

Forschungszentrum Karlsruhe

in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6807

**Ein vereinheitlichtes Modell für
Vormischflammen als gasdynamische
Diskontinuität**

A. G. Class

Institut für Kern- und Energietechnik
Programm Nachhaltigkeit, Energie- und Umwelttechnik

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Habilitationsschrift
zur Anerkennung der Lehrbefähigung
im Fach der Strömungslehre

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
2003

Impressum der Print-Ausgabe:

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)**

ISSN 0947-8620

Ein vereinheitlichtes Modell für Vormischflammen als gasdynamische Diskontinuität

ANDREAS G. CLASS

11. Juli 2002

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Habilitationsschrift
zur Anerkennung der Lehrbefähigung
im Fach der Strömungslehre

Im neu eingerichteten Sonderforschungsbereich 606 "Instationäre Verbrennung: Transportphänomene, Chemische Reaktionen, Technische Systeme" der Universität Karlsruhe in Zusammenarbeit mit dem Forschungszentrum Karlsruhe, der Universität Stuttgart sowie dem DLR Stuttgart sollen fortschrittliche Verbrennungskonzepte, bei denen zeitabhängige Prozesse von Bedeutung sind, besser verstanden und weiterentwickelt werden.

In diesen Konzepten wird zunehmend die Vormischverbrennung eingesetzt. In dieser Habilitationsschrift werden Vormischflammen zeitlich und räumlich aufgelöst betrachtet, so dass weder eine räumliche noch eine zeitliche Mittelung der Vorgänge vorgenommen wird. In Experimenten zeigt sich, dass Vormischflammen häufig dünn im Vergleich zu hydrodynamischen Längenabmessungen sind. Sie können somit als eine gasdynamische Diskontinuität aufgefasst werden, welche die Brenngase von den Rauchgasen mit geringerer Dichte trennt. Darrieus (1938 und 1945) und Landau (1944) schlugen unabhängig voneinander ein solches gasdynamisches Flammenmodell vor, wobei sie die Eulergleichungen zur Beschreibung der reibungsfreien Strömung beiderseits der Flamme heranzogen und einen Ansatz für die Flammenausbreitung formulierten. Sie nahmen an, dass sich die Flamme mit einer konstanten Geschwindigkeit ausbreitet, und schlussendlich forderten sie, dass die Strömungsgrößen beiderseits der Flamme durch Sprungbedingungen miteinander gekoppelt seien, wobei die Erhaltung von Masse und Impuls gewährleistet werden sollte. Später wurde von Markstein (1951) ein Modell vorgeschlagen, bei dem sich Variationen der Flammengeschwindigkeit aufgrund der Krümmung der Flamme ergeben. Im Gegensatz zu den früheren heuristischen Ansätzen entwickelt Sivashinsky (1976) mittels strenger asymptotischer Methoden eine Flammengeschwindigkeitsbeziehung, welche gilt, sofern sich die Lewis-Zahl (Verhältnis von thermischer und Massendiffusivität des limitierenden Spezies) hinreichend von Eins unterscheidet. Die Sprungbedingungen im Markstein-, Sivashinsky- sowie im Darrieus-Landau-Modell sind identisch. Schliesslich wurde von Matalon & Matkowsky (1982) eine Flammengeschwindigkeitsbeziehung abgeleitet, die für Lewis-Zahlen nahe Eins gilt, wobei sich eine Flammengeschwindigkeit

ergibt, welche proportional der Flammenstreckung ist. Zusätzlich konnten Sprungbedingungen abgeleitet werden, welche unstetige Verläufe des Massen- und Impulsstroms liefern, wobei die Sprünge dieser Grössen asymptotische Korrekturen der postulierten Sprungbedingungen von Darrieus und Landau darstellen.

In dieser Habilitationsschrift wird die Tensoralgebra angewandt, um ein vereinheitlichtes Modell, bestehend aus einer neuen Flammengeschwindigkeitsbeziehung sowie neuen Sprungbedingungen, abzuleiten. Diese Flammengeschwindigkeitsbeziehung gilt für beliebige Lewis-Zahlen. In geeigneten Grenzfällen ergeben sich die Beziehungen von Sivashinsky und Matalon-Matkowsky. Ausserdem folgt aus der Flammengeschwindigkeitsbeziehung eine neuer ausgezeichnete Grenzfall, der grössere Abweichungen der Lewis-Zahl von Eins als die Matalon-Matkowsky-Theorie zulässt und somit eine Brücke zur Theorie von Sivashinsky darstellt. Werden zusätzlich kurzwellige Deformationen der Flamme berücksichtigt, so ergeben sich neue Terme, welche die Kommunikation benachbarter Flammenelemente beschreiben. Diese Terme dämpfen kurzwellige Störungen auf der Flammenfläche, so dass die vereinheitlichte Theorie, im Gegensatz zu den früheren Theorien, auch anwendbar ist, wenn die Flamme kurzwellige zeitperiodische Instabilitäten aufweist.

Bemerkenswert ist, dass die Flammengeschwindigkeitsbeziehung und die Sprungbedingungen von der genauen Lage der Unstetigkeitsfläche abhängen. Als Gibbs (1879) das freie Grenzflächenproblem zweier unmischbarer Flüssigkeiten betrachtete, machte er eine analoge Beobachtung. In Abhängigkeit von der Wahl der Lage der Grenzfläche muss dieser eine virtuelle Oberflächenmasse zugeordnet werden. Im Gegensatz zu den früheren Arbeiten wird eine ausgezeichnete Lage der Unstetigkeitsfläche so gewählt, dass die virtuelle Oberflächenmasse verschwindet. Hieraus ergeben sich wesentlich einfachere Sprungbedingungen. So ist beispielsweise der Massenstrom jetzt stetig an der Unstetigkeitsfläche. Bei numerischen Simulationen auf der Grundlage des vereinheitlichten Modells muss im Verlauf einer Rechnung an der Flammenfläche weder Masse hinzugefügt noch entnommen werden, wie dies im Matalon-Matkowsky-Modell notwendig ist.

A unified model for premixed flames as gasdynamic discontinuities

The recently established Sonderforschungsbereich 606: "Nonstationary combustion: transport phenomena, chemical reactions, technical systems" at the Universität Karlsruhe in cooperation with the Forschungszentrum Karlsruhe, the Universität Stuttgart, and the DLR Stuttgart aims to improve the fundamental understanding and to further develop advanced combustion concepts, where time dependant processes are relevant. In these concepts premixed combustion is being applied to an increasing extent.

In the present habilitation thesis premixed flames are considered resolving their time and space structures, thus omitting both space and time averaging. Experiments show that premixed flames are frequently thin compared to the hydrodynamic scales and may be viewed as a gasdynamic discontinuity separating the fresh mixture from the lighter products. Darrieus (1938 und 1945) and Landau (1944) independently proposed a model of a flame as a gasdynamic discontinuity, which consists of the Euler equations for the inviscid flow on either side of the flame and an ansatz for the flame propagation. In particular they assumed that the flame propagates at a constant speed and that the flows on either side of the flame are related to each other by jump conditions conserving mass and momentum. Markstein (1951) proposed a model where variations of the flame speed occur due to the curvature of the flame. In contrast to the previous heuristic models Sivashinsky (1976) derived a flame speed relation applying strict asymptotic methods. The model is applicable if the Lewis number (ratio of the diffusivities of heat and limiting species mass) is bounded away from unity. The jump conditions of the models by Markstein-, Sivashinsky- and Darrieus-Landau are identical. Finally, Matalon & Matkowsky (1982) derived a flame speed relation, valid for Lewis numbers close to unity, where flame speed is a function of flame stretch. In addition jump conditions were derived, which no longer conserve mass and momentum and which represent perturbative corrections of the Darrieus-Landau jump conditions.

In this habilitation thesis tensor algebra is applied to derive a unified model, consisting of a new flame speed relation and new jump conditions, which is applicable for arbitrary Lewis numbers. In appropriate limits the models of Sivashinsky and Matalon-Matkowsky are recovered. Moreover a new distinguished limit allows for larger Lewis number deviations from unity as compared to the Matalon-Matkowsky theory thus bridging the Matalon-Matkowsky and the Sivashinsky theory. Considering shortwave corrugations of the flame not considered previously, results in new terms coupling neighboring flame elements. These terms damp short wave perturbations of the flame surface, and thus in contrast to previous theories the unified theory is applicable when the flame is unstable with respect to shortwave pulsating instabilities. Remarkable is the fact, that the flame speed relation and jump conditions depend on the precise location of the discontinuity surface. When Gibbs (1879) studied the free interface problem of two adjacent immiscible fluids, he made a similar observation. Depending on the choice of the interface an excess surface mass must be assigned to the interface. In contrast to previous theories the surface is chosen to yield a vanishing excess surface mass. This results in substantially simplified jump conditions. In numerical simulations using the unified model, mass must not be added or subtracted from the flow as the simulation progresses, which is required in the Matalon-Matkowsky model.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung	5
2. Geschichtliche Einordnung der Arbeit	10
3. Grundgleichungen	17
3.1. Dimensionslose Größen und Skalierung	18
3.2. Gleichungen in bewegten Koordinaten	21
4. Herleitung der Gleichungen und Sprungbedingungen für die Strömung mittels asymptotischer Methoden	24
4.1. Führende Ordnung der Strömungsgleichungen und der Sprungbedingungen	26
4.2. $O(\text{Pe}^{-1})$ Strömungsgleichungen und Sprungbedingungen	29
4.3. Flammenposition	31
4.4. Zusammenfassung der Strömungsgleichungen und Sprungbedingungen	34
5. Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung	36
5.1. Allgemeine Lewis-Zahlen	37
5.2. Der Einfluss kurzer Wellenlängen	42
5.3. Schwache Variationen der Flammengeschwindigkeit: Das M-M-Modell ($S = O(\text{Pe}^{-1})$)	46
5.4. Starke Variationen der Flammengeschwindigkeit: Das Sivashinsky-Modell ($S = O(1)$)	47
5.5. Mittlere Variationen der Flammengeschwindigkeit ($S = O(\text{Pe}^{-1/2})$)	47
6. Stabilität stationär fortschreitender ebener Flammen	49
6.1. Das Darrieus-Landau-Modell ($S = \text{Pe}^{-1} = 0$)	50
6.2. Das Matalon-Matkowsky-Modell ($S = O(\text{Pe}^{-1})$)	51
6.3. Das Sivashinsky-Modell ($S = O(1)$)	52
6.4. Das vereinheitlichte Modell	53
7. Zusammenfassung	55
Anhang A	57
Anhang B	59
Anhang C	60

1. Einführung

Der überwiegende Teil des Weltenergieverbrauchs wird durch die Verbrennung fossiler Brennstoffe gedeckt. Verbrennungsvorgänge sind somit allgegenwärtig in der Industrie, bei der Stromgewinnung, beim Hausbrand und im Verkehr. Trotz der langen Tradition der Verbrennungsforschung besteht weiterhin ein großer Bedarf Verbrennungsvorgänge noch besser zu verstehen. Einerseits besteht ein politisches Interesse, den CO_2 -Ausstoß durch rationellere Energieumwandlung zu reduzieren. Dies wird neben möglichen Einsparmaßnahmen und durch Substitution von fossilen Brennstoffen durch regenerative Energieträger im Wesentlichen durch bessere Wirkungsgrade von Verbrennungsanlagen erzielt. Andererseits besteht ein wirtschaftliches Interesse, die Leistungsdichte von Verbrennungsanlagen zu erhöhen, um so die Investitionskosten für die Anlagentechnik zu verringern. An der Universität Karlsruhe in Zusammenarbeit mit dem Forschungszentrum Karlsruhe, der Universität Stuttgart sowie dem DLR Stuttgart wurde kürzlich der Sonderforschungsbereich 606: "Instationäre Verbrennung: Transportphänomene, Chemische Reaktion, Technische Systeme" eingerichtet, da der Einsatz fortschrittlicher Verbrennungstechnologien häufig durch instationäre Prozesse erschwert wird.

Dass die Weiterentwicklung der Anlagentechnik in Richtung höherer Leistungsdichten und Wirkungsgrade nicht ohne Schwierigkeiten abläuft, sei an zwei Beispielen erläutert.

Vor ca. 15 Jahren betrug der elektrische Wirkungsgrad eines fossil befeuerten Dampfkraftwerks nur 35-38%. Um diesen Wirkungsgrad auf nahe 60% erhöhen zu können, wurde das Kombikraftwerk entwickelt. Dieses besteht aus einer Gasturbine, die einen Generator antreibt und deren Abwärme in einem herkömmlichen Dampfkraftwerk genutzt wird. Der Wirkungsgrad des Kombikraftwerks ist theoretisch durch die Eintrittstemperatur der Gasturbine begrenzt. Ziele der Entwicklung waren neue temperaturfeste Materialien, um diese zu erhöhen und strömungstechnische Verbesserungen wurden vorgenommen. Dies führte zu kompakteren Bauformen der Brennkammer mit höchsten Leistungsdichten. Anstelle der herkömmlichen Diffusionsflammen, bei denen der Brennstoff und die Verbrennungsluft erst am Ort der Verbrennung gemischt werden, musste deshalb eine teilvorgemischte Verbrennung eingesetzt werden. Der Brennstoff und die Verbrennungsluft werden hierbei zunächst gemischt und anschließend wird das brennfähige Gemisch abgebrannt. Da der Vorgang nicht durch den Mischungsvorgang kontrolliert wird, können der Brennraum besser genutzt und höhere Volumenleistungen ermöglicht werden. Bei allen namhaften Herstellern von Gasturbinen hat sich jedoch gezeigt, dass Brennkammern mit hohen Leistungsdichten zu akustischen Instabilitäten neigen, die sich bislang nicht vollständig beschreiben lassen. Diese akustische Instabilitäten bewirken Schwingungen großer Amplitude, die ohne Gegenmaßnahmen zur Zerstörung der Maschine führen. Eine der zu klärenden Fragen ist die Rolle der Vormischverbrennung bei dieser akustischen Schwingung. Die Flamme, kann sich passiv verhalten, d.h. sie passt sich unmittelbar an die momentanen akustischen Druckverhältnisse an. Es kann eben so gut möglich sein, dass die Flamme eine Eigendynamik besitzt, so dass die Flamme erst mit einer gewissen Verzögerung oder Resonanz auf neue Druckverhältnisse reagiert.

Als ein weiteres Beispiel moderner Verbrennungsverfahren, sei die Ladungsschichtung in direktspritzenden Verbrennungsmotoren genannt. Im Idealfall wird unmittelbar vor der Zündung in einem Teilvolumen des Brennraums ein Gemisch mit nahestoichiometrischer Zusammensetzung erzeugt. In diesem Volumen wird eine Vormischflamme gezündet, die nach vollständigem Umsatz des Brennstoffs in der brennstofffreien Umgebung verlischt. Die Flamme kommt somit nicht in Berührung mit den kalten Wänden. Durch die Veränderung der Größe des Teilvolumens, welches das brennfähige Gemisch enthält, ergibt sich ein großer Lastbereich mit idealen Verbrennungsbedingungen.

Bei diesen Konzepten besteht jedoch die Gefahr, insbesondere im niederen Lastbereich, dass größere Ballen des Gemischs vor ihrem Ausbrand abgeschnürt werden und somit gar nicht gezündet werden. Diese Abschnürungen können durch eine Wechselwirkung der Flamme mit großskaligen Strömungsstrukturen aber gegebenenfalls auch durch Instabilitäten der Flamme eintreten.

Offensichtlich, ergeben sich neue Probleme, bei fortschrittlichen Verbrennungsverfahren, deren Lösung ein detailliertes Verständnis der Flammendynamik erfordert. Weiterhin werden effektive und aussagekräftige Simulationstools benötigt, um unerwünschte Betriebszustände frühzeitig zu erkennen. Dies gilt nicht nur für die Problemlösung in Verbrennungsmaschinen, sondern gleichermaßen für die Weiterentwicklung von Industriefeuerungen und der Heizungstechnik.

Da bis heute keine vollständige physikalisch-chemische Beschreibung der beobachteten Vorgänge existiert, beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit der Ausbreitung und Stabilität einer Vormischflamme in allgemeinen Strömungsfeldern. Zur besseren Einordnung dieses Themas sollen hier bei einem direktspritzenden Ottomotor im Schichtladungsbetrieb die ablaufenden Vorgänge dargestellt werden. Gleichzeitig wird ein Szenario entwickelt, wie diese Vorgänge in einer zukünftigen Simulation behandelt werden könnten. Es wird diskutiert bei welchen Teilvorgängen die vorliegende Arbeit ansetzt.

Zunächst wird kalte Luft angesaugt. Es handelt sich um einen instationären, turbulenten Vorgang, der deutliche Schwankungen von Zyklus zu Zyklus aufweist. Da die Zyklusschwankungen offensichtlich nicht mit einem Turbulenzmodell ausreichend modelliert werden können, empfiehlt sich eine Large-Eddy-Simulation (LES) von Einzelzyklen. In die turbulente Strömung wird ein Brennstoffstrahl eingesprüht. Es ergibt sich ein Spektrum unterschiedlicher Tropfen, die anschließend verdampfen. Die Simulation kann beispielsweise durch Verfolgung einzelner repräsentativer Tropfen in einer Monte-Carlo-Simulation erfolgen. Diese Simulation liefert die Verteilung des Gemisches zum Zündzeitpunkt. Die Simulation des eigentlichen Zündvorgangs kann übersprungen werden, sofern ein hinreichend großes Gebiet mit zündfähigem Gemisch im Bereich der Funkenstrecke der Zündkerze vorliegt. Soll aber die Verbrennung für den Fall einer sehr kleinen zündfähigen Wolke simuliert werden, die gegebenenfalls durch Strömungseffekte stark deformiert wird, so muss der Zündvorgang detailliert untersucht werden. Die lokalen Verhältnisse im Bereich der Funkenstrecke sind aus den vorausgegangenen Rechnungen unter Berücksichtigung einer geeigneten Statistik zu rekonstruieren und die Ausbreitung der Flamme ist in einer auf kleinen Skalen inhomogenen Mischung ist zu betrachten. Diese Behandlung könnte mit Methoden bearbeitet werden, wie sie in der vorliegenden Arbeit entwickelt werden. Hierbei werden diejenigen chemischen Vorgänge, die auf kleinen Längenskalen ablaufen, mittels asymptotischer Methoden semianalytisch behandelt, so dass nur noch Vorgänge, die auf charakteristischen Längenskalen der Strömung ablaufen, zu betrachten sind.

Nach der Zündung wird die brennfähige Wolke abgebrannt. Es ergibt sich eine komplexe Kopplung der Turbulenz mit der Flamme. Diese Kopplungen erfolgen auf der Subgridskala der LES und müssen somit modelliert werden. Mögliche Ansätze für die Chemie sind pdf-Modelle, Flammenflächen-Modelle oder die mittlere G-Gleichung. Bei den pdf-Modellen wird eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion für das gleichzeitige Auftreten von chemischen Spezies, der Temperatur und der Gasdichte aufgestellt und so die mittlere Reaktionsrate auf der Subgridskala ermittelt. In Flammenflächenmodellen wird eine Transportgleichung für die pro Volumen enthaltene Flammenfläche gelöst, die proportional zur Reaktionsrate im Volumen angenommen wird. Bei der mittleren G-Gleichung, wird eine Gleichung für die mittlere Lage der Flamme und eine weitere für die Schwankung der Lage der Flamme um den Mittelwert gelöst. Diese Gleichungen können

durch Mittelung aus den in der vorliegenden Arbeit entwickelten Gleichungen abgeleitet werden, wobei geeignete Schließungsannahmen ergänzt werden müssen. Wird in der LES die Auflösung so weit gesteigert, dass die kleinsten Skalen der Strömung erfasst werden, wird aus der LES eine Direkte-Numerische-Simulation (DNS) der Strömung. Allerdings müssen chemische Vorgänge auf kleinsten Skalen weiterhin modelliert werden. Entsprechende Modelle werden in dieser Arbeit bereitgestellt. Mit diesen Modellen vergrößert sich der Aufwand einer reaktiven DNS nur unwesentlich im Vergleich zu einer nichtreaktiven DNS. Eine statistische Auswertung von DNS-Daten kann geeignete Subgrid- bzw. Schließungsmodelle für die LES aufzeigen. Weiterhin können Kriterien abgeleitet werden, unter welchen Bedingungen ein sicherer Ausbrand nicht gewährleistet ist. Mögliche Ursachen sind Verbrennungsinstabilitäten, die sich bedingt durch Flammeninstabilitäten z.B. in mageren Gemischen einstellen. Diese Instabilitäten sind ebenfalls Gegenstand der Untersuchungen der vorliegenden Arbeit. In einer Large-Eddy-Simulation können Zustände detektiert werden, bei denen die Flamme sich so komplex verhält, dass eine sichere Simulation mit der LES nicht möglich ist. Für diese Fälle sollte das Rechengitter adaptiv verfeinert werden und eine räumlich eng begrenzte DNS eingebettet in einer globalen LES ausgeführt werden. Sobald wieder klare Verhältnisse vorliegen wird das Gitter wieder vergrößert.

Nach dem Verlöschen der Flamme, laufen noch Reaktionen ab, die für die Schadstoffchemie wichtig sind. Da diese vergleichsweise langsam ablaufen, können geeignete Subgridmodelle für die LES gefunden werden.

Im oben dargestellten Szenario einer zukünftigen Simulation eines direkteinspritzenden Motors mit Ladungsschichtung wird ein Kompromiss zwischen dem Detaillierungsgrad der physikalischen Modelle und dem numerischen Aufwand geschlossen. Die Large-Eddy-Simulation steht im Mittelpunkt. Bei allen Phänomenen, die auf der Subgridskala ablaufen und die den Schlüssel für eine akkurate Simulation bilden, ergänzt die vorliegende Arbeit und deren zukünftige Weiterentwicklung die LES. Es wird die Brücke zwischen chemischen Vorgängen, die auf kleinster Skala ablaufen und Phänomenen, die auf der großen Skala der Hauptströmung ablaufen geschlagen. Vorgänge, die auf der Subgridskala ablaufen, werden während einer Simulation nur dann detailliert betrachtet, wenn diese einerseits für den weiteren Verlauf des Gesamtprozesses maßgeblich bestimmend sind (Zündung, Abspaltung großer Brennstoffballen) und andererseits die LES keine zuverlässige Aussagen liefert.

Offensichtlich fordert das dargestellte Simulationsszenario außerordentliche Anforderungen an die numerischen Ressourcen. In Anbetracht der Entwicklung der Leistungsfähigkeit der Rechner in der Vergangenheit kann erwartet werden, dass die notwendigen Ressourcen zur Verfügung stehen und auch für industrielle Entwicklungen eingesetzt werden, sobald die noch zu entwickelnden Modelle verfügbar sind.

Für fortschrittliche Verbrennungstechnologien in Gasturbinen, industriellen Feuerungen und im Heizungsanlagen versprechen ähnliche Simulationsszenarien Erfolg bei der effizienten Umsetzung neuer Konzepte in die Praxis. Diese Arbeit behandelt Phänomene, die auf kleinen Längenskalen ablaufen. Das komplexe Verhalten auf diesen Skalen, führt jedoch zu makroskopischen Effekten, deren Beherrschung den Erfolg eines Konzeptes bestimmen kann.

An dieser Stelle, soll eine knappe Einführung in die eigentliche Fragestellung dieser Arbeit erfolgen. Es wird ein Modell für die Ausbreitung einer Vormischflamme in allgemeine Strömungsfeldern hergeleitet. Eine ausführliche Diskussion des aktuellen Wissensstands und die Motivation für die angewandte Methodik wird im nächsten Kapitel gegeben.

In dem Modell wird eine Vormischflamme als eine gasdynamische Diskontinuität aufgefasst, die das Brenngas von dem Rauchgas trennt. Dieser Modellansatz geht zurück auf

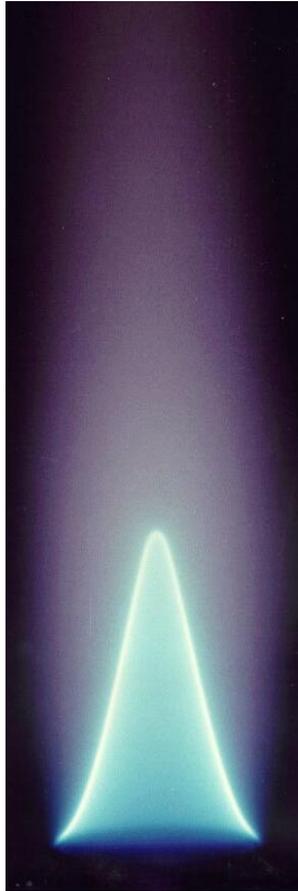


ABBILDUNG 1. Fotografie (I. Braun) einer laminaren Bunsenflamme. Die Flamme zeigt einen glatten Verlauf. Chemische Reaktionen sind auf eine dünnen leuchtende Zone beschränkt. Vor und hinter der Reaktionszone ist die Strömung inert.

die Ideen von Darrieus(1938 und 1945) und Landau(1945) aus den 30er Jahren. Im Gegensatz zu diesem heuristischen Modell wird das vereinheitlichte Modell mittels strenger asymptotischer Methoden basierend auf den Grundgleichungen der Strömungsmechanik hergeleitet. Die Methodik ähnelt somit den Ansätzen von Sivashinsky (1976) und später Matalon & Matkowsky (1982). In den Arbeiten von Darrieus und Landau stand die Frage der Stabilität von Vormischflammen im Mittelpunkt. Die Stabilitätsanalyse hatte die Instabilität von Vormischflammen bezüglich Störungen jeglicher Wellenlänge ergeben. Dies führte zu einer heftigen Diskussion unter den Verbrennungsforschern. Glatte Vormischflammen sollten demnach nicht existieren. Diese Aussage steht im offensichtlichen Widerspruch zu experimentellen Befunden. Bislang ist jeder Versuch gescheitert, diesen Widerspruch befriedigend aufzuheben. Es wurden zwar Korrekturen der Ergebnisse von Darrieus und Landau mit strengen asymptotischen Methoden vorgenommen. Diese zeigen jedoch nur eine Tendenz zur Stabilisierung kurzweiliger Störungen. Hier wird die Frage der Stabilität von Vormischflammen zufriedenstellend beantwortet. Dies gilt insbesondere in Hinblick auf flackernde, d.h. zeitperiodische Flammen.

Eine weitere Fragestellung die unter den Verbrennungsforschern heftig diskutiert wird ist die Definition einer Flammengeschwindigkeit. Die Vorschläge reichen von der Aus-

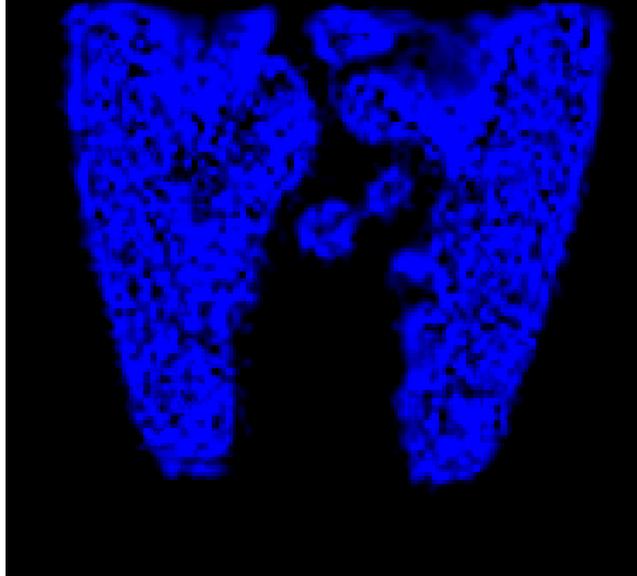


ABBILDUNG 2. Schnitt durch eine turbulente Bunsenflamme mittels der OH-Laser induzierter Fluoreszenz (Foto: D. Kuhn). Unverbranntes Gemisch und ausgebranntes Rauchgas sind durch eine dünne Flamme voneinander getrennt.

strömungsgeschwindigkeit aus einem Brenner, über den Massenumsatz des Brenngases zur Relativgeschwindigkeit der Flamme bezüglich des Gases an einer Referenzposition. Letztere kann willkürlich festgelegt werden und es gibt Definitionen, die sich auf das Maximum bestimmter Zwischenprodukte der Reaktion beziehen, über die Position der maximalen Reaktionsrate oder den Ort, an dem die Temperatur bis auf ein Prozent an die Maximaltemperatur heranreicht. Bei der Herleitung unseres Modells ergibt sich auf natürliche Weise eine neue Definition der Flammenfront aus strömungsmechanischer Sicht. Die Vorteile im Vergleich zu den herkömmlichen Definitionen werden aufgezeigt. Als herausragender Vorteil sei hier nur die Einfachheit der Bedingungen genannt, welche die Strömungszustände beiderseits der Flamme miteinander verknüpfen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert.

In Kapitel 2 erfolgt die geschichtliche Einordnung der Arbeit. Die früheren Modelle werden ausführlich diskutiert und offene Fragestellungen aufgezeigt. Es wird erläutert, wie diese offenen Fragestellungen beantwortet werden. Die Kapitel 3 bis 5 enthalten die formale Herleitung des Modells. In Kapitel 3 werden die Grundgleichungen angegeben, in die Tensorschreibweise überführt und auf mit der Flamme mitbewegte Koordinaten transformiert. In Kapitel 4 werden die Gleichungen in eine asymptotische Reihen in reziproke Potenzen von Pe entwickelt. Die ersten beiden Ordnungen des Problems werden gelöst und die Strömungssprungbedingungen an der Flamme formuliert. Am Ende des Kapitels erfolgt eine physikalische Interpretation der strömungsmechanischen Ergebnisse. In Kapitel 5 wird die vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung hergeleitet. Frühere Theorien werden durch Grenzbetrachtungen aus der vereinheitlichten Theorie abgeleitet. In Kapitel 6 wird die Stabilität einer stationär fortschreitenden ebenen Flamme untersucht. Schließlich werden die Ergebnisse in Kapitel 7 zusammengefasst.

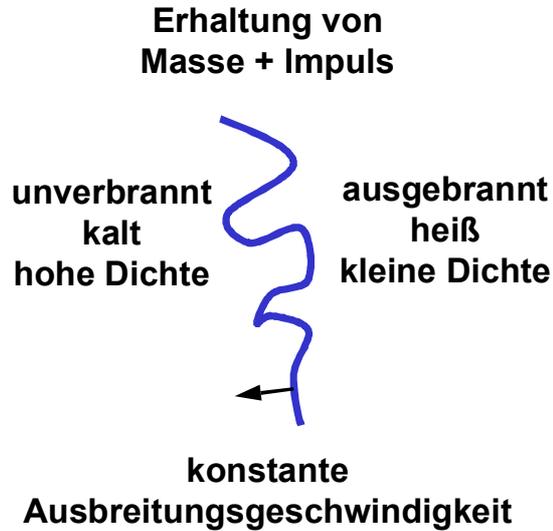


ABBILDUNG 3. Im Darrieus-Landau-Modell trennt eine Fläche unverbranntes Brenngas vom ausgebranntem Rauchgas. Die Fläche setzt mit einer konstanten Flammengeschwindigkeit das Brenngasgemisch um.

2. Geschichtliche Einordnung der Arbeit

Bei der Vormischverbrennung reagiert ein gasförmiges Gemisch aus Brennstoff und Luft bzw. Sauerstoff wobei ausgebrannte Rauchgase gebildet werden. Hinreichend weit stromauf und stromab der Flamme sind die Temperatur, die Zusammensetzung und somit auch die Gasdichte weitgehend konstant. Gewöhnlich ist die Flamme dünn im Vergleich zu den charakteristischen Längenabmessungen der Gasströmung. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen Fotos einer laminaren und einer turbulenten Bunsenflamme. Diese verdeutlichen die geringe normale Ausdehnung einer Flamme. Aus dieser Beobachtung er Beobachtung dünner Flammen kann der einfachste Ansatz zur Beschreibung von Vormischflammen abgeleitet werden. Die Flamme wird als eine gasdynamische Unstetigkeit aufgefasst, welche die kalte Mischung hoher Dichte von den heißen Rauchgasen niederer Dichte trennt. Eine erste Theorie dieser Art wurde von Darrieus (1938 und 1945) und unabhängig von Landau (1944) vorgeschlagen. Abbildung 3 zeigt schematisch die Grundidee.

Im Darrieus-Landau-Modell wird die Strömung beiderseits der Unstetigkeitsfläche durch die inkompressiblen reibungsfreien Strömungsgleichungen beschrieben. Um das Modell zu schließen wird angenommen, dass sich die Flamme beziehungsweise die Unstetigkeitsfläche normal zu sich selbst mit einer konstanten Geschwindigkeit \tilde{s}_F ausbreitet. Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die adiabate Flammengeschwindigkeit \tilde{s}_F^0 , mit der sich eine ebene Flamme stationär ausbreitet, so dass gilt

$$\tilde{s}_F = \tilde{s}_F^0. \quad (2.1)$$

Die Strömungszustände beiderseits der Flamme sind durch Sprungbedingungen verknüpft. Im einzelnen wird ein stetiger Verlauf von Massenstrom und Impuls angenommen. In dimensionsloser Schreibweise ergeben sich die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} [m] &= 0, \\ [p + mv_n] &= 0, \\ [\mathbf{v}_\perp] &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei die eckigen Klammern den Sprung einer Größe über die Flamme hinweg bezeichnen, $[*] = *_b - *_f$. Hierbei ist $*_b$ die Größe $*$ auf der Rauchgasseite der Flammenfläche. Entsprechend bezeichnet $*_f$ die Größe $*$ auf der Brenngasseite der Flammenfläche. Es wird die Konvention eingeführt, dass Größen, die sich auf die Rauchgase beziehen, in Anlehnung an den englischen Begriff "burned", grundsätzlich mit dem tiefgestellten Index "b" gekennzeichnet werden. Entsprechend wird, in Anlehnung an "fresh" der Index "f" für die Brenngase eingeführt. Weiterhin werden dimensionsbehaftete Größen mit einer Wellenlinie gekennzeichnet, um diese von entsprechenden dimensionslosen Größen (ohne Wellenlinie) zu unterscheiden. Es bezeichnen $m = \tilde{m}/(\tilde{\rho}_f \tilde{s}_F^0)$, $p = \tilde{p}/(\tilde{\rho}_f (\tilde{s}_F^0)^2)$, $v_n = \tilde{v}_n/\tilde{s}_F^0$ und $\mathbf{v}_\perp = \tilde{\mathbf{v}}_\perp/\tilde{s}_F^0$ den Massenstrom durch die Flamme, den Druck, die Normalgeschwindigkeit und die Tangentialgeschwindigkeit, wobei $\tilde{\rho}_f$ die Dichte des Brenngasgemisches darstellt. Der Massenstrom wiederum kann durch die Dichte $\rho = \tilde{\rho}/\tilde{\rho}_f$, die Normalgeschwindigkeit v_n und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flamme, bezüglich eines raumfesten Bezugssystems $u_n = (\tilde{u}_n/\tilde{s}_F^0)$, ausgedrückt werden, wobei gilt $m = \rho(v_n - u_n)$. Die Normal- und Tangentialkomponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}/\tilde{s}_F^0$ sind $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ und $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{n} \times \mathbf{v} \times \mathbf{n}$, wobei \mathbf{n} den Normalenvektor bezeichnet, der vom Brenngas- in das Rauchgasgebiet gerichtet ist. Im Darrieus-Landau-Modell gilt $m \equiv 1$. Bislang ist es verbreitet die Flammenausbreitung durch die Flammengeschwindigkeit $S_F = \tilde{s}_F/\tilde{s}_F^0$ zu charakterisieren. Diese bezeichnet die Relativgeschwindigkeit der Flamme bezüglich des Brenngasgemischs. In dimensionsloser Form, wobei die Werte im Brenngasgebiet als Bezugsgrößen dienen, gilt $m = S_F$.

Das Darrieus-Landau-Modell zeigt ein grundlegendes Problem in Hinblick auf die Stabilität der Flammenausbreitung. Es kann leicht nachgewiesen werden und es wird später in dieser Arbeit gezeigt, dass eine ebene Flamme, welche sich in einer anfänglich ruhenden Mischung ausbreitet, instabil gegen Störungen beliebiger Wellenlänge ist. Im Verlauf der Flammenausbreitung entstehen auf der Flamme Strukturen und die Flamme wird gefaltet. Lediglich bezüglich ebener Störungen ergibt sich Neutralstabilität. Die Darrieus-Landau-Instabilität ist um so ausgeprägter je kurzwelliger eine Störung ist. Dieses theoretische Ergebnis widerspricht Beobachtungen aus Laborversuchen. Das Darrieus-Landau-Modell besagt, dass, unabhängig von den Abmessungen eines Flachflammenbrenners, sich die Flamme auffaltet. Eine ebene Flamme könnte somit nicht realisiert werden.

Um die physikalischen Widersprüche des Darrieus-Landau-Modells zu beheben, schlug Markstein (vgl. Markstein (1951) oder Markstein (1964)) ein einfaches phänomenologisches Modell vor. Im Markstein-Modell wird angenommen, dass die Flammengeschwindigkeit proportional zur mittleren Krümmung $2\tilde{c} = -\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{n}$ der Flamme sei, so dass gilt

$$\tilde{s}_F = \tilde{s}_F^0(1 - \tilde{l}_M 2\tilde{c}) \quad (2.3)$$

wobei \tilde{l}_M die Marksteinlänge bezeichnet. Diese wird experimentell bestimmt (Searby & Quinard (1990)). In dimensionsloser Darstellung ist $c = \tilde{c}\tilde{l}$ und $\tilde{\nabla} = \nabla/\tilde{l}$ wobei \tilde{l} eine charakteristische Längenabmessung der Strömung (zum Beispiel den Durchmesser eines Bunsenbrenners) bezeichnet. Gl. (2.3) ist in dimensionsloser Form

$$m = 1 - Mr 2c, \quad (2.4)$$

wobei die Markstein-Zahl $Mr = \tilde{l}_M/\tilde{l}$, das Verhältnis der Marksteinlänge zur Längenabmessung der Strömung bezeichnet. Es soll hier eine gestörte ebene Flamme mit positiver (negativer) Krümmung, d. h. die in das Brenngasgebiet (Rauchgasgebiet) ausgelenkt ist, betrachtet werden. Dieses Flammenelement hat gemäß Gl. (2.3) eine reduzierte (erhöhte) Flammengeschwindigkeit. Somit kehrt die Flamme zu ihrer ursprünglichen ebenen Geometrie zurück. Im Falle langwelliger Störungen (mit Wellenlängen größer als die

Marksteinlänge) ist dieser Effekt nur schwach ausgeprägt, so dass die Darrieus- Landau-Instabilität weiterhin beobachtet werden kann. Im Markstein-Modell werden die Sprungbedingungen (2.2) unverändert übernommen. Es sei hier darauf hingewiesen, dass das Markstein-Modell empirischer Natur ist. Die Beziehung zwischen der Flammengeschwindigkeit und der Flammenkrümmung wird postuliert und nicht aus den Naturgesetzen abgeleitet. Des weiteren ist die Marksteinlänge eine empirische Größe, die experimentell bestimmt werden muss (vgl. Searby & Quinard (1990)), anstelle sich direkt aus den physisch chemischen Eigenschaften des Brenngasgemischs zu ergeben.

Das Markstein-Modell weist plausible Stabilitätseigenschaften auf. Allerdings gilt es nur eingeschränkt, da es der Beobachtung, dass sich die Flammengeschwindigkeit flacher Flammen, in Strömungen mit Geschwindigkeitsgradienten, von der adiabaten Flammengeschwindigkeit in ruhenden Mischungen unterscheidet, nicht Rechnung trägt. Deshalb übernahm Markstein (1964) die Ansätze von Eckhaus (1961) und verallgemeinerte das Markstein-Modell, so dass die "Krümmung der Strömung", im Englischen "strain", $-\mathbf{n} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}$, empirisch berücksichtigt wird. Das verallgemeinerte Markstein Modell lautet in unserer Schreibweise

$$\tilde{s}_F = \tilde{s}_F^0 (1 - \tilde{l}_M 2\tilde{c}) + \tilde{l}_M \mathbf{n} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} \quad (2.5)$$

oder in dimensionsloser Form

$$m = 1 - Mr (2c - \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}). \quad (2.6)$$

Diese Beziehung ist in Einklang mit den Überlegungen von Karlovitz *et al.* (1953) Karlovitz, Denniston, Knapschaefer & Wells, die annahmen, dass die Flammengeschwindigkeit nicht von der Krümmung abhängen sollte, sondern von der Flammenstreckung, im Englischen "stretch", $\chi = \tilde{\chi} \tilde{l} / \tilde{s}_F^0$. Die Flammenstreckung ist die relative zeitliche Änderung der Größe eines Flächenelements der Flamme. Im Falle einer ebenen stationären Flamme ist die Karlovitz-Streckung χ gleich der Divergenz der Tangentialgeschwindigkeit entlang der Flamme. Für inkompressible Fluide ergibt sich der "strain" $-\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Dies gilt nicht für beliebige gekrümmte Flammen. Matalon (1983) leitet eine von den Koordinaten unabhängige Darstellung der Karlovitz-Streckung ab. In Williams (1985) wird diese so umgeformt, dass sich ein zu Geschwindigkeitsgradienten, d.h. zum "strain", proportionaler und additiv ein zur Krümmung proportionaler Term, ergeben.

Die Theorien von Darrieus-Landau, Markstein und Karlovitz sind alle phänomenologisch. Dies bedeutet, dass die Autoren ihre Ergebnisse nicht direkt aus den Naturgesetzen herleiteten. Sie betrachteten weder chemische Reaktion noch diffusive Prozesse. Statt dessen, ändert die Flamme lediglich die Dichte. In Wirklichkeit beruht der Ausbreitungsmechanismus einer Vormischflamme auf einem empfindlichen Zusammenwirken von chemischen Reaktionen, stromaufwärtsgerichteter Wärmeleitung, diffusivem Stofftransport sowie konvektivem Stoff- und Wärmetransport. Für den Fall orts- und zeitabhängiger Strömung, ergibt sich ganz offensichtlich eine enge Wechselwirkung dieser Phänomene mit der Strömung, so dass sich eine veränderliche Flammengeschwindigkeit ergibt.

Um ein geschlossenes Modell aus den Naturgesetzen herleiten zu können, müssen spezifische chemische Reaktionen betrachtet werden, und es muss die innere Struktur der dünnen Flamme betrachtet werden. Die Dicke der Flamme kann mittels der charakteristischen Länge $\tilde{l}_0 = \tilde{\kappa}_f / \tilde{s}_F^0$ abgeschätzt werden, wobei $\tilde{\kappa}_f = \tilde{\lambda}_f / (\tilde{\rho}_f \tilde{c}_{pf})$ die thermische Diffusivität des Brenngasgemischs bezeichnet. Das Verhältnis der charakteristischen Längenskalen von Strömung und Flammenstruktur ist die Peclet-Zahl $Pe = \tilde{l} / \tilde{l}_0$.

Barenblatt, Zeldovich & Istratov (1962) führten das thermisch-diffusive Verbrennungsmodell ein. Im Gegensatz zu den, zuvor erörterten strömungsmechanischen Betrachtungen, vernachlässigten sie Dichteänderungen berücksichtigten aber Diffusionsprozesse sowie

chemische Reaktion. Der Verbrennungsvorgang wird als eine direkte irreversible Reaktion des Brennstoffs mit der Verbrennungsluft aufgefasst. Die Tatsache, dass sich ein Brenngasgemisch bei typischen atmosphärischen Bedingungen nicht spontan entzündet, erfordert, dass die Aktivierungsenergie dieser Reaktion hoch ist. Die Reaktionsrate hängt empfindlich von Temperaturänderungen ab, so dass merkliche chemische Reaktion in einer dünnen Schicht abläuft. Diese Schicht wird als Reaktionszone bezeichnet, es herrschen darin hohe Temperaturen. Eine dünne Reaktionszone ist mathematisch mit einer großen Zeldovich-Zahl $Ze = \tilde{E}/(2\tilde{R}_g\tilde{T}_b) \left(1 - \tilde{T}_f/\tilde{T}_b\right)$ verknüpft. Hierin ist \tilde{E} die Aktivierungsenergie des globalen Reaktionsmechanismus, \tilde{R}_g ist die Gaskonstante und \tilde{T}_b ist die adiabate Verbrennungstemperatur. Die Dicke der Reaktionszone kann zu \tilde{l}_0/Ze abgeschätzt werden. Hinter der Reaktionszone findet keine chemische Reaktion statt, da der zur Verfügung stehende Brennstoff in der Reaktionszone verbraucht wird. Vor der Reaktionszone ist die Reaktionsrate aufgrund niedriger Temperaturen vernachlässigbar klein. Stromauf der Reaktionszone liegt die Vorheizzone. In dieser Zone wird das heranströmende Gemisch durch Wärmeleitung erhitzt bis die Reaktion bei hinreichend hoher Temperatur einsetzt. Innerhalb der Vorheizzone wird das Brenngas der Reaktionszone, durch Konvektion und Diffusion zugeführt. Aufgrund der niederen Wärmeleitfähigkeit und der niederen binären Stoffdiffusionskoeffizienten in Gasmischungen ist die Vorheizzone, im Falle typischer Verbrennungsbedingungen, dünn gemessen an charakteristischen Längenskalen der Strömung.

Die Flammengeschwindigkeit von Vormischflammen, deren Reaktionskinetik durch eine direkte irreversible Reaktion gegeben ist, wird für den Fall eines allgemeinen Strömungsfelds und unter der Berücksichtigung der thermischen Expansion in mehreren Veröffentlichungen behandelt [Clavin & Williams (1982), Matalon & Matkowsky (1982) und Sivashinsky (1976)]. Die Modelle in Clavin & Williams (1982) und Matalon & Matkowsky (1982) ergeben sich aus einem Störungsansatz und liefern Korrekturen des Darrieus-Landau-Modells der Größenordnung $O(\text{Pe}^{-1})$. Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung und die Sprungbedingungen werden nicht mehr postuliert sondern streng hergeleitet. In diesen Modellen, stellt die Lösung des thermisch-diffusiven-Modells, die verallgemeinert wird, um die thermische Expansion zu berücksichtigen, die innere Struktur der Flamme dar, welche mit einer großskaligen Strömung in Wechselwirkung tritt. Es wird angenommen, dass die Krümmung der Flamme, gemessen an der Dicke der Vorheizzone, schwach ist. Variationen entlang der Flamme sind klein verglichen mit den ausgeprägten Variationen normal zur Flamme. Die Eigenschaften der Flamme werden maßgeblich von der Lewis-Zahl Le bestimmt. Diese ist das Verhältnis der Diffusivitäten von Wärme- und Stofftransport. Dabei wird in der Theorie allgemein die Stoffdiffusivität eines Spezies gewählt, welches die chemische Reaktion limitiert. Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung in Clavin & Williams (1982) stellt eine linearisierte Version der Beziehung von Matalon & Matkowsky (1982) dar.

Sivashinsky (1976) betrachtet Lewis-Zahlen, die sich deutlich von Eins unterscheiden. In der führenden Ordnung ergibt sich die Konstanz des Massenstroms sowie des normalen und tangentialen Impulsstroms innerhalb der Flammenstruktur (Vorheizzone und Reaktionszone). Die Sprungbedingungen (2.2) beruhen exakt auf dieser Annahme und gelten somit unverändert. Der Massenstrom m ergibt sich in der führenden Ordnung zu

$$m^2 \ln m = Ze \text{Pe}^{-1} I_S \left(\frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial t} + \chi \right). \quad (2.7)$$

Hierin bezeichnet $t = \tilde{t}_F^0/\tilde{l}$ die Zeit und I_S stellt eine Konstante dar, die von den

physikalischen Stoffgrößen des Gasgemischs abhängt

$$I_S = T_b \int_1^{T_b} \frac{\kappa(T)}{T} \left(1 - \left(\frac{T-1}{T_b-1} \right)^{L-1} \right) dT \quad (2.8)$$

wobei $\kappa(T) = \tilde{\kappa}/\tilde{\kappa}_f$ die Wärmeleitfähigkeit der Mischung als Funktion der Temperatur ist und $T_b = \tilde{T}_b/\tilde{T}_f$. Die Beziehung (2.7) für den, die Flamme durchströmenden Gasmassenstrom, ist eine nichtlineare gewöhnliche Differenzialgleichung in der Zeit. Die Zeitableitung in (2.7) berücksichtigt die Tatsache, dass sich eine Flamme nur verzögert an neue Bedingungen anpassen kann. Allerdings verwarf Sivashinsky die zeitabhängige Beziehung (2.7) aufgrund ihrer Stabilitätseigenschaften. Das Modell ergibt für beliebige Lewis-Zahlen die Instabilität kurzweiliger Störungen jenseits der Gültigkeitsgrenzen des Modells. Entsprechendes gilt für das Darrieus-Landau-Modell. Allerdings sind jetzt kurzweilige Störungen instabil hinsichtlich einer zeitperiodischen Instabilität für $Le \neq 1$. Deshalb wendet Sivashinsky die Beziehung (2.7) nur auf stationäre Flammen an.

Clavin & Williams (1982) lösen die Probleme des Darrieus-Landau-Modells in Hinblick auf die Stabilität. Sie betrachten infinitesimale Störungen nahezu ebener Flammen in nahezu gleichförmigen Strömungen für $Le = 1 + O(1/Ze)$ (im Englischen "near equidiffusional flames"). Die ebene Flamme ist jetzt für bestimmte Parameterbereiche stabil bezüglich kurzweiliger Störungen, so dass sich stabile ebene Flammen auf hinreichend kleinen Brennern ergeben, so wie dies experimentell gefunden wird. Allerdings, liefert die Theorie von Clavin & Williams (1982) lediglich die Flammengeschwindigkeitsbeziehung und nicht die zugehörigen Sprungbedingungen. Ein geschlossenes Modell setzt sich jedoch aus diesen beiden Bestandteilen zusammen. Die Sprungbedingungen für infinitesimale Störungen ebener Flammen in nahezu gleichförmiger Strömung werden in Pelce & Clavin (1982) hergeleitet. Diese Sprungbedingungen stellen störungstheoretische Korrekturen der Sprungbedingungen des Darrieus-Landau-Modells dar. Es handelt sich um eine linearisierte Form der Sprungbedingungen in Matalon & Matkowsky (1982). In den Sprungbedingungen ergibt sich ein der Krümmung proportionaler Term, der als effektive Oberflächenspannung interpretiert wird.

Matalon & Matkowsky (1982) untersuchen Flammen beliebiger Geometrie für den Fall einer Lewis-Zahl nahe Eins. Es wird ein beliebiges Geschwindigkeitsfeld und thermische Expansion zugelassen. Ist die Lewis-Zahl nahe Eins, so ist die Enthalpie eine nahezu konservative Größe, und es ergibt sich eine nahezu konstante Flammengeschwindigkeit. In der führenden Ordnung der asymptotischen Theorie von Matalon & Matkowsky (1982) wird exakt das Modell von Darrieus und Landau abgeleitet. Werden störungstheoretische Korrekturen berücksichtigt, ergibt sich die nachfolgende Beziehung für den Massenstrom durch die Flamme

$$m = 1 - \frac{1}{Pe} \alpha_M \chi + O(Pe^{-2}), \quad (2.9)$$

$$\alpha_M = \left(\frac{T_b}{T_b - 1} \ln T_b + \frac{1}{2} \Lambda I_M \right), \quad (2.10)$$

$$I_M(T_b) = \int_{-\infty}^0 \ln(1 + (T_b - 1)e^x) dx \quad (2.11)$$

wobei $\Lambda = Ze(Le - 1)$ eine $O(1)$ reskalierte Lewis-Zahl darstellt. Der Wert des Integrals I_M hängt von der thermischen Expansion $T_b - 1$ ab. Die Größe α_M ist zusätzlich eine Funktion der Zeldovich- und der Lewis-Zahl. Es sei darauf hingewiesen, dass $Pe^{-1}\alpha_M$ als die Markstein-Zahl identifiziert werden können. Allerdings ist diese jetzt durch die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Mischung charakterisiert und stellt

keinen frei wählbaren Modellparameter mehr dar. Da die Massenstrom- bzw. Flammengeschwindigkeitsbeziehung jetzt Terme der Größenordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ enthält, ist es nicht mehr ausreichend die Sprungbedingungen von Darrieus und Landau anzuwenden. Diese werden durch die erweiterten Sprungbedingungen von Matalon & Matkowsky (1982) ersetzt.

$$\begin{aligned} [m] &= \frac{1}{\text{Pe}} \chi \ln T_b + O(\text{Pe}^{-2}), \\ [p + mv_n] &= \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{T_b}{T_b - 1} \ln T_b [\nabla_n p] + 2c(T_b - 1 + T_b \ln T_b) + u_n \chi \ln T_b \right) + O(\text{Pe}^{-2}), \\ [\mathbf{v}_\perp] &= -\frac{1}{\text{Pe}} \left(\text{Pr} + \frac{T_b}{T_b - 1} \ln T_b \right) [\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{v}] + O(\text{Pe}^{-2}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei Pr die Prandtl-Zahl ist und $\nabla_n^* = \nabla \cdot \mathbf{n}$ die Normalableitung bezeichnet. Die Sprungbedingungen sind hier in der koordinatenfreien Darstellung aus Matalon & Matkowsky (1984) angegeben. Die neuen Terme auf der rechten Seite in (2.12) werden auf Transportphänomene entlang der Flamme zurückgeführt. Eine lineare Stabilitätsuntersuchung für ebene Flammen zeigt, dass im Falle von Lewis-Zahlen $\text{Le} > \text{Le}_c$, wobei $\text{Le}_c < 1$, langwellige Störungen instabil sind, wogegen kurzwellige Störungen stabil sind. Das Modell liefert keine zeitabhängigen Instabilitäten. Gilt $\text{Le} < \text{Le}_c$ so sind Störungen beliebiger Wellenlänge instabil. Die Instabilitäten bei $\text{Le} < \text{Le}_c$ sind nahe verwandt mit Zellularinstabilitäten, die für Strömungen konstanter Dichte, durch die Kuramoto-Sivashinsky-Theorie beschrieben werden. In Clavin & Joulin (1983) wird die Untersuchung von Clavin & Williams (1982) für den Fall von Faltungen der Flamme mit einer Amplitude der Größenordnung $O(1)$ verallgemeinert. Weiterhin werden beliebige Strömungsfelder zugelassen, so dass sich die Flammengeschwindigkeitsbeziehung von Matalon & Matkowsky (1982) ergibt.

Obwohl sich das Modell von Matalon & Matkowsky (1982) für numerische Simulationen dünner Vormischflammen eignet, wobei die innere Struktur der Flamme nicht aufgelöst werden müsste, ist uns keine Anwendung des Modells in der Numerik bekannt. Da der Massenstrom an der Flamme unstetig ist, muss im Verlauf einer Rechnung Masse an der Flamme hinzugefügt oder entnommen werden. Außerdem stellt die Umsetzung der Sprungbedingungen eine umfangreiche Aufgabe dar.

Es gibt somit gegenwärtig unterschiedliche Theorien für $\text{Le} - 1 = O(1)$ von Sivashinsky (1976) und für $\text{Le} \approx 1$ von Matalon & Matkowsky (1982). In der Theorie von Sivashinsky (1976) wird lediglich die führende Ordnung einer asymptotischen Entwicklung betrachtet, wogegen in der Arbeit von Matalon & Matkowsky (1982) auch störungstheoretische Korrekturen von $O(\text{Pe}^{-1})$ berücksichtigt werden. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Ableitung einer umfassenden Theorie. Diese soll die beide oben dargestellten Grenzfälle enthalten.

Kürzlich stellen Klimenko & Class (2000a) einen neuen Ansatz vor, bei dem die Tensorrechnung in krummlinigen, bezüglich der Flamme orthogonalen, Koordinaten eingesetzt wird. Dieser Ansatz erlaubt die Herleitung der Flammengeschwindigkeitsbeziehungen von Matalon & Matkowsky (1982) und Sivashinsky (1976), wobei viele rein geometrische Terme der früheren Arbeiten nicht mehr auftauchen. In Klimenko & Class (2000b) wird der Ansatz benutzt, um Flammen mit komplexer chemischer Kinetik zu untersuchen. Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung von Sivashinsky (1976), eine nichtlineare gewöhnliche Differenzialgleichung, wird durch eine einfachere algebraische Beziehung ersetzt. In Klimenko, Class & O’Gorman (2001) wird der Ansatz zur Untersuchung einer Flamme mit einer $O(1)$ Aktivierungsenergie eingesetzt. Hierbei sind die Dicken der Reaktionszo-

ne und der Vorheizzone ähnlich groß. Es wird gezeigt, dass die Flammengeschwindigkeit jetzt sowohl von der Flammenstreckung als auch von der Flammenkrümmung abhängt. Allerdings gibt es eine eindeutig definierte Lage der Flammenposition, an der die Abhängigkeit von der Flammenkrümmung verschwindet.

In der vorliegenden Arbeit wird der Ansatz von Klimenko & Class (2000a) benutzt, um das Strömungsfeld und die Sprungbedingungen, die nicht in Klimenko & Class (2000a), Klimenko & Class (2000b), Klimenko, Class & O’Gorman (2001) betrachtet werden, zu untersuchen. Betrachtet werden die Gleichungen, welche die innere Struktur der Flamme beschreiben und die Gleichungen der äußeren inkompressiblen Strömung. Anschließend werden die innere und äußere Lösung aneinander angepasst, wobei sich die Sprungbedingungen für die äußere Lösung ergeben. Diese Sprungbedingungen enthalten Korrekturen der Sprungbedingungen von Darrieus und Landau. Es wird gezeigt, dass die Darstellung der Sprungbedingungen stark von der genauen Position der Unstetigkeitsfläche innerhalb der Flamme abhängt. Als Gibbs in Gibbs (1876 und 1878) und Gibbs (1879) das Problem der Oberflächenspannung einer freien Grenzfläche zwischen zwei unmischbaren Flüssigkeiten untersuchte, fand er ebenfalls einen Ausdruck, der von der genauen Lage der Oberfläche abhängt. In Abhängigkeit der genauen Lage der Oberfläche muss dieser eine virtuelle Oberflächenmasse zugewiesen werden (Im Englischen *excess surface mass*). In unserem Problem weist eine eindeutig definierte Flammenposition besondere Vorteile auf, insofern als viele Terme in den Sprungbedingungen wegfallen. Die Ursache für das Verschwinden dieser Terme, ist ein an der Unstetigkeitsfläche kontinuierlicher Massenstrom beziehungsweise das Verschwinden der virtuellen Oberflächenmasse. In der Sprungbedingung für die Impulsbilanz in der Normalenrichtung, ergibt sich ein einziger Term, welcher der Oberflächenkrümmung proportional ist. Beim Problem der Oberflächenspannung einer Grenzfläche zwischen zwei unmischbaren Flüssigkeiten gilt dies entsprechend. Da die Ursache für das Auftreten des Terms Kompressibilitätseffekte sind und das Vorzeichen umgekehrt ist wie das der Oberflächenspannung, wird er als Oberflächenkompression bezeichnet. Die Oberflächenkompression wächst mit der thermischen Expansion stark an. In den Sprungbedingungen für die Impulsbilanz in tangentialer Richtung bewirken Gradienten der Oberflächenkompression tangentiale Oberflächenkräfte. Diese sind vergleichbar mit den tangentialen Kräften bei der Marangonikonvektion.

In der vereinheitlichten Theorie werden die Fälle $Le \approx 1$ und $Le - 1 = O(1)$ nicht als unabhängige Grenzfälle betrachtet. Vielmehr wird eine gewöhnliche Differenzialgleichung für die Flammengeschwindigkeit abgeleitet, die für die Grenzfälle von Matalon & Matkowsky (1982) und Sivashinsky (1976) die zugehörigen Flammengeschwindigkeitsbeziehungen liefert, sofern nur Störungen mit Wellenlänge $O(1)$ betrachtet werden. Im Falle eines neuen Grenzfalles $Le - 1 = O(Pe^{-1/2})$ und $\chi = O(Pe^{1/2})$, d.h. große Flammenstreckungsraten, ergibt sich eine stationäre Form der Flammengeschwindigkeitsbeziehung von Sivashinsky. Im Falle von $O(1)$ Flammenstreckung werden die ersten drei Glieder einer asymptotischen Reihe berechnet. In der führenden Ordnung ergibt sich die adiabate Flammengeschwindigkeit. In der nächsten Ordnung ergibt sich eine Korrektur, die den Einfluss der Flammenstreckung beschreibt. Nochmals in der nächst höheren Ordnung zeigen sich die Einflüsse von Zeitabhängigkeit und Flammenkrümmung.

Des weiteren werden Störungen mit hohen Wellenzahlen (kurzen Wellenlängen) und kleinen Amplituden, die früher unberücksichtigt blieben, untersucht. Es ergibt sich ein transversaler Diffusionsterm in der Flammengeschwindigkeitsbeziehung, der hier erstmals hergeleitet wird. Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung ist jetzt eine nichtlineare partielle Differenzialgleichung. Der neue transversale Diffusionsterm spielt eine ähnliche Rolle wie der biharmonische Operator in der Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung in Sivashinsky

(1977), welche die schwach nichtlineare Dynamik von Flammenfronten, bei Vernachlässigung der thermischen Expansion, beschreibt.

Die lineare Stabilität ebener Flammen, die als gasdynamische Unstetigkeit aufgefasst werden, wird untersucht und mit den früheren Theorien von Darrieus-Landau, Sivashinsky sowie Matalon und Matkowsky verglichen. Für alle Parameterkombinationen ergibt sich die Darrieus-Landau Instabilität für langwellige Störungen. Es wird stets die Stabilität kurzwelliger Störungen oberhalb einer Grenzwellenzahl nachgewiesen. Im Falle von Lewis-Zahlen größer Eins können kurzwellige zeitperiodische Instabilitäten beobachtet werden. Im Gegensatz zu der Theorie von Sivashinsky, die keine Grenzwellenzahl dieser Instabilität aufweist, liefert die vorliegende Theorie Stabilität extrem kurzwelliger Störungen. Hierfür ist der neue transversale Diffusionsterm verantwortlich. Für den Fall hinreichend kleiner Lewis-Zahlen findet sich ein destabilisierender Trend über die Darrieus-Landau-Instabilität hinaus. In der Theorie von Sivashinsky ergibt sich dieser destabilisierende Trend für alle Lewis-Zahlen kleiner Eins. In der vereinheitlichten Theorie gilt dies für Lewis-Zahlen $Le < Le_c$ mit $Le_c < 1$. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den Befunden aus der Theorie von Matalon und Matkowsky, die Flammen mit $Le \approx 1$ beschreibt.

3. Grundgleichungen

Der Transport und die Reaktion eines brennbaren Gasmischs wird durch die Erhaltungsgleichungen für die Masse, Impuls, spezifische Enthalpie und die an der Reaktion beteiligten chemischen Spezies beschrieben. Zunächst werden die Gleichungen in dimensionsbehafteter Form angegeben. Ausgegangen wird von einer nicht eingeschlossenen Flamme, die sich mit einer Geschwindigkeit weit unterhalb der Schallgeschwindigkeit ausbreitet. Somit wird eine kleine Mach-Zahl Ma (das Verhältnis der Flammgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit) vorausgesetzt. Dichteänderungen sollen ausschließlich von Temperaturänderungen herrühren, so dass akustische Phänomene nicht betrachtet werden. Kompressibilitätseffekte in der Energiegleichung werden somit vernachlässigt.

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\sigma}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{c}_p \left(\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{T}) \right) = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \tilde{T}) + \tilde{Q} \tilde{W}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{Y}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{Y}) = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{D} \tilde{\nabla} \tilde{Y}) - \tilde{W}. \quad (3.4)$$

Diese Gleichungen entsprechen dem führenden Glied einer asymptotischen Entwicklung nach Ma^2 . Der Druck \tilde{p} in Gleichung (3.2) ist die Abweichung des Drucks vom konstanten statischen Umgebungsdruck. Dies heißt, dass der Gesamtdruck $\tilde{p}_0 + Ma^2 \tilde{p}$ ist, wobei der konstante Umgebungsdruck \tilde{p}_0 nicht in den Gleichungen erscheint, da nur Gradienten des Drucks relevant sind. Die unabhängigen Größen sind die Zeit \tilde{t} und die kartesischen Raumvariablen \tilde{y}_i wobei $i = 1, 2, 3$ für die drei Raumrichtungen. Der Nablaoperator sei $\tilde{\nabla} = (\partial/\partial \tilde{y}_1, \partial/\partial \tilde{y}_2, \partial/\partial \tilde{y}_3)$ und der Operator \otimes bezeichne das dyadische Produkt, welches bei Anwendung auf einen Vektor einen Tensor vom Rang Zwei liefert. Die abhängigen Größen sind der dynamische Druck \tilde{p} , der Geschwindigkeitsvektor $\tilde{\mathbf{v}}$, die Temperatur \tilde{T} und die Konzentration \tilde{Y} eines an der Reaktion beteiligten Spezies. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass ein einziges Spezies des Brenngasgemischs, welches in

geringer Konzentration vorliegt die chemische Reaktion limitiert. Diese Spezies wird als limitierendes Spezies bezeichnet. Im Falle magerer (fetter) Kohlenwasserstoff/Luft Flammen ist das limitierende Spezies der Kohlenwasserstoff selbst (der Sauerstoff). Liegt ein einzelnes limitierendes Spezies vor genügt es dessen Konzentration zu verfolgen. Die anderen Konzentrationen in der Mischung bleiben im wesentlichen unverändert. Der Ansatz kann leicht für komplexere chemische Verhältnisse verallgemeinert werden. In diesem Fall ist es vorteilhaft die spezifische Enthalpie, die von der Temperatur abhängt, anstelle der Temperatur zu betrachten. Typischerweise hängt \tilde{c}_p im betrachteten Temperaturbereich nur schwach von der Temperatur ab. Deshalb ist \tilde{c}_p durch einen temperaturgemittelten konstanten Wert angenähert.

Der Spannungstensor eines kompressiblen Newtonschen Fluids ist

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\mu} \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right), \quad (3.5)$$

wobei der hochgestellte Index "T" die Transponierte der indizierten Matrix bezeichnet und \mathbf{I} die Einheitsmatrix darstellt.

Die Transportkoeffizienten sind die dynamische Viskosität $\tilde{\mu}$ und die Wärmeleitfähigkeit $\tilde{\lambda}$ des Gasgemischs sowie die Diffusivität des limitierenden Spezies \tilde{D} . Die Abhängigkeit dieser Größen von der Zusammensetzung darf wiederum vernachlässigt werden, so dass die Transportkoeffizienten Funktionen der Temperatur allein sind. Die Größen $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\rho}\tilde{D}$ besitzen ähnliche Temperaturabhängigkeiten. Die kinetische Gastheorie liefert eine theoretisch Abhängigkeit $\sim \tilde{T}^{1/2}$.

Die Temperatur \tilde{T} ist mit der Dichte $\tilde{\rho}$ über die Zustandsgleichung verknüpft. Für ein ideales Gas bei konstantem Umgebungsdruck gilt

$$\tilde{T}\tilde{\rho} = \tilde{T}_f\tilde{\rho}_f. \quad (3.6)$$

Die Reaktionsrate ist durch die Arrheniusbeziehung $\tilde{W} = \tilde{A}\tilde{Y}^n \exp(\tilde{E}/(\tilde{R}_g\tilde{T}))$ gegeben, wobei \tilde{A} der preexponentielle Faktor und n die Reaktionsordnung sind. Die Wärmetönung (Wärmefreisetzung) der Reaktion ist \tilde{Q} . In der vorliegenden Untersuchung werden asymptotische Methoden für große Aktivierungsenergien, im Englischen "large activation energy asymptotics", angewendet. Somit wird angenommen, dass die chemische Reaktionsrate \tilde{W} sehr sensitiv auf Temperaturänderungen reagiert. Sinkt die Reaktionsrate lediglich um einen kleinen Betrag unterhalb die Rauchgastemperatur, dann sinkt die Reaktionsrate schon beträchtlich und kann vernachlässigt werden. Es ist die Dicke der Reaktionszone im Vergleich zu der ohnehin dünnen Flamme gering.

3.1. Dimensionslose Größen und Skalierung

Um die relative Bedeutung der einzelnen Terme in den Grundgleichungen abwägen zu können, ist es nützlich die Gleichungen in eine dimensionslose Form zu überführen. Festgelegt wird eine Referenzlänge \tilde{l} , welche die Abmessungen des Strömungsproblems charakterisiert. Bei laminarer Strömung ist dies eine charakteristische Länge der betrachteten Geometrie, bei turbulenter Strömung die Kolgomorov-Länge. Als Referenzgeschwindigkeit wird \tilde{s}_F^0 , die adiabate laminare Flammengeschwindigkeit, definiert. Die Dicke der Flamme lässt sich zu $\tilde{l}_0 = \tilde{\kappa}/\tilde{s}_F^0$ abschätzen. Bei atmosphärischen Kohlenwasserstoffverbrennungen ist \tilde{l}_0 typischerweise einige Zehntel Millimeter, während \tilde{l} wesentlich Größer ist. Die Peclet-Zahl $Pe = \tilde{l}/\tilde{l}_0$ gibt das Verhältnis der äußeren Längenskala zur Flammendicke an, wobei von großen Peclet-Zahlen ausgegangen wird. Die Werte \tilde{T}_f und \tilde{Y}_f des unverbrannten Gemischs werden als Referenzgrößen für die Temperatur und die Konzentration benutzt. Entsprechend werden Werte des unverbrannten Gemischs als Referenzgrößen für die Dichte und der Transportkoeffizienten benutzt.

Größe	äußeres Gebiet	inneres Gebiet
Dichte	ρ	R
Geschwindigkeit	\mathbf{v}, v^i	\mathbf{V}, V^i
Massenstrom	m^i	M^i
Druck	p	P
Wärmeleitfähigkeit	κ	\mathcal{K}
Spannungstensor	σ	Σ
Temperatur		T
Konzentration		Y
Enthalpie		H
Reaktionsrate		W
kartesische Koordinaten	\mathbf{y}	
bewegte Normalkoordinate	x^1	X
bewegte Querkoordinaten	x^α, ξ^α	
Geschwindigkeit des Koordinatensystems	u^i	
metrischer Tensor	g^{ij}, g_{ij}	
Volumenelement	\sqrt{g}	

TABELLE 1. Variablen des inneren und äußeren Gebiets

Auf der hydrodynamischen Skala \tilde{l} ist die Flamme eine Fläche, welche die ausgebrannten Rauchgase vom unverbrannten Brenngasgemisch trennt. Die Temperatur, Dichte und Viskosität beiderseits der Flammenfläche sind konstant aber verschieden. Auf der Längenskala \tilde{l}_0 der Flammenstruktur ergibt sich dagegen ein stetiger Verlauf zwischen den Werten der Variablen im unverbrannten Gemisch zu denjenigen im ausgebrannten Rauchgas. Da die Flammenstruktur in ein größeres Gebiet eingebettet ist, wird das von der Flammenstruktur eingenommene Gebiet als das "innere" Gebiet bezeichnet. Entsprechend gilt die Bezeichnung "äußeres" Gebiet für die nichtreaktive Zonen beiderseits der Flamme.

In dieser Arbeit beabsichtigen wird ein hydrodynamisches Modell der Flamme abgeleitet. Im sich ergebenden Modell wird die innere Struktur der Flamme nicht aufgelöst. Die Modellparameter werden aber aus der inneren Struktur der Flamme bestimmt, so dass die innere Struktur im Modell volle Berücksichtigung findet. Es zeigt sich, dass zwei Gleichungssätze benötigt werden; einen Satz für das Modell (auf der äußeren Längenskala) und einen zweiten Satz für die innere Struktur der Flamme (auf der inneren Skala).

Um die Variablen des inneren und äußeren Gebiets unterscheiden zu können, werden kleingeschriebene Variablennamen für äußere Variablen und großgeschriebene Variablennamen für die inneren Variablen, benutzt. Hiermit ergibt sich die übliche Schreibweise der strömungsmechanischen Gleichungen im äußeren Gebiet. Die Variablennamen im inneren Gebiet, welches lediglich zur Bestimmung von Modellparametern betrachtet wird, sind dagegen weniger üblich. Die wichtigsten inneren und äußeren Variablen sind in Tabelle 1 zusammengestellt (man beachte, dass einige dieser Variablen erst in den folgenden Kapiteln eingeführt werden).

Zunächst werden die dimensionslosen Gleichungen für die stetigen inneren Größen formuliert. Die dimensionslose Dichte, Geschwindigkeit, Temperatur, Konzentration des limitierenden Spezies und der Druck sind $R = \tilde{\rho}/\tilde{\rho}_f$, $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{v}}/\tilde{s}_F^0$, $T = \tilde{T}/\tilde{T}_f$, $Y = \tilde{Y}/\tilde{Y}_f$ und $P = \tilde{p}/(\tilde{\rho}_f(\tilde{s}_F^0)^2)$.

Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls, Energie und das limitierende Spezies sind jetzt

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \nabla \cdot (R\mathbf{V}) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial R\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (R\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla P + \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \nabla \cdot \Sigma, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial RT}{\partial t} + \nabla \cdot (R\mathbf{V}T) = \frac{1}{\text{Pe}} \nabla \cdot (R\mathcal{K}\nabla T) + \text{Pe}(T_b - 1)W, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial RY}{\partial t} + \nabla \cdot (R\mathbf{V}Y) = \frac{1}{\text{PeLe}} \nabla \cdot (R\mathcal{K}\nabla Y) - \text{Pe}W, \quad (3.10)$$

wobei Σ den Spannungstensor bezeichnet

$$\Sigma = R\mathcal{K} \left(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T - \frac{2}{3}\mathbf{I}\nabla \cdot \mathbf{V} \right). \quad (3.11)$$

In diesem Gleichungssatz wird unterstellt, dass die Diffusionskoeffizienten des Impulses, der Wärme und der Spezies eine identische Temperaturabhängigkeit aufweisen. Ihre Zahlenwerte müssen dagegen nicht gleich sein, so dass sich konstante Verhältnisse zwischen den Diffusionskoeffizienten ergeben. Die Prandtl-Zahl $\text{Pr} = \tilde{\mu}_f / (\tilde{\rho}_f \tilde{\kappa}_f)$ ist das Verhältnis der kinematischen Viskosität $\tilde{\mu}_f / \tilde{\rho}_f$ zur Wärmeleitfähigkeit. Die Lewis-Zahl $\text{Le} = \tilde{\kappa}_f / \tilde{D}_f$ ist das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeit zur Speziesdiffusivität. Die dimensionslose Größe $\mathcal{K} = \tilde{\kappa} / \tilde{\kappa}_f$ berücksichtigt die Temperaturabhängigkeit der Diffusivitäten.

Die Zustandsgleichung schreibt sich in dimensionslosen Variablen sehr einfach.

$$RT = 1. \quad (3.12)$$

Die Reaktionsrate wird in dimensionsloser Form $W = \tilde{W}\tilde{l} / (\text{Pe} \tilde{s}_F^0 \tilde{\rho}_f)$ und die Wärmetönung der Reaktion ergibt $T_b - 1$ wobei $T_b = \tilde{T}_b / \tilde{T}_f$ die adiabate Verbrennungstemperatur, d.h. die Rauchgastemperatur einer sich stationär ausbreitenden ebenen Flamme mit identischer Zusammensetzung und Gemischtemperatur, ist. Im Folgenden bezeichnen die Indizes "r", "f" und "b" stets Größen der Reaktionszone, des Brenngasgemischs und des Rauchgases. In dimensionsloser Schreibweise ergibt sich an stelle der Aktivierungsenergie \tilde{E} der Reaktion die Zeldovich-Zahl Ze .

Erhaltungsgleichungen für die inkompressible äußere Strömung beiderseits der Flamme können, analog zu den Gleichungen für die inneren Größen, formuliert werden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho\kappa \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3.14)$$

wobei ∇^2 den Laplaceoperator bezeichnet und $\rho = \tilde{\rho} / \tilde{\rho}_f$, $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} / \tilde{s}_F^0$ sowie $p = \tilde{p} / (\tilde{\rho}_f (\tilde{s}_F^0)^2)$ die Dichte, Geschwindigkeit und den dynamischen Druck der äußeren Strömung darstellen. Die unterschiedlichen Werte der Viskosität $\rho\kappa$ im Rauchgas- und Brenngasgebiet werden durch die Größen ρ und κ berücksichtigt, wobei $\kappa = 1$ im Brenngasgebiet und $\kappa = \kappa_b$ im Rauchgas. Die kinetische Gastheorie liefert $\rho_b \kappa_b = T_b^{1/2}$. Man beachte, dass die Dichte $\rho = 1$ im Brenngasgemisch und $\rho = 1/T_b$ im Rauchgas. In (3.13) und (3.14) wird die Konstanz der Dichte nicht voll ausgenutzt, um die Gleichungen der inneren und äußeren Größen in weitestgehend identischer Form darzustellen.

Die äußeren Gleichungen sind die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. In diesen wird üblicherweise die Reynolds-Zahl $\text{Re} = \text{Pe}/\text{Pr}$ benutzt.

Das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen, ist die Herleitung der Sprungbedingungen an der Flamme für äußere Größen sowie die Bestimmung der Flammengeschwindigkeit.

3.2. Gleichungen in bewegten Koordinaten

Es erweist sich als günstig, anstelle von raumfesten kartesischen Koordinaten, bewegte krummlinige Koordinaten x^1, x^2, x^3 zu verwenden, wobei $x^1 = 0$ die Flammenfläche darstellt. Eine umfassende Einführung in die Methoden der Tensorrechnung enthält das Buch von Aris (1989). Einzelheiten zur Konstruktion unseres speziellen Koordinatensystems sind im Anhang A dargestellt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit, ist es stets möglich die x^1 -Koordinatenlinien so zu wählen, dass diese normal auf den Flächen $x^1 = \text{const}$ und somit auch zur Flammenfläche sind. Der kovariante metrische Tensor unseres Koordinatensystems wird mit g^{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) bezeichnet. Aufgrund der Orthogonalität der x^1 -Linien, bezüglich der Flächen $x^1 = \text{const}$ gilt $g^{1\alpha} = 0$ wobei griechische Indizes die Werte 2 und 3 annehmen. Lateinische Indizes erhalten Werte von 1 bis 3. Wiederum, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, wird $g^{11} = 1$ gesetzt, so dass die Normalkoordinate gleichförmig ist (vergl. Klimenko & Class (2000a)). Kleingeschriebene Buchstaben werden für die Raumvariablen und den metrischen Tensor benutzt, so wie dies zuvor für die äußeren Variablen vereinbart wurde, um die Konstanz (in führender Ordnung) dieser Größen innerhalb der Flammenstruktur zu unterstreichen. Dies heißt selbstverständlich nicht, dass sich die Größen nicht entlang der Flamme ändern dürfen. Diese Konvention gilt ganz allgemein in dieser Arbeit. Größen die von den äußeren Raumkoordinaten abhängen werden mit kleingeschriebenen Buchstaben bezeichnet, wogegen für diejenigen Größen, welche sich stark innerhalb der Flammenstruktur ändern Großbuchstaben verwendet werden. Eingeführt wird das Volumenelement \sqrt{g} , wobei gilt $g \equiv 1/\det(g^{ij})$. Dieses ist gleichzeitig das Oberflächenelement auf den Flächen $x^1 = \text{const}$, da $g^{11} = 1$. Die mittlere Krümmung c der Flächen $x^1 = \text{const}$ ergibt sich zu $2c = -1/\sqrt{g}(\partial\sqrt{g}/\partial x^1)$.

Wird die Tensorschreibweise benutzt, muss beachtet werden, dass die physikalischen Komponenten ($V(i), \Sigma(i, j)$) eines Vektors oder Tensors durch eine Normierung aus den kontravarianten (V^i, Σ^{ij}) beziehungsweise den kovarianten (V_i, Σ_{ij}) Komponenten berechnet werden müssen

$$V(i) = V^i/\sqrt{g^{ii}} = V_i\sqrt{g^{ii}}, \quad \text{keine Summation über } i \quad (3.15)$$

$$\Sigma(ij) = \Sigma^{ij}/\sqrt{g^{ii}g^{jj}} = \sigma_{ij}\sqrt{g^{ii}g^{jj}}, \quad \text{keine Summation über } i, j. \quad (3.16)$$

Zur Demonstration der Methode wird eine Transportgleichung für ein beliebiges Skalar Φ transformiert. In raumfesten kartesischen Koordinaten gelte

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi) + \nabla \cdot (\mathbf{J}(\Phi)) = \text{Pe}Q(\Phi) \quad (3.17)$$

wobei $\mathbf{J}(\Phi) = \mathbf{V}\Phi - \mathcal{D}\nabla\Phi$, der Fluss des Skalars Φ und $Q(\Phi)$ ein Quellterm sind. Es ist \mathcal{D} die Diffusivität des Skalars. Die Peclet-Zahl Pe wird aus Konsistenzgründen eingefügt.

In krummlinigen bewegten Koordinaten lautet die Erhaltungsgleichung für den Skalar Φ

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{g}\Phi) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}J^j(\Phi)) = \sqrt{g}Q(\Phi) \quad (3.18)$$

wobei konventionelle partielle Ableitungen benutzt werden. Es gilt die Einsteinsche Summationskonvention. Demnach wird Summation über den Wertebereich eines Indizes angewandt, sofern ein Index einmal in der oberen und einmal in der unteren Position auftaucht (die partielle Ableitung gilt hier als untere Position). Der Wertebereich für lateinische Indizes ist 1, 2, 3 und derjenige für griechische Indizes ist 2, 3. In unseren Koordinaten schreibt sich der kontravariante (Index steht oben) Flussvektor $J^j(\Phi) =$

$(V^j - u^j) \Phi - g^{ij} \mathcal{D} \Phi / \partial x^i$ wobei $u^j \equiv \partial x^j / \partial t$ die kontravariante Geschwindigkeit des bewegten x^j -Koordinatensystems relativ zum ortsfesten y^j -Koordinatensystem darstellt.

Die Normalenrichtung ist ausgezeichnet in unserer Untersuchung. Deshalb wird die Summation über den Index j in Gl. (3.18) in einen normalen und einen tangentialen Anteil zerlegt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \Phi) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g} J^\alpha(\Phi)) + \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} J^1(\Phi)) = \sqrt{g} Q(\Phi). \quad (3.19)$$

Jetzt werden die Flüsse und Quellterme der Grundgleichungen des Flammenproblems formuliert. Es ergibt sich eine Erhaltungsgleichung für das Volumenelement \sqrt{g} indem $\Phi = 1$, $Q(1) = \mathcal{D} = 0$ und $J^j(1) = -u^j$ gesetzt wird. Die Flüsse der Kontinuitäts- ($\Phi = R$), Energie- ($\Phi = RT$) und Konzentrationsgleichung ($\Phi = RY$) lauten,

$$J^j(R) \equiv M^j, \quad (3.20)$$

$$J^j(RT) \equiv M^j T - \frac{1}{\text{Pe}} g^{ij} R \mathcal{K} \frac{\partial T}{\partial x^i}, \quad (3.21)$$

$$J^j(RY) \equiv M^j Y - \frac{1}{\text{PeLe}} g^{ij} R \mathcal{K} \frac{\partial Y}{\partial x^i}, \quad (3.22)$$

wobei $M^j = R(V^j - u^j)$ der kontravariante Massenstrom in den bewegten krummlinigen Koordinaten ist. Die zu den Grundgleichungen gehörenden Quellterme lauten

$$Q(R) \equiv 0, \quad Q(RT) \equiv (T_b - 1)W, \quad Q(RY) \equiv W. \quad (3.23)$$

Da der Impuls eine vektorielle Größe darstellt, liegt die Impulsgleichung nicht in einer geeigneten Form vor, um Gl. (3.19) darauf anzuwenden. Gl. (3.19) lässt sich abwenden, wenn anstelle einer Gleichung für den Impulsvektor eine Bilanzgleichung für den Impulstransport entlang einer raumfesten Richtung geschrieben wird. Hierzu wird ein sogenanntes paralleles Vektorfeld l_i eingeführt. In raumfesten kartesischen Koordinaten besitzt dieses konstante Komponenten. Somit hat l_i konstant Richtung und Betrag. Später wird die Erhaltungsgleichung für $V^i l_i$ geschrieben, also die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Vektors l_i . Zuvor sollen jedoch die besonderen Eigenschaften eines parallelen Vektorfelds hinsichtlich der Differentiation erläutert werden. Insbesondere verschwinden die mit $(*)_{,i}$ bezeichneten kovarianten Ableitungen, welche eine Verallgemeinerung partieller Ableitungen in der Tensorrechnung darstellen. Es gilt demnach $l_{i,j} = 0$. Im Falle bewegter Koordinaten, gilt dies für jeden beliebigen Zeitpunkt. Die Komponenten von l_i sind hier zeitabhängig. Man beachte, dass der metrische Tensor eine ähnliche Eigenschaft, $g_{,k}^{ij} = 0$, aufweist, die als Ricki's Theorem bezeichnet wird. Zu der Impulsgleichung gehört der Fluss

$$J^j(RV^i l_i) \equiv M^j V^i l_i + g^{ij} l_i P - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \Sigma^{ij} l_i, \quad Q(RV^i l_i) \equiv 0 \quad (3.24)$$

und ein verschwindender Quellterm. Der Spannungstensor lautet in Tensorschreibweise

$$\Sigma^{ij} = R \mathcal{K} \left(g^{jk} V_{,k}^i + g^{ik} V_{,k}^j - \frac{2}{3} g^{ij} V_{,k}^k \right), \quad (3.25)$$

$$= R \mathcal{K} \left(g^{jk} \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + g^{ik} \frac{\partial V^j}{\partial x^k} - V^k \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} - \frac{2}{3} \frac{g^{ij}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} V^k}{\partial x^k} \right). \quad (3.26)$$

Die äußeren Strömungsgleichungen ergeben sich, wenn die inneren Größen durch die

entsprechenden äußeren Größen ersetzt werden.

$$J^j(\rho) \equiv m^j, \quad Q(\rho) \equiv 0, \quad (3.27)$$

$$J^j(\rho v^i l_i) \equiv m^j v^i l_i + g^{ij} l_i p - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} g^{jk} \rho \kappa \frac{\partial v^i l_i}{\partial x^k}, \quad Q(\rho v^i l_i) \equiv 0. \quad (3.28)$$

Hierin ist der Reibungsterm einfacher, da die äußere Strömung inkompressibel ist und die Viskosität konstant ist.

Im folgenden, wird der normalen Massenstrom m^1 an der Unstetigkeitsfläche mit m bezeichnet. Damit ist die hier benutzte Notation konsistent mit der aus Kapitel 2. Es ist zu beachten, dass m^1 eine Tensorgröße darstellt, die durch Normierung in eine entsprechende physikalische Größe überführt werden muss. In unserem Koordinatensystem, gilt jedoch speziell $g^{11} = 1$ so dass $m = m^1$.

Jetzt wird die Differenz der Gleichungen für die innere und äußere Strömung betrachtet. Diese Gleichungen unterscheiden sich lediglich insofern als die Dichte in den äußeren Gleichungen konstant ist, während sie sich in den inneren Gleichungen stetig ändert. In einem Abstand von der Flamme verschwindet die Differenz der Dichten der inneren und äußeren Lösung.

Aus der Kontinuitätsgleichung erhalten folgt die Beziehung,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g}(R - \rho)) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}(M^\alpha - m^\alpha)) + \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g}(M^1 - m^1)) = 0. \quad (3.29)$$

Wird diese Gleichung über das Brenngasgebiet, welches sich von $x^1 = -\infty$ bis $x^1 = 0$ erstreckt, integriert und dann über das Rauchgasgebiet von $x^1 = 0$ bis $x^1 = \infty$ und schließlich die Integrale summiert, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g}(R - \rho) dx^1 \right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g}(M^\alpha - m^\alpha) dx^1 \right) + \sqrt{g}^* [m] = 0. \quad (3.30)$$

Die eckige Klammer $[m]$ bezeichnet den Sprung des äußeren normalen Massenstroms m^1 . Der Index "1" wird wie oben vereinbart nicht geschrieben. Es gibt keinen entsprechenden Term der inneren Größen, da diese keinen Sprung an der Unstetigkeitsfläche aufweisen. Der Stern "*" bezeichnet Größen, die an der Unstetigkeitsfläche bei $x^1 = 0$ ausgewertet werden. Es sollte noch darauf hingewiesen werden, dass die Summe der Integrale über das Brenn- und Rauchgasgebiet als ein einziges Integral geschrieben wird. Bei der Auswertung dieses Integrals muss beachtet werden, dass die Dichte ρ durch die Brenngasdichte ρ_f in $x^1 \in [-\infty, 0]$ und durch die Rauchgasdichte ρ_b in $x^1 \in [0, \infty]$ ersetzt werden muss.

Aus der Beziehung (3.30) kann geschlossen werden, dass der Massenstrom an der Unstetigkeitsfläche einen Sprung aufweist. Masse wird also zu der Unstetigkeitsfläche transportiert wo sie verschwindet, um dann an einer anderen Stelle wieder auszutreten. Man spricht auch von einer virtuellen Oberflächenmasse. Dies stellt eine nicht akzeptable Eigenschaft für ein Modell dar, welches in Computercodes eingesetzt werden soll. Im Verlauf einer Rechnung müsste der Strömung Masse entzogen oder es müsste Masse hinzugefügt werden. Ein solches Modell birgt besondere Schwierigkeiten bei der Umsetzung, und wird im allgemeinen die Massenerhaltung verletzen.

Um ein brauchbares Modell sicherzustellen, wird gefordert, dass der normale Massenstrom an der Unstetigkeitsfläche stetig ist. Dies wird erreicht, wenn die beiden Integrale in (3.30) einzeln verschwinden. Beide Integrale enthalten im Integranden Terme die entsprechend angepasst werden können. Die Querkomponenten des Massentransports M^α und m^α enthalten jeweils die transversale Geschwindigkeit u^α des Koordinatensystems. Diese ist bislang unbestimmt. Es ist stets möglich eine geeignete transversale Geschwindigkeit u^α zu finden, die einerseits sicherstellt, dass die x^1 -Koordinatenlinien senkrecht auf den

Flächen mit $x^1 = \text{const}$ bleiben und andererseits das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g} (M^\alpha - m^\alpha) dx^1$ verschwinden lassen. Dies erfordert, dass $M^\alpha = R(V^\alpha - u^\alpha) \approx 0$ und $m^\alpha = \rho(v^\alpha - u^\alpha) \approx 0$, so dass das Koordinatensystem ungefähr mit der Tangentialgeschwindigkeit der Strömung entlang der Flamme transportiert wird. Dies wird weiter unten verdeutlicht, sobald eine asymptotische Auswertung der Beziehungen erfolgt. Das Verschwinden des ersten Integrals in Gl. (3.30), kann durch eine geeignete Wahl der Lage der Unstetigkeitsfläche erzwungen werden. Dies wird ebenfalls später im Text erörtert. Die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g} (R - \rho) dx^1 = 0$ legt eindeutig die Lage der Unstetigkeitsfläche fest.

Aus den inneren und äußeren Impulsgleichungen ergibt sich analog zu Beziehung (3.30) eine Sprungbedingung,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} (RV^i l_i - \rho v^i l_i)) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g} (J^\alpha (RV^i l_i) - J^\alpha (\rho v^i l_i))) \right) dx^1 + \sqrt{g}^* \left[m v^i l_i + g^{i1} l_i p - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \frac{\partial v^i l_i}{\partial x^1} \right] = 0. \quad (3.31)$$

Die eckige Klammer enthält sowohl Terme, die in den Sprungbedingungen von Darrieus und Landau auftauchen, als auch die Normalspannung an der Unstetigkeitsfläche. Es wurden bereits alle Freiheitsgrade, die bei der Wahl der Unstetigkeitsfläche und des Koordinatensystems bestehen, um die Stetigkeit des Massenstroms an der Diskontinuitätsfläche zu erzwingen. Deshalb verschwindet das Integral in Gl. (3.31) bestenfalls in Ausnahmefällen. Um die kompressiblen Effekte innerhalb der Flammenstruktur im Modell zu berücksichtigen, müssen im Modell Oberflächenkräfte vorgesehen werden. Deren Größe ist durch das Integral in Gl. (3.31) gegeben.

In der nachfolgenden Untersuchung soll die Lage der Unstetigkeitsfläche und deren Normalgeschwindigkeit bestimmt werden. Des weiteren sollen die mit der Unstetigkeitsfläche verknüpften Kräfte bestimmt und physikalisch gedeutet werden. Insbesondere soll die Richtung der Oberflächenkräfte bestimmt werden. Diese entscheidet, ob die Flamme durch die Kräfte stabilisiert wird. Schließlich sollen die Sprungbedingungen für den Massenstrom und den Impuls hergeleitet werden.

4. Herleitung der Gleichungen und Sprungbedingungen für die Strömung mittels asymptotischer Methoden

Im Kapitel 3.2 werden die Sprungbedingungen für den Massenstrom (3.30) und den Impuls (3.31) hergeleitet, die sich ergeben sobald die Flammenzone durch eine Unstetigkeitsfläche ersetzt wird. Um ein solches Modell zu schließen, muss eine Flammengeschwindigkeitsbeziehung herangezogen werden. Diese beschreibt die Ausbreitung der Flamme. Ein allgemeine analytische Lösung des Problems ist nicht möglich. Deshalb werden approximative asymptotische Ausdrücke für die Sprungbedingungen und die Flammengeschwindigkeit hergeleitet. Dabei wird ausgenutzt, dass die Flamme typischerweise, dünn im Vergleich zur Längenabmessung des Strömungsproblems ist.

Die Untersuchung beschäftigt sich mit der Flammenzone, deren normale Ausdehnung klein ist. Zunächst wird eine gestreckte Raumkoordinate $X = \text{Pe} x^1$ in Normalenrichtung eingeführt, wobei $\text{Pe} \gg 1$ gilt. Die Dicke der Flammenzone ist von $O(1)$, gemessen auf der X -Skala, so dass sich Gl. (3.19) wie folgt schreibt

$$\frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \Phi) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g} J^\alpha (\Phi)) \right) + \frac{\partial}{\partial X} (\sqrt{g} J^1 (\Phi)) = \sqrt{g} Q (\Phi). \quad (4.1)$$

Es soll jetzt ausgenutzt werden, dass die Peclet-Zahl Pe ein asymptotisch großer Para-

meter ist, indem eine asymptotische Reihenentwicklung der Unbekannten nach Potenzen von Pe^{-1} erfolgt,

$$F = \sum_n \text{Pe}^{-n} F_{(n)}, \quad (4.2)$$

Es steht F für die inneren Größen $R, T, Y, W, P, V^i, M^i, J^j(R), J^j(RT), J^j(RY), J^j(RV^i l_i)$ und Σ^{ij} .

Die Größen, $\sqrt{g}, g^{ij}, c_i, u^i$ sowie das parallele Vektorfeld l_i , welche mit dem krummlinigen Koordinatensystem eingeführt werden und diese charakterisieren, werden in eine Taylorreihe entwickelt

$$f = \sum_{n=0} \frac{\partial^n f(0)}{(\partial x^1)^n} \frac{\text{Pe}^{-n}}{n!} X^n = \sum_{n=0} \text{Pe}^{-n} f_{(n)}^* X^n \quad (4.3)$$

Es steht f stellvertretend für die Größen $\sqrt{g}, g^{ij}, c_i, u^i$ und l_i steht. Die $f_{(n)}^*$ sind von X unabhängige Konstanten, die aber entlang der Flamme variieren dürfen.

Die äußeren Größen $\rho, p, v^i, m^i, J^j(\rho), J^j(\rho v^i l_i)$ und σ^{ij} können eine Unstetigkeit bei $X = 0$ aufweisen. Selbst wenn sie sich als stetig erweisen, so gilt dies nicht unbedingt für deren Normalableitungen. Deshalb werden diese Größen unabhängig voneinander im Rauchgas und Brenngasgebiet in eine Taylorreihe entwickelt.

Wird die Größe $\chi^* = (\partial g^{1/2*} / \partial t) / g^{1/2*}$ und die Taylorreihe $g^{1/2} = g_{(0)}^{1/2*} + \text{Pe}^{-1} g_{(1)}^{1/2*} X + \dots$ mit $g_{(1)}^{1/2*} = -2c$ in Gl. (4.1) eingeführt, kommt

$$\frac{1}{\text{Pe}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi^* \right) \Phi + \frac{1}{\sqrt{g}^*} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}^* J^\alpha(\Phi)) \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\left(1 - \frac{1}{\text{Pe}} 2cX \right) J^1(\Phi) \right) = \quad (4.4)$$

$$\left(1 - \frac{1}{\text{Pe}} 2cX \right) Q(\Phi) + O(\text{Pe}^{-2}).$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der Index "(0)" weggelassen bei denjenigen Größen, die in eine Taylor-entwicklung werden und an der Unstetigkeitsfläche auszuwertet sind. Es verschwinden dann alle Terme höherer Ordnung. Wird der asymptotische Reihenansatz für die Flüsse und die Quellterme in Gl. (4.4) eingesetzt und wird nach gleichen Potenzen Pe^{-1} sortiert, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(J_{(0)}^1(\Phi) \right) = Q_{(0)}(\Phi), \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi^* \right) \Phi_{(0)} + \frac{1}{\sqrt{g}^*} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}^* J_{(0)}^\alpha(\Phi)) + \frac{\partial}{\partial X} \left(J_{(1)}^1(\Phi) - 2cX J_{(0)}^1(\Phi) \right) = \quad (4.6)$$

$$Q_{(1)}(\Phi) - 2cX Q_{(0)}(\Phi).$$

Man beachte, dass χ^* die relative Flächenänderung eines Flächenelements darstellt. Diese Größe ist eng mit der Flammenstreckung χ , der relativen Flächenänderung eines Flächenelements, verknüpft. In der Tat wird später gezeigt, dass $(\partial g^{1/2*} / \partial t) / g^{1/2*}$ und χ für ein spezielles Koordinatensystem identisch sind. Weiterhin sei angemerkt, dass die Gleichungen (4.5) und (4.6) keine verallgemeinerten (kovariante) Ableitungen der Tensorrechnung enthalten. Die Gleichungen (4.5) und (4.6) können unmittelbar eingesetzt, ohne dass umfangreiche Kenntnisse der Tensoralgebra erforderlich sind.

Die Flammenstreckung χ und die Flammenkrümmung c sind explizite Parameter der Gleichungen. Aus den Gleichungen (4.5) und (4.6) ergeben sich die innere Lösungen unmittelbar als Ausdrücke von χ und c . Diese beiden Parameter charakterisieren die Geometrie und die Dynamik der Fläche. Man spricht auch von intrinsischen Eigenschaften

ten der Fläche. Im Einzelnen ist χ ein Maß für die zeitliche Entwicklung der Fläche und c kennzeichnet die momentane geometrische Form der Fläche. Hier wird die Bezeichnung *intrinsic Gleichungen gestörter Flammen* für die Gleichungen (4.5) und (4.6) benutzt. Diese Bezeichnung wird auch in Klimenko & Class (2000a) für die Energie- und Konzentrationsgleichung in einer Gl. (4.4) ähnlichen Schreibweise verwendet. Allerdings werden kurzweilige Störungen der Flamme, die in der vorliegenden Arbeit eine zentrale Rolle spielen, in Klimenko & Class (2000a) nicht berücksichtigt. Die partiellen Ableitungen in tangentialer Richtung treten deshalb nicht in Klimenko & Class (2000a) auf. In den Impulsgleichungen (werden nicht in Klimenko & Class (2000a) behandelt), müssen Ableitungen in tangentialer Richtung berücksichtigt werden. Diese Terme stellen somit einen wichtigen Bestandteil *intrinsic Gleichungen gestörter Flammen* dar.

Im folgenden werden die ersten beiden Glieder einer asymptotischen Reihenentwicklung der *intrinsic Gleichungen gestörter Flammen* hergeleitet. In der führenden Ordnung werden sowohl die Lösung der Gleichungen als auch die zugehörigen Sprungbedingungen berechnet. In der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ werden einerseits störungstheoretische Korrekturen der Sprungbedingungen und andererseits eine Flammengeschwindigkeitsbeziehung für instationäre Flammen beliebiger Geometrie bestimmt.

4.1. Führende Ordnung der Strömungsgleichungen und der Sprungbedingungen

Die Strömungsgleichungen enthalten keinen Quellterm $Q(\Phi)$. Somit verlangt Gl. (4.5) die Konstanz der normalen Flüsse $J_{(0)}^1(\Phi)$

$$m_{f(0)}^1 = \text{const}, \quad J_{f(0)}^1(\rho v^i l_i) = \text{const}, \quad (4.7)$$

$$m_{b(0)}^1 = \text{const}, \quad J_{b(0)}^1(\rho v^i l_i) = \text{const}, \quad (4.8)$$

$$M_{(0)}^1 = \text{const}, \quad J_{(0)}^1(RV^i l_i) = \text{const}. \quad (4.9)$$

Das Anpassen (im engl. *matching*) der inneren und äußeren Größen aneinander bedeutet, dass gilt

$$M_{(0)}^1 = m_{f(0)}^1 = m_{b(0)}^1 \equiv m_{(0)}, \quad (4.10)$$

$$J_{(0)}^1(RV^i l_i) = J_{f(0)}^1(\rho v^i l_i) = J_{b(0)}^1(\rho v^i l_i) = J_{(0)}^{1*}(\rho v^i l_i). \quad (4.11)$$

Es wird daran erinnert daran, dass der normalen Massenfluss an der Unstetigkeitsfläche mit $m_{(0)}$ und nicht mit $m_{(0)}^{1*}$ bezeichnet wird. Obwohl die Flüsse entlang der normalen Richtung konstant sind, so sind doch Variationen entlang der Flamme möglich. Der Stern bezeichnet den Wert der gekennzeichneten Größe an der Unstetigkeitsfläche ausgewertet wird.

Die Sprungbedingungen (3.30) und (3.31) für die äußeren Größen liefern in der führenden Ordnung

$$[m_{(0)}] = 0, \quad (4.12)$$

$$\left[m_{(0)} v_{(0)}^i + g_{(0)}^{i1*} p_{(0)} \right] l_{(0)i}^* = 0. \quad (4.13)$$

Da das parallele Vektorfeld beliebig ist, müssen die Sprungbedingungen für den Impuls für die Normal- und Tangentialkomponente einzeln gelten

$$\left[m_{(0)} v_{(0)}^1 + p_{(0)} \right] = 0, \quad (4.14)$$

$$\left[m_{(0)} v_{(0)}^\alpha \right] = 0, \quad \text{oder} \quad \left[v_{(0)}^\alpha \right] = 0. \quad (4.15)$$

Diese Sprungbedingungen entsprechen exakt denen des Darrieus-Landau-Modells. Die

letzte besagt, dass die tangentielle Geschwindigkeit an der Flamme stetig ist, so dass $v_{f(0)}^\alpha = v_{b(0)}^\alpha = v_{(0)}^{\alpha*}$ gilt. Wird jetzt die Definition des inneren und äußeren Massenstroms $M^i = R(V^i - u^i)$ beziehungsweise $m^i = \rho(v^i - u^i)$ ausgewertet, ergibt sich die Normalgeschwindigkeit zu

$$V_{(0)}^1 = \frac{m_{(0)}}{R_{(0)}} + u_{(0)}^{1*}, \quad v_{f(0)}^1 = m_{(0)} + u_{(0)}^{1*}, v_{b(0)}^1 = \frac{m_{(0)}}{\rho_b} + u_{(0)}^{1*}. \quad (4.16)$$

Es kann auch der Sprung der Normalgeschwindigkeit berechnet werden, $[v_{(0)}^1] = m_{(0)} [1/\rho]$.

Wird ein Koordinatensystem gewählt, welches sich entlang der Flamme mit der lokalen Tangentialgeschwindigkeit bewegt, das heißt

$$v_{(0)}^{\alpha*} - u_{(0)}^{\alpha*} = 0, \quad (4.17)$$

dann verschwindet der äußere tangentielle Massenstrom sowohl im Brenngasgemisch als auch im Rauchgas. Somit gilt $m_{f(0)}^\alpha = m_{b(0)}^\alpha = m_{(0)}^{\alpha*} = 0$. Dies kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit vereinbart werden. In unserem Koordinatensystem ist das Flammenelement und das Flächenelement $\sqrt{g^*}$ identisch, so dass sich die Flammenstreckung in der führenden Ordnung zu $\chi = \chi^* = (\partial g_{(0)}^{1/2*} / \partial t) / g_{(0)}^{1/2*}$ ergibt.

Jetzt können die Flüsse $J^1(RV^i l_i)$ und $J^1(\rho v^i l_i)$, die in (3.24) und (3.28) definiert sind, ausgeschrieben werden. Diese sind gemäß Gl. (4.11) gleich groß, so dass

$$m_{(0)} \left(V_{(0)}^1 l_{(0)1}^* + V_{(0)}^\alpha l_{(0)\alpha}^* \right) + l_{(0)1}^* P_{(0)} - \quad (4.18)$$

$$\text{Pr} R \mathcal{K} \left(\frac{\partial V_{(0)}^\alpha}{\partial X} l_{(0)\alpha}^* + \frac{4}{3} \frac{\partial V_{(0)}^1}{\partial X} l_{(0)1}^* \right) = J_{(0)}^{1*}(\rho v^i l_i),$$

$$m_{(0)} \left(v_{(0)}^1 l_{(0)1}^* + v_{(0)}^\alpha l_{(0)\alpha}^* \right) + l_{(0)1}^* p_{(0)} = J_{(0)}^{1*}(\rho v^i l_i), \quad (4.19)$$

wobei $\partial V_{(0)}^1 / \partial X = m_{(0)} \partial (1/R_{(0)}) / \partial X$. Hierbei werden Summen über Terme, die einen Index i doppelt enthalten, in einen normalen Anteil ($i \rightarrow 1$) und einen tangentialen Anteil ($i \rightarrow \alpha = 2, 3$) zerlegt. Es wird jetzt die Gleichung (4.18) von Gl. (4.19) subtrahiert. Ausgewertet werden zunächst nur diejenigen Terme, welche die Tangentialkomponente $l_{(0)\alpha}^*$ des parallelen Feldes als Faktor besitzen,

$$0 = m_{(0)} \left(v_{(0)}^{\alpha*} - V_{(0)}^\alpha \right) - \text{Pr} R \mathcal{K} \frac{\partial V_{(0)}^\alpha}{\partial X}. \quad (4.20)$$

Lösungen dieser Gleichung, die sich zusätzlich an die äußere Lösung im Brenngasgebiet anpassen lassen, haben die Form

$$V_{(0)}^\alpha = v_{(0)}^{\alpha*} + C \exp(\text{Pr}^{-1} m_{(0)} \zeta), \quad \zeta = \int_0^X \frac{1}{R \mathcal{K}} dX \quad (4.21)$$

wobei sich die Konstante C aus der äußeren Lösung im Rauchgasgebiet ergibt. Hierbei können exponentiell wachsende Lösungen ausgeschlossen werden, da diese nicht an eine algebraisch anwachsende äußere Lösung angepasst werden können. Somit ist $C = 0$ und die tangentielle Geschwindigkeit ist in der führenden Ordnung konstant,

$$V_{(0)}^\alpha = v_{(0)}^{\alpha*}. \quad (4.22)$$

Wird jetzt der tangentielle Massenstrom berechnet, ergibt sich

$$M_{(0)}^\alpha = R_{(0)} \left(v_{(0)}^{\alpha*} - u_{(0)}^\alpha \right) = 0. \quad (4.23)$$

Wird (4.19) von (4.18) subtrahiert und diejenigen Terme berechnet, welche die Normalkomponente $l_{(0)1}^*$ des parallelen Vektorfelds als Faktor besitzen, ergibt sich

$$P_{(0)} - p_{(0)} = m_{(0)} \left(\frac{4}{3} \text{Pr} R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \frac{\partial}{\partial X} (1/R_{(0)}) + m_{(0)} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R_{(0)}} \right) \right). \quad (4.24)$$

Diese Beziehung liefert die Differenz zwischen dem unstetigen Druck im Modell und dem physikalischen Druck. In unserem Modell wird die Flammenstruktur durch eine Unstetigkeitsfläche ersetzt. Lokale Druckdifferenzen sind nur von Bedeutung, wenn diese einen effektiven Beitrag liefern, der im Modell Berücksichtigung findet. Beispielsweise, können Normalspannungen innerhalb der Flammenstruktur zu Oberflächenkräften an der Unstetigkeitsfläche führen. Diese Oberflächenkräfte müssen Unterschiede der Volumenkräfte, die zwischen dem "diskontinuierlichen" Modell und der stetigen inneren Flammenstruktur bestehen, kompensieren. Die Richtung dieser Kräfte bestimmt, ob diese Kräfte eine Flamme stabilisieren oder destabilisieren. Deshalb wird jetzt das Vorzeichen der Druckdifferenz $P_{(0)} - p_{(0)}$ untersucht. Der erste Term auf der rechten Seite von (4.24) hat seinen Ursprung in der viskosen Reibung. Der Term ist stets positiv. Der zweite Term gibt den Unterschied des dynamischen Drucks des "diskontinuierlichen" Modells und der kontinuierlichen inneren Flammenstruktur an. Ein Unterschied besteht, da die Geschwindigkeiten verschieden sind. Im Modell ist die Dichte hinter (vor) der Unstetigkeitsfläche kleiner (größer) als die physikalische Dichte. Dies führt zu einer erhöhten (erniedrigten) Geschwindigkeit und somit zu einem erniedrigten (erhöhten) dynamischen Druck im "diskontinuierlichen" Modell. Hinter der Unstetigkeitsfläche im Rauchgas gilt, $P_{(0)} - p_{(0)} > 0$. Vor der Flamme im Brenngasgebiet gibt es zwei Beiträge zu der Druckdifferenz, so dass nicht unmittelbar auf das Vorzeichen von $P_{(0)} - p_{(0)}$ geschlossen werden kann. Somit ist das Vorzeichen der Kräfte, die der Unstetigkeitsfläche zugeordnet werden müssen, noch nicht klar. Dies gilt im Besonderen, als das Ergebnis zusätzlich von der genauen Lage der Unstetigkeitsfläche abhängt. Später zeigt sich, dass der Beitrag des Rauchgasgebiets entscheidend ist.

Schließlich werden die tangentialen Flüsse $J^\alpha(RV^i l_i)$ und $J^\alpha(\rho v^i l_i)$, die in (3.24) und (3.28) definiert sind, berechnet.

$$J_{(0)}^\alpha(RV^i l_i) = \left(P_{(0)} + \frac{2}{3} \text{Pr} R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \frac{\partial V_{(0)}^1}{\partial X} \right) g_{(0)}^{\alpha\beta*} l_{(0)\beta}^*, \quad (4.25)$$

$$J_{(0)}^\alpha(\rho v^i l_i) = p_{(0)} g_{(0)}^{\alpha\beta*} l_{(0)\beta}^*. \quad (4.26)$$

In (4.25) und (4.26) gibt es keinen $l_{(0)1}^*$ proportionalen Term. Wird die Druckdifferenz mittels (4.24) eliminiert ergibt sich

$$J_{(0)}^\alpha(RV^i l_i) - J_{(0)}^\alpha(\rho v^i l_i) = m_{(0)} \phi g_{(0)}^{\alpha\beta*} l_{(0)\beta}^*, \quad (4.27)$$

wobei

$$\phi = 2 \text{Pr} R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \frac{\partial}{\partial X} (1/R_{(0)}) + m_{(0)} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R_{(0)}} \right). \quad (4.28)$$

Die Beziehung (4.27) liefert den Unterschied zwischen den tangentialen Flüssen in Modell und Wirklichkeit. Das Vorzeichen dieser Differenz ist, in Hinblick auf die Stabilität der Flamme, wichtig. Die Darstellung von ϕ zeigt Ähnlichkeiten mit der Druckdifferenz (4.24), so dass die oben geführte Erörterung zum Vorzeichen der Druckdifferenz gleichermaßen für ϕ gilt. Es sollte beachtet werden, dass ϕ an der Unstetigkeitsfläche selbst springt, da die äußere Dichte unstetig ist. Die Größe ϕ verschwindet weitab der Flamme ($X \rightarrow \pm\infty$), da sich hier die Dichte des "diskontinuierlichen" Modell mit der realen Dichte

übereinstimmt. Für $X > 0$ (Rauchgas) $\partial(1/R_{(0)})/\partial X > 0$ und $m_{(0)}(1/\rho - 1/R_{(0)}) > 0$, so dass $\phi > 0$. Für $X < 0$ (Brenngas) $\partial(1/R_{(0)})/\partial X > 0$ aber $m_{(0)}(1/\rho - 1/R_{(0)}) < 0$, so dass das Vorzeichen von ϕ von der relativen Größe der Terme abhängt. Später wird gezeigt, dass auch im Brenngas $\phi > 0$ gilt, so dass $\phi \geq 0$ für beliebige X .

Die Erhaltungsgleichung für das Volumenelement \sqrt{g} ergibt

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{\sqrt{g}^*} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g}^* u_{(0)}^j \right) \Big|_{x^1=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}^*} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{g}^* v_{(0)}^{\alpha*} \right) - 2cu_{(0)}^{1*}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Die Normalgeschwindigkeit des Koordinatensystems u^1 kann alternativ durch den Massenstrom ausgedrückt werden, $u_{(0)}^{1*} = v_f^{1*} - m_{(0)} = v_b^{1*} - m_{(0)}/\rho_b$. Offensichtlich setzt sich die Flammenstreckung χ aus zwei Beiträgen zusammen. Der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (4.29) ist proportional zu Gradienten des tangentialen Geschwindigkeitsfelds. Dieser Term wird im englischen als "strain" bezeichnet. Der zweite Term auf der rechten Seite von (4.29) ist proportional zur Krümmung c .

In diesem Kapitel wurden das führende Glied einer asymptotischen Reihenentwicklung der Strömungsgleichungen und Sprungbedingungen ausgewertet. Die Lösung führender Ordnung ist unabhängig von der Flammenkrümmung und -streckung. Zeitableitungen treten nicht auf. Somit entspricht diese Lösung einer ebenen stationären Flamme mit der Einschränkung, dass die Flammengeschwindigkeit bislang unbestimmt ist. Die Lösungen führender Ordnung fließen in die Gleichungen der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ ein, in denen die Wirkungen von Zeitabhängigkeit, Krümmung und Flammenstreckung berücksichtigt werden. Die Bestimmung der Lösungen führender Ordnung ist somit eine Grundvoraussetzung, um instationäre, gekrümmte Flammen in allgemeinen Strömungen untersuchen zu können.

4.2. $O(\text{Pe}^{-1})$ Strömungsgleichungen und Sprungbedingungen

In der nächsten Ordnung wird zunächst die Gleichung (4.6) für den äußeren Massenstrom betrachtet und diese von $X = 0$ bis zu einem beliebigen X integriert. Hierbei ist zu beachten, dass keine Ableitung nach x^α auftaucht, da $m_{(0)}^\alpha = 0$ gilt. Der Integrand ist konstant, so dass die Gleichung leicht integriert werden kann und das folgende Ergebnis liefert.

$$m_{f(1)}^1 - m_{f(1)} = (2c_{(0)}m_{(0)} - \rho_f\chi) X, \quad (4.30)$$

$$m_{b(1)}^1 - m_{b(1)} = (2c_{(0)}m_{(0)} - \rho_b\chi) X. \quad (4.31)$$

Es sei daran erinnert, dass $m_{f(1)}$ und $m_{b(1)}$ den normalen Massenstrom $m_{(1)}^1$ an der Unstetigkeitsfläche bezeichnen. Der äußere Massenstrom ändert sich linear mit dem Abstand von der Unstetigkeitsfläche bei $X = 0$. Da sich die Dichten der Rauch- und Brenngase unterscheiden, ergeben sich auch unterschiedliche Gradienten des normalen Massenstroms im Rauch- und Brenngas. Diese Beziehungen werden später benötigt, wenn die Flammengeschwindigkeit mittels der Energie- und der Speziesgleichung berechnet wird.

Bei der Betrachtung der asymptotischen Störgrößen sind die Profile der inneren Variablen nicht von Interesse. Es sollen lediglich störungstheoretische Korrekturen der Sprungbedingungen für die Strömungsvariablen bestimmt werden. In der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ liefert die Sprungbedingung (3.30) des normalen Massenstroms

$$(\partial/\partial t + \chi) I_R + [m_{(1)}] = 0, \quad (4.32)$$

wobei $M_{(0)}^\alpha = m_{(0)}^\alpha = 0$ ausgenutzt wird und es gilt,

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} (R_{(0)} - \rho) dX. \quad (4.33)$$

In der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ ergibt die Sprungbedingung (3.30) für den Impuls

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi \right) \left(l_{(0)i}^* \int_{-\infty}^{\infty} (R_{(0)} V_{(0)}^i - \rho v_{(0)}^i) dX \right) + \\ & \frac{1}{\sqrt{g_{(0)}^*}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{(0)}^*} \left(J_{(0)}^\alpha (R V^i l_i) - J_{(0)}^\alpha (\rho v^i l_i) \right) dX + \left[J_{(1)}^1 (\rho v^i l_i) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Aus $M_{(0)}^j - m_{(0)}^j = 0$ folgt $R_{(0)} V_{(0)}^i - \rho v_{(0)}^i = u_{(0)}^{i*} (R_{(0)} - \rho)$, so dass sich das erste Integral durch I_R ausdrücken lässt. Wird (4.27) angewendet, vereinfacht sich das zweite Integral, so dass

$$\left[J_{(1)}^1 (\rho v^i l_i) \right] = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi \right) \left(u_{(0)}^{i*} l_{(0)i}^* I_R \right) - \frac{1}{\sqrt{g_{(0)}^*}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{g_{(0)}^*} g_{(0)}^{\alpha\beta*} l_{(0)\beta}^* m_{(0)} I_\sigma \right), \quad (4.35)$$

kommt, wobei $I_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \phi dX$.

Da l_j ein paralleles Vektorfeld ist, verschwindet die Divergenz des kontravarianten Vektors $g^{ji} l_j = l^i$ und es gilt

$$0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ji} l_j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g} g^{\alpha\beta} l_\beta) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} g^{11} l_1). \quad (4.36)$$

worin $1/\sqrt{g} \partial (\sqrt{g} g^{11} l_1) / \partial x^1 = -2cl_1$ da $\partial l_1 / \partial x^1 = 0$ (eine Konsequenz aus $g^{11} = 1$). Die störungstheoretischen Korrekturen des normalen Impulsstroms, welche in (3.28) definiert sind, können wie folgt entwickelt werden

$$\left[J_{(1)}^1 (\rho v^i l_i) \right] = \left[m_{(0)} v_{(1)}^i + m_{(1)} v_{(0)}^i + g^{i1*} p_{(1)} - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \frac{\partial v_{(0)}^{i*}}{\partial x^1} \right] l_{(0)i}^*. \quad (4.37)$$

Ein weiterer Term $\sim l_{(1)i}^*$ wird nicht geschrieben, da dieser mit den Sprungbedingungen aus der führenden Ordnung multipliziert auftritt, die selbst verschwinden. Wird (4.36) und (4.37) in Gleichung (4.35) eingeführt ergeben sich schließlich die störungstheoretischen Korrekturen der Sprungbedingungen für den Impuls

$$\begin{aligned} & \left[m_{(0)} v_{(1)}^i + m_{(1)} v_{(0)}^i + g^{i1*} p_{(1)} - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \frac{\partial v_{(0)}^{i*}}{\partial x^1} \right] l_{(0)i}^* = \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi \right) \left(u_{(0)}^{i*} l_{(0)i}^* I_R \right) - \left(2cl_{(0)1} + g_{(0)}^{\alpha\beta*} l_{(0)\beta}^* \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) m_{(0)} I_\sigma. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die Sprungbedingungen für den Impuls (4.38) liefern die Gesamtänderung des Impulses in Richtung des Vektors $l_{(0)i}^*$. Die Richtung kann willkürlich gewählt werden. Der Term auf der rechten Seite ergibt sich aus kompressiblen Phänomenen innerhalb der Flamme. Es ist nicht unmittelbar einsichtig, wie diese Sprungbedingung in ihren normalen und tangentialen Anteil zerlegt werden kann, da $(\partial/\partial t + \chi) l_{(0)i}^*$ zeitliche Ableitungen der Komponenten $l_{(0)i}^*$ beinhaltet. Diese ändern sich, wenn sich die Unstetigkeitsfläche bewegt und verformt. Des weiteren hängen sowohl I_R als auch I_σ von der genauen Lage der Unstetigkeitsfläche ab. In den folgenden Kapiteln wird die Beziehung (4.32) ausgewertet, um die genaue Lage der Unstetigkeitsfläche festzulegen. Hierzu wird verlangt

dass jeder, der in (4.32) vorkommenden Terme, einzeln verschwindet. Anschließend werden die Sprungbedingungen (4.38) für den Impuls in eine normale und eine tangential Sprungbedingung zerlegt.

4.3. Flammenposition

Der äußere normale Massenstrom in der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ ist durch die Gleichungen (4.30) und (4.31) gegeben und demnach nicht konstant innerhalb der Flammenstruktur. Vielmehr hängt er von der Krümmung c und der Flammenstreckung χ ab. Die Steigung des Massenstroms ist im allgemeinen auf beiden Seiten der Flamme unterschiedlich, da sich die Dichten unterscheiden. Es existiert eine ausgezeichnete Stelle innerhalb der Flammenstruktur, an welcher der äußere normale Massenstrom im Brenn- und Rauchgas gleich groß sind. Der Massenstrom im "diskontinuierlichen" Modell stimmt innerhalb der Flammenstruktur nicht mit dem physikalischen Massenstrom an der gleichen Stelle überein. Dies gilt im besonderen an der Unstetigkeitsfläche selbst. Das obere Diagramm in Abbildung 4 zeigt dies schematisch. Die durchgezogene Linie bezeichnet den physikalischen Massenstrom, wohingegen die gestrichelte und die gepunktete Linien den äußeren Massenstrom im Brenn- und Rauchgas bezeichnen. Im Diagramm wird zusätzlich die Reaktionszone im Bereich hoher Temperaturen angedeutet. Die Differenz zwischen der gestrichelten und der gepunkteten Linie ist der Sprung des äußeren Massenstroms. Wird die Lage der Unstetigkeitsfläche durch den Schnittpunkt der Kurven für den äußeren Massenstrom definiert, dann ist der normale Massenstrom stetig an der Unstetigkeitsfläche. Dies gilt nicht für die Steigung. Die eindeutige Lage der Unstetigkeitsfläche, d.h. der Flammenposition, an der $[m] = 0$ wird aus Gleichung (4.32) ermittelt. Es muss das Verschwinden des Integrals I_R , das in (4.33) definiert ist, gefordert werden.

$$I_R = \int_{-\infty}^0 (R_{(0)} - \rho_f) dX + \int_0^{\infty} (R_{(0)} - \rho_b) dX = 0. \quad (4.39)$$

Es ist bemerkenswert, dass $I_R \neq 0$ für jede andere Lage der Unstetigkeitsfläche. Das mittlere und untere Diagramm in Abbildung 4 zeigt dies schematisch. Die durchgezogene Linie bezeichnet wieder die stetige innere Dichte. Die gestrichelte und gepunktete Linien sind die Dichten des Brenn- und Rauchgases. Die Reaktionszone wird auch gezeigt. Im mittleren Diagramm wird die Unstetigkeitsfläche in die Reaktionszone hineingelegt. Somit ist in der gesamten Vorwärmzone die innere Dichte größer als die äußere Dichte (Modell). Die schattierte Fläche entspricht dem Integral I_R . Im unteren Diagramm der Abbildung 4 wird die Lage der Unstetigkeitsfläche gemäß der Beziehung (4.39) gewählt. Jetzt ist vor der Unstetigkeitsfläche die äußere Dichte größer als die innere Dichte. Hinter der Unstetigkeitsfläche sind die Verhältnisse umgekehrt. Die beiden schattierten Flächen entsprechen wieder der Differenz zwischen der inneren und der äußeren Dichte. Allerdings sind die Vorzeichenverhältnisse beiderseits der Unstetigkeitsfläche unterschiedlich. Die beiden Flächen vor und hinter der Unstetigkeitsfläche sind jetzt gleich groß und kompensieren sich gegenseitig, das Integral I_R verschwindet.

In Kapitel 3.2. wurde eine Sprungbedingung für den normalen Massenstrom (3.30) hergeleitet, die allgemein gilt, auch wenn die Flamme stark gekrümmt ist, d.h. wenn die Annahme dünner Flammen ihre Gültigkeit verliert. Es wurde erläutert dass ein Modell, welches in numerischen Simulationen angewandt werden soll, einen stetigen Massenstrom an der Unstetigkeitsfläche aufweisen sollte. Andernfalls müsste im Verlauf einer Rechnung, der Strömung Masse entzogen oder Masse zu der Strömung hinzugefügt werden. Für den Fall dünner Flammen erlaubt uns Beziehung (4.39) die genaue Lage der Unstetigkeitsfläche zu berechnen, die einen stetigen Massenstrom an der Unstetigkeitsfläche gewährleistet. Für diese Lage verschwindet die virtuelle Oberflächenmasse. Im Anhang

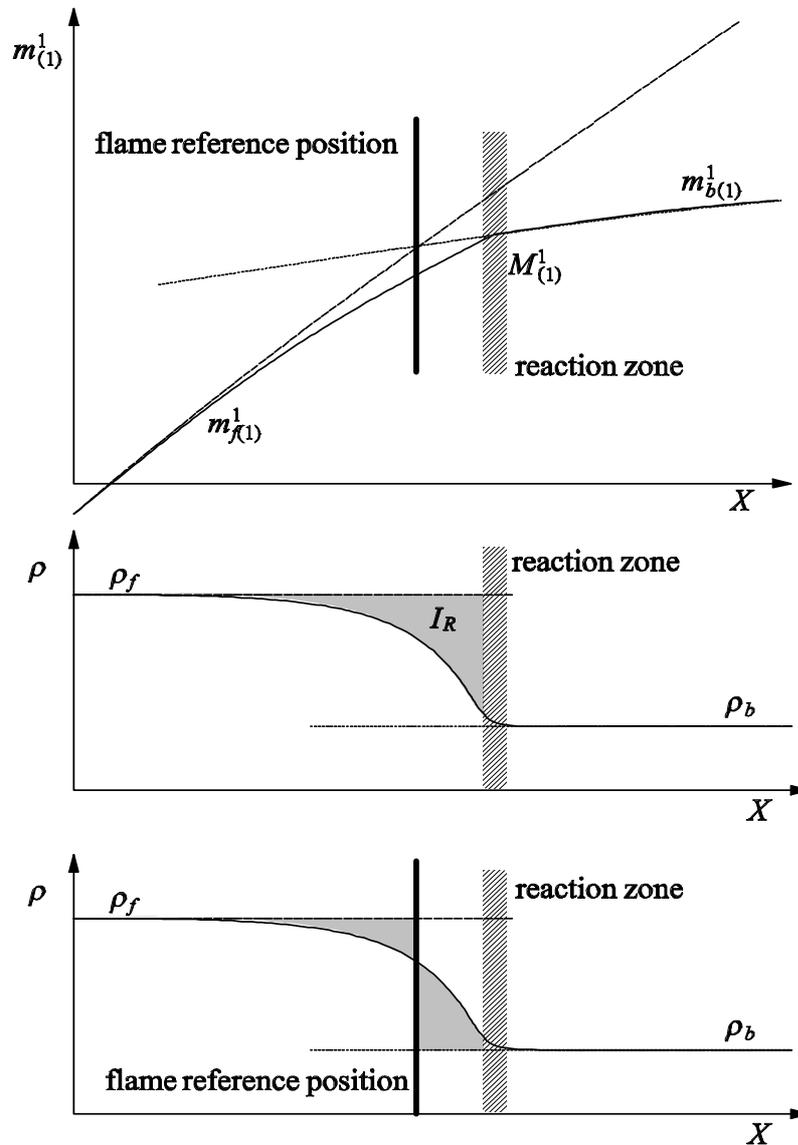


ABBILDUNG 4. Definition der Lage der Unstetigkeitsfläche (Flammenposition) als den Schnittpunkt der äußeren Massenströme (oben). Das Dichteintegral I_R für zwei unterschiedliche Flammenpositionen (mitte: Unstetigkeitsfläche stimmt mit Reaktionsfläche überein, unten: Fläche wird so gewählt, dass sich ein kontinuierlicher äußerer Massenstrom ergibt).

B wird beschrieben, wie die Lage der Unstetigkeitsfläche und der Massenstrom durch die Unstetigkeitsfläche, aus Mess- oder Computerdaten berechnet werden kann. Im Anhang C wird eine einfache Formel zur Berechnung der Flammenstreckung aus Mess- oder Computerdaten bereitgestellt. Diese Formeln sind hilfreich, wenn Modellrechnungen auf der Basis unserer Theorie mit physikalischen Daten verglichen werden sollen. Dieser Vergleich ist keineswegs trivial, denn die Unstetigkeitsfläche liegt innerhalb eines Gebiets, in dem die Strömungsgrößen große Gradienten besitzen. Erschwerend kommt hinzu, dass der physikalische Massenstrom an der Stelle der Unstetigkeitsfläche nicht mit dem Massen-

strom, der vom Modell an der selben Stelle berechnet wird, übereinstimmt und deshalb umgerechnet werden muss..

Jetzt werden Reaktionszonen betrachtet, die so dünn sind, dass sie als Reaktionsfläche aufgefasst werden können. Man spricht von einem Reaktionsflächenmodell. Für dieses kann die Lage der Unstetigkeitsfläche besonders einfach berechnet werden. Insbesondere müssen keine chemischen Reaktionen betrachtet werden.

4.3.1. Flammenposition und Sprungbedingungen für das Reaktionsflächenmodell

Es soll jetzt für das Reaktionsflächenmodell die Lage der Unstetigkeitsfläche, d.h. die Flammenposition, und das Integral I_σ , welches in den Sprungbedingungen auftaucht, ermittelt werden. Das Reaktionsflächenmodell gibt typische Verbrennungsvorgänge sehr gut wieder. Asymptotische Methoden für hohe Aktivierungsenergien liefern beispielsweise eine Reaktionsfläche. Außerhalb der Reaktionszone (Fläche) sind chemische Reaktionen vernachlässigbar und müssen nicht berücksichtigt werden. Die Reaktionsfläche liegt zwischen der Vorheizzone und dem Rauchgasgebiet. Auf der Reaktionsfläche liegt eine Temperatur nahe der Rauchgastemperatur vor. Die Dichte des Gases entspricht hier der Rauchgasdichte. Wesentliche Dichteunterschiede zwischen dem "diskontinuierlichen" Modell und der kontinuierlichen Dichte bestehen in der nichtreaktiven Vorheizzone. Diese ist Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung.

Wird die Vorheizzone betrachtet, so liefert in der führenden Ordnung von Gleichung (4.1) lediglich der normale Fluss einen Beitrag. Alle anderen Terme sind von der Größenordnung $O(\text{Pe}^{-1})$. Somit ist der normale Fluss $J_{(0)}^1(RT)$ aus Beziehung (3.21) unabhängig von der normalen Koordinate X . Es gilt

$$J_{(0)}^1(RT) = \text{const}, \quad (4.40)$$

wobei sich die Konstante leicht aus den Bedingungen im unverbrannten Brenngas bestimmen lässt. Dies liefert

$$m_{(0)}(T_{(0)} - 1) - R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \frac{\partial T_{(0)}}{\partial X} = 0 \quad (4.41)$$

mit der Randbedingung $T_{(0)} = 1$ im Brenngas bei $X \rightarrow -\infty$.

Die Integrale I_R und I_σ , enthalten als Integrationsvariable X . Alternativ kann bezüglich der Temperatur integriert werden, wobei die folgende Substitutionsregel anzuwenden ist:

$$dX = \frac{R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)}}{m_{(0)}} \frac{dT_{(0)}}{(T_{(0)} - 1)}. \quad (4.42)$$

Für ein ideales Gas ist die Dichte $R = 1/T$, und für die Diffusivität gilt gemäß der kinetischen Gastheorie, $R\mathcal{K} = T^\eta$ mit $\eta = 1/2$. Wird die Substitutionsvorschrift (4.42) in Beziehung (4.39) eingesetzt, um die Lage der Unstetigkeitsfläche zu bestimmen, kommt

$$\begin{aligned} 0 &= m_{(0)} \left(\int_{-\infty}^0 (R_{(0)} - \rho_f) dX + \int_0^\infty (R_{(0)} - \rho_b) \right) \\ &= \int_1^{T_{(0)}^*} T^{-1/2} dT - \frac{1}{T_b} \int_{T_{(0)}^*}^{T_b} T^{-1/2} \frac{T_b - T}{T - 1} dT. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Diese Beziehung kann numerisch ausgewertet werden und liefert die Temperatur $T_{(0)}^*$, die an der Unstetigkeitsfläche herrscht.

Wird dagegen die herkömmlichen Definition einer Flammenfläche gewählt, also die Reaktionsfläche, so herrscht dort stets die Rauchgastemperatur. In der vorliegenden Theorie,

wird die Unstetigkeitsfläche (Flammenfläche) hinsichtlich strömungsmechanischer Überlegungen gewählt. Am Ort der Unstetigkeitsfläche herrscht jetzt eine wesentlich niedrigere Temperatur.

Dies hat einen deutlichen Einfluss auf die Flammengeschwindigkeitsbeziehung. Zur Verdeutlichung wird eine ebene Flamme unter dem Einfluss starker Flammenstreckung betrachtet. Dieser Fall wird zwar von unseren Modellannahmen nur bedingt abgedeckt, ist aber sehr anschaulich. Zwei Gasströmungen werden so aufeinander gerichtet, dass sich zwischen den Strahlen eine ebene Stauebene ausbildet. Die Gase strömen radial ab. Auf der Stauebene verschwindet die axiale Geschwindigkeitskomponente. Wird von einer Seite heißes Rauchgas und von der anderen Seite kaltes Brenngas zugeführt, so kann eine zur Stauebene parallel Vormischflamme in der Strömung stabilisiert werden. Im Falle großer Strömungsgeschwindigkeiten (großer Flammenstreckung) befindet sich die Flamme in der Nähe der Stauebene, wo die Strömungsgeschwindigkeit hinreichend klein ist. Im Extremfall kann die Reaktionszone sogar über die Stauebene hinweg wandern. Wird die konventionelle Definition der Flammengeschwindigkeit angewandt, d.h. der Massenstrom in der Reaktionszone ausgewertet, so ergibt sich eine negative Flammengeschwindigkeit. Dies ist ein Kuriosum und bedarf somit besonderer Erklärung. Wird dagegen die Lage der Unstetigkeitsfläche gemäß Beziehung (4.33) gewählt, d.h. eine Stelle an der die Temperatur nur schwach erhöht ist, und hier der normale Massenstrom bestimmt, so zeigt sich dass dieser stets positiv ist. Besondere Erklärungen eines Kuriosums entfallen. In unserem Modell ergibt sich somit im Vergleich zu den früheren Modellen eine wesentlich schwächere Abhängigkeit der Flammengeschwindigkeit von der Flammenstreckung.

Wird jetzt das Integral I_σ , das in den Sprungbedingungen für den Impuls (4.38) erscheint,

$$I_\sigma = \int_{-\infty}^0 \phi_f dX + \int_0^\infty \phi_b dX, \quad (4.44)$$

berechnet und dieses mit der Substitutionsregel (4.42) umgeformt, kommt

$$I_\sigma = 2\text{Pr} \int_1^{T^*} T^{1/2} dT - \int_1^{T^*} T^{1/2} dT + 2\text{Pr} \int_{T^*}^{T_b} T^{1/2} dT + \int_{T^*}^{T_b} T^{1/2} \frac{T_b - T}{T - 1} dT. \quad (4.45)$$

Der erste und zweite Term auf der rechten Seite von (4.45) sind die Beiträge des Brenngasgebiets. Der dritte und vierte Term sind Beiträge des Rauchgasgebiets. Sowohl im Brenn- als auch im Rauchgasgebiet ergeben sich ein viskoser Term (erster und dritter Term), der jeweils proportional zur Prandtl-Zahl ist. Der zweite und vierte Term ergeben sich aus dynamischen Druckunterschieden zwischen dem diskontinuierlichem Modell und der inneren Flammenstruktur. Im Rauchgasgebiet sind sowohl das dritte und vierte Integral positiv. Im Brenngasgebiet liefern die ersten beiden Integrale Beträge unterschiedlichen Vorzeichens. Da die Integrale jedoch den gleichen Integranden besitzen, ist der gemeinsame Beitrag auch im Brenngasgebiet positiv sofern $\text{Pr} > 1/2$. Da für Gase $\text{Pr} \approx .7$, sind die Beiträge sowohl des Brenn- als auch des Rauchgasgebiets zu dem Integral I_σ positive. Allerdings ist der vom Brenngasgebiet geleistete Anteil wesentlich kleiner als der Beitrag des Rauchgasgebiets. Im Falle einer Strömung konstanter Dichte, also vernachlässigbar kleiner thermischer Expansion, verschwindet das Integral I_σ . Mit wachsender thermischer Expansion wächst es schnell an.

4.4. Zusammenfassung der Strömungsgleichungen und Sprungbedingungen

Die Strömung vor und hinter der Flamme wird durch die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.13) und (3.14) beschrieben. Die beiden Strömungsfelder sind miteinander durch Sprungbedingungen an der Flamme verknüpft. Im Gegensatz zu den Darrieus-

Landau-Sprungbedingungen, enthalten diese Sprungbedingungen jetzt Korrekturterme der Größenordnung $O(\text{Pe}^{-1})$.

Gewählt wird die genaue Lage der Flammenfläche (Unstetigkeitsfläche), unter Berücksichtigung strömungsmechanischer Überlegungen. Das Dichteintegral I_R verschwindet und die Sprungbedingungen (4.32) sowie (4.38) vereinfachen sich deutlich im Vergleich zu den Sprungbedingungen für eine andere Lage der Flammenfläche, z.B. aus Matalon & Matkowsky (1982).

Die Sprungbedingungen führender Ordnung (4.12) und (4.13) werden jetzt mit den störungstheoretischen Korrekturen (4.32) und (4.38) zusammengefasst. Die Impulssprungbedingungen werden in einen normalen und einen tangentialen Anteil aufgespalten. Diese Aufspaltung gestaltet sich sehr einfach. Das frei wählbare parallele Vektorfeld $l_{(0)i}^*$ wird am Ort der Betrachtung lediglich durch einen normalen bzw. einen tangentialen Vektor ersetzt. Da $I_R = 0$, treten die zeitlichen Ableitungen von $l_{(0)i}^*$, die eine Zerlegung zuvor schwierig gestellten, jetzt nicht mehr in den Sprungbedingungen auf. Es ergibt sich

$$[m] = 0, \quad (4.46)$$

$$\left[mv^1 + p - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \frac{\partial v^1}{\partial x^1} \right] = -\frac{1}{\text{Pe}} 2cm I_\sigma + o(\text{Pe}^{-1}), \quad (4.47)$$

$$\left[mv^\alpha - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^1} \right] = -\frac{1}{\text{Pe}} g^{\alpha\beta*} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (mI_\sigma) + o(\text{Pe}^{-1}). \quad (4.48)$$

In koordinatenunabhängiger Schreibweise entsprechen $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ und $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{n} \times \mathbf{v} \times \mathbf{n}$ den Größen v^1 und v^α . Die Sprungbedingungen für den Impuls lauten

$$\left[m v_n + p - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \nabla_n v_n \right] = -\frac{1}{\text{Pe}} 2cm I_\sigma + o(\text{Pe}^{-1}), \quad (4.49)$$

$$\left[m \mathbf{v}_\perp - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \nabla_n \mathbf{v}_\perp \right] = -\frac{1}{\text{Pe}} \nabla_\perp (mI_\sigma) + o(\text{Pe}^{-1}), \quad (4.50)$$

Hierin werden die normalen und tangentialen Ableitungen mit $\nabla_n(*) = \nabla(*) \cdot \mathbf{n}$ und $\nabla_\perp(*) = \mathbf{n} \times \nabla(*) \times \mathbf{n}$ bezeichnet. Bemerkenswert ist, dass die gewählte Darstellung der Sprungbedingung, eine physikalische Interpretation unmittelbar zulässt.

Die Sprungbedingung (4.46) besagt, dass der Massenstrom stetig an der Flamme verläuft. Obwohl unsere Theorie lediglich den ersten Störungsterm für dünne Flammen liefert, wird hier die These aufgestellt, dass die Lage der Unstetigkeitsfläche stets so gewählt werden kann, dass sich ein stetiger Massenstrom ergibt. Die Lage der Unstetigkeitsfläche, d.h. die Flammenfläche, die in unserer Theorie gewählt wird, fällt nicht mit der Reaktionsfläche zusammen. Für den Fall dünner Reaktionszonen wird gezeigt, dass die Unstetigkeitsfläche eine Isotherme der Flammenstruktur ist, deren Temperatur ungefähr zu $T^* = 1 + 0.2(T_b - 1)$ angegeben werden kann.

Der normale Impulsstrom ist an der Flamme gemäß Beziehung (4.47) unstetig. Der Sprung des Impulses über die Flamme hinweg ist der Krümmung der Flamme proportional. Beziehung (4.47) weist eine nahe Verwandtschaft mit der entsprechenden Beziehung für die Impulsbilanz einer Grenzfläche zwischen zwei unmischbaren Flüssigkeiten.

$$\left[p - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \nabla_n v_n \right] = 2c\sigma_s. \quad (4.51)$$

Es bezeichnet hierin σ_s die Oberflächenspannung der Grenzfläche. Betrachtet werde eine ruhende Blase mit einer positiven mittleren Krümmung c , so dass der Blasenmittelpunkt bei $x^1 > 0$ liegt. Die Oberflächenspannung ist eine positiv definite Größe, $\sigma_s > 0$. Der Drucksprung an der Grenzfläche $[p] = p(x^1 = 0^+) - p(x^1 = 0^-)$ ist positiv. Bekanntlich

ist der Druck innerhalb der Blase größer als der Außendruck. Wird zusätzlich ein Massenstrom m über die Grenzfläche hinweg zugelassen (beispielsweise durch Verdampfung), dann muss auf der linken Seite der Term $[m v_n]$ eingefügt werden, so dass gilt

$$\left[m v_n + p - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \nabla_n v_n \right] = 2c\sigma_s. \quad (4.52)$$

Werden die Sprungbedingungen (4.47) und (4.52) miteinander verglichen, zeigt sich dass der Term

$$-\text{Pe}^{-1} m I_\sigma = -\text{Pe}^{-1} m \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\text{Pr} R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \partial_X (1/R_{(0)}) + m \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R_{(0)}} \right) \right) dX \quad (4.53)$$

bei unserem Verbrennungsproblem ein Analogon zur Oberflächenspannung, des Problems unmischbarer Flüssigkeiten, ist. Oben wurde erläutert, dass das Integral I_σ positiv ist. Dies gilt zumindest im Fall dünner Reaktionszonen. Somit ist die "Oberflächenspannung" einer Vormischflamme mit dünner Reaktionszone negativ. Deshalb wird diese hier als "Oberflächenkompression" bezeichnet. Diese Bezeichnung soll den Term deutlich von der gewöhnlichen Oberflächenspannung unterscheiden. Des weiteren verdeutlicht die Bezeichnung "Oberflächenkompression", dass der Term seinen Ursprung in der Kompressibilität der Gase hat. Genau genommen, entsteht die Oberflächenkompression durch die veränderliche Dichte im Spannungstensor und durch Änderungen des dynamischen Druckes, wenn das Fluid bei abnehmender Dichte beschleunigt wird. Die Oberflächenkompression einer Flamme wächst betragsmäßig mit zunehmender thermischer Expansion schnell an.

Offensichtlich, hat die Oberflächenkompression einen entscheidenden Einfluss auf die Stabilität einer Flamme. Um eine Grenzfläche gegen die Wirkung der Oberflächenspannung zu vergrößern, muss Energie aufgewendet werden. Die Oberflächenspannung stabilisiert die Grenzfläche. Von der Oberflächenkompression muss eine umgekehrte Wirkung, also ein destabilisierender Einfluss, erwartet werden. Dies gilt insbesondere, wenn die Oberflächenkompression groß ist, also für starke thermische Expansion. Allerdings sollte darauf hingewiesen werden, dass die Stabilität einer Flamme nicht ausschließlich von der Oberflächenkompression bestimmt wird. Eine entscheidende Rolle spielt die Flammengeschwindigkeitsbeziehung, die Gegenstand der Untersuchung des nächsten Kapitels ist.

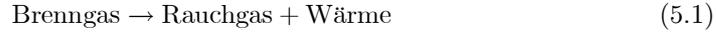
Der Sprungbedingung (4.48) liefert im allgemeinen einen unstetigen tangentialen Impulsfluss. Es ergeben sich tangentiale Kräfte, die proportional der tangentialen Ableitung der Oberflächenkompression sind. Diese tangentialen Kräfte sind das Analogon zu den Marangonikräften, die wirken, wenn die Oberflächenspannung zwischen unmischbaren Flüssigkeiten entlang einer Grenzfläche variiert. Im Falle von Lewis-Zahlen nahe Eins, wie sie in Matalon & Matkowsky (1982) betrachtet werden, ergeben sich in der führenden Ordnung keine Änderungen der Flammenstruktur entlang der Flamme. Die Oberflächenkompression weist keine relevanten tangentialen Gradienten auf.

Die bislang gewonnenen Ergebnisse gelten für beliebige Verbrennungsschemie sowie für beliebige Temperaturabhängigkeiten der Transportkoeffizienten. Deshalb können die Ergebnisse auch für Flammen mit komplexer Reaktionskinetik angewendet werden.

5. Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung

In den vorangegangenen Kapiteln war die Strömung Gegenstand der Untersuchungen. Um das Modell zu schließen, muss zusätzlich eine Flammengeschwindigkeitsbeziehung bereitgestellt werden.

Betrachtet wird eine Einschnitt-Arrhenius-Reaktion



mit einer hohen Aktivierungsenergie. Der chemische Umsatz wird von einem einzelnen Spezies, dessen normalisierte Konzentration Y ist, begrenzt. Im Brenngas ergibt sich $Y = 1$ und im Rauchgas, wo das limitierende Spezies vollständig umgesetzt ist, beträgt $Y = 0$. Entsprechend ist die dimensionslose Temperatur im Brenngas Eins und die adiabate Verbrennungstemperatur, die hinter der Flamme angenommen wird, beträgt T_b . Es wird angenommen, dass die Aktivierungsenergie der Reaktion groß ist. Somit ist die Zeldovich-Zahl Ze groß und die Reaktionszone dünn. Bei Temperaturen, die kleiner als $T_b - O(1/Ze)$ sind, ist die Reaktionsrate exponentiell klein. Innerhalb der Reaktionszone wird der vollständige Umsatz des limitierenden Spezies schnell vollzogen, da die Reaktionsrate bei hohen Temperaturen sehr hoch ist. Für den Grenzfall $Ze \rightarrow \infty$ schrumpft die Reaktionszone zu einer Fläche zusammen. Werden die Ergebnisse einer asymptotischen Untersuchung der Reaktionszone von Sivashinsky (1976), Matkowsky & Sivashinsky (1979) oder Matalon & Matkowsky (1982) ausgewertet, so kann der Reaktionsterm mittels der Diracschen Deltafunktion δ ausgedrückt werden,

$$W = W_r \delta(X - X_r), \quad W_r = \exp\left(\frac{Ze(T_r - T_b)}{T_b - 1}\right), \quad (5.2)$$

wobei X_r und T_r die Lage der Reaktionsfläche und die dort herrschende Temperatur darstellen. Hierbei muss zwischen der Reaktionsfläche und der Unstetigkeitsfläche bei $X = 0$ unterschieden werden, da diese nicht zusammenfallen.

Der Fall einer Einschnitt-Arrhenius-Reaktion hoher Aktivierungsenergie, stellt einen stark vereinfachten Sonderfall dar. In Realität läuft eine Vielzahl paralleler und sequenzieller Reaktionen ab. Häufig gilt, dass die Dicke der Reaktionszone deutlich kleiner als die Dicke der Flammenstruktur ist. Klimenko & Class (2000b) untersuchen Vormischflammen mit einer komplexen Kinetik unter Ausnutzung einer dünnen Reaktionszone. Es zeigt sich, dass die dünne Reaktionszone einer instationären, gekrümmten und gestreckten Flamme sich identisch verhält, wie diejenige einer ebenen stationären Flamme, deren Temperatur und Zusammensetzung so gewählt werden, dass sich identische Bedingungen in der Vorheizzone und im Rauchgas unmittelbar vor und hinter der Reaktionszone einstellen. Ist die Sensitivität auf Temperaturänderungen stärker als die Sensitivität auf Konzentrationsänderungen, dann genügt eine identische Zusammensetzung und Temperatur des Rauchgases. Dies kann durch Variation der Temperatur des Brenngases bei identischer Zusammensetzung eingestellt werden. Die Empfindlichkeit der globalen Reaktion auf Temperaturänderungen wird durch eine effektive Zeldovich-Zahl gemessen. Diese kann experimentell ermittelt werden, indem die globale Reaktionsrate als Funktion der Rauchgastemperatur gemessen wird. Hierzu wird die Flammengeschwindigkeit ebener Flammen mit identischer Zusammensetzung aber verschiedenen Brenngas- und Rauchgastemperaturen bestimmt.

In Abbildung 5 sind typische Werte der effektiven Zeldovich-Zahl für einige Kohlenwasserstoff-Luft-Flammen als Funktion der Rauchgastemperatur zusammengestellt.

Jetzt wird die Flammengeschwindigkeit unter der Annahme einer globalen Einschnitt-Arrhenius-Reaktion bestimmt. Mit der zuvor ebeschriebenen Methode kann die Untersuchung für komplexe chemische Kinetik verallgemeinert werden.

5.1. Allgemeine Lewis-Zahlen

Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung wird aus den Erhaltungsgleichungen für die Temperatur und die Konzentration des limitierenden Spezies gewonnen.

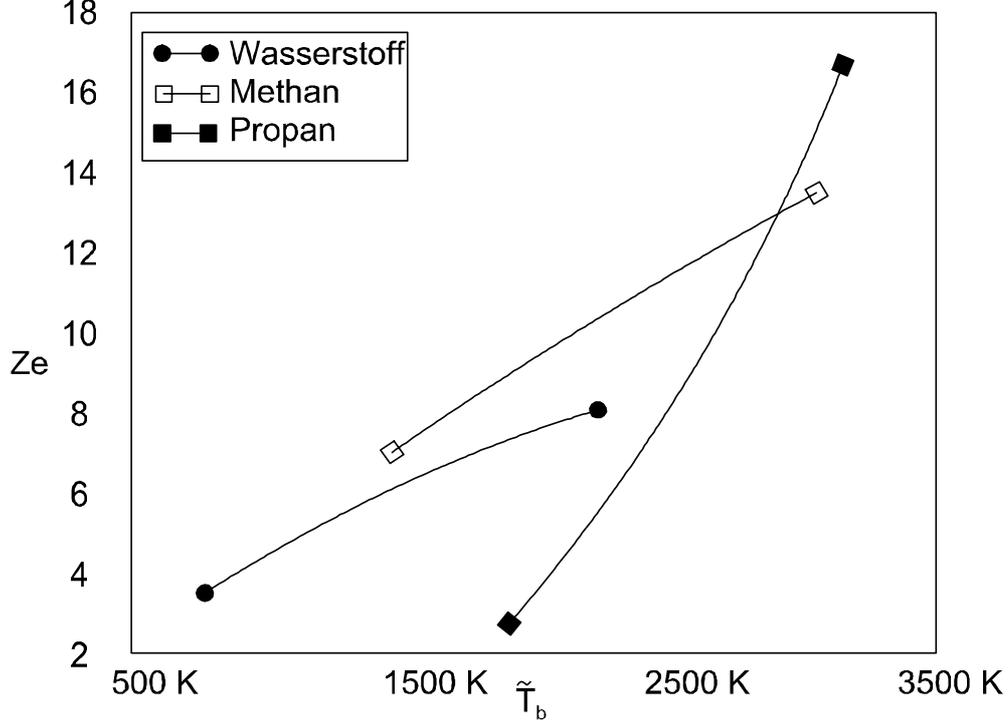


ABBILDUNG 5. Effektive Zeldovich-Zahlen für Wasserstoff-Luft, Methan-Luft und Propan-Luft Flammen in Abhängigkeit von der Rauchgastemperatur gemäß Klimenko & Class (2000b) mit Daten von Abdel-Gayed, Bradley, Hamid & Lawes (1984) und Abdel-Gayed, Al-Khishali & Bradley (1984)

$$\frac{1}{\text{Pe}} \int_{-\infty}^X \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g}R(T-1)) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}J^\alpha(R(T-1))) \right) dX + \quad (5.3)$$

$$\sqrt{g}J^1(R(T-1)) = \sqrt{g}(T_b - 1)W_r U(X - X_r).$$

$$\frac{1}{\text{Pe}} \int_{-\infty}^X \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g}R(1-Y)) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}J^\alpha(R(1-Y))) \right) dX + \quad (5.4)$$

$$\sqrt{g}J^1(R(1-Y)) = \sqrt{g}W_r U(X - X_r),$$

wobei die Flüsse für die Temperatur und die Spezieskonzentration

$$J^i(R(T-1)) = M^i(T-1) - g^{i1}R\mathcal{K}\partial T/\partial X - \text{Pe}^{-1}g^{i\beta}R\mathcal{K}\partial T/\partial x^\beta, \quad (5.5)$$

$$J^i(R(1-Y)) = M^i(1-Y) + \text{Le}^{-1}R\mathcal{K}g^{i1}\partial Y/\partial X + (\text{Pe}\text{Le})^{-1}g^{i\beta}R\mathcal{K}\partial Y/\partial x^\beta, \quad (5.6)$$

lauten, mit $i = 1, 2, 3$, sowie $\beta = 2, 3$. Da das erste Integral der Gleichungen angegeben wird, tritt die Sprungfunktion U auf. Die Sprungfunktion U ist die Stammfunktion der Diracschen Deltafunktion. Sie verschwindet für negative Argumente. Für positive Argumente berechnet sich U zu Eins. Hier werden Gleichungen für $T-1$ und $1-Y$ anstelle von T und Y formuliert. Dies gewährleistet, dass die Flüsse weit stromauf der Flamme bei $X \rightarrow -\infty$ verschwinden. Ist die Lewis-Zahl Le gleich Eins, werden die Energie- und Konzentrationsgleichung ähnlich. Es kann leicht gezeigt werden, dass sich die Temperatur jetzt durch die Konzentration ausdrücken lässt, wobei die Beziehung $(T-1)/(T_b-1) = 1-Y$ gilt, so dass eine einzige Gleichung das Problem beschreibt.

Weicht die Lewis-Zahl nur wenig von Eins ab, so sind die Konzentration und Temperatur nach wie vor in erster Näherung miteinander verknüpft. Effekte, die einer Abweichung der Lewis-Zahl von Eins zuzuschreiben sind, ergeben sich erst in einer höheren Ordnung einer asymptotischen Theorie. Dies erfordert die Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung für den Fall, dass $Le - 1$ klein ist. Dies ist nicht notwendig sofern $Le - 1 = O(1)$. Dieser Tatsache muss es zugeschrieben werden, dass bislang eine getrennte Betrachtung der Fälle $Le - 1 = o(1)$ und $Le - 1 = O(1)$ notwendig war.

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden Fälle erstmals gemeinsam untersucht. Es wird zunächst eine $O(1)$ skalierte Enthalpie

$$H = \frac{1}{1 - Le^{-1}} \left(\frac{T - 1}{T_b - 1} + Y - 1 \right), \quad (5.7)$$

eingeführt, die im Brenngas für $X \rightarrow -\infty$ verschwindet.

Die Stärke der Diracschen Deltafunktion im Reaktionsterm lautet jetzt

$$W_r = \exp(Ze(1 - Le^{-1})H_r), \quad (5.8)$$

wobei die Reaktionstemperatur T_r durch die Enthalpie H_r in der Reaktionszone ersetzt wird. Dabei wird ausgenutzt, dass das limitierende Spezies in der Reaktionszone vollständig umgesetzt wird und im Rauchgas $Y = 0$ gilt.

Geschrieben werden hier anstelle der Energiegleichung (5.3) eine Erhaltungsgleichung für die skalierte Enthalpie,

$$\frac{1}{Pe} \int_{-\infty}^X \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g}RH) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}J^\alpha(RH)) \right) dX + \sqrt{g}J^1(RH) = 0, \quad (5.9)$$

wobei die skalierte Enthalpie stets eine $O(1)$ Größe darstellt. Die Flüsse sind mit

$$J^i(RH) = M^i H - R\mathcal{K} \left(g^{i1} \frac{\partial}{\partial X} (H + 1 - Y) + \frac{1}{Pe} g^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (H + 1 - Y) \right) \quad (5.10)$$

gegeben, wobei $i = 1, 2, 3$. Der normale Fluss $J^1(RH)$ verschwindet weit stromauf bei $X \rightarrow -\infty$.

Die Gleichungen werden in eine asymptotische Reihe nach Potenzen von Pe^{-1} entwickelt. Im führenden Glied ergibt sich aus den Gleichungen (5.4), (5.3) und (5.9)

$$J_{(0)}^1(R(1 - Y)) = W_{r(0)}U(X - X_r), \quad (5.11)$$

$$J_{(0)}^1(R(T - 1)) = (T_b - 1)W_{r(0)}U(X - X_r), \quad (5.12)$$

$$J_{(0)}^1(RH) = 0, \quad (5.13)$$

wobei gilt

$$J_{(0)}^1(R(1 - Y)) = m_{(0)}(1 - Y_{(0)}) + Le^{-1}R_{(0)}\mathcal{K}_{(0)}\partial Y_{(0)}/\partial X, \quad (5.14)$$

$$J_{(0)}^1(R(T - 1)) = m_{(0)}(T_{(0)} - 1) - Le^{-1}R_{(0)}\mathcal{K}_{(0)}\partial T_{(0)}/\partial X, \quad (5.15)$$

$$J_{(0)}^1(RH) = m_{(0)}H_{(0)} - R_{(0)}\mathcal{K}_{(0)}(\partial(H_{(0)} + Y_{(0)} - 1)/\partial X). \quad (5.16)$$

Die zu diesen gewöhnlichen Differenzialgleichungen gehörenden Randbedingungen lauten $1 - Y_{(0)} = T_{(0)} - 1 = H_{(0)} = 0$ für $X \rightarrow -\infty$. Stromauf der Reaktionszone verschwindet die rechte Seite, so dass sich homogene gewöhnliche Differenzialgleichungen für die Konzentration des limitierenden Spezies, die Temperatur und die skalierte Enthalpie als Funktion der normalen Raumkoordinate X ergeben. Der normale Massenstrom $m_{(0)}$ durch die Flamme ist noch unbestimmt. Die Lösungen der Gleichungen in führender

Ordnung lauten

$$1 - Y_{(0)} = \exp(\text{Le} m_{(0)} (\zeta - \zeta_r)), \quad \zeta = \int_0^X \frac{1}{R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)}} dX \quad (5.17)$$

$$\Theta = \frac{T_{(0)} - 1}{T_b - 1} = \exp(m_{(0)} (\zeta - \zeta_r)). \quad (5.18)$$

Das Konzentrationsprofil kann alternativ mittels der Temperatur ausgedrückt werden, $1 - Y_{(0)} = \Theta^{\text{Le}}$. Entsprechendes gilt für die skalierte Enthalpie

$$H_{(0)} = \frac{1}{1 - \text{Le}^{-1}} (\Theta - \Theta^{\text{Le}}). \quad (5.19)$$

Es zeigt sich, dass die skalierte Enthalpie so eingeführt wurde, dass $H_{(0)}$ für beliebige Lewis-Zahlen positiv ist.

Die tangentialen Flüsse $J_{(0)}^\alpha(R(1-Y))$, $J_{(0)}^\alpha(RT)$ und $J_{(0)}^\alpha(RH)$ verschwinden in der führenden Ordnung aufgrund der speziellen Wahl des bewegten Koordinatensystems.

Wird die Konzentrationsgleichung bis unmittelbar hinter die Reaktionsfläche bei X_r integriert, wo gilt $\partial Y_{(0)}/\partial X = Y_{(0)} = 0$ gilt, so kommt

$$m_{(0)} = W_{r(0)}. \quad (5.20)$$

Entsprechend liefert die Enthalpie Gleichung (5.9), dass im Rauchgasgebiet $X > X_r$ gilt:

$$H_{r(0)} = 0. \quad (5.21)$$

In der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ werden die Grundgleichungen in der Schreibweise von Gleichung (4.4) angegeben

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi\right) \left(\int_{-\infty}^X R_{(0)} (1 - Y_{(0)}) dX\right) + J_{(1)}^1(R(1-Y)) - 2cX J_{(0)}^1(R(1-Y)) =$$

$$(W_{r(1)} - 2cX W_{r(0)}) U(X - X_r) \quad (5.22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi\right) \left(\int_{-\infty}^X R_{(0)} H_{(0)} dX\right) + J_{(1)}^1(RH) - 2cX J_{(0)}^1(RH) = 0. \quad (5.23)$$

Terme, welche die mittlere Krümmung c enthalten, berücksichtigen die Änderung des Flächenelements. In der Konzentrations- und Enthalpiegleichung (5.4) und (5.9) verschwinden die tangentialen Flüsse in führender Ordnung. Eine Integration bis unmittelbar hinter der Reaktionsfläche $X = X_r$, liefert

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi\right) \left(\frac{I_Y}{m_{(0)}}\right) + J_{(1)}^1(R(1-Y)) - 2cX_r J_{(0)}^1(R(1-Y)) = W_{r(1)} - 2cX_r m_{(0)}, \quad (5.24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi\right) \left(\frac{I_H}{m_{(0)}}\right) + J_{(1)}^1(RH) - 2cX_r J_{(0)}^1(RH) = 0 \quad (5.25)$$

wobei $I_Y = m_{(0)} \int_{-\infty}^{X_r} R_{(0)} (1 - Y_{(0)}) dX$ und $I_H = m_{(0)} \int_{-\infty}^{X_r} R_{(0)} H_{(0)} dX$. Im Rauchgas bei $X = X_r$ werden die Flüsse zu $J_{(0)}^1(R(1-Y)) = m_{(0)}$, $J_{(1)}^1(R(1-Y)) = M_{r(1)}^1$, $J_{(0)}^1(RH) = 0$ und $J_{(1)}^1(RH) = m_{(0)} H_{r(1)}$ berechnet.

Die Größe X_r ist der Abstand zwischen der Reaktions- und der Unstetigkeitsfläche.

Die Unstetigkeitsfläche ist eine Fläche konstanter Temperatur $T = T^*$. Auf der Reaktionsfläche ist die Temperatur in führender Ordnung konstant, so dass $T_{r(0)} = T_b$. Obwohl die Temperaturen auf den beiden Flächen konstant sind, muss der Abstand zwischen den beiden Flächen nicht zwangsläufig konstant sein. Vielmehr können Variationen von X_r aus Flammengeschwindigkeitsvariationen entlang der Flamme resultieren. Für X_r wird die allgemein gültige integrale Beziehung $X_r = \int_0^{X_r} dX$ geschrieben. Diese erscheint zunächst unnötig kompliziert, erlaubt aber die Anwendung der Substitutionsregel (4.42). Die Integration bezüglich des Ortes wird in eine Integration bezüglich der Temperatur überführt, wobei $X_r = I_X/m_{(0)}$ gelten soll. Entsprechend wird die Substitution in den Integralen I_Y , I_H und I_X durchgeführt,

$$I_Y = (T_b - 1)^{-Le} \int_1^{T_b} \mathcal{K}_{(0)} R_{(0)}^2 (T_{(0)} - 1)^{Le-1} dT_{(0)}, \quad (5.26)$$

$$I_H = \frac{1}{1 - Le^{-1}} \left((T_b - 1)^{-1} \int_1^{T_b} \mathcal{K}_{(0)} R_{(0)}^2 dT_{(0)} - I_Y \right), \quad (5.27)$$

$$I_X = \int_{T_{(0)}^*}^{T_b} R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \frac{dT_{(0)}}{(T_{(0)} - 1)}. \quad (5.28)$$

Hierbei werden die theoretischen Temperaturabhängigkeiten $R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \sim T_{(0)}^{1/2}$ und $R_{(0)} \sim T_{(0)}^{-1}$ eingesetzt. Die Integrale I_Y , I_H und I_X wurden jeweils so eingeführt, dass sich vom normalen Massenstrom $m_{(0)}$ unabhängige Werte ergeben.

Um den Fluss $J_{(1)}^1 (R(1 - Y))$ berechnen zu können, muss der $O(\text{Pe}^{-1})$ normale Massenstrom betrachtet werden. Der normale Massenstrom im "diskontinuierlichen" Modell $m_{r(1)}^1$ und der innere Massenstrom $M_{r(1)}^1$ durch die Reaktionsfläche $X = X_r$ sind identisch, da die entsprechenden Dichten auf der Reaktionsfläche übereinstimmen. Im "diskontinuierlichen" Modell wird allerdings nicht der Massenstrom durch die Reaktionsfläche benötigt sondern der normale Massenstrom durch die Unstetigkeitsfläche bei $X = 0$. Die gewünschte Korrektur kann aus Beziehung (4.31) berechnet werden, und lautet

$$M_{r(1)}^1 = m_{(1)} - \rho_b I_X (\partial/\partial t + \chi) (1/m_{(0)}) + 2c_{(0)} I_X. \quad (5.29)$$

Aus den Gleichungen (5.24) und 5.25) ergibt sich jetzt

$$m_{(1)} + (I_Y - \rho_b I_X) (\partial/\partial t + \chi) (1/m_{(0)}) + 2c I_X = W_{r(1)}, \quad (5.30)$$

$$m_{(0)} H_{r(1)} + I_H (\partial/\partial t + \chi) (1/m_{(0)}) = 0, \quad (5.31)$$

woraus sich, zusammen mit (5.8) und den Lösungen der führenden Ordnung (5.20) und (5.21), der Massenstrom und die Enthalpie auf der Reaktionsfläche bestimmen lässt.

Zuvor soll jedoch das Verhalten der Integrale I_Y , I_H und I_X diskutiert werden. Das Integral I_Y ist stets positiv und nimmt mit wachsender Lewis-Zahl und wachsender thermischer Expansion ab.

Das Integral I_H ist stets positiv und hängt nur schwach von den Parametern ab. Mit wachsenden Lewis-Zahlen nimmt I_H ab und nähert sich einem Grenzwert für $Le \rightarrow \infty$. Für schwache thermische Expansion, d.h. $T_b \rightarrow 1$ nimmt das Integral den Maximalwert, $I_H \rightarrow 1$, an und fällt monoton mit anwachsenden T_b . Typische Werte für I_H liegen ungefähr bei 0.7.

Das Integral I_X ist ebenfalls positiv und wächst mit der thermischen Expansion an. Für typische Verbrennungsbedingungen ist $I_X \approx 3$.

Aus den früheren Arbeiten ist bekannt, dass sich die Flammengeschwindigkeitsbeziehung in Abhängigkeit der relativen Größe der Parameter Pe , Ze , and $(Le^{-1} - 1)$ ändert.

Die Gleichungen der Ordnung $O(1)$ und $O(\text{Pe}^{-1})$ werden zusammengefasst, wobei alle relevanten Parameter auftreten,

$$m + \text{Pe}^{-1} ((I_Y - \rho_b I_X) (\partial/\partial t + \chi) (1/m) + 2cI_X) = \quad (5.32)$$

$$\exp\left(\frac{\text{Ze}}{2} (1 - \text{Le}^{-1}) H_r\right) + o(\text{Pe}^{-1}),$$

$$mH_r + \text{Pe}^{-1} I_H (\partial/\partial t + \chi) (1/m) = 0 + o(\text{Pe}^{-1}). \quad (5.33)$$

Die Zeitableitung in Gleichung (5.32) darf vernachlässigt werden, da der Pe^{-1} -Term nur für Flammen mit Lewis-Zahlen nahe Eins wichtig ist. Es gilt dann $m \approx 1 + O(\text{Pe}^{-1})$, so dass die Zeitableitung einen Term der Größenordnung $O(\text{Pe}^{-2})$ darstellt. Wird jetzt H_r eliminiert ergibt sich die allgemeine Flammengeschwindigkeitsbeziehung

$$S I_H (\partial/\partial t + \chi) (1/m) + m \ln (m + \text{Pe}^{-1} ((I_Y - \rho_b I_X) \chi/m + 2cI_X)) = 0, \quad (5.34)$$

wobei

$$S = \text{Pe}^{-1} \text{Ze} (1 - \text{Le}^{-1}), \quad (5.35)$$

eine dimensionslose Kennzahl bezeichnet, die den gemeinsamen Effekt, der Lewis-, Peclet- und Lewis-Zahl charakterisiert. Diese Kennzahl S wird hier als die Sivashinsky-Kennzahl bezeichnet. Sivashinsky war der erste Autor, der die Bedeutung dieser Kennzahl erkannte. Man beachte, dass $S > 0$ ($S < 0$) für $\text{Le} > 1$ ($\text{Le} < 1$).

Die früher in der Literatur betrachteten Grenzfälle können leicht aus der Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.34) gewonnen werden.

5.2. Der Einfluss kurzer Wellenlängen

Bevor jedoch die Flammengeschwindigkeitsbeziehung für verschiedene Parameterbereiche betrachtet wird, wird diese noch um einen wichtigen Effekt erweitert. Es sei hier daran erinnert, dass bei der Herleitung der Flammengeschwindigkeitsbeziehung eine Beschränkung auf Variationen auf einer $O(1)$ -Längenskala erfolgt ist. Indirekt werden kurzwellige Störungen ausgeschlossen. Jetzt soll zusätzlich der Einfluss kurzwelliger Störungen entlang der Flamme betrachtet werden. Diese sind für die Stabilität einer Flamme von entscheidender Bedeutung.

Es wird angenommen, dass kurzwellige Störungen der Flamme nur kleine Amplitude besitzen, so dass die Krümmung der Flamme klein bleibt. Die Wirkung dieser kurzwelligen Störungen auf die Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.34) soll bestimmt werden.

Die Wellenlänge der kurzwelligen Störungen ist $o(1)$. Störungen mit einer $O(\text{Pe}^{-1/2})$ transversalen Längenskala stellen einen ausgezeichneten Fall dar. Zunächst werden gestreckte tangential Koordinaten $\xi^\alpha = \text{Pe}^{1/2} x^\alpha$ mit $\alpha = 2, 3$ eingeführt und es wird angenommen, dass die Ableitungen bezüglich der ξ^α -Richtungen von der Größenordnung $O(1)$ sind. Da die Flammendicke $O(\text{Pe}^{-1})$ ist, sind die Variationen entlang der Flamme nach wie vor sehr viel kleiner als die Variationen normal zur Flamme. Somit ergeben sich in der führenden Ordnung keine Änderungen bei der Lösung der Gleichungen.

Das Interesse gilt insbesondere dem Fall, wenn entlang der Flamme Variationen der Flammengeschwindigkeit von der Größenordnung $O(1)$ auftreten. In diesem Grenzfall wird das Problem durch die führende Ordnung der Konzentrations- und Strömungsgleichungen sowie die Enthalpiegleichung beschrieben.

Bei der Enthalpiegleichung müssen störungstheoretische Korrekturen berücksichtigt werden. Es genügt die Enthalpiegleichung zu betrachten. Störungstheoretische Korrekturen der übrigen Gleichungen, sind nur dann von Bedeutung, wenn kurzwellige Störungen eine vernachlässigbare Rolle spielen. Allerdings enthält die Enthalpiegleichung störungs-

theoretische Korrekturen der Strömungsvariablen als Bestandteil der tangentialen Flüsse. Insofern werden Korrekturen des Strömungsfelds berücksichtigt.

Hier werden nicht alle Schritte der Herleitung wiederholt, da diese überwiegend unverändert bleiben. Vielmehr sollen die wesentlichen Unterschiede aufgezeigt werden.

Werden gestreckte tangentiale Variablen in die Enthalpiegleichung eingeführt, kommt

$$\frac{1}{\text{Pe}} \int_{-\infty}^{X_r} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g}RH) + \text{Pe}^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\sqrt{g}J^\alpha(RH)) \right) dX + \sqrt{g}J^1(RH) = 0, \quad (5.36)$$

wobei die Flüsse jetzt

$$J^i(RH) = M^i H - RK \left(g^{i1} \partial / \partial X (H + 1 - Y) + \text{Pe}^{-1/2} g^{i\alpha} \partial / \partial \xi^\alpha (H + 1 - Y) \right) \quad (5.37)$$

lauten. Die Variablen werden in eine asymptotische Reihe nach Potenzen von $\text{Pe}^{-1/2}$ entwickelt, so dass sich Reihenentwicklungen der Form $F = F_{(0)} + \text{Pe}^{-1/2} F_{(1/2)} + \text{Pe}^{-1} F_{(1)} + \dots$ ergeben. Es steht F stellvertretend für die zu entwickelnden Variablen.

Aus der $O(\text{Pe}^{-1/2})$ -Kontinuitätsgleichung ergibt sich innerhalb der Flammenstruktur die Konstanz des normalen Massenstroms. Die Schritte aus Kapitel 4.2 werden unter Berücksichtigung der neuen Skalierung in tangentialer Richtung wiederholt. Die Terme, die $(\partial/\partial t + \chi)$ enthalten, treten weiterhin in der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ auf, so dass sie keinen Bestandteil der $O(\text{Pe}^{-1/2})$ -Gleichungen bilden. Die tangentialen Flüsse erscheinen jetzt in der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1/2})$ und müssen berücksichtigt werden. Die Sprungbedingung für den normalen Massenstrom (4.32) wird jetzt die Sprungbedingung für $m_{(1/2)}$. Allerdings tritt der $(\partial/\partial t + \chi)$ -Term nicht auf, so dass $m_{(1/2)}$ stetig wird. In der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1/2})$ besteht somit keine Notwendigkeit die genaue Lage der Unstetigkeitsfläche zu definieren. In der Beziehung (4.36) ist die Normalableitung von \sqrt{g} jetzt $O(\text{Pe}^{-1})$, so dass der Krümmungsterm entfällt. Des weiteren vereinfacht sich die Sprungbedingung des Impulses (4.38). Einerseits, bleibt der viskose Term auf der linken Seite der Gleichung $O(\text{Pe}^{-1})$ und tritt somit nicht auf. Andererseits entfällt der $(\partial/\partial t + \chi)$ -Term. Dank dieser Vereinfachungen kann die Sprungbedingung leicht in einen tangentialen und normalen Anteil aufgespalten werden. Schließlich tritt, wie oben bereits erläutert, kein Krümmungsterm auf.

Die Ergebnisse können wie folgt zusammengefasst werden. Da die Krümmung zu schwach ist, ergeben sich aus der Oberflächenkompression in der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1/2})$ keine Normalkräfte. Allerdings wirken tangentiale Kräfte bedingt durch die schnellen Änderungen der Oberflächenkompression entlang der Flamme. Dies ergibt eine Unstetigkeit $[v_{(1/2)}^\alpha]$ der tangentialen Strömung, so dass $v_{(1/2)}^\alpha \neq V_{(1/2)}^\alpha$ innerhalb der Flammenstruktur. Die tangentiale Strömung ändert sich innerhalb der Flamme, und es ergibt sich ein veränderlicher tangentialer Massenstrom $M_{(1/2)}^\alpha = R_{(0)} \left(V_{(1/2)}^\alpha - u_{(1/2)}^{\alpha*} \right)$. Hierin ist $u_{(1/2)}^{\alpha*}$ die Tangentialgeschwindigkeit des Koordinatensystems. Innerhalb der Flammenstruktur ist diese konstant.

In der führenden Ordnung wird die tangentiale Geschwindigkeit des Koordinatensystems so gewählt, dass der tangentiale Massenstrom verschwindet. In der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1/2})$ ist die tangentiale Strömungsgeschwindigkeit veränderlich aber die tangentiale Geschwindigkeit des Koordinatensystems ist konstant. Somit kann in der Ordnung $O(\text{Pe}^{-1/2})$ das punktweise Verschwinden des tangentialen Massenstroms nicht verwirklicht werden. Wird ein spezielles Koordinatensystem gewählt, kann dennoch die explizite

Berechnung von $M_{(1/2)}^\alpha$ umgangen werden. Es wird $u_{(1/2)}^{\alpha*}$ implizit durch die Gleichung,

$$\int_{-\infty}^{X_r} M_{(1/2)}^\alpha H_{(0)} dX = 0, \quad (5.38)$$

definiert. Diese Vereinbarung kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit getroffen werden. Das Integral (5.38) ist ein Bestandteil des Terms $\int_{-\infty}^{X_r} (\partial/\partial\xi^\alpha (\sqrt{g_{(0)}^*} J_{(1/2)}^\alpha (RH))) dX$ aus Gl. (5.36), der jetzt verschwindet. Der tangentielle Massenstrom $M_{(1/2)}^\alpha$ wird an keiner weiteren Stelle benötigt, so dass dessen Berechnung tatsächlich entfallen kann. Ebenso erübrigt sich die Berechnung von $u_{(1/2)}^{\alpha*}$, da keine störungstheoretischen Korrekturen der Flammenstreckung berechnet werden sollen.

Es werden jetzt die tangentialen Ableitungen in der Enthalpiegleichung (5.36) betrachtet. Diese traten bei der Untersuchung von Variationen mit $O(1)$ -Wellenlänge nicht auf.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{X_r} \text{Pe}^{1/2} \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} (\sqrt{g} J^\alpha (RH)) dX = \\ & \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} \sqrt{g} \int_{-\infty}^{X_r} \left(M_{(1/2)}^\alpha H_{(0)} - R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial}{\partial\xi^\beta} (H_{(0)} + 1 - Y_{(0)}) \right) dX + o(1). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Der Term mit $M_{(1/2)}^\alpha H_{(0)}$ verschwindet gemäß Beziehung (5.38). Es kann $H_{(0)} + 1 - Y_{(0)}$ durch die Temperatur bzw. $\Theta = (T - 1) / (T_b - 1)$ ausgedrückt werden,

$$\frac{\partial}{\partial\xi^\beta} (H_{(0)} + 1 - Y_{(0)}) = \left(\frac{\partial}{\partial\Theta} (H_{(0)} + 1 - Y_{(0)}) \right) \frac{\partial\Theta}{\partial\xi^\beta}, \quad (5.40)$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial\Theta} (H_{(0)} + 1 - Y_{(0)}) = \frac{1 - \Theta \text{Le}^{-1}}{1 - \text{Le}^{-1}}. \quad (5.41)$$

Die Ableitung $\partial\Theta/\partial\xi^\beta$ wird aus $\Theta = \exp(m_{(0)}(\zeta - \zeta_r))$ berechnet, wobei $m_{(0)}$ eine Funktion von ξ^β ist. Schließlich gilt, $\partial\Theta/\partial\xi^\beta = (\partial\Theta/\partial(1/m_{(0)})) (\partial(1/m_{(0)})/\partial\xi^\beta)$ mit $\partial\Theta/\partial(1/m_{(0)}) = -\Theta \ln \Theta m_{(0)}$.

Entsprechend erfolgt die Berechnung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} \sqrt{g^*} g_{(0)}^{\alpha\beta*} R\mathcal{K} \frac{\partial}{\partial\xi^\beta} (H_{(0)} + 1 - Y_{(0)}) = \\ & - \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} \left(R\mathcal{K} \frac{1 - \Theta \text{Le}^{-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \Theta \ln \Theta m_{(0)} \sqrt{g^*} g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi^\beta} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(R_{(0)} \mathcal{K} \frac{1 - \Theta \text{Le}^{-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \Theta \ln \Theta \right) \Theta \ln \Theta m_{(0)} \left(m_{(0)} \sqrt{g^*} g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi^\beta} \right) - \\ & R_{(0)} \mathcal{K} \frac{1 - \Theta \text{Le}^{-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \Theta \ln \Theta m \left(\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} \left(m \sqrt{g^*} g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi^\beta} \right) \right) = \\ & \left(\frac{\partial}{\partial\Theta} \left(R\mathcal{K} \frac{1 - \Theta \text{Le}^{-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \Theta \ln \Theta \right) + R\mathcal{K} \frac{1 - \Theta \text{Le}^{-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \right) \Theta \ln \Theta m \left(m \sqrt{g^*} g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi^\beta} \right) - \\ & R\mathcal{K} \frac{1 - \Theta \text{Le}^{-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \Theta \ln \Theta m \left(\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} \left(\sqrt{g^*} g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m)}{\partial\xi^\beta} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.42)$$

wobei der Index "(0)" bei $m_{(0)}$, $R_{(0)}$ und $\mathcal{K}_{(0)}$ weggelassen wird, so dass gilt,

$$I_{\Delta} \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} \left(\sqrt{g}^* g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m)}{\partial \xi^{\beta}} \right) - I_{\nabla^2} \left(m_{(0)} \sqrt{g}^* g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m)}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial(1/m)}{\partial \xi^{\beta}} \right). \quad (5.43)$$

Die Grössen I_{Δ} und I_{∇^2} bezeichnen die Integrale

$$I_{\Delta} = - \int_{-\infty}^{X_r} \mathcal{K}_{(0)} \ln \Theta \frac{1 - \Theta^{\text{Le}-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \Theta m dX, \quad (5.44)$$

$$I_{\nabla^2} = I_{\Delta} - \int_{-\infty}^{X_r} \ln \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\mathcal{K}_{(0)} \frac{1 - \Theta^{\text{Le}-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \Theta \ln \Theta \right) \Theta m dX. \quad (5.45)$$

Wird nun für die Integration bezüglich X durch eine Integration bezüglich Θ substituiert, wobei $dX = R\mathcal{K}/\Theta m d\Theta$ mit $R\mathcal{K} = T^{1/2} = ((T_b - 1)\Theta + 1)^{1/2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= - \int_0^1 (R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)})^2 \ln \Theta \frac{1 - \Theta^{\text{Le}-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} d\Theta \\ &= 1 + \text{Le}^{-1} + \frac{\text{Le}(3 + \text{Le})}{4(1 + \text{Le})^2} (T_b - 1), \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} I_{\nabla^2} &= I_{\Delta} - \int_0^1 R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \ln \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(R_{(0)} \mathcal{K}_{(0)} \frac{1 - \Theta^{\text{Le}-1}}{1 - \text{Le}^{-1}} \Theta \ln \Theta \right) d\Theta \\ &= \frac{7 + \text{Le}(4 + \text{Le})}{8(1 + \text{Le})^3} \text{Le} (T_b - 1). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Die Integrale I_{Δ} und I_{∇^2} stellen von $m_{(0)}$ unabhängige positive Konstanten dar.

Werden alle $O(\text{Pe}^{-1})$ -Terme in (5.36) zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} I_H (\partial/\partial t + \chi) (1/m_{(0)}) - I_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{g}^*} \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} \left(\sqrt{g}^* g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m_{(0)})}{\partial \xi^{\beta}} \right) \\ + I_{\nabla^2} \left(m_{(0)} g_{(0)}^{\alpha\beta*} \frac{\partial(1/m_{(0)})}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial(1/m_{(0)})}{\partial \xi^{\beta}} \right) + m_{(0)} H_{r(1)} = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Aus $g^{-1/2*} \partial \left(g^{1/2*} g_{(0)}^{\alpha\beta*} (\partial(1/m_{(0)})/\partial \xi^{\beta}) \right) / \partial \xi^{\alpha}$ ergibt sich in koordinatenunabhängiger Schreibweise

$$\text{Pe}^{-1} \nabla_{\perp}^2 (1/m_{(0)}) = \text{Pe}^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{n} \times \nabla(1/m_{(0)}) \times \mathbf{n}) \quad (5.49)$$

und aus $m_{(0)} g_{(0)}^{\alpha\beta*} (\partial(1/m_{(0)})/\partial \xi^{\alpha}) (\partial(1/m_{(0)})/\partial \xi^{\beta})$

$$\text{Pe}^{-1} m_{(0)} (\nabla_{\perp} (1/m_{(0)}))^2 = \text{Pe}^{-1} m_{(0)} (\mathbf{n} \times \nabla(1/m_{(0)}) \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla(1/m_{(0)}) \times \mathbf{n}). \quad (5.50)$$

Der Operator ∇_{\perp}^2 ist der Oberflächen-Laplace-Operator. Benachbarte Oberflächenelemente der Flamme können sich nicht mit voneinander unabhängigen Geschwindigkeiten bewegen. Eine räumlich Kopplung benachbarter Flammenabschnitte wird durch den diffusiven Charakter von ∇_{\perp}^2 gewährleistet. So wird die Bildung extrem kurzweiliger Faltungen der Flamme unterbunden. Der zweite neue Term ist nichtlinear. Er koppelt ebenfalls benachbarte Flammenelemente. Der Term gewinnt an Bedeutung wenn starke Gradienten der Flammengeschwindigkeit entlang der Flamme bestehen. Die Flammen-

geschwindigkeitsbeziehung ist jetzt durch die partielle Differentialgleichung,

$$S \left(I_H (\partial/\partial t + \chi) (1/m) - \text{Pe}^{-1} I_\Delta \nabla_\perp^2 (1/m) + \text{Pe}^{-1} I_{\nabla^2} m (\nabla_\perp (1/m))^2 \right) + \quad (5.51)$$

$$m \ln (m + \text{Pe}^{-1} ((I_Y - \rho_b I_X) \chi/m + 2cI_X)) = 0,$$

gegeben.

Der Vollständigkeit halber, sei angemerkt, dass entsprechende Korrekturterme auch für die Konzentrationsgleichung hergeleitet werden könnten, die dann als Pe^{-2} -Term im Logarithmus auftreten würde. Diese Terme tragen jedoch nicht zum Endergebnis bei, zumal der $O(\text{Pe}^{-1})$ -Term in der Konzentrationsgleichung nur für Flammen mit $\text{Le} \approx 1$ von Bedeutung ist. Bei diesen ist der normale Massenstrom in der führenden Ordnung Eins und die neuen Term sind vernachlässigbar klein. Die Beziehung (5.51) verallgemeinert die Flammengeschwindigkeitsgleichung (5.34) für den Fall kurzweilliger Störungen. Sie wird hier die *vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung* genannt. Bemerkenswert ist, dass der tangentielle Diffusionsterm in allen vorangegangenen Theorien und phänomenologischen Modellen nicht auftritt, da bislang lediglich Störungen mit $O(1)$ Wellenlänge betrachtet wurden.

Die *vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung* (5.51) soll jetzt für verschiedene Parameterbereiche untersucht werden.

5.3. Schwache Variationen der Flammengeschwindigkeit: Das M-M-Model ($S = O(\text{Pe}^{-1})$)

Wenn sich die Lewis-Zahl nur wenig von Eins unterscheidet und gleichzeitig die Zeldovich-Zahl groß ist, dann wird die Sivashinsky-Zahl $S = \text{Pe}^{-1} \text{Ze} (1 - \text{Le}^{-1}) = O(\text{Pe}^{-1})$, so dass $S = \text{Pe}^{-1} S_{(1)}$ mit $S_{(1)} = O(1)$.

Wird dies in die vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) eingesetzt und diese nach Potenzen Pe^{-1} entwickelt, ergibt sich

$$m = 1 - \text{Pe}^{-1} (2cI_X + (I_Y + S_{(1)}I_H - \rho_b I_X) \chi) + o(\text{Pe}^{-1}). \quad (5.52)$$

Da m in der führenden Ordnung Eins ist, wird die tangentielle Diffusion $O(\text{Pe}^{-2})$ und ist damit vernachlässigbar klein. Diese Beziehung stimmt mit der von Matalon und Matkowsky überein, wenn man von den zu I_X proportionalen Termen absieht. Diese Terme ergeben sich aufgrund der unterschiedlichen Definitionen der Unstetigkeitsfläche, auf die sich der Massenstrom bezieht. Bei einer gekrümmten oder gestreckten Flammen ändert sich der Massenstrom $m_{(1)}^1$ entlang der Normalenrichtung. In Abhängigkeit des gewählten Bezugspunkts ergeben sich verschiedene normale Massenströme m durch die Unstetigkeitsfläche. Die Flammengeschwindigkeitsbeziehungen anderer Autoren können leicht mit der vereinheitlichten Theorie verglichen werden, da die Lage der Unstetigkeitsfläche lediglich in I_X berücksichtigt wird. Das Integral I_X kann leicht für andere Lagen der Unstetigkeitsflächen berechnet werden. Es ist I_X der Abstand der Unstetigkeitsfläche von der Reaktionsfläche bei $m = 1$. Insbesondere wenn die Reaktions- mit der Unstetigkeitsfläche zusammenfällt, ist die Umrechnung einfach, da dann I_X verschwindet. Bemerkenswert in (5.52), ist das Auftreten des Krümmungsterms, der bereits im Marksteinmodell enthalten ist. Da I_X stets positiv ist, wirkt der Krümmungsterm, wie im Marksteinmodell vorgesehen, stets stabilisierend. Allerdings, ergibt sich ein zweiter $O(\text{Pe}^{-1})$ -Term in Beziehung (5.52), der entweder negativ oder positiv sein kann. Um die relative Bedeutung der Terme abzuschätzen, wird der Koeffizient $I_Y + S_{(1)}I_H - \rho_b I_X$ betrachtet. Es zeigt sich, dass dieser in einem weiten Parameterbereich, recht kleine Werte annimmt, so dass die Flammengeschwindigkeit häufig in stärkerem Maße von der Krümmung als von der Streckung abhängt. Dieses Ergebnis erscheint im Widerspruch zum

Ergebnis von Matalon & Matkowsky (1982) zu stehen, bei dem die Flammengeschwindigkeit von der Flammenstreckung alleine abhängt. Der scheinbare Unterschied ergibt sich nur aufgrund der verschiedenen Definitionen der Unstetigkeitsfläche. Die Modelle sind ansonsten identisch.

5.4. *Starke Variationen der Flammengeschwindigkeit: Das Sivashinsky-Modell*
 $(S = O(1))$

Unterscheidet sich die Lewis-Zahl um einen $O(1)$ -Betrag von Eins und ist die Zeldovich-Zahl gleichzeitig groß, dann ist die Sivashinsky-Zahl $S = \text{Pe}^{-1} \text{Ze} (1 - \text{Le}^{-1}) = O(1)$. Werden in der vereinheitlichten Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) Terme der Größenordnung $O(\text{Pe}^{-1})$ vernachlässigt ergibt sich

$$(\partial/\partial t + \chi)(1/m) - \text{Pe}^{-1} \frac{I_{\Delta}}{I_H} \nabla_{\perp}^2(1/m) + \text{Pe}^{-1} \frac{I_{\nabla^2}}{I_H} m (\nabla_{\perp}(1/m))^2 + \frac{1}{S I_H} m \ln m. \quad (5.53)$$

Hierin ist zu beachten, dass die tangentialen Diffusionsterme nicht gestrichen werden dürfen, da $\nabla_{\perp}^2(1/m) = O(\text{Pe})$ und $(\nabla_{\perp}(1/m))^2 = O(\text{Pe})$ für kurzwellige Störungen, so dass die Terme trotz des Faktors Pe^{-1} von $O(1)$ sind. Diese Gleichung bestimmt den Massenstrom m nur in führender Ordnung, da die Gleichung (5.30) (Gl. (5.30) gilt unverändert für kurzwellige Störungen), Korrekturen der Enthalpie zweiter Ordnung $H_{r(2)}$ liefert. Terme zweiter Ordnung liegen außerhalb der Genauigkeit der betrachteten Theorie und können nicht zur Berechnung einer Korrektur von (5.53) herangezogen werden. Sollte $H_{r(2)}$ berechnet werden, müsste die asymptotische Theorie bis zur Ordnung $O(\text{Pe}^{-2})$ betrachtet werden, was hier nicht erfolgt ist.

Werden kurzwellige Störungen nicht berücksichtigt so dass die Betrachtung sich auf Störungen mit einer $O(1)$ -Längenskala beschränkt, dann wird die tangential Diffusion in Gleichung (5.53) klein und es ergibt sich die zeitabhängige Flammengeschwindigkeitsbeziehung von Sivashinsky (1976)

$$(\partial/\partial t + \chi)(1/m) + \frac{1}{S I_H} m \ln m = 0. \quad (5.54)$$

Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.53) stellt eine Verallgemeinerung der Gleichung von Sivashinsky (1976) dar. Sie berücksichtigt zusätzlich die Kopplung benachbarter Flammenabschnitte, welche für die Dämpfung kurzwelliger Störungen der Flammenfront verantwortlich ist.

5.5. *Mittlere Variationen der Flammengeschwindigkeit* ($S = O(\text{Pe}^{-1/2})$)

Das Matalon-Matkowsky-Modell liefert eine algebraische Flammengeschwindigkeitsbeziehung wogegen das Sivashinsky-Modell eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit liefert. Im Matalon-Matkowsky-Modell ist die Flammengeschwindigkeit in der führenden Ordnung Eins, so dass die Zeitableitung vernachlässigbar klein wird. Bemerkenswert ist, dass Sivashinsky die Zeitableitung aufgrund von Stabilitätsbetrachtungen verworfen hat, da für $\text{Le} \neq 1$ gezeigt werden kann, die Flamme bezüglich von Störungen beliebiger Wellenlänge instabil ist. Für $\text{Le} = 1$ ist lediglich die ebene Lösung neutral stabil. Selbst wenn Terme höherer Ordnung betrachtet würden, kann man, nur in der Umgebung um $\text{Le} = 1$, erwarten brauchbare Ergebnisse zu finden, solange keine kurzwelligen Störungen berücksichtigt werden. Hier soll ein Fall betrachtet werden, der zwischen den Modellen von Sivashinsky sowie Matalon und Matkowsky liegt.

Für den Fall mittlerer Variationen der Flammengeschwindigkeit und gegen Eins strebende Lewis-Zahlen wird die Beziehung von Matalon & Matkowsky (1982) wiedergewonnen. Gleichzeitig bleibt die Zeitableitung und die Nichtlinearität aus Sivashinsky's Beziehung erhalten, ohne dass die Notwendigkeit erwächst $O(\text{Pe}^{-2})$ -Terme zu betrachten.

Die Größenordnung der Sivashinsky-Zahl wird jetzt gemäß $S = \text{Pe}^{-1} \text{Ze} (1 - \text{Le}^{-1}) = O(\text{Pe}^{-1/2})$ gewählt, das heißt $S = \text{Pe}^{-1/2} S_{(1/2)}$, wobei $S_{(1/2)}$ von der Größenordnung Eins ist. Die asymptotische Entwicklung erfolgt in Potenzen von $\text{Pe}^{-1/2}$,

$$m = m_{(0)} + \text{Pe}^{-1/2} m_{(1/2)} + \text{Pe}^{-1} m_{(1)} + \dots \quad (5.55)$$

Die Entwicklung der vereinheitlichten Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) liefert jetzt

$$m = 1 - \text{Pe}^{-1/2} S_{(1/2)} I_H \chi - \text{Pe}^{-1} \left(2c I_X + (I_Y - \rho_b I_X) \chi + (S_{(1/2)} I_H)^2 \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{I_\Delta}{I_H} \text{Pe}^{-1} \nabla_\perp^2 \chi + \frac{3}{2} \chi^2 \right) \right) + o(\text{Pe}^{-1}), \quad (5.56)$$

wobei der tangentielle Diffusionsterm $\text{Pe}^{-1} \nabla_\perp^2 \chi$ beibehalten wird, da er von $O(1)$ für kurzwellige Störungen ist. Offensichtlich besitzt diese Gleichung die wesentlichen Eigenschaften der zuvor betrachteten Modelle von Matalon und Matkowsky sowie Sivashinsky. Wird die Sivashinsky-Zahl $S_{(-1/2)}$ klein, so dass $S_{(1/2)} = O(\text{Pe}^{-1/2})$, dann wird der nichtlineare Term und die Zeitableitung vernachlässigbar. Gleichzeitig wird der $O(\text{Pe}^{-1/2})$ -Term $O(\text{Pe}^{-1})$. Es ergibt sich die Flammengeschwindigkeitsbeziehung des Matalon-Matkowsky-Modells (5.52). Werden kleine S in Sivashinsky's Modell (5.53) betrachtet, dann ergibt sich der $O(\text{Pe}^{-1/2})$ Term aus (5.56) sowie der $O(\text{Pe}^{-1})$ -Term, der I_H enthält. In Gleichung (5.56) ist sowohl die Zeitableitung als auch der Krümmungsterm enthalten. Im Gegensatz zu Gleichung (5.52) enthält die Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.56) die Zeitableitung, die für die zeitperiodische Instabilität verantwortlich ist. Schließlich bewirkt der nichtlineare Term $\sim \chi^2$ eine Symmetriebrechung, das heißt positive und negative Flammenstreckung haben unterschiedliche Wirkung auf die Flammengeschwindigkeit. Dies ist ein hinlänglich bekannte Eigenschaft. Im Einzelnen, ist die Krümmung der kalten "Kanten" bei zellularen Flammen, sehr viel größer als die Krümmung umgekehrten Vorzeichens in den heißen Zellzentren. Hierin zeigt sich die Symmetriebrechung deutlich. Der tangentielle Diffusionsterm $\nabla_\perp^2 \chi$ bewirkt die Kopplung benachbarter Flammenabschnitte.

Für eine Flamme mit $S = O(\text{Pe}^{-1/2})$, die mäßig stark gestreckt wird, so dass $\chi = \text{Pe}^{1/2} \chi_{(-1/2)}$, wobei $\chi_{(-1/2)} = O(1)$, geht die vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) in

$$\text{Pe}^{-1} S_{(1/2)} I_m m \nabla_\perp^2 (1/m) - (m)^2 \ln m = S_{(1/2)} I_H \chi_{(-1/2)} + o(1) \quad (5.57)$$

über. Hierin weicht m um einen $O(1)$ -Betrag von der laminaren adiabaten Flammengeschwindigkeit ab. Bei einer Beschränkung auf Flammenformen mit Längenabmessungen der Größenordnung Eins, so ergibt sich exakt die stationäre Beziehung aus Sivashinsky (1976). Sivashinsky liefert kein physikalisches Argument, weshalb die Zeitableitung vernachlässigt werden kann.

Ein anschauliches Beispiel, bei dem starke Flammenstreckung auftritt, ist eine Bunsenflamme wie sie beispielsweise in Abbildung 1 gezeigt ist. Aus einem Bunsenbrenner tritt das Gas mit einer Geschwindigkeit, die deutlich oberhalb der adiabaten Flammengeschwindigkeit liegt, aus. Die Flamme paßt sich hieran an, indem sie eine Kegelform ausbildet. Wird eine stabile Flamme mit einer geschlossenen Spitze vorausgesetzt, so ist die Flamme an der Spitze normal zur Strömung. Hier muss sich die Flamme mit einer Geschwindigkeit deutlich oberhalb der adiabaten Flammengeschwindigkeit ausbreiten. Die Flamme bewerkstelligt dies indem sie eine stark gekrümmte Form annimmt wie dies

in der Abbildung 1 deutlich zu erkennen ist. Die Flammenstreckung wird an der Spitze groß.

6. Stabilität stationär fortschreitender ebener Flammen

Sivashinsky verwarf die zeitabhängige Variante der Flammengeschwindigkeitsbeziehung in Sivashinsky (1976) aufgrund von Stabilitätsüberlegungen. Insbesondere ergibt sich eine kurzweilige zeitperiodische Instabilität immer dann, wenn sich die Lewis-Zahl von Eins unterscheidet. Aus den Stabilitätsuntersuchungen für Lewis-Zahlen nahe Eins in Pelce & Clavin (1982), Matalon (1983) und Matalon & Matkowsky (1984) ist bekannt, dass sich die Lewis-Zahl von Eins um wenigstens einen $O(1/Pe)$ -Betrag unterscheiden darf, ohne dass zeitperiodische Instabilitäten auftreten. Die vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) und die Gleichung (5.56) für mittlere Variationen der Flammengeschwindigkeit, bilden eine Brücke zwischen den Beziehungen für Lewis-Zahlen, die sich kaum oder deutlich von Eins unterscheiden. Es darf deshalb erwartet werden und wird tatsächlich gezeigt, dass die zeitperiodische Instabilität erst einsetzt, wenn sich die Lewis-Zahl hinreichend von Eins unterscheidet. Die Stabilitätsuntersuchung zeigt weiterhin, dass die tangentialen Diffusionsterme keine kurzweiligen Instabilitäten unterhalb einer Grenzwellenlänge erlauben.

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass für jeden beliebigen Parametersatz kurzweilige Störungen mit einer Wellenlänge, die unterhalb einer Grenzwellenlänge liegt, stabil sind. Außerdem soll gezeigt werden, dass eine ebene Flamme neben der langwelligen Darrieus-Landau-Instabilität keine andere Instabilität aufweist, sofern die Lewis-Zahl ungefähr Eins beträgt.

Betrachtet wird eine sich gleichförmig ausbreitende ebene Flamme. In einem bewegten kartesischen Koordinatensystem (y^1, y^2, y^3) , das mit der Flamme mitwandert, ruht die Flammenfläche bei $y^1 = 0$. Im Brenngasgemisch sind die Dichte ρ und die Diffusivität κ Eins. Im Rauchgas liegen ebenfalls konstante Stoffeigenschaften vor. Es gilt $\rho = \rho_b$ und $\kappa = \kappa_b$.

Die ebene Grundlösung, deren Stabilität untersucht werden soll lautet

$$m = v_f^1 = 1, \quad v_b = \frac{1}{\rho_b}, \quad p_b = 1 - \frac{1}{\rho_b}, \quad v_f^\alpha = v_b^\alpha = p_f = 0. \quad (6.1)$$

Es werden jetzt Störungen der ebenen Grundlösung betrachtet. Die Unstetigkeits- bzw. die Flammenfläche liege bei $y^1 = \varepsilon \phi(y^2, y^3, t)$. Hier bezeichnet $\varepsilon \ll 1$ einen infinitesimal kleinen Parameter, der somit sehr viel kleiner als alle Parameter des Problems ist. Aufgrund der Störung stellt sich eine schwache Strömung vor und hinter der Flamme ein.

$$m = 1 + \varepsilon m', \quad v_f^1 = 1 + \varepsilon v_f^{1'}, \quad v_b^1 = \frac{1}{\rho_b} + \varepsilon v_b^{1'}, \quad (6.2)$$

$$v_f^\alpha = \varepsilon v_f^{\alpha'}, \quad v_b^\alpha = \varepsilon v_b^{\alpha'}, \quad p_f = \varepsilon p_f', \quad p_b = 1 - \frac{1}{\rho_b} + \varepsilon p_b' \quad (6.3)$$

wobei die "gestrichenen" Variablen, Störungsgrößen bezeichnen. Diese gehorchen linearisierten Strömungsgleichungen und Sprungbedingungen. Obwohl die gestörte Flamme schwach von $y^1 = 0$ ausgelenkt wird, werden die Sprungbedingungen bei $y^1 = 0$ angewendet. Die Grundlösung muss hierfür in eine Taylorreihe um $y^1 = 0$ entwickelt werden.

In der Stabilitätsuntersuchung werden alle Größen mit Ausnahme von ε , als $O(1)$ aufgefasst.

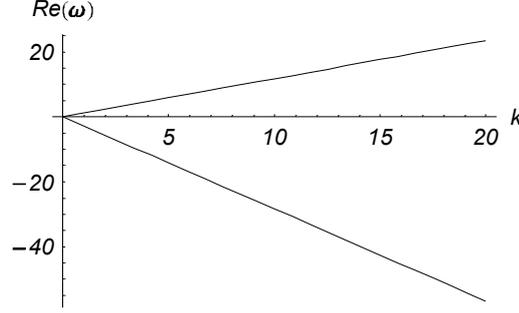


ABBILDUNG 6. Die Anfachungsrate ω als Funktion der Wellenzahl für das Darrieus-Landau-Modell ($T_b = 5$).

Gesucht werden Lösungen der linearisierten Gleichungen

$$\frac{\partial v^{i'}}{\partial y^i} = 0, \quad (6.4)$$

$$\rho \frac{\partial v^{1'}}{\partial t} + \frac{\partial v^{j'}}{\partial y^j} + \frac{\partial p'}{\partial y^1} - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \frac{\partial^2 v^{1'}}{(\partial y^j)^2} = 0, \quad (6.5)$$

$$\rho \frac{\partial v^{\alpha'}}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial y^\alpha} - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho \kappa \frac{\partial^2 v^{\alpha'}}{(\partial y^j)^2} = 0, \quad \alpha = 2, 3 \quad (6.6)$$

mit homogenen Randbedingungen für $y^1 \rightarrow \pm\infty$. Angesetzt wird der Lösungsansatz

$$\phi = a^\phi \exp(ik_2 y^2 + ik_3 y^3 + \omega t), \quad (6.7)$$

$$m' = a^m \exp(ik_2 y^2 + ik_3 y^3 + \omega t), \quad (6.8)$$

$$v^{1'} = a^1(y^1) \exp(ik_2 y^2 + ik_3 y^3 + \omega t), \quad (6.9)$$

$$v^{\alpha'} = a^\alpha(y^1) \exp(ik_2 y^2 + ik_3 y^3 + \omega t), \quad (6.10)$$

$$p' = a^p(y^1) \exp(ik_2 y^2 + ik_3 y^3 + \omega t), \quad (6.11)$$

wobei die $a^1(y^1)$, $a^\alpha(y^1)$ und $a^p(y^1)$ im Brenngas- und Rauchgasgebiet durch die linearisierten Sprungbedingungen verknüpft sind. Die Wellenzahlen in die y^2 - bzw. die y^3 -Richtung werden mit k_2 und k_3 bezeichnet. Es ist $k = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$ die effektive Wellenzahl. Die Anfachungsrate der Störung ist ω . Instabilität ebener Störungen ist gegeben, wenn $\text{Re}(\omega) > 0$.

Die Lösbarkeitsbedingung des sich ergebenden linearen homogenen Gleichungssystem, liefert die Dispersionsbeziehung $\omega = \omega(k)$. Die Darstellung dieser Dispersionsbeziehung hängt von der relativen Größe der Kennzahlen ab. In den nachfolgenden Kapiteln werden verschiedenen Fälle betrachtet. Es wird darauf hingewiesen, dass die Wirkung kurzwelliger Störungen nur in Kapitel 6.4 berücksichtigt wird.

6.1. Das Darrieus-Landau-Modell ($S = \text{Pe}^{-1} = 0$)

Gilt $S = \text{Pe}^{-1} = 0$, dann ergibt sich die Dispersionsbeziehung von Darrieus und Landau

$$k^2 (\rho_b - 1) + 2k\rho_b\omega + \rho_b (1 + \rho_b)\omega^2 = 0. \quad (6.12)$$

Abbildung 6 zeigt eine Stabilitätskarte der Darrieus-Landau-Instabilität. Im Diagramm wird die Anfachungsrate als Funktion der Wellenzahl k der Störung aufgetragen. Es ergeben sich zwei reelle Eigenwerte für jede Wellenzahl k . Im Falle ebener Störungen ($k = 0$) liegt Neutralstabilität, $\omega = 0$, vor. Andernfalls ist ein Eigenwert ω positiv

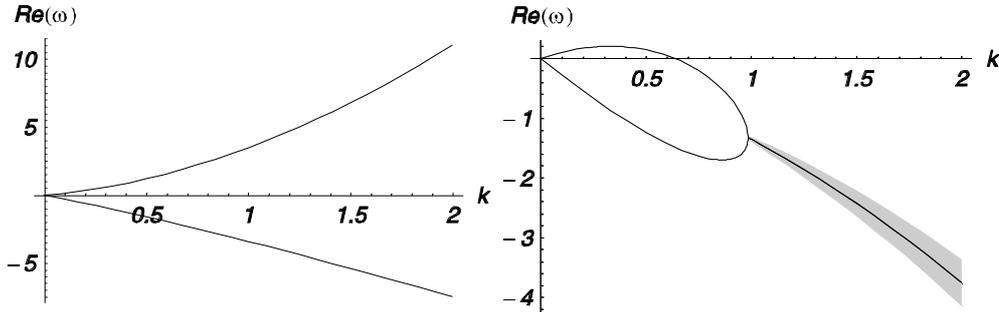


ABBILDUNG 7. Stabilitätskarte des Matalon-Matkovsky-Modells. Links: Fall b), destabilisierender Trend gegenüber der Darrieus-Landau-Instabilität ($Le = .5, Ze = 8, Pe = 100, Pr = .7, T_b = 5$). Rechts: Fall c), Dämpfung der Darrieus-Landau-Instabilität oberhalb einer Grenzwellenzahl und gedämpfte zeitperiodische Lösungen. Die Frequenz $Im(\omega)$ der Schwingung ist proportional der Breite der schattierten Fläche ($Le = .62, Ze = 8, Pe = 100, Pr = 0.7, T_b = 5$)

und der andere negativ. Instabilität liegt für positive ω vor. Es zeigt sich, dass ω mit steigenden Wellenzahlen k , das heißt sinkenden Wellenlängen, anwächst. Ebene Flammen sind somit instabil gegenüber von Störungen jeglicher Wellenlänge. Dieses Ergebnis steht im Widerspruch zu der physikalischen Beobachtung, wonach kurzweilige Auffaltungen der Flamme unterhalb einer Grenzwellenlänge nicht auftreten können. Tatsächlich, wird dieser Sachverhalt in Kapitel 6.4 bestätigt.

6.2. Das Matalon-Matkovsky-Modell ($S = O(Pe^{-1})$)

Gilt für die Sivashinsky-Zahl $S = O(Pe^{-1})$ und werden die ersten beiden Terme einer asymptotischen Reihenentwicklung nach reziproken Potenzen der Peclet-Zahl ausgewertet, ergibt sich die Dispersionsgleichung von Matalon & Matkovsky (1982)

$$k^2 (\rho_b - 1) + 2k\rho_b\omega + \rho_b (1 + \rho_b)\omega^2 - 2k^2 (S_{(1)}I_H + I_Y - I_X (1 + \rho_b)) (k + \rho_b\omega) = 0 \tag{6.13}$$

Abbildung 7 zeigt Stabilitätskarten für Flammen mit Lewis-Zahlen nahe Eins. Die Breite der schattierten Fläche hinter der Kurve im rechten Diagramm veranschaulicht die Frequenz zeitperiodischer Lösungen. Wie zuvor bei der Darrieus-Landau-Instabilität, gibt es zwei Eigenwerte für jede Wellenzahl k . Gezeigt werden die Ergebnisse für drei unterschiedliche Fälle.

a) Ist $S_{(1)}I_H + I_Y - I_X (1 + \rho_b) = 0$, ergibt sich exakt die Dispersionsbeziehung von Darrieus-Landau. Diesem Fall können Lewis-Zahlen schwach unterhalb Eins zugeordnet werden.

b) Ist $S_{(1)}I_H + I_Y - I_X (1 + \rho_b) > 0$, dann wird die Darrieus-Landau-Instabilität verstärkt, so dass keine Grenzwellenzahl für die Anfachung kurzweiliger Störungen existiert. Diesem Fall entsprechen Lewis-Zahlen unterhalb einer kritischen Lewis-Zahl, die kleiner als Eins ist.

c) Gilt $S_{(1)}I_H + I_Y - I_X (1 + \rho_b) < 0$, wird die Darrieus-Landau-Instabilität abgeschwächt und ein stabilisierender Trend beobachtet. Allerdings stellt die Theorie nur eine schwache Korrektur der Dispersionsbeziehung von Darrieus-Landau dar. Wird das Ergebnis trotzdem für große k angewendet, dann wird die Anfachungsrate ω negativ, so dass sich eine Grenzwellenzahl ergibt, oberhalb der keine Instabilität vorliegt. Für noch größere k ergeben sich gedämpfte zeitperiodische Lösungen. Angefachte zeitperiodische Lösungen treten im Matalon und Matkovsky Modell nicht auf.

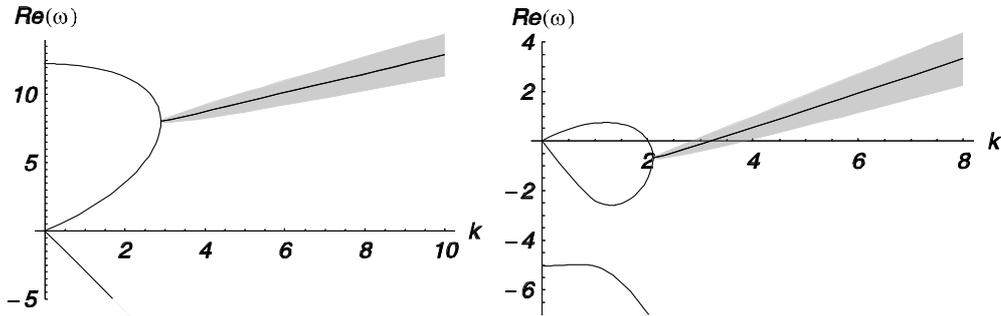


ABBILDUNG 8. Stabilitätskarte des Sivashinsky-Modells. Die Frequenz $\text{Im}(\omega)$ der Schwingungen zeitperiodischer Lösungen ist proportional zur Breite der schattierten Fläche. Links: Fall b), Destabilisierender Trend gegenüber der Darrieus-Landau-Instabilität und zeitperiodische Instabilität für hohe Wellenzahlen ($Le = .3$, $Ze = 8$, $Pe = 100$, $Pr = .7$, $T_b = 5$). Rechts: Fall c), Grenzwellenzahl für die Darrieus-Landau Instabilität und zeitperiodische Instabilität für hohe Wellenzahlen ($Le = 4.$, $Ze = 8$, $Pe = 10$, $Pr = 0.7$, $T_b = 5$)

6.3. Das Sivashinsky-Modell ($S = O(1)$)

Gilt für die Sivashinsky-Zahl $S = O(1)$ und $Pe^{-1} = 0$, dann ergibt sich die Dispersionsbeziehung von Sivashinsky (1976).

$$(1 - S I_H \omega) (k^2 (\rho_b - 1) + 2k\rho_b\omega + \rho_b (1 + \rho_b) \omega^2) - 2k^2 S I_H (k + \rho_b\omega) = 0 \quad (6.14)$$

Abbildung 8 zeigt zugehörige Stabilitätskarten.

Gezeigt werden Ergebnisse für drei Fälle.

a) Für $S = 0$, bzw. $Le = 1$, folgt die Dispersionsbeziehung von Darrieus und Landau.

b) Ist $S < 0$ und somit die Lewis-Zahl kleiner als Eins, ergibt sich wieder ein destabilisierender Trend, so dass Instabilität gegenüber Störungen beliebiger Wellenzahlen besteht. Für langwellige Störungen, ergibt sich ein positiver reeller Eigenwert, der somit einer zellularen Instabilität zugeordnet werden kann. Für große Wellenzahlen k ergibt sich ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte mit positiver Anfachungsrate und somit eine zeitperiodische Flamme.

c) Für $S > 0$, und somit Lewis-Zahlen oberhalb Eins, ergibt sich im Vergleich zum Darrieus-Landau-Ergebnis ein stabilisierender Trend. Oberhalb einer $O(1)$ -Grenzwellenzahl, wird die Darrieus-Landau-Instabilität gedämpft, so dass keine zellularen Instabilitäten auftreten und ω negativ wird. Für noch höhere Wellenzahlen vereinigen sich die beiden Eigenwerte, die dem Ursprung ($\omega = k = 0$) des Diagramms entspringen und bilden anschließend ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte.

Die Anfachungsrate ω der komplexen Eigenwerte nimmt zunächst mit wachsenden k ab. Für nochmals höhere k beginnt die Anfachungsrate zu wachsen und wird schließlich jenseits einer kritische Wellenzahl k_c positiv. Mit wachsenden Wellenzahlen k steigt auch die Frequenz der Schwingungen schnell an. Die Lösungen für hohe Wellenzahlen entsprechen instabilen zeitperiodischen Flammen, die mit hoher Frequenz oszillieren.

Das Verhalten für kleine Wellenzahlen (große Wellenlängen) ist in Einklang mit den physikalischen Beobachtungen, es ergibt sich eine Grenzwellenzahl für die Darrieus-Landau-Instabilität. Das Verhalten für hohe Wellenzahlen ist unphysikalisch insofern als die Existenz einer Grenzwellenzahl für zeitperiodische Instabilitäten erwartet wird. Tatsächlich wird diese später in Kapitel 6.4 nachgewiesen.

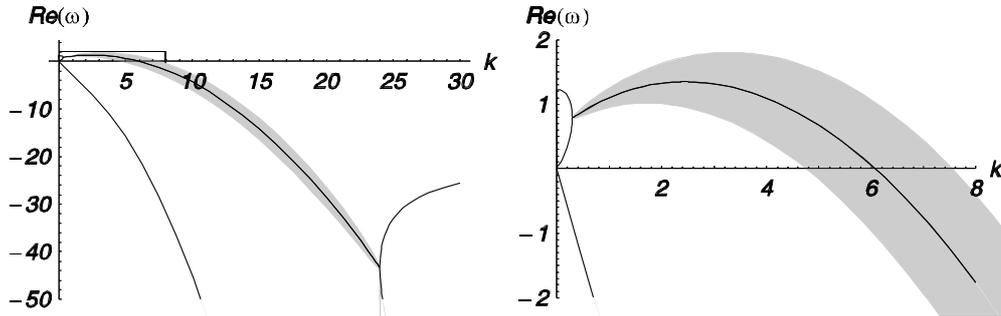


ABBILDUNG 9. Stabilitätskarte des vereinheitlichten Modells für Fall a) d.h. kleine Le . Die rechte Abbildung ist eine vergrößerte Darstellung des eingerahmten Bereichs in der linken Abbildung. Es wird gezeigt, dass die zeitperiodische Eigenlösung, oberhalb einer Grenzwellenzahl negative Anfachungsraten aufweist, so dass bei hohen Wellenzahlen Stabilität vorliegt ($Le = 0.3$, $Ze = 8$, $Pe = 10$, $Pr = 0.7$, $T_b = 5$).

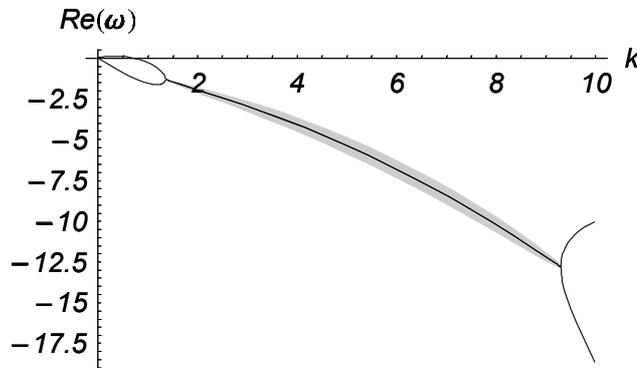


ABBILDUNG 10. Stabilitätskarte des vereinheitlichten Modells für Fall b), d.h. mittlere Le . Es wird die Darrieus-Landau Instabilität und deren obere Grenzwellenzahl gezeigt. Die zeitperiodischen Lösungen zeigen stabiles Verhalten ($Le = 2$, $Ze = 8$, $Pe = 10$, $Pr = 0.7$, $T_b = 2.5$).

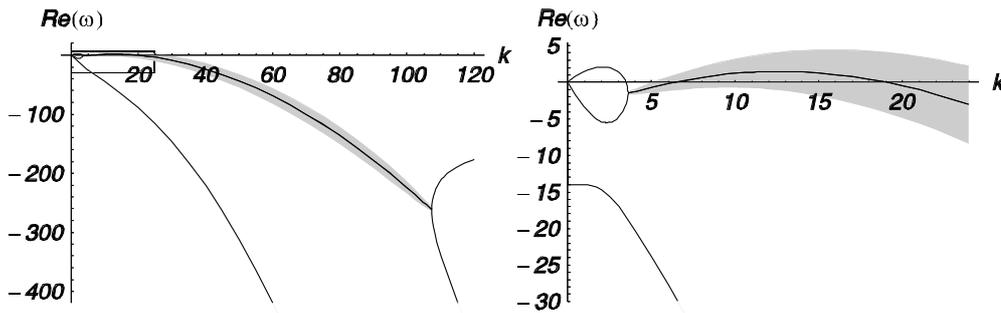


ABBILDUNG 11. Stabilitätskarte des vereinheitlichten Modells für den Fall c), d.h. große Le . Die rechte Abbildung ist eine vergrößerte Darstellung des eingerahmten Bereichs in der linken Abbildung. Gezeigt wird die Stabilisierung der Darrieus-Landau- und der zeitperiodischen Lösungen für hohe Wellenzahlen ($Le = 4.$, $Ze = 35$, $Pe = 100$, $Pr = 0.7$, $T_b = 9$).

6.4. Das vereinheitlichte Modell

Wird die vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) betrachtet und alle Parameter als $O(1)$ -Größen aufgefasst, ergibt sich die Dispersionsbeziehung für das

vereinheitlichte Modell

$$k^2 \left(1 + 2\rho_b \kappa_b k \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} - \sqrt{1 + 4\rho_b \kappa_b \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \left(\rho_b \kappa_b k^2 \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} + \rho_b \omega \right)} \right) D_1 - (k - \rho_b \omega) D_2 = 0, \quad (6.15)$$

worin

$$D_1 = k^2 \left(S I_H + \frac{I_X - I_Y + I_X \rho_b}{\text{Pe}} \right) \left(1 + \rho_b + \frac{k}{\text{Pe}} (2\rho_b \kappa_b \text{Pr} - (I_\sigma + 2\text{Pr}) \rho_b) \right) \quad (6.16)$$

$$+ \left(1 + S \left(I_H \omega + \frac{I_m k^2}{\text{Pe}} \right) \right) \left(2\rho_b \omega + k \left(\rho_b - 1 + 2(\rho_b \kappa_b - 1) \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho_b \omega \right) \right),$$

$$D_2 = k^2 \left(S I_H + \frac{I_X - I_Y + I_X \rho_b}{\text{Pe}} \right) \left((2(\rho_b \omega + k) + \frac{k^2}{\text{Pe}} (4\text{Pr} \rho_b \kappa_b - I_\sigma \rho_b)) \right) \quad (6.17)$$

$$+ \left(1 + S \left(I_H \omega + \frac{I_m k^2}{\text{Pe}} \right) \right) \left(2k \rho_b \omega + \rho_b (1 + \rho_b) \omega^2 + k^2 \left(\rho_b - 1 + 4\rho_b \kappa_b \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \rho_b \omega \right) \right).$$

Zunächst sei festgestellt, dass die beiden Ausdrücke vor D_1 und D_2 in (6.15), für $k = \rho_b \omega$, gleichzeitig verschwinden. Somit ist $\omega = k/\rho_b > 0$ eine Lösung der Dispersionsbeziehung. Es scheint Instabilität der ebenen Grundlösung bezüglich von Störungen beliebige Wellenzahl k vorzuliegen. Wird jedoch der Fall $k = \rho_b \omega$ eigenständig untersucht, zeigt sich, dass hierfür die Lösungen der Gleichungen im Rauchgasgebiet entartet sind. Es liegt hier keine zusätzliche Instabilität vor, die nicht von der nachfolgenden Untersuchung erfasst ist.

Die Abbildungen 9-11 zeigen Stabilitätskarten für drei unterschiedliche Fälle.

a) Ist $S < S_c < 0$, ergibt sich eine Verstärkung der Darrieus-Landau-Instabilität. Die ebene Grundlösung ist zusätzlich instabil gegenüber langwellige stationären Störungen, wobei die ebene Störung inbegriffen ist. Dieser Lösungsast vereint sich mit dem Darrieus-Landau-Ast und es entspringt ein instabiler zeitperiodischer Lösungsast. Bei hohen Wellenzahlen wird $\text{Re}(\omega) < 0$, so dass im weiteren Verlauf ein stabiler Lösungsast vorliegt. Für noch höhere Wellenzahlen werden die konjugiert komplex Eigenwerte ω des zeitperiodischen Lösungsasts wieder reell und es ergeben sich zwei stabile reelle Lösungsäste. Das Verschwinden der zeitperiodischen Instabilität ist alleine dem tangentialen Diffusionsterm zuzuschreiben. Dieser Term zwingt benachbarte Flammenabschnitte mit ähnlichen Geschwindigkeiten fortzuschreiten. Dies unterbindet insbesondere, dass sich benachbarte Flammenabschnitte mit hoher Frequenz relativ zueinander bewegen. Kurzwellige Störungen werden gedämpft. Ohne den tangentialen Diffusionsterm wären die zeitperiodischen Lösungen auch bei hohen Wellenzahlen instabil. Es gäbe keine Grenzwellenzahl für zeitperiodische Lösungen. Somit würden auch die beiden stabilen stationären Lösungsäste mit hoher Wellenzahl nicht erscheinen.

b) Ist $S_c < S < S_o$, wobei $S_o > 0$, dann verschieben sich die beiden Darrieus-Landau-Lösungsäste in Richtung kleinerer Anfachungsraten. Zusätzlich ergibt sich ein neuer reeller Ast mit stets negativen ω . Die Anfachungsrate der Darrieus-Landau-Instabilität wird oberhalb einer Grenzwellenzahl negativ. Bei einer Wellenzahlen oberhalb dieser Grenzwellenzahl vereint sich der stabile und instabile Ast der Darrieus-Landau-Instabilität. Es entsteht ein Lösungsast mit konjugiert komplexer Eigenwerten ω . Auf dem zeitperiodischen Ast liegt Stabilität der Grundlösung vor. Für nochmals höhere Wellenzahlen teilt sich der zeitperiodische Lösungsast in zwei reelle stabile Lösungsäste auf. Ohne den tangentialen Diffusionsterm würde der zeitperiodische Ast einem konstanten negativen Wert ω für $k \rightarrow \infty$ entgegenstreben. Die beiden reellen Lösungsäste gäbe es nicht. Schließlich wäre S_o kleiner.

c) Im Falle von $S > S_o > 0$, ergibt sich ein ähnliches Verhalten wie für $S_c < S < S_o$. Allerdings wird die Anfachungsrate des zeitperiodischen Lösungsastes jetzt positive in einem Fenster von Wellenzahlen k . Die ebene Lösung ist jetzt instabil hinsichtlich kleiner zeitperiodischer Störungen. Ohne den tangentialen Diffusionsterm würde die Begrenzung des Wellenzahlenfensters hinsichtlich hoher k entfallen. Die Flamme wäre dann instabil gegen kurzweilige Störungen mit $k \rightarrow \infty$. Dies würde eine inakzeptable Eigenschaft des Modells darstellen.

7. Zusammenfassung

Darrieus und Landau haben ein Modell vorgeschlagen bei dem eine Vormischflamme als eine gasdynamische Unstetigkeit aufgefasst wird. Die Unstetigkeitsfläche breitet sich mit einer konstanten Geschwindigkeit aus. Der Massenstrom und der Impuls sind an der Unstetigkeitsfläche stetig. Es wurde gezeigt, dass im Darrieus-Landau-Modell Flammen instabil gegen Störungen jeglicher Wellenlänge sind. Seither wurden viele Anstrengungen, sowohl auf phänomenologischer als auch auf analytischen Grundlage, unternommen, um störungstheoretische Korrekturen dieses Modells abzuleiten. Diese sollten zu einem Modell führen, das reale Flammen besser beschreibt. Bei den analytischen Arbeiten wurden zwei ausgezeichnete Grenzfälle erkannt. Dies sind Lewis-Zahlen nahe Eins und solche die sich von Eins deutlich unterscheiden. Ein Ansatz, der beide Grenzfälle gleichzeitig abdeckt, wurde bislang nicht vorgestellt. Außerdem gab es bislang keine Theorie, welche die obere Grenzwellenzahl der zeitperiodischen Instabilität für Lewis-Zahlen größer Eins in Gegenwart von einer deutlichen thermischen Expansion beschreibt.

In dieser Arbeit wird die Tensorrechnung und ein spezielles Koordinatensystem benutzt, um ein Modell abzuleiten, welches beide Grenzfälle abdeckt und zusätzlich die obere Grenzwellenzahl der zeitperiodischen Instabilität liefert. Das Modell beinhaltet Diffusionseffekte entlang der Flamme, die in früheren Theorien vernachlässigt wurde.

Das vereinheitlichte Modell besteht aus den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen für das Brenn- und Rauchgas, den Darrieus-Landau-Sprungbedingungen inklusive einer störungstheoretischen Korrektur (4.47), (4.48) sowie einer neuen Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51), die einerseits für $Le \approx 1$ und andererseits für $Le - 1 = O(1)$ gilt. Die sich ergebende Darstellung der Sprungbedingungen hängt von der genauen Lage der Unstetigkeitsfläche innerhalb der Flammenstruktur ab. Wird die Flammenposition mittels eines Dichteintegrals (4.39) festgelegt, so ergibt sich ein stetiger Massenstrom über die Unstetigkeitsfläche hinweg. Dies ist eine wesentliche Eigenschaft eines Modells, das in numerischen Simulationen eingesetzt werden soll. Es muss im Verlauf einer Rechnung der Strömung weder Masse hinzugefügt noch entnommen werden, so dass die Massenerhaltung sichergestellt werden kann. Die Stetigkeit des Massenstrom ist verantwortlich dafür, dass sich die Darstellung der Sprungbedingungen wesentlich vereinfacht. Kompressibilitätseffekte innerhalb der Flammenstruktur bewirken einen zusätzlichen Drucksprung, welcher der Krümmung der Flamme proportional ist und somit als eine Oberflächenspannung interpretiert werden könnte. Der Term (4.53) wird jedoch als Oberflächenkompression bezeichnet, um einerseits das umgekehrte Vorzeichen des Terms hervorzuheben und ihn andererseits von der gewöhnlichen Oberflächenspannung deutlich zu unterscheiden. Variationen der Oberflächenkompression entlang der Flamme bewirken zusätzliche Tangentialspannungen in der äußeren Strömung.

Die vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, die sowohl eine Zeitableitung als auch einen tangentialen Diffusionsterm enthält. Die Flamme benötigt somit eine charakteristische Zeit, um sich an neue Verhältnisse anzupassen. Benachbarte Flammenabschnitte können sich nicht mit

unkorrelierten Geschwindigkeiten ausbreiten. Die Verständigung erfolgt durch den tangentialen Diffusionsterm. Werden die ausgezeichneten Grenzfälle aus Sivashinsky (1976) und Matalon & Matkowsky (1982) betrachtet, so ergeben sich im Grenzübergang auch die entsprechenden Flammengeschwindigkeitsbeziehungen, sofern keine kurzwelligen Störungen betrachtet werden. Eine neuer ausgezeichnete Fall wird vorgestellt, der zwischen den Annahmen von Sivashinsky (1976) und Matalon & Matkowsky (1982) liegt.

Die Sprungbedingungen (4.47), (4.48) gelten uneingeschränkt für beliebige Reaktionskinetik. Die Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) gilt für Flammen mit dünnen Reaktionszonen.

Eine lineare Stabilitätsuntersuchung ebener Flammen in gleichförmiger Strömung liefert die früheren Ergebnisse von Pelce & Clavin (1982) und Matalon & Matkowsky (1984) für Flammen mit Lewis-Zahlen nahe Eins. Für $Le - 1 = O(1)$ wird erstmals die obere Grenzwellenzahl der zeitperiodischen Instabilität gefunden.

Vorgeschlagen wird eine einfache Methode, mit deren Hilfe die Unstetigkeitsfläche und die Flammengeschwindigkeit aus experimentellen Daten bestimmt werden kann. Des Weiteren wird ein neuer Ausdruck zur Berechnung der Flammenstreckung vorgestellt. Es muss lediglich die Divergenz eines einfach definierbaren Geschwindigkeitsfelds berechnet werden.

Das vereinheitlichte Modell wird in einer von den Koordinaten unabhängigen Darstellung präsentiert. Diese ist insbesondere für numerische Berechnungen auf der Basis der Levelset-Methode (vgl. Sethian (1996) und Osher & Fedkiw (2001)) oder der G-Gleichung geeignet. Die Levelset-Methode beruht auf einer partielle Differentialgleichung für ein Skalar, welches den minimalen Abstand zur Flamme angibt. Die G-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung für eine Phasenvariable, die den Zustand der Mischung, also verbrannt oder unverbrannt, angibt. Bei beiden Methoden muss die Geschwindigkeit der sich ausbreitenden Fläche angegeben werden. Dies wird von unserem Modell geleistet. Beide Methoden verlangen die Stetigkeit des Massenstroms über die Flamme hinweg. Dies wird durch unsere strömungsmechanische Definition der Lage der Unstetigkeitsfläche gewährleistet.

Das vereinheitlichte Modell soll im Sonderforschungsbereich 606 eingesetzt werden, um zeitperiodisch gestörte Flammen zu modellieren. In zukünftigen Forschungsarbeiten soll das Modell bei der Direkten Numerischen Simulation turbulenter Vormischflammen eingesetzt werden. Im vereinheitlichten Modell treten keine Reaktionsgleichungen auf. Im Vergleich zu Simulationen nichtreaktiver Strömungen ergibt sich nur ein unwesentlich höher Aufwand.

REFERENCES

- ABDEL-GAYED, R. G., AL-KHISHALI, K. J. & BRADLEY, D. 1984a Turbulent burning velocity and flame straining in explosions. *Proc. Roy. Soc. of London A* **A391**, 393–414.
- ABDEL-GAYED, R. G., BRADLEY, D., HAMID, M. N. & LAWES, M. 1984b Lewis number effects on turbulent burning velocity. *Twentieth Symposium (Int.) on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburgh, PA* pp. 505–512.
- ARIS, R. 1989 *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. New York: Dover.
- BARENBLATT, G. I., ZELDOVICH, Y. B. & ISTRATOV, A. G. 1962 On diffusional thermal instability of laminar flame. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **2**, 21–26.
- CLAVIN, P. & JOULIN, G. 1983 Premixed flames in large scale and high intensity turbulent flow. *J. Physique Lettres* **44**, L-1–12.
- CLAVIN, P. & WILLIAMS, F. A. 1982 Effects of molecular diffusion and of thermal expansion on the structure and dynamics of premixed flames in turbulent flows of large scales and low intensity. *J. Fluid. Mech.* **116**, 251–282.

- DARRIEUS, G. 1938 und 1945 Propagation d'un front de flamme. Vorgestellt auf: Le Congrès de Mécanique Appliquée, Paris.
- ECKHAUS, W. 1961 Theory of flame-front stability. *J. Fluid Mech.* **10**, 80–100.
- GIBBS, J. 1879 Abstract of "On the equilibrium of heterogeneous substances". *Amer. J. Sci., ser. 3* **18**, 277–293 and 371–387
- GIBBS, J. W. 1876, and 1878 On the equilibrium of heterogeneous substances. *Trans. Conn. Acad.* **3**, 108–248 and 343–524.
- KARLOVITZ, B., DENNISTON, D. W., KNAPSCHAEFER, H. D. & WELLS, F. E. 1953 Studies on turbulent flames. *Fourth Symposium (Int.) on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburgh, PA* pp. 613–620.
- KLIMENKO, A. Y. & CLASS, A. G. 2000a On premixed flames as gasdynamic discontinuities: A simple approach to derive their propagation speed. *Combust. Sci. and Tech.* **160**, 25–37.
- KLIMENKO, A. Y. & CLASS, A. G. 2000b Propagation speed of stretched premixed flames with multi-step reaction mechanisms. *Tech. Rep.* FZKA 6473. Forschungszentrum Karlsruhe, Germany.
- KLIMENKO, A. Y., CLASS, A. G. & O'GORMAN, S. 2001 Near-equidiffusion disturbed premixed flames with wider reaction zones. *Combust. Theory and Mod.* Submitted.
- LANDAU, L. D. 1944 On the theory of slow combustion. *Acta Physiocochem URSS* **19**, 77–85.
- MARKSTEIN, G. H. 1951 Experimental and theoretical studies of flame front stability. *J. Aero. Sci.* **18**, 199–209.
- MARKSTEIN, G. H., ed. 1964 *Nonsteady flame propagation*. New York: Pergamon Press.
- MATALON, M. 1983 On flame stretch. *Combust. Sci. and Tech.* **31**, 169–181.
- MATALON, M. & MATKOWSKY, B. J. 1982 Flames as gasdynamic discontinuities. *J. Fluid Mech.* **124**, 239–259.
- MATALON, M. & MATKOWSKY, B. J. 1984 On the stability of plane and curved flames. *SIAM J. Appl. Math.* **44**, 327–343.
- MATKOWSKY, B. J. & SIVASHINSKY, G. I. 1979 An asymptotic derivation of two models in flame theory associated with the constant density approximation. *SIAM J. Appl. Math.* **37**, 686–699.
- OSHER, S. & FEDKIW, R. 2001 *Level Sets and Dynamic Implicit Surfaces*. New York: Springer, in press.
- PELCE, P. & CLAVIN, P. 1982 Influence of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames. *J. Fluid Mech.* **124**, 219–237.
- SEARBY, G. & QUINARD, J. 1990 Direct and indirect measurements of markstein numbers of premixed flames. *Combust. and Flame* **82** (3), 298–311.
- SETHIAN, J. A. 1996 *Level Set Methods*. Cambridge, UY: Cambridge University Press.
- SIVASHINSKY, G. I. 1976 On a distorted flame front as a hydrodynamic discontinuity. *Acta Astronautica* **3**, 889–918.
- SIVASHINSKY, G. I. 1977 Diffusional-thermal theory of cellular flames. *Combust. Sci. and Tech.* **15**, 137–146.
- WILLIAMS, F. A. 1985 *Combustion Theory*, 2nd edn. Reading, MA: Addison-Wesley.

Anhang A. Das Koordinatensystem

Das in der vereinheitlichten Theorie benutzte Koordinatensystem wird so gewählt, dass sich eine möglichst einfache mathematische Behandlung der Gleichungen ergibt. Weiterhin sollen die gewonnenen Ergebnisse einer physikalischen Interpretation zugänglich werden. In der Untersuchung wird ein infinitesimal kleines Element einer Unstetigkeitsfläche betrachtet. Dessen Entwicklung wird für eine infinitesimal kurze Zeitspanne verfolgt. Das verwendete Koordinatensystem soll nicht in numerischen Rechnungen eingesetzt werden und muss somit auch kein numerisches Gitter hoher Güte liefern. Dennoch kann sich die explizite Konstruktion unseres Koordinatensystems als nützlich erweisen, um Modellrechnungen mit physikalischen Meßwerten zu vergleichen. Es ist hierbei zu beachten, dass sich das Koordinatensystem bewegt während die Flamme fortschreitet. Die unten

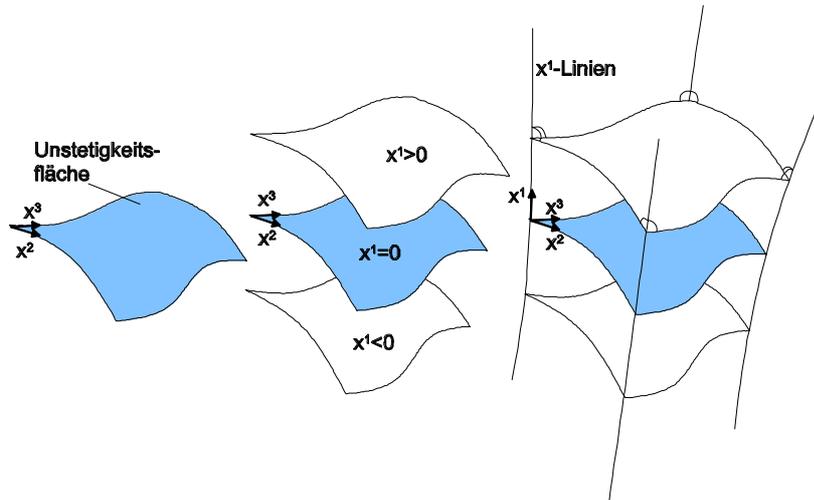


ABBILDUNG 12. Schritte bei der Konstruktion des krummlinieigen Koordinatensystems: (Links) Auswahl der Unstetigkeitsfläche als x^1 -Koordinatenfläche und Konstruktion eines Oberflächenkoordinatensystems. (Mitte) Konstruktion weiterer x^1 -Koordinatenflächen mit konstantem Abstand zur Unstetigkeitsfläche. (Rechts) Konstruktion der x^1 -Koordinatenlinien

beschriebenen Konstruktionsschritte müssen somit für jeden betrachteten Zeitpunkt wiederholt werden.

Abbildung 12 zeigt die wesentlichen Schritte schematisch.

Als erstes, wird die Unstetigkeitsfläche als eine Oberfläche $x^1 = 0$ aufgefasst. Es wird angenommen, dass diese Fläche glatt sei und keine Singularitäten oder Überschneidungen besitze. Als nächstes wird eine Schar Flächen $x^1 = \text{const}$ generiert, so dass jede Fläche $x^1 = \text{const}$ einen konstanten minimalen Abstand zur Unstetigkeitsfläche $x^1 = 0$ aufweist. Dies kann stets ohne Einschränkung der Allgemeinheit erfolgen. Hierbei ist zu beachten, dass die Flächen $x^1 = \text{const}$ weit ab der Unstetigkeitsfläche Knicke aufweisen können. Diese Knicke sind unproblematisch, da hier nur eine kleine Umgebung der Unstetigkeitsfläche interessiert.

Jetzt wird jeder Fläche $x^1 = \text{const}$ ein Wert zugewiesen, der dem vorzeichenbehafteten Abstand von der Unstetigkeitsfläche entspricht. Negative (positive) Werte bezeichnen Oberflächen im Brenngasgemisch (Rauchgasgemisch). Diese Vereinbarung stellt sicher, dass für die Komponente g^{11} des metrischen Tensors $g^{11} = 1$ gilt. Als nächster Schritt wird auf der Unstetigkeitsfläche ein beliebiges Koordinatensystem bestehend aus den Koordinatenlinien $x^2 = \text{const}$ und $x^3 = \text{const}$ gebildet. Dieses Koordinatensystem, das vollständig in der Fläche $x^1 = 0$ liegt, heißt auch intrinsisches Koordinatensystem. Wieder gelten keine Einschränkungen. Im betrachteten Gebiet dürfen lediglich keine singulären Punkte des intrinsischen Koordinatensystems vorliegen. Die Koordinatenpunkte auf der Unstetigkeitsfläche sollen sich jetzt entlang der Oberfläche bewegen. Wird die Entwicklung der Oberfläche über eine längere Zeit verfolgt, können sich starke Verformungen der Koordinatenlinien $x^2 = \text{const}$ und $x^3 = \text{const}$ ergeben. Dies stellt insofern kein Problem dar als nur infinitesimal kurze Zeitspannen betrachtet werden. Sollte das Koordinatensystem in numerischen Rechnungen eingesetzt werden, müsste das Oberflächenkoordinatensystem immer wieder von neuem erzeugt werden, um zu starke Deformation des vom Koordinatengitters zu vermeiden.

Es kann eine beliebige Geschwindigkeit des intrinsischen Koordinatensystems, das heißt der Koordinatenlinien $x^2 = \text{const}$ und $x^3 = \text{const}$, in der Unstetigkeitsfläche gewählt wer-

den. Da asymptotische Methoden Anwendung finden, erfolgt dies für jede Ordnung der Untersuchung von Neuem. In der führenden Ordnung werden die Koordinatenlinien mit der Tangentialgeschwindigkeit der Strömung entlang der Fläche transportiert. Somit ist die Rate, mit der sich die Größe des von den Koordinatenlinien x^2 und x^3 aufgespannte Flächenelement ändert, gleich der Flammenstreckung χ . Diese wird an der Unstetigkeitsfläche gemessen. Bei den höheren Ordnungen der asymptotischen Entwicklung dürfen beliebige Geschwindigkeiten der Koordinatenlinien $x^2 = \text{const}$ und $x^3 = \text{const}$ herangezogen werden. Bei der Herleitung der Flammengeschwindigkeitsbeziehung für kurzwellige Störungen wird von dieser Freiheit Gebrauch gemacht.

Schließlich werden x^1 -Koordinatenlinien erzeugt. Diese stehen senkrecht auf allen Flächen mit $x^1 = \text{const}$. Diese Operation ist eindeutig. Es besteht jetzt im dreidimensionalen Raum ein Koordinatensystem für dessen metrischen Tensor gilt $g^{11} = 1$ und $g^{12} = g^{13} = g^{21} = g^{31} = 0$. Dieses Koordinatensystem ist orthogonal bezüglich seiner Normalenrichtung.

Anhang B. Der Unterschied zwischen physikalischem Meßwerten und Modelldaten

In diesem Anhang werden Formeln bereitgestellt, die zum Vergleich des Modells mit physikalischen Messwerten nützlich sind. Ein Vergleich ist nicht trivial, da die sich Messwerte aus einem Experiment bzw. die Simulationsdaten aus einer numerischen Rechnung im Raum stetig ändern, wogegen im Modell unstetige Daten vorliegen.

Zunächst muss aus den stetigen Meßwerten die genaue Lage der Unstetigkeitsfläche bestimmt werden. Erst danach kann die Geschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche und der Massenstrom durch die Fläche bestimmt werden. Zusätzlich erschwerend wird festgestellt, dass der Massenstrom durch die Unstetigkeitsfläche nicht mit dem physikalischen Massenstrom an der selben Stelle übereinstimmt. Verantwortlich hierfür sind Dichteunterschiede zwischen der kontinuierlichen inneren Flammenstruktur und dem "unstetigen" Modell.

Um die genaue Lage der Unstetigkeitsfläche bestimmen zu können, wird zunächst die Normale auf der Flamme durch Gradienten des Temperaturfelds, $\mathbf{n} = \nabla T / |\nabla T|$, definiert. Anschließend kann das Integral $I_R = \int_{x_f^1}^{x_b^1} (R - \rho) dx^1$ entlang der Normalenrichtung vom Brenngasgemisch bis zum Rauchgas berechnet werden. Die Integrationsgrenzen x_f^1 und x_b^1 müssen hinreichend weit von der Flamme entfernt liegen. Hier ist die physikalische (gemessene) Dichte R ungefähr ρ_f im Brenngasgemisch und ρ_b im Rauchgasgemisch. Im Bereich $x^1 < 0$ wird $\rho = \rho_f$ und im Bereich $x^1 > 0$ wird $\rho = \rho_b$ gesetzt. Zunächst ist der Ursprung der x^1 -Koordinate unbekannt. Dieser muss so gewählt werden, dass I_R verschwindet. Mit dieser Vorgehensweise wird die genaue Lage der Unstetigkeitsfläche bestimmt. Dies kann durch Intervallhalbierung, wobei x_f^1 und x_b^1 als Randwerte dienen, erfolgen.

Die Unstetigkeitsfläche liegt innerhalb eines Bereiches, in dem starke Gradienten der Variablen vorliegen. Auch der stetige physikalische Massenstrom ändert sich innerhalb der Flammenstruktur um einen $O(\text{Pe}^{-1})$ -Betrag. Im Modell ergeben sich hingegen keine starke Gradienten. Es muss erwartet werden, dass ein Unterschied zwischen dem physikalischen und dem äußeren Massenstrom (Modell) an der Unstetigkeitsstelle besteht.

Dieser kann aus Gleichung (4.30) oder (4.31) zu

$$M_{(1)}^{1*} - m_{(1)} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi \right) \int_0^\infty (R_{(0)} - \rho_b) dX = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi \right) \int_{-\infty}^0 (R_{(0)} - \rho_f) dX, \quad (\text{B 1})$$

berechnet werden. Werden die Ergebnisse aus der führenden und der $O(\text{Pe}^{-1})$ Ordnung zusammengefasste gilt

$$m = M^{1*} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi \right) \int_0^\infty (R - \rho_b) dx^1 + O(\text{Pe}^{-2}), \quad (\text{B 2})$$

wobei m den normalen Massenstrom an der Unstetigkeitsfläche im Modell bezeichnet. Der Unterschied $M^{1*} - m$ zwischen den normalen Massenströmen im "unstetigen" Modell m und der stetigen Flammenstruktur M^{1*} ist dem Dichteintegral $\int_0^\infty (R - \rho_b) dx^1$ proportional. Dieses ist wiederum der Dicke der Flamme proportional. Die Dicke der Flamme hängt von der momentanen Flammengeschwindigkeit ab, so dass Zeitableitungen des Integrals von Änderungen der Flammengeschwindigkeit hervorgerufen werden. Des weiteren ist die Differenz $M^{1*} - m$ der Flammenstreckung proportional. Schließlich wird darauf hingewiesen, dass die Flamme dünn und somit das Integral $\int_0^\infty (R - \rho_b) dx^1$ klein ist. Es gilt $M^{1*} - m = O(\text{Pe}^{-1})$.

Anhang C. Berechnung der Flammenstreckung

Hier soll eine einfache Methode zur Berechnung der Flammenstreckung χ aus aufgelösten physikalischen Daten vorgeschlagen werden.

Die vereinheitlichte Flammengeschwindigkeitsbeziehung (5.51) beinhaltet die Flammenstreckung χ . Somit kann ein Vergleich zwischen Theorie und physikalischen Daten nur dann erfolgen, wenn die Flammenstreckung zuvor bestimmt wird. Innerhalb der Flammenstruktur ergeben sich schnelle Änderungen der Variablen, so dass die Berechnung der Flammenstreckung eine nichttriviale Aufgabe darstellt. Wie zuvor in Anhang B, wird ein Koordinatensystem mittels der Isotemperaturflächen definiert. Die Normale ist durch $\mathbf{n} = \nabla T / |\nabla T|$ gegeben. Die Normalkomponente des zugehörigen metrischen Tensors lautet $g^{11} = \nabla T \cdot \nabla T$. Das Oberflächenelement auf der Isotemperaturfläche sei \sqrt{g}^* mit $g^* = 1/\det(g^{\alpha\beta})$. Entsprechend ist das Volumenelement \sqrt{g} mit $g = g^*/g^{11}$. Die Geschwindigkeit $u_{(0)}^j$ des ausgezeichneten Koordinatensystems mit $g^{11} = 1$, welches in unserer Untersuchung der Flammenstruktur Anwendung findet, kann ebenfalls aus dem Temperaturfeld gewonnen werden

$$\mathbf{u}_{(0)} = \mathbf{n} \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} - \frac{\partial T}{\partial t} \frac{1}{|\nabla T|} \mathbf{n} + o(1). \quad (\text{C 1})$$

Würde $g^{11} = 1$ gelten, dann dürfte Gleichung (4.29) zur Berechnung der Flammenstreckung, gemäß $\chi = -\nabla \cdot \mathbf{u}_{(0)}$, herangezogen werden. Wird \sqrt{g}^* in (4.29) durch $\sqrt{g}\sqrt{g^{11}}$ ersetzt, dann wird den Variationen von g^{11} Rechnung getragen. Die Formel für die Flam-

menstreckung χ lautet jetzt

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{1}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g^*} u_{(0)}^j \right) \Big|_{x^1=0} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} \sqrt{g^{11}} u_{(0)}^j \right) \Big|_{x^1=0} \\
 &= \frac{1}{|\nabla T|} \nabla \cdot (|\nabla T| \mathbf{u}_{(0)}) \Big|_{T=T^*},
 \end{aligned} \tag{C 2}$$

und kann leicht ausgewertet werden. Hierin ist T^* die Temperatur an der Unstetigkeitsfläche.