Theorie auch bei rechteckigen Kanälen ihre volle Gültigkeit behält. Das Modell ist somit auf Abzweige beliebiger Konfiguration erweiterbar. Voraussetzung ist dabei jedoch eine experimentelle (Druckmessung in stationärer Strömung) oder theoretische (Handbücher, analytische Lösung) Bestimmung des  $\Delta p - \dot{V}$ -Verlaufs für Durchgangs- und Abzweigrohr. Je genauer solch eine Bestimmung durchgeführt werden kann, desto exakter wird das Ergebnis der Stoßberechnung ausfallen.

Jedoch hat diese Vorgehensweise ihre Grenzen erreicht, wenn eine Beschreibung der Vorgänge in der Nachlaufströmung des Stoßes durch eine stationäre Strömung nicht mehr möglich ist. Insbesondere können diverse Einbauten im Abzweig wie z.B. Leitschaukeln, Klappen usw. zu Reflexionen des einfallenden Stoßes führen, die selbstverständlich durch eine stationäre Beschreibung nicht erfaßt werden. Die weitere Voraussetzung der isentropen Zustandsänderung ist im betrachteten Bereich  $z < 2.5$  mit ausreichender Genauigkeit immer erfüllt, wie sich anhand von Anhang A3 leicht beweisen läßt. Außerdem wird angenommen, daß zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort im Kanal Unterschallströmung herrscht. Diese Annahme muß nicht zwingend für jede Abzweigkonfiguration erfüllt sein. Bei Abzweigen mit relativ großen Querschnittsänderungen oder großen Eingangsstoßstärken kann es aufgrund verschiedener Beschleunigungseffekte zur Überschallströmung oder zum Auftreten eines Sekundärstoßes kommen. Unter diesen Bedingungen versagt das vorgestellte Rechenmodell. Jedoch dürften die angesprochenen Effekte für handelsübliche Abzweige bei Stoßstärken bis maximal  $z = 2.5$  nur eine untergeordnete Rolle spielen. So kann mit der im Kapitel 2.2 abgeleiteten Theorie die Stoßaufteilung in Kanalabzweigen mit relativ kleinen Querschnittsänderungen bis zu Stoßstärken von etwa 2.5 mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden.

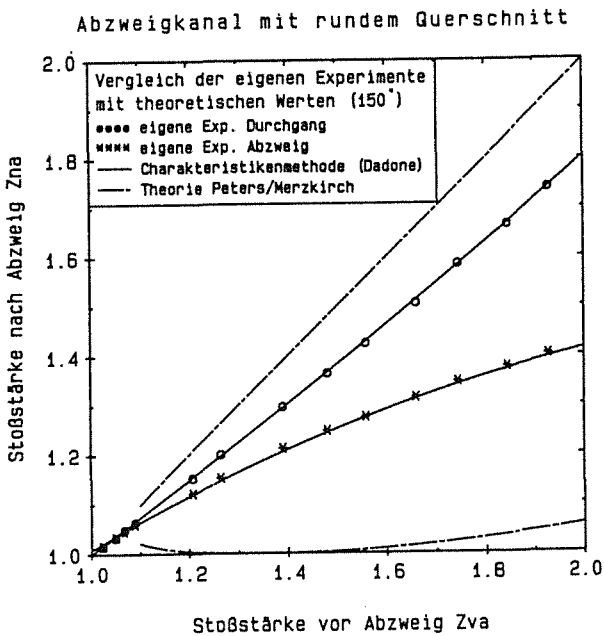
Bei größeren Stoßstärken kann die Theorie von Peters und Merzkirch /25,26/ jedoch befriedigende Ergebnisse liefern, wie ein Vergleich mit Experimenten von Heilig /40/ bis  $z=9$  in Bild 5.18 zeigt. Ab Eingangsstoßstärken von etwa 2.5 ist ein nahezu proportionaler Zusammenhang zwischen den Stoßintensitäten vor und nach dem Abzweig zu erkennen, der auch mit der Modellrechnung bestimmt werden kann.



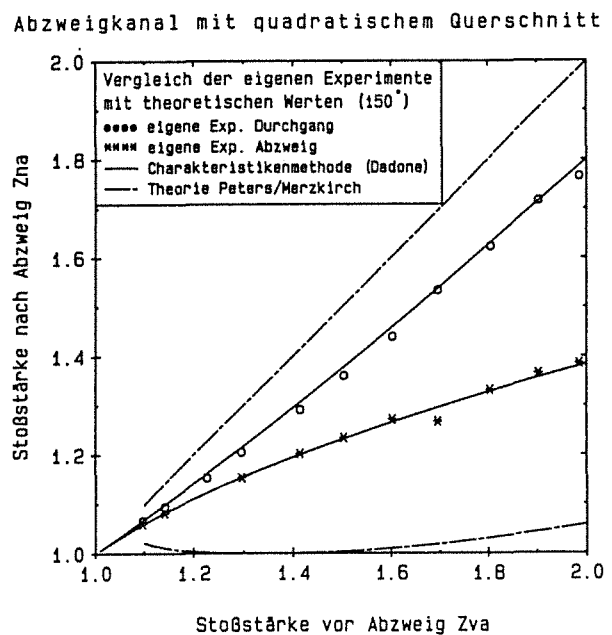
**Bild 5.14:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Peters/Merzkirch und der Theorie von Dadone et al., runder Querschnitt, 30° – Abzweig



**Bild 5.15:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Peters/Merzkirch und der Theorie von Dadone et al., quadratischer Querschnitt, 30° – Abzweig



**Bild 5.16:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Peters/Merzkirch und der Theorie von Dadone et al., runder Querschnitt, 150° – Abzweig



**Bild 5.17:** Vergleich der Experimente mit der Theorie von Peters/Merzkirch und der Theorie von Dadone et al., quadratischer Querschnitt, 150° – Abzweig



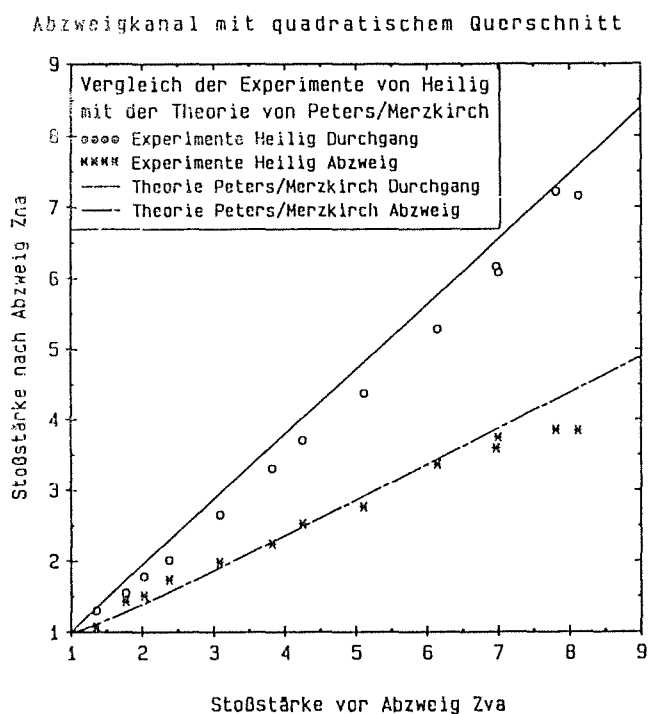


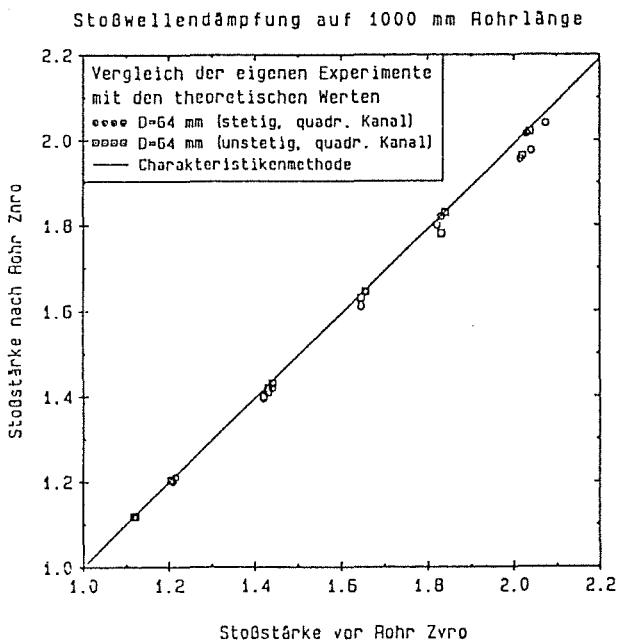
Bild 5.18: Vergleich der Experimente von Heilig /40/ mit der Theorie von Peters und Merzkirch /25,26/ bei großen Stoßstärken

### 5.3 Stoßdämpfung in geraden, reibungsbehafteten Kanälen

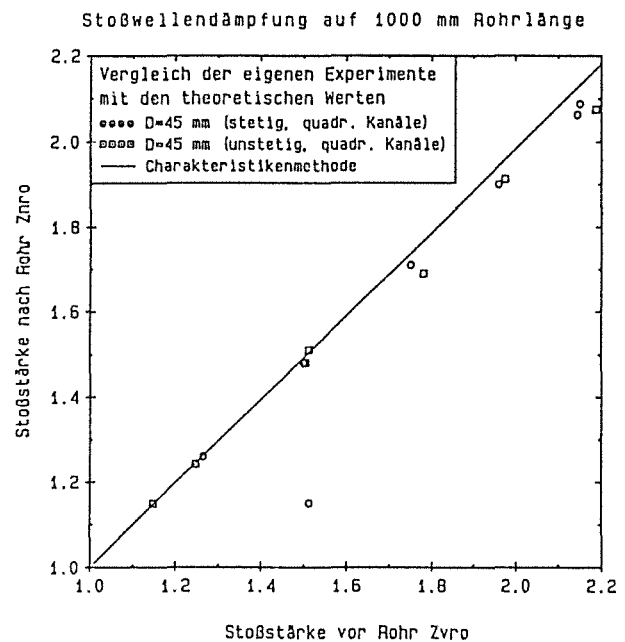
Als letztes wird die Stoßausbreitung in der am häufigsten verwendeten Komponente, dem geraden, reibungsbehafteten Rohr untersucht. Vor und nach der Düse bzw. dem Diffusor wurden jeweils zwei Druckaufnehmer in Abstand von einem Meter angebracht. Dadurch war es möglich, die Stoßdämpfung allein aufgrund der Reibung im Rohr zu messen. Auch hier konnte kein Vergleich mit Messungen anderer Autoren die eigenen Experimente bestätigen. In den Veröffentlichungen über die Stoßausbreitung in querschnittsvariierenden und verzweigten Kanälen wurde die Änderung der Stoßintensität im geraden Rohr nicht beschrieben. Experimentelle Daten über eine reine Stoßdämpfung im Kanal ausschließlich aufgrund der Reibung lagen nicht vor. Außerdem ist die Abnahme des Druckes längs eines einen Meter langen Rohres so gering, daß nur ein Vergleich mit Kanälen exakt der gleichen Geometrie ein sinnvolles Ergebnis geliefert hätte. Theoretische Untersuchungen, insbesondere über den Einfluß der Stoßgrenzschicht, sind in der Literatur jedoch vorhanden und können z.B. bei Mirels /49/ und anderen Autoren /47 – 51/ nachgelesen werden.

Die Bilder 5.19 bis 5.22 zeigen die gemessenen Stoßstärken nach Durchlaufen eines quadratischen Kanals mit einem Meter Länge im Vergleich zur Theorie nach der Charakteristikenmethode, variiert wurde dabei die Kantenlänge des Querschnitts. Für das 64x64 mm<sup>2</sup> große Kanalstück ist eine sehr geringe Dämpfung zu verzeichnen (Bild 5.19), die auch durch die berechneten Werte erfaßt wird. Insgesamt werden die gemessenen Stoßintensitäten im oberen Bereich leicht überschätzt. Diese Tendenz nimmt bei einem Kanal mit 45 mm Kantenlänge zu (Bild 5.20). Doch haben sich bei diesem Kanalstück schon bei der Untersuchung

des querschnittsvariierenden Rohres mit Flächenverhältnis  $A_{21}$  bzw.  $A_{12} = 4$  stärkere Schwankungen und Abweichungen ergeben. Bei dem  $32 \times 32 \text{ mm}^2$  großen Rohr (Bild 5.21) sind die Experimente nahezu identisch mit den modelltheoretisch bestimmten Stoßstärken. Eine Tendenz zur Überschätzung ist minimal. Beim  $22 \times 22 \text{ mm}^2$  großen Kanal ist jedoch wieder eine größere Abweichung festzustellen (Bild 5.22).



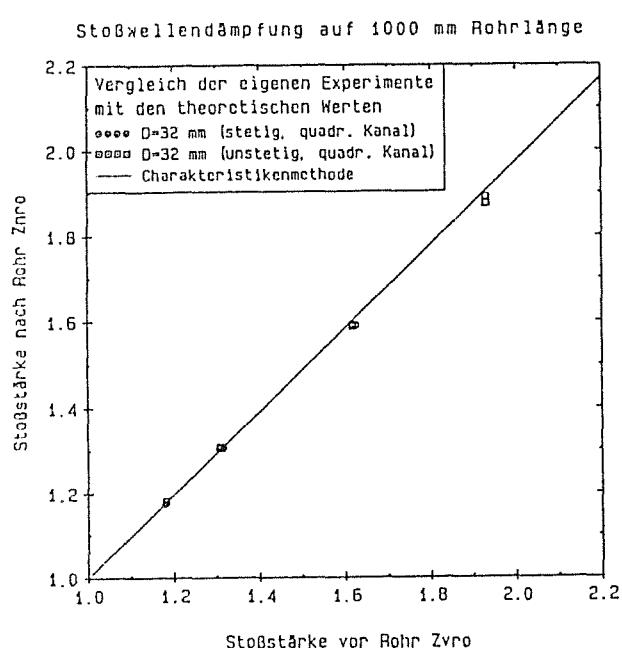
**Bild 5.19:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, Rohrdurchmesser 64 mm



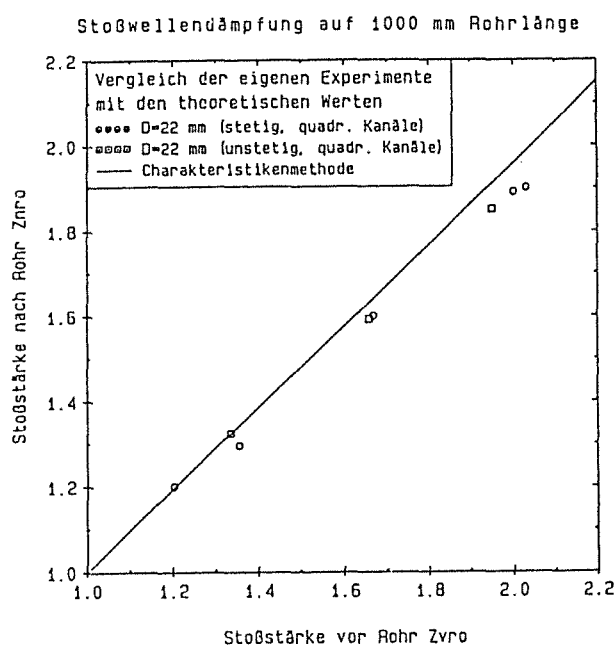
**Bild 5.20:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, Rohrdurchmesser 45 mm

Die Stoßänderung im Kanal wird rechenstechnisch wie die in einer Düse behandelt. Neben der durchgehenden, beschleunigten Welle tritt noch eine reflektierte Welle auf. Diese Welle wird direkt am Eintritt zur Düse erzeugt und stellt sich stromauf zu einer senkrechten Stoßfront auf. Beim geraden Rohr entstehen längs des Kanals aufgrund der Beschleunigung und des Druckabfalls in Strömungsrichtung unendlich viele, infinitesimal kleine Störwellen, die sich ähnlich einem reflektierten Stoß stromauf bewegen, sich aber nicht aufteilen. Dadurch entsteht zwar eine Druckerhöhung vor dem betrachteten Bereich des Rohres, aber keine echte Stoßwelle. Dieser Druckanstieg entspricht ungefähr der Stoßstärke des berechneten reflektierten Stoßes. Wird das Rohr in mehrere Teilkanäle gegliedert, kann eine größere Genauigkeit erreicht werden. Bei einer groben Gliederung wird der reflektierte Stoß über- und der durchgehende Stoß unterschätzt. Dadurch können die Abweichungen in den Bildern

5.19 bis 5.22 erklärt werden. Doch diese Abweichungen sind insgesamt so minimal, daß für eine ingenieurmäßige Anwendung eine feinere Einteilung nicht notwendig scheint.



**Bild 5.21:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, Rohrdurchmesser 32 mm



**Bild 5.22:** Vergleich der Experimente mit der Charakteristikenmethode, Rohrdurchmesser 22 mm

## 5.4 Stoßausbreitung im gesamten Kanalsystem

Ziel der Arbeit war die Bereitstellung eines Rechencodes zur Beschreibung der Stoßausbreitung in Lüftungssystemen bzw. strömungstechnischen Netzwerken, bestehend aus verschiedenen Einzelkomponenten. Dazu war es notwendig, zuerst eine Modellierung der einzelnen Anlagenteile zu realisieren. Dabei konnte man sich auf kleine Stoßstärken ( $z=2.5$ ) beschränken, da höhere Drücke in den großtechnisch benutzten Zu- und Abluftanlagen nicht zu erwarten waren. Weiterhin sollte eine ingenieurmäßige Lösung des beschriebenen Modells gefunden werden. Auf die Benutzung aufwendiger Finite-Elemente-Methoden oder anderer numerischer Simulationen wurde bewußt verzichtet. Vielmehr sollte auf der Basis der Auslegungsdaten des Netzwerkes bzw. der Kennlinien der einzelnen Anlagenkomponenten für stationäre Strömung auch die Möglichkeit geboten werden, die Belastung durch instationäre Schockwellen zu bestimmen. Da die benötigten Daten Bestandteil der Konzeption und Konstruktion jeder Lüftungsanlage sind, erfordert die Auslegung auf Stoßwellen nur

einen geringfügigen Mehraufwand. Die Rechnung kann auf jedem Personal-Computer durchgeführt werden, und die Rechenzeiten liegen je nach Komplexität der Anlage zwischen einer und vier Stunden. Die Berechnungen für die Einzelkomponenten sind alle hinreichend verifiziert und auch die Kombination Rohr – Düse/Diffusor – Rohr bereitete bei der theoretischen Behandlung keine Schwierigkeiten, wie ein Vergleich mit den Experimenten bewies.

Die Grenzen dieser Modellrechnung wurden deutlich in den vorangehenden Kapiteln aufgezeigt. Es konnte nachgewiesen werden, daß die gemessenen Stoßstärken unter den gemachten Voraussetzungen mit für den Ingenieur mehr als ausreichender Genauigkeit berechnet werden können. Die anfänglichen Schwierigkeiten bei der numerischen Lösung der Gleichungssysteme konnten, wenn auch auf Kosten der Rechenzeit, weitgehend gelöst werden. Trotzdem wäre die Integration eines stabileren und schnelleren Lösungsalgorithmus wünschenswert. Dies wird jedoch Bestandteil späterer Arbeiten sein.

Die experimentelle Überprüfung der Modellierung eines komplexen Netzwerkes konnte leider nicht realisiert werden. Die Kombination mehrerer Abzweige und/oder querschnittsvariierender Komponenten war aufgrund des begrenzten Raumes und der vorgegebenen Zeit nicht möglich. Dennoch scheint aufgrund der Einzelergebnisse und der physikalisch sinnvollen Lösungen der Berechnungen an komplexen Netzwerken eine Extrapolation der Ergebnisse legitim. Somit sind die Voraussetzungen für eine Berechnung der Stoßwellenausbreitung in komplexen Lüftungssystemen und damit die Abschätzung der Belastung sowohl der Kanäle selbst als auch der anschließenden Filtersysteme gewährleistet. Vorhandene Sicherheitsreserven können quantifiziert werden.

## 6. Zusammenfassung

Bei Störfällen in kern- oder verfahrenstechnischen Anlagen können durch Explosionen oder Deflagrationen Druckstörungen entstehen, die sich in Lüftungskanälen unter Umständen zu Verdichtungsstößen verstärken. Um das daraus für die Lüftungsanlage und die nachfolgenden Filterstrecken resultierende Gefährdungspotential abschätzen zu können, wurde die Stoßausbreitung in Kanalverzweigungen jeweils runden und quadratischen Querschnitts untersucht. In Ergänzung dazu wurden die Arbeiten auf divergierende und konvergierende Kanäle ausgedehnt. Die experimentellen Ergebnisse wurden mit speziellen Theorien zur Berechnung der Stoßausbreitung in verzweigten und querschnittsvariierenden Kanälen aus der Literatur verglichen. Zur Berechnung der Stoßintensitäten nach Düse bzw. Diffusor wurde zusätzlich ein selbstentwickeltes Rechenmodell herangezogen.

Das Programm der Verzweigungsuntersuchungen an runden und quadratischen Kanälen umfaßte Experimente mit fünf Abzweigwinkeln von  $30^\circ$  bis  $150^\circ$  bei Variation der Stoßstärke von  $z = 1.05$  bis  $z = 2.0$ . Bei den Versuchen mit Querschnittsvariation betrug das Flächenverhältnis für Düse bzw. Diffusor  $A_{12}$  bzw.  $A_{21} = 2, 4$  und  $8.4$ . Hierzu wurde jeweils für beide Komponenten die Stoßstärke von  $z = 1.05$  bis  $z = 2.5$  gesteigert. Durch Visualisierung der gebeugten Stoßfront in querschnittsvariierenden Rechteckkanälen mittels schlieren- und schattenoptischer Meßmethoden wurde zusätzlich das Verhalten eines bei größeren Stoßstärken und Flächenverhältnissen auftretenden Sekundärstoßes untersucht. Die dort erzielten Ergebnisse dienten zur Aufstellung des Rechenmodells für Düse und Diffusor.

Die erzielten Meßergebnisse der Abzweigversuche wurden jeweils mit den Theorien von Peters und Merzkirch bzw. Dadone et al. verglichen. Die Untersuchungen ergaben im betrachteten Stoßstärkenbereich bis  $z = 2$  nur eine unbefriedigende Übereinstimmung der Theorie von Peters und Merzkirch mit den gemessenen Werten. Die Stoßstärke im Abzweig wird teilweise erheblich zu niedrig bewertet, während im Durchgang zu hohe Werte vorhergesagt werden. Für größere Drucksprünge kann mit der angesprochenen Modellrechnung dagegen eine gute Übereinstimmung erhalten werden. Durch die Theorie von Dadone, bei der ein Gleichungssystem von 15 Unbekannten gelöst werden muß, wurde dagegen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Experimenten im unteren Stoßstärkenbereich festgestellt. Die sehr hohe Genauigkeit basiert hauptsächlich auf der Berücksichtigung von Verlusttermen im Impulssatz, die in stationären Strömungsversuchen ermittelt wurden. Bei größeren Stoßstärken versagt diese Theorie jedoch, da über die Stoßfront hinweg Isentropie vorausgesetzt wurde.

Der Vergleich der Versuchsergebnisse bei Flächenänderung mit den nach Whitham errechneten Werten ergab im Bereich mittlerer Stoßstärken  $1.4 \leq z \leq 2.5$  starke Abweichungen

von den Experimenten. Insbesondere bei großen Flächengradienten und Flächenverhältnissen gewinnt dieser Fehler an Bedeutung. Außerdem ist mit dieser Theorie eine Berechnung reflektierter Expansions – und Stoßwellen nicht möglich. Für größere Stoßstärken können jedoch überzeugende Ergebnisse erhalten werden, wie ein Vergleich mit den der Literatur entnommenen Experimenten zeigt. Eine Erweiterung des Rechenmodells von Dadone auf querschnittsvariierende Kanäle kann die Lücke zwischen sehr kleinen und sehr großen Stoßwellen schließen. Durch Implementierung empirischer Druckbeiwerte, die entweder aus stationären Strömungsuntersuchungen oder lüftungstechnischen Handbüchern gewonnen werden können, ist eine Berechnung der Wellenausbreitung in beliebigen Anlagenkomponenten möglich. Das Auftreten von Sekundärstößen aufgrund einer Beschleunigung der Strömung auf Schallgeschwindigkeit kann berücksichtigt werden. Durch Verknüpfung der einzelnen Anlagenteile können selbst komplexere lüftungstechnische Netzwerke modelliert werden. Dadurch ist eine Extrapolation von bekannten Zusammenhängen bei stationärer Strömung auf die instationäre Stoßwellenausbreitung möglich.

## 7. Anhang

### A 1. Stromfadentheorie bei veränderlichem Querschnitt

Für eine kompressible, eindimensionale Strömung ergeben sich bei veränderlichem Querschnitt nachfolgend aufgeführte Beziehungen für die Zustandsänderungen von  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$  und  $T$ . Dabei wird Isentropie vorausgesetzt. Ausgangspunkt zur Ableitung der beschreibenden Gleichungen sind die eindimensionalen Erhaltungssätze der Masse, des Impulses und der Energie sowie die ideale Gasgleichung. Die Indizes beziehen sich auf die Gleichungen in Kapitel 2.

Differentialgleichungen

$$\frac{dp}{p} = \frac{-\kappa M^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-M^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{-\frac{\kappa-1}{2} M^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

Integralbeziehungen

$$\frac{p_4}{p_2} = \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_4^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (\text{A1})$$

$$\frac{\rho_4}{\rho_2} = \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_4^2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (\text{A2})$$

$$\frac{A_4}{A_2} = \frac{M_2}{M_4} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_4^2} \right]^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \quad (\text{A3})$$

$$\frac{c_4}{c_2} = \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_4^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A4})$$

$$\frac{T_4}{T_2} = \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_4^2} \right] \quad (\text{A5})$$

## A 2. Stoßgleichungen für den Fall einer stationären, reibungsfreien Strömung

Die beschreibenden Gleichungen ergeben sich aus den Erhaltungssätzen /9/

$$\text{Massenerhaltung:} \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (\text{A6})$$

$$\text{Impulserhaltung:} \quad \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (\text{A7})$$

$$\text{Energieerhaltung:} \quad i_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = i_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (\text{A8})$$

Setzt man nun für  $\kappa \frac{p}{\rho} = c^2 = \kappa RT$  und für  $\frac{u^2}{c^2} = M^2$  und bezeichnet die Größen nach dem Stoß mit ( $\hat{\cdot}$ ), ergibt sich unter Benutzung der idealen Gasgleichung:

$$\frac{\hat{u}}{u} = \frac{\hat{\rho}}{\rho} = 1 - \frac{2}{\kappa+1} \left[ 1 - \frac{1}{M^2} \right] \text{ bzw. } \hat{M}^2 = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2}{\kappa M^2 - \frac{\kappa-1}{2}} \quad (\text{A9})$$

$$\frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M^2 - 1) \quad (\text{A10})$$

$$\frac{\hat{c}^2}{c^2} = \frac{\hat{T}}{T} = \frac{\hat{p}}{p} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \quad (\text{A11})$$

Mit den Gleichungen A9 bis A11 sind nun die Änderungen von Geschwindigkeit, Dichte, Druck und Temperatur über den Stoß hinweg in einem Rohr konstanten Querschnitts gegeben. Vor und nach dem Stoß kann wieder näherungsweise isentrop gerechnet werden.

## A 3. Entropieänderung über einen Verdichtungsstoß hinweg

Aus  $ds = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho}$  /9/ ergibt sich durch Integration für ein ideales Gas mit  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ :

$$\frac{\hat{s} - s}{c_v} = \ln \left\{ \left[ 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M^2 - 1) \right] \left[ 1 - \frac{2}{\kappa+1} \left[ 1 - \frac{1}{M^2} \right] \right]^\kappa \right\} \quad (\text{A12})$$

als Änderung der Entropie über den Stoß



Eine Diskussion dieser Gleichung liefert als Zwischenergebnis:

$$M > 1: \hat{s} - s > 0 \text{ thermodynamisch möglich}$$

$$M < 1: \hat{s} - s < 0 \text{ thermodynamisch nicht möglich (2. HS)}$$

Um die Isentropie bei schwachen Stößen zu bestätigen, stellt man die Entropieänderung (A12) als Funktion der relativen Druckänderungen  $\frac{\delta p}{p} = \frac{\hat{p} - p}{p} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M^2 - 1)$  dar und führt eine Reihenentwicklung durch /9/. Dabei heben sich die linearen und quadratischen Terme auf. Der erste Beitrag wird durch die Summe der kubischen Terme geliefert und man erhält für  $\delta p/p \ll 1$  schließlich

$$\frac{\hat{s} - s}{c_v} \approx \frac{(\kappa - 1)(\kappa + 1)}{12\kappa^2} \left[ \frac{\delta p}{p} \right]^3. \quad (\text{A13})$$

Für Luft ( $\kappa = 1.40$ ) ergibt sich  $\frac{\hat{s} - s}{c_v} \approx 0.04 \left[ \frac{\delta p}{p} \right]^3.$

Dieses wichtige Ergebnis zeigt, daß die Zunahme der Entropie im Stoß erst mit der dritten Potenz der Stoßstärke erfolgt. Bei schwachen Stößen kann in guter Näherung isentrop gerechnet werden. Es zeigt auch, daß Verdünnungsstöße nicht möglich sind, denn ein negatives  $\delta p/p$  würde eine Entropieabnahme bedeuten.

#### A 4. Grundlagen der nichtlinearen Wellenausbreitung

##### Grundgleichungen in differentieller Form

Die Kontinuitätsgleichung liefert den Zusammenhang zwischen der Dichte –  $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$  und der Geschwindigkeitsänderung  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  /9/:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A14})$$

Der Impulssatz wird in der Form der Eulergleichung benutzt und liefert den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits –  $\left(\frac{du}{dt}\right)$  und Druckänderung  $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{A15})$$

Der Energiesatz reduziert sich bei isentroper Strömung ( $ds = 0$ ) auf folgenden Zusammenhang zwischen Druck und Dichte:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const.}, \text{ mit } \kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (\text{A16})$$

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} \Big|_{s=\text{const}}.$$

Mit Hilfe der thermodynamischen Beziehungen /9/

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\kappa-1} 2c dc \quad \text{und} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\kappa-1} \frac{2}{c} dc$$

können die Druck – und Dichteänderung durch die Änderung der Schallgeschwindigkeit  $c$  ersetzt werden.

Schreibt man die totalen Differentiale in partielle Differentiale um ( $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$ ), ergeben sich für die Massen – und Impulserhaltung folgende Differentialgleichungen:

Kontinuitätsgleichung: 
$$\frac{2}{\kappa-1} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{2}{\kappa-1} u \frac{\partial c}{\partial x} c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Eulergleichung: 
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{c}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

Aus der Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ u + \frac{2}{\kappa-1} \frac{c}{\partial x} \right] + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \left[ u + \frac{2}{\kappa-1} \frac{c}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{A17})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ u - \frac{2}{\kappa-1} \frac{c}{\partial x} \right] + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \left[ u - \frac{2}{\kappa-1} \frac{c}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{A18})$$

Es treten hier nur noch Ableitungen nach Weg und Zeit von einer Größe  $\left[ u \pm \frac{2}{\kappa-1} \frac{c}{\partial x} \right]$  auf. Aufgrund dieser Eigenschaft können durch eine Transformation

$$\xi = \xi(x,t) \quad \text{und} \quad \eta = \eta(x,t)$$

neue Variablen  $\xi, \eta$  eingeführt werden. In der  $x-t$ -Ebene werden zwei beliebige Kurvenscharen  $\xi(x,t) = \text{const}$  und  $\eta(x,t) = \text{const}$  als neues Koordinatennetz benutzt.

Die Transformation liefert für  $\eta = \text{const.}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} ; \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} ; \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_x , \frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi_t$$

analog für  $\xi = \text{const.}$

Aus Gleichung (A14) wird somit

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ u + \frac{2c}{\kappa - 1} \right] \left[ \xi_t + (u + c) \xi_x \right] = 0, \quad \text{für } \eta = \text{const.}, \quad (\text{A19})$$

und aus Gleichung (A15)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ u - \frac{2c}{\kappa - 1} \right] \left[ \eta_t + (u - c) \eta_x \right] = 0, \quad \text{für } \xi = \text{const.} \quad (\text{A20})$$

Als Lösung der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$u + \frac{2c}{\kappa - 1} = \text{const. längs Kurven } \eta = \text{const.} \quad (\text{A21})$$

$$\frac{dx}{dt} = u + c \quad (\text{linkslaufende Wellen})$$

$$u - \frac{2c}{\kappa - 1} = \text{const. längs Kurven } \xi = \text{const.} \quad (\text{A22})$$

$$\frac{dx}{dt} = u - c \quad (\text{rechtslaufende Wellen})$$

$\xi$  und  $\eta$  nennt man die Charakteristiken des Gleichungssystems.

Damit verlaufen  $\xi = \text{const}$  und  $\eta = \text{const}$  symmetrisch zur Teilchenbahn.

## A 5. Grundgleichungen des nichtlinearen Stoßwellenrohrs

Mit Hilfe der Charakteristikenbedingungen und der Stoßgleichungen ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Stoßstärke  $p_2/p_1$  und dem Druckverhältnis über der Membran  $p_4/p_1$ .

$$\frac{p_1}{p_4} = \frac{p_1}{p_2} \left[ 1 - \frac{\frac{\kappa_4 - 1}{2} \frac{c_1}{c_4} \left[ \frac{p_2}{p_1} - 1 \right]}{\kappa_1 \sqrt{1 + \frac{\kappa_1 + 1}{2 \kappa_1} \left[ \frac{p_2}{p_1} - 1 \right]}} \right]^{\frac{2 \kappa_4}{\kappa_4 - 1}} . \quad (\text{A23})$$

Gleichung (A23) gibt bei gewünschter Stoßstärke  $z = \frac{p_2}{p_1}$  das dafür notwendige Vor-  
druckverhältnis  $\frac{p_1}{p_4}$  an. Soll bei vorgegebenem  $\frac{p_1}{p_4}$  die Stoßstärke berechnet werden, so kann  
dies nur iterativ geschehen, da  $\frac{p_2}{p_1}$  in Gleichung (A23) implizit vorkommt.

Weiterhin ist der Zusammenhang zwischen Stoßstärke  $z$  und Stoßmachzahl  $M_s$  von  
Interesse. Aus Gleichung (A10) kann man die Stoßmachzahl wie folgt berechnen:

$$M_s = \sqrt{\frac{\kappa_1 + 1}{2 \kappa_1} \left[ \frac{p_2}{p_1} - 1 \right] + 1} . \quad (\text{A24})$$

Einen Zusammenhang zwischen Strömungsmachzahl und Stoßmachzahl liefert uns Gleichung (A9)

$$M_2 = \frac{u_2}{c_1} = \frac{2}{\kappa_1 + 1} \left[ M_s - \frac{1}{M_s} \right] , \quad (\text{A25})$$

bzw. in Abhängigkeit von der Stoßstärke durch Einsetzen von  $M_s$  aus Gleichung (A24)

$$M_2 = \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\kappa_1 \sqrt{1 + \frac{\kappa_1 + 1}{2 \kappa_1} \left[ \frac{p_2}{p_1} - 1 \right]}} . \quad (\text{A26})$$

Die Änderung der Dichte über dem Stoß ergibt sich aus Gleichung (A9):

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{2}{\kappa_1 + 1} \left[ 1 - \frac{1}{M_s^2} \right] \quad (\text{A27})$$

oder als Funktion der Stoßstärke mit Gleichung (A24):

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1}} \quad (\text{A28})$$

Aus  $\frac{p}{\rho} = \kappa T$  folgt unmittelbar  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2}$ .

Einsetzen von (A28) liefert für den Temperatursprung über den Stoß hinweg:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1}} \quad (\text{A29})$$

Als weitere wichtige Beziehung bleibt nur noch die Berechnung des Drucks nach einer Stoßreflexion an einer festen Wand anzugeben:

$$\frac{p_R}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{(3\kappa_1 - 1) \frac{p_2}{p_1} - (\kappa_1 - 1)}{(\kappa_1 - 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa_1 + 1)} \quad (\text{A30})$$

$\frac{p_R}{p_1}$  gibt die Stoßstärke nach der Reflexion an einer festen Wand an und kann erheblich größer sein als  $z = \frac{p_2}{p_1}$  vor der Reflexion.

Damit sind nun alle wichtigen Größen hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß einschließlich des reflektierten Stoßes sowohl in Abhängigkeit von der Stoßstärke  $z = \frac{p_2}{p_1}$  als auch von der Stoßmachzahl  $M_s = \frac{v_s}{c_1}$  bekannt.

## A 6. Gleichungen zum Sekundärstoß

Die Gleichungen (2.36) – (2.37) in Kapitel 2 über den Sekundärstoß  $\xi_{II}$  beschreiben einen Verdichtungsstoß in einer Strömung. Vor dem senkrechten Stoß herrscht stets Überschall ( $M_3 > 1$ ), hinter dem Stoß stets Unterschall ( $M_4 < 1$ ).

Die Zustandsänderungen über den zweiten, stärkeren Verdichtungsstoß werden als anisentrop angenommen. Die Strömung durch den Stoß wird als reibungsfrei angesehen, auch wenn beim Übergang Verluste infolge Dissipation entstehen. Ein Energie – oder Massenaustausch mit der Umgebung findet nicht statt.

Ziel ist es, die Größen des Zustandes (4) stromab vom Stoß als Funktion der Größen des Zustandes (3) der Anströmung (vor dem Stoß) darzustellen. Auch hier gelten nur die Grundgleichungen von Masse –, Impuls – und Energieerhaltung. Als weitere Voraussetzung gilt, daß sich die unbekannte Fläche  $A_x$  (am Ort des Sekundärstoßes im Diffusor) über den Stoß  $\xi_{II}$  nicht ändert. Da ein Verdichtungsstoß eine unendlich dünne Fläche senkrecht zur Rohrachse bildet, ist diese Voraussetzung erfüllt.

Die Euler – Gleichung für den eindimensionalen Fall ergibt mit der Kontinuitätsgleichung für  $A = \text{const.}$  integriert vom Zustand (3) nach (4) über ein Kontrollvolumen (siehe auch Gleichung A7):

$$\rho_3 u_3^2 + p_3 = \rho_4 u_4^2 + p_4 \quad (\text{A31})$$

Dividiert man beide Seiten von Gleichung (A31) durch  $\rho_3 u_3$  bzw.  $\rho_4 u_4$  (Massenerhaltung), erhält man:

$$u_3 - u_4 = \frac{p_4}{\rho_4 u_4} - \frac{p_3}{\rho_3 u_3} \quad (\text{A32})$$

Mit der Definition der Schallgeschwindigkeit für isentrope Strömung und  $A = \text{const}$  und einem idealen Gas mit konstanten spezifischen Wärmen gilt:

$$u_3 - u_4 = \frac{c_4^2}{\kappa u_4} - \frac{c_3^2}{\kappa u_3} \quad (\text{A33})$$

Benutzt man neben der Definition der Schallgeschwindigkeit die kritischen Werte ( $c^* = u$ ), die den Zustand beschreiben, in dem Schallgeschwindigkeit ( $M = 1$ ) erreicht bzw. überschritten wird, ergibt sich für die Energiegleichung folgender Zusammenhang (siehe auch Gleichung A8):

$$\frac{u_3^2}{2} + \frac{c_3^2}{\kappa - 1} = \frac{u_4^2}{2} + \frac{c_4^2}{\kappa - 1} = \frac{c^{*2}}{2} + \frac{c^{*2}}{\kappa - 1} = \frac{(\kappa + 1)}{2(\kappa - 1)} c^{*2} \quad (\text{A34})$$

Die Energiegleichung (A34) mit den kritischen Werten wird zum einen nach  $c_3^2$ , zum

anderen nach  $c_4^2$  aufgelöst:

$$c_{3,4}^2 = \frac{\kappa+1}{2} c^{*2} - \frac{\kappa-1}{2} u_{3,4}^2$$

Setzt man dies in Gleichung (A33) ein, ergibt sich nach einiger Umformung die von Prandtl /9/ aufgestellte Beziehung:

$$u_3 u_4 = c^{*2}$$

oder

$$M_3^* = \frac{1}{M_4^*} \quad (\text{A35})$$

Berücksichtigt man diesen Zusammenhang, bedeutet Gleichung (A35): vor einem Stoß strömt das Gas mit Überschallgeschwindigkeit, hinter dem Stoß mit Unterschallgeschwindigkeit (d.h.  $M_3 > 1$ ,  $M_4 < 1$ ). Eine formal mögliche Umkehrung dieser Aussage ist aus Entropiegründen ausgeschlossen.

Die Prandtl – Beziehung ist auf die kritische Schallgeschwindigkeit  $c^*$  bezogen. Um diese Beziehung bei der Berechnung des Sekundärstoßes verwenden zu können, muß sie auf die lokalen Schallgeschwindigkeiten vor und hinter dem Stoß bezogen werden. Dazu muß ein Zusammenhang hergestellt werden zwischen den lokalen Machzahlen  $M_3$ ,  $M_4$  und den kritischen Machzahlen  $M_3^*$ ,  $M_4^*$ . Unter der Voraussetzung eines idealen Gases mit konstanten spezifischen Wärmen und einer isentropen Zustandsänderung ergibt sich nachfolgende Beziehung /9/:

$$M_{3,4}^{*2} = \frac{M_{3,4}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_{3,4}^2 - 1)} \quad (\text{A36})$$

Ersetzt man mit Gleichung (A36)  $M_3^*$  und  $M_4^*$  in Gleichung (A35) und löst dann nach der Stoßstärke nach dem Sekundärstoß  $M_4$  auf, folgt Gleichung (2.38), die Prandtl – Beziehung, bezogen auf die lokalen Schallgeschwindigkeiten in den Zuständen (3) und (4):

$$M_4^2 = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2}{\kappa M_3^2 - \frac{\kappa-1}{2}} \quad (2.38) \hat{=} (\text{A37})$$

Mit der Prandtl – Beziehung, Gleichung (A35), und der Kontinuitätsbeziehung für  $A = \text{const}$  kann man die Geschwindigkeits – und Dichteänderung über einen Stoß in einer

Strömung bestimmen:

$$\frac{u_3}{u_4} = \frac{u_3^2}{u_3 u_4} = \frac{u_3^2}{c^{*2}} = M_3^{*2} = \frac{M_3^2}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_3^2 - 1)}$$

Mit der Kontinuität ergibt sich

$$\frac{\rho_3}{\rho_4} = \frac{u_3}{u_4} = \frac{M_3^2}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_3^2 - 1)} \quad (\text{A38})$$

Um die Druckänderung über den Stoß zu ermitteln, wird der Impulssatz, Gleichung (A31), benutzt:

$$p_4 - p_3 = \rho_3 u_3^2 - \rho_4 u_4^2 \quad (\text{A39})$$

Mit der Kontinuität  $\rho_3 u_3 = \rho_4 u_4$  bei  $A_x = \text{const}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} p_4 - p_3 &= \rho_3 u_3 (u_3 - u_4) \\ \rightarrow \frac{p_4 - p_3}{p_3} &= \frac{\rho_3 u_3^2}{p_3} \left[ 1 - \frac{u_4}{u_3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A40})$$

Benutzt man die in Gleichung (A38) hergeleitete Geschwindigkeitsänderung über den Stoß, erhält man mit der Definition der Schallgeschwindigkeit für isentrope Strömung

$$\frac{p_4}{p_3} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (M_3^2 - 1). \quad (2.36) \hat{=} (\text{A41})$$

Der Impulssatz, Gleichung (A41), ist identisch mit Gleichung (2.36) über den Sekundärstoß.

Das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten über den Stoß, Gleichung (2.37), wird aus der idealen Gasgleichung gewonnen:

$$\left[ \frac{c_4}{c_3} \right]^2 = \left[ \frac{T_4}{T_3} \right] = \left[ \frac{p_4}{p_3} \right] \left[ \frac{\rho_3}{\rho_4} \right] \quad (\text{A42})$$

Unter Verwendung der Gleichungen (A38) und (A41) erhält man Gleichung (2.37):



$$\left(\frac{c_4}{c_3}\right)^2 = 1 + \frac{2(\kappa - 1) \kappa M_3^2}{(\kappa + 1)^2 M_3^2} + 1 [M_3^2 - 1] \quad (2.37) \hat{=} (A43)$$

Mit dem nichtlinearen Gleichungssystem, bestehend aus den Gleichungen (2.24) bis (2.38), ist ein im Diffusor (oder in der Düse) auftretender Sekundärstoß berechenbar. Das Gleichungssystem versagt dort, wo die Eingangsstoßstärke so schwach wird, daß kein Sekundärstoß auftritt. Diese untere Grenze ist eine Funktion des Flächenverhältnisses. Unterhalb dieser Grenze ist das nicht lineare Gleichungssystem, bestehend aus 9 Gleichungen (ohne Sekundärstoß), gültig. Beide ergeben an ihrer Gültigkeitsgrenze identische Wertepaare. Die theoretischen Kurven gehen ineinander über, wobei sich die Steigung der Geraden ändert.

## A 7. Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Ein System aus  $n$  nichtlinearen Gleichungen ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ) hat folgende Form /32/:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \quad (A44)$$

Die Funktionen  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ,  $i = 1(1)n$ , sind in einem Definitionsbereich  $D_f$  (endlich, abgeschlossener Bereich des  $\mathbb{R}^n$ ) definiert, stetig und reellwertig.

Das Gleichungssystem (A44) geht mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{über in} \quad & f(x) = 0, \\ & f: D_f \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (A45)$$

### 1. Eindimensionales Newton – Verfahren

Die Funktion  $f$  ist in  $I = [a, b]$  zweimal stetig differenzierbar und besitzt eine einfache Nullstelle  $\xi$ , es ist also  $f(\xi) = 0$  und  $f'(\xi) \neq 0$ . Die Lösung  $\xi$  der Gleichung  $f(x) = 0$  erhält man mit folgender allgemeiner Iterationsvorschrift /32,52,54/:

Algorithmus:

1. Schritt: Umformung der Gleichung  $f(x) = 0$  in eine äquivalente Form der Gestalt  $x = \varphi(x)$ .
2. Schritt: Intervall  $I \in \mathbb{R}^n$  festlegen, in dem eine Nullstelle von  $f$  liegt (Startwerte ermitteln: a) graphisch; b) Überschlagsrechnung durch z.B. Wertetabelle).
3. Schritt: Konvergenzbetrachtung, oft schwierig (evtl. Ausweg  $\rightarrow$  Einschlußverfahren für Nullstellen mit Vorzeichenwechsel). Allgemein hilft man sich beim Iterationsverfahren, indem man mit gegebenem Startwert und dann mit den errechneten Folgewerten folgende Abfrage durchführt:

$$(1) \quad |\varphi'(x^{(i)})| < 1 \text{ bzw. die Ungleichung} \quad (\text{A46})$$

$$\begin{aligned} |x^{(i+1)} - x^{(i)}| &= |\varphi(x^{(i)}) - \varphi(x^{(i-1)})| \\ &< |x^{(i)} - x^{(i-1)}| \end{aligned} \quad (\text{A47})$$

$$(2) \quad \varphi(x^{(i)}) \in I. \quad (\text{A48})$$

4. Schritt: Iterationsvorschrift erstellen

$$x^{(i+1)} = \varphi(x^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A49})$$

gilt nur dann, wenn

$x^{(i+1)} = \varphi(x^{(i)}) \in I$ , da  $\varphi$  (Schrittfunktion) nur für  $x \in I$  erklärt ist.

5. Schritt: Berechnung der Iterationsfolge  $\{x^{(i)}\}$  für  $i = 1, 2, \dots$

Abbruchkriterien für die Berechnung:

wenn zu einem  $i = N$  ein vorgegebener Fehler  $\delta_i > 0$  unterschritten wird

- (1) relativer Fehler

$$|x^{(i+1)} - x^{(i)}| \leq \delta_1 |x^{(i+1)}| \quad (\text{A50})$$

- (2) absoluter Fehler

$$|x^{(i+1)} - x^{(i)}| \leq \delta_2 \quad (\text{A51})$$

und zusätzlich eventuell

$$(3) \quad |f(x^{(i)})| \leq \delta_3. \quad (\text{A52})$$

Die Abschätzung des relativen Fehlers ist der des absoluten im allgemeinen vorzuziehen.

6. Schritt: Fehlerabschätzung:  
Festsetzen eines Fehlers  $\varepsilon$  und Abfrage von

$$|x^{(i)} - \xi| < \varepsilon. \quad (\text{A53})$$

Das Newton – Verfahren wird folgendermaßen konstruiert: die reellwertige Funktion  $f(x)$  ist in  $I = [a,b]$  stetig differenzierbar und besitzt die Nullstelle  $\xi$  (Bild A1).

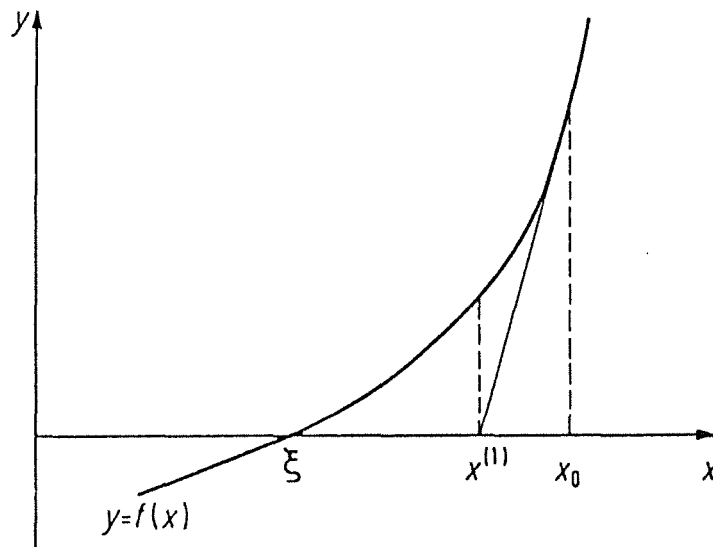


Bild A1: Newton – Verfahren

An einem Punkt  $(x, f(x))$  in  $x^{(0)}$  wird eine Tangente gelegt, und es gilt  $f'(x^{(0)}) \neq 0$ . Für die Nullstelle  $x^{(1)}$  dieser Tangente ergibt sich nun:

$$\frac{f(x^{(0)})}{x^{(0)} - x^{(1)}} = f'(x^{(0)}). \quad (\text{A54})$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}. \quad (\text{A55})$$

Die Schrittfunction  $\varphi$  lautet somit

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (\text{A56})$$

Hieraus folgt die Iterationsvorschrift

$$x^{(i+1)} = \varphi(x^{(i)}) = x^{(i)} - \frac{f(x^{(i)})}{f'(x^{(i)})}, \quad i = 0, 1, 2 \dots \quad (\text{A57})$$

Das Newton – Verfahren ist konvergent für Startwerte  $x^{(0)}$ , die nahe genug bei der Lösung  $\xi$  liegen (lokale Konvergenz). Bei einer einfachen Nullstelle ist es quadratisch konvergent, bei mehrfacher Nullstelle nimmt die Konvergenzgeschwindigkeit ab.

## 2. Mehrdimensionales Newton – Verfahren

Die reellwertigen Funktionen  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1(1)n$ , sind in  $D_f \in \mathbb{R}^n$  definiert und stetig differenzierbar /32,52,54/.

- 1.) Zu dem nichtlinearen System  $f(x) = 0$  wird ein äquivalentes System erzeugt:  $x = \varphi(x)$ , mit  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ .  $\bar{x}$  ist die Lösung von  $\varphi(x)$ , falls gilt:

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x})$$

- 2.) Definitionsbereich :  $D_f \subset \mathbb{R}^n$
- 3.) Konvergenzbetrachtung: analog zum eindimensionalen Fall  $|\varphi'| < 1$ , Ungleichung (A46), läßt sich mit der Funktionalmatrix (Jacobi – Matrix) eine ähnliche Bedingung formulieren. Besitzen die  $\varphi_i$  in  $D_f$  stetige partielle Ableitungen nach  $x_k$ , kann man sie in der Jacobi – Matrix  $J_\varphi$  zusammenfassen:

$$J_\varphi \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right]_{\substack{i=1(1)n \\ k=1(1)n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A58})$$

Als allgemeines Konvergenzkriterium gilt dann:

$$\| J_\varphi \| < 1 \quad (\text{A59})$$

Mit verschiedenen Matrixnormen ergeben sich folgende Kriterien (vereinfacht) /32/:

Zeilensummenkriterium:

$$\|J_{\varphi}\| = \max_{i=1(1)n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| < 1 \quad (\text{A60})$$

Spaltensummenkriterium:

$$\|J_{\varphi}\| = \max_{i=1(1)n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| < 1 \quad (\text{A61})$$

Kriterium nach Schmidt und v. Mises:

$$\|J_{\varphi}\| = \left[ \max_{i=1(1)n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right]^2 \right]^{1/2} < 1 \quad (\text{A62})$$

Newton – Verfahren für nichtlineare Systeme, Darstellung der Gleichungen (A44) als:

$$f(x) = 0 \quad (\text{A63})$$

Die Lösung ist  $\bar{x}$  im Definitionsbereich  $D_f$ , die  $f_i$  besitzen in  $D_f$  stetige zweite partielle Ableitungen, und für die Jacobi – Matrix (Funktionalmatrix)

$$J_f(x) \begin{matrix} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right] \\ i=1(1)n \\ k=1(1)n \end{matrix} = \begin{matrix} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (\text{A64})$$

gilt:  $\det(J_f) = 0$ , d.h., es existiert dann immer eine Umgebung  $D \in D_f$  von  $\bar{x}$ , in der eine Konvergenz des Iterationsverfahrens erreicht werden kann.  $D$  kann sehr klein sein, was bedeutet, daß der Startwert  $x^{(0)}$  nahe an der Lösung  $\bar{x}$  liegen muß, um eine stabile Lösung zu bekommen. Es läßt sich dann folgende Schrittfunktion für das Newton – Verfahren erstellen:

$$\varphi(x) = x - J_f^{-1} f(x) \quad (\text{A65})$$

Diese Schrittfunktion ähnelt der im eindimensionalen Newton – Verfahren, Gleichung (A56). Folgender formaler Übergang gilt:

		<b>Newton – Verfahren</b>		
<b>1 – dimensional</b>		→		<b>n – dimensional</b>
	<b>Skalare</b>	→		<b>Vektoren, Matrix</b>
Lösung:	$x$	→		$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (A66)
Funktion:	$f$	→		$f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$
Schrittfunktion:	$\varphi$	→		$\varphi(x) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$
Ableitung:	$(f')^{-1}$	→		$J_f^{-1}(x)$ inverse Jacobi – Matrix

Die Iterationsvorschrift lautet dann analog Gleichung (A57):

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - J_f^{-1}(x^{(i)}) f(x^{(i)}) \text{ bzw.} \quad (\text{A67})$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \Delta x^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A68})$$

$$\text{mit } \Delta x^{(i+1)} = -J_f^{-1}(x^{(i)}) f(x^{(i)}). \quad (\text{A69})$$

Um die Berechnung der inversen Jacobimatrix zu vermeiden, wird das lineare Gleichungssystem gelöst:

$$J_f(x^{(i)}) \Delta x^{(i+1)} = -f(x^{(i)}) \quad (\text{A70})$$

#### Algorithmus (Newton – Verfahren)

Für jedes  $i = 0, 1, 2, \dots$  sind folgende Schritte durchzuführen:

- 1.) Lösen des linearen Gleichungssystems (A70) zur Berechnung der  $\Delta x^{(i+1)}$
- 2.) Berechnen der  $x^{(i+1)}$  nach Gleichung (A68)

Als mögliche Abbruchbedingungen können verwendet werden:

$$(a) \quad i \geq i_{\max}, \quad i_{\max} \in \mathbb{N}$$

$$(b) \quad \|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| \leq \|x^{(i+1)}\| \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \quad (\text{A71})$$

$$(c) \quad ||x^{(i+1)} - x^{(i)}|| \leq \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$$

$$(d) \quad ||f(x^{(i+1)})|| \leq \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}$$

Mit diesem Algorithmus wird die Berechnung der Inversen in Gleichung (A67) ersetzt durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Die Konvergenz ist immer gewährleistet, wenn die Iteration nahe genug an der Lösung  $\bar{x}$  beginnt. Das Newton – Verfahren ist quadratisch konvergent.

### Vereinfachtes Newton – Verfahren

Um sich die Lösung des linearen Gleichungssystems bei jedem Iterationsschritt zu ersparen, kann statt Gleichung (A70) folgendes Gleichungssystem gelöst werden

$$J_f(x^{(0)}) \Delta x^{(i+1)} = -f(x^{(i)}) \quad (A72)$$

mit fester Matrix  $J_f(x^{(0)})$  für alle Iterationsschritte.

Um die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen, kann auch wie folgt gerechnet werden: man iteriert  $i_0$  Schritte mit fester Matrix  $J_f(x^{(0)})$  nach (A72), dann führt man die nächsten  $i_1$  Schritte mit fester Matrix  $J_f(x^{(i_0)})$  aus usw.

Im Programm SHOCK WAVE zur Berechnung der Lösung verschiedener Systeme nicht-linearer gasdynamischer Grundgleichungen wird das Newton – Verfahren angewandt. Die Lösung der Inversen (A67) wird durch die Lösung des linearen Gleichungssystems (A70) ersetzt. Diese wird nicht mit dem Gauß – Algorithmus, sondern mit der Householder – Transformation zur Lösung überbestimmter linearer Systeme berechnet.

### 3. Householder – Transformation zur Lösung überbestimmter linearer Gleichungssysteme

Die Lösung überbestimmter linearer Systeme wird mit Hilfe der Householder – Transformation durchgeführt. Hierbei wird  $A$  mit einer Dreieckszerlegung /32,52/ in ein Produkt aus einer orthogonalen Matrix  $Q$  und einer oberen Dreiecksmatrix  $R$  überführt, wobei sich die Kondition<sup>1</sup> von  $A$  nicht verschlechtert.

---

<sup>1</sup> Mit Hilfe direkter Methoden /32,53/ ermittelte Lösungen eines linearen Gleichungssystems sind meist nicht die exakten Lösungen, da

1. Rundungsfehler auftreten, die bei Häufung zur Verfälschung der Ergebnisse führen
2. bestehende Ungenauigkeiten in den Ausgangsgrößen Ungenauigkeiten in den Lösungen hervorrufen.

Wenn kleine Änderungen in den Ausgangsdaten große Änderungen in der Lösung hervorrufen, heißt die Lösung instabil; man spricht von einem schlecht konditionierten System.

Algorithmus für überbestimmte Gleichungssysteme (Householder – Transformation):

gegeben:  $Ax = a$ ,  $A = (m,n)$  – Matrix,  $a \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$   $\text{Rang}(A) = n$ .

gesucht:  $x \in \mathbb{R}^n$

1. Schritt: Zerlegung  $A = Q \cdot R$   
mit  $Q = (m,m)$  – Matrix, orthogonal  
und  $R = (m,n)$  – Dreiecksmatrix  
Orthogonalität<sup>2</sup>: es gilt  $Q^T = Q^{-1}$
2. Schritt: Berechnung von  $b \in \mathbb{R}^m$  aus  $b = Q^T a$
3. Schritt: Rückwärtselimination  $Rx = b$  mit dem Ergebnis  $x \in \mathbb{R}^n$

Die Householder – Transformation überführt eine  $(m,n)$  – Matrix  $A$  vom Rang  $n$  in eine obere  $(m,n)$  – Dreiecksmatrix  $R = (r_{ik})$ ,  $i = 1(1)m$ ,  $k = 1(1)n$ ,  $r_{ik} = 0$  für  $i > k$ . Dies wird erreicht durch sukzessive Linksmultiplikation von  $A$  mit symmetrischen, orthogonalen  $(m,n)$  – Matrizen  $H_i$  (Householder – Matrizen<sup>3</sup>), mit  $H_i H_i^T = E$ ,  $H_i^{-1} = H_i^T$ .

Durchführung der Householder – Transformation:

A.) Es wird definiert

$$A_1 = \begin{bmatrix} (1) \\ a_{ik} \end{bmatrix} = A = (a_{ik}) \text{ für } i = 1(1)m, \quad (A73)$$

$$k = 1(1)n,$$

womit dann gilt:

<sup>2</sup> Orthogonale Matrix:(Definition) /53/

Eine reelle  $(n,n)$ -Matrix  $T$  heißt orthogonal, falls  $T^T T = E$  bzw.  $T^{-1} = T^T$  gilt.

$E =$  Einheitsmatrix

$T^T =$  transponierte Matrix von  $T$

<sup>3</sup> Satz:

Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor und  $E$  die  $(n,n)$ -Einheitsmatrix. Dann ist

$$H = E - \frac{2}{\|v\|^2} v v^T$$

eine symmetrische, orthogonale  $(n,n)$ -Matrix (Householder-Matrix), d.h. es gilt  $H^T H = H^2 = E$ .  $\|v\|$  ist die Norm des Vektors  $v$ .



$$A_1 = \begin{bmatrix} \overset{(1)}{a_{11}} & \overset{(1)}{a_{12}} & \dots & \overset{(1)}{a_{1j}} & \dots & \overset{(1)}{a_{1n}} \\ \overset{(1)}{a_{21}} & \overset{(1)}{a_{22}} & \dots & \overset{(1)}{a_{2j}} & \dots & \overset{(1)}{a_{2n}} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \overset{(1)}{a_{m1}} & \overset{(1)}{a_{m2}} & \dots & \overset{(1)}{a_{mj}} & \dots & \overset{(1)}{a_{mn}} \end{bmatrix} = \left[ \overset{(1)}{a_1}, \overset{(1)}{a_2}, \dots, \overset{(1)}{a_n} \right] \quad (\text{A74})$$

Es ist  $\overset{(1)}{a_j}$  die  $j$ -te Spalte von  $A_1$ .

B.) Die Householder – Matrix  $H_1$  ist

$$H_1 = E - \frac{2}{\|v_1\|^2} v_1 v_1^T, \quad (\text{A75})$$

mit dem wie folgt definierten Vektor  $v_1$ :

$$v_1 = \begin{bmatrix} \overset{(1)}{a_{11}} + \text{sign} \left[ \overset{(1)}{a_{1k}} \right] \left\| \overset{(1)}{a_{11}} \right\| \\ \overset{(1)}{a_{21}} \\ \vdots \\ \overset{(1)}{a_{m1}} \end{bmatrix}^4 \quad (\text{A76})$$

C.) Aus der Matrix  $A_1$  und der Householder – Matrix  $H_1$  ergibt sich durch Linksmultiplikation die Matrix  $A_2$

$$A_2 = H_1 A_1 = \begin{bmatrix} \overset{(2)}{a_{11}} & \overset{(2)}{a_{12}} & \dots & \overset{(2)}{a_{1n}} \\ 0 & \overset{(2)}{a_{22}} & \dots & \overset{(2)}{a_{2n}} \\ \vdots & & & \\ 0 & \overset{(1)}{a_{m2}} & \dots & \overset{(2)}{a_{mn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{(2)}{a_{11}} & \overset{(2)}{a_{12}} & \dots & \overset{(2)}{a_{1n}} \\ 0 & & & \\ \vdots & \bar{A}_2 & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A77})$$

---

<sup>4</sup>Sign (a) = 1 für  $a \geq 0$   
-1 für  $a < 0$

D.) Analog erhält man fortlaufend

$$A_{i+1} = H_i A_i \text{ für } i = 1(1)q, \quad (\text{A78})$$

mit  $q = \min(m-1, n)$ .

Es ist hierin  $A_i$  die  $(m, n)$ -Matrix

$$A_i = \begin{bmatrix} \overset{(2)}{a_{11}} & \overset{(2)}{a_{12}} & \dots & \dots & \overset{(2)}{a_{1n}} \\ 0 & \overset{(3)}{a_{22}} & & & \overset{(3)}{a_{2n}} \\ & \ddots & & & \\ & & \overset{(i)}{a_{i-1, i-1}} & \dots & \overset{(i)}{a_{i-1, n}} \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} \overset{(i)}{a_{ii}} & \dots & \overset{(i)}{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overset{(i)}{a_{mi}} & \dots & \overset{(i)}{a_{mn}} \end{bmatrix} \quad (\text{A79})$$

und  $H_i$  die  $(n, n)$ -Matrix

$$H_i = \begin{bmatrix} E_{i-1} & 0 \\ 0 & \bar{H}_i \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \} i-1 \text{ Zeilen} \\ \} m-i+1 \text{ Zeilen.} \end{array} \right\} (\text{A80})$$

$\bar{H}_i$  ist eine  $(m-i+1, m-i+1)$ -Matrix, die wie folgt berechnet wird:

$$\bar{H}_i = E - \frac{2}{\|v_i\|^2} v_i v_i^T. \quad (\text{A81})$$

Der Vektor  $v_i \in \mathbb{R}^{m-i+1}$  ergibt sich aus

$$v_i = \begin{bmatrix} \overset{(i)}{a_{ii}} + \text{sign} \left[ \overset{(i)}{a_{ii}} \right] \left\| \overset{(i)}{a_i} \right\| \\ \overset{(i)}{a_{i+1, i}} \\ \vdots \\ \overset{(i)}{a_{m, i}} \end{bmatrix}, \quad (\text{A82})$$

$$\text{mit } a_i = \begin{bmatrix} \overset{(i)}{a_{ii}} \\ \overset{(i)}{a_{i+1, i}} \\ \vdots \\ \overset{(i)}{a_{m, i}} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $A_{i+1}$  hat dann die Form

$$A_{i+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ & a_{22}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{ii}^{(i+1)} & \dots & a_{in}^{(i+1)} \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \bar{A}_{i+1} \\ & & & 0 & & \end{bmatrix}, \quad (\text{A83})$$

Man kann einen modifizierten Algorithmus benutzen, in dem man die Householder-Transformation für die Erzeugung der QR-Zerlegung /53/ im o.g. Algorithmus verwendet und hierbei folgende Beziehungen berücksichtigt:

$$R = H_q H_{q-1} \dots H_1 A =: HA$$

und

$$Rx = HAx = Ha =: b,$$

mit

$$q = \min(m-1, n).$$

Die beiden ersten Schritte des o.g. Algorithmus werden ersetzt durch sukzessive Multiplikation von  $A$  und  $a$  mit den Transformationsmatrizen  $H_i$ , wobei gleichzeitig  $R$  und  $b$  erzeugt werden. Hierbei umgeht man die explizite Herstellung von  $Q$  und  $Q^T$  und erhält den modifizierten Algorithmus für überbestimmte Gleichungssysteme (Householder-Transformation)

Gegeben:  $Ax = a$ ,  $A = (a_{ik})$ ,  $i = 1(1)m$ ,

$$k = 1(1)n, a \in \mathbb{R}^m, m \geq n,$$

$$R_g(A) = n$$

Gesucht:  $x \in \mathbb{R}^n$  mit Hilfe der Householder-Transformation

1. Schritt Householder-Transformation zur Erzeugung von  $R = HA$ ,  $b = Ha$ ,  
mit  $H = H_q H_{q-1} \dots H_1$ .

Für jedes  $i = 1(1)n$ :

1a.) Berechnung folgender Größen in angegebener Reihenfolge:

$$r = \sum_{k=i}^m a_{ki}^2$$

$$\alpha = \sqrt{r} \operatorname{sign}(a_{ii})$$

$$a_k = 1/(r + \alpha a_{ii})$$

$$a_{ii} = a_{ii} + \alpha$$

1b.) Multiplikation der Matrix A und der rechten Seite a (als  $(n+1)$ -te Spalte von A) von links mit der neuen Transformationsmatrix

$$d_i = -\alpha$$

Für jedes  $k = i+1(1)n+1$  ist durchzuführen:  
 $f = 0$

für jedes  $j = i(1)m$ :  
 $f = f + a_{jk} a_{ji}$   
 $f = f \cdot a_k$ ,

für jedes  $j = i(1)m$ :  
 $a_{jk} = a_{jk} - f a_{ji}$ .

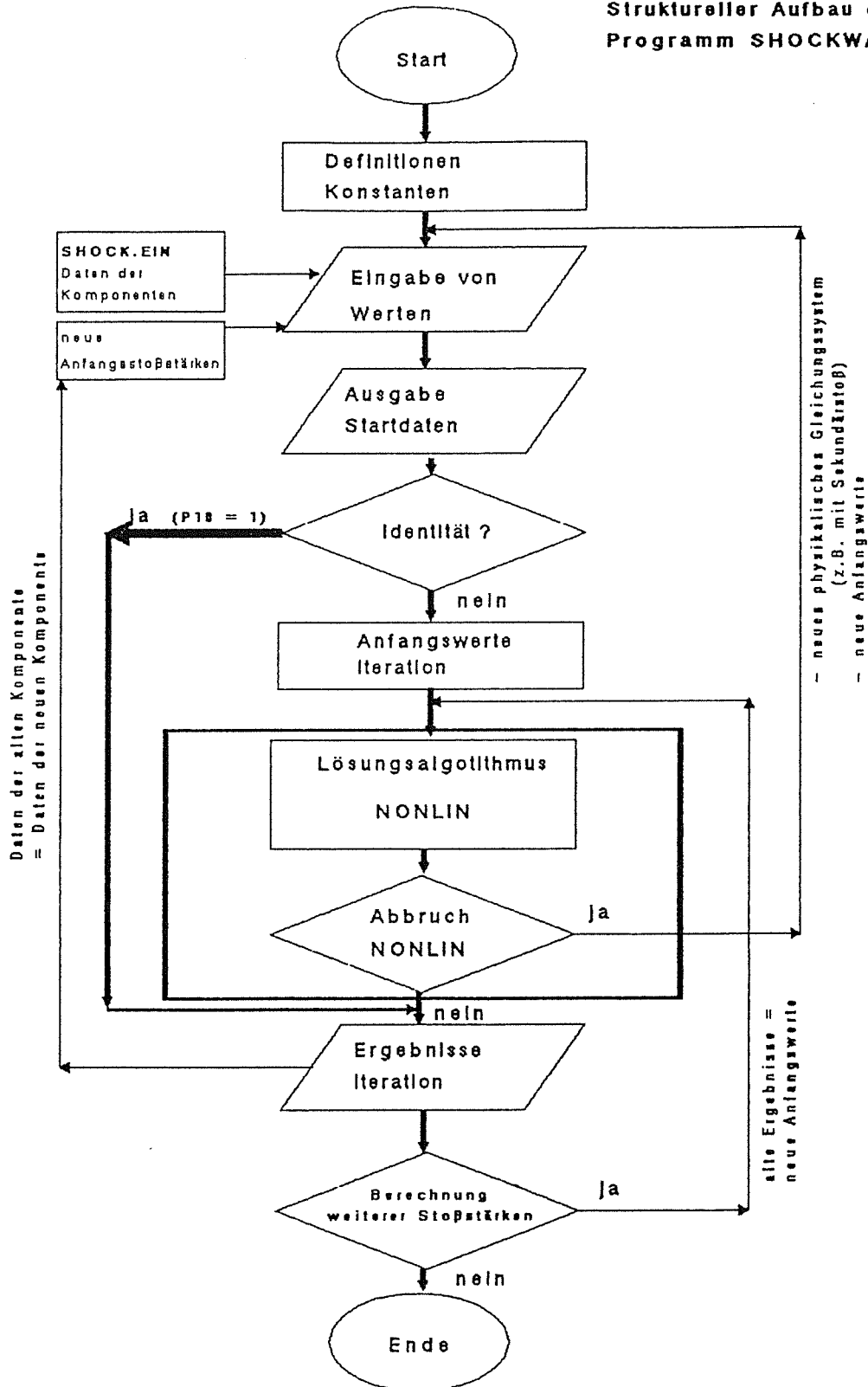
2. Schritt Rückwärtselimination zur Bestimmung der Lösung  $x$  aus  $R_x = b$ :

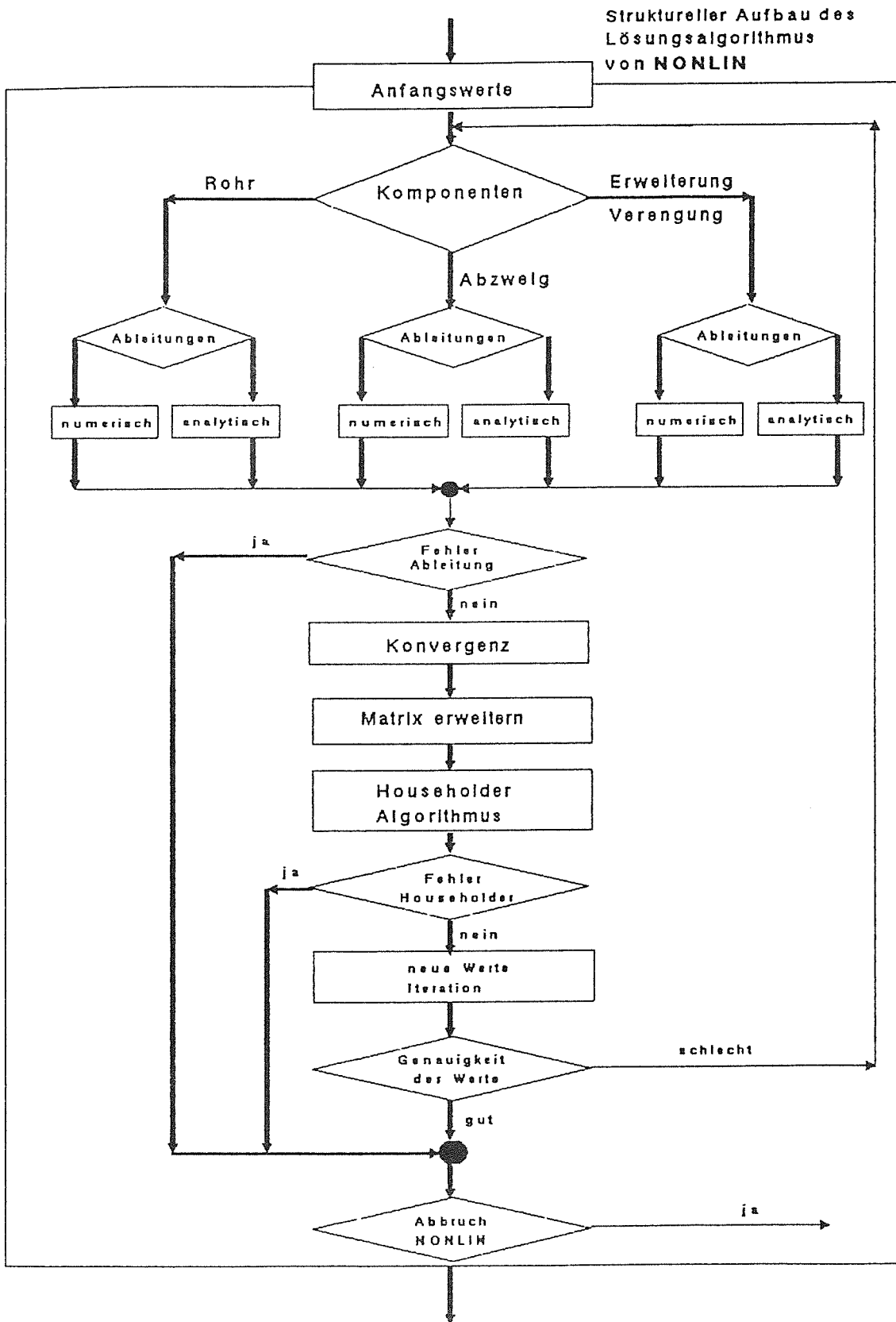
Für jedes  $i = n(-1)1$  ist durchzuführen:  
 $x_i = a_{i,n+1}$ ,

für jedes  $k = i+1(1)n$   
 $x_i = x_i - a_{ik} x_k$ .

## A 8. Programmablaufplan SHOCK WAVE

Struktureller Aufbau des  
Programm SHOCKWAVE





## A 9. Druckbeiwert $q$ für verzweigte Kanäle

**Tabelle A1** Tabelle der von Dadone /29/ bestimmten Koeffizienten  $D_i$  und  $A_i$  ( $i=0,1,2$ ) in Abhängigkeit vom Abzweigwinkel  $\varphi$  bei runden Kanälen

Winkel $\varphi$	$D_2$	$D_1$	$D_0$	$A_2$	$A_1$	$A_0$
30°	-1.31	0.68	0.44	-1.53	1.15	0.02
60°	-1.19	0.62	0.42	-1.40	0.88	-0.02
90°	-1.24	0.67	0.42	-1.41	0.54	-0.03
120°	-1.16	0.56	0.44	-1.52	0.15	0.02
150°	-0.65	0.01	0.45	-0.84	-1.11	0.07

**Tabelle A2** Tabelle der vom Autor /55/ bestimmten Koeffizienten  $D_i$  und  $A_i$  ( $i=0..6$ ) in Abhängigkeit vom Abzweigwinkel  $\varphi$  bei quadratischen Kanälen

$\varphi$	$D_6/A_6$	$D_5/A_5$	$D_4/A_4$	$D_3/A_3$	$D_2/A_2$	$D_1/A_1$	$D_0/A_0$
30°	-10.30	33.70	-43.40	28.20	-10.30	1.57	0.28
	-26.90	84.60	-100.60	66.20	-22.30	3.42	-0.09
60°	-24.30	75.70	-90.70	52.60	-15.80	2.03	0.28
	-19.80	65.20	-84.70	64.60	-18.30	2.39	-0.12
90°	-11.80	38.70	-48.50	29.50	-9.98	1.43	0.28
	-13.70	46.90	-62.80	41.40	-13.80	1.05	-0.11
120°	-10.70	37.40	-51.30	34.90	-12.70	1.86	0.28
	-23.40	74.50	-90.90	52.90	-14.60	0.12	-0.08
150°	-18.80	56.80	-67.00	39.40	-12.30	1.37	0.24
	-54.90	19.70	-25.80	14.30	-2.45	-2.16	-0.07

## 8. Literaturverzeichnis

- /1/ Davies, C.N.  
Air Filtration;  
Academic Press, London, 1973.
- /2/ Müller, R.  
Emissionen polychlorierter Dioxine und Furane aus schweizerischen Müllverbrennungsanlagen;  
Staub – Reinhaltung der Luft, Band 47, Nr. 1 und 2, 1987.
- /3/ Fischer M. et al.  
The Multi Compartment Code WAVCO to Analyse the Behavior of Non – Condensibles During Hypothetical Accidents;  
Second Int. Meeting on Nuclear Thermohydraulic, Santa Barbara, Cal., Jan. 1983
- /4/ Hassmann, K. und Hosemann, J.P.  
Current Results of Radioactive Source Term Analysis for Melt Down Sequences in KWU – type PWR's;  
Int. Meeting on Thermal Nuclear Reactor Safety, Karlsruhe, Sept. 1984.
- /5/ Cuccuru, A. et al.  
Effects of Shock Waves on High – Efficiency Filter Units;  
In: Gaseous Effluent Treatment in Nuclear Installations, EUR 10580, S. 877, 1986.
- /6/ Geiger, W.  
Statusbericht über die denkbare äußere Druckbelastung von Kernkraftwerken durch Gasexplosionen;  
Bericht für das BMI, Referat RS 12, Bonn, 1977.
- /7/ Hoffmann, G. und Löffler, E.  
Druckwellenbeugung um Reaktorgebäude;  
Vortrag auf Reaktortagung, Düsseldorf, 1976.



- /8/ Schumann, U.  
Dampfexplosionen – physikalische Grundlage und Bezug zur Reaktorsicherheit;  
KfK – Bericht 3388, August 1982.
- /9/ Grumer, J.  
Recent Development in Coal Mine Fire and Explosions Presentation Research;  
US. Bureau of Mines, Information Circular 8616, Pittsburgh, Pa., 1973.
- /10/ Zierep, J.  
Theoretische Gasdynamik;  
3. Auflage, Karlsruhe: Braun 1976.
- /11/ Oertel, H.  
Stoßrohre;  
1. Auflage, Wien: Springer Verlag, 1966.
- /12/ Courant, R. und Friedrichs, K. O.  
Supersonic Flow and Shock Waves;  
2. Auflage, New York: Interscience Publishers Inc., 1956.
- /13/ Bird, G. A.  
The Effect of Wall Shape on the Degree of Reinforcement of Shock Wave Moving  
into a Converging Channel;  
Journal of Fluid Mechanics 5, S. 60/66, 1959.
- /14/ Whitham, G.B.  
A New Approach to Problems of Shock Dynamics;  
Journal of Fluid Mechanics 2, S. 145/71, 1957.
- /15/ Whitham, G.B.  
On the Propagation of Shock Waves through Regions of Non–Uniform Area or  
Flow;  
Journal of Fluid Mechanics 4, S. 337/60, 1958.
- /16/ Chester, W.  
The Propagation of Shock Waves in a Channel of Non – Uniform Width;  
Quart. J. Mech. Appl. Math 6, S. 440/52, 1954.

- /17/ Chisnell, R.F.  
The Motion of a Shock Wave in a Channel, With Application to Cylindrical and Spherical Shock Waves;  
Journal of Fluid Mechanics 2, S. 286/89, 1957.
- /18/ Dadone, A.; Pandolfi, M. und Taminini, F.  
Shock Wave Propagation in a Straight Duct with a Side Branch;  
Shock Tube Research, Proc. 8th Int. Shock Tube Symposium, Bericht Nr. 17, London 1971.
- /19/ Keller, J.; Merzkirch, W.; Han, Q. und Neuberger, M.  
Überprüfung verschiedener Theorien zur Berechnung der Stoßausbreitung in querschnittsvariierenden Kanälen;  
Bericht 4718, KfK Karlsruhe, Juni 1990.
- /20/ Grönig, H.  
Dämpfung von Stoßwellen in verzweigten Rohrsystemen;  
Forschungsbericht des Landes NRW, Nr. 2793, Fachgruppe Umwelt/Verkehr, 1978.
- /21/ Prandtl, L.; Oswatitsch, K. und Wieghardt, K.  
Führer durch die Strömungslehre;  
8. Auflage, Vieweg.
- /22/ Idelchik, I.E.  
Handbook of Hydraulic Resistance;  
Second Edition, Revised and Augmented: Springer Verlag 1986.
- /23/ Zierep, J.  
Grundzüge der Strömungslehre;  
1. Auflage, Karlsruhe: G.Braun 1979.
- /24/ Reichenbach, H.  
Stoßwellenausbreitung in Kanälen mit Abwinkelungen und Abzweigungen;  
Ernst – Mach – Institut, Freiburg. Bericht Nr. 9/65, 1965.
- /25/ Peters, F. und Merzkirch, W.  
Stoßwellen in Rohrverzweigungen;  
ZAMM 55 T 146/7, 1975.

- /26/ Peters, F.  
Beugung einer instationären Stoßwelle an einer Rohrverzweigung;  
Diplomarbeit, Ruhruniversität Bochum, Institut für Strömungslehre, 1973.
- /27/ Waskönig, R.  
Messung der Stoßintensität hinter Rohrverzweigungen;  
Diplomarbeit, Ruhruniversität Bochum, Institut für Strömungslehre, 1976.
- /28/ Oshima, K.; Sugaya, K.; Yamamoto, M. und Totoki, T.  
Diffraction of a Plane Shock Wave Around a Corner;  
Inst. of Space and Aeron. Sci., Univ. of Tokyo, Rep. No. 393, 1965.
- /29/ Dadone, A.; Pandolfi, M. und Taminini, F.  
Loss Coefficients in Ducts;  
Tech. Rep. of Instituto di Macchine del Politecnico di Torino, 1971.
- /30/ Leiter, E.  
Strömungsmechanik;  
Band 1, Grundlagen und technische Anwendungen, Vieweg – Verlag, S. 78 – 86, 1978.
- /31/ Rettig – Zinke, R.  
Utility NONLIN – Ein Pascalmodul zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen;  
Pascal International, 2/88, 3. Jahrgang, Daten & Medienverlags GmbH, 1988.
- /32/ Bronstein, I.N. und Semendjajew, K.A.  
Taschenbuch der Mathematik;  
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 20. Aufl., 1981.
- /33/ Oertel, H. und Oertel jun., H.  
Optische Strömungsmeßtechnik;  
1. Auflage, Karlsruhe: G. Braun 1989.
- /34/ Schardin, H.  
Die Schlierenverfahren und ihre Anwendung;  
Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 20. Band,  
Berlin: Springer – Verlag, 1942.

- /35/ Cranz, C. und Schardin, H.  
Kinematographie auf ruhendem Film und mit extrem hoher Bildfrequenz;  
Zeitschrift für Physik 56, S. 147 – 183, 1929.
- /36/ Fronhöfer, M.  
Schlierenoptische Untersuchung der Stoßausbreitung in konvergierenden und divergierenden Rechteckkanälen;  
Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, Institut für Strömungslehre, 1989.
- /37/ Schardin, H.;  
Das Toeplersche Schlierenverfahren;  
Diss. T.H. Berlin 1934; VDI – Forsch.heft 367, S. 1 – 32, 1934.
- /38/ Kneer, R.  
Literaturstudie und experimentelle Untersuchung zur Ausbreitung schwacher Stoßwellen in verzweigten Kanälen veränderlichen Querschnitts am Beispiel der Filterprüfanlage BORA;  
Studienarbeit, Universität Karlsruhe, Institut für Thermische Strömungsmaschinen, 1984.
- /39/ Khademi, A.  
Untersuchung über das zeitliche Abklingen von Stoßwellen bei Mehrfachreflexionen in einem Stoßwellenrohr;  
Dissertation TH Karlsruhe, 1969.
- /40/ Heilig, W.  
Zur Ausbreitung von Stoßwellen in einem Kanal mit rechtwinkliger Abzweigung – Theorie und Messung;  
Ernst – Mach – Institut, Bericht 6/72, Freiburg 1972.
- /41/ Busby, M. R.; Kahn, J.E. und Belk, J.P.  
Effects of Explosion – Generated Shock Waves in Ducts;  
14th ERDA Air Cleaning Conferene, Sun Valley, Idaho, 1976.
- /42/ Gürke, G.  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Wechselwirkung von Luftstoßwellen mit querschnittsverengenden Einbauten (Drosselstellen) in Kanälen;  
Bericht Nr. 9/70 des Ernst – Mach – Instituts, Freiburg, 1970.

- /43/ Heilig, W.  
Propagation of Shock Waves in Various Branched Ducts;  
Kaminoto (Ed.): Proc. of Modern Developments in Shock Tube Research, S. 273/83,  
Kyoto 1975.
- /44/ Reichenbach, H. und Dreizler, H.  
Über den Einfluß von Querschnittsänderungen und Gittern in Kanälen auf Stoß-  
wellen;  
ZAMP 12, S. 62/71, 1960.
- /45/ Parks, E. K.  
Supersonic Flow in a Shock Tube of Divergent Cross Section;  
UTIA Report 18, Mai 1952.
- /46/ Sloan, S. A. und Nettleton, M. A.  
The Propagation of Weak Shock Waves Through Junctions;  
Shock Tube Research, Proc. 8th Int. Shock Tube Symposium, London, Bericht Nr. 18,  
1971.
- /47/ Davies, L. und Wilson, J.L.  
The Influence of Shock and Boundary – Layer Interaction on Shock Tube Flows;  
6. International Shock Tube Symposium, Freiburg i.B., S. 213/35, 1967.
- /48/ Sturtevant, B. und Okamura, T.T.  
Dependence of Shock – Tube Boundary Layers on Shock Strength;  
The Physics of Fluids 21, , Nr. 12, S. 1723/25, 1969.
- /49/ Mirels, H.  
Boundary Layer Growth Effects in Shock Tubes;  
Shock Tube Research, Proc. 8th Int. Shock Tube Symposium, London, Bericht Nr. 6,  
1971.
- /50/ Rudinger, G.  
Effect of Boundary – Layer Growth in a Shock Tube on Shock Reflection From a  
Closed End;  
The Physics of Fluids 4, Nr. 12, S. 1463/73, 1961.

- /51/ Center, R.E.  
Reflected Shock Interaction with Shock Tube Boundary Layers;  
The Physics of Fluids 6, Nr. 2, S. 307/8, 1963.
- /52/ Töring, W. und Spellucci, R.  
Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker;  
Band 1, 2. Auflage, 1988.
- /53/ Zurmühl, R. und Falk, S.  
Matrizen;  
Berlin, Göttingen, Heidelberg Springer, 5.ed., 1984
- /54/ Engeln – Müllges, G. und Reutter, F.  
Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard FORTRAN – 77 – Programmen;  
BI, Wissenschaftsverlag, 6. Auflage 1988.
- /55/ Gerlach, A.  
Stationäre und instationäre Strömungsuntersuchungen in verzweigten und querschnittsvariierenden Rechteckkanälen;  
Diplomarbeit, Berufsakademie Karlsruhe, 1988.

## **Bibliographie**

### **Literatur zu Grundlagen der Gas – und Thermodynamik**

- /B1/ Zierep, J.  
Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre;  
2. Auflage, Karlsruhe: Braun 1982.
- /B2/ Sauer, R.  
Einführung in die theoretische Gasdynamik;  
3. Auflage. Berlin, Göttingen, Heidelberg: A. Springer, 1960.
- /B3/ Albring, W.  
Angewandte Strömungslehre;  
4. Auflage, Dresden 1970.

- /B4/ Elsner, N.  
Grundlagen der technischen Thermodynamik;  
4. Auflage. Berlin: Akademie Verlag 1980.
- /B5/ Owczarek, J.A.  
Fundamentals of Gas Dynamics;  
Scranton: Int. Textbook Company, 1964.
- /B6/ Becker, E.  
Gasdynamik;  
1. Auflage, Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1966.
- /B7/ Walz, A.  
Strömungs – und Temperaturgrenzschichten;  
Karlsruhe, G. Braun, 1966.
- /B8/ Schlichting, H.  
Grenzschichttheorie;  
5. Auflage, Karlsruhe, G. Braun, 1965.
- /B9/ Harlow, F.A. and Amsden, A.A.  
Fluid Dynamics;  
Los Alamos, Sci. Lab., Monograph LA – 4700, 1971.

#### **Literatur zur Stoßausbreitung**

- /B10/ Benson, R. S.; Woolatt, D. und Woods, D.A.  
Unsteady Flow in Simple Branch Systems;  
Thermodynamics and Fluid Mechanics Convention, Paper 17, (Inst. Mech. Engrs.,  
London), April 1964.
- /B11/ Imhof, H. – G.  
Ausbreitung von Stoßwellen in verzweigten Röhren;  
Dissertation RWTH Aachen, 1976.

- /B12/ Binggeli, E.  
Blast Wave Propagating in Branched Tunnels;  
Proc. of International Symposium on Military Applications of Blast Simulators  
(MABS) 7, paper 2.4, NC Laboratory Spiez, Switzerland 1981.
- /B13/ Taylor, T.O.  
Numerical Methods for Predicting Subsonic, Transonic, and Supersonic Flow;  
AGARDograph No. 187, US Army Air Mobility Research and Development  
Laboratory, Moffett Field, California 94035 USA, 1974.
- /B14/ Gentry, R.A.; Martin, R.E., und Daly, B.J.  
An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow Problems;  
J. Comp. Physics 1, S. 87, 1966.
- /B15/ Gururaja, J. und Dekker, B.E.L.  
Numerical Solutions of Flows Behind Shock Waves in Non – Uniform Regions;  
Proc. Inst. Mech. Engrs. 184 Part (3) G(1), S. 36, 1969.
- /B16/ Mirels, H.  
Test – Time in Low – Pressure Shock Tubes;  
The Physics of Fluids 6, Nr. 9, S. 1201/14, 1963.
- /B17/ Whitham, G.B.  
Linear and Nonlinear Waves;  
J. Wiley & Sons, New York, S. 291 ff, 1974.