



Forschungszentrum Karlsruhe
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6896

Simulation von Größeneffekten mit mikromorphen Theorien

D. Hofer

Institut für Materialforschung

September 2003

Forschungszentrum Karlsruhe
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6896

Simulation von Größeneffekten mit mikromorphen Theorien

Daniel Hofer

Institut für Materialforschung

Vom Fachbereich Mechanik
der Technischen Universität Darmstadt
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

2003

Impressum der Print-Ausgabe:

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)**

ISSN 0947-8620

Simulation von Größeneffekten mit mikromorphen Theorien

Vom Fachbereich Mechanik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)**

genehmigte

Dissertation

von

Daniel Hofer

aus Rennerod

Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis
Korreferent:	Prof. Dr.rer.nat. D. Munz
Tag der Einreichung:	16.5.2003
Tag der mündlichen Prüfung:	4.7.2003

Mai 2003

D 17

Kurzfassung

Gegenstand des vorliegenden Berichtes ist die Simulation von Längenskaleneffekten mit einer linearen mikromorphen Theorie. Von zentraler Bedeutung für diese Theorie ist der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius- Duhem- Ungleichung, aus dem die Elastizitätsgesetze und eine innere Dissipationsungleichung hergeleitet werden. Typische Merkmale sind hierbei die additiven Aufspaltungen der Verzerrungs- und Krümmungstensoren in elastische und plastische Anteile und die Berücksichtigung von skalarer Schädigung.

Nach Darstellung der mikromorphen Theorie in einer thermodynamisch konsistenten Art und Weise wird deren Implementierung in Form von benutzerdefinierten Elementen in die FE-Programme ABAQUS und DAEdalon beschrieben. Es handelt sich hierbei um isoparametrische Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen für den ebenen Verzerrungszustand.

Anhand der Diskussion des Spannungskonzentrationsfaktors einer Lochscheibe wird gezeigt, dass die Theorie in der Lage ist, im elastischen Bereich Größeneffekte wiederzugeben. Zu diesem Zweck werden Studien zweier Materialparameter durchgeführt.

Für eine gelochte Zugprobe folgt die Analyse von Längenskaleneffekten des inelastischen Bereichs. Es zeigt sich, dass hierbei die Berücksichtigung skalarer Schädigung von entscheidender Bedeutung ist.

Abstract

Simulation of size-effects using micromorphic theories

The aim of this report is to investigate linear micromorphic models with respect to size-effects. Great importance is attached to the second law of thermodynamics in form of the Clausius-Duhem-inequality. The elasticity laws and an intrinsic dissipation inequality are derived from this inequality. Typical characteristics of the theory are additive decompositions of strain and curvature tensors and the consideration of scalar-valued damage, respectively.

The thermodynamically consistent formulated theory is implemented in finite-element-codes ABAQUS and DAEdalon in form of user-defined elements. Isoparametric two-dimensional 8-node elements (plane strain) with quadratic shape functions are developed.

Based on the discussion of the stress concentration factor of a disc with central hole under uniform loading conditions it is shown that the theory is able to predict size-effects in the elastic range. For this purpose studies of two material parameters are performed.

A tension-test specimen with central hole is discussed to study size-effects of the inelastic range. It is shown that the consideration of scalar-valued damage is essential in this case.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Thema der Arbeit	1
1.2	Kurzer Literaturüberblick	3
1.3	Voraussetzungen	3
1.4	Notation	4
2	Theorie mikromorpher Kontinua	7
2.1	Einleitung	7
2.2	Kinematik klassischer Kontinua	7
2.3	Kinematik mikromorpher Kontinua	9
2.4	Elastizität	11
2.5	Geometrische Interpretationen	13
2.5.1	Verzerrungstensor $\tilde{\epsilon}$	13
2.5.2	Verzerrungstensor $\tilde{\beta}$	13
2.5.3	Krümmungstensor $\tilde{\mathbf{K}}$	14
2.6	Linearisierung der Verzerrungstensoren	15
3	Bilanzgleichungen	19
3.1	Massenbilanz	19
3.2	Impuls- und Drehimpulsbilanz	20
3.3	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	23
4	Verfestigungsregeln und Schädigung	27
4.1	Einleitung	27
4.2	Isotrope und kinematische Verfestigung	27
4.3	Fließbedingung und Evolutionsgleichungen	29
4.4	Skalare Schädigung	31
5	Diskretisierung der Bilanzgleichungen	35
5.1	Variationsformulierung	35
5.2	Linearisierung	37
5.3	Diskretisierung mittels FEM	41
5.4	Implementierung in UEL	44
5.5	Operator-Split-Verfahren	50

6	Materialparameter der freien Energiefunktion	55
6.1	Elastizität	55
6.2	Kinematische Verfestigung	57
6.3	Restriktionen an Materialparameter	58
7	Beispiele	63
7.1	Homogener Zug	63
7.2	Elastizität	66
7.2.1	Lochscheibe	66
7.2.2	Biegeprobe	71
7.3	Inelastisches Materialverhalten	76
7.3.1	Experimente	76
7.3.2	FE-Simulationen mit isotroper Verfestigung	78
7.3.3	FE-Simulationen mit kinematischer Verfestigung	82
8	Zusammenfassung und Ausblick	85
A	Materialtensoren	93
B	Bilanzgleichungen	97
B.1	Cosserat-Theorie	97
B.2	Eringens Herleitung	98

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Thema der Arbeit

In der klassischen Kontinuumsmechanik bleibt üblicherweise der Einfluss nichtlokaler Effekte unberücksichtigt, deshalb bezeichnet man diese Theorien auch als lokal. Folglich ist die aktuelle Spannung eines Punktes lediglich von Zustandsgrößen des Punktes und dessen Geschichte abhängig. Im Sinne lokaler Theorien ist der Raum stetig mit materiellen Punkten ausgefüllt, die drei Freiheitsgrade (Verschiebungen) besitzen, wobei als Belastungen Kraft- und Temperaturfelder auftreten können. Dieses Konzept ist zur Berechnung von Spannungen und Verformungen typischer Ingenieurkonstruktionen vollkommen ausreichend. Der Sachverhalt ändert sich allerdings, wenn beispielsweise Mikrobauteile betrachtet werden, wie Mikropumpen, -ventile, usw., deren geometrische Abmessungen nur wenige Korndurchmesser betragen.

Da die technische Entwicklung immer mehr auf Miniaturisierung der Bauteile ausgerichtet ist, kommt der Mikrosystemtechnik eine herausragende Bedeutung zu. Insbesondere die mechanischen Eigenschaften solcher Systeme sind von großem Interesse. Von ARZT ET AL. [45] durchgeführte Biegeexperimente zeigen, dass hierbei die an makroskopischen Proben ermittelten Materialeigenschaften nicht uneingeschränkt auf mikroskopisch kleine Bauteile übertragbar sind. Grund für das unterschiedliche Bauteilverhalten sind innere Längenskalen, die mit der Mikrostruktur des Materials zusammenhängen¹.

Nach ERINGEN [32] entscheidet das Verhältnis zwischen einer charakteristischen Bauteilabmessung λ und einer materialspezifischen *inneren Länge* l , ob der Einsatz klassischer Theorien zur Berechnung des Bauteilverhaltens sinnvoll ist. Falls $\lambda/l \gg 1$ ist, liefern klassische kontinuumsmechanische Ansätze zuverlässige Ergebnisse. Liegt das Verhältnis bei $\lambda/l \approx 1$, reichen lokale Theorien zur Ermittlung des mechanischen Verhaltens nicht aus.

Ein Phänomen, das mit den inneren Längenskalen des Materials zusammenhängt und deshalb mit klassischen Theorien nicht beschrieben werden kann, ist der Größeneffekt. Experimentelle Nachweise dieses Effektes bei metallischen Werkstoffen liefern Mikrotorsionsexperimente von FLECK ET AL. [33] und Mikrobiegeexperimente von STÖLKEN & EVANS [72]. In beiden Fällen ist der Größeneffekt mit plastischem Materialverhalten verknüpft.

Im Rahmen des europäischen Projektes LISSAC² wurde nachgewiesen, dass sogar makrosko-

¹Der Einfluss mikroskopischer Werkstoffeigenschaften auf das makroskopische Materialverhalten wird z. B. in SIMONOVSKI [69] und in der darin zitierten Literatur diskutiert. In diesem Zusammenhang ist eine materialspezifische *innere Länge* (= *correlation length*) von Bedeutung.

²LISSAC (Limit Strains for Severe Accident Conditions) ist ein von der Europäischen Union aus dem Bereich der Reaktorsicherheit finanziertes Projekt – Contract No. FIKS-CT 1999-00012.



Abbildung 1.1: Flache Zugproben aus Stahl, die im Rahmen des LISSAC-Projektes zur Ermittlung des Größeneffektes quasistatisch bei Raumtemperatur getestet wurden (aus KRIEG ET AL. [46]).

pische Bauteile Größeneffekte zeigen (KRIEG ET AL. [46]), die mit Lokalisierungen der Deformation zusammenhängen. In diesem Fall konzentriert sich die Deformation auf einen sehr kleinen Bereich des Bauteils, wodurch mikrostrukturelle Materialeigenschaften das Bauteilverhalten beeinflussen. Insbesondere wurden bei Proben mit inhomogenen Spannungs- und Dehnungszuständen, beispielsweise Zugproben mit Loch (siehe Abbildung 1.1) oder Kerbe, starke Größenabhängigkeiten beobachtet (AKTAA ET AL. [5]). Es gibt Anzeichen, dass der Größeneffekt makroskopischer Bauteile in erster Linie von solchen Inhomogenitäten abhängt.

Ziel dieser Arbeit ist die kontinuumsmechanische Beschreibung des Größeneffektes mit einer nichtlokalen Theorie, die man gewöhnlich als *mikromorph*³ (siehe z. B. BECKER & BÜRGER [10] oder ERINGEN [32]) bezeichnet. Die Theorie berücksichtigt Plastizität, skalare Schädigung und ist in einen thermodynamischen Rahmen eingebettet. Sie basiert auf Arbeiten von ERINGEN [26], MINDLIN [58] und TSAKMAKIS [76]. Eringen und Mindlin hatten die Idee, zur Erfassung mikrostruktureller Effekte jedem materiellen Punkt eine Substruktur zuzuordnen, die einen deformierbaren Körper darstellt. Auf Mikroebene gelten die aus der klassischen Theorie bekannten Bilanzgleichungen. Aus der Mittelung über diese Mikrokontinua resultiert eine erweiterte Kontinuumstheorie. Diese wird im Falle homogener Mikrodeformationen als *mikromorphe* Theorie vom Grad 1 bezeichnet. Folglich kann die Deformation mit dem üblichen Deformationsgradienten \mathbf{F} , einem Deformationsgradienten der Mikrostruktur \mathbf{f} und dessen Gradienten relativ zu Makrokoordinaten $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}}$ beschrieben werden. Letzteres führt auf natürliche Weise eine Längenabhängigkeit in die Theorie ein. Anschaulich werden zur Darstellung der Mikrostruktur jedem materiellen Punkt drei beliebig deformierbare Direktoren zugeordnet.

Können die Direktoren lediglich Dehnungen in die jeweilige Achsrichtung und Rotationen ausführen, so gibt ERINGEN [32] der Theorie den Namen *microstretch continuum*. Fasst man das am materiellen Punkt angeheftete Mikrokontinuum als starren Körper auf, der nur Rota-

³*Mikromorph* besteht aus den griechischen Begriffen *mikro* und *morpho* mit den Bedeutungen *klein* und *Körper, Gestalt oder Form*

tionen ausführen kann, so bezeichnet man diesen Sonderfall als *mikropolar*.

Alternativ zu den mikromorphen, mikrostretch und mikropolaren Modellen können zur Beschreibung von Größeneffekten auch statistische Ansätze (CARPINTERI [15]) oder Gradiententheorien (siehe z. B. AIFANTIS [3], [4]) eingesetzt werden. Letztere zeichnen sich dadurch aus, dass sie vergleichsweise wenige Materialparameter beinhalten. Es ist jedoch noch nicht gelungen, eine thermodynamisch konsistente Gradiententheorie zu formulieren.

1.2 Kurzer Literaturüberblick

Ein erster Ansatz zur Entwicklung einer Theorie, bei der jedem Punkt neben den Verschiebungen zusätzliche Freiheitsgrade zugeordnet werden, geht auf die Gebrüder COSSERAT [19] zurück. Es wird jedem Körperpunkt bei der sogenannten Cosserat-Theorie ein starres Direktorendreibein zugeordnet, das rotieren kann. Jeder materielle Punkt hat folglich 6 Freiheitsgrade, drei Verschiebungen und drei Drehungen des Dreibeins, wodurch neben den Kraftspannungen zusätzlich auch Momentenspannungen eingeführt werden müssen. Der Spannungstensor ist nicht mehr symmetrisch.

Die Modellbildung wurde von ERINGEN [24] durch Einführung der schon erwähnten mikromorphen Kontinua systematisch erweitert. Als Sonderfälle lassen sich sowohl eine mikropolare Theorie als auch Gradiententheorien ableiten. Die mikropolare Theorie wiederum ist bis auf eine zusätzliche Bilanzgleichung (Bilanz der Mikroträgheit) identisch mit der Cosserat-Theorie. In weiteren Arbeiten übertrug ERINGEN seine Theorie auf Materialien mit Gedächtnis [31], Mischungen (TWISS & ERINGEN [29], [30]) und Fluide [25], [27].

MAUGIN [56] formulierte ein Variationsprinzip für nichtdissipative mikromorphe Festkörper. Restriktionen an Materialparameter der elastischen Theorie wurden von SMITH [70] gefunden. Erweiterungen auf Plastizität sind dem Autor nicht bekannt, während für den mikropolaren Sonderfall Plastizitätsmodelle zur Darstellung der Rotation von Körnern polykristalliner Materialien eingeführt wurden (siehe z. B. LACHNER [49] oder LIPPMANN [55]). Des Weiteren leisten mikropolare Plastizitätsmodelle auch zur Regularisierung netzabhängiger Finite-Elemente-Lösungen (STEINMANN [71]) und zur Simulation des Verhaltens von Bauteilen der Mikrosystemtechnik (GRAMMENOUDIS [35]) Beiträge.

Aufgrund der Komplexität gab es bisher wenige Anwendungsgebiete der mikromorphen Kontinuumstheorie. Eine Anwendung ist die Simulation von Dispersionsrelationen elastischer Wellen (MINDLIN [58]). In anderen Arbeiten wurde das mechanische Verhalten von Erdbebenwellen mit elastischen mikromorphen Theorien dargestellt (NAGAHAMA [59] und TEISSEYRE [73]). Mit diesen Modellen ist die Abbildung der Mikrostruktur von Geomaterialien (BIELSKI [13]) und die Simulation seismischer Rotationswellen möglich (NAGAHAMA [60]).

1.3 Voraussetzungen

Es werden in dieser Arbeit lediglich isotherme Deformationen betrachtet. $\dot{\varphi}(t)$ bezeichnet die materielle Zeitableitung einer Funktion $\varphi(t)$ nach der Zeit t .

Zur Unterscheidung von Skalaren, Vektoren und Tensoren bietet sich folgende Konvention an: Skalare sind in Normalschrift (*italic*), Vektoren, Dyaden und Tensoren 3. Stufe in Fettschrift gedruckt. Der fettgedruckte kalligrafische Schrifttyp kennzeichnet Tensoren 4., 5. und 6. Stufe. Matrizen und Vektoren werden im Fettdruck dargestellt und sind unterstrichen.

Die Komponentendarstellungen tensorieller Größen beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem und unterliegen der Einsteinschen Summationskonvention. In Indexnotation bezeichnet $a_{i,j}$ die Ableitung eines Vektors a_i nach den Koordinaten X_j :

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial X_j} \quad . \quad (1.1)$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ sind das innere und dyadische Produkt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} . Für zwei Dyaden \mathbf{A} und \mathbf{B} bezeichnen $\text{tr}\mathbf{A}$, $\det\mathbf{A}$, \mathbf{A}^{-1} und \mathbf{A}^T die Spur, Determinante, Inverse und Transponierte von \mathbf{A} .

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$ kennzeichnet das innere Produkt zwischen \mathbf{A} und \mathbf{B} . $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ und $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - 1/3 \text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{1}$ sind die euklidische Norm und der Deviator von \mathbf{A} . $\{\}_S$ und $\{\}_A$ bezeichnen die symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteile einer Dyade.

Es gelten folgende Beziehungen zwischen einem Tensor dritter Stufe $\mathbf{M} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}$, einem Tensor zweiter Stufe \mathbf{B} und Vektoren $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$:

$$\mathbf{M}[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{v}] = \mathbf{B}[\mathbf{c}, \mathbf{b}](\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}\mathbf{b})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad . \quad (1.2)$$

Kovariante Basisvektoren krummliniger Koordinaten \mathbf{G}_k in der Referenzkonfiguration werden als Ableitung der konvektiven Koordinate Θ^k nach \mathbf{X} definiert:

$$\mathbf{G}_k := \frac{\partial \Theta^k}{\partial \mathbf{X}} \quad . \quad (1.3)$$

1.4 Notation

Konfigurationen

\mathcal{B}	Materieller Körper des Makrokontinuums
\mathcal{M}	Materieller Körper des Mikrokontinuums
$\mathcal{M}_R, \mathcal{M}_t$	Raubereich des Mikrokontinuums in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\mathcal{R}_R, \mathcal{R}_t$	Raubereich des Makrokontinuums in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
\mathcal{X}	materieller Punkt des Makrokontinuums
dV	Volumenelement
Ξ	materieller Punkt des Mikrokontinuums
X, x	Raupunkt des Makrokontinuums in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
X', x'	Raupunkt des Mikrokontinuums in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration

Skalare

$\overline{\Delta}, \overline{\overline{\Delta}}, \overline{\overline{\overline{\Delta}}}$	skalare Verzerrungs- und Krümmungsmaße
d	skalare Schädigung
m, m'	Masse des Makro- bzw. Mikrokontinuums
ψ	spezifische freie Energiefunktion
ρ, ρ'	Dichte des Makro- bzw. Mikrokontinuums

Vektoren

\mathbf{b}	Volumenkraftdichte (Kraft pro Volumeneinheit)
\mathbf{e}_i	kartesische Koordinaten
$\mathbf{G}_k, \mathbf{g}_k$	Tangente an konvektive Koordinaten in \mathcal{R}_R und \mathcal{R}_t (Makrokontinuum)
\mathbf{t}	Spannungsvektor (Kraft pro Flächeneinheit)
\mathbf{v}	Geschwindigkeit des Punktes \mathcal{X}
\mathbf{v}'	Relativgeschwindigkeit des Punktes Ξ , bezogen auf den Schwerpunkt des Mikrokontinuums
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektor des Punktes \mathcal{X} in \mathcal{R}_R und \mathcal{R}_t (Makrokontinuum)
\mathbf{X}', \mathbf{x}'	Ortsvektor des Punktes Ξ in \mathcal{M}_R und \mathcal{M}_t (Mikrokontinuum)
$d\mathbf{X}, d\mathbf{x}$	materielles Linienelement des Makrokontinuums in \mathcal{R}_R und \mathcal{R}_t
$d\mathbf{X}', d\mathbf{x}'$	materielles Linienelement des Mikrokontinuums in \mathcal{M}_R und \mathcal{M}_t
$\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}$	Normale einer materiellen Fläche des Mikrokontinuums in \mathcal{M}_R und \mathcal{M}_t

Tensoren zweiter Stufe

\mathbf{D}, \mathbf{d}	Verzerrungsgeschwindigkeiten
$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}$	Verzerrungstensoren, bezogen auf die Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta}$	linearisierte Verzerrungstensoren
\mathbf{F}, \mathbf{f}	Deformationsgradienten des Makro- und Mikrokontinuums
\mathbf{H}, \mathbf{h}	Verschiebungsgradienten des Makro- und Mikrokontinuums
\mathbf{L}, \mathbf{l}	Geschwindigkeiten des Makro- und Mikrodeformationsgradienten
$\boldsymbol{\Lambda}$	<i>double forces</i> pro Fläche
$\boldsymbol{\Phi}$	<i>double forces</i> pro Volumen
\mathbf{Q}	orthogonaler Tensor
\mathbf{R}, \mathbf{r}	Rotationstensor des Makro- und Mikrokontinuums
$\mathbf{T}, \boldsymbol{\Sigma}$	Spannungstensoren der linearen Theorie
\mathbf{U}, \mathbf{V}	linker bzw. rechter Cauchyscher Strecktensor des Makrokontinuums
$\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}$	linker bzw. rechter Cauchyscher Strecktensor des Mikrokontinuums
\mathbf{W}, \mathbf{w}	Wirbeltensoren

Tensoren dritter Stufe

$\tilde{\mathbf{K}}$	Krümmungstensor bezogen auf \mathcal{R}_R
\mathbf{K}	linearisierter Krümmungstensor
\mathbf{M}	Momentenspannungstensor der linearen Theorie

Materialtensoren

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$	Materialtensoren 4. Stufe - Elastizität
\mathcal{C}	Materialtensor 6. Stufe - Elastizität
$\mathcal{P}, \mathcal{Q},$	Materialtensoren 4. Stufe - Fließfunktion
\mathcal{R}	Materialtensor 6. Stufe - Fließfunktion
\mathcal{S}	Materialtensor 6. Stufe - kinematische Verfestigung
$\mathcal{T}_{(1)}, \mathcal{T}_{(2)}, \mathcal{T}_{(3)}, \mathcal{T}_{(4)}$	Materialtangente 4. Stufe
$\mathcal{T}_{(5)}$	Materialtangente 6. Stufe

Materialparameter

λ, μ	Lamé-Konstanten
b_1, b_2	Parameter des Elastizitätstensors \mathcal{B}
d_1, d_2	Parameter des Elastizitätstensors \mathcal{D}
c_1, \dots, c_{11}	Parameter der Elastizitätstensors \mathcal{C}
p_1, p_2, q, r_7	Parameter der Fließfunktion
$e_1, e_2, e_3, g_1,$ g_2, s_1, \dots, s_{11}	Parameter der kinematischen Verfestigung
b, c	isotrope Verfestigung
α_1	Parameter der skalaren Schädigung

Kapitel 2

Theorie mikromorpher Kontinua

2.1 Einleitung

Zu Beginn dieses Kapitels werden Grundlagen bereitgestellt, die zur geometrischen Beschreibung des Deformationsverhaltens eines Körpers nötig sind.

Abschnitt 2.2 fasst fundamentale Beziehungen der Kinematik klassischer Kontinua kurz zusammen. Detailliertere Ausführungen zu diesem Thema sind in zahlreichen Lehrbüchern wie ALTENBACH [6], HAUPT [40], HOLZAPFEL [43], LEMAITRE & CHABOCHE [53] und TSAKMAKIS [75] zu finden. Zum Schluss folgt eine Diskussion der Kinematik mikromorpher Kontinua, wie sie in TSAKMAKIS [76] dargestellt wurde.

2.2 Kinematik klassischer Kontinua

Gegeben sei ein materieller Körper \mathcal{B} im dreidimensionalen euklidischen Punktraum E , der bezüglich einer *Referenzkonfiguration* den Raumbereich \mathcal{R}_R einnimmt. Es wird vorausgesetzt, dass sich der Körper zur Zeit $t = 0$ in der Referenzkonfiguration befindet. Nach Festlegung eines Ursprungs O in E kann jeder materielle Punkt \mathcal{X} des Körpers durch einen Raumpunkt X bzw. durch einen Ortsvektor \mathbf{X} identifiziert werden. Zum Zeitpunkt t nimmt der Körper \mathcal{B} den Raumbereich \mathcal{R}_t in der *Momentankonfiguration* (= *aktuelle Konfiguration*) ein. Jedem materiellen Punkt wird in dieser Konfiguration ein Raumpunkt x bzw. Ortsvektor \mathbf{x} zugewiesen. Der Ort des materiellen Punktes \mathcal{X} lässt sich somit in Abhängigkeit von t durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad (2.1)$$

mit einer für feste Zeit t existierenden Inversen

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

beschreiben. \mathbf{u} bezeichnet die Verschiebung des Punktes:

$$\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad . \quad (2.3)$$

Für seine Geschwindigkeit gilt:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) := \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad . \quad (2.4)$$

Zu einem festen Zeitpunkt t definiert man den *Deformationsgradienten* \mathbf{F} durch

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \text{GRAD } \hat{\mathbf{x}} \quad . \quad (2.5)$$

\mathbf{F} überführt materielle Linienelemente an Punkten in der Referenzkonfiguration $d\mathbf{X}$ in materielle Linienelemente an Punkten in der Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ (siehe z. B. TSAKMAKIS [75]):

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad . \quad (2.6)$$

Setzt man weiterhin ($\det \mathbf{F} > 0$) voraus, existiert eine eindeutige polare Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} in einen eigentlich orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} und einen symmetrisch, positiv definiten Tensor (rechter Strecktensor \mathbf{U} oder linker Strecktensor \mathbf{V}):

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad . \quad (2.7)$$

Nach Ersetzen von $d\mathbf{X}$ durch die inverse Beziehung von Gleichung (2.6) und Bildung der materiellen Zeitableitung folgt:

$$(d\mathbf{x})^\cdot = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad . \quad (2.8)$$

Die multiplikative Verknüpfung $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ bildet den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad . \quad (2.9)$$

\mathbf{L} führt somit die zeitliche Änderung des Linienelementes $d\mathbf{x}$ auf sich zurück und kann additiv in den symmetrischen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.10)$$

und antisymmetrischen Wirbeltensor \mathbf{W} zerlegt werden:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad . \quad (2.11)$$

Es besteht die Möglichkeit, mit Normalen an materiellen Flächen anstelle von materiellen Linienelementen zu arbeiten. Man betrachtet hierzu eine einparametrische Familie von materiellen Flächen

$$\Lambda(\mathbf{X}) = k = \text{const.} \quad (2.12)$$

der Referenzkonfiguration, die man mit (2.2) bezüglich der aktuellen Konfiguration darstellen kann:

$$\lambda(\mathbf{x}, t) := \Lambda(\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)) = k \quad . \quad (2.13)$$

Eine Transformationsbeziehung für Normale an materiellen Flächen erhält man durch totale Differentiation der Gleichungen (2.12) und (2.13):

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{F}^{T-1}\hat{\boldsymbol{\chi}} \quad (2.14)$$

mit

$$\hat{\boldsymbol{\chi}} := \text{GRAD } \Lambda(\mathbf{X}) \quad . \quad (2.15)$$

Somit überführt \mathbf{F}^{T-1} Normale an materielle Flächen in der Bezugsconfiguration $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ in Normale an materielle Flächen in der Momentankonfiguration $\boldsymbol{\chi}$. Die materielle Zeitableitung $\dot{\boldsymbol{\chi}}$ lautet:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = (\mathbf{F}^{T-1})^\cdot \hat{\boldsymbol{\chi}} = -(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^T \boldsymbol{\chi} = -\mathbf{L}^T \boldsymbol{\chi} \quad . \quad (2.16)$$

2.3 Kinematik mikromorpher Kontinua

Mikromorphe Kontinua sind eine systematische Erweiterung der klassischen Theorie. Anschaulich wird jedem Punkt ein als Substruktur oder Mikrokontinuum bezeichneter deformierbarer materieller Körper \mathcal{M} zugewiesen (ERINGEN [26]). Jedes Mikrokontinuum besteht aus einer

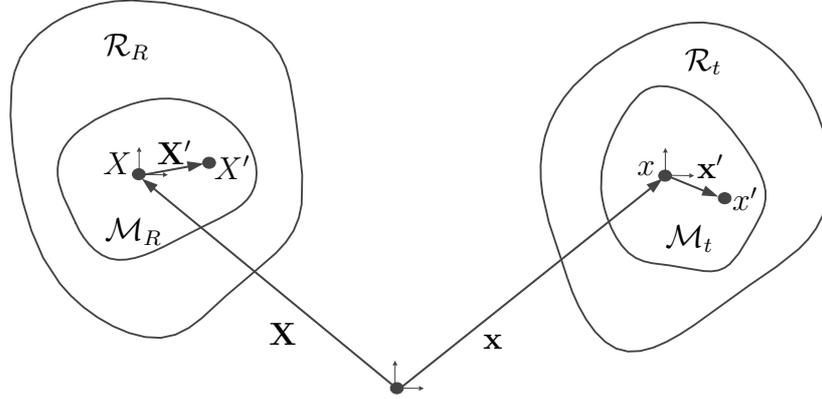


Abbildung 2.1: Mikromorpher Körper in Referenz- und Momentankonfiguration

Menge materieller Punkte Ξ , die in der Referenzkonfiguration den Raumbereich \mathcal{M}_R und in der aktuellen Konfiguration den Raumbereich \mathcal{M}_t einnehmen (siehe Abbildung 2.1). Hierbei wird vorausgesetzt, dass jeder materielle Punkt \mathcal{X} Koordinatenursprung und Schwerpunkt eines zugehörigen Mikrokontinuums ist. Der vektorielle Abstand eines Punktes Ξ des Mikrokontinuums vom Koordinatenursprung \mathcal{X} wird abhängig von der gewählten Konfiguration mit \mathbf{X}' oder \mathbf{x}' bezeichnet. Analog zum Makrokontinuum kann man eine Bewegung des Mikrokontinuums

$$\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{x}}'(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) \quad (2.17)$$

beschreiben. Es wird angenommen, dass $\hat{\mathbf{x}}'$ eine stetig differenzierbare Funktion darstellt und dass Gleichung (2.17) nach \mathbf{X}'

$$\mathbf{X}' = \hat{\mathbf{X}}'(\mathbf{X}, \mathbf{x}', t) \quad (2.18)$$

aufgelöst werden kann. Dies lässt die Definition eines Deformationsgradienten \mathbf{f}

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}'}{\partial \mathbf{X}'} \quad (2.19)$$

zu, der Tangenten an materielle Linien in \mathcal{M}_R auf Tangenten an materielle Linien in \mathcal{M}_t unter der üblichen Annahme ($\det \mathbf{f} > 0$) abbildet:

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{f} d\mathbf{X}' \quad (2.20)$$

Der Deformationsgradient des Mikrokontinuums \mathbf{f} kann in einen eigentlich orthogonalen Tensor \mathbf{r} und einen symmetrisch, positiv definiten Tensor $\bar{\mathbf{u}}$ bzw. $\bar{\mathbf{v}}$ polar zerlegt werden:

$$\mathbf{f} = \mathbf{r}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{v}}\mathbf{r} \quad (2.21)$$

Die Relativverschiebung \mathbf{u}' des Punktes x' gegenüber X' ist mit

$$\mathbf{u}' = \mathbf{x}' - \mathbf{X}' \quad (2.22)$$

gegeben. Des Weiteren kann eine Relativgeschwindigkeit bezüglich des Schwerpunktes mit

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}'(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) \quad (2.23)$$

eingeführt werden. Die absolute Geschwindigkeit jedes Punktes der Mikrostruktur ergibt sich aus der Summe von Schwerpunkts- und Relativgeschwindigkeit (siehe Abbildung 2.2).

Es wird angenommen, dass die Geschwindigkeit \mathbf{v}' in einer Taylorreihe bezogen auf den Schwerpunkt entwickelt werden kann:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} [\mathbf{x}'] + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{x}'^2} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} [\mathbf{x}' \otimes \mathbf{x}'] + \dots \quad (2.24)$$

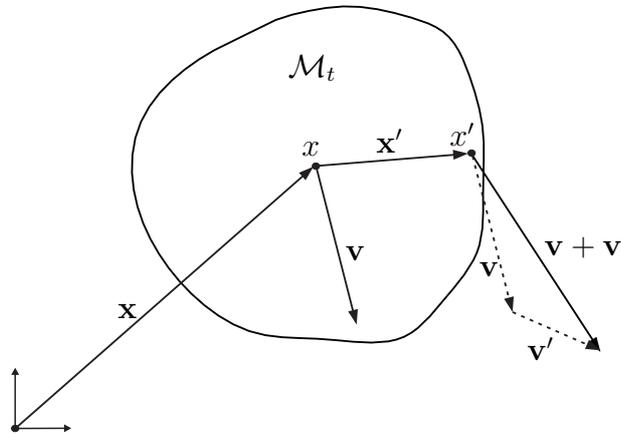


Abbildung 2.2: Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}'

Unter der Annahme einer homogenen Deformation des Mikrokontinuums verschwinden die höheren Glieder der Taylorreihe (BECKER & BÜRGER [10]). Es gilt somit in linearer Näherung:

$$\mathbf{v}' = \left. \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} [\mathbf{x}'] = \mathbf{l} \mathbf{x}' \quad (2.25)$$

In dieser Gleichung wird mit \mathbf{l} der räumliche Geschwindigkeitsgradient des Mikrokontinuums

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{x}'} = \dot{\mathbf{f}} \mathbf{f}^{-1} \quad (2.26)$$

eingeführt, der in Analogie zu (2.9) additiv in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden kann:

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (2.27)$$

mit

$$\mathbf{w} := \frac{1}{2} [\mathbf{l} - \mathbf{l}^T] \quad (2.28)$$

und

$$\mathbf{d} := \frac{1}{2} [\mathbf{l} + \mathbf{l}^T] \quad (2.29)$$

Theorien, bei denen lediglich homogene Mikrodeformationen zulässig sind, nennt ERINGEN [26] mikromorphe Kontinua vom Grad 1. Folglich kann man die Deformation durch 3 deformierbare Vektoren darstellen, die an jedem materiellen Punkt der Makrostruktur angeheftet sind (siehe Abbildung 2.3). Diese Vektoren bezeichnet man als Direktoren. Sie repräsentieren die Freiheitsgrade der Mikrodeformation, die mit dem Deformationsgradienten \mathbf{f} beschrieben werden. Der Sonderfall mikropolarer Deformationen ist eine starre Drehung der Direktoren.

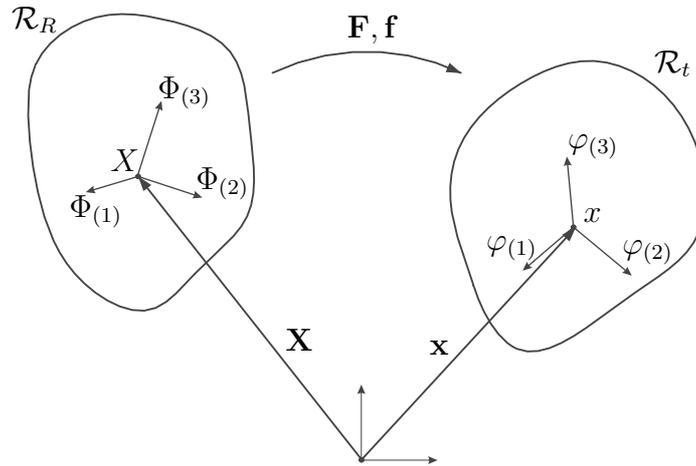


Abbildung 2.3: Direktoren in Referenz- und Momentankonfiguration

2.4 Elastizität

Die Definition kinematischer Größen kann durch Betrachtung der spezifischen freien Energiefunktion ψ motiviert werden. Hierzu nimmt man an, dass ψ im Falle eines mikromorphen Materials eine Funktion folgender Größen ist:

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \mathbf{f}, \text{GRAD } \mathbf{f}) \quad . \quad (2.30)$$

Neben dem klassischen Deformationsgradienten \mathbf{F} hängt ψ vom Deformationsgradienten des Mikrokontinuums \mathbf{f} und von $\text{GRAD } \mathbf{f}$ ab. Letzteres führt eine innere Länge ($\hat{=}$ Abhängigkeit von Nachbarelementen) ein. Die Darstellung des Gradienten $\text{GRAD } ()$ kann bezüglich kartesischer Koordinaten \mathbf{X} oder konvektiver Koordinaten Θ^k ($k = \{1, 2, 3\}$) erfolgen:

$$\text{GRAD } () := \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial X_i} \otimes \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial \Theta^k} \otimes \mathbf{G}^k \quad . \quad (2.31)$$

Gleichung (2.30) muss materiell objektiv sein. Somit wird gefordert, dass die spezifische freie Energie unabhängig vom gewählten Beobachter ist:

$$\psi = \psi^* = \hat{\psi}(\mathbf{F}^*, \mathbf{f}^*, (\text{GRAD } \mathbf{f})^*) \quad . \quad (2.32)$$

Es wird postuliert, dass sich die Deformationsgradienten gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^* &= \mathbf{Q}\mathbf{f} \quad , \\ \mathbf{F}^* &= \mathbf{Q}\mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.33)$$

transformieren. Mit (2.31) und (2.33) kann die Transformationsbeziehung

$$(\text{GRAD } \mathbf{f})^* = \mathbf{Q} \text{GRAD } \mathbf{f} \quad (2.34)$$

berechnet werden. Nach Einsetzen von (2.33) und (2.34) in (2.30) folgt:

$$\psi(\mathbf{F}, \mathbf{f}, \text{GRAD } \mathbf{f}) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}, \mathbf{Q}\mathbf{f}, \mathbf{Q}\text{GRAD } \mathbf{f}) \quad . \quad (2.35)$$

Diese Gleichung muss für alle eigentlich orthogonalen Tensoren \mathbf{Q} gelten. Berücksichtigt man die polare Zerlegung beider Deformationsgradienten und wählt $\mathbf{Q} = \mathbf{r}^{-1}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \psi &= \bar{\psi}(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{F}, \mathbf{r}^{-1}\mathbf{f}, \mathbf{r}^{-1}\text{GRAD } \mathbf{f}) \\ &= \bar{\bar{\psi}}(\mathbf{f}^{-1}\mathbf{F}, \bar{\mathbf{u}}^2, \mathbf{f}^{-1}\text{GRAD } \mathbf{f}) \\ &= \tilde{\psi}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\mathbf{K}}) \quad . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Damit ist im Falle mikromorpher Elastizität die spezifische freie Energie eine Funktion dreier Verzerrungs- bzw. Krümmungsmaße, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &:= \mathbf{f}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{1} \quad , \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{f}^T\mathbf{f} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{u}}^2 - \mathbf{1}) \quad , \\ \tilde{\mathbf{K}} &:= \mathbf{f}^{-1}\text{GRAD } \mathbf{f} \quad . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Tensor $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ ist von der Verzerrung des Makro- und Mikrokontinuums abhängig. Mit $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ wird ein Greenscher Verzerrungstensor für das Mikrokontinuum definiert. $\tilde{\mathbf{K}}$ führt nichtlokale Effekte in die Theorie ein. Es ist zu beachten, dass $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ in der Referenzkonfiguration wirken, wobei $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ ein symmetrischer Tensor 2. Stufe und $\tilde{\mathbf{K}}$ ein Tensor 3. Stufe ist. Eine geometrische Interpretation wird im folgenden Abschnitt gegeben.

Die Diskussion der freien Energiefunktion veranschaulicht, dass mikromorphe Theorien eine systematische Erweiterung der klassischen Theorie darstellen. Im Falle eines klassischen Kontinuums hängt ψ nur vom Deformationsgradienten des Makrokontinuums ab (siehe z. B. BECKER & BÜRGER [10])

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}) \quad . \quad (2.38)$$

Üblicherweise wird der zugehörige Verzerrungstensor mit

$$\mathbf{E}_{\text{klassisch}} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.39)$$

eingeführt.

Erweitert man die Theorie auf mikropolare Kontinua, entsteht eine zusätzliche Abhängigkeit vom Rotationstensor des Mikrokontinuums \mathbf{r} (siehe z. B. ELSÄSSER [22] oder GRAMMENOUDIS [35]):

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}^T\mathbf{r}, \mathbf{r}^T\text{GRAD } \mathbf{r}) \quad . \quad (2.40)$$

Man benötigt in diesem Fall zwei Verzerrungs- bzw. Krümmungstensoren, wobei der erste Tensor eine relative Beziehung zwischen Makro- und Mikrokontinuum darstellt. Mit $\mathbf{r}^T\text{GRAD } \mathbf{r}$ werden nichtlokale Effekte berücksichtigt. Der Spezialfall des mikropolaren Kontinuums zeichnet sich dadurch aus, dass die Mikrokontinua lediglich rotieren. Bei mikromorphen Kontinua vom Grad 1 sind zusätzlich homogene Deformationen der Mikrokontinua zulässig.

2.5 Geometrische Interpretationen

2.5.1 Verzerrungstensor $\tilde{\epsilon}$

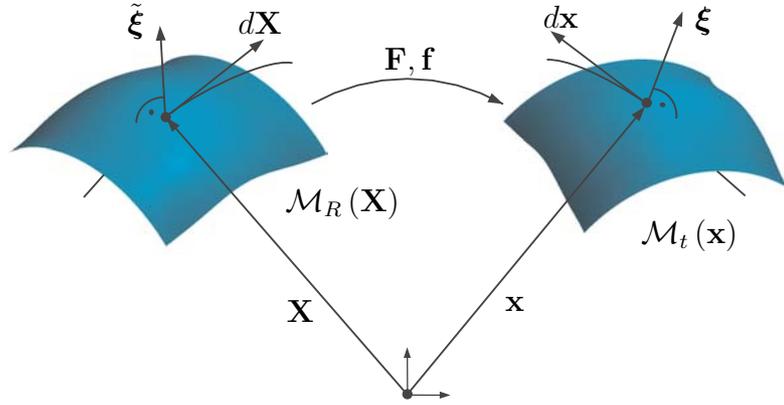


Abbildung 2.4: $\tilde{\epsilon}$ bzw. ϵ in Referenz- und Momentankonfiguration

Zur geometrischen Interpretation des Verzerrungstensors $\tilde{\epsilon}$ betrachtet man Tangentenvektoren an materiellen Linien des Makrokontinuums $d\mathbf{X}$ bzw. $d\mathbf{x}$ und Normalen an materiellen Flächen des Mikrokontinuums $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ bzw. $\boldsymbol{\xi}$ mit den Transformationseigenschaften (siehe Abbildung 2.4):

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad , \\ \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{f}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ein mögliches Maß für den Verzerrungszustand ist die skalare Differenz $\bar{\Delta}$, bestehend aus einem Skalarprodukt von Normalen an materiellen Flächen und Linienelementen:

$$\bar{\Delta} := \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{x} - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot d\mathbf{X} \quad . \quad (2.42)$$

$\bar{\Delta}$ kann unter Berücksichtigung von (2.41) mit dem Lagrangeschen Tensorfeld $\tilde{\epsilon}$

$$\bar{\Delta} = \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot (\mathbf{f}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{1}) d\mathbf{X} = \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \tilde{\epsilon} d\mathbf{X} \quad (2.43)$$

dargestellt werden.

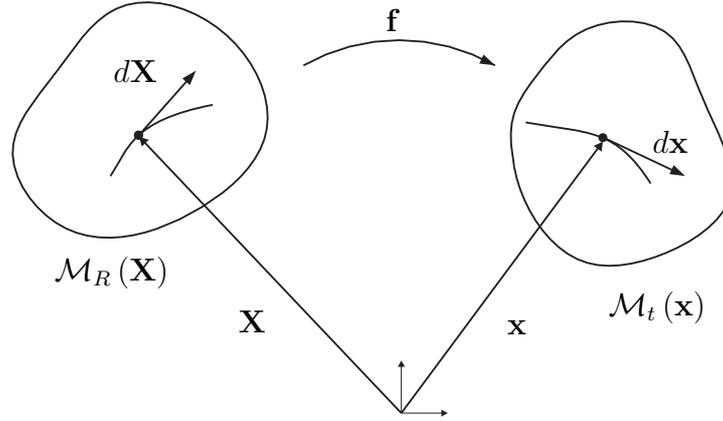
2.5.2 Verzerrungstensor $\tilde{\beta}$

Als zweites skalares Maß wird eine Differenz eingeführt, die abhängig von Tangenten an materiellen Linien des Mikrokontinuums ist:

$$\bar{\bar{\Delta}} = \frac{1}{2}(d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' - d\mathbf{X}' \cdot d\mathbf{X}') \quad . \quad (2.44)$$

Nutzt man die Transformationsbeziehung für Tangenten an materiellen Linien des Mikrokontinuums (siehe Abbildung 2.5)

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{f}d\mathbf{X}' \quad , \quad (2.45)$$

Abbildung 2.5: $\tilde{\beta}$ bzw. β in Referenz- und Momentankonfiguration

kann (2.44) zu

$$\overline{\overline{\Delta}} = d\mathbf{X}' \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{f}^T \mathbf{f} - \mathbf{1}) d\mathbf{X}' = d\mathbf{X}' \cdot \tilde{\beta} d\mathbf{X}' \quad (2.46)$$

überführt werden. Der Greensche Verzerrungstensor des Mikrokontinuums ist folglich ein Lagrangesches Tensorfeld der Form $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\mathbf{X}, t)$.

2.5.3 Krümmungstensor $\tilde{\mathbf{K}}$

Zur geometrischen Interpretation des Krümmungstensors $\tilde{\mathbf{K}}$ betrachten wir drei linear unabhängige als Direktoren¹ bezeichnete Vektoren $\Phi_{(i)}$ ($i = \{1, 2, 3\}$), die das an einem Punkt X in \mathcal{R}_R angeheftete Mikrokontinuum repräsentieren. In der aktuellen Konfiguration wird das Mikrokontinuum durch die drei Direktoren $\varphi_{(i)}$ dargestellt (siehe Abbildung 2.3). Zwischen den (kovarianten) Direktoren $\Phi_{(i)}$ und $\varphi_{(i)}$ soll die Beziehung

$$\varphi_{(i)} = \mathbf{f} \Phi_{(i)} \quad (2.47)$$

bestehen. Zusätzlich führt man (kontravariante) Direktoren $\Phi^{(i)}$ und $\varphi^{(i)}$ mit der Transformationsvorschrift

$$\varphi^{(i)} = \mathbf{f}^{T-1} \Phi^{(i)} \quad (2.48)$$

ein. Die Krümmung soll in Analogie zu den Verzerrungen mit einem skalaren Maß beschrieben werden, das sowohl mit Größen der Referenzkonfiguration als auch mit Größen der Momentankonfiguration darstellbar ist. Es bietet sich an, eine von den ko- und kontravarianten Direktoren abhängige skalare Differenz $\overline{\overline{\overline{\Delta}}}$ zu definieren:

$$\overline{\overline{\overline{\Delta}}} := \left[\varphi^{(1)} \cdot \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \Theta^k} - \Phi^{(1)} \cdot \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial \Theta^k} \right] (\Phi_{(3)} \cdot \mathbf{G}^k) \quad (2.49)$$

¹MINDLIN verwendet in [58] für diese Vektoren die Bezeichnung *deformable directors*.

Die Darstellung bezüglich der Referenzkonfiguration lautet (Gleichungen (2.47) und (2.48)):

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\Delta}} &= \left[\mathbf{f}^{T-1} \Phi^{(1)} \cdot \frac{\partial (\mathbf{f} \Phi^{(2)})}{\partial \Theta^k} - \Phi^{(1)} \cdot \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \Theta^k} \right] (\Phi^{(3)} \cdot \mathbf{G}^k) \\ &= \left[\Phi^{(1)} \cdot \mathbf{f}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Theta^k} \Phi^{(2)} \right] (\Phi^{(3)} \cdot \mathbf{G}^k) \quad . \end{aligned} \quad (2.50)$$

$\overline{\overline{\Delta}}$ ist ein nichtlokales Maß, da durch Differentiation nach der konvektiven Koordinate Θ^k die Nachbarnpunkte von X berücksichtigt werden. Definiert man einen Tensor 2. Stufe $\tilde{\gamma}_k$

$$\tilde{\gamma}_k := \mathbf{f}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Theta^k} \quad , \quad (2.51)$$

so lässt sich der Skalar $\overline{\overline{\Delta}}$ in der Form

$$\overline{\overline{\Delta}} = \left[\Phi^{(1)} \cdot \tilde{\gamma}_k \Phi^{(2)} \right] (\Phi^{(3)} \cdot \mathbf{G}^k) \quad (2.52)$$

schreiben. Mit Gleichung (1.2) folgt der Zusammenhang zwischen dem skalaren Maß und dem Krümmungstensor $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\overline{\overline{\Delta}} = \tilde{\mathbf{K}} \left[\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)} \right] \quad (2.53)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{f}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Theta^k} \otimes \mathbf{G}^k = \tilde{\gamma}_k \otimes \mathbf{G}^k \quad . \quad (2.54)$$

Bezüglich kartesischer Koordinaten ergibt sich folgende Darstellung für $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{K}_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = f_{ip}^{-1} \frac{\partial f_{pj}}{\partial X_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad . \quad (2.55)$$

2.6 Linearisierung der Verzerrungstensoren

Bei vielen technischen Problemen ist es völlig ausreichend, sich auf kleine Deformationen zu beschränken, was wir auch im Folgenden voraussetzen wollen. In diesem Fall gibt es keine Unterscheidung zwischen Lagrangescher und Eulerscher Darstellung. Demnach ist es irrelevant, ob man die Feldgleichungen bezüglich materieller oder räumlicher Koordinaten angibt.

Die Verzerrungstensoren müssen unter diesen Voraussetzungen linearisiert werden, wozu man die Beziehungen zwischen Deformations- und Verschiebungsgradienten des Mikro- und Makrokontinuums nutzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{h} + \mathbf{1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{h} := \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{X}'} \quad , \\ \mathbf{F} &= \mathbf{H} + \mathbf{1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Hierbei liefern die euklidischen Normen $\|\cdot\|$ beider Verschiebungsgradienten und deren Raten, die als klein definiert werden, falls $\delta_i \ll 1$ mit $(i = 1, 2, 3, 4)$, einen Hinweis auf die Größe der Deformation:

$$\begin{aligned}\delta_1 &:= \|\mathbf{H}\| \quad , \\ \delta_2 &:= \|\mathbf{h}\| \quad , \\ \delta_3 &:= \|\dot{\mathbf{H}}\| \quad , \\ \delta_4 &:= \|\dot{\mathbf{h}}\| \quad .\end{aligned}\tag{2.57}$$

Andernfalls spricht man von großen Deformationen. Für kleine Werte der Skalare δ_i sind nach ALTENBACH [6] notwendigerweise auch alle Komponenten der Verschiebungsgradienten und deren Raten klein. Kleine Verzerrungen und kleine Rotationen sind somit auch eingeschlossen. Da bei der geometrisch linearen Theorie nicht zwischen Lagrangeschen und Eulerschen Koordinaten unterschieden werden muss, lässt sich zeigen, dass die Ableitungen der Verschiebungen nach den materiellen Koordinaten \mathbf{X} bzw. \mathbf{X}' durch Ableitungen nach den Ortskoordinaten \mathbf{x} bzw. \mathbf{x}' näherungsweise ersetzt werden können:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &:= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad , \\ \mathbf{h} &:= \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{X}'} \approx \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}'} \quad ,\end{aligned}\tag{2.58}$$

da

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} \approx \mathbf{1} \quad .\tag{2.59}$$

Weiterhin gelten folgende asymptotische Näherungen für die Inverse des Mikrodeformationsgradienten

$$\mathbf{f}^{-1} \approx \mathbf{1} - \mathbf{h}\tag{2.60}$$

und die Geschwindigkeitsgradienten

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \approx \dot{\mathbf{H}} \quad , \\ \mathbf{l} &= \dot{\mathbf{f}}\mathbf{f}^{-1} \approx \dot{\mathbf{h}} \quad .\end{aligned}\tag{2.61}$$

Unter Beachtung dieser Bedingungen wird die Linearisierung der drei Verzerrungstensoren $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ durchgeführt. Mit (2.60) kann gezeigt werden, dass die Linearisierung des Verzerrungstensors $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{f}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{1} \approx \mathbf{H} - \mathbf{h} =: \boldsymbol{\epsilon}\tag{2.62}$$

eine Differenz zwischen Makro- und Mikroverschiebungsgradienten ergibt. Aus diesem Grund bezeichnet MINDLIN [58] $\boldsymbol{\epsilon}$ als relativen Verzerrungstensor.

Die Linearisierung von $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} + \mathbf{h}^T + \mathbf{h}^T \mathbf{h}] \approx \frac{1}{2} [\mathbf{h} + \mathbf{h}^T] =: \boldsymbol{\beta} \quad ,\tag{2.63}$$

liefert einen Verzerrungstensor β , der einen linearisierten Greenschen Verzerrungstensor für das Mikrokontinuum darstellt.

Der Krümmungstensor dritter Stufe $\tilde{\mathbf{K}}$ hängt von der Ableitung des Mikrodeformationsgradienten \mathbf{f} nach materiellen Koordinaten des Makrokontinuums ab. Bezüglich kartesischer Koordinaten ergibt sich folgende Darstellung (in Indexschreibweise):

$$\tilde{K}_{ijk} = f_{il}^{-1} \frac{\partial f_{lj}}{\partial X_k} = f_{il}^{-1} f_{lj,k} \quad . \quad (2.64)$$

Mit Gleichung (2.60) folgt:

$$\tilde{K}_{ijk} \approx (\delta_{il} - h_{il}) h_{lj,k} = h_{ij,k} - h_{il} h_{lj,k} \quad . \quad (2.65)$$

Unter Vernachlässigung des Terms höherer Ordnung $h_{il} h_{lj,k}$ ergibt sich der linearisierte Krümmungstensor \mathbf{K} :

$$\tilde{K}_{ijk} \approx h_{ij,k} =: K_{ijk} \quad . \quad (2.66)$$

Die Raten der linearisierten Verzerrungs- und Krümmungstensoren lauten:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{h}} \quad , \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{h}} + \dot{\mathbf{h}}^T) = \dot{\mathbf{d}} \quad , \\ \dot{\mathbf{K}} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{h}}}{\partial \mathbf{x}} \quad . \end{aligned} \quad (2.67)$$

MINDLIN beschreibt in [58] die Deformation mit nahezu identischen Verzerrungstensoren. Im Gegensatz zu dieser Arbeit startet er vom Standpunkt der klassischen Mechanik und wählt

$$\epsilon_{Mindlin} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H})$$

anstelle des Mikroverzerrungstensors β . Zusätzlich führt er einen gemischten Verzerrungstensor und einen Krümmungstensor ein, die vergleichbar mit ϵ und \mathbf{K} dieser Arbeit sind.

Kapitel 3

Bilanzgleichungen

In diesem Kapitel werden die Bilanzgleichungen mikromorpher Kontinua zusammengefasst. Sie sind universal gültige Aussagen und werden zunächst in integraler Form als globale Bedingungen für den materiellen Körper \mathcal{B} angegeben. Mit Hilfe des Lokalisationssatzes besteht jedoch die Möglichkeit, Differentialgleichungen zu gewinnen, die dann punktweise gelten.

Herleitungen von Bilanzgleichungen klassischer Kontinua findet man beispielsweise in BECKER & BÜRGER [10], ALTENBACH [6] oder HOLZAPFEL [43]. Erweiterungen auf mikromorphe Theorien werden in BECKER & BÜRGER [10] und ERINGEN [32] angegeben.

3.1 Massenbilanz

Zur Herleitung der Massenbilanz mikromorpher Theorien werden sowohl Mikro- als auch Makrokontinua als geschlossene Systeme betrachtet. Erzeugung und Vernichtung von Masse sowie Massenfluss durch materielle Flächen sind ausgeschlossen. Dies motiviert, Massenerhaltungssätze der Mikro- und Makrostrukturen einzuführen, die besagen, dass die Massen der Systeme zeitlich konstant sind:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} dm = 0 \quad , \\ \frac{d}{dt}m' &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} dm' = 0 \quad .\end{aligned}\tag{3.1}$$

m bzw. m' bezeichnen hierbei die Massen der Makro- und Mikrostrukturen.

Zur Ermittlung eines Zusammenhangs betrachtet ERINGEN [32] infinitesimale Volumenelemente der Makrostruktur ΔV in der Referenz- und Δv in der Momentankonfiguration. In Analogie zur klassischen Kontinuumsmechanik wird hierbei angenommen, dass die Masse kontinuierlich verteilt ist. Folglich existiert eine kontinuierliche Massendichte ρ in einem infinitesimal kleinen Volumenelement. Dessen Masse wird als Summe der Massen aller zugeordneten Mikroelemente definiert, die das infinitesimale Volumen $\Delta V'$ in der Referenz- und $\Delta v'$ in der Momentankonfiguration unter der Bedingung

$$\Delta V' < \Delta V\tag{3.2}$$

einnehmen. Weiterhin nimmt man an, dass die Massen der Mikrokontinua während der Deformation erhalten bleiben:

$$\Delta m' = \rho'_R \Delta V' = \rho' \Delta v' = \text{const.} \quad .\tag{3.3}$$

Hierbei sind ρ'_R bzw. ρ' die Dichten der Mikrostruktur in der Referenz- und Momentankonfiguration.

Anhand einer Grenzwertbetrachtung kann anschließend gezeigt werden, dass für das Makrokontinuum die aus der klassischen Theorie bekannte Kontinuitätsgleichung

$$\Delta m = \rho_R \Delta V = \rho \Delta v = \text{const.} \quad (3.4)$$

gilt.

3.2 Impuls- und Drehimpulsbilanz

Ausgangspunkt zur Herleitung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen ist die Bedingung, dass im quasistatischen Fall die virtuelle Arbeit innerer Kräfte $\delta\mathcal{W}_{(i)}$ und die virtuelle Arbeit äußerer, eingepärgter Kräfte $\delta\mathcal{W}_{(a)}$ identisch sind:

$$\delta\mathcal{W}_{(a)} - \delta\mathcal{W}_{(i)} = 0 \quad . \quad (3.5)$$

Hierbei soll vorausgesetzt werden, dass reine Elastizität vorliegt. Unter der Annahme, dass die inneren Kräfte ein Potenzial besitzen, kann man dann $\mathcal{W}_{(i)}$ mit der elastischen Formänderungsenergiedichte ψ beschreiben:

$$\mathcal{W}_{(i)} := \int_{\mathcal{R}_t} \rho \psi \, dV \quad . \quad (3.6)$$

Die Variation der Arbeit innerer Kräfte lautet

$$\delta\mathcal{W}_{(i)} = \int_{\mathcal{R}_t} \rho \delta\psi \, dV \quad . \quad (3.7)$$

Folglich ist die Variation der Arbeit äußerer Kräfte ebenfalls gleich der gespeicherten Formänderungsenergie (3.5):

$$\delta\mathcal{W}_{(a)} = \int_{\mathcal{R}_t} \rho \delta\psi \, dV \quad . \quad (3.8)$$

Mit der Annahme, dass die Formänderungsenergiedichte eine Funktion der drei Verzerrungs- und Krümmungstensoren ist (2.36), folgt für $\delta\psi$:

$$\rho \delta\psi = \rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \delta\boldsymbol{\epsilon} + \rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\beta}} \cdot \delta\boldsymbol{\beta} + \rho \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{K}} \cdot \delta\mathbf{K} \quad . \quad (3.9)$$

Nach Einführung dreier zu $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\beta}$ und \mathbf{K} thermodynamisch konjugierten Spannungen bzw. Momentenspannungen \mathbf{T} , $\boldsymbol{\Sigma}$ und \mathbf{M} , die gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &:= \rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}} \quad , \\ \boldsymbol{\Sigma} &:= \rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\Sigma}^T \quad , \\ \mathbf{M} &:= \rho \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{K}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

definiert sind, gilt:

$$\rho \delta \psi = \mathbf{T} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{K} \quad . \quad (3.11)$$

Hierbei ist \mathbf{T} das Analogon zum klassischen Spannungstensor. Mit $\boldsymbol{\Sigma}$ wird ein symmetrischer Spannungstensor eingeführt, der zum Mikroverzerrungstensor $\boldsymbol{\beta}$ thermodynamisch konjugiert ist. \mathbf{M} kennzeichnet einen mit dem Krümmungstensor \mathbf{K} verknüpften Momentenspannungstensor 3. Stufe. Somit gilt:

$$\delta \mathcal{W}_{(i)} = \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} dV + \int_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\beta} dV + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{K} dV \quad . \quad (3.12)$$

Im nächsten Schritt ersetzt man auf Grundlage der Beziehungen (2.62-2.66) die Variationen der Verzerrungs- bzw. Krümmungstensoren durch die der Mikro- und Makroverschiebungsgradienten. $\delta \mathbf{H}$ wiederum wird durch Variation des Verschiebungsvektors \mathbf{u}

$$\delta \mathbf{H} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.13)$$

ausgedrückt. In dieser erweiterten Theorie wird somit neben den Makroverschiebungen \mathbf{u} eine weitere Größe variiert, der Mikroverschiebungsgradient \mathbf{h} . Dabei muss gewährleistet sein, dass die Variation der neun Komponenten von \mathbf{h} mit

$$\mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{X}'} \approx \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}'} \quad (3.14)$$

auf eindeutige Weise drei Mikroverschiebungen \mathbf{u}' liefert. Da wir von einer homogenen Deformation innerhalb des Mikrokontinuums ausgehen, ist diese Voraussetzung erfüllt.

Die virtuellen Arbeiten aus Gleichung (3.11) kann man unter diesen Voraussetzungen durch Skalarprodukte zwischen Spannungstensoren sowie den virtuellen Größen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \mathbf{h}$ darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{T} \cdot \left[\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} - \delta \mathbf{h} \right] \quad , \\ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{h} \quad , \\ \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{K} &= \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \quad . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei wird in Gleichung (3.15b) die Symmetrie von $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\delta \boldsymbol{\beta}$ ausgenutzt. Somit folgt für die Variation der Arbeit innerer Kräfte:

$$\delta \mathcal{W}_{(i)} = \int_{\mathcal{R}_t} \left[\mathbf{T} \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} - \delta \mathbf{h} \right) + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{h} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right] dV \quad . \quad (3.16)$$

Wendet man auf diese Gleichung den Gaußschen Satz an, gilt:

$$\int_{\mathcal{R}_t} T_{pq} \delta u_{p,q} dV = \int_{\partial \mathcal{R}_t} T_{pq} n_q \delta u_p dA - \int_{\mathcal{R}_t} \partial T_{pq,q} \delta u_p dV \quad (3.17)$$

und

$$\int_{\mathcal{R}_t} M_{pqr} h_{pq,r} dV = \int_{\partial \mathcal{R}_t} M_{pqr} \delta h_{pq} n_r dA - \int_{\mathcal{R}_t} M_{pqr,r} \delta h_{pq} dV \quad . \quad (3.18)$$

Mit n_q wird der Normalenvektor bezeichnet. Es folgt:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{(i)} = & - \int_{\mathcal{R}_t} \rho T_{pq,q} \delta u_p dV + \int_{\mathcal{R}_t} \rho (\Sigma_{pq} - M_{pqr,r} - T_{pq}) \delta h_{pq} dV + \\ & + \int_{\partial\mathcal{R}_t} \rho T_{pq} \delta u_p n_q dA + \int_{\partial\mathcal{R}_t} \rho M_{pqr} \delta h_{pq} n_r dA \quad . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Diese Form von $\delta\mathcal{W}_{(i)}$ (3.19) motiviert folgende Darstellung der virtuellen Arbeit äußerer Lasten (MINDLIN [58]):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{(a)} = & \int_{\mathcal{R}_t} f_p \delta u_p dV + \int_{\mathcal{R}_t} \Phi_{pq} \delta h_{pq} dV + \\ & + \int_{\partial\mathcal{R}_t} t_p \delta u_p dA + \int_{\partial\mathcal{R}_t} \Lambda_{pq} \delta h_{pq} dA \quad . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aus den Definitionen von u_p , h_{pq} und der Tatsache, dass die Integranden der Gleichung (3.20) Variationen von Arbeit pro Volumen oder pro Fläche darstellen, lassen sich die physikalischen Bedeutungen der neu eingeführten Größen ableiten (siehe MINDLIN [58]). Somit sind

$$f_p = \bar{f}_p(\mathbf{x}, t) \quad (3.21)$$

die aus der klassischen Theorie bekannte Volumenkraftdichte und

$$t_p = \bar{t}_p(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) \quad (3.22)$$

der Spannungsvektor. Der Interpretation von MINDLIN folgend können

$$\Phi_{pq} = \bar{\Phi}_{pq}(\mathbf{x}, t) \quad (3.23)$$

und

$$\Lambda_{pq} = \bar{\Lambda}_{pq}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) \quad (3.24)$$

als *double forces* pro Volumen bzw. Fläche gedeutet werden. Die Diagonalkomponenten beider Dyaden sind *double forces* ohne, die restlichen Komponenten sind *double forces* mit Moment. In beiden Fällen gibt der erste Index die Orientierung des Hebelarms zwischen den Kräften, der zweite die Orientierung der Kräfte an. Bei einer Fläche mit äußerem Einheitsnormalenvektor in positive Koordinatenrichtung zeigt die Kraft am positiven Ende des Hebelarms in positive Richtung und die am negativen Ende in negative Richtung. Bei Flächen mit Normalen in negativer Koordinatenrichtung gelten umgekehrte Beziehungen.

Die Bilanz der virtuellen Arbeit (3.5) erhält man durch Bildung der Differenz zwischen (3.19) und (3.20):

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\mathcal{R}_t} [T_{pq,q} + f_p] \delta u_p dV + \int_{\mathcal{R}_t} [\Phi_{pq} - \Sigma_{pq} + T_{pq} + M_{pqr,r}] \delta h_{pq} dV + \\ & + \int_{\partial\mathcal{R}_t} [t_p - T_{pq} n_q \delta u_p] dA + \int_{\partial\mathcal{R}_t} [\Lambda_{pq} - M_{pqr} n_r] \delta h_{pq} dA \quad . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Diese Gleichung beinhaltet die lokalen Formen von Impulsbilanz

$$T_{pq,q} + f_p = 0 \quad , \quad (3.26)$$

Drehimpulsbilanz

$$\Phi_{pq} - \Sigma_{pq} + T_{pq} + M_{pqr,r} = 0 \tag{3.27}$$

und 12 Randbedingungen, bestehend aus drei Spannungsrandbedingungen

$$t_p = T_{pq} n_q \tag{3.28}$$

und 9 Momentenspannungsrandbedingungen

$$\Lambda_{pq} = M_{pqr} n_r \quad . \tag{3.29}$$

Somit entspricht die Impulsbilanzgleichung (3.26) derjenigen der klassischen Theorie. Die zugehörigen Randbedingungen sind Gleichung (3.28) zu entnehmen. Als zusätzliche Bedingung muss allerdings die lokale Form der Drehimpulsbilanz (3.27) mit zugehörigen Momentenspannungsrandbedingungen (3.29) beachtet werden. Hierbei kann man die 27 Komponenten des Tensors 3. Stufe \mathbf{M} in Analogie zu (3.23) und (3.24) als *double forces* pro Fläche verstehen. Sämtliche Spannungs- und Verzerrungstensoren sind in Tabelle 3.1 aufgelistet.

Verzerrungstensoren		Spannungstensoren	
$\epsilon = \mathbf{H} - \mathbf{h}$	relative Verzerrung	\mathbf{T}	Spannungstensor
$\beta = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)$	Mikroverzerrung	Σ	2. Spannungstensor
$\mathbf{K} = \text{GRAD } \mathbf{h}$	Gradient von \mathbf{h}	\mathbf{M}	Momentenspannung

Tabelle 3.1: Spannungs- und Verzerrungstensoren der linearen mikromorphen Theorie

3.3 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Die Materialgleichungen müssen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik stets erfüllen, d. h. es darf zu keinem Zeitpunkt Entropie vernichtet werden. Zusätzlich beschränkt man die Betrachtung auf isotherme Prozesse mit homogener Temperaturverteilung. Wird als Bedingung für die nichtnegative Entropieproduktion der zweite Hauptsatz in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung angenommen, so erhält man für ein klassisches Material (Material ohne Mikrostruktur) folgende Ungleichung:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad . \tag{3.30}$$

\mathbf{T} ist der klassische Cauchysche Spannungs- und \mathbf{D} der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor. Das Skalarprodukt zwischen beiden Größen ergibt die Spannungsleistung, $\rho \dot{\psi}$ kennzeichnet die Rate der freien spezifischen Energie. Im Falle mikromorpher Theorien vom Grad 1 muss man neben den *klassischen* Spannungen \mathbf{T} noch den Spannungstensor Σ und Momentenspannungen \mathbf{M}

berücksichtigen. Diese wurden als thermodynamisch konjugierte Größen zu den Mikroverzerrungen und Krümmungen eingeführt (siehe Gleichung (3.10)). Die Clausius- Duhem- Ungleichung besitzt somit nach ERINGEN [32] folgende Struktur:

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{1}) + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{x}} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad . \quad (3.31)$$

Die ersten drei Summanden bilden die Spannungsleistung, $\rho \dot{\psi}$ ist analog zur klassischen Theorie die Rate der freien Energie. Im nächsten Schritt werden die Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren durch Raten der linearisierten Verzerrungstensoren ersetzt (siehe Gleichung 2.67). Hierbei wird die Symmetrie von $\boldsymbol{\Sigma}$ ausgenutzt:

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{K}} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad . \quad (3.32)$$

In klassischen Theorien setzt man eine additive Aufspaltung der freien Energiefunktion in elastische und plastische Anteile voraus. Es wird angenommen, dass für mikromorphe Theorien diese Beziehung ebenfalls gilt:

$$\psi = \psi_e + \psi_p \quad . \quad (3.33)$$

Somit folgt für Gleichung (3.32):

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{K}} - \rho \dot{\psi}_e - \rho \dot{\psi}_p \geq 0 \quad . \quad (3.34)$$

Aus dieser Bedingung lassen sich Elastizitätsgesetze und eine innere Dissipationsungleichung bestimmen. Dazu wird für den Fall von elasto- plastischem Materialverhalten bei kleinen Verformungen die Existenz von additiven Aufspaltungen der Verzerrungs- und Krümmungstensoren in elastische und plastische Anteile vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \quad , \\ \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}_e + \boldsymbol{\beta}_p \quad , \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_p \quad . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Es wird angenommen, dass die plastischen Verformungen keinen Einfluss auf die elastischen Eigenschaften haben. Dies motiviert, ψ_e lediglich als Funktion der drei elastischen Anteile von $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\beta}$ und \mathbf{K} darzustellen:

$$\psi_e = \bar{\psi}_e(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\beta}_e, \mathbf{K}_e) \quad . \quad (3.36)$$

Für die Clausius-Duhem-Ungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{T} - \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_e} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_e} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \left[\boldsymbol{\Sigma} - \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \\ &+ \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_p + \left[\mathbf{M} - \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{K}_e} \right] \cdot \dot{\mathbf{K}} + \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{K}_e} \cdot \dot{\mathbf{K}}_p - \rho \dot{\psi}_p \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Hinreichende Bedingungen zur Erfüllung der Ungleichung sind die Elastizitätsgesetze

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_e} \quad , \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} \quad , \\ \mathbf{M} &= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{K}_e} \quad , \end{aligned} \quad (3.38)$$

zusammen mit der sogenannten inneren Dissipationsungleichung:

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_p + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{K}}_p - \rho \dot{\psi}_p \geq 0 \quad . \quad (3.39)$$

Die innere Dissipationsungleichung dient zur Herleitung von Evolutionsgleichungen, die das Verfestigungsverhalten des Materials beschreiben.

Kapitel 4

Verfestigungsregeln und Schädigung

4.1 Einleitung

Nach der Herleitung der Elastizitätsgesetze (3.38) werden Evolutionsgleichungen gesucht, die das plastische Materialverhalten (Verfestigung) beschreiben. Oft unterscheidet man zwischen zwei Arten der Verfestigung:

Zum einen wird das Aufstauen von Versetzungen an Korngrenzen und Einschlüssen durch *kinematische Verfestigung* dargestellt. Das gegenseitige Behindern des Gleitens von Versetzungen bezeichnet man als *isotrope Verfestigung*. Üblicherweise wird angenommen, dass beide Verfestigungsarten voneinander unabhängig sind. Dies impliziert eine additive Aufspaltung des plastischen Anteils der spezifischen freien Energiefunktion

$$\psi_p = \psi_p^{(iso)} + \psi_p^{(kin)} \quad (4.1)$$

in einen zur Beschreibung der kinematischen und einen weiteren zur Beschreibung der isotropen Verfestigung. Somit kann man beide Ansätze unabhängig voneinander betrachten.

Zur Abgrenzung des plastischen vom elastischen Werkstoffverhalten wird eine Fließfunktion im Spannungsraum definiert, die eine Funktion der Spannungen und inneren Variablen ist. Werte $f < 0$ stellen rein elastische Zustände dar. Plastisches Fließen kann nur für $f = 0$ stattfinden. Für festgehaltene innere Variablen wird durch die Gleichung $f = 0$ eine Fließfläche im Spannungsraum beschrieben. Während des plastischen Fließens kann sich die Fließfläche translatorisch bewegen. Diese Bewegung wird durch die kinematische Verfestigung dargestellt. Neben isotroper und kinematischer Verfestigung kann die Fließfunktion von Schädigungsvariablen abhängig sein. In der vorliegenden Arbeit wird isotrope Schädigung angenommen, die mittels einer skalarwertigen inneren Variablen formuliert ist. Insgesamt entspricht das angenommene Schädigungsgesetz dem von RABOTNOV [62] eingeführten Konzept der *effektiven Spannung*, kombiniert mit dem Prinzip der *Dehnungsäquivalenz*.

4.2 Isotrope und kinematische Verfestigung

Nach TSAKMAKIS [74] (vergleiche auch CHABOCHE [17]) bietet es sich an, die isotrope Verfestigung als Funktion des Skalars r darzustellen:

$$\psi_p^{(iso)} = \psi_p^{(iso)}(r) = \frac{c}{2\rho} (r^2 + 2r_0 r) \quad . \quad (4.2)$$

r ist eine innere, skalarwertige Größe vom Dehnungstyp, c und r_0 sind nichtnegative Materialparameter. Üblicherweise wird mit

$$R := \rho \frac{\partial \psi_p^{(iso)}}{\partial r} = c(r + r_0) \quad (4.3)$$

eine zu r thermodynamisch konjugierte Größe vom Spannungstyp eingeführt, die das Verhalten der isotropen Verfestigung beschreibt. Somit gilt:

$$\rho \dot{\psi}_p^{(iso)} = \rho \frac{\partial \psi_p^{(iso)}}{\partial r} \dot{r} = R \dot{r} \quad (4.4)$$

Zur Erweiterung der konstitutiven Theorie auf kinematische Verfestigung wird vorausgesetzt, dass additive Zerlegungen der plastischen Anteile der Verzerrungs- und Krümmungsmaße in Anteile kinematischer Verfestigung und Anteile existieren, die mit der dissipierten Arbeit zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_p &= \boldsymbol{\epsilon}_k + \boldsymbol{\epsilon}_d \quad , \\ \boldsymbol{\beta}_p &= \boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\beta}_d \quad , \\ \mathbf{K}_p &= \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_d \quad . \end{aligned}$$

Ferner wird dann angenommen, dass

$$\psi_p^{(kin)} = \hat{\psi}_p^{(kin)}(\boldsymbol{\epsilon}_k, \boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{K}_k) \quad (4.5)$$

gilt. Es folgt:

$$\dot{\psi}_p^{(kin)} = \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(kin)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k + \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(kin)}}{\partial \boldsymbol{\beta}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_k + \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(kin)}}{\partial \mathbf{K}_k} \cdot \dot{\mathbf{K}}_k \quad (4.6)$$

Dies wiederum motiviert, Größen vom Spannungstyp einzuführen, die zu $\boldsymbol{\epsilon}_k$, $\boldsymbol{\beta}_k$ und \mathbf{K}_k thermodynamisch konjugiert sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &:= \rho \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(kin)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_k} \quad , \\ \boldsymbol{\zeta} &:= \rho \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(kin)}}{\partial \boldsymbol{\beta}_k} \quad , \\ \mathbf{M}_k &:= \rho \frac{\partial \hat{\psi}_p^{(kin)}}{\partial \mathbf{K}_k} \quad . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die spannungsartigen Variablen \mathbf{Z} , $\boldsymbol{\zeta}$ und \mathbf{M}_k stellen Translationstensoren der kinematischen Verfestigung dar. Für die Dissipationsungleichung (3.39) folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int} &= (\mathbf{T} - \mathbf{Z}) \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_p + \\ &\quad + (\mathbf{M} - \mathbf{M}_k) \cdot \dot{\mathbf{K}}_p + \mathbf{Z} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d + \\ &\quad + \boldsymbol{\zeta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_d + \mathbf{M}_k \cdot \dot{\mathbf{K}}_d - R \dot{r} \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Es ist üblich, die von isotroper und kinematischer Verfestigung abhängigen Effekte getrennt auszuwerten. Aus diesem Grund teilt man \mathcal{D}_{int} in zwei Ungleichungen auf

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{int}^{(iso)} &= (\mathbf{T} - \mathbf{Z}) \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\zeta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_p + \\ &\quad + (\mathbf{M} - \mathbf{M}_k) \cdot \dot{\mathbf{K}}_p - R\dot{r} \geq 0 \quad , \\ \mathcal{D}_{int}^{(kin)} &= \mathbf{Z} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d + \boldsymbol{\zeta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_d + \mathbf{M}_k \cdot \dot{\mathbf{K}}_d \geq 0 \quad ,\end{aligned}\tag{4.9}$$

die hinreichende Bedingungen zur Erfüllung von Gleichung (4.11) sind und Restriktionen für die Evolutionsgleichungen des plastischen Fließens darstellen.

Für das weitere Vorgehen bietet es sich an, alle Spannungen und Dehnungen als Vektoren systematisch anzuordnen

$$\boldsymbol{\sigma} := \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_k := \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \boldsymbol{\zeta} \\ \mathbf{M}_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_p := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_p \\ \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{K}_p \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

womit sich für die Ungleichungen (4.11) folgende vereinfachten Beziehungen ergeben:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{int}^{(iso)} &= (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_k) \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - R\dot{r} \geq 0 \quad , \\ \mathcal{D}_{int}^{(kin)} &= \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d \geq 0 \quad .\end{aligned}\tag{4.11}$$

4.3 Fließbedingung und Evolutionsgleichungen

Sei

$$\begin{aligned}F &= f(\mathbf{T}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{M}_k, R) = \tilde{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_k, R) \\ &= \bar{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_k) - R - k_0 \\ k_0 &= \text{const.}\end{aligned}\tag{4.12}$$

die Darstellung der Fließfunktion im Spannungsraum. In Anlehnung an die klassische Plastizitätstheorie wird eine sogenannte assoziierte Normalenregel gewählt. Somit erhält man eine Evolutionsgleichung für die verallgemeinerten plastischen Verzerrungen von der Form:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \frac{\dot{s}}{\left\| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad .\tag{4.13}$$

Hierbei gibt $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ die Fließrichtung an. \dot{s} ist eine aus der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ zu bestimmende positive Größe, die als Rate der plastischen Bogenlänge bezeichnet wird und wie folgt definiert ist:

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \quad .\tag{4.14}$$

Die Norm in Gleichung (4.13) lautet:

$$\left\| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| = \sqrt{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad .\tag{4.15}$$

Als Fließfunktion wird eine konvexe Funktion im Spannungsraum

$$F = \sqrt{\Delta \mathbf{T} \cdot \mathcal{P} [\Delta \mathbf{T}] + \Delta \Sigma \cdot \mathcal{Q} [\Delta \Sigma] + \Delta \mathbf{M} \cdot \mathcal{R} [\Delta \mathbf{M}]} - R - k_0$$

mit zwei isotropen Tensoren 4. Stufe \mathcal{P} , \mathcal{Q} und einem isotropen Tensor 6. Stufe \mathcal{R} eingeführt. Man kann zeigen, dass f eine homogene Funktion ersten Grades in den Spannungen ist. Des Weiteren wird plastische Inkompressibilität gefordert, definiert durch

$$\det \mathbf{F}_p = 0 \quad . \quad (4.16)$$

Diese Bedingung ist bei metallischen Werkstoffen üblich. Im Falle mikromorpher Plastizität bietet es sich an, zusätzlich

$$\det \mathbf{f}_p = 0 \quad (4.17)$$

anzunehmen. Es kann gezeigt werden (siehe TSAKMAKIS [76]), dass diese Inkompressibilitätsannahmen im Falle kleiner Deformationen äquivalent zu den Zwangsbedingungen

$$\text{tr } \dot{\epsilon}_p = \text{tr } \dot{\beta}_p = 0 \quad (4.18)$$

sind. Folglich ist es zweckmäßig, die Fließfunktion mit den Spannungstensoren

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{T} &:= \mathbf{T}^D - \mathbf{Z}^D \quad , \\ \Delta \Sigma &:= \Sigma^D - \zeta^D \quad , \\ \Delta \mathbf{M} &:= \mathbf{M} - \mathbf{M}_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

darzustellen. Die isotropen Tensoren 4. Stufe sind unter Vernachlässigung der Spurterme abhängig von Produkten zweier linearer homogener Funktionen von Einheitstensoren zweiter Stufe. Da $\Delta \Sigma$ symmetrisch ist, kann man \mathcal{Q} mit lediglich einem Produkt von Einheitstensoren beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ijpq} &= p_1 \delta_{ip} \delta_{jq} + p_2 \delta_{iq} \delta_{jp} \quad , \\ \mathcal{Q}_{ijpq} &= q \delta_{ip} \delta_{jq} \quad . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Der isotrope Tensor 6. Stufe \mathcal{R} besteht aus 15 Produkten von jeweils drei Einheitstensoren zweiter Stufe (vergleiche mit MINDLIN [58]). Zur Vereinfachung beschränken wir uns allerdings auf einen Term:

$$\mathcal{R} = r_7 \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} \quad . \quad (4.21)$$

F ist somit eine Funktion von 4 Materialparametern (p_1, p_2, q, r_7) , wodurch sich folgende Gleichungen zur Beschreibung der Evolution der plastischen Verzerrungen ergeben:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial f}{\partial \sigma}\|} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial f}{\partial \sigma}\|} \frac{1}{k} \left(p_1 \mathbf{T}^D + p_2 (\mathbf{T}^D)^T \right) \quad , \\ \dot{\beta}_p &= \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial f}{\partial \sigma}\|} \frac{\partial f}{\partial \Sigma} = \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial f}{\partial \sigma}\|} \frac{1}{k} q \Sigma^D \quad , \\ \dot{\mathbf{K}}_p &= \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial f}{\partial \sigma}\|} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial f}{\partial \sigma}\|} \frac{1}{k} r_7 \mathbf{M} \quad , \\ k &:= k_0 + R \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Weiterhin benötigt man Differentialgleichungen zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens, bestehend aus isotroper und kinematischer Verfestigung. Einschränkungen an die zu wählenden Evolutionsgleichungen stellen die Restungleichungen (4.11) dar.

Nach TSAKMAKIS [76] bietet es sich an, die Evolution des Fließflächenradius k unter Einhaltung der gegebenen Restriktionen durch

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (1 - br) \frac{\dot{s}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|} , \\ \dot{k} &= \dot{R} = c\dot{r} \end{aligned} \quad (4.23)$$

zu beschreiben. In diesen Gleichungen bezeichnen b und c positive Materialparameter. Zur Erfüllung der Bedingung $\mathcal{D}_{int}^{(kin)} \geq 0$ (4.11b) genügen die Verfestigungsregeln:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k &= \dot{s} (e_1 \operatorname{tr}(\mathbf{Z}) \mathbf{1} + e_2 \mathbf{Z} + e_3 \mathbf{Z}^T) , \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_p - \dot{\boldsymbol{\beta}}_k &= \dot{s} (g_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{1} + g_2 \boldsymbol{\zeta}) , \\ \dot{\mathbf{K}}_p - \dot{\mathbf{K}}_k &= \dot{s} \boldsymbol{\mathcal{S}} [\mathbf{M}_k] , \end{aligned} \quad (4.24)$$

bestehend aus 5 Materialparametern e_1, e_2, e_3, g_1, g_2 und einem Materialtensor 6. Stufe $\boldsymbol{\mathcal{S}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ijkpqr} &= s_1 (\delta_{ij} \delta_{kp} \delta_{qr} + \delta_{jk} \delta_{ir} \delta_{pq}) + \\ &+ s_2 (\delta_{ij} \delta_{kq} \delta_{rp} + \delta_{ki} \delta_{jr} \delta_{pq}) + \\ &+ s_3 \delta_{ij} \delta_{kr} \delta_{pq} + c_4 \delta_{jk} \delta_{ip} \delta_{qr} + \\ &+ s_5 (\delta_{jk} \delta_{iq} \delta_{pr} + \delta_{ki} \delta_{jp} \delta_{qr}) + \\ &+ s_6 \delta_{ki} \delta_{jq} \delta_{rp} + c_7 \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} + \\ &+ s_8 (\delta_{jp} \delta_{kq} \delta_{ir} + \delta_{kp} \delta_{iq} \delta_{jr}) + \\ &+ s_9 \delta_{ip} \delta_{jr} \delta_{kq} + c_{10} \delta_{jp} \delta_{kr} \delta_{iq} + \\ &+ s_{11} \delta_{kp} \delta_{ir} \delta_{jq} , \end{aligned} \quad (4.25)$$

der von 11 Materialparametern (s_1, s_2, \dots, s_{11}) abhängt. Somit ergeben sich folgende Verfestigungsregeln für die kinematische Verfestigung:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \dot{s} (e_1 \operatorname{tr}(\mathbf{Z}) \mathbf{1} + e_2 \mathbf{Z} + e_3 \mathbf{Z}^T) , \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_k &= \dot{\boldsymbol{\beta}}_p - \dot{s} (g_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{1} + g_2 \boldsymbol{\zeta}) , \\ \dot{\mathbf{K}}_k &= \dot{\mathbf{K}}_p - \dot{s} \boldsymbol{\mathcal{S}} [\mathbf{M}_k] . \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.4 Skalare Schädigung

In diesem Abschnitt wird die mikromorphe Plastizitätstheorie auf skalare Schädigung erweitert, motiviert durch die Arbeiten von CHABOCHE [16], [18], LÄMMER [50], LÄMMER & TSAKMAKIS [51] und LEMAITRE [52], [54]. Grundlage bildet das von RABOTNOV [62] eingeführte Konzept der *effektiven Spannung*, das mit dem Prinzip der *Dehnungsäquivalenz* kombiniert wird.

Der im Allgemeinen anisotrope Charakter der Schädigung bleibt in dieser Arbeit unberücksichtigt. Vereinfachend wird angenommen, dass die Schädigung in alle Richtungen gleich wirkt und deshalb durch ein Skalar $d \in [0, 1]$ beschrieben werden kann. Für $d = 0$ ist der Werkstoff ungeschädigt. $d = 1$ repräsentiert den vollkommen geschädigten Zustand.

Ausgangspunkt der Theorie ist die Annahme, dass die Anteile der spezifischen freien Energiefunktion ψ

$$\psi = \psi_e + \psi_p^{(iso)} + \psi_p^{(kin)} \quad (4.27)$$

zusätzlich Funktionen der skalarwertigen Schädigung d

$$\begin{aligned} \psi_e &= \hat{\psi}_e(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\beta}_e, \mathbf{K}_e, d) \quad , \\ \psi_p^{(iso)} &= \hat{\psi}_p^{(iso)}(r, d) \quad , \\ \psi_p^{(kin)} &= \hat{\psi}_p^{(kin)}(\boldsymbol{\epsilon}_k, \boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{K}_k, d) \end{aligned} \quad (4.28)$$

sind. In Analogie zu LÄMMER [50] und LÄMMER & TSAKMAKIS [51] bieten sich folgende Ansätze für die Potenziale an:

$$\begin{aligned} \rho\psi_e &:= (1-d) \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_e \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}[\boldsymbol{\epsilon}_e] + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_e \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}[\boldsymbol{\beta}_e] + \frac{1}{2}\mathbf{K}_e \cdot \boldsymbol{\mathcal{C}}[\mathbf{K}_e] + \boldsymbol{\epsilon}_e \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}[\boldsymbol{\beta}] \right] \quad , \\ \rho\psi_p^{(iso)} &:= (1-d) \frac{1}{2} [cr^2 + 2R^{(0)}r] \quad , \\ \rho\psi_p^{(kin)} &:= (1-d) \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}}^A[\boldsymbol{\epsilon}_k] + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}}^B[\boldsymbol{\beta}_k] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\mathbf{K}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}}^C[\mathbf{K}_k] + \boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}}^D[\boldsymbol{\beta}_k] \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.29)$$

wobei $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^A$, $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^B$, $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^D$ Tensoren 4. Stufe und $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^C$ Tensoren 6. Stufe darstellen. Mit anderen Worten werden für ψ_e , $\psi_p^{(iso)}$ und $\psi_p^{(kin)}$ quadratische Potentiale relativ zu den jeweiligen Verzerrungen angenommen. Für den Fall der Isotropie werden die Materialtensoren ausführlich in Kapitel 6 diskutiert.

Zur Einbettung der um Schädigung erweiterten Theorie in einen thermodynamischen Rahmen betrachtet man den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung (3.32). Durch Einsetzen von (4.27) und (4.28) ergibt sich daraus die Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{T} - \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_e} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \left[\boldsymbol{\Sigma} - \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_p + \\ &+ \left[\mathbf{M} - \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{K}_e} \right] \cdot \dot{\mathbf{K}} + \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{K}_e} \cdot \dot{\mathbf{K}}_p - \rho \dot{\psi}_p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Hinreichende Bedingungen zur Erfüllung dieser Ungleichung sind 3 Elastizitätsgesetze

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &:= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_e} = (1-d) \rho [\boldsymbol{\mathcal{A}}[\boldsymbol{\epsilon}_e] + \boldsymbol{\mathcal{D}}[\boldsymbol{\beta}_e]] \quad , \\ \boldsymbol{\Sigma} &:= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} = (1-d) \rho [\boldsymbol{\mathcal{B}}[\boldsymbol{\beta}_e] + \boldsymbol{\mathcal{D}}[\boldsymbol{\epsilon}_e]] \quad , \\ \mathbf{M} &:= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{K}_e} = (1-d) \rho \boldsymbol{\mathcal{C}}[\mathbf{K}_e] \end{aligned} \quad (4.31)$$

und eine innere Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_p + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{K}}_p - \rho \dot{\psi}_p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad , \quad (4.32)$$

die eine Restriktion an die zu formulierenden Evolutionsgleichungen darstellt. Letztere kann wiederum in 2 Anteile aufgeteilt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{int}^{(p)} &= \mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_p + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{K}}_p - \rho \dot{\psi}_p \geq 0 \quad , \\ \mathcal{D}_{int}^{(d)} &= -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die erste Ungleichung ist die Motivation, Evolutionsgleichungen der isotropen und kinematischen Verfestigung zu formulieren (siehe Abschnitt 4.2). Aus der zweiten bestimmt man eine Evolutionsgleichung für den skalaren Schädigungsparameter d .

Bei dem im Folgenden präsentierten Konzept der effektiven Spannungen ersetzt man alle spannungswertigen Größen durch sogenannte effektive Spannungen. Die Größen vom Dehnungstyp bleiben gleich (Dehnungsäquivalenz, vergleiche mit CHABOCHE [17] bzw. RECKWERTH & TSAKMAKIS [64]):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(\text{eff})} &:= \frac{\mathbf{T}}{1-d} \quad , & \boldsymbol{\Sigma}^{(\text{eff})} &:= \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{1-d} \quad , & \mathbf{M}^{(\text{eff})} &:= \frac{\mathbf{M}}{1-d} \quad , \\ \mathbf{Z}^{(\text{eff})} &:= \frac{\mathbf{Z}}{1-d} \quad , & \boldsymbol{\zeta}^{(\text{eff})} &:= \frac{\boldsymbol{\zeta}}{1-d} \quad , & \mathbf{M}_k^{(\text{eff})} &:= \frac{\mathbf{M}_k}{1-d} \quad , \\ R^{(\text{eff})} &:= \frac{R}{1-d} \quad , & k^{(\text{eff})} &:= \frac{R}{1-d} + k_0 \quad . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Anschließend können verallgemeinerte Spannungsvektoren eingeführt werden:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\text{eff})} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{(\text{eff})} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{(\text{eff})} \\ \mathbf{M}^{(\text{eff})} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_k^{(\text{eff})} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{(\text{eff})} \\ \boldsymbol{\zeta}^{(\text{eff})} \\ \mathbf{M}_k^{(\text{eff})} \end{pmatrix} \quad . \quad (4.35)$$

Im Rahmen des angenommenen Schädigungskonzeptes wird die Fließfunktion wie folgt auf Schädigung erweitert:

$$\begin{aligned} F &= \tilde{f} \left(\boldsymbol{\sigma}^{(\text{eff})}, \boldsymbol{\sigma}_k^{(\text{eff})}, R^{(\text{eff})} \right) \\ &= \bar{f} \left(\boldsymbol{\sigma}^{(\text{eff})}, \boldsymbol{\sigma}_k^{(\text{eff})} \right) - R^{(\text{eff})} - k_0 \quad . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Das anschließende Ersetzen der effektiven Spannungen durch $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}_k$ und R bedingt eine zusätzliche Abhängigkeit der Fließfunktion von der skalaren Schädigung:

$$\begin{aligned} F &= \hat{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_k, R, d) \\ &= \hat{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_k, d) - \frac{R}{1-d} - k_0 \quad . \end{aligned} \quad (4.37)$$

In Analogie zum Fall ohne skalarer Schädigung erhält man schließlich

$$F = \frac{1}{1-d} \sqrt{\Delta \mathbf{T} \cdot \mathcal{P}[\Delta \mathbf{T}] + \Delta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathcal{Q}[\Delta \boldsymbol{\Sigma}] + \Delta \mathbf{M} \cdot \mathcal{R}[\Delta \mathbf{M}]} - \frac{R}{1-d} - k_0 \quad . \quad (4.38)$$

Weiterhin lässt sich zeigen, dass Normalenregeln

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_p &= \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\| k^{(\text{eff})} (1-d)} \left(p_1 \mathbf{T}^D + p_2 (\mathbf{T}^D)^T \right) , \\
\dot{\beta}_p &= \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\| k^{(\text{eff})} (1-d)} q \boldsymbol{\Sigma}^D , \\
\dot{\mathbf{K}}_p &= \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\| k^{(\text{eff})} (1-d)} r_7 \mathbf{M}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

und Evolutionsgleichungen der isotropen- und kinematischen Verfestigung

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= (1-br) \frac{\dot{s}}{\|\frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\|} , \\
\dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_k &= \frac{\dot{s}}{1-d} (e_1 \text{tr}(\mathbf{Z}) \mathbf{1} + e_2 \mathbf{Z} + e_3 \mathbf{Z}^T) , \\
\dot{\beta}_p - \dot{\beta}_k &= \frac{\dot{s}}{1-d} (g_1 \text{tr}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{1} + g_2 \boldsymbol{\zeta}) , \\
\dot{\mathbf{K}}_p - \dot{\mathbf{K}}_k &= \frac{\dot{s}}{1-d} \boldsymbol{\mathcal{S}}[\mathbf{M}]
\end{aligned} \tag{4.40}$$

hinreichende Bedingungen zur Erfüllung von $\mathcal{D}_{int}^{(p)}$ sind. Die Differentialgleichungen (4.40b)-(4.40d) unterscheiden sich vom Gleichungssatz (4.24) lediglich durch den Faktor $(1-d)$ im Nenner. Die Evolutionsgleichung der isotropen Verfestigung bleibt unverändert (vergleiche mit RECKWERTH & TSAKMAKIS [64]).

Weiterhin muss die Ungleichung (4.33b) erfüllt werden. Hierzu führt man eine zu d thermodynamisch konjugierte Variable Ω ein

$$\Omega := \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} , \tag{4.41}$$

die als Energiefreisetzungsrates bezeichnet wird. Leitet man nun die anfangs definierten Potentiale (4.29) nach d ab, entsteht

$$\begin{aligned}
-\Omega &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_e \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}[\boldsymbol{\epsilon}_e] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_e \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}[\boldsymbol{\beta}_e] + \frac{1}{2} \mathbf{K}_e \cdot \boldsymbol{\mathcal{C}}[\mathbf{K}_e] + \boldsymbol{\epsilon}_e \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}}[\boldsymbol{\beta}] + \\
&+ \frac{1}{2} [cr^2 + 2R^{(0)}r] + \\
&+ \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}}^A[\boldsymbol{\epsilon}_k] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}}^B[\boldsymbol{\beta}_k] + \frac{1}{2} \mathbf{K}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}}^C[\mathbf{K}_k] + \boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}}^D[\boldsymbol{\beta}_k] .
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Eine sehr einfache Evolutionsgleichung für d , welche (4.33b) erfüllt, lautet

$$\dot{d} = -\dot{s} \Omega \alpha_1 , \tag{4.43}$$

wobei α_1 einen Materialparameter darstellt. Im Weiteren wird mit dieser Evolutionsgleichung gerechnet.

Kapitel 5

Diskretisierung der Bilanzgleichungen

Eine analytische Lösung des Gleichungssystems, bestehend aus den kinematischen Beziehungen, Impuls- und Drehimpulsbilanzgleichungen und Materialgesetzen, ist im Allgemeinen nicht möglich. Deshalb erfolgt zur Betrachtung beliebig komplexer mechanischer Strukturen eine numerische Umsetzung des Modells im Rahmen der *Methode der Finiten Elemente* (FEM).

Die näherungsweise Berechnung mittels FEM erfordert eine Überführung der Bilanzgleichungen in eine schwache Form. Da ein Newton-Verfahren zur Lösung herangezogen wird, benötigt man weiterhin eine Linearisierung der nichtlinearen Gleichungen. Diese bezieht sich hier auf die jeweils letzte Gleichgewichtskonfiguration. Die ermittelten Grundgleichungen werden diskretisiert und auf Elementebene mit einem *Operator-Split-Verfahren* integriert (siehe z. B. SIMO [67]). Anschließend folgen die Assemblierung des globalen Gleichungssystems und Lösung der globalen Gleichgewichtssiteration.

Die FE-Formulierung wird für ein zweidimensionales Problem eingehend dargelegt. In dieser Arbeit beschränkt man sich auf ein *isoparametrisches* 8-Knoten-Scheibenelement für den ebenen Verzerrungszustand. Dieses Element wird über eine Benutzerschnittstelle sowohl in das kommerzielle FE-Programm ABAQUS als auch in die frei verfügbare Software DAEdalon¹ eingebunden. Weiterhin werden konkrete Hinweise für den Zusammenbau der notwendigen Matrizen- und Konstantenvektoren gegeben. Die Verallgemeinerung der Ideen und Vorgehensweisen zur Lösung von dreidimensionalen Aufgaben liegt auf der Hand.

5.1 Variationsformulierung

Das zu lösende Randwertproblem wird durch die Kinematik, Bilanzgleichungen, konstitutive Beziehungen und durch Randbedingungen charakterisiert. Zu den Randbedingungen zählen Neumannsche Randbedingungen für Spannungen und Dirichletsche Randbedingungen für u_i und h_{ij} :

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^0 & \text{auf } \partial\mathcal{R}_t^{u_i} & \quad \text{und} \quad h_{ij} = h_{ij}^0 & \text{auf } \partial\mathcal{R}_t^{h_{ij}} & , \\ T_{ij} n_j &= t_i^0 & \text{auf } \partial\mathcal{R}_t^{t_i} & \quad \text{und} \quad M_{ijk} n_k = \Lambda_{ij}^0 & \text{auf } \partial\mathcal{R}_t^{\Lambda_{ij}} & . \end{aligned} \tag{5.1}$$

¹DAEdalon ist eine in der Arbeitsgruppe Elastomechanik des Fachbereichs Mechanik der Technischen Universität Darmstadt entwickelte frei verfügbare FE-Software ([www. DAEdalon.org](http://www.DAEdalon.org)).

Dabei müssen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{R}_t^{u_i} \cup \partial\mathcal{R}_t^{t_i} &= \partial\mathcal{R}_t \quad \text{und} \quad \partial\mathcal{R}_t^{u_i} \cap \partial\mathcal{R}_t^{t_i} = \emptyset, \\ \partial\mathcal{R}_t^{h_{ij}} \cup \partial\mathcal{R}_t^{\Lambda_{ij}} &= \partial\mathcal{R}_t \quad \text{und} \quad \partial\mathcal{R}_t^{h_{ij}} \cap \partial\mathcal{R}_t^{\Lambda_{ij}} = \emptyset \end{aligned} \quad (5.2)$$

erfüllt sein. Somit ist auf einem Rand mit der Spannungsrandbedingung t_i^0 keine Verschiebung u_i^0 und auf einem Rand mit der Momentenspannungsrandbedingung Λ_{ij}^0 kein h_{ij}^0 (und umgekehrt) erlaubt. Hierbei kennzeichnen \mathcal{R}_t bzw. $\partial\mathcal{R}_t$ das Volumen und den Rand des Körpers.

Grundlage der FE-Methode bildet die anfangs erwähnte schwache Formulierung, die aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebung folgt. Bei mikromorphen Theorien benötigt man neben der schwachen Form der Impuls- auch die der Drehimpulsbilanz.

Durch Bildung des inneren Produktes zwischen der Impulsbilanz und einer vektorwertigen Testfunktion bei anschließender Integration über das Lösungsgebiet erhält man die schwache Form dieser Bilanzgleichung. Die Vorgehensweise zur Bestimmung der schwachen Form der Drehimpulsbilanz ist identisch. In diesem Fall benötigt man jedoch eine tensorwertige Testfunktion. Zuerst betrachten wir die Impulsbilanz (3.26). Nach Multiplikation mit einer Testfunktion δu_p und Integration über das Volumen V entsteht die Form

$$\mathcal{F}_I := \int_{\mathcal{R}_t} \left[\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q} \delta u_p + f_p \delta u_p \right] dV = 0 \quad . \quad (5.3)$$

Mit der Umformung

$$\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q} \delta u_p = \frac{\partial}{\partial x_q} [T_{pq} \delta u_p] - T_{pq} \frac{\partial \delta u_p}{\partial x_q} \quad (5.4)$$

folgt

$$\int_{\mathcal{R}_t} \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q} \delta u_p dV = \int_{\mathcal{R}_t} \left[\frac{\partial}{\partial x_q} [T_{pq} \delta u_p] - T_{pq} \frac{\partial \delta u_p}{\partial x_q} \right] dV \quad . \quad (5.5)$$

Auf den ersten Term dieser Gleichung wendet man den Gaußschen Satz an:

$$\int_{\mathcal{R}_t} \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q} \delta u_p dV = \int_{\partial\mathcal{R}_t} T_{pq} n_q \delta u_p dA - \int_{\mathcal{R}_t} T_{pq} \frac{\partial \delta u_p}{\partial x_q} dV \quad . \quad (5.6)$$

Unter Beachtung der Cauchyschen Formel lautet die schwache Form der Impulsbilanz:

$$\mathcal{F}_I = \int_{\partial\mathcal{R}_t} t_p \delta u_p dA - \int_{\mathcal{R}_t} T_{pq} \frac{\partial \delta u_p}{\partial x_q} dV + \int_{\mathcal{R}_t} f_p \delta u_p dV = 0 \quad . \quad (5.7)$$

Aus der lokalen Form (3.27) der Drehimpulsbilanz leitet man durch Integration über das Volumen des materiellen Körpers und Multiplikation mit der Testfunktion δh_{pq}

$$\mathcal{F}_D := \int_{\mathcal{R}_t} \left[\Phi_{pq} - \Sigma_{pq} + T_{pq} + \frac{\partial M_{pqr}}{\partial x_r} \right] \delta h_{pq} dV = 0 \quad (5.8)$$

her. Analog zu (5.3) wendet man auf $\int_V \frac{\partial M_{pqr}}{\partial x_r} \delta h_{pq} dV$ den Gaußschen Satz an:

$$\int_{\mathcal{R}_t} \frac{\partial M_{pqr}}{\partial x_r} \delta h_{pq} dV = \int_{\partial\mathcal{R}_t} M_{pqr} n_r \delta h_{pq} dA - \int_{\mathcal{R}_t} M_{pqr} \frac{\partial \delta h_{pq}}{\partial x_r} dV \quad . \quad (5.9)$$

Nutzt man die Momentenspannungsrandbedingungen (5.1b), so folgt für die schwache Form der Drehimpulsbilanz:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_D &= \int_{\mathcal{R}_t} [\Phi_{pq} - \Sigma_{pq} + T_{pq}] \delta h_{pq} dV + \\ &+ \int_{\partial\mathcal{R}_t} \Lambda_{pq} \delta h_{pq} dA - \int_{\mathcal{R}_t} M_{pqr} \frac{\partial \delta h_{pq}}{\partial x_r} dV = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hierbei sind \mathcal{F}_I und \mathcal{F}_D für einen bekannten Anfangszustand des Materials Funktionale der Unbekannten \mathbf{u} , \mathbf{h} und der Testfunktionen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I &:= \mathcal{F}_I(\mathbf{u}, \mathbf{h}, \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{h}) \quad , \\ \mathcal{F}_D &:= \mathcal{F}_D(\mathbf{u}, \mathbf{h}, \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{h}) \quad . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die gesuchten Lösungsfunktionen der Unbekannten \mathbf{u} und \mathbf{h} sowie die Menge aller möglichen Variationen entstammen den Funktionenräumen

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{u_i \mid u_i \in \mathcal{H}^1, \quad u_i = u_i^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{u_i}\} \quad , \\ \mathcal{T} &= \{h_{ij} \mid h_{ij} \in \mathcal{H}^1, \quad h_{ij} = h_{ij}^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{h_{ij}}\} \quad , \\ \mathcal{V} &= \{\delta u_i \mid \delta u_i \in \mathcal{H}^1, \quad \delta u_i = \delta u_i^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{u_i}\} \quad , \\ \mathcal{W} &= \{\delta h_{ij} \mid \delta h_{ij} \in \mathcal{H}^1, \quad \delta h_{ij} = \delta h_{ij}^0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{R}_t^{h_{ij}}\} \quad . \end{aligned} \quad (5.12)$$

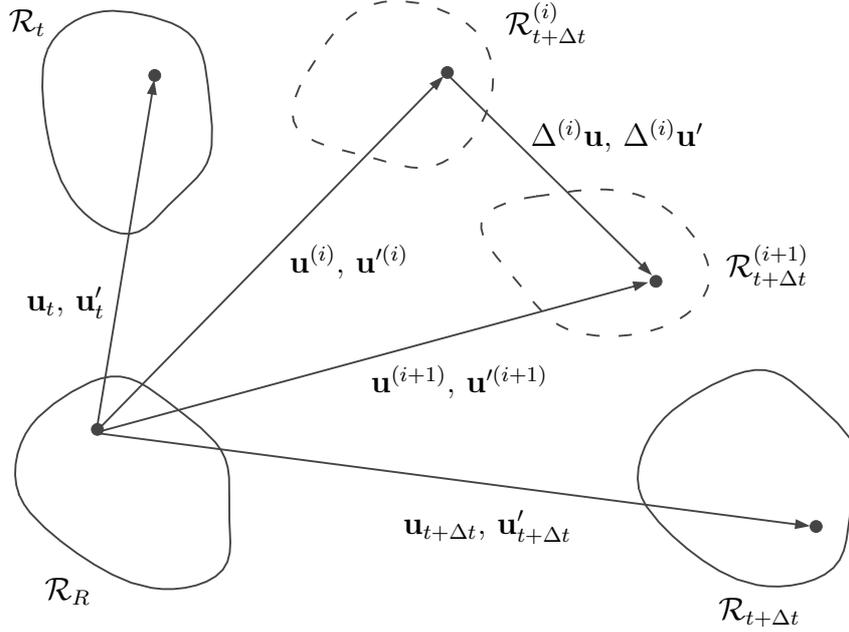
\mathcal{H}^1 ist hierbei die Menge aller Lösungsfunktionen, deren erste partielle Ableitung über den Raumbereich quadrat-integrierbar ist. Somit fordert man lediglich die Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen von den Lösungsfunktionen (vergleiche mit GRAMMENOUDIS [35]). Zusammen mit der Kinematik und den konstitutiven Beziehungen bilden die Gleichungen (5.7) und (5.10) die schwache Form des Randwertproblems.

5.2 Linearisierung

Das im Allgemeinen nichtlineare Randwertproblem, bestehend aus den Gleichungen (5.7) und (5.10), kann durch ein Näherungsverfahren iterativ gelöst werden. Dazu betrachtet man die Bewegung des materiellen Körpers \mathcal{B} , dessen Gleichgewichtslagen zum Zeitpunkt t_0 (Referenzkonfiguration) und t bekannt sind. In der Referenzkonfiguration nimmt \mathcal{B} den Raumbereich \mathcal{R}_R und zum Zeitpunkt t den Raumbereich \mathcal{R}_t ein. Gesucht ist das Gleichgewicht zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ mit zugehörigem Lösungsgebiet $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$, zu dessen Bestimmung so lange Zustände $(\mathcal{R}_{t+\Delta t}^1, \dots, \mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}, \dots)$ iterativ ermittelt werden, bis näherungsweise das Gleichgewicht erfüllt ist (siehe Abbildung 5.1). Man befindet sich somit in einem Zustand $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ mit Makro- und Mikroverschiebungen $\mathbf{u}^{(i)}$, $\mathbf{u}'^{(i)}$ und möchte die inkrementellen Verschiebungen $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$ und $\Delta^{(i)}\mathbf{u}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(i+1)} &= \mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{u} \quad , \\ \mathbf{u}'^{(i+1)} &= \mathbf{u}'^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{u}' \end{aligned} \quad (5.13)$$

zum Zustand $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$ berechnen. Hierfür bietet sich wegen der quadratischen Konvergenz das Newton-Verfahren an. Bei diesem Verfahren wird der unbekannte Zustand $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$ durch eine Taylorreihenentwicklung der nichtlinearen Gleichungen (5.7) und (5.10) im Zustand $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ ermittelt.

Abbildung 5.1: Iterative Bestimmung der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt $t + \Delta t$

Die Feldgleichungen mikromorpher Theorien sind Funktionale der Makroverschiebungen \mathbf{u} und Mikroverschiebungen \mathbf{u}' . Folglich ergibt sich für die Taylorreihenentwicklungen von Impuls- und Drehimpulsbilanz an der Stelle (i) unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I^{(i+1)}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') &= \mathcal{F}_I^{(i)}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') + \Delta^{(i)}\mathcal{F}_I \quad , \\ \mathcal{F}_D^{(i+1)}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') &= \mathcal{F}_D^{(i)}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') + \Delta^{(i)}\mathcal{F}_D \quad . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Falls zur $(i + 1)$ -ten Iteration ein stationärer Zustand erlangt wird, gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I^{(i+1)}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') &= 0 \quad , \\ \mathcal{F}_D^{(i+1)}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Es folgen unmittelbar die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)}\mathcal{F}_I &= -\mathcal{F}_I^{(i)}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') \quad , \\ \Delta^{(i)}\mathcal{F}_D &= -\mathcal{F}_D^{(i)}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') \quad . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die rechten Seiten bilden das sogenannte Residuum, während die linken Seiten sich aus Variationen des jeweiligen Funktionals ergeben (ELSGOLC [23]). Diese lassen sich als Funktion zweier vektorwertiger Variablen, den Mikro- und Makroverschiebungen

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)}\mathcal{F}_I &= \frac{d}{d\lambda} \left[\mathcal{F}_I^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)} + \lambda\Delta^{(i)}\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}'^{(i)} + \mu\Delta^{(i)}\mathbf{u}', \delta\mathbf{u}') \right]_{\lambda=\mu=0} + \frac{d}{d\mu} \left[\mathcal{F}_I^{(i)}(\dots) \right]_{\lambda=\mu=0} \quad , \\ \Delta^{(i)}\mathcal{F}_D &= \frac{d}{d\lambda} \left[\mathcal{F}_D^{(i)}(\dots) \right]_{\lambda=\mu=0} + \frac{d}{d\mu} \left[\mathcal{F}_D^{(i)}(\dots) \right]_{\lambda=\mu=0} \end{aligned}$$

darstellen. Im nächsten Schritt ersetzt man die inkrementellen Mikroverschiebungen durch einen Mikroverschiebungsgradienten, der sich aus der Beziehung

$$\begin{aligned}\Delta^{(i)}\mathbf{h}(\mathbf{u}'^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{u}') &= \frac{d}{d\mu} [\mathbf{h}(\mathbf{u}'^{(i)} + \mu\Delta^{(i)}\mathbf{u}')]_{\lambda=\mu=0} \\ &= \frac{\partial\Delta^{(i)}\mathbf{u}'}{\partial\mathbf{X}}\end{aligned}\quad (5.17)$$

ergibt. Da die Theorie für kleine Verformungen formuliert ist, gilt näherungsweise (siehe Gleichungssatz 2.59):

$$\frac{\partial\Delta^{(i)}\mathbf{u}'}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial\Delta^{(i)}\mathbf{u}'}{\partial\mathbf{x}^{(i)}}\mathbf{F}^{(i)} \approx \frac{\partial\Delta^{(i)}\mathbf{u}'}{\partial\mathbf{x}^{(i)}} \quad . \quad (5.18)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich der Mikroverschiebungsgradient der $(i+1)$ -ten Iteration durch den bekannten Tensor des letzten Inkrementes und dem inkrementellen Verschiebungsgradienten bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{(i+1)} &= \mathbf{h}(\mathbf{u}'^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{u}') = \frac{\partial(\mathbf{u}'^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{u}')}{\partial\mathbf{X}'} \\ &= \mathbf{h}^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{h} \quad .\end{aligned}\quad (5.19)$$

Somit wird:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_I^{(i+1)} &= \mathcal{F}_I(\mathbf{u}^{(i+1)}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{u}'^{(i+1)}, \delta\mathbf{u}') \\ &= \mathcal{F}_I(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{h}^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{h}, \delta\mathbf{h}) \quad , \\ \mathcal{F}_D^{(i+1)} &= \mathcal{F}_D(\mathbf{u}^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{h}^{(i)} + \Delta^{(i)}\mathbf{h}, \delta\mathbf{h}) \quad .\end{aligned}\quad (5.20)$$

Des Weiteren benötigt man die Linearisierungen des Makroverschiebungsgradienten und von $\text{GRAD } \mathbf{h}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} [\mathbf{H}^{(i)}]_{\lambda=\mu=0} &= \frac{\partial\Delta^{(i)}\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} \approx \frac{\partial\Delta^{(i)}\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^{(i)}} \quad , \\ \frac{d}{d\mu} \left[\frac{\partial\mathbf{h}^{(i)}}{\partial\mathbf{X}} \right]_{\lambda=\mu=0} &= \frac{\partial\Delta^{(i)}\mathbf{h}}{\partial\mathbf{X}} \approx \frac{\partial\Delta^{(i)}\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}^{(i)}} \quad .\end{aligned}\quad (5.21)$$

Aus diesen Gleichungen folgen unmittelbar die Linearisierungen der drei Spannungstensoren. Hierzu nutzt man aus, dass \mathbf{T} , Σ und \mathbf{M} Funktionen folgender Größen sind:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{H}, \mathbf{h}) \quad , \\ \Sigma &= \bar{\Sigma}(\mathbf{H}, \mathbf{h}) \quad , \\ \mathbf{M} &= \bar{\mathbf{M}}(\text{GRAD } \mathbf{h}) \quad .\end{aligned}\quad (5.22)$$

Zur Linearisierung der Spannungs- und Momentenspannungstensoren werden die totalen Ableitungen dieser Größen nach den Parametern λ und μ gebildet:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} [T_{pq}^{(i)}]_{\lambda=\mu=0} &\approx \frac{\partial T_{pq}^{(i)}}{\partial H_{ij}^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} u_i}{\partial x_j^{(i)}} , \\
\frac{d}{d\mu} [T_{pq}^{(i)}]_{\lambda=\mu=0} &= \frac{\partial T_{pq}^{(i)}}{\partial h_{ij}^{(i)}} \Delta^{(i)} h_{ij} , \\
\frac{d}{d\lambda} [\Sigma_{pq}^{(i)} - T_{pq}^{(i)}]_{\lambda=\mu=0} &\approx \frac{\partial (\Sigma_{pq}^{(i)} - T_{pq}^{(i)})}{\partial H_{ij}^{(i)}} \frac{\partial \Delta^{(i)} u_i}{\partial x_j^{(i)}} , \\
\frac{d}{d\mu} [\Sigma_{pq}^{(i)} - T_{pq}^{(i)}]_{\lambda=\mu=0} &= \frac{\partial (\Sigma_{pq}^{(i)} - T_{pq}^{(i)})}{\partial h_{ij}^{(i)}} \Delta^{(i)} h_{ij} , \\
\frac{d}{d\mu} [M_{pqr}^{(i)}]_{\lambda=\mu=0} &\approx \frac{\partial M_{pqr}^{(i)}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{X}})^{(i)}_{ijk}} \frac{\partial \Delta^{(i)} h_{ij}}{\partial x_k^{(i)}} .
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Die Materialtangente werden hier im Gegensatz zur üblichen Vorgehensweise durch Ableiten der Spannungen nach den Verschiebungsgradienten und nicht nach den Verzerrungen (siehe z. B. HOLZAPFEL [43]) bestimmt. Vereinfachend gelten die Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{(1)} &:= \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial \mathbf{H}^{(i)}} , & \mathcal{T}_{(2)} &:= \frac{\partial \mathbf{T}^{(i)}}{\partial \mathbf{h}^{(i)}} , \\
\mathcal{T}_{(3)} &:= \frac{\partial (\boldsymbol{\Sigma}^{(i)} - \mathbf{T}^{(i)})}{\partial \mathbf{H}^{(i)}} , & \mathcal{T}_{(4)} &:= \frac{\partial (\boldsymbol{\Sigma}^{(i)} - \mathbf{T}^{(i)})}{\partial \mathbf{h}^{(i)}} , \\
\mathcal{T}_{(5)} &:= \frac{\partial \mathbf{M}^{(i)}}{\partial (\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{X}})^{(i)}} .
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage zur Ermittlung der linearisierten Impulsbilanz. Es wird hierbei angenommen, dass $f_p = 0$ und $\partial \mathcal{R}_t^{t_i} = \emptyset$:

$$\mathcal{F}_I^{(i)} = - \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} T_{pq}^{(i)} \frac{\partial \delta u_p}{\partial x_q^{(i)}} dV_{t+\Delta t}^{(i)} . \tag{5.25}$$

Somit beschränkt man sich auf die Linearisierung der Arbeit innerer Kräfte, wobei für das Volumenelement der Konfiguration $\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}$ die Notation $dV_{t+\Delta t}^{(i)}$ steht.

Die Linearisierung $\Delta^{(i)} \mathcal{F}_I$ ergibt sich durch Bildung der totalen Ableitungen von $\mathcal{F}_I^{(i)}$ nach λ und μ . Man erhält eine aus zwei Termen bestehende Gleichung

$$\begin{aligned}
\Delta^{(i)} \mathcal{F}_I &= - \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \frac{\partial \delta u_p}{\partial x_q^{(i)}} \mathcal{T}_{(1)pqij} \frac{\partial \Delta^{(i)} u_i}{\partial x_j^{(i)}} dV_{t+\Delta t}^{(i)} + \\
&\quad - \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \frac{\partial \delta u_p}{\partial x_q^{(i)}} \mathcal{T}_{(2)pqij} \Delta^{(i)} h_{ij} dV_{t+\Delta t}^{(i)} ,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

wobei der erste dem klassischen Anteil entspricht und der zweite aus der Ableitung des Spannungstensors \mathbf{T} nach dem Mikroverschiebungsgradienten resultiert.

Die Linearisierung der Drehimpulsbilanz gestaltet sich analog. Unter Vernachlässigung der Belastungen

$$\Phi_{pq} = \Lambda_{pq} = 0 \quad (5.27)$$

und für $\partial \mathcal{R}_t^{\Lambda_{ij}} = \emptyset$ gilt:

$$\mathcal{F}_D^{(i)} = - \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left[(\Sigma_{pq}^{(i)} - T_{pq}^{(i)}) h_{pq}^{(i)} + M_{pqr}^{(i)} \frac{\partial h_{pq}^{(i)}}{\partial x_r^{(i)}} \right] dV_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (5.28)$$

Der Herleitung zur Bestimmung der linearisierten Impulsbilanz folgend, werden die totalen Ableitungen des Funktionals $\mathcal{F}_D^{(i)}$ nach den Parametern λ und μ bestimmt:

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)} \mathcal{F}_D = & - \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \delta h_{pq}^{(i)} \mathcal{T}_{(3)pqij} \frac{\partial \Delta^{(i)} u_i}{\partial x_j^{(i)}} dV_{t+\Delta t}^{(i)} + \\ & - \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \delta h_{pq}^{(i)} \mathcal{T}_{(4)pqij} \Delta^{(i)} h_{ij} dV_{t+\Delta t}^{(i)} + \\ & - \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \frac{\partial \delta h_{pq}^{(i)}}{\partial x_r^{(i)}} \mathcal{T}_{(5)pqrijk} \frac{\partial \Delta^{(i)} h_{ij}}{\partial x_k^{(i)}} dV_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (5.29) \end{aligned}$$

Die Tangente besteht aus drei Anteilen, wobei die Momentenspannungen lediglich im letzten Term enthalten sind.

5.3 Diskretisierung mittels FEM

Zur Diskretisierung mittels der FE-Methode (siehe z. B. BATHE [8], BURNETT [14], CRISFIELD [20], REDDY [63], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [81]) nähert man den Raumbereich \mathcal{B} des materiellen Körpers durch eine Anzahl n_e finiter Elemente an. Die Vereinigung aller Teilkörper muss wiederum den Gesamtkörper ergeben. Es dürfen dabei keine Überlappungen der Elemente und auch keine Zwischenräume entstehen. Die Approximation des Randes besteht aus den Linien (im 2D) oder Flächen (im 3D) der am Rand liegenden Elemente. Auf diesen Randlinien bzw. -flächen bringt man die Bedingungen (5.1) auf. Man vermeidet somit im Gegensatz zum Ritzschen Verfahren die Wahl eines Näherungsansatzes für das gesamte Gebiet (siehe z. B. GROSS ET AL. [37]).

Im nächsten Schritt werden Feldgrößen (z. B. Verschiebungen) durch Ansatzfunktionen approximiert. Diese Funktionen sind jeweils lediglich im Bereich eines Elementes von Null verschieden und müssen beim Übergang von einem zum anderen Element problemabhängige Stetigkeitsanforderungen erfüllen. Elemente mit Ansatzfunktionen, welche den Stetigkeitsanforderungen genügen, heißen *konform* (SCHWARZ [66]). Man schränkt folglich die Funktionenräume \mathcal{S} , \mathcal{T} , \mathcal{V} und \mathcal{W} auf endlich dimensionale Näherungen ein mit der Forderung an die Näherungslösung, dass ihre Residuen im integralen Mittel verschwinden.

Zur Interpolation von Geometrie und Feldgrößen eignet sich ein *isoparametrischer Ansatz*. Hierunter versteht man Elemente, für welche die funktionelle Darstellung des Deformationsverhaltens auch zur Interpolation der Geometrie genutzt werden (GALLAGHER [36]). In dieser Arbeit sind die Ansatzfunktionen Polynome zweiten Grades der Serendipity-Klasse (siehe ABAQUS-Theorie-Manual [1]), deren Form bei einer linearen Transformation von einem kartesischen

Koordinatensystem in ein anderes unverändert bleibt.

Neben den Verschiebungen \mathbf{u} werden bei mikromorphen Theorien die Mikrodeformationsgradienten \mathbf{h} approximiert. Hierbei bietet es sich an, Ansatzfunktionen gleicher Ordnung für beide Feldgrößen zu wählen.

Der Funktionsverlauf ist durch die Funktionswerte der Knotenpunkte, den sogenannten *Knotenvariablen*, gegeben. Zur Interpolation zwischen den Knoten dienen Linearkombinationen der Formfunktionen mit den Knotenvariablen als Koeffizienten. Es wird

$$\begin{aligned}\Delta^{(i)}u_i &= \sum_{A=1}^{n_u} N_A^u \Delta^{(i)}u_{iA} \quad , \\ \Delta^{(i)}h_{ij} &= \sum_{B=1}^{n_h} N_B^h \Delta^{(i)}h_{ijB}\end{aligned}\tag{5.30}$$

angesetzt, wobei n_u und n_h die Anzahl der Knotenpunkte mit den Freiheitsgraden \mathbf{u} oder \mathbf{h} sind. $\Delta^{(i)}u_{iA}$ und $\Delta^{(i)}\omega_{ijB}$ bezeichnen die Knotenvariablen. Die Ansatzfunktionen N_A^u und N_B^h sind typischerweise Polynome und haben die Eigenschaft aufzuweisen, in einem Knotenpunkt gleich 1 zu sein und in den anderen Knotenpunkten des Elementes zu verschwinden. Man summiert über die mit A bzw. B bezeichneten Knoten des Gebietes.

Wie bereits erwähnt, werden sowohl für die Verschiebungen als auch für die Koeffizienten des Mikroverschiebungsgradienten quadratische Ansätze gewählt, wodurch n_u und n_h identisch sind. Zusätzlich werden Ansätze für die Testfunktionen $\delta\mathbf{u}$ und $\delta\mathbf{h}$ benötigt. In dieser Arbeit sind die Ansatzfunktionen der Testfunktionen identisch mit denen aus Gleichungssatz (5.30):

$$\begin{aligned}\delta u_p &= \sum_{C=1}^{n_u} N_C^u \delta u_{pC} \quad , \\ \delta h_{pq} &= \sum_{D=1}^{n_h} N_D^h \delta h_{pqD} \quad .\end{aligned}\tag{5.31}$$

Hierbei sind δu_{pC} und δh_{pqD} so zu wählen, dass die kinematischen Randbedingungen erfüllt werden. Summiert wird über die mit C und D bezeichneten Knoten des Gebietes.

In den schwachen Formen der Bilanzgleichungen treten nur erste Ableitungen auf. Da dann lediglich für die Knotenvariablen selbst Rand- und Übergangsbedingungen zu formulieren sind, genügen die quadratischen Ansätze den Stetigkeitsanforderungen.

Setzt man (5.30) und (5.31) in die diskretisierten Bilanzgleichungen ein, so ergibt sich nach Einführung der Definitionen von 4 Größen (zur Wahrung der Übersicht wird auf Summenzeichen verzichtet)

$$\begin{aligned}K_{pCiA}^{uu} &:= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \frac{\partial N_C^u}{\partial x_q^{(i)}} \mathcal{T}_{(1)pqij} \frac{\partial N_A^u}{\partial x_j^{(i)}} dV_{t+\Delta t}^{(i)} \quad , \\ K_{pCijB}^{uh} &:= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \frac{\partial N_C^u}{\partial x_q^{(i)}} \mathcal{T}_{(2)pqij} N_B^h dV_{t+\Delta t}^{(i)}\end{aligned}\tag{5.32}$$

und

$$\begin{aligned}K_{pqDiA}^{hu} &:= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} N_D^h \mathcal{T}_{(3)pqij} \frac{\partial N_A^u}{\partial x_j^{(i)}} dV_{t+\Delta t}^{(i)} \quad , \\ K_{pqDijB}^{hh} &:= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left[N_D^h \mathcal{T}_{(4)pqij} N_B^h + \frac{\partial N_D^h}{\partial x_r^{(i)}} \mathcal{T}_{(5)pqrijk} \frac{\partial N_B^h}{\partial x_k^{(i)}} \right] dV_{t+\Delta t}^{(i)}\end{aligned}\tag{5.33}$$

der Gleichungssatz

$$\begin{aligned}\Delta^{(i)}\mathcal{F}_I &= -\delta u_{pC} \left[K_{pCiA}^{uu} \Delta^{(i)}u_{iA} + K_{pCijB}^{uh} \Delta^{(i)}h_{ijB} \right] , \\ \Delta^{(i)}\mathcal{F}_D &= -\delta h_{pqD} \left[K_{pqDiA}^{hu} \Delta^{(i)}u_{iA} + K_{pqDijB}^{hh} \Delta^{(i)}h_{ijB} \right] .\end{aligned}\quad (5.34)$$

$K_{\cdot}^{(\cdot)}$ sind die sogenannten Steifigkeitsmatrizen. Hierbei sind K_{pCiA}^{uu} der klassische rein von den Verschiebungsfreiheitsgraden abhängige, K_{pCijB}^{uh} bzw. K_{pqDiA}^{hu} gemischte und K_{pqDijB}^{hh} ein von den Koeffizienten des Mikroverschiebungsgradienten abhängiger Anteil der Steifigkeitsmatrix. Nach Definition der Größen

$$R_{pC} = \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} T_{pq}^{(i)} \frac{\partial N_C^u}{\partial x_q^{(i)}} dV_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (5.35)$$

und

$$R_{pqD} = \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left[(\Sigma_{pq}^{(i)} - T_{pq}^{(i)}) N_D^h + M_{pqr}^{(i)} \frac{\partial N_D^h}{\partial x_r^{(i)}} \right] dV_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (5.36)$$

folgt aus (5.25) und (5.28)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_I^{(i)} &= -\delta u_{pC} R_{pC} , \\ \mathcal{F}_D^{(i)} &= -\delta h_{pqD} R_{pqD} .\end{aligned}\quad (5.37)$$

R_{pC} bzw. R_{pqD} bezeichnen hierbei die rechten Seiten des Gleichungssystems.

Nach Einsetzen von (5.34) und (5.37) in (5.16) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta u_{pC} R_{pC} &= \delta u_{pC} \left[K_{pCiA}^{uu} \Delta^{(i)}u_{iA} + K_{pCijB}^{uh} \Delta^{(i)}h_{ijB} \right] , \\ \delta h_{pqD} R_{pqD} &= \delta h_{pqD} \left[K_{pqDiA}^{hu} \Delta^{(i)}u_{iA} + K_{pqDijB}^{hh} \Delta^{(i)}h_{ijB} \right] .\end{aligned}\quad (5.38)$$

Da die virtuellen Größen δu_{pC} und δh_{pqD} lediglich die kinematischen Randbedingungen erfüllen müssen, sind in (5.38a) für jeden Index p bzw. in (5.38b) für jedes Paar der Indexe p und q die Gleichungen identisch Null. Dies liefert eindeutige Vorschriften zur Anordnung von (5.38) in einem globalen Gleichungssystem. Hierbei werden alle Knotenvariablen zu einem algebraischen System von nichtlinearen Gleichungen für eine gegebene Problemstellung zusammengefasst. Bei diesem Vorgang darf die Kompatibilität (Stetigkeit an den Elementgrenzen) nicht verletzt werden. Das zu lösende Problem lässt sich somit durch eine Matrixgleichung formulieren

$$\underline{\mathbf{K}}_g \underline{\mathbf{d}}_g = \underline{\mathbf{R}}_g , \quad (5.39)$$

bestehend aus $n_u + n_h$ Unbekannten und $n_u + n_h$ Gleichungen mit der globalen Steifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}_g$, dem globalen Verschiebungsvektor $\underline{\mathbf{d}}_g$ und der globalen rechten Seite $\underline{\mathbf{R}}_g$. Die verallgemeinerte globale Steifigkeitsmatrix ist damit eine Blockmatrix der Form

$$\underline{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_g^{uu} & \underline{\mathbf{K}}_g^{uh} \\ \underline{\mathbf{K}}_g^{hu} & \underline{\mathbf{K}}_g^{hh} \end{bmatrix} , \quad (5.40)$$

bestehend aus 4 Teilsteifigkeitsmatrizen $\underline{\mathbf{K}}_g^{uu}$, $\underline{\mathbf{K}}_g^{uh}$, $\underline{\mathbf{K}}_g^{hu}$ und $\underline{\mathbf{K}}_g^{hh}$. Somit lassen sich die Lösungs- und Kraftvektoren $\underline{\mathbf{d}}_g$ bzw. $\underline{\mathbf{R}}_g$ wie folgt darstellen:

$$\underline{\mathbf{d}}_g = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{d}}_g^u \\ \underline{\mathbf{d}}_g^h \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{R}}_g = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}_g^u \\ \underline{\mathbf{R}}_g^h \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Hierbei repräsentieren $\underline{\mathbf{d}}_g^u$, $\underline{\mathbf{d}}_g^h$, $\underline{\mathbf{R}}_g^u$ und $\underline{\mathbf{R}}_g^h$ jeweils von \mathbf{u} oder \mathbf{h} abhängige Vektoren.

Mittels FEM kann man die Lösung des nichtlinearen Randwertproblems durch iterative Lösung des linearen Gleichungssystems (5.39) finden.

5.4 Implementierung in UEL

Die lineare mikromorphe Theorie wurde in die FE-Programme ABAQUS und DAEdalon (Elastizität) implementiert. Da neben der Impuls- auch die Gleichung der Drehimpulsbilanz bei dieser Theorie eine Rolle spielt, mussten eigens definierte Elemente programmiert werden, wozu beide Programme eine Schnittstelle mit der Bezeichnung UEL (*user defined element*) dem Nutzer anbieten (ABAQUS-Manual [2]). Man übergibt in diesem Fall dem FE-Programm lediglich die Elementsteifigkeitsmatrizen, die rechten Seiten und die Statusvariablen. Die Aufgabe der Software beschränkt sich dadurch auf eine Assemblierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix und Lösung des Gleichungssystems (5.39).

Beim iterativen Lösen dieses Gleichungssystems werden durch Aufrufe der UEL die Knoten- und Statusvariablen so lange aktualisiert, bis das Residuum verschwindet und somit eine Lösung des Problems gefunden ist.

Die Implementierung beschränkt sich in dieser Arbeit auf eine FE-Formulierung des ebenen Verzerrungszustandes (*in plane*-Problem). Der Zustand liegt vor, falls die Verschiebungskomponente in x_3 -Richtung 0 ist und die restlichen zwei Komponenten des Verschiebungsvektors keine Funktion der x_3 -Koordinate sind:

$$u_1 = \hat{u}_1(x_1, x_2), \quad u_2 = \hat{u}_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0. \quad (5.42)$$

Für die Mikrokoordinaten \mathbf{u}' werden identische Annahmen getroffen:

$$u'_1 = \hat{u}_1(x_1, x_2, x'_1, x'_2), \quad u'_2 = \hat{u}_2(x_1, x_2, x'_1, x'_2), \quad u'_3 = 0. \quad (5.43)$$

Da alle zulässigen Verschiebungen nicht von den Makro- und Mikrokoordinaten in x_3 -Richtung abhängen, sind die auftretenden Verzerrungen und Spannungen lediglich Funktionen der Verschiebungen in x_1 - und x_2 -Richtung. Es ergeben sich die Deformations- und Verschiebungsgradienten:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{X}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial X'_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial X'_2} & 0 \\ \frac{\partial x'_2}{\partial X'_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial X'_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

und

$$\mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{X}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'_1}{\partial X'_1} & \frac{\partial u'_1}{\partial X'_2} & 0 \\ \frac{\partial u'_2}{\partial X'_1} & \frac{\partial u'_2}{\partial X'_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Die Umsetzung der FEM erfolgt mittels eines 8-Knoten Rechteckelementes der Serendipity-Klasse (siehe z. B. BETTEN [11]).

Im ebenen Verzerrungszustand besitzen alle Elementknoten für den Fall $n_u = 8$ und $n_h = 8$ Verschiebungen und Koeffizienten des Mikroverschiebungsgradienten als Freiheitsgrade (siehe Abbildung 5.2(b)). Alternativ könnten lediglich lineare Ansätze für die Koeffizienten des Mikroverschiebungsgradienten gewählt werden. Als Konsequenz daraus werden nicht jedem Knotenpunkt die Freiheitsgrade \mathbf{h} zugewiesen. Folglich erhält man zwei Knotenmengen, eine mit allen Freiheitsgraden (Eckknoten) und eine, die lediglich Verschiebungsfreiheitsgrade besitzt (Seitenmittenknoten). Die zweite Situation ist in Abbildung 5.2(a) dargestellt.

In dieser Arbeit wurde die zweite Variante bevorzugt, da bei linearen Ansätzen für die Komponenten des Mikroverschiebungsgradienten der Tensor ($\text{GRAD } \mathbf{h}$) elementweise konstant ist. Außerdem haben Untersuchungen mit linear-elastischen mikropolaren Theorien gezeigt, dass die zweite Variante nicht in der Lage ist, bestimmte Materialparameterkombinationen dieser Theorie exakt wiederzugeben (siehe ELSÄSSER [22]).

Im allgemeinen 3-dimensionalen Kontinuum besitzen mikromorphe Kontinua vom Grad 1 aufgrund von homogenen Deformationen der Mikrokontinua 12 kinematische Freiheitsgrade, 3 Translationen (Verschiebungen \mathbf{u}) und 9 Mikrodeformationen. Für den ebenen Verzerrungszustand reduziert sich die Anzahl auf 6, 2 Translationen und 4 Mikrodeformationen. Diesen Sachverhalt kann man sich leicht veranschaulichen. Abbildung 5.3 zeigt ein einzelnes finites Element in Ausgangs- und aktueller Lage. Man betrachtet einen beliebigen Knotenpunkt P in der Referenzkonfiguration bzw. p in der Momentankonfiguration des Elementes. Neben den Makroverschiebungen wird die Deformation durch die Verformung seiner zwei Direktoren beschrieben (im ebenen Fall). Es können sich sowohl die Länge als auch der Winkel zwischen beiden Direktoren ändern. Die Feldgrößen ergeben sich anschließend durch Interpolation der Knotenwerte.

Im Falle einer mikropolaren Theorie beschränkt sich die Deformation der Direktoren auf reine Rotationen. Die Anzahl der kinematischen Freiheitsgrade reduziert sich dadurch auf 3 für den ebenen Verzerrungszustand (2 Verschiebungen und eine Rotation) oder 6 im dreidimensionalen Fall (3 Verschiebungen und 3 Rotationen).



Abbildung 5.2: 2D-Elemente der Serendipity-Klasse mit quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen \mathbf{u} und linearen Ansätzen für die Koeffizienten des Mikroverschiebungsgradienten \mathbf{h} (Fall a) und quadratischen Ansätzen für alle Knotenvariablen (Fall b)

Dem Referenzelement (Abbildung 5.2(b)) werden lokale Knotennummern von $n_e = 1$ bis 8 zugewiesen. Lokal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass sich die Größen auf das Element und nicht auf das gesamte Gleichungssystem beziehen. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Elementes ergibt sich dann aus der Anzahl der Knotenvariablen multipliziert mit der Knotenanzahl. Der hier verwendete Elementtyp besitzt 48 Freiheitsgrade, $8 \cdot 2$ Verschiebungen und $8 \cdot 4$ Komponenten des Mikroverschiebungsgradienten. Als Nächstes werden die Knotenvariablen im lokalen Verschiebungsvektor $\underline{\mathbf{d}}_e$ angeordnet:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}_e &= [\underline{\mathbf{d}}_e^u \ \underline{\mathbf{d}}_e^h]^T \\ &= [u_{(1)1}, u_{(1)2}, \dots, u_{(8)1}, u_{(8)2}, h_{(1)11}, \\ &\quad h_{(1)22}, h_{(1)12}, h_{(1)21}, \dots, h_{(8)11}, h_{(8)22}, h_{(8)12}, h_{(8)21}]^T \end{aligned} \quad (5.47)$$

Eingeklammerte bzw. nicht eingeklammerte Indexe kennzeichnen die Knotennummer bzw. den Freiheitsgrad. Somit ist $u_{(3)2}$ die Verschiebung in x_2 -Richtung am Knoten Nr. 3 oder $h_{(4)21}$ die Komponente h_{21} des Mikroverschiebungsgradienten am Knoten Nr. 4.

Die Anordnung im lokalen Verschiebungsvektor ist beliebig wählbar, muss jedoch konsequent eingehalten werden und beeinflusst die Reihenfolge der Größen aus Gleichungssatz (5.38) in einer Matrixformulierung. Diese Überführung zu einer Matrixdarstellung ist im Rahmen der FE-Methode üblich (siehe z. B. WRIGGERS [80]), weil es die Programmierung erheblich vereinfacht und den Rechenaufwand deutlich reduziert. Hierbei bietet sich an, Tensoren zweiter Stufe als Vektor und Tensoren 4. Stufe als Matrix darzustellen.

Da sowohl Spannungstensoren als auch Verzerrungstensoren dieser Theorie im Allgemeinen nicht mehr symmetrisch sind, muss eine Zuordnungsvorschrift (siehe Tabelle 5.1) für die Darstellung eines Tensors zweiter Stufe als Vektor definiert werden. Übliche Zuordnungsvorschriften für klassische Modelle sind z. B. in HUGHES [42] zu finden.

Beispielhaft werden die nach Tabelle 5.1 vorgegebenen Anordnungen der Koeffizienten von $\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}$ sowie für $\delta \mathbf{h}$ gezeigt. Unterstrichene Symbole kennzeichnen hierbei die Vektor- bzw. Matrixnotation einer Größe:

$$\underline{\left[\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right]} = \begin{bmatrix} \delta u_{1,1} \\ \delta u_{2,2} \\ \delta u_{1,2} \\ \delta u_{2,1} \end{bmatrix}, \quad \delta \underline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \delta h_{11} \\ \delta h_{22} \\ \delta h_{12} \\ \delta h_{21} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Wie in Abschnitt 5.3 ausführlich dargestellt wurde, nähert man den Funktionsverlauf aller Feldgrößen durch Funktionswerte an den Knotenpunkten an und führt zur Darstellung der Größen an einem beliebigen Ort Interpolationen mit den Formfunktionen durch. Beim Übergang

I,P	1	2	3	4
<u>i,p</u>	1	2	1	2
<u>j,q</u>	1	2	2	1

Tabelle 5.1: Zuordnungsvorschrift für Tensoren zweiter Stufe des ebenen Problems

zur Matrixformulierung ergeben sich somit die Darstellungen:

$$\begin{bmatrix} \delta u_{1,1} \\ \delta u_{2,2} \\ \delta u_{1,2} \\ \delta u_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{C,1}^u \delta u_{1C} \\ N_{C,2}^u \delta u_{2C} \\ N_{C,2}^u \delta u_{1C} \\ N_{C,1}^u \delta u_{2C} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{C,1}^u & 0 \\ 0 & N_{C,2}^u \\ N_{C,2}^u & 0 \\ 0 & N_{C,1}^u \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{B}}_C^u} \begin{bmatrix} \delta u_{1C} \\ \delta u_{2C} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

und

$$\begin{bmatrix} \delta h_{11} \\ \delta h_{22} \\ \delta h_{12} \\ \delta h_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_D^h \delta h_{D11} \\ N_D^h \delta h_{D22} \\ N_D^h \delta h_{D12} \\ N_D^h \delta h_{D21} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_D^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_D^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_D^h \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{N}}_D} \begin{bmatrix} \delta h_{11D} \\ \delta h_{22D} \\ \delta h_{12D} \\ \delta h_{21D} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Auf die Summenzeichen der Formfunktionen über die Anzahl der Knotenpunkte C bzw. D wurde zur Wahrung der Übersicht verzichtet. Mit $\underline{\mathbf{B}}_C^u$ definiert man eine in der Literatur als Kompatibilitätsmatrix bezeichnete Matrix der Formfunktionsableitungen für die Verschiebungen des Knotens C und mit $\underline{\mathbf{N}}_D$ eine Diagonalmatrix, bestehend aus den zum jeweiligen Knoten D zugehörigen Formfunktionen. Mit $(\cdot)_{,1}$ bzw. $(\cdot)_{,2}$ werden die Ableitungen nach x_1 bzw. x_2 bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich Gleichung (5.38a) wie folgt formulieren:

$$\delta \underline{\mathbf{u}}_C^T \underline{\mathbf{R}}_C = \delta \underline{\mathbf{u}}_C^T [\delta \underline{\mathbf{K}}_{CA}^{uu} \underline{\Delta}^{(i)} \underline{\mathbf{u}}_A + \underline{\mathbf{K}}_{CB}^{uh} \underline{\Delta}^{(i)} \underline{\mathbf{h}}_B] \quad (5.51)$$

Die Steifigkeitsmatrizen sind hierbei durch

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}_{CA}^{uu} &= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} (\underline{\mathbf{B}}_C^u)^T \underline{\mathcal{T}}_{(1)} \underline{\mathbf{B}}_A^u dV_{t+\Delta t}^{(i)} \quad , \\ \underline{\mathbf{K}}_{CB}^{uh} &= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} (\underline{\mathbf{B}}_C^u)^T \underline{\mathcal{T}}_{(2)} \underline{\mathbf{N}}_B dV_{t+\Delta t}^{(i)} \quad , \\ \underline{\mathbf{R}}_C &= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \underline{\mathbf{B}}_C^u \underline{\mathbf{T}} dV_{t+\Delta t}^{(i)} \end{aligned} \quad (5.52)$$

gegeben. $\underline{\mathcal{T}}_{(1)}$ und $\underline{\mathcal{T}}_{(2)}$ sind die Matrixdarstellungen zweier Materialtensoren (siehe Gleichungssatz (5.24)). Mit der erweiterten Indexnotation nach Tabelle 5.1 ergibt sich für den Tensor $\underline{\mathcal{T}}_{(1)}$ eine 4x4-Matrix:

$$\underline{\mathcal{T}}_{(1)} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{(1)1111} & \mathcal{T}_{(1)1122} & \mathcal{T}_{(1)1112} & \mathcal{T}_{(1)1121} \\ \mathcal{T}_{(1)2211} & \mathcal{T}_{(1)2222} & \mathcal{T}_{(1)2212} & \mathcal{T}_{(1)2221} \\ \mathcal{T}_{(1)1211} & \mathcal{T}_{(1)1222} & \mathcal{T}_{(1)1212} & \mathcal{T}_{(1)1221} \\ \mathcal{T}_{(1)2111} & \mathcal{T}_{(1)2122} & \mathcal{T}_{(1)2112} & \mathcal{T}_{(1)2121} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Zur Überführung der diskretisierten Drehimpulsbilanzgleichung benötigt man die Vektor- bzw. Matrixdarstellungen von Tensoren 3. und 6. Stufe. Hierfür wird analog zu Tabelle 5.1 eine Zuordnungsvorschrift für die Darstellung von Tensoren 3. Stufe als Vektor mit 8 Komponenten eingeführt (Tabelle 5.2).

Mit dieser Voraussetzung lässt sich der Gradient von $\delta \mathbf{h}$ wie folgt dargestellt:

J,Q	1	2	3	4	5	6	7	8
i,p	1	2	1	2	1	2	1	2
j,q	1	2	2	1	1	2	2	1
k,r	1	1	1	1	2	2	2	2

Tabelle 5.2: Zuordnungsvorschrift für Tensoren dritter Stufe des ebenen Problems

$$\underline{\left[\frac{\partial \delta \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \right]} = \begin{bmatrix} \delta h_{11,1} \\ \delta h_{22,1} \\ \delta h_{12,1} \\ \delta h_{21,1} \\ \delta h_{11,2} \\ \delta h_{22,2} \\ \delta h_{12,2} \\ \delta h_{21,2} \end{bmatrix} . \quad (5.54)$$

Ersetzt man wiederum die Feldgrößen durch diskrete Werte an den Knotenpunkten und interpoliert mit Hilfe von Formfunktionen, gilt:

$$\begin{bmatrix} \delta h_{11,1} \\ \delta h_{22,1} \\ \delta h_{12,1} \\ \delta h_{21,1} \\ \delta h_{11,2} \\ \delta h_{22,2} \\ \delta h_{12,2} \\ \delta h_{21,2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{D,1}^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{D,1}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{D,1}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{D,1}^h \\ N_{D,2}^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{D,2}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{D,2}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{D,2}^h \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_D^h} \begin{bmatrix} \delta h_{11D} \\ \delta h_{22D} \\ \delta h_{12D} \\ \delta h_{21D} \end{bmatrix} . \quad (5.55)$$

In der Matrix \mathbf{B}_D^h sind Ableitungen der Formfunktionen des jeweiligen Knotens D angeordnet. Die Matrixdarstellung des Materialtensors 6. Stufe ermittelt man in Analogie zu (5.53) mit Hilfe von Tabelle 5.2. Schließlich folgt für die diskretisierte Drehimpulsbilanzgleichung:

$$\delta \underline{\mathbf{h}}_D^T \underline{\mathbf{R}}_D = \delta \underline{\mathbf{h}}_D^T \left[\delta \underline{\mathbf{K}}_{DA}^{hu} \underline{\Delta}^{(i)} \underline{\mathbf{u}}_A + \underline{\mathbf{K}}_{DB}^{hh} \underline{\Delta}^{(i)} \underline{\mathbf{h}}_B \right] . \quad (5.56)$$

Hierbei gelten für die Steifigkeitsmatrizen und rechten Seite die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}_{DA}^{hu} &= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \underline{\mathbf{N}}_D \underline{\mathcal{T}}_{(3)} \underline{\mathbf{B}}_A^u dV_{t+\Delta t}^{(i)} , \\ \underline{\mathbf{K}}_{DB}^{hh} &= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left[\underline{\mathbf{N}}_D \underline{\mathcal{T}}_{(4)} \underline{\mathbf{N}}_B + (\underline{\mathbf{B}}_D^h)^T \underline{\mathcal{T}}_{(5)} \underline{\mathbf{B}}_B^h \right] dV_{t+\Delta t}^{(i)} , \\ \underline{\mathbf{R}}_D &= \int_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}^{(i)}} \left[\underline{\mathbf{B}}_D^h \underline{\mathbf{M}} + \underline{\mathbf{N}}_D (\underline{\Sigma} - \underline{\mathbf{T}}) \right] dV_{t+\Delta t}^{(i)} . \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die Gleichungssätze (5.51) und (5.56) können in Analogie zu (5.39) durch ein lineares Gleichungssystem mit 48 Gleichungen und 48 Unbekannten ersetzt werden:

$$\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{R}} . \quad (5.58)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$, der Elementverschiebungsvektor $\underline{\mathbf{d}}$ und der Elementkraftvektor $\underline{\mathbf{R}}$ haben in dieser Theorie eine erweiterte Struktur. $\underline{\mathbf{K}}$ ist eine Blockmatrix der Form:

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}^{uu} & \underline{\mathbf{K}}^{uh} \\ \underline{\mathbf{K}}^{hu} & \underline{\mathbf{K}}^{hh} \end{bmatrix} . \quad (5.59)$$

Die Teilmatrizen $\underline{\mathbf{K}}^{uu}$, $\underline{\mathbf{K}}^{uh}$, $\underline{\mathbf{K}}^{hu}$ und $\underline{\mathbf{K}}^{hh}$ werden aus den von den Knotenpunktnummern abhängigen Steifigkeitsmatrizen $\underline{\mathbf{K}}_{CA}^{uu}$, $\underline{\mathbf{K}}_{CB}^{uh}$, $\underline{\mathbf{K}}_{DA}^{hu}$ und $\underline{\mathbf{K}}_{DB}^{hh}$ gebildet:

$$\underline{\mathbf{K}}^{uu} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{C=1,A=1}^{uu} & \cdots & \underline{\mathbf{K}}_{C=1,A=8}^{uu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{K}}_{C=8,A=1}^{uu} & \cdots & \underline{\mathbf{K}}_{C=8,A=8}^{uu} \end{bmatrix} , \quad (5.60)$$

$$\underline{\mathbf{K}}^{uh} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{C=1,B=1}^{uh} & \cdots & \underline{\mathbf{K}}_{C=1,B=8}^{uh} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{K}}_{C=8,B=1}^{uh} & \cdots & \underline{\mathbf{K}}_{C=8,B=8}^{uh} \end{bmatrix} , \quad (5.61)$$

$$\underline{\mathbf{K}}^{hu} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{D=1,A=1}^{hu} & \cdots & \underline{\mathbf{K}}_{D=1,A=8}^{hu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{K}}_{D=8,A=1}^{hu} & \cdots & \underline{\mathbf{K}}_{D=8,A=8}^{hu} \end{bmatrix} , \quad (5.62)$$

$$\underline{\mathbf{K}}^{hh} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{D=1,B=1}^{hh} & \cdots & \underline{\mathbf{K}}_{D=1,B=8}^{hh} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{K}}_{D=8,B=1}^{hh} & \cdots & \underline{\mathbf{K}}_{D=8,B=8}^{hh} \end{bmatrix} . \quad (5.63)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrizen des ebenen Verzerrungszustandes sind Blockmatrizen der Größe 48x48, während der klassische Anteil $\underline{\mathbf{K}}^{uu}$ aus 16x16, die gekoppelten Steifigkeitsmatrizen $\underline{\mathbf{K}}^{uh}$ bzw. $\underline{\mathbf{K}}^{hu}$ aus 16x32 bzw. 32x16 und der vom Mikroverschiebungsgradienten abhängige Anteil aus 32x32 Elementen bestehen. Diese werden jeweils aus 64 Matrizen der Größen 2x2, 2x4, 4x2 oder 4x4 erstellt. Folglich entsteht die in Abbildung 5.4 schematisch skizzierte Form.

Vektor $\underline{\mathbf{d}}$ wird aus Makroverschiebungen und Mikroverschiebungsgradienten in der Form

$$\underline{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_{A=1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{u}}_{A=8} \\ \underline{\mathbf{h}}_{B=1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{h}}_{B=8} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

zusammengesetzt. Der Aufbau des Kraftvektors ist identisch:

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}_{C=1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{R}}_{C=8} \\ \underline{\mathbf{R}}_{D=1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{R}}_{D=8} \end{bmatrix} . \quad (5.65)$$

Aus allen Elementsteifigkeitsmatrizen und rechten Seiten des Problems werden abschließend die globale Steifigkeitsmatrix und die globale rechte Seite erstellt (5.39). Diesen als Assemblierung bezeichneten Prozess übernimmt die FE-Software (siehe z. B. HUGHES [42]).

5.5 Operator-Split-Verfahren

Zur Integration der Materialgleichungen wird in Anlehnung an die Arbeiten GRAMMENOUDIS [35], HÄUSLER [41], JANSOHN [44] und LÄMMER [50] ein sogenanntes *Operator-Split-Verfahren* eingesetzt². Hierzu teilt man das Differentialgleichungssystem in mehrere als Operatoren bezeichnete Anteile auf. Operator I startet mit den Anfangsbedingungen des gesamten Systems. Die Lösungen des ersten dienen als Anfangswerte für den zweiten Operator usw. . Die Lösung des gesamten Systems liefert der letzte Operator.

In dieser Arbeit ist die Integration in zwei Operatoren unterteilt. Im ersten (elastischer Prädiktor) werden lediglich die rein elastischen Anteile der Materialgleichungen berücksichtigt. Anschließend folgt eine Überprüfung der Fließbedingung. Wird diese Bedingung erfüllt, sind die Lösungen des Systems identisch mit denen aus Operator I. Andernfalls muss Operator II (plastischer Korrektor), bestehend aus einer Korrektur der inelastischen Anteile, ausgeführt werden.

Größen des ersten Operators werden mit einem links hochgestellten Index I, die des zweiten Operators mit einem entsprechenden Index II gekennzeichnet. Eine rechts tiefgestellte 0 steht für den aus dem letzten Zeitschritt übernommenen Anfangswert. Größen der aktuellen Iteration sind mit einer rechts tiefgestellten 1 gekennzeichnet.

In Operator I nimmt man an, dass die inelastischen Anteile der Differentialgleichungen unverändert bleiben, d. h. es werden lediglich die von \dot{s} unabhängigen Anteile des Differentialgleichungssystems betrachtet. Da sich unter dieser Voraussetzung die plastischen und kinematischen Anteile der Verzerrungsmaße sowie die skalare Schädigung bei der Bewegung von \mathcal{R}_t nach $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$ nicht ändern, gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} {}^I\epsilon_{p1} &= \epsilon_{p0} & , & & {}^I\epsilon_{k1} &= \epsilon_{k0} & , \\ {}^I\beta_{p1} &= \beta_{p0} & , & & {}^I\beta_{k1} &= \beta_{k0} & , \\ {}^I\mathbf{K}_{p1} &= \mathbf{K}_{p0} & , & & {}^I\mathbf{K}_{k1} &= \mathbf{K}_{k0} \end{aligned} \quad (5.66)$$

sowie

$$\begin{aligned} {}^I s_1 &= s_0 & , & & {}^I d_1 &= d_0 & , \\ {}^I r_1 &= r_0 & , & & {}^I k_1 &= k_0 & . \end{aligned} \quad (5.67)$$

Durch Bildung der Differenz zwischen den totalen Verzerrungen und den plastischen Anteilen erhält man die elastischen Anteile

$$\begin{aligned} {}^I\epsilon_{e1} &= \epsilon_1 - {}^I\epsilon_{p1} & , \\ {}^I\beta_{e1} &= \beta_1 - {}^I\beta_{p1} & , \\ {}^I\mathbf{K}_{e1} &= \mathbf{K}_1 - {}^I\mathbf{K}_{p1} \end{aligned} \quad (5.68)$$

²Die Operator-Split-Methode wurde von SIMO & HUGHES [67], [68] eingeführt.

mit denen die Spannungs- und Momentenspannungstensoren \mathbf{S} , $\mathbf{\Sigma}$, \mathbf{M} unter Berücksichtigung der Elastizitätsgesetze berechnet werden können. Zur abschließenden Auswertung der Fließbedingung benötigt man die spannungswertigen Tensoren (4.19)

$$\begin{aligned} {}^I\Delta\mathbf{T} &:= {}^I\mathbf{T}_1^D - {}^I\mathbf{Z}_1^D \quad , \\ {}^I\Delta\mathbf{\Sigma} &:= {}^I\mathbf{\Sigma}_1^D - {}^I\mathbf{\zeta}_1^D \quad , \\ {}^I\Delta\mathbf{M} &:= {}^I\mathbf{M}_1 - {}^I\mathbf{M}_{k1} \quad , \end{aligned} \tag{5.69}$$

die von den aus dem letzten Zeitschritt übernommenen Rückspannungstensoren der kinematischen Verfestigung

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{Z}_1 &= \mathbf{Z}_0 \quad , \\ {}^I\mathbf{\zeta}_1 &= \mathbf{\zeta}_0 \quad , \\ {}^I\mathbf{M}_{k1} &= \mathbf{M}_{k0} \end{aligned} \tag{5.70}$$

abhängen. Wird die Fließbedingung erfüllt, übernimmt man die Lösung von Operator I als Lösung des Gleichungssystems, und der Algorithmus ist für den Zeitschritt beendet. Andernfalls sind die Spannungen in Operator II so zu korrigieren, dass die Fließbedingung erfüllt wird. In Operator II sind die rechten Seiten der Differentialgleichungen proportional zur Rate der plastischen Bogenlänge. Die numerische Lösung erfolgt mit einem impliziten Euler-Verfahren. Als Anfangsbedingungen für das Differentialgleichungssystem, bestehend aus nichtlinearen Gleichungen für die plastischen Verzerrungen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p1} - {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p0} - \Delta t \quad {}^{II}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \quad , \\ \mathbf{0} &= {}^{II}\boldsymbol{\beta}_{p1} - {}^{II}\boldsymbol{\beta}_{p0} - \Delta t \quad {}^{II}\dot{\boldsymbol{\beta}}_p \quad , \\ \mathbf{0} &= {}^{II}\mathbf{K}_{p1} - {}^{II}\mathbf{K}_{p0} - \Delta t \quad {}^{II}\dot{\mathbf{K}}_p \end{aligned} \tag{5.71}$$

und Verfestigungsvariablen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{k1} - {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{k0} - \Delta t \quad {}^{II}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k \quad , \\ \mathbf{0} &= {}^{II}\boldsymbol{\beta}_{k1} - {}^{II}\boldsymbol{\beta}_{k0} - \Delta t \quad {}^{II}\dot{\boldsymbol{\beta}}_k \quad , \\ \mathbf{0} &= {}^{II}\mathbf{K}_{k1} - {}^{II}\mathbf{K}_{k0} - \Delta t \quad {}^{II}\dot{\mathbf{K}}_k \quad , \\ 0 &= {}^{II}r_1 - {}^{II}r_0 - \Delta t \quad {}^{II}\dot{r} \quad , \\ 0 &= {}^{II}d_1 - {}^{II}d_0 - \Delta t \quad {}^{II}\dot{d} \quad , \\ 0 &= {}^{II}s_1 - {}^{II}s_0 - \Delta t \quad {}^{II}\dot{s} \quad , \end{aligned} \tag{5.72}$$

dienen die Ergebnisse von Operator I

$$\begin{aligned} {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{p0} &= {}^I\boldsymbol{\epsilon}_{p1} \quad , \quad {}^{II}\boldsymbol{\beta}_{p0} = {}^I\boldsymbol{\beta}_{p1} \quad , \quad {}^{II}\mathbf{K}_{p0} = {}^I\mathbf{K}_{p1} \quad , \\ {}^{II}\boldsymbol{\epsilon}_{k0} &= {}^I\boldsymbol{\epsilon}_{k1} \quad , \quad {}^{II}\boldsymbol{\beta}_{k0} = {}^I\boldsymbol{\beta}_{k1} \quad , \quad {}^{II}\mathbf{K}_{k0} = {}^I\mathbf{K}_{k1} \quad , \\ {}^{II}s_0 &= {}^Is_1 \quad , \quad {}^{II}d_0 = {}^Id_1 \quad , \quad {}^{II}r_0 = {}^Ir_1 \quad , \\ {}^{II}k_0 &= {}^Ik_1 \quad . \end{aligned} \tag{5.73}$$

Die Lösung aus Operator II ist schließlich die des kompletten Differentialgleichungssystems. Am Ende der Newton-Iteration sind Spannungen, plastische Verzerrungen und Verfestigungsvariablen an einem Gaußpunkt bekannt.

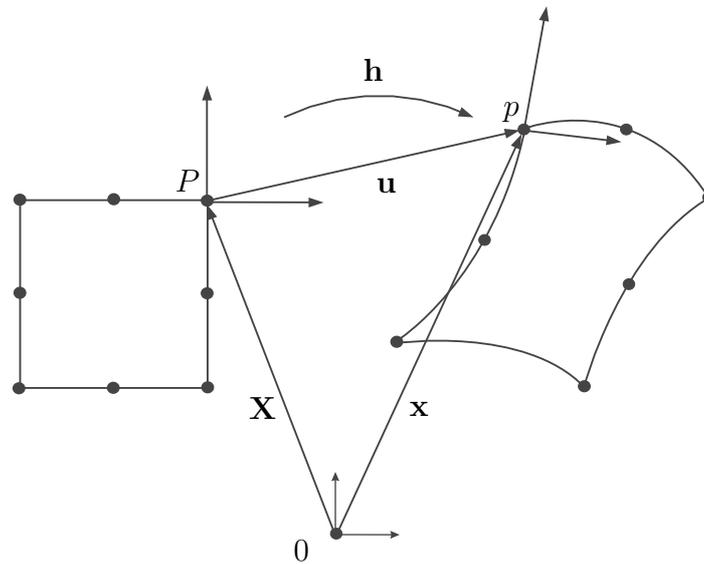


Abbildung 5.3: Deformation eines Elementes

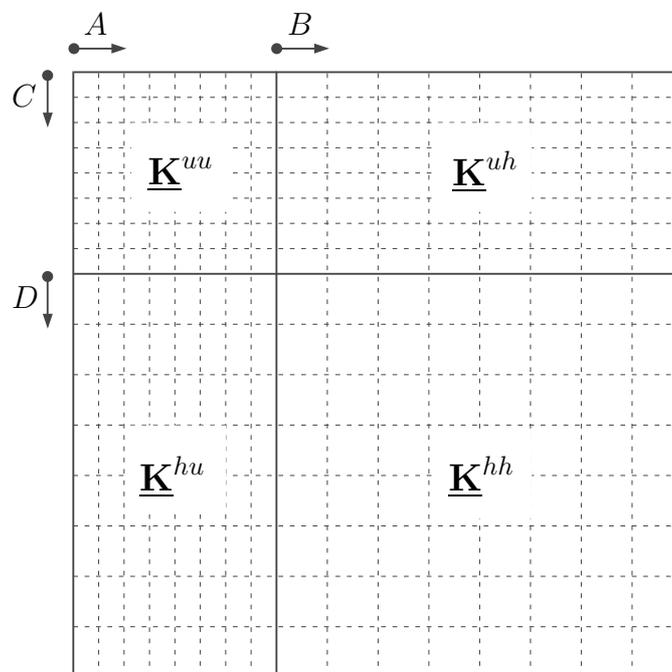


Abbildung 5.4: Elementsteifigkeitsmatrix des 8-Knoten-Elements mit quadratischen Ansatzfunktionen für alle Knotenvariablen

Kapitel 6

Materialparameter der freien Energiefunktion

In diesem Abschnitt folgt eine Konkretisierung der Anteile der freien Energiefunktion, die als Potenzial für die thermodynamisch konjugierten Spannungen dient (vergleiche mit ERINGEN [32] und MINDLIN [58]). Es wird dabei angenommen, dass das Potenzial eine quadratische Funktion der Verzerrungen ist. Unter der Voraussetzung von isotropen zentrosymmetrischen Materialeigenschaften bekommt diese eine einfache Form.

Abschließend lassen sich aus der Tatsache, dass die spezifische freie Energie positiv definit sein muss, Restriktionen für die Materialparameter ableiten. Die Herleitung geht auf eine Arbeit von SMITH [70] zurück.

Um die Darstellung möglichst einfach zu gestalten, wird in diesem Kapitel $d = 0$ gesetzt. Man sieht somit von einer Schädigung ab.

6.1 Elastizität

Als Ansatz für das elastische Potenzial wird eine in den elastischen Anteilen der Verzerrungen homogene quadratische Funktion gewählt:

$$\begin{aligned} \rho\psi_e = & \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ijpq}\epsilon_{(e)ij}\epsilon_{(e)pq} + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{ijpq}\beta_{(e)ij}\beta_{(e)pq} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{ijkpqr}K_{(e)ijk}K_{(e)pqr} + \\ & + \mathcal{D}_{ijpq}\epsilon_{(e)ij}\beta_{(e)pq} + \mathcal{E}_{ijkpq}K_{(e)ijk}\beta_{(e)pq} + \mathcal{F}_{ijkpq}K_{(e)ijk}\epsilon_{(e)pq} \quad . \end{aligned}$$

Unter der Annahme eines isotropen zentrosymmetrischen Materials vereinfacht sich die Funktion zu

$$\rho\psi_e = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ijpq}\epsilon_{(e)ij}\epsilon_{(e)pq} + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{ijpq}\beta_{(e)ij}\beta_{(e)pq} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{ijkpqr}K_{(e)ijk}K_{(e)pqr} + \mathcal{D}_{ijpq}\epsilon_{(e)ij}\beta_{(e)pq} \quad . \quad (6.1)$$

Neben dem aus der klassischen Theorie bekannten Materialtensor 4. Stufe¹ \mathcal{A} hängt die Theorie zusätzlich von zwei Materialtensoren 4. Stufe \mathcal{B} und \mathcal{D} sowie einem Tensor 6. Stufe \mathcal{C} ab. Beide Tensoren 5. \mathcal{E} und \mathcal{F} Stufe verschwinden, da laut MINDLIN [58] keine isotropen Tensoren 5. Stufe existieren.

Es gelten die Symmetrieeigenschaften:

$$\mathcal{A}_{ijpq} = \mathcal{A}_{pqij} \quad , \quad \mathcal{B}_{ijpq} = \mathcal{B}_{pqij} \quad , \quad \mathcal{C}_{ijkpqr} = \mathcal{C}_{pqrijk} \quad . \quad (6.2)$$

¹ \mathcal{A} wird in der klassischen Theorie üblicherweise mit \mathbf{E} bezeichnet.

Mit $\beta = \beta^T$ erhält man weitere Symmetriebedingungen für \mathcal{B} und \mathcal{D} :

$$\mathcal{B}_{ijpq} = \mathcal{B}_{ijqp} , \quad \mathcal{D}_{ijpq} = \mathcal{D}_{ijqp} \quad . \quad (6.3)$$

Materialtensoren lassen sich im isotropen Fall als Produkt linearer homogener Funktionen von Einheitstensoren zweiter Stufe formulieren. Zur Darstellung von Tensoren vierter Stufe benötigt man drei unabhängige Produkte von zwei Einheitstensoren zweiter Stufe, zur Darstellung von Tensoren sechster Stufe 15 Produkte von drei Einheitstensoren zweiter Stufe (siehe MINDLIN [58]):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ijpq} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu_1 \delta_{ip} \delta_{jq} + \mu_2 \delta_{iq} \delta_{jp} & , \\ \mathcal{B}_{ijpq} &= b_{01} \delta_{ij} \delta_{pq} + b_{02} \delta_{ip} \delta_{jq} + b_{03} \delta_{iq} \delta_{jp} & , \\ \mathcal{D}_{ijpq} &= d_{01} \delta_{ij} \delta_{pq} + d_{02} \delta_{ip} \delta_{jq} + d_{03} \delta_{iq} \delta_{jp} & , \\ \mathcal{C}_{ijkpqr} &= c_{01} \delta_{ij} \delta_{kp} \delta_{qr} + c_{02} \delta_{ij} \delta_{kq} \delta_{rp} + c_{03} \delta_{ij} \delta_{kr} \delta_{pq} + \\ &+ c_{04} \delta_{jk} \delta_{ip} \delta_{qr} + c_{05} \delta_{jk} \delta_{iq} \delta_{pr} + c_{06} \delta_{jk} \delta_{ir} \delta_{pq} + \\ &+ c_{07} \delta_{ki} \delta_{jp} \delta_{qr} + c_{08} \delta_{ki} \delta_{jq} \delta_{rp} + c_{09} \delta_{ki} \delta_{jr} \delta_{pq} + \\ &+ c_{010} \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} + c_{011} \delta_{jp} \delta_{kq} \delta_{ir} + c_{012} \delta_{kp} \delta_{iq} \delta_{jr} + \\ &+ c_{013} \delta_{ip} \delta_{jr} \delta_{kq} + c_{014} \delta_{jp} \delta_{kr} \delta_{iq} + c_{015} \delta_{kp} \delta_{ir} \delta_{jq} \quad . \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen (6.3) folgt

$$b_{03} = b_{02} , \quad d_{03} = d_{02} \quad (6.4)$$

und

$$c_{06} = c_{01} , \quad c_{09} = c_{02} , \quad c_{07} = c_{05} , \quad c_{012} = c_{011} \quad . \quad (6.5)$$

In Anlehnung an ERINGEN [32] werden die Materialkonstanten der Tensoren 4. Stufe durch

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \mu + \alpha & , \\ \mu_2 &:= \mu - \alpha & , \\ b_{01} &:= \lambda + 2d_1 + b_1 & , \\ b_{02} &:= \mu + 2d_2 + b_2 & , \\ d_{01} &:= \lambda + d_1 & , \\ d_{02} &:= \mu + d_2 & , \end{aligned} \quad (6.6)$$

ersetzt. \mathcal{A} lässt sich somit durch die aus der klassischen Theorie bekannten Laméschen Konstanten und einer Materialkonstante α darstellen:

$$\mathcal{A}_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + (\mu + \alpha) \delta_{ip} \delta_{jq} + (\mu - \alpha) \delta_{iq} \delta_{jp} \quad . \quad (6.7)$$

Die Materialtensoren \mathcal{B} und \mathcal{D}

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ijpq} &= (\lambda + 2d_1 + b_1) \delta_{ij} \delta_{pq} + (\mu + 2d_2 + b_2) (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) & , \\ \mathcal{D}_{ijpq} &= (\lambda + d_1) \delta_{ij} \delta_{pq} + (\mu + d_2) (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

sind folglich Funktionen der Laméschen Konstanten und weiterer Parameter (siehe Gleichung (6.6)). Es ist leicht zu erkennen, dass man den klassischen Grenzfall genau dann erhält, falls alle zusätzlichen Materialparameter im Grenzfall verschwinden.

Mit (6.5) reduziert sich die Zahl unabhängiger Materialkonstanten des Tensors 6. Stufe \mathbf{C} von 15 auf 11. Nach einer Neunummerierung der verbleibenden Konstanten lässt sich \mathbf{C} wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{ijkpqr} = & c_1 (\delta_{ij}\delta_{kp}\delta_{qr} + \delta_{jk}\delta_{ir}\delta_{pq}) + \\
& + c_2 (\delta_{ij}\delta_{kq}\delta_{rp} + \delta_{ki}\delta_{jr}\delta_{pq}) + \\
& + c_3 \delta_{ij}\delta_{kr}\delta_{pq} + c_4 \delta_{jk}\delta_{ip}\delta_{qr} + \\
& + c_5 (\delta_{jk}\delta_{iq}\delta_{pr} + \delta_{ki}\delta_{jp}\delta_{qr}) + \\
& + c_6 \delta_{ki}\delta_{jq}\delta_{rp} + c_7 \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} + \\
& + c_8 (\delta_{jp}\delta_{kq}\delta_{ir} + \delta_{kp}\delta_{iq}\delta_{jr}) + \\
& + c_9 \delta_{ip}\delta_{jr}\delta_{kq} + c_{10} \delta_{jp}\delta_{kr}\delta_{iq} + \\
& + c_{11} \delta_{kp}\delta_{ir}\delta_{jq} \quad .
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Hierbei entsprechen:

$$\begin{aligned}
c_1 = c_{01}, \quad c_2 = c_{02}, \quad c_3 = c_{03}, \quad c_4 = c_{04}, \quad c_5 = c_{05}, \quad c_6 = c_{08}, \\
c_7 = c_{010}, \quad c_8 = c_{011}, \quad c_9 = c_{013}, \quad c_{10} = c_{014}, \quad c_{11} = c_{015} \quad .
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Insgesamt benötigt man im linear-elastischen Fall 18 Materialkonstanten für die mikromorphe Theorie. Die mikropolare linear-elastische Theorie ist von sechs Materialkonstanten abhängig. In der klassischen Theorie arbeitet man mit zwei Konstanten.

Die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen lassen sich aus (3.38) herleiten:

$$\begin{aligned}
T_{ij} &= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \epsilon_{(e)ij}} = \mathcal{A}_{ijpq} \epsilon_{(e)pq} + \mathcal{D}_{ijpq} \beta_{(e)pq} \quad , \\
\Sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \beta_{(e)ij}} = \mathcal{B}_{ijpq} \beta_{(e)pq} + \mathcal{D}_{pqij} \epsilon_{(e)pq} \quad , \\
M_{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial K_{(e)ijk}} = \mathcal{C}_{ijkpqr} K_{(e)pqr} \quad .
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Im isotropen Fall stehen \mathbf{T} und $\mathbf{\Sigma}$ mit den Verzerrungstensoren $\boldsymbol{\epsilon}$ und $\boldsymbol{\beta}$ in Beziehung. Der Momentenspannungstensor \mathbf{M} ist lediglich eine Funktion des Krümmungstensors \mathbf{K} und somit von den restlichen Gleichungen entkoppelt.

6.2 Kinematische Verfestigung

Basierend auf (6.1) wird für das Potenzial von $\psi_p^{(kin)}$ der Ansatz

$$\begin{aligned}
\rho \psi_p^{(kin)} &= \frac{1}{2} \mathcal{Z}_{ijpq}^A \epsilon_{(k)ij} \epsilon_{(k)pq} + \frac{1}{2} \mathcal{Z}_{ijpq}^B \beta_{(k)ij} \beta_{(k)pq} + \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{Z}_{ijkpqr}^C K_{(k)ijk} K_{(k)pqr} + \mathcal{Z}_{ijpq}^D \epsilon_{(k)ij} \beta_{(k)pq}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

gewählt. In Analogie zur Elastizität hängen somit im isotropen Fall die Materialtensoren der kinematischen Verfestigung (6.12) von drei bzw. 15 unabhängigen Materialparametern ab. Da für diese Tensoren die Symmetriebedingungen (6.2) und (6.3) gelten, reduziert sich die Anzahl unabhängiger Konstanten von \mathbf{Z}^B , \mathbf{Z}^D auf zwei und von \mathbf{Z}^C auf 11:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ijpq}^A &= z_1^A \delta_{ij} \delta_{pq} + (z_2^A + z_3^A) \delta_{ip} \delta_{jq} + (z_2^A - z_3^A) \delta_{iq} \delta_{jp} \quad , \\ \mathbf{Z}_{ijpq}^B &= z_1^B \delta_{ij} \delta_{pq} + z_2^B (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad , \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ijpq}^D &= z_1^D \delta_{ij} \delta_{pq} + z_2^D (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad , \\ \mathbf{Z}_{ijkpqr}^C &= z_1^C (\delta_{ij} \delta_{kp} \delta_{qr} + \delta_{jk} \delta_{ir} \delta_{pq}) + \\ &\quad + z_2^C (\delta_{ij} \delta_{kp} \delta_{qr} + \delta_{ki} \delta_{jr} \delta_{pq}) + \\ &\quad + z_3^C \delta_{ij} \delta_{kr} \delta_{pq} + z_4^C \delta_{jk} \delta_{ip} \delta_{qr} + \\ &\quad + z_5^C (\delta_{jk} \delta_{iq} \delta_{pr} + \delta_{ki} \delta_{jp} \delta_{qr}) + \\ &\quad + z_6^C \delta_{ki} \delta_{jq} \delta_{rp} + z_7^C \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} + \\ &\quad + z_8^C (\delta_{jp} \delta_{kq} \delta_{ir} + \delta_{kp} \delta_{iq} \delta_{jr}) + \\ &\quad + z_9^C \delta_{ip} \delta_{jr} \delta_{kq} + z_{10}^C \delta_{jp} \delta_{kr} \delta_{iq} + \\ &\quad + z_{11}^C \delta_{kp} \delta_{ir} \delta_{jq} \quad . \end{aligned} \quad (6.14)$$

6.3 Restriktionen an Materialparameter

Restriktionen an Materialparameter ergeben sich aus der Forderung, dass die spezifische freie elastische Energie größer oder gleich 0 ist:

$$\psi_e(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\beta}_e, \mathbf{K}_e) \geq 0 \quad . \quad (6.15)$$

Im Falle isotroper zentrosymmetrischer Materialien kann ψ_e in zwei unabhängige Anteile additiv zerlegt werden:

$$\psi_e(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\beta}_e, \mathbf{K}_e) = \psi_e^1(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\beta}_e) + \psi_e^2(\mathbf{K}_e) \geq 0 \quad . \quad (6.16)$$

Hinreichend für die Einhaltung von (6.15) sind somit die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \rho \psi_e^1(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\beta}_e) &= \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ijpq} \epsilon_{(e)ij} \epsilon_{(e)pq} + \frac{1}{2} \mathcal{B}_{ijpq} \beta_{(e)ij} \beta_{(e)pq} + \mathcal{D}_{ijpq} \epsilon_{(e)ij} \beta_{(e)pq} \geq 0 \\ \rho \psi_e^2(\mathbf{K}_e) &= \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ijkpqr} K_{(e)ijk} K_{(e)pqr} \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Diese Ungleichungen können in einem weiteren Schritt als Kombinationen zwischen Materialparametern und Verzerrungs- bzw. Krümmungstensoren dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 2\rho \psi_e^1(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\beta}_e) &= \lambda \epsilon_{(e)ii} \epsilon_{(e)jj} + (\mu + \alpha) \epsilon_{(e)ij} \epsilon_{(e)ij} + (\mu - \alpha) \epsilon_{(e)ij} \epsilon_{(e)ji} + \\ &\quad + (\lambda + 2d_1 + b_1) \beta_{(e)ii} \beta_{(e)jj} + 2(\mu + 2d_2 + b_2) \beta_{(e)ij} \beta_{(e)ij} + \\ &\quad 2(\lambda + d_1) \epsilon_{(e)ii} \beta_{(e)jj} + 4(\mu + d_2) \epsilon_{(e)ij} \beta_{(e)ij} \geq 0 \quad , \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}
2\rho\psi_e^2(\mathbf{K}_e) = & c_1 (K_{(e)ijj}K_{(e)jkk} + K_{(e)ijj}K_{(e)kki}) + \\
& + c_2 (K_{(e)ijj}K_{(e)kjk} + K_{(e)iji}K_{(e)kkj}) + \\
& + c_3 K_{(e)ijj}K_{(e)kkj} + c_4 K_{(e)ijj}K_{(e)ikk} + \\
& + c_5 (K_{(e)ijj}K_{(e)kik} + K_{(e)iji}K_{(e)jkk}) + \\
& + c_6 K_{(e)iji}K_{(e)kjk} + c_7 K_{(e)ijk}K_{(e)ijk} + \\
& + c_8 (K_{(e)ijk}K_{(e)jki} + K_{(e)ijk}K_{(e)kij}) + \\
& + c_9 K_{(e)ijk}K_{(e)ikj} + c_{10} K_{(e)ijk}K_{(e)jik} + \\
& + c_{11} K_{(e)ijk}K_{(e)kji} \geq 0 \quad .
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Üblicherweise teilt man als Nächstes die Verzerrungstensoren in unabhängige Anteile auf und formuliert hinreichende Bedingungen zu Erfüllung von (6.15). Im Falle mikromorpher Theorien gestaltet sich diese Vorgehensweise schwierig, da z. B. die Verzerrungstensoren in Gleichung (6.18) gekoppelt sind.

Aus diesem Grund schlugen ERINGEN [32] und SMITH [70] vor, eine Aufspaltung dieser Ungleichung nach folgenden Variablensätzen vorzunehmen:

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned}
(\epsilon_{(e)11}, \epsilon_{(e)22}, \epsilon_{(e)33}, \beta_{(e)11}, \beta_{(e)22}, \beta_{(e)33}) &= (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \quad , \\
(\epsilon_{(e)12}, \epsilon_{(e)21}, \beta_{(e)12}) &= (x_1, x_2, x_3) \quad , \\
(\epsilon_{(e)23}, \epsilon_{(e)32}, \beta_{(e)23}) &= (y_1, y_2, y_3) \quad , \\
(\epsilon_{(e)31}, \epsilon_{(e)13}, \beta_{(e)31}) &= (z_1, z_2, z_3) \quad .
\end{aligned} \right\} \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Somit lautet die Darstellung von $\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta})$:

$$\rho\psi_e^1(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta}) = a_{ij}w_iw_j + b_{kl}x_kx_l + b_{kl}y_ky_l + b_{kl}z_kz_l \quad . \tag{6.21}$$

Anschließend können Restriktionen an die Materialparameter durch Bildung der zweiten partiellen Ableitungen von $\psi_e(\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\beta}_e)$ nach den Variablensätzen (6.20) ermittelt werden. Man erhält zwei symmetrische Koeffizientenmatrizen a_{ij} (6x6) und b_{kl} (3x3) mit folgenden Strukturen:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda & \lambda & a_{14} & 2\lambda + 2d_1 & 2\lambda + 2d_1 \\ & a_{11} & \lambda & 2\lambda + 2d_1 & a_{14} & 2\lambda + 2d_1 \\ & & a_{11} & 2\lambda + 2d_1 & 2\lambda + 2d_1 & a_{14} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{45} \\ \text{sym.} & & & & a_{44} & a_{45} \\ & & & & & a_{44} \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

und

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mu + \alpha & \mu - \alpha & 4\mu + 4d_2 \\ & \mu + \alpha & 4\mu + 4d_2 \\ \text{sym.} & & 2\mu + 4d_2 + 2b_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{6.23}$$

Die Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda + 2\mu \quad , \\
a_{14} &= 2\lambda + 4\mu + 2d_1 + 4d_2 \quad , \\
a_{44} &= \lambda + 2\mu + 2d_1 + 4d_2 + b_1 + 2b_2 \quad , \\
a_{45} &= \lambda + 2d_1 + b_1 \quad .
\end{aligned}$$

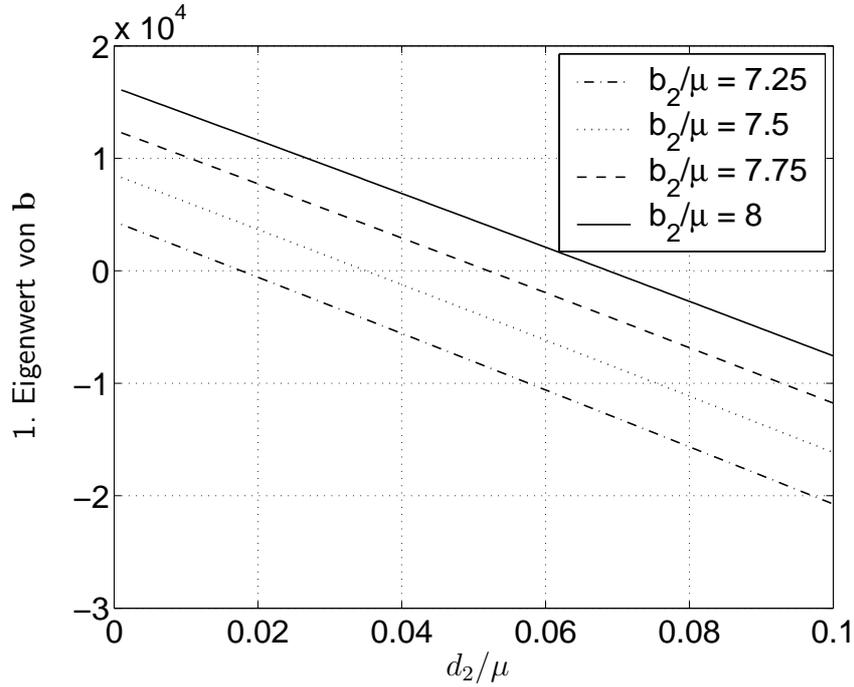


Abbildung 6.1: Erster Eigenwert der Koeffizientenmatrix \mathbf{b} als Funktion des Materialparameters d_2 .

Ungleichung (6.18) ist erfüllt, falls die Koeffizientenmatrizen \mathbf{a} und \mathbf{b} positiv definit sind. Man beschränkt sich somit auf die Eigenwertbestimmungen

$$\begin{aligned} \det(a_{ij} - \eta\delta_{ij}) &= 0, \\ \det(b_{ij} - \xi\delta_{ij}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

unter der Bedingung, dass alle Eigenwerte größer als 0 sind (ANTON [7]).

Kritisch ist die Wahl der Materialparameter b_2 und d_2 . Wählt man ein sehr großes d_2 , so wird der Betrag des ersten Eigenwertes der Koeffizientenmatrix \mathbf{b} kleiner als 0. Da dieser zusätzlich vom Parameter b_2 abhängt, ist die Kombination beider Materialparameter entscheidend für den ersten Eigenwert dieser Koeffizientenmatrix (siehe Abbildung 6.1).

Weiterhin müssen Restriktionen für die Materialparameter des Tensors 6. Stufe \mathbf{C} aus Bedingung (6.17b) ermittelt werden. SMITH [70] bildet dazu die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $\psi_e^2(\mathbf{K}_e)$ nach den Variablensätzen

$$\begin{aligned} (K_{(e)123}, K_{(e)231}, K_{(e)312}, K_{(e)132}, K_{(e)231}, K_{(e)213}) &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\ (K_{(e)111}, K_{(e)122}, K_{(e)133}, K_{(e)212}, K_{(e)313}, K_{(e)221}, K_{(e)331}) &= (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) \end{aligned}$$

und erhält die Darstellung

$$\rho\psi_e^2(\mathbf{K}) = c_{ij}x_ix_j + d_{kl}y_ky_l \quad (6.25)$$

Die quadratische Form (6.25) besteht aus einer symmetrischen 6x6-Matrix c_{ij} und einer symmetrischen 7x7-Matrix d_{kl} . In Anlehnung an Gleichungssatz (6.24) können aus den Lösungen der Eigenwertprobleme

$$\begin{aligned} \det(c_{ij} - \eta\delta_{ij}) &= 0, \\ \det(d_{ij} - \xi\delta_{ij}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Restriktionen an die Materialparameter gefunden werden. Nach SMITH [70] liefern die Eigenwertbestimmungen dieser Matrizen folgende Einschränkungen:

$$\begin{aligned}
c_7 + 2c_8 &> |c_9 + c_{10} + c_{11}| \quad , \\
c_7 - c_8 &> \frac{1}{\sqrt{2}} [(c_9 - c_{10})^2 + (c_{10} - c_{11})^2 + (c_{11} - c_9)^2]^{1/2} \quad , \\
\text{tr}\mathbf{T} &> 0 \quad , \\
\text{tr}(co\mathbf{T}) &> 0 \quad , \\
\det\mathbf{T} &> 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{6.27}$$

wobei \mathbf{T} eine 3x3-Matrix und $co\mathbf{T}$ die Kofaktor-Matrix von \mathbf{T} bezeichnen:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 3c_3 + c_7 + c_{10} & 3c_1 + c_4 + c_5 + c_8 + c_{11} & 3c_2 + c_5 + c_6 + c_8 + c_9 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 + c_8 + c_{11} & c_1 + 3c_4 + c_5 + c_7 + c_9 & c_2 + 3c_5 + c_6 + c_8 + c_{10} \\ c_1 + 3c_2 + c_3 + c_8 + c_9 & c_1 + c_4 + 3c_5 + c_8 + c_{10} & c_2 + c_5 + 3c_6 + c_7 + c_{11} \end{pmatrix} .$$

Insgesamt müssen im Falle mikromorpher Elastizität 14 Bedingungen (SMITH [70]) von den gewählten Materialparametern erfüllt werden.

Da der Anteil $\psi_p^{(\text{kin})}$ der freien spezifischen Energie ebenfalls ein quadratisches Potenzial in den Verzerrungen und Krümmungen ist (6.12), gelten für die Materialparameter der kinematischen Verfestigung die gleichen Restriktionen.

Kapitel 7

Beispiele

In diesem Kapitel werden einige Besonderheiten mikromorpher Theorien anhand einfacher Beispiele illustriert. Als erstes erfolgt die Anpassung klassischer Materialparameter an den homogenen Zugversuch.

Anhand einer Lochscheibe unter einachsiger Zugbelastung wird bei linearer Elastizität gezeigt, dass der sogenannte Spannungskonzentrationsfaktor im Falle mikromorpher Theorien keine Konstante ist, sondern von den Bauteilabmessungen und bestimmten Materialparametern abhängt. Die Untersuchung liefert bei spezieller Materialparameterkombination kleinere Spannungserhöhungen am Lochrand als die klassische Elastizitätstheorie. Ähnliche Eigenschaften zeigen mikropolare Theorien (siehe z. B. BATRA & JIN [9], KALONI & ARIMAN [47], MINDLIN [57] oder NEUBER [61]). Weitere Effekte der mikromorphen Elastizität können aus dem Biegeversuch ermittelt werden. Es zeigt sich, dass bei einer bestimmten Materialparameterkombination die Verformungsfigur deutlich vom klassischen Fall abweicht.

Abschließend wird der Größeneffekt bei inelastischem Materialverhalten diskutiert. Hierbei ist die Berücksichtigung skalarer Schädigung von zentraler Bedeutung.

7.1 Homogener Zug

Betrachtet wird ein homogener Zug in y -Richtung (siehe Abbildung 7.1). Vorgegeben ist die Verschiebung u_y in y -Richtung am oberen Ende der Zugprobe. Die Verschiebungen am unteren Ende sind in y -Richtung gehalten. Außerdem wird die x -Komponente des Spannungsvektors an diesen Enden zu 0 gesetzt. An den zur y -Achse parallelen Seitenflächen sind der Spannungsvektor und auf der gesamten Probenoberfläche der Momentenspannungsvektor identisch $\mathbf{0}$. Bei einem solchen Belastungsfall ist die Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon}$ innerhalb des Elementes konstant. Der Mikroverschiebungsgradient \mathbf{h} und damit auch $\boldsymbol{\beta}$ und \mathbf{K} verschwinden. Aus den Elastizitätsgesetzen (6.11) folgt, dass beide Spannungstensoren gleich sind und die Momentenspannungen im Inneren des Körpers verschwinden. Die Lösung ist somit identisch mit dem klassischen Fall. Dieser Versuch ist zur Anpassung der klassischen Materialparameter geeignet. Basierend auf den Messwerten eines homogenen Zugversuchs (Abbildung 7.2), kann man die Fließgrenze k_0 und die Materialparameter der isotropen Verfestigung b, c bestimmen. Die ermittelten Parameter sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Für die Lamé-Konstanten λ und μ wurden folgende Werte eingesetzt:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1.21 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2} \quad , \\ \mu &= 8.08 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2} \quad .\end{aligned}\tag{7.1}$$

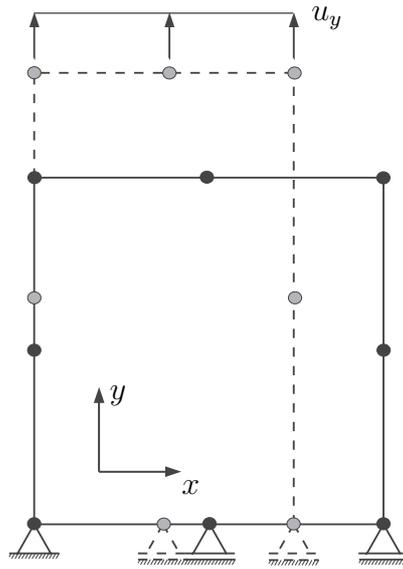


Abbildung 7.1: Homogener Zug an einem Element

Materialparameter	k_0	b	c
	$\frac{N}{mm^2}$	[]	$\frac{N}{mm^2}$
Wert	350	17	4100

Tabelle 7.1: Materialparameterbestimmung anhand des homogenen Zugversuchs

Diese entsprechen in der klassischen Theorie einem E-Modul $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ und einer Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$.

Abbildung 7.3 zeigt den Einfluss des Schädigungsparameters α_1 auf das Verfestigungsverhalten. Es wird deutlich, dass mit zunehmendem α_1 die auf der Evolutionsgleichung (4.43) basierende Schädigung schneller anwächst. Dies verursacht kleinere maximale Dehnungen und führt zu einer früheren Entfestigung, wodurch die maximale Spannung sich verringert. Außerdem fällt die Spannung bei größerem α_1 steiler ab. Weitere Schädigungseffekte werden von LÄMMER [50] betrachtet.

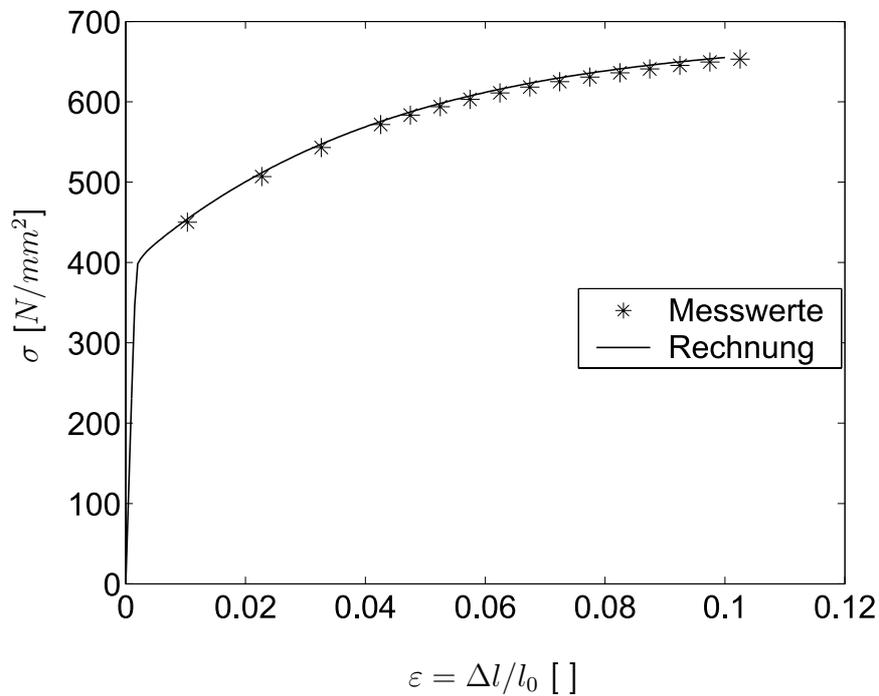


Abbildung 7.2: Anpassung der Materialparameter an den homogenen Zugversuch - Ingenieurspannung über Ingenieurdehnung. Werkstoff: Stahl (22 NiMoCr 3 7).

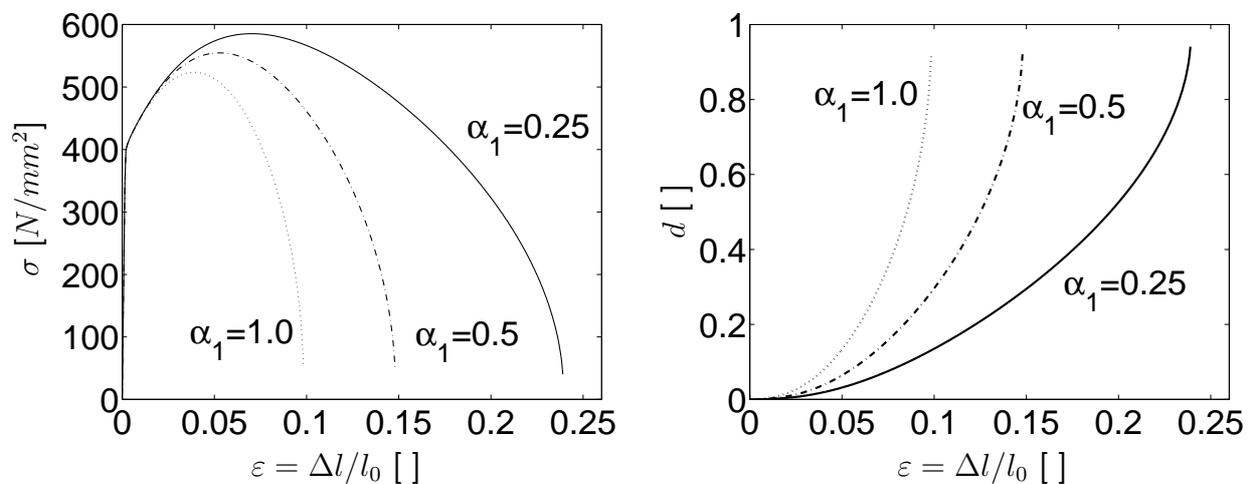


Abbildung 7.3: Homogener Zug - Dehnungs- Spannungs- Kennlinie (links) und Schädigungsevolution (rechts).

7.2 Elastizität

7.2.1 Lochscheibe

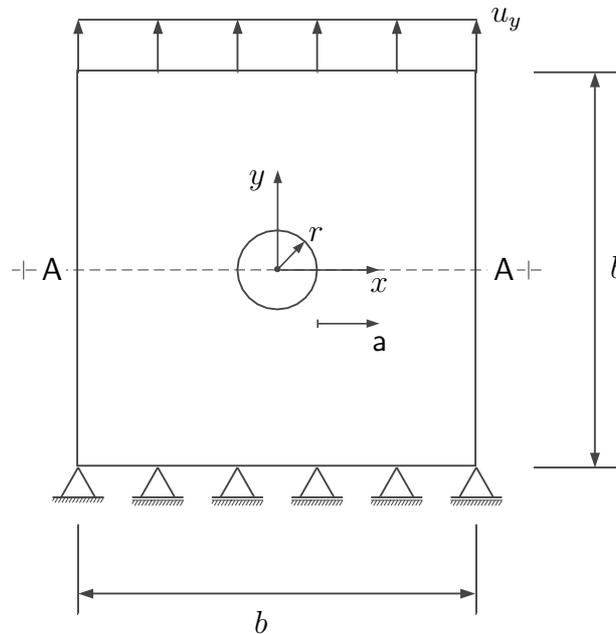


Abbildung 7.4: Rechteckscheibe mit Kreisloch

Um einen Eindruck über die Materialparameter im Elastizitätsgesetz zu gewinnen, wird hier eine Lochscheibe unter Zugbeanspruchung untersucht. Als Maß für die Abweichung von der klassischen Elastizität bietet sich der Spannungskonzentrationsfaktor an. Zur Diskussion dieses Faktors wird eine Lochscheibe nach Abbildung 7.4 mit den Abmessungen $b=2.5 \text{ mm}$, $r=0.25 \text{ mm}$ betrachtet. Die Randbedingungen sind identisch mit denen des homogenen Zugversuchs aus Abschnitt (7.1).

Die Lösung des Problems ist vergleichbar mit der einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit Kreisloch, bei der im Unendlichen eine einachsige Zugspannung σ_0 wirkt. Dieser akademische Sonderfall des ebenen Spannungszustandes kann analytisch beschrieben werden (GROSS ET AL. [37]). In Abhängigkeit von den gegebenen Randbedingungen lassen sich Gleichungen für die Spannungen herleiten. Für den hier diskutierten Fall ist die Umfangsspannung am Lochrand in einem senkrechten Schnitt zur Belastungsrichtung am größten und beträgt $3\sigma_0$. Ursache des vergleichsweise hohen Wertes ist die Störung des homogenen Spannungszustandes durch das Loch. Diese als *Spannungskonzentration* bezeichnete Störung klingt sehr schnell auf den Wert σ_0 ab. Folglich ist das Ergebnis mit endlich ausgedehnten Scheiben vergleichbar.

Für Parameterstudien sind die Einflüsse der mikromorphen Elastizitätsparameter α und c_7 von Bedeutung. Wie schon in Kapitel 6 erläutert, ist α ein Maß für die Abweichung des Elastizitätstensors \mathbf{A} von seinem klassischen Gegenstück (siehe Gleichung (6.7)). Dieser Materialparameter hat in Analogie zu den Lamékonstanten die Einheit Kraft pro Fläche. Der zweite Parameter c_7 verknüpft Momentenspannungen \mathbf{M} und Krümmungen \mathbf{K} (siehe Gleichungen (6.9 und 6.11c)). In dieser Arbeit werden die restlichen Parameter des Elastizitätstensors \mathbf{C}

vereinfachend zu 0 gesetzt. Die Materialkonstanten der Tensoren \mathcal{B} und \mathcal{D} bleiben bis auf

$$b_2 = 10 \cdot \mu = \text{const.} \quad (7.2)$$

ebenfalls unberücksichtigt.

Da die Momentenspannungen und Krümmungen die Einheiten Kraft pro Länge bzw. 1 pro Länge besitzen, hat c_7 die Dimension einer Kraft. Bildet man nun beispielsweise das Verhältnis zwischen diesem Parameter und der Lamékonstante μ , erhält man eine Größe, die das Quadrat einer intrinsischen Länge l_c darstellt:

$$l_c := \sqrt{\frac{c_7}{\mu}} \quad . \quad (7.3)$$

Die Theorie beinhaltet somit auf natürliche Weise Längenabhängigkeiten.

Zum Vergleich der Ergebnisse mit der anfangs beschriebenen analytischen Lösung der klassischen Elastizität wird zuerst der Spannungskonzentrationsfaktor T_{yy}^*/σ_0 am Lochrand der Rechteckscheibe für den klassischen Sonderfall ermittelt. Klassischer Fall bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Parameter α und c_7 im Verhältnis zur Lamékonstante μ verschwindend klein sind:

$$\alpha/\mu \approx 0 \quad , \quad c_7/\mu \approx 0 \quad . \quad (7.4)$$

Der Spannungskonzentrationsfaktor beträgt hierbei 3.14 und ist erwartungsgemäß höher als der einer unendlich ausgedehnten Scheibe. Man erhält den in Abbildung 7.5 skizzierten Verlauf von T_{yy}/σ_0 entlang des Schnittes A-A (Abbildung 7.4). Der Kerbabstand a ist hierbei wie folgt definiert:

$$a := x - r \quad . \quad (7.5)$$

Durch Variation des dimensionslosen Verhältnisses α/μ kann bei mikromorphen Theorien der Spannungsverlauf beeinflusst werden. Für größere Quotienten bei konstantem Parameter $c_7 = 0.1 \cdot \mu \text{ mm}^2$ sinkt einerseits die Spannung am Lochrand drastisch, andererseits steigt sie minimal an der Außenkante. Es fällt auf, dass sich die Kurven beim Kerbabstand $a = 0.13 \text{ mm}$ schneiden.

Eine Analyse des Einflusses von α und c_7 auf den Spannungskonzentrationsfaktor zeigt Abbildung 7.6. Wählt man ein sehr großes Verhältnis α/μ , so wird der Spannungskonzentrationsfaktor ab $c_7/\mu \geq 10^{-3} \text{ mm}^2$ stark reduziert, während kleinere α/μ das Ergebnis nur minimal gegenüber der klassischen Lösung verändern. Auffällig ist, dass man für c_7/μ gegen 0 die klassische Lösung als Grenzfall erhält. Für c_7/μ gegen unendlich geht die Lösung asymptotisch gegen einen zweiten Grenzwert, der stets kleiner als $T_{yy}/\sigma_0 = 3.14$ (klassischer Fall) ist.

Zur Simulation des Größeneffektes werden Parameterstudien mit Proben durchgeführt, deren geometrischen Abmessungen und Randbedingungen sich um einen Faktor ($n = 1, 4, 20, 200$) unterscheiden (siehe Abbildung 7.7). Es ergeben sich bei Multiplikation von c_7 mit n^2 identische Spannungskonzentrationsfaktoren. Folglich liegen die vier Kurven aus Abbildung 7.7 aufeinander, falls man den Faktor über dem Verhältnis c_7/n^2 aufträgt (siehe Abbildung 7.8). Somit besteht im linear-elastischen Fall die Möglichkeit, Größeneffekte durch Variation von c_7 unter Vernachlässigung der restlichen Parameter des Elastizitätstensors \mathcal{C} darzustellen. Entsprechende Beziehungen findet man für mikropolare Theorien (siehe z. B. ELSÄSSER [22]).

In einer abschließenden Studie werden lediglich die Bauteilabmessungen und Randbedingungen

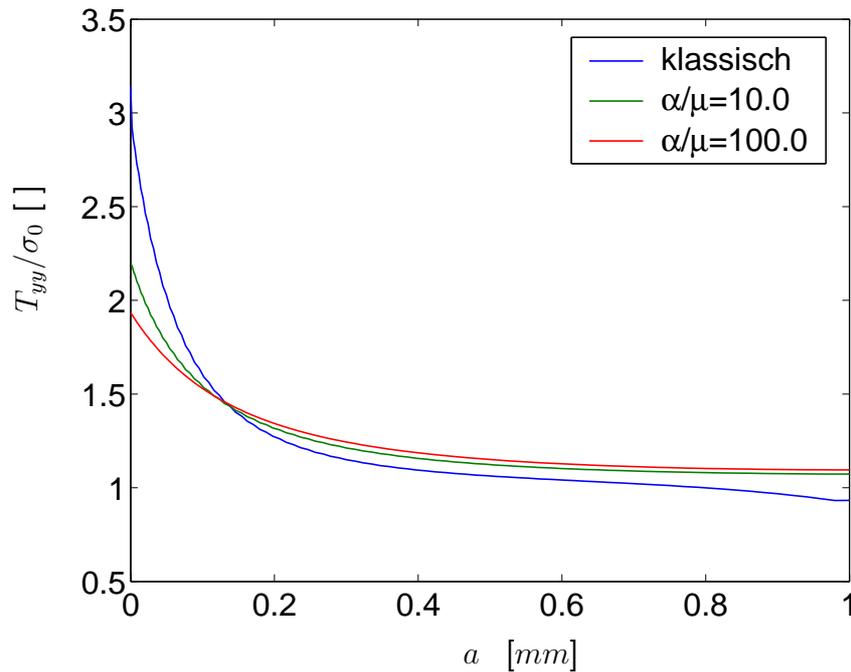


Abbildung 7.5: Spannungsverhältnis T_{yy}/σ_0 über Kerbabstand a in x-Richtung bei $c_7 = 0.1 \cdot \mu \text{ mm}^2$ (Schnitt A-A)

mit einem Faktor $n = 0.0001, 0.01, \dots, 400, 10000$ variiert. Die Abbildungen 7.9 zeigen, dass in diesem Fall der Spannungskonzentrationsfaktor eine Funktion der Abmessungen ist. Hierbei ist die charakteristische Bauteilabmessung l_m in Anlehnung an die Konventionen des Projektes LISSAC (siehe z. B. KRIEG ET AL. [46]) wie folgt definiert:

$$l_m = 4r = 0.4b \quad . \quad (7.6)$$

Für die innere Länge ergibt sich für $c_7 = 0.1 \cdot \mu \text{ mm}^2$ ein Wert von $l_c = 0.31623 \text{ mm}$. Die Ergebnisse sind mit der theoretischen Lösung von MINDLIN [57] vergleichbar. Er erhält für den mikropolaren Ansatz eine Reduktion des Spannungskonzentrationsfaktors der unendlich ausgedehnten Scheibe mit einachsiger Belastung (ebener Spannungszustand) in Abhängigkeit des Verhältnisses zwischen Lochradius zur inneren Länge.

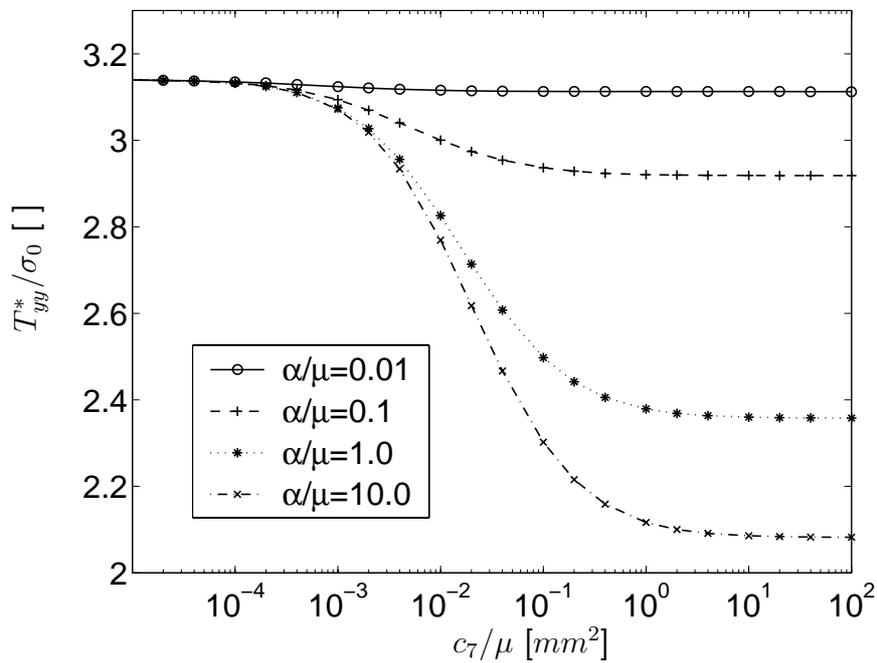


Abbildung 7.6: Einfluss des Parameters α auf den Spannungskonzentrationsfaktor in Abhängigkeit von c_7 (Lochscheibe).

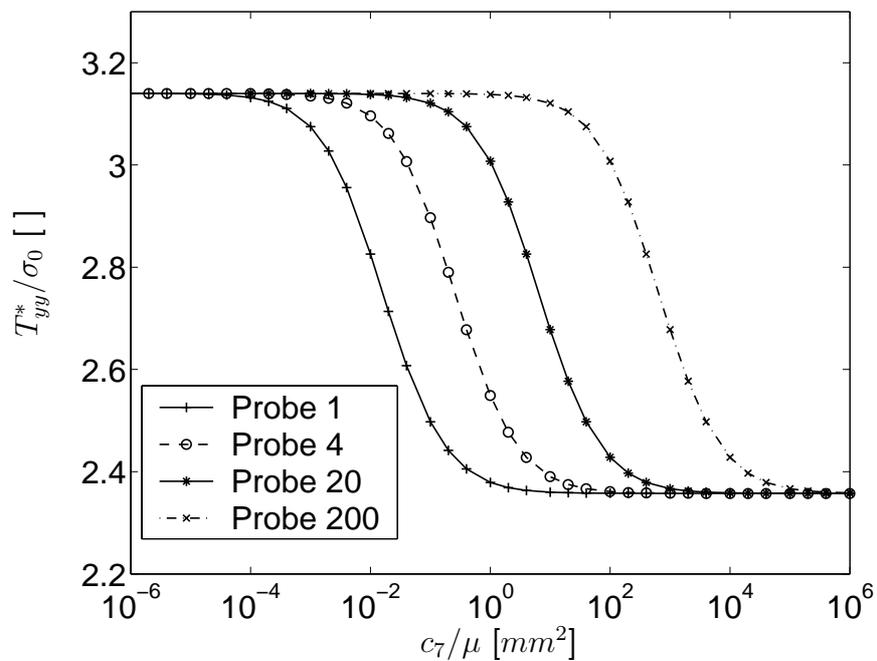


Abbildung 7.7: Größeneffekt in der Elastizität (rechts) bei einer Variation des Parameters c_7 mit $\alpha = 1.0 \cdot \mu$.

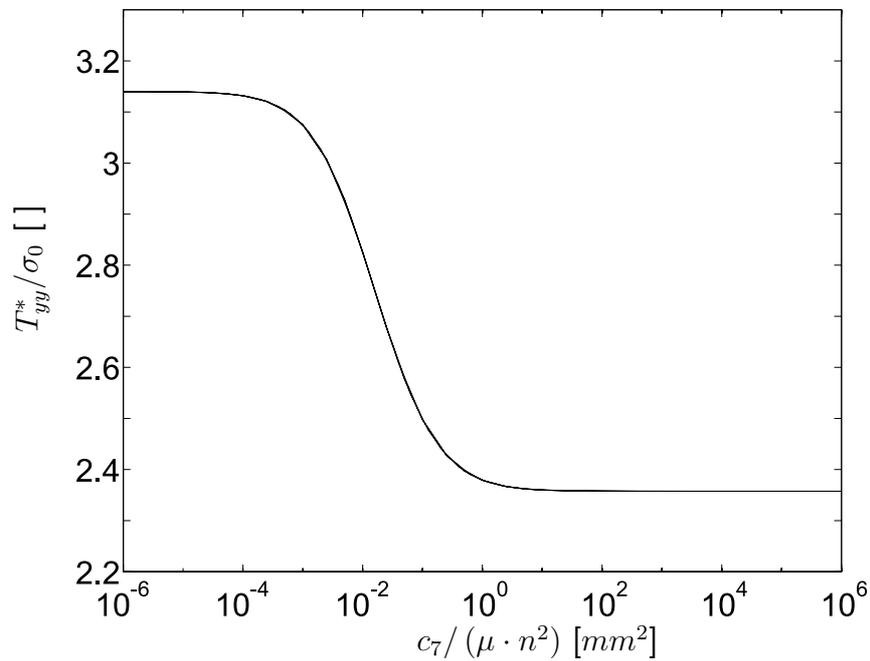


Abbildung 7.8: Spannungskonzentrationsfaktor bei einer Variation des Quotienten c_7/n^2 . Die Kurven für $n = 1, 4, 20, 200$ fallen in diesem Diagramm zusammen.

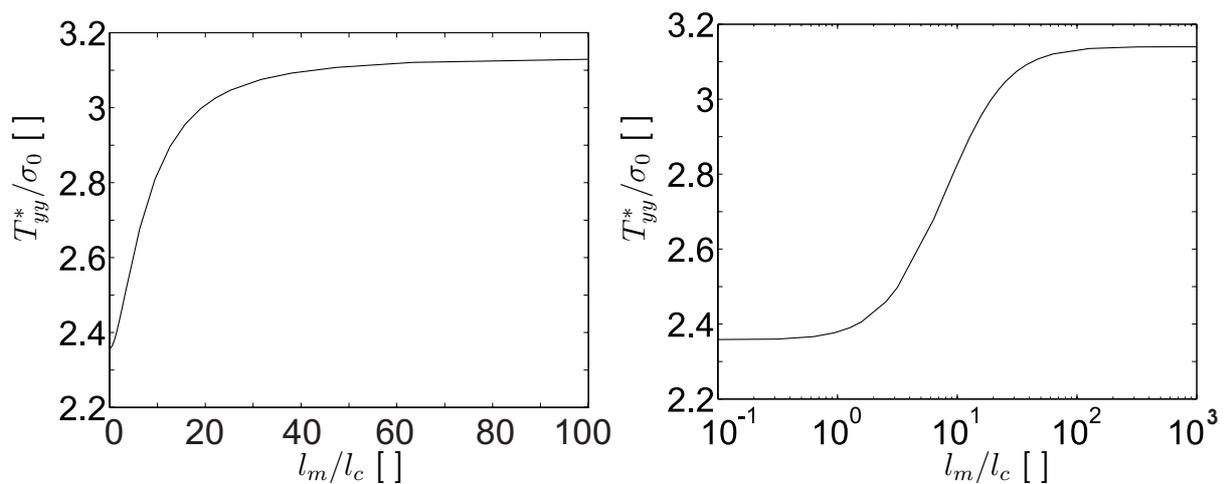


Abbildung 7.9: Spannungskonzentrationsfaktor der Lochscheibe als Funktion des Verhältnisses zwischen einer charakteristischen Bauteilabmessung l_m zur inneren Länge l_c , aufgetragen in einem linearen (links) und semilogarithmisches Diagramm (rechts) bei konstanten Materialparametern ($\alpha = 1.0 \cdot \mu$ und $c_7 = 0.1 \cdot \mu \text{ mm}^2$).

7.2.2 Biegeprobe

Weitere Besonderheiten der mikromorphen Elastizität kann man am Beispiel einer einfachen Biegeprobe (Abbildung 7.10) diskutieren. Hierzu wird die Spannungskomponente T_{xx} an den Punkten A und B betrachtet. Am rechten Rand sind $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ und am linken Rand ist eine Verschiebung u_y vorgegeben. Weiterhin gelten an diesem Rand die Bedingungen $t_x = 0$ und $\Phi = \mathbf{0}$. An den zur x-Achse parallelen Seitenflächen sind der Spannungs- und Momentenspannungsvektor identisch $\mathbf{0}$.

Der Vorgehensweise des letzten Abschnitts folgend, werden die Einflüsse der Parameter α und c_7 diskutiert. Dafür bietet es sich an, Punkte mit großem Spannungsgradienten zu betrachten. Da an der Einspannung eine Spannungssingularität vorliegt (siehe Abbildung 7.11), werden zur Analyse die Punkte A und B mit den horizontalen Abständen $0.02 \cdot l$ und $0.17 \cdot l$ von der Singularität gewählt. Es handelt sich im Folgenden um Spannungs- und Momentenspannungskomponenten an Gausspunkten, die sich in einen vertikalen Abstand $0.033 \cdot b$ vom oberen Rand befinden. In Analogie zum letzten Abschnitt betrachtet man die Verhältnisse $\frac{T_{xx}}{T_{xx}^{(\text{klass})}}$ zwischen den xx -Komponenten des Spannungstensors \mathbf{T} am jeweiligen Punkt. Hierbei kennzeichnet $T_{xx}^{(\text{klass})}$ den Fall der klassischen Elastizität.

Es zeigt sich, dass im Gegensatz zum einachsigen Zug sogar eine Erhöhung des Faktors $\frac{T_{xx}}{T_{xx}^{(\text{klass})}}$ in der Nähe der Spannungssingularität (Punkt A) möglich ist. Abbildung 7.14 zeigt, dass in größerem Abstand von der Einspannung keine Erhöhung des Faktors $\frac{T_{xx}}{T_{xx}^{(\text{klass})}}$ auftritt. Des Weiteren existieren Materialparameterkombinationen, bei denen der Faktor asymptotisch gegen 0 geht (siehe Abbildung 7.12).

Gleichzeitig verändern sich dann die Schubspannungen am betrachteten Gausspunkt deutlich (siehe Abbildung 7.13). Während für den klassischen Fall T_{xy} und T_{yx} identisch sind, geht für den genannten Sonderfall die Komponente T_{xy} asymptotisch gegen 0, und die zweite Komponente T_{yx} steigt bis zu einem Grenzwert von $1.3394 \cdot \frac{T_{xx}}{T_{xx}^{(\text{klass})}}$ an.

Zusätzlich treten Momentenspannungen in Erscheinung, aus denen man die nach Gleichung (B.9) bekannten *couple stresses* M_c berechnen kann (siehe hierzu z. B. MINDLIN [58]).

Den Unterschied zwischen dieser und der klassischen Lösung verdeutlichen besonders gut die

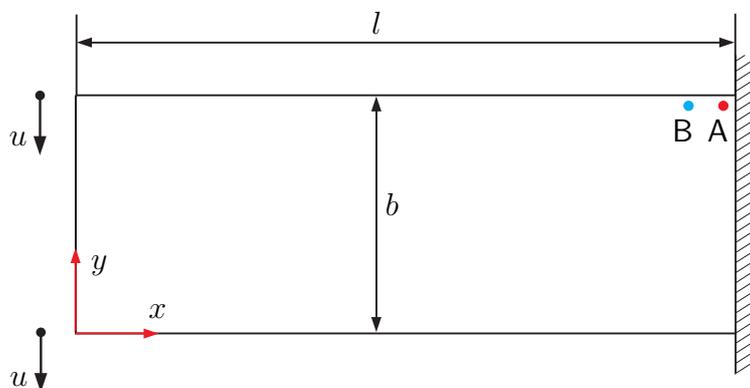


Abbildung 7.10: Einseitig eingespannte Biegeprobe ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{h} = \mathbf{0}$) mit Verschiebungsrandbedingungen (Länge $l = 3.4375 \text{ mm}$, Breite $b = 1.25 \text{ mm}$, Verschiebung $u = 0.01 \text{ mm}$).

Verformungsfiguren (Abbildung 7.15). Bei der Materialparameterkombination $\alpha = 1.0 \cdot \mu$ und $c_7 = 10^8 \cdot \mu \text{ mm}^2$ tritt Scherung auf, während im klassischen Fall ($c_7 \rightarrow 0$) die Deformation von Biegung dominiert wird.

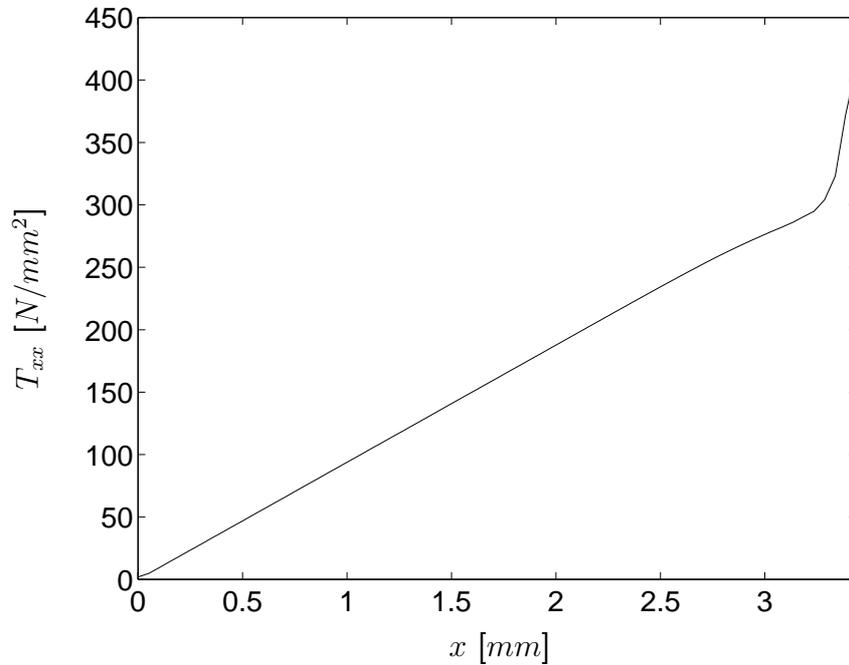


Abbildung 7.11: T_{xx} als Funktion der Koordinate x für $y = \text{const.} = 1.25 \text{ mm}$ - Spannungssingularität an der Einspannung ($\alpha = 10^{-8} \cdot \mu$, $c_7 = 10^{-8} \cdot \mu \text{ mm}^2$)

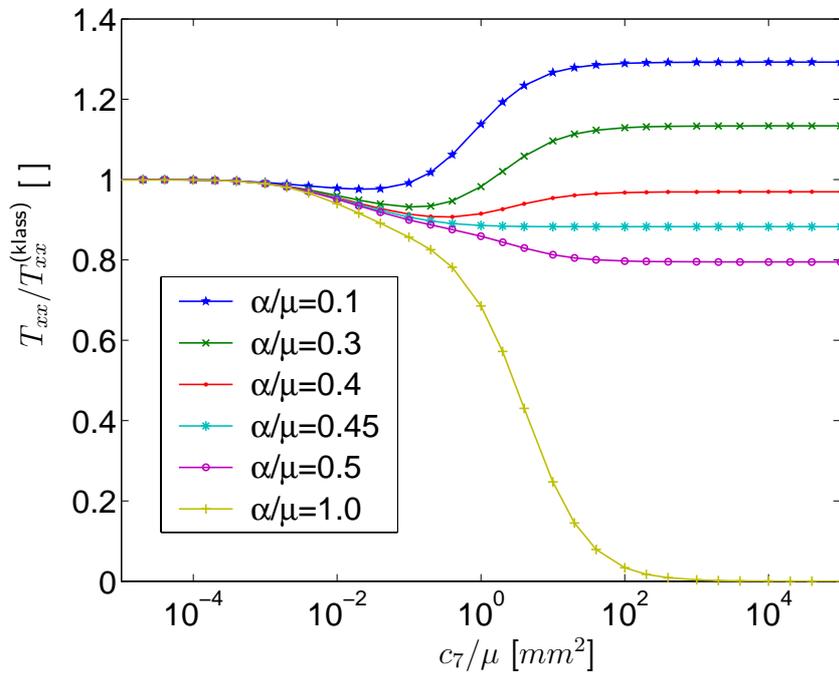


Abbildung 7.12: Einfluss von α auf die Spannung T_{xx} am Punkt A bei einer Variation des Parameters c_7

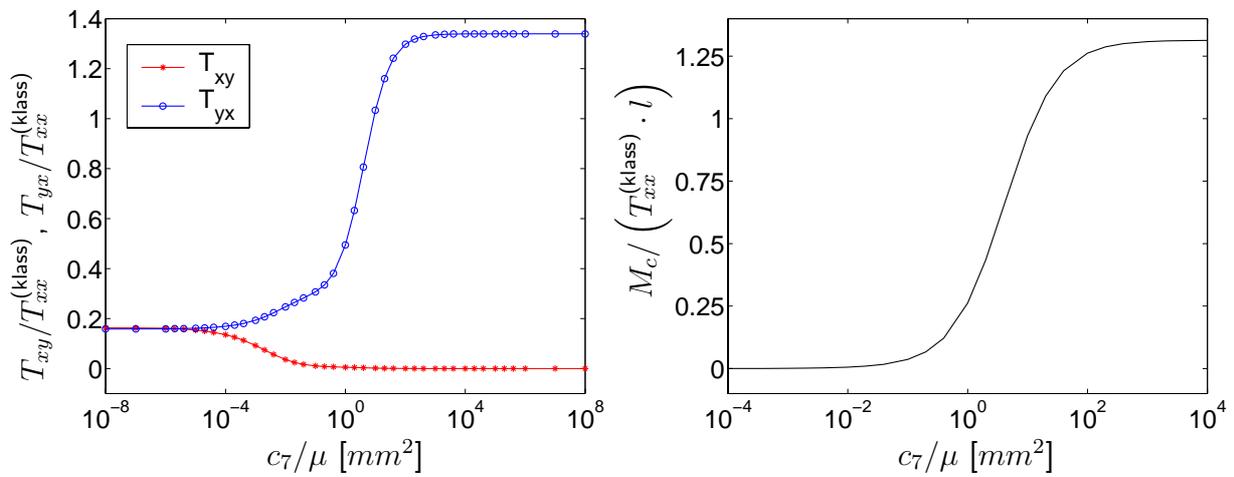


Abbildung 7.13: Schubspannungen T_{xy} und T_{yx} (links) und *couple stresses* M_c nach Gleichung (B.9) am Punkt A ($\alpha = 1.0 \cdot \mu$).

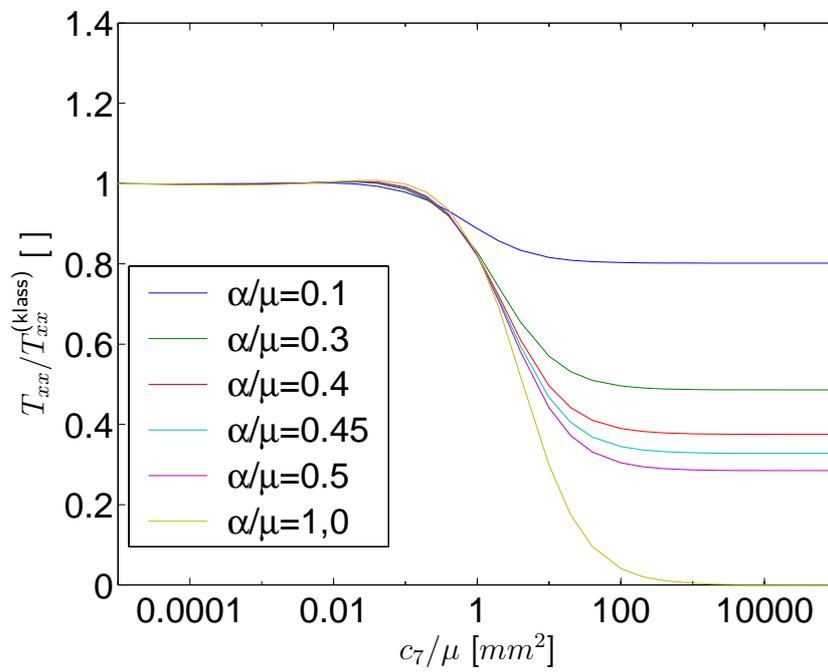


Abbildung 7.14: Einfluss von α auf die Spannung T_{xx} am Punkt B bei einer Variation des Parameters c_7 .

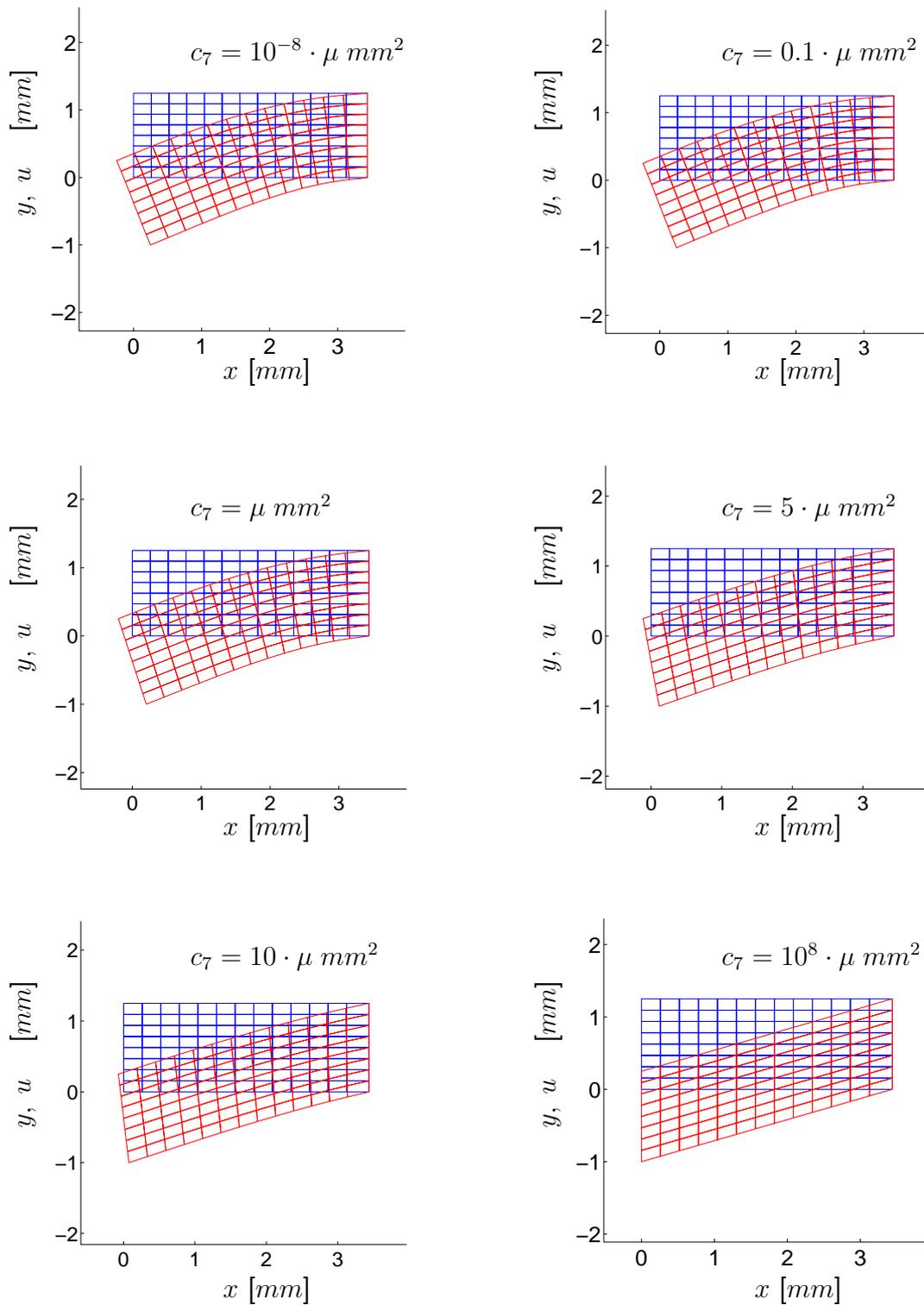


Abbildung 7.15: Deformierte (rot) und unverformte Netze (blau) für Variationen des Materialparameters $c_7 = 10^{-8} \cdot \mu \text{ mm}^2, \dots, c_7 = 10^8 \cdot \mu \text{ mm}^2$ (von links oben nach rechts unten) bei $\alpha = \mu$. Die Verformungen u sind um einen Faktor 100 überhöht dargestellt. Der Grenzfall $c_7 \rightarrow 0$ entspricht der klassischen Lösung.

7.3 Inelastisches Materialverhalten

7.3.1 Experimente

Die hier präsentierten Versuche zur Ermittlung von Längenabhängigkeiten makroskopischer Bauteile wurden im Rahmen des europäischen Projektes LISSAC (siehe AKTAA ET AL. [5] und KRIEG ET AL. [46]) durchgeführt. Das getestete Material ist ein Stahl mit der Bezeichnung 22 NiMoCr 3 7.

Es wurden Bauteile unterschiedlicher Geometrien betrachtet. Besonderes Interesse galt Proben mit inhomogenen Spannungs- und Dehnungszuständen. Es gibt Anzeichen, dass der Größeneffekt in erster Linie von solchen Inhomogenitäten abhängt.

Für diese Arbeit ist lediglich das mechanische Verhalten von flachen Zugproben mit Kreisloch bei Raumtemperatur von Interesse (siehe Abbildungen 1.1 und 7.18).

Vergleiche der getesteten 4 mm, 20 mm, 40 mm, 80 mm und 200 mm dicken Proben nach Tabelle 7.3 sind in den Abbildungen 7.16 und 7.17 dargestellt. σ_{netto} ist hierbei die von der Prüfmaschine gemessene Zugkraft dividiert durch A_{netto} mit (siehe Abbildung 7.18, t ist die Probendicke):

$$A_{\text{netto}} = (b - d) \cdot t \quad . \quad (7.7)$$

Bis zur maximalen Spannung zeigen die Kurven keine deutlichen Unterschiede. Es ist zu erkennen, dass bei großen Proben die Entfestigung schon bei geringen Dehnungen eintritt. Folglich ist die globale Bruchdehnung keine Konstante, sondern hängt von der Bauteilgröße ab. Nach Abbildung 7.16 liegen die Bruchdehnungen je nach Probenabmessung zwischen 8 und 11%.

Da die Ingenieurdehnung ε ein integrales Maß ist, wurde zur Erfassung lokaler Effekte die Lochaufweitung $\Delta r/r$ gemessen. Dieses Maß ist der Quotient zwischen der Lochverlängerung Δr und dem Lochradius r . Trägt man die Ingenieurspannung über $\Delta r/r$ auf, ist sogar ein Unterschied zwischen den 4 mm und 20 mm dicken Proben sichtbar (Abbildung 7.17).

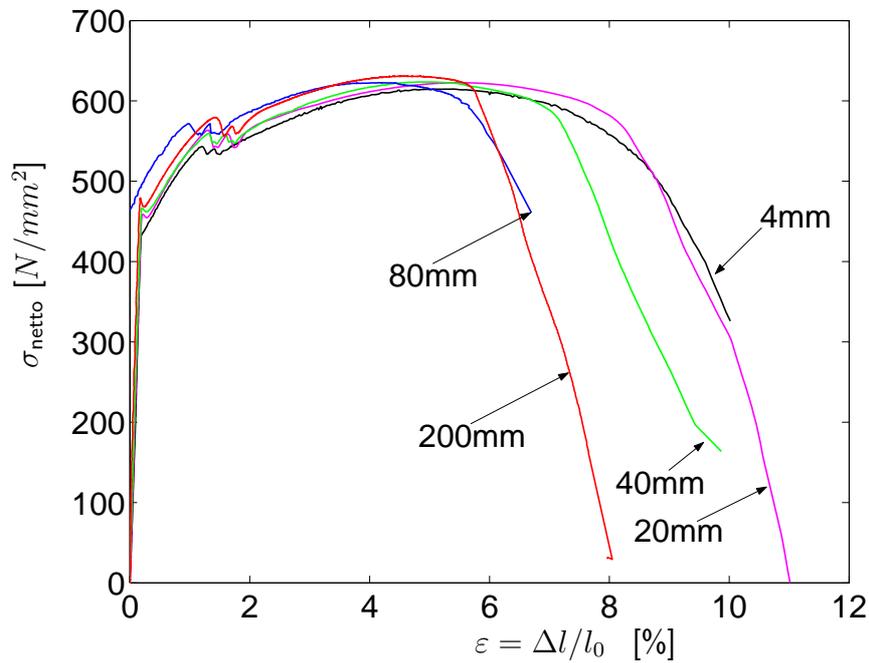


Abbildung 7.16: Größeneffekt bei Entfestigung nach AKTAA ET AL. [5] - Ingenieurspannung über Ingenieurdehnung. Die Zahlenangaben entsprechen der Probendicke t .

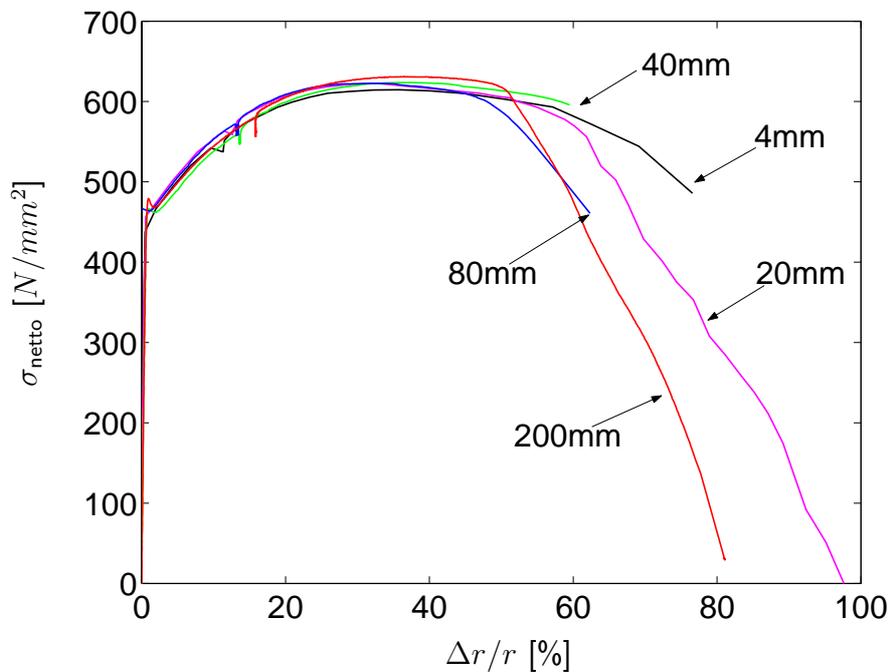


Abbildung 7.17: Größeneffekt bei Entfestigung nach AKTAA ET AL. [5] - Ingenieurspannung über Lochaufweitung. Die Zahlenangaben entsprechen der Probendicke t .

7.3.2 FE-Simulationen mit isotroper Verfestigung

Die im letzten Abschnitt präsentierten Experimente dienen als Motivation zur Simulation von Größeneffekten bei inelastischem Materialverhalten. Die Analyse der gezeigten Effekte erfordert jedoch eine komplizierte Numerik und geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Außerdem fehlt eine genaue Materialparameterbestimmung. Deshalb wird lediglich gezeigt, dass die Theorie qualitativ in der Lage ist, Größeneffekte bei inelastischer Materialantwort nachzuweisen. Hierzu werden isotrope Verfestigung und skalare Schädigung berücksichtigt. In diesem Fall hängt die Theorie von 26 Materialparametern ab. Dazu gehören 18 Elastizitätsparameter (Gleichungen (6.7)-(6.9)), 4 Parameter der Fließfunktion (Gleichungen 4.20 und 4.21), 3 Parameter der isotropen Verfestigung (Gleichungen 4.3 und 4.23) sowie 1 Parameter zur Beschreibung der Evolution der skalaren Schädigung (Gleichung 4.43). Rechnungen haben jedoch gezeigt, dass lediglich 9 Parameter zur Darstellung des Größeneffektes genügen (siehe Tabelle 7.2). Die restlichen Materialkonstanten werden zu 0 gesetzt.

Es werden die Effekte der Materialparameter r_7 und α_1 studiert. Laut Gleichung (4.21) ist r_7

Parameter	Wert	Einheit
λ	$1.21 \cdot 10^5$	$\frac{N}{mm^2}$
μ	$8.08 \cdot 10^4$	$\frac{N}{mm^2}$
α	$0.1 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^3$	$\frac{N}{mm^2}$
b_2	$10.0 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^5$	$\frac{N}{mm^2}$
c_7	$0.1 \text{ mm}^2 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^3$	N
b	17.0	[]
c	4100.0	$\frac{N}{mm^2}$
r_7	0, 1, ..., 100	$\frac{1}{mm^2}$
k_0	350.0	$\frac{N}{mm^2}$
α_1	0.1, ..., 1.0	[]

Tabelle 7.2: Materialparameter der FE-Simulationen mit isotroper Verfestigung

ein zusätzlicher Parameter der Fließfunktion, der den Einfluss der Momentenspannungen auf das plastische Materialverhalten steuert. α_1 steht mit der Evolution von skalarer Schädigung im Zusammenhang (siehe Gleichung (4.43)).

In Anlehnung an die Experimente des letzten Abschnitts wird die flache Zugprobe nach Abbildung 7.18 betrachtet. Die Abmessungen sind in Tabelle 7.3 gegeben. Den Größeneffekt des inelastischen Materialverhaltens veranschaulicht Abbildung 7.19. Hier werden die Dehnungs-Spannungs-Beziehungen von Proben unterschiedlicher Abmessungen verglichen. Man kann erkennen, dass Entfestigung bei großen Proben früher eintritt als bei kleinen. Weiterhin zeigt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse aus Abbildung 7.19 mit denen von Abbildung 7.20, dass der

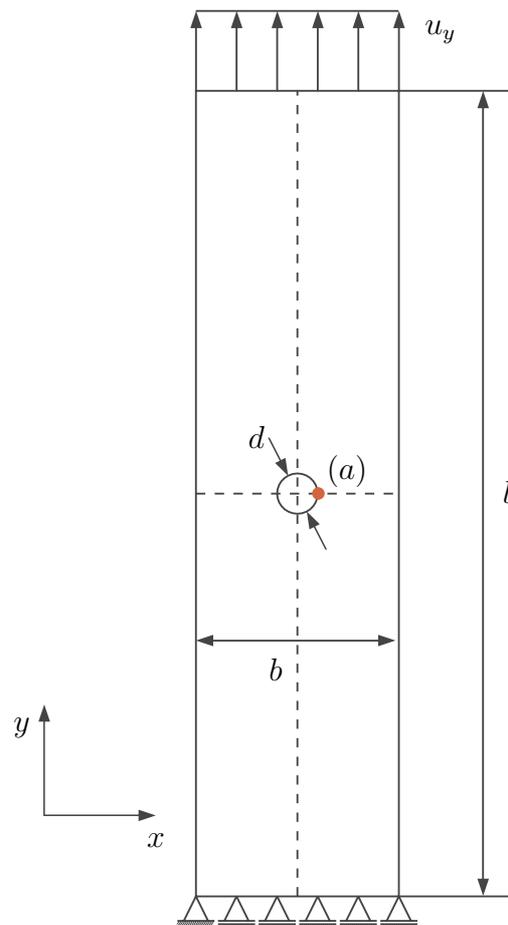


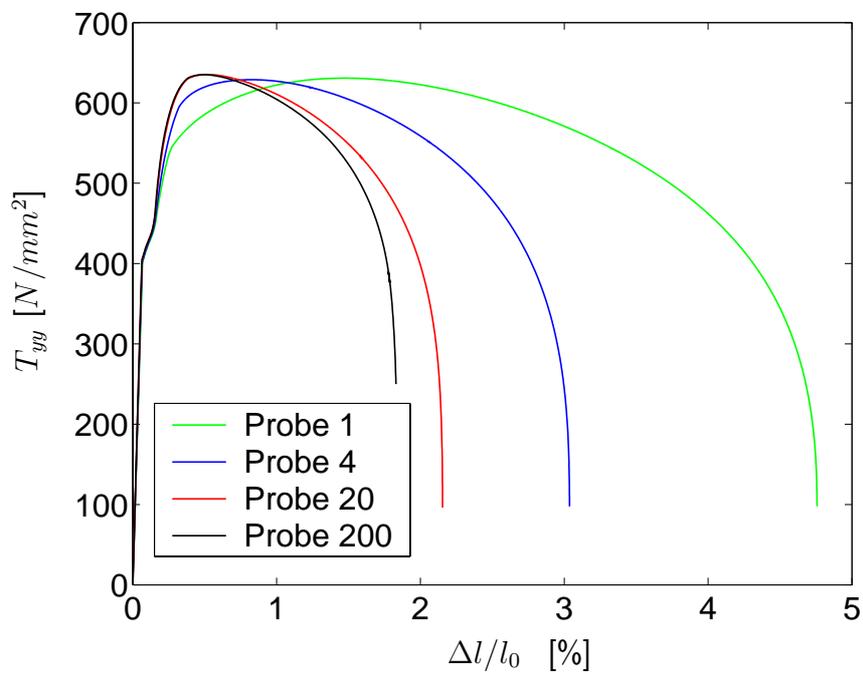
Abbildung 7.18: Flachprobe mit einachsiger Zugbelastung.

Dehnungs-Spannungs-Verlauf stark vom Parameter der skalaren Schädigung α_1 abhängt.

Abbildung 7.21 veranschaulicht, dass sowohl die maximale lokale Spannung als auch die maximale lokale Dehnung abhängig vom Parameter r_7 sind. Man kann somit den Größeneffekt mit r_7 steuern. Dieser Parameter hat folglich eine Funktion, die mit der des Elastizitätsparameters c_7 vergleichbar ist (siehe Abschnitt 7.2.1). Setzt man $r_7 = 0$, verschwinden die Größeneffekte des inelastischen Bereichs.

Größenparameter n (Probennummer)	Länge l [mm]	Breite b [mm]	Durchmesser d [mm]
1	10.0	2.5	1.0
4	40.0	10.0	4.0
20	200.0	50.0	20.0
200	2000.0	500.0	200.0

Tabelle 7.3: Probengeometrien

Abbildung 7.19: Kerbspannung T_{yy} über globale Dehnung - Größeneffekt bei $\alpha_1 = 0.1$.

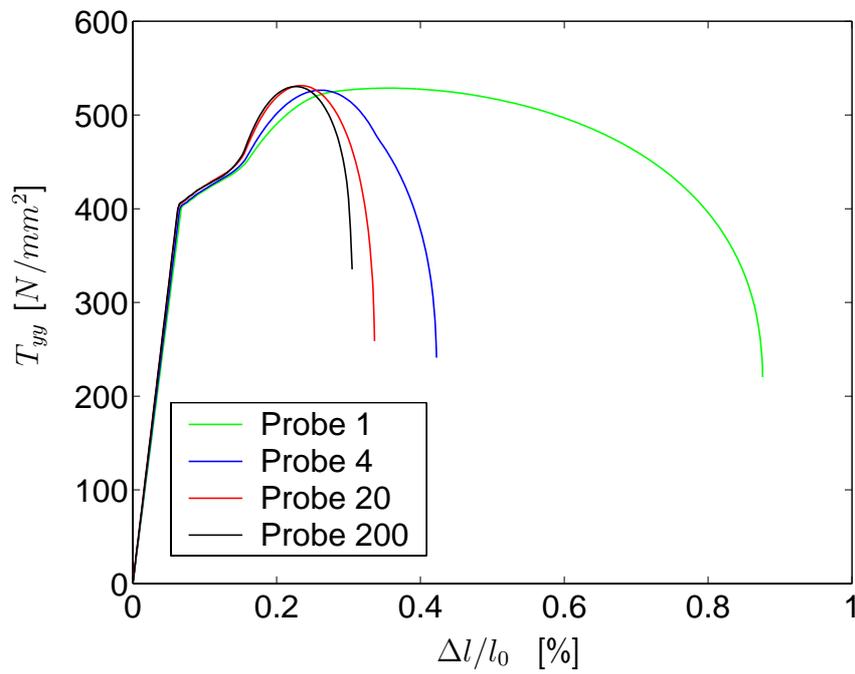


Abbildung 7.20: Kerbspannung T_{yy} über globale Dehnung - Größeneffekt bei $\alpha_1 = 1.0$.

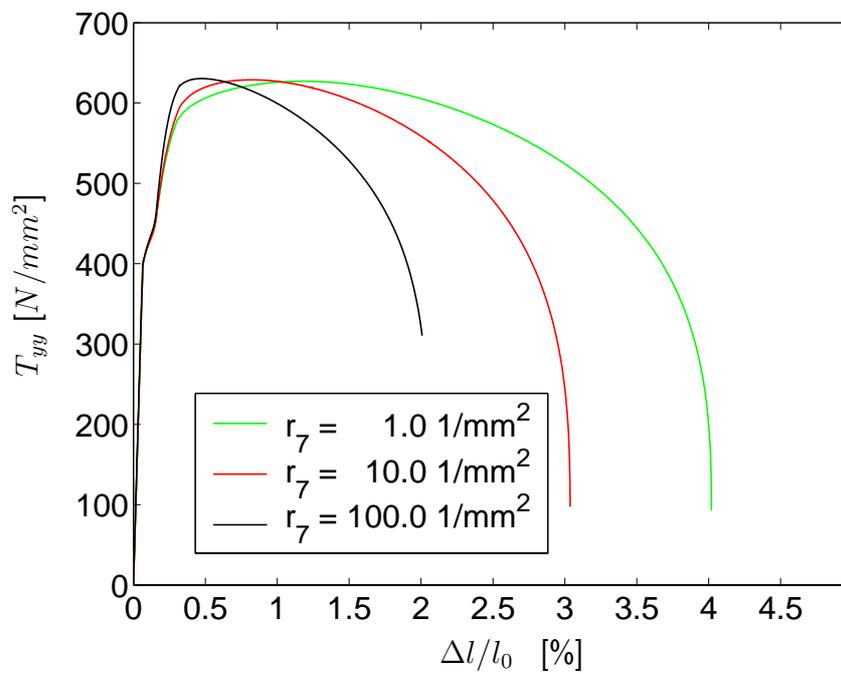


Abbildung 7.21: Kerbspannung T_{yy} über globale Dehnung - Einfluss des Parameters r_7 (Probe 4, $\alpha_1 = 0.1$)

7.3.3 FE-Simulationen mit kinematischer Verfestigung

Abschließend erfolgen Simulationen des Zugexperimentes mit kinematischer Verfestigung und skalarer Schädigung. Eine Bestimmung der Materialparameter für dieses Stoffgesetz ist ein bisher nicht gelöstes Problem der Kontinuumsmechanik und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Die verwendeten Materialparameter (siehe Tabelle 7.4) sind deshalb lediglich angenommene Werte. Vereinfachend wird hierbei ein Großteil der Konstanten von \mathcal{S} und \mathcal{Z}^C (Gleichungen 4.25 und 6.14) vernachlässigt.

In Abbildung 7.23 ist zu erkennen, dass Entfestigung bei großen Proben früher eintritt als bei kleinen. Somit sind die Ergebnisse qualitativ mit denjenigen der isotropen Verfestigung vergleichbar. Weiterhin zeigen diese Ergebnisse, dass kinematische Verfestigung bei mikromorphen Theorien im Gegensatz zum klassischen Fall auch bei rein monotoner Belastung von Bedeutung ist. Ähnliche Resultate wurden von GRAMMENOUDIS [35] für mikropolare Theorien gefunden. Abbildung 7.22 zeigt Simulationen mit kombinierter isotroper und kinematischer Verfestigung. Die gewählten Materialparameter sind in Tabelle 7.4 zusammengestellt.

Parameter	Wert	Einheit
λ	$1.21 \cdot 10^5$	$\frac{N}{mm^2}$
μ	$8.08 \cdot 10^4$	$\frac{N}{mm^2}$
α	$0.1 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^3$	$\frac{N}{mm^2}$
b_2	$10.0 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^5$	$\frac{N}{mm^2}$
c_7	$0.1 mm^2 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^3$	N
r_7	10.0	$\frac{1}{mm^2}$
k_0	500.0	$\frac{N}{mm^2}$
α_1	1.0	[]
e_2	50.0	$\frac{mm^2}{N}$
z_2^A	200.0	$\frac{N}{mm^2}$
s_7	500.0	$\frac{1}{N}$
z_7^C	200.0	N

Tabelle 7.4: Materialparameter der FE-Simulationen mit kinematischer Verfestigung

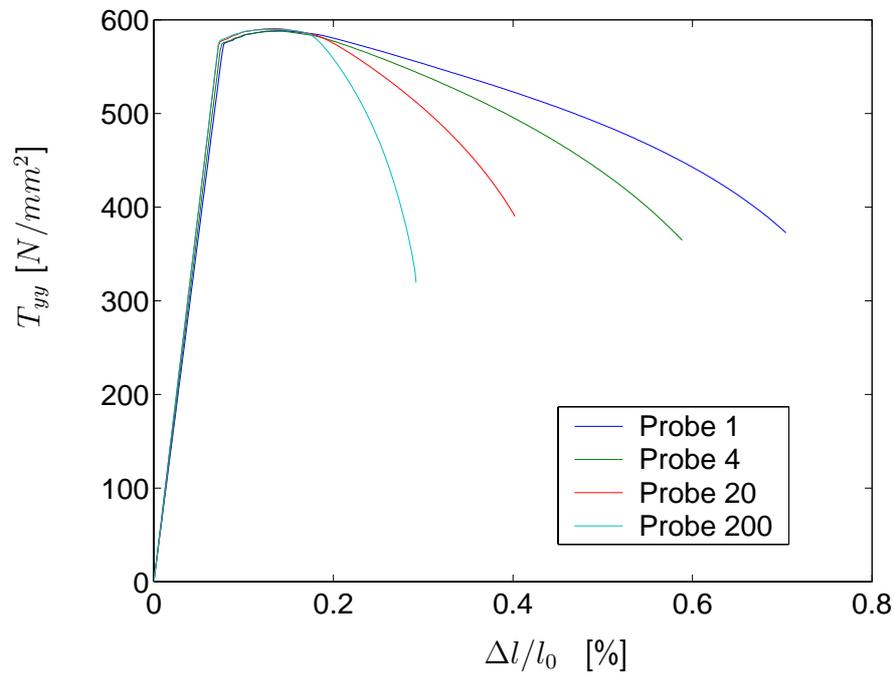


Abbildung 7.22: Kerbspannung T_{yy} über globale Dehnung - Größeneffekt bei kinematischer Verfestigung

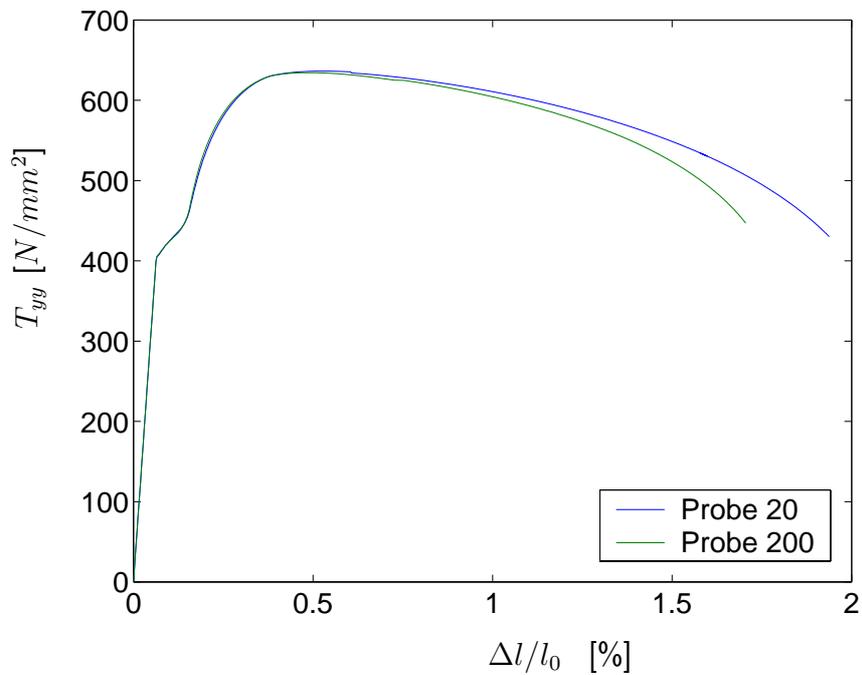


Abbildung 7.23: Kerbspannung T_{yy} über globale Dehnung - Größeneffekt bei einer Kombination von isotroper und kinematischer Verfestigung

Parameter	Wert	Einheit
λ	$1.21 \cdot 10^5$	$\frac{N}{mm^2}$
μ	$8.08 \cdot 10^4$	$\frac{N}{mm^2}$
α	$0.1 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^3$	$\frac{N}{mm^2}$
b_2	$10.0 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^5$	$\frac{N}{mm^2}$
c_7	$0.1 \text{ mm}^2 \cdot \mu = 8.08 \cdot 10^3$	N
b	17.0	[]
c	4100.0	$\frac{N}{mm^2}$
r_7	10.0	$\frac{1}{mm^2}$
k_0	350.0	$\frac{N}{mm^2}$
α_1	0.1	[]
e_2	50.0	$\frac{mm^2}{N}$
z_2^A	200.0	$\frac{N}{mm^2}$
s_7	500.0	$\frac{1}{N}$
z_7^C	200.0	N

Tabelle 7.5: Materialparameter der FE-Simulationen mit isotroper und kinematischer Verfestigung

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird eine nichtlokale Kontinuumstheorie diskutiert, mit dem Ziel, Größeneffekte im Rahmen eines makroskopischen Modells detailliert zu erfassen.

Jeder materielle Punkt besitzt bei diesem Modell eine im 3-dimensionalen Fall um 9 Freiheitsgrade erweiterte Kinematik. Spannungs- und Verzerrungstensoren solcher Theorien sind im Allgemeinen unsymmetrisch. Das für kleine Verformungen formulierte mechanische Modell ist in einen thermodynamischen Rahmen eingebettet und berücksichtigt Plastizität in Form von isotroper und kinematischer Verfestigung sowie skalare Schädigung (Dehnungsäquivalenz). Der im Allgemeinen anisotrope Charakter der Schädigung wird somit vernachlässigt.

Das Modell basiert auf der additiven Zerlegung der Verzerrungstensoren in elastische und plastische Anteile. Isotrope Verfestigung und Schädigung werden durch skalare Größen, kinematische Verfestigung durch die spannungswertigen Translationstensoren \mathbf{Z} , $\boldsymbol{\zeta}$ und \mathbf{M}_k beschrieben. Diese Tensoren hängen direkt mit den thermodynamisch konjugierten Größen vom Dehnungstyp $\boldsymbol{\epsilon}_k$, $\boldsymbol{\beta}_k$ und \mathbf{K}_k zusammen.

Aus der schwachen Form von Impuls- und Drehimpulsbilanz konnte eine FE-Formulierung für den ebenen Dehnungszustand erstellt werden. Die Implementierungen in den kommerziellen Code ABAQUS und das frei verfügbare Programm DAE dalon erfolgte auf Grund der erweiterten Kinematik durch Definition eines eigenen Elementtyps (UEL)¹. Hierbei wurden für alle Freiheitsgrade quadratische Ansatzfunktionen gewählt.

Anhand einiger Elementarversuche konnten wesentliche Besonderheiten der Theorie hervorgehoben werden. Es zeigte sich, dass bei den betrachteten Randbedingungen für den homogenen Zugversuch die zusätzlichen Freiheitsgrade des mikromorphen Ansatzes nicht aktiviert werden, während sie bei Inhomogenitäten eine große Rolle spielen.

Somit kann die Bestimmung der klassischen Materialparameter aus herkömmlichen Versuchen erfolgen, wie z. B. die der isotropen Verfestigung. Zusätzliche Parameter des mikromorphen Ansatzes lassen sich in einem zweiten Schritt ermitteln, z. B. aus experimentellen Daten des Größeneffektes. Auf eine umfassende Diskussion der zahlreichen Materialparameter wurde in dieser Arbeit jedoch verzichtet. Aus diesem Grund kann sie nur einen ersten Schritt darstellen. Es bedarf weiterer detaillierter Untersuchungen zur Anpassung der Materialparameter an das experimentell beobachtete Materialverhalten.

Eine sinnvolle Alternative zu diesem Modell stellen Gradiententheorien dar (AIFANTIS [3]), die gegenüber dem klassischen Fall mit wenigen zusätzlichen Parametern auskommen. Die Anpassung solcher Theorien an die Materialantwort gestaltet sich einfach, bisher ist es jedoch nicht gelungen, solche Ansätze in einen thermodynamischen Rahmen einzubetten.

¹UEL bedeutet *user-defined element*.

Hauptziel der Arbeit war die Untersuchung des Größeneinflusses auf das Bauteilverhalten. Als erstes Beispiel wurde hierzu für den linear-elastischen Fall die Spannungskonzentration an einem kreisförmigen Loch bei einachsiger Belastung diskutiert. Man konnte erkennen, dass im Gegensatz zur klassischen Theorie der Spannungskonzentrationsfaktor nicht konstant ist, sondern von der Wahl zweier Materialparameter abhängt. Den Spannungskonzentrationsfaktor der klassischen Theorie beinhaltet das mikromorphe Modell als Grenzfall.

Am deutlichsten sind die Effekte mikromorpher Theorien beim Biegeversuch zu sehen. Insbesondere die Verformungsfigur unterscheidet sich bei speziellen Materialparameterkombinationen stark vom klassischen Fall.

Zur Analyse der inelastischen Materialantwort wurde eine gelochte Scheibe betrachtet. Die nichtlokalen Effekte der Plastizität können durch einen zusätzlichen Parameter der Fließfunktion gesteuert werden. Dabei wurde lediglich isotrope Verfestigung berücksichtigt.

FE-Simulationen zeigten, dass bei makroskopischen Proben zur Beschreibung von Längenabhängigkeiten beim inelastischen Fall die Berücksichtigung von Schädigung erforderlich ist.

Es wurden keine Studien über mögliche Randbedingungen für nichtklassische Anteile durchgeführt. Aus diesem Grund können gewisse Randbedingungen der Beispiele dieser Arbeit einen rein akademischen Charakter haben.

Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS, Theory Manual, Version 5.8.
- [2] ABAQUS, Standard, User's Manual, Version 5.8.
- [3] E. C. Aifantis, *The physics of plastic deformation*. Int. J. Plasticity Vol. 3, pp. 211-247 (1987).
- [4] E. C. Aifantis, *On the role of gradients in the localization of deformation and fracture*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 30, pp. 211-247 (1992).
- [5] J. Aktaa, H. J. Häderich, P. Julich, M. Klotz, R. Schmitt, *Investigations to size effects on plastic deformation and failure behavior of inhomogeneously loaded structures*. V. C. Matzen (Editor), Transactions of the 16th Internat. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT 16), Washington, D. C., Aug. 12-17, 2001, Madison, Wis.: Omnipress, 2001, CD-ROM Paper 1891.
- [6] J. Altenbach, H. Altenbach, *Kontinuumsmechanik*. Teubner (1994).
- [7] H. Anton, *Lineare Algebra*. Spektrum (1998).
- [8] K. J. Bathe, *Finite-Elemente-Methoden*. Springer (1986).
- [9] R. C. Batra, Z. H. Jin, *Stress Concentration in an Elastic Cosserat Plate Undergoing Extensional Deformations*. ASME Vol. 65, pp. 66-70 (1998).
- [10] E. Becker, W. Bürger, *Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner (1975).
- [11] J. Betten, *Finite Elemente für Ingenieure 1 - Grundlagen, Matrixmethoden, Elastisches Kontinuum*. Springer (1997).
- [12] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. J. Wiley & Sons (2001).
- [13] W. Bielski, *Anisotropy in a micromorphic continuum*. In: *Theory of Earthquake Premonitory and Fracture Processes*, R. Teisseyre, Polish Scientific Publ., Warszawa, (1995).
- [14] D. S. Burnett, *Finite element analysis: From concepts to applications*. Addison-Wesley (1988).
- [15] A. Carpinteri, A. Spagnoli, S. Vantadori, *An approach to size effect in fatigue of metals using fractal theories*. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. Vol. 25, pp. 619-627 (2002).

- [16] J. L. Chaboche, *Continuous damage mechanics - a tool to describe phenomena before crack initiation*. Nuclear Engineering and Design Vol. 64, pp. 233-247 (1981).
- [17] J. L. Chaboche, *Cyclic viscoplastic constitutive equations, part I: A thermodynamically consistent formulation*. J. Appl. Mech. Vol. 60, pp. 822-828 (1993).
- [18] J. L. Chaboche, *Thermodynamically Founded CDM Models for Creep and other Conditions*. In: *Creep and damage in materials and structures*, H. Altenbach, J. J. Skrzypek, CISM courses and lectures No. 399, (1999).
- [19] E. Cosserat, F. Cosserat, *Théorie des Corps Déformables*. Herman et fils, Paris (1909).
- [20] M. A. Crisfield, *Nonlinear finite element analysis of solids and structures, volume 1: Essentials*. J. Wiley & Sons (1991).
- [21] M. A. Crisfield, *Nonlinear finite element analysis of solids and structures, volume 2: Advanced Topics*. J. Wiley & Sons (1997).
- [22] R. Elsässer, *Bruchmechanische Untersuchungen für elastische mikropolare Kontinua*. Dissertation (2002), Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6709.
- [23] L. E. Elsgolc, *Variationsrechnung*. Bibliographisches Institut (1970).
- [24] A. C. Eringen, E. S. Suhubi, *Nonlinear theory of simple micro-elastic solids - I*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 2, pp. 189-203 (1964).
- [25] A. C. Eringen, *Simple Microfluids*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 2, pp. 205-217 (1964).
- [26] A. C. Eringen, *Mechanics of micromorphic materials*. Eleventh international congress of applied mechanics, edited by Henry Görtler, pp. 131-138, Springer (1964).
- [27] A. C. Eringen, *Theory of Micropolar Fluids*. J. Mat. Mech. Vol. 15, pp. 909-923 (1966).
- [28] A. C. Eringen, *Balance Laws of Micromorphic Mechanics*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 8, pp. 819-828 (1970).
- [29] A. C. Eringen, J. T. Twiss, *Theory of Mixtures of Micromorphic Materials-Balance Laws*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 9, pp. 1019-1044 (1971).
- [30] A. C. Eringen, J. T. Twiss, *Theory of Mixtures of Micromorphic Materials-II. Elastic Constitutive Equations*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 10, pp. 437-465 (1972).
- [31] A. C. Eringen, *Theory of micromorphic materials with memory*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 10, pp. 623-641 (1972).
- [32] A. C. Eringen, *Microcontinuum Field Theories, I: Foundations and Solids*. Springer (1999).
- [33] N. A. Fleck, Y. Huang, W. D. Nix, J. W. Hutchinson, *Strain gradient plasticity: Theory and experiment*. Acta Metallurgica et Materialia. Vol. 42, pp. 475-487 (1994).
- [34] P. Grammenoudis, Ch. Tsakmakis, *Hardening rules for finite deformation micropolar plasticity: Restrictions imposed by the second law of thermodynamics and the postulate of Il'iusin*. Continuum Mech. Thermodyn. Vol. 13, pp. 325-363 (2001).

- [35] P. Grammenoudis, *Mikropolare Plastizität*. Dissertation (2003), Mechanik, TU-Darmstadt.
- [36] R. H. Gallagher, *Finite-Element-Analysis*. Springer (1976).
- [37] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, P. Wriggers, *Technische Mechanik 4*. Springer (1995).
- [38] P. Haupt, Ch. Tsakmakis, *On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics*. Continuum Mech. Thermodyn. Vol. 1, pp. 165-196 (1989).
- [39] P. Haupt, Ch. Tsakmakis, *Stress Tensors associated with Deformation Tensors via Duality*. Arch. Mech. Vol. 48, pp. 347-384 (1996).
- [40] P. Haupt, *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer (1999).
- [41] O. Häusler, *Anisotropes plastisches Fließen bei großen Deformationen*. Dissertation (1999), Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6351.
- [42] T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method*. Dover Publications, Inc. (2000).
- [43] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics, A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, LTD (2000).
- [44] W. Jansohn, *Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermoplastizität und -viskoplastizität*. Dissertation (1997), Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6002.
- [45] M. P. Knauß, S. P. Baker, E. Arzt, *Biegeexperimente an Mikrobalken*. Materialprüfung Vol. 38, pp. 326-329 (1996).
- [46] R. Krieg, T. Jordan, B. Dolensky, T. Malmberg, J. Aktaa, H. Plitz, P. Julich, M. Seidenfuß, H. Talja, G. Solomos, E. Aifantis, L. Cizelj, C. Caroli, J. Fokkens, S. B. Bjandari, P. Veron, M. Trauth, *Limit strains for severe accident conditions, description of an European research program and first results*. 16th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT 16), Washington D. C., August 12-17, 2001.
- [47] P. N. Kaloni, T. Ariman, *Stress Concentration Effects in Micropolar Elasticity*. ZAMP Vol. 18, pp. 136-141 (1967).
- [48] E. Kröner, *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 4, pp. 273-334 (1960).
- [49] D. Lachner, *Plastische Korndrehungen in Metallen - Modelle und Experimente*. Technischer Bericht 403, VDI Fortschrittsberichte, Reihe 5 (1995).
- [50] H. Lämmer, *Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität mit Schädigung bei kleinen und großen Deformationen*. Dissertation (1998), Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6053.
- [51] H. Lämmer, Ch. Tsakmakis, *Discussion of coupled elastoplasticity and damage constitutive equations for small and finite deformations*. Int. J. Plasticity Vol. 16, pp. 495-523 (2000).
- [52] J. Lemaitre, *Formulation unifiée des lois d'évolution d'endommagement*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série II, pp. 1125-1130 (1987).

- [53] J. Lemaitre, J. L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press (1990).
- [54] J. Lemaitre, *A Course on Damage Mechanics*. Springer (1992).
- [55] H. Lippmann, *Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens*. Acta Mechanica. Vol. 8, pp. 255-284 (1969).
- [56] M. Maugin, *Un Principe Variationnel pour des Milieu Micromorphic Non Dissipative*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 271, Série II, pp. 807-810 (1970).
- [57] R. D. Mindlin, *Influence of Couple-stresses on Stress Concentrations*. Experimental Mechanics. Vol. 3, pp. 1-7 (1963).
- [58] R. D. Mindlin, *Microstructure in linear elasticity*. Archs. Ration. Mech. Anal. Vol. 10, pp. 51-78 (1964).
- [59] H. Nagahama, R. Teisseyre, *Micromorphic Continuum and Fractal Fracturing in the Lithosphere*. Pure appl. geophys. Vol. 157, pp. 559-574 (2000).
- [60] H. Nagahama, R. Teisseyre, *Seismic Rotation Waves: Dislocations and Disclinations in a Micromorphic Continuum*. Acta Geophysica Polonica Vol. 34, pp. 559-574 (2001).
- [61] H. Neuber, *Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper*. Acta Mech. Vol 2, pp. 48-69 (1965).
- [62] Y. N. Rabotnov, *Creep rupture*. In M. Hetenyi and W. G. Vincenti (editor): *Applied mechanics*, pp. 342-349 (1968).
- [63] J. N. Reddy, R. L. Taylor, *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill (1993).
- [64] D. Reckwerth, Ch. Tsakmakis, *The Principle of Generalized Energy Equivalence in Continuum Damage Mechanics*. In: *Deformation and Failure of Metallic Continua*, K. Hutter, H. Baaser (Editor), to appear, Springer (2003).
- [65] M. Schäfer, *Numerik im Maschinenbau*. Springer (1999).
- [66] H. R. Schwarz, *Methode der finiten Elemente*. B. G. Teubner (1991).
- [67] J. C. Simo, M. Ortiz, *A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol. 49, pp. 221-245 (1985).
- [68] J. C. Simo, T. J. R. Hughes, *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mathematics IAM Vol. 7, Springer (1998).
- [69] I. Simonovski, M. Kovac, L. Cizelj, *Correlation length as estimate of the domain of influence of crystal grain*. Int. Conference Nuclear Energy for New Europe, Kranjska Gora, Slovenia (2002).
- [70] A. C. Smith, *Inequalities between the constants of a linear micro-elastic solid*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 6, pp. 65-74 (1968).

- [71] P. Steinmann, K. Willam, *Localization within the framework of micropolar elasto-plasticity*. In: *Advances in Continuum Mechanics*, O. Brüller, V. Mannl, J. Najjar, pp. 296-313. Springer (1991).
- [72] J. S. Stölken, A. G. Evans, *A microbend test for measuring the plasticity length scale*. *Acta mater.* Vol. 46, pp. 5109-5115 (1998).
- [73] R. Teisseyre, *Earthquake Processes in a Micromorphic Continuum*. *Pure appl. geophys.* Vol. 102, pp. 1-235 (1973).
- [74] Ch. Tsakmakis, *Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen*. Dissertation (1987), Technische Hochschule Darmstadt, VDI Fortschrittberichte, Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik Nr.36.
- [75] Ch. Tsakmakis, *Kontinuumsmechanik II*. Vorlesungsskript (1998), Technische Universität Darmstadt.
- [76] Ch. Tsakmakis, *Hardening rules for micromorphic plasticity*. Unveröffentlichtes Manuskript, TU-Darmstadt (2001).
- [77] Ch. Tsakmakis, A. Willuweit, *Use of the Elastic Predictor-Plastic Corrector Method for Integrating Finite Deformation Plasticity Laws*. In: *Deformation and Failure of Metallic Continua*, K. Hutter, H. Baaser (Editor), to appear, Springer (2003).
- [78] Ch. Tsakmakis, A. Willuweit, *A comparative study of kinematic hardening rules at finite deformations*. *Int. J. Nonl. Mech.*, in press.
- [79] J. T. Twiss, A. C. Eringen, *Theory of Mixtures of Micromorphic Materials - Balance Laws*. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 9, pp. 1019-1044 (1971).
- [80] P. Wriggers, *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer (2001).
- [81] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The finite element method, volume 1: The Basis*. McGraw-Hill (1989).
- [82] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The finite element method, volume 2: Solid Mechanics*. McGraw-Hill (1991).

Anhang A

Materialtensoren

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \alpha & \mu - \alpha \\ 0 & 0 & \mu - \alpha & \mu + \alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_{11} & \lambda + 2d_1 + b_1 & 0 & 0 \\ \lambda + 2d_1 + b_1 & B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + 2d_2 + b_2 & \mu + 2d_2 + b_2 \\ 0 & 0 & \mu + 2d_2 + b_2 & \mu + 2d_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + d_1 + 2d_2 & \lambda + d_1 & 0 & 0 \\ \lambda + d_1 & \lambda + 2\mu + d_1 + 2d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + d_2 & \mu + d_2 \\ 0 & 0 & \mu + d_2 & \mu + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} d_1 + 2d_2 & d_1 & 0 & 0 \\ d_1 & d_1 + 2d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 - \alpha & d_2 + \alpha \\ 0 & 0 & d_2 + \alpha & d_2 - \alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} b_1 + 2b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_1 + 2b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 + \alpha & b_2 - \alpha \\ 0 & 0 & b_2 - \alpha & b_2 + \alpha \end{bmatrix}$$

$$B_{11} := \lambda + 2\mu + 2d_1 + 4d_2 + b_1 + 2b_2$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} C_{11} & c_1 + c_2 + c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 + c_4 + c_5 & c_2 + c_5 + c_6 \\ c_1 + c_2 + c_3 & c_3 + c_7 + c_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 + c_8 + c_{11} & c_2 + c_8 + c_9 \\ 0 & 0 & c_6 + c_7 + c_{11} & c_5 + c_8 + c_{10} & c_2 + c_8 + c_9 & c_2 + c_5 + c_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 + c_8 + c_{10} & c_4 + c_7 + c_9 & c_1 + c_8 + c_{11} & c_1 + c_4 + c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 + c_8 + c_9 & c_1 + c_8 + c_{11} & c_3 + c_7 + c_{10} & c_1 + c_2 + c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 + c_5 + c_6 & c_1 + c_4 + c_5 & c_1 + c_2 + c_3 & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_1 + c_4 + c_5 & c_1 + c_8 + c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 + c_7 + c_9 & c_5 + c_8 + c_{10} \\ c_2 + c_5 + c_6 & c_2 + c_8 + c_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 + c_8 + c_{10} & c_6 + c_7 + c_{11} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} := 2c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4 + 2c_5 + c_6 + c_7 + 2c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11}$$

Zerlegung von \mathcal{C} in einen symmetrischen und antimetrischen Anteil

Additive Zerlegung:

$$\mathcal{C}_{ijkpqr} := \mathcal{C}_{ijkpqr}^{sym} + \mathcal{C}_{ijkpqr}^{asym}$$

mit

$$\mathcal{C}_{ijkpqr}^{sym} := \frac{1}{2} (\mathcal{C}_{ijkpqr} + \mathcal{C}_{jikqpr})$$

und

$$\mathcal{C}_{ijkpqr}^{asym} := \frac{1}{2} (\mathcal{C}_{ijkpqr} - \mathcal{C}_{jikqpr}) \quad .$$

Der symmetrische Anteil von \mathcal{C} mit

$$\mathcal{C}_{ijkpqr}^{sym} = \frac{1}{2} (\mathcal{C}_{ijkpqr} + \mathcal{C}_{jikqpr})$$

besteht aus 7 unabhängigen Konstanten:

$$\begin{aligned} c_1^s &:= c_1 + c_2 + c_4 + 2c_5 + c_6 \quad , \\ c_2^s &:= c_1 + c_2 + 2c_8 + c_9 + c_{11} \quad , \\ c_3^s &:= 2c_5 + 2c_8 + 2c_{10} \quad , \\ c_4^s &:= 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 \quad , \\ c_5^s &:= 2c_3 + 2c_7 + 2c_{10} \quad , \\ c_6^s &:= c_4 + c_6 + 2c_7 + c_9 + c_{11} \quad , \\ c_7^s &:= 2c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4 + 2c_5 + c_6 + c_7 + 2c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11} \quad . \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\underline{\mathcal{C}}^{sym} = \begin{bmatrix} c_7^s & c_4^s & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1^s & c_1^s \\ c_4^s & c_5^s & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2^s & c_2^s \\ 0 & 0 & c_6^s & c_3^s & c_2^s & c_1^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^s & c_6^s & c_2^s & c_1^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^s & c_2^s & c_5^s & c_4^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1^s & c_1^s & c_4^s & c_7^s & 0 & 0 \\ c_1^s & c_2^s & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6^s & c_3^s \\ c_1^s & c_2^s & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3^s & c_6^s \end{bmatrix} .$$

Die Matrixdarstellung des antisymmetrischen Anteils von \mathcal{C} ergibt sich mit den Definitionen

$$\begin{aligned} c_1^a &:= \frac{1}{2} (c_1 - c_2 + c_4 - c_6) \quad , \\ c_2^a &:= \frac{1}{2} (c_1 - c_2 - c_9 + c_{11}) \quad , \end{aligned}$$

zu:

$$\underline{\mathcal{C}}^{asym} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1^a & -c_1^a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2^a & -c_2^a \\ 0 & 0 & c_2^a - c_1^a & 0 & -c_2^a & -c_1^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1^a - c_2^a & c_2^a & c_1^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2^a & c_2^a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1^a & c_1^a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1^a & c_2^a & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1^a - c_2^a & 0 \\ -c_1^a & -c_2^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2^a - c_1^a \end{bmatrix} .$$

Anhang B

Bilanzgleichungen

B.1 Cosserat-Theorie

Die Cosserat-Theorie (siehe COSSERAT [19]) zeichnet sich dadurch aus, dass jedem Punkt eines Körpers Translations- und Rotationsfreiheitsgrade zugeordnet sind. Jeder materielle Punkt hat folglich 6 Freiheitsgrade. Es müssen neben den Kraft- auch Momentenspannungen eingeführt werden.

Dieser Ansatz stellt einen Sonderfall der in dieser Arbeit diskutierten mikromorphen Theorie vom Grad 1 dar. Die Gleichungen des linearen mikropolaren Modells erhält man, falls der symmetrische Anteil des Mikroverschiebungsgradienten verschwindet (siehe hierzu ERINGEN [24] oder MINDLIN [58]):

$$h_{(ij)} = 0 \quad . \quad (B.1)$$

Hierbei werden die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile eines Tensors mit den Symbolen $(\)$ bzw. $[\]$ bezeichnet:

$$h_{ij} = h_{(ij)} + h_{[ij]} \quad . \quad (B.2)$$

Die mit "c" gekennzeichneten Verzerrungstensoren der Cosserat-Theorie vereinfachen sich unter Voraussetzung von Gleichung (B.1) zu (siehe Gleichungen (2.62)-(2.66)):

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^c &= u_{i,j} - h_{[ij]} \quad , \\ \beta_{ij}^c &= 0 \quad , \\ K_{ijk}^c &= \frac{\partial h_{[ij]}}{\partial X_k} \quad . \end{aligned} \quad (B.3)$$

Aus diesem Gleichungssatz folgt, dass der in den Indexen i und j symmetrische Anteil des Momentenspannungstensors M_{ijk} sowie der Spannungstensor $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$ verschwinden:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= 0 \quad , \\ M_{(ij)k} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (B.4)$$

Die Impuls- und Drehimpulsbilanzgleichungen ergeben sich zu (vergleiche mit (3.26) (3.27)):

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + f_i &= 0 \quad , \\ M_{[ij]k,k} + T_{[ij]} + \Phi_{[ij]} &= 0 \end{aligned} \quad (B.5)$$

mit

$$\begin{aligned}
T_{[ij]} &= \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \quad , \\
M_{[ij]k} &= \frac{1}{2} (M_{ijk} - M_{jik}) \quad , \\
\Phi_{[ij]} &= \frac{1}{2} (\Phi_{ij} - \Phi_{ji}) \quad .
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Die Konstitutivgleichungen vereinfachen sich folglich zu

$$\begin{aligned}
T_{ij} &= \mathcal{A}_{ijpq} \epsilon_{pq}^c \quad , \\
M_{[ij]k} &= \mathcal{C}_{[ij]k[pq]r} K_{[pq]r}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

mit dem antisymmetrischen Anteil des Materialtensors 6. Stufe \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}_{ijkpqr}^{asym} := \mathcal{C}_{[ij]k[pq]r} = \frac{1}{2} (\mathcal{C}_{ijkpqr} - \mathcal{C}_{jikqpr}) \quad . \tag{B.8}$$

Die 2D-Matrixdarstellung des antisymmetrischen Tensors (B.8) befindet sich in Anhang A. Es ist zu erkennen, dass die Materialparameter c_3 , c_5 , c_7 , c_8 und c_{10} entfallen. Des Weiteren können die Kombinationen der restlichen Materialparameter durch 2 Konstanten dargestellt werden. Es ergibt sich die im letzten Abschnitt gezeigte Matrixdarstellung des Materialtensors.

Die Anzahl unabhängiger Materialparameter reduziert sich somit deutlich. Es existieren 3 Parameter des Elastizitätstensors \mathcal{A} und im 2-dimensionalen Fall weitere 2 Parameter des antisymmetrischen Anteils von \mathcal{C} .

Im ebenen Fall verschwinden die äußeren Kräfte in z -Richtung sowie die Momente um die x - bzw. y -Achse. Es ist lediglich ein Drehfreiheitsgrad um die z -Achse vorhanden. Die Cosserat-Momentenspannung (*Couple-stress*) um die z -Achse M^c ist dann die Differenz zwischen den Komponenten M_{121} und M_{211} des Momentenspannungstensors (siehe hierzu MINDLIN [58]):

$$M^c = M_{121} - M_{211} \quad . \tag{B.9}$$

Die Berechnung weiterer Komponenten des Cosserat-Spannungstensors \mathbf{M}^c aus Komponenten des mikromorphen Momentenspannungstensors \mathbf{M} ist in (MINDLIN [58]) zu finden.

B.2 Eringens Herleitung

Impuls- und Drehimpulsbilanz wurden in Kapitel 3 in Analogie zu MINDLIN [58] aus einem Energieprinzip ermittelt. Es gibt jedoch weitere Möglichkeiten.

Beispielhaft erfolgt in diesem Abschnitt die Herleitung beider Bilanzgleichungen mit einem Verfahren von ERINGEN [24]. Grundlage ist die Annahme, dass für alle Mikrokontinua die aus der klassischen Theorie bekannten Bilanzgleichungen gelten:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}') + \mathbf{f}' - \rho' \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad . \tag{B.10}$$

$\boldsymbol{\Sigma}'$ ist der Spannungstensor des Mikrokontinuums, \mathbf{f}' und ρ' sind Volumenkraftvektor und Dichte des Mikrokontinuums. Mit \mathbf{z} wird ein Vektor vom Ursprung 0 zum Punkt \mathbf{x}'

$$\mathbf{z} := \mathbf{x} + \mathbf{x}' \tag{B.11}$$

mit den Zeitableitungen

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}' \quad (\text{B.12})$$

und

$$\ddot{\mathbf{z}} = \ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}}' \quad (\text{B.13})$$

definiert (siehe Abbildung 2.1). Aus der Drehimpulsbilanz des Mikrokontinuums folgt in Analogie zur klassischen Theorie die Symmetrie des Spannungstensors:

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{\Sigma}'^T \quad . \quad (\text{B.14})$$

Zur Herleitung der lokalen Impuls- und Drehimpulsbilanz des Makrokontinuums wird Gleichung (B.10) mit einer Funktion $\chi = \hat{\chi}(\mathbf{z})$ multipliziert und über den Raumbereich \mathcal{R}_t integriert:

$$\int_{\mathcal{R}_t} \left[\int_{\mathcal{M}_t} \chi \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}') dV' + \int_{\mathcal{M}_t} \chi (\mathbf{f}' - \rho' \ddot{\mathbf{z}}) dV' \right] = \mathbf{0} \quad . \quad (\text{B.15})$$

Ersetzt man (in Indexschreibweise) $\chi \boldsymbol{\Sigma}'_{kl,k}$ durch

$$\chi \boldsymbol{\Sigma}'_{kl,k} = (\chi \boldsymbol{\Sigma}'_{kl})_{,k} - \boldsymbol{\Sigma}'_{kl} \chi_{,k} \quad , \quad (\text{B.16})$$

kann man den ersten Term aus (B.15) unter Berücksichtigung des Gaußschen Integralsatzes in ein Volumen- und Flächenintegral aufteilen:

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \int_{\partial \mathcal{M}_t} \chi \boldsymbol{\Sigma}'_{kl} d(A')_k + \int_{\mathcal{R}_t} \int_{\mathcal{M}_t} [-\boldsymbol{\Sigma}'_{kl} \chi_{,k} + \chi (f'_l - \rho' \ddot{z}_l)] dV' = 0 \quad . \quad (\text{B.17})$$

Es werden zwei Ansätze für χ gewählt. Als erstes setzt man $\chi = 1$:

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \int_{\partial \mathcal{M}_t} \boldsymbol{\Sigma}'_{kl} d(A')_k + \int_{\mathcal{R}_t} \int_{\mathcal{M}_t} (f'_l - \rho' \ddot{z}_l) dV' = 0 \quad . \quad (\text{B.18})$$

Mit der Annahme, dass die Integration von Feldgrößen über den gesamten Körper des Mikrokontinuums infinitesimale Feldgrößen des Makrokontinuums liefert, werden folgende Definitionen gewählt:

$$\begin{aligned} T_{kl} dA_k &:= \int_{\partial \mathcal{M}_t} \boldsymbol{\Sigma}'_{kl} d(A')_k \quad , \\ f_l dV &:= \int_{\mathcal{M}_t} f'_l dV' \quad , \\ \rho \ddot{x} dV &:= \int_{\mathcal{M}_t} \rho' \ddot{z}_l dV' \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Hierbei sind \mathbf{T} der Spannungstensor und \mathbf{f} die Volumenkraft des Makrokontinuums. Folglich ist die Impulsbilanz identisch mit derjenigen der klassischen Theorie:

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} T_{kl} dA + \int_{\mathcal{R}_t} (f_l - \rho \ddot{x}_l) dV = 0 \quad . \quad (\text{B.20})$$

Gleichung (B.20) kann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in folgende Form überführt werden:

$$\int_{\mathcal{R}_t} (T_{kl,k} + f_l - \rho \ddot{x}_l) dV = 0 \quad . \quad (\text{B.21})$$

Die lokale Form erhält man nach Anwendung des Lokalisationssatzes [75]:

$$T_{kl,k} + f_l - \rho \ddot{x}_l = 0 \quad . \quad (\text{B.22})$$

Setzen wir jetzt $\chi = \mathbf{z}$. Für (B.17) folgt:

$$0 = \int_{\partial\mathcal{R}_t} \left[\int_{\partial\mathcal{M}_t} z_i \Sigma'_{kl} d(A')_k \right] + \int_{\mathcal{R}_t} \left[\int_{\mathcal{M}_t} -\Sigma'_{kl} z_{i,k} + z_l (f'_l - \rho' \ddot{z}_l) dV' \right] \quad . \quad (\text{B.23})$$

Wichtig ist in diesem Zusammenhang noch die Anmerkung, dass in den Bilanzgleichungen dieses Kapitels nach z differenziert wird:

$$z_{i,k} = \frac{\partial z_i}{\partial z_k} = \delta_{ik} \quad . \quad (\text{B.24})$$

Die Variable z_i wird im nächsten Schritt durch (B.11) ersetzt:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{R}_t} \left[\int_{\partial\mathcal{M}_t} (x_i + x'_i) \Sigma'_{kl} d(A')_k \right] + \\ & + \int_{\mathcal{R}_t} \left[\int_{\mathcal{M}_t} -\Sigma'_{kl} \delta_{ik} + (x_i + x'_i) (f'_l - \rho' \ddot{z}_l) dV' \right] = \\ & \int_{\partial\mathcal{R}_t} \left[\int_{\partial\mathcal{M}_t} x_i \Sigma'_{kl} + x'_i \Sigma'_{kl} d(A')_k \right] + \\ & \int_{\mathcal{R}_t} \left[\int_{\mathcal{M}_t} -\Sigma'_{il} + x_i f'_l + x'_i f'_l - x_i \rho' \ddot{z}_l - x'_i \rho' \ddot{z}_l dV' \right] = 0 \quad . \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt folgt die Einführung einiger charakteristischer Größen des Mikrokontinuums. Als erstes kann man einen Tensor zweiter Stufe Φ einführen:

$$\Phi_{li} dV := \int_{\mathcal{M}_t} f'_l z_i dV' \quad . \quad (\text{B.25})$$

ERINGEN [24] bezeichnet diesen Tensor als *first body moment*. Des Weiteren wird ein Momentenspannungstensor dritter Stufe \mathbf{M} definiert:

$$M_{kli} dA := \int_{\partial\mathcal{M}_t} x'_i \Sigma'_{kl} dA' \quad . \quad (\text{B.26})$$

Der erste Index gibt die Normale der Fläche an, bezüglich welcher die Komponenten von \mathbf{M} wirken. Die Bedeutung von Index zwei und drei ist identisch mit der Interpretation von Index eins und zwei des Tensors Φ nach MINDLIN [58].

Die Integration der Variablen $x'_i \ddot{z}_l$ über das Mikrovolumen wird als Zeitableitung des Dralltensors σ bezeichnet:

$$\rho \dot{\sigma}_{li} dV := \int_{\mathcal{M}_t} \rho' x'_i \ddot{z}_l dV' \quad . \quad (\text{B.27})$$

Zusätzlich zum klassischen Spannungstensor führt man einen vom Mikrokontinuum abhängigen symmetrischen Spannungstensor Σ ein. ERINGEN [24] bezeichnet diese Dyade als *micro-stress average*:

$$\Sigma_{li} = \Sigma_{il} := \int_{\mathcal{M}_t} \Sigma'_{li} dV' \quad . \quad (\text{B.28})$$

Nach dem Einsetzen aller Definitionen in die Bilanzgleichung erhält man folgende Form:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\partial\mathcal{R}_t} [x_i T_{kl} + M_{kli}] dA_k + \\ & + \int_{\mathcal{R}_t} [-\Sigma_{il} + f_l x_i + \Phi_{li} - \rho x_i \ddot{x}_l - \rho \dot{\sigma}_{li}] dV \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Das Oberflächenintegral aus (B.29) wird unter Berücksichtigung des Gaußschen Integralsatzes in ein Volumenintegral umgeformt:

$$\int_{\partial\mathcal{R}_t} [x_i T_{kl} + M_{kli}] da_k = \int_{\mathcal{R}_t} [x_{i,k} T_{kl} + x_i T_{kl,k} + M_{kli,k}] dV \quad . \quad (\text{B.30})$$

Aus (B.11) und (B.24) folgt für $x_{i,k}$:

$$x_{i,k} = \frac{\partial x_i}{\partial z_k} = \frac{\partial z_i - \partial x'_i}{\partial z_k} = \delta_{ik} \quad . \quad (\text{B.31})$$

Das Einsetzen von (B.30) und (B.31) in (B.29) liefert eine integrale Form der Drehimpulsbilanzgleichung

$$\int_{\mathcal{R}_t} \left[x_i \underbrace{(T_{kl,k} + f_l - \rho \ddot{x}_l)}_{=0} + T_{il} + M_{kli,k} - \Sigma_{il} + \Phi_{li} - \rho \dot{\sigma}_{li} \right] dV \quad , \quad (\text{B.32})$$

die nach Berücksichtigung der Impulsbilanz in eine lokale Form überführt wird:

$$T_{il} + M_{kli,k} - \Sigma_{il} + \Phi_{li} - \rho \dot{\sigma}_{li} = 0 \quad . \quad (\text{B.33})$$

Gleichung (B.33) liefert im Gegensatz zur klassischen Theorie keine Symmetriebedingung für den Spannungstensor \mathbf{T} und stellt eine Erweiterung des zu lösenden Gleichungssystems dar.

Die lokale Form der Drehimpulsbilanz kann in einen symmetrischen (B.34) und unsymmetrischen (B.35) Anteil additiv zerlegt werden

$$0 = T_{(il)} - \Sigma_{il} + M_{k(li),k} + \rho (\Phi_{(li)} - \dot{\sigma}_{(li)}) \quad , \quad (\text{B.34})$$

$$0 = T_{[il]} + M_{k[li],k} + \rho (\Phi_{[li]} - \dot{\sigma}_{[li]}) \quad . \quad (\text{B.35})$$

Runde Klammern kennzeichnen symmetrische, eckige Klammern kennzeichnen unsymmetrische Anteile der Bilanzgleichung.

Aus (B.35) kann die für mikropolare Medien charakteristische Drehimpulsbilanzgleichung hergeleitet werden. Dazu stellt man sämtliche unsymmetrischen Tensoren 2. Stufe durch axiale Vektoren dar. Eringens Drehimpulsbilanz ist folglich eine Verallgemeinerung der klassischen Gleichung.