



---

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
in der Helmholtz-Gemeinschaft

---

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 7372

# **Berechnung der Mischkonvektion im Moderatorsplatt eines Kernreaktors mit einem Ansatz für poröse Medien**

**C. Kunik, B. Vogt**

Institut für Kern- und Energietechnik

Dezember 2007



**Forschungszentrum Karlsruhe**

in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 7372

Berechnung der Mischkonvektion im Moderator-  
spalt eines Kernreaktors mit einem Ansatz  
für poröse Medien

C. Kunik\*, B. Vogt

Institut für Kern- und Energietechnik

\*Diplomarbeit an der Universität Karlsruhe  
im Studiengang Technomathematik

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

2007

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft  
Deutscher Forschungszentren (HGF)

ISSN 0947-8620

urn:nbn:de:0005-073723

# Kurzfassung

Berechnung der Mischkonvektion im Moderatorspalt eines Kernreaktors mit einem Ansatz für poröse Medien

Ziel dieser Arbeit ist die Vorhersage von Temperatur, Geschwindigkeit und möglicher Naturkonvektion des Moderatorwassers für einen fortschrittlichen Druckwasserreaktor, der mit überkritischem Wasser im Primärkreislauf betrieben wird. Die Simulation der Strömung des Wassers im Spalt zwischen den Brennelementen wird mit Hilfe eines Ansatzes für poröse Medien durchgeführt.

Der Untersuchung der Strömung und des Wärmeübergangs liegen üblicherweise die Navier-Stokes und die Energiegleichung zugrunde. Die geometrische Komplexität des Strömungsgebietes verhindert jedoch die detaillierte Lösung der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder. Somit müssen makroskopische Erhaltungsgleichungen mit Hilfe einer Volumenmittelung der mikroskopischen Erhaltungsgleichungen entwickelt werden. Diese Gleichungen sind abhängig von einigen spezifischen Parametern, wie z.B. der Porosität, Permeabilität etc. Die Permeabilität und eine geometrieabhängige Funktion müssen bestimmt werden. Dies wird sowohl mit Hilfe von Druckverlustkorrelationen als auch mit CFD-Analysen mit der Software Star-CD durchgeführt. Anschließend werden die Ergebnisse verglichen und in die makroskopischen Gleichungen eingesetzt. Diese Gleichungen werden schließlich in die Simulationssoftware Comsol (Femlab) implementiert.

Eine Parameterstudie mit verschiedenen Massenströmen des Moderatorwassers bei einer vorgegebenen Temperaturverteilung zeigt, dass ein minimaler Eintrittsmassenstrom benötigt wird, um das Eintreten von Naturkonvektion zu vermeiden und eine stabile Neutronenflussverteilung zu gewährleisten.

# Abstract

Determination of mixed convection in the moderator gaps of a nuclear reactor with the porous media approach

Aim of this study is to predict temperature, velocity and possibly natural convection of the moderator water for an advanced pressurized water reactor with supercritical water in the primary loop. The simulation of the gap water flow between fuel assemblies in a reactor core is done with aid of the porous media approach.

The analysis of flow and heat transfer is usually based on the Navier-Stokes and energy equation, but the geometric complexity of the flow region of the gap prevents general solutions of the detailed velocity and temperature fields. Instead, macroscopic conservation equations have to be employed by volume averaging of the microscopic conservation equations. The equations are derived in dependency of specific parameters like the porosity. Due to the volume averaging, an additional coefficient, called permeability, and a resistance function have to be determined. This determination has been done both with the aid of pressure loss correlations and with a CFD analysis using the software STAR-CD. The results have been compared and applied to the macroscopic conservation equations. Finally the parameters and equations are implemented in a simulation software called Comsol (Femlab).

A parametric study with different moderator mass flow rates at a given coolant temperature distribution showed that a minimum moderator mass flow rate will be required to avoid natural convection in the gap volume, and thus to ensure a stable neutron flux distribution in the core.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Konzept SDWR</b>	<b>3</b>
2.1	Einführung . . . . .	3
2.2	Analyse des Kerns . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Herleitung der allgemeinen Porositätsgleichung</b>	<b>7</b>
3.1	Einführung . . . . .	7
3.2	Makroskopische Porenstrukturparameter . . . . .	7
3.2.1	Die Porosität $\varphi$ . . . . .	8
3.2.2	Die Permeabilität $K$ . . . . .	8
3.3	Das Volumenmittelungsverfahren . . . . .	9
3.4	Die makroskopische Kontinuitätsgleichung . . . . .	10
3.5	Die makroskopische Impulsgleichung . . . . .	11
3.5.1	Darcy's Gesetz und dessen Erweiterungen . . . . .	11
3.5.2	Empirische Beziehungen . . . . .	13
3.5.3	Herleitung der makroskopischen Impulsgleichung . . . . .	13
3.6	Herleitung der makroskopischen Energiegleichung . . . . .	15
3.6.1	Schließungsmodell für den Schwankungsanteil der konvektiven Wärmeausbreitung [22] . . . . .	17
3.6.2	Wärmeausbreitung für große Reynoldszahlen ( $Re \gg 10$ ) [22] . . . . .	19
3.6.3	Effektiver Querströmungsanteil für molekularen und turbulenten Energietransport [41] . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Bestimmung der Modellkoeffizienten über Druckverlustkorrelationen</b>	<b>23</b>
4.1	Ansatz zur Bestimmung der Modellkoeffizienten $c_{1j}$ und $c_{2j}$ über Korrelationen	23
4.1.1	Druckverlust im querangeströmten Rohrbündel . . . . .	25
4.1.2	Druckverlust im Rohrbündel in Längsrichtung . . . . .	28
4.2	Berechnung der Koeffizienten . . . . .	29
4.2.1	Bestimmung des laminaren Koeffizienten in Querrichtung . . . . .	30
4.2.2	Bestimmung des turbulenten Koeffizienten in Querrichtung . . . . .	30
4.2.3	Bestimmung des laminaren Koeffizienten in Längsrichtung . . . . .	31
4.2.4	Bestimmung des turbulenten Koeffizienten in Längsrichtung . . . . .	32

<b>5</b>	<b>Bestimmung der Koeffizienten mittels CFD</b>	<b>33</b>
5.1	Numerische Grundlagen . . . . .	33
5.1.1	Grundgleichungen . . . . .	33
5.1.2	Turbulenzmodellierung . . . . .	34
5.1.3	Das Konzept der Wirbelviskosität . . . . .	35
5.1.4	k- $\epsilon$ -Modell und Logarithmisches Wandgesetz . . . . .	36
5.1.5	Netzgenerierung . . . . .	37
5.1.6	Randbedingungen . . . . .	38
5.1.7	Lösungsverfahren . . . . .	38
5.1.8	Courantbedingung für instationäre Rechnungen . . . . .	39
5.2	Berechnung der Modellkoeffizienten . . . . .	39
5.2.1	Geometrie . . . . .	40
5.2.2	Netzgenerierung . . . . .	40
5.2.3	Eigenschaften des Fluids . . . . .	42
5.2.4	Berechnung des turbulenten Koeffizienten in Querrichtung . . . . .	42
5.2.5	Vergleich Korrelation und Rechnung für den Modellkoeffizienten $c_{21}$ . . . . .	48
5.2.6	Bestimmung des Koeffizienten $c_{23}$ der turbulenten axialen Strömung . . . . .	48
5.2.7	Vergleich Korrelation und Rechnung für den Modellkoeffizienten $c_{23}$ . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Analyse der Spaltströmung</b>	<b>53</b>
6.1	Geometrie . . . . .	53
6.2	Netzgenerierung . . . . .	54
6.3	Gleichungssystem . . . . .	54
6.4	Stoffwerte für Wasser bei überkritischem Druck . . . . .	56
6.4.1	Gebrauchsformel für die Dichte . . . . .	56
6.4.2	Gebrauchsformel für die Viskosität . . . . .	57
6.4.3	Gebrauchsformel für die Wärmeleitfähigkeit . . . . .	57
6.4.4	Gebrauchsformel für die spezifische Wärmekapazität . . . . .	58
6.5	Bestimmung der Wärmezufuhr . . . . .	59
6.5.1	Wärmedurchgang durch eine ebene Wand . . . . .	59
6.5.2	Berechnung des Wärmestroms $\dot{Q}''' [W/m^3]$ . . . . .	59
6.6	Berechnung des turbulenten Quermassenstromanteils $W'$ . . . . .	62
6.7	Anfangs- und Randbedingungen . . . . .	63
6.8	Berechnung und Auswertung . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>71</b>
<b>8</b>	<b>Nomenklatur</b>	<b>73</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>76</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Mit der weltweit immer schneller wachsenden Bevölkerung geht ein immer größerer Energiebedarf einher. Das begrenzte Vorkommen an fossilen Energieträgern, wie Kohle, Erdöl und Erdgas macht es notwendig Lösungen zu finden, um diese nachhaltig zu schonen und sie durch saubere Energieträger zu ersetzen.

Ebenso bringt ein Festhalten an fossilen Energieträgern sowohl politische, als auch bei steigender Nachfrage preisliche Probleme mit sich, die enorme wirtschaftliche Konsequenzen hätten. Mit Hinblick auf die CO<sub>2</sub> Zertifizierung ist eine Verringerung der Emission unabdingbar. Auch aus umweltpolitischer Sicht wäre eine weltweite Abkehr vom bisherigen Kurs nötig, da viele Forscher die zu hohe Freisetzung von CO<sub>2</sub> als Ursache für die globale Erderwärmung mit zahlreichen Folgen, wie das Abschmelzen der polaren Eiskappen und der steigenden Anzahl von Naturkatastrophen, sehen.

Zur Lösung dieser Probleme werden alle zur Zeit bekannten Energieträger benötigt. Sowohl die Photovoltaik- als auch die Windenergie müssen weiter gefördert werden, können aber die konventionellen Energieträger nicht vollständig ersetzen, da sie zu geringe Wirkungsgrade erzielen und zu hohe Kosten verursachen. Auch neuere Technologien wie die Nutzung der Geothermie oder Biogas sind wirtschaftlich noch nicht vertretbar.

Die Kernenergie erfüllt hingegen diese Kriterien. Sie steht dabei für Wirtschaftlichkeit, Versorgungssicherheit, Umweltschutz und weitgehend CO<sub>2</sub>-neutrale Energieerzeugung. Kernkraftwerke sind dabei in hohem Maße verfügbar und der Einfluss der Urankosten auf die Stromerzeugungskosten ist nur sehr gering. Außerdem gibt es weitreichende Uranvorkommen weltweit. Geringerer Uranbedarf neuerer Reaktortypen, wie etwa dem EPR und fortschrittliche Konzepte bezüglich dem Brennstoffkreislauf, garantieren die Versorgung mit Kernenergie noch eine lange Zeit.

Um die zukünftigen Energieversorgungsprobleme auch langfristig lösen zu können, ist somit ein Ausstieg aus der Kernenergie aus wirtschaftlicher wie auch aus umweltpolitischer Sicht nicht empfehlenswert. Ein Energiemix aus fossiler Energie, Kernenergie und erneuerbaren Energien wäre eine Lösung aus der momentanen Krise.

Um die Kernenergie auch in Zukunft nachhaltig, wirtschaftlich, sicher und zuverlässig

nutzen zu können, haben insgesamt 10 Staaten inklusive der EU ein neues, weltweites Forschungs- und Entwicklungsprogramm unter dem Titel "Generation IV" vorgeschlagen. Um diese Ziele zu erreichen, wurden 6 Reaktortypen ausgewählt, die sich zum Teil bereits in der konkreten technischen Umsetzung befinden, zum Teil aber noch einen sehr großen Entwicklungsbedarf haben.

Einer dieser sechs potentiellen Reaktortypen, und Ausgangspunkt dieser Arbeit ist der Leichtwasserreaktor (LWR) mit überkritischen Dampfzuständen. Am Institut für Kern- und Energietechnik (IKET) im Forschungszentrum Karlsruhe werden hierfür zwei unterschiedliche Reaktorkonzepte entwickelt, zum einen ein Druckwasserreaktor der mit überkritischen Leichtwasser im Primärkreislauf betrieben wird (SDWR) [43] und zum anderen der HPLWR (High Performance Light Water Reactor) [38].

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit beinhaltet eine Analyse, die auf strömungsmechanischen Grundlagen, wie den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie [33], beruhen. Diese werden nicht explizit angegeben oder hergeleitet. Deswegen wird ein fundiertes strömungsmechanisches und mathematisches Verständnis vorausgesetzt, um die Arbeit verstehen zu können.

Zunächst wird in Kapitel 2 der den Berechnungen zugrundeliegende Reaktortyp vorgestellt und näher erläutert. Besonderes Augenmerk wird dabei auf das Verständnis der Strömungen und Mechanismen innerhalb des Reaktorkerns gelegt.

Die Grundgleichungen für poröse Medien werden in Kapitel 3 ausgehend von den Navier-Stokes Gleichungen mit Hilfe einer Volumenmittelung hergeleitet.

Kapitel 4 behandelt die Berechnung der geometrie- und geschwindigkeitsabhängigen Koeffizienten. Diese werden zum einen über Druckverlustkorrelationen, und im folgenden Kapitel über eine CFD-Simulation bestimmt und verglichen.

Die Ergebnisse der angestrebten Analyse der Spaltströmung sind in Kapitel 6 zu finden. Dabei wird diese mit Hilfe der Software Comsol simuliert und ausgewertet. Ebenso werden Aussagen über eintretende Naturkonvektion bei bestimmten Eintrittsgeschwindigkeiten getroffen.

Das abschließende Kapitel 7 gibt eine Zusammenfassung der durchgeführten Arbeiten, fasst die gewonnenen Erkenntnisse zusammen und zieht die daraus resultierende Konsequenzen für das Projekt. Des Weiteren wird ein Ausblick über die offen gebliebenen Fragestellungen gegeben.

# Kapitel 2

## Konzept SDWR

### 2.1 Einführung

Der SDWR ist ein Leichtwasserreaktor, der mit überkritischem Wasser im Primärkreislauf betrieben wird. Dieser kann evolutionär auf Leichtwasserreaktoren der 3. Generation entwickelt werden, was einen großen Vorteil im Gegensatz zu kompletten Neuentwicklungen bietet. Der Vorteil der Nutzung von überkritischem Wasser ist die Vermeidung einer Siedekrise und die Erhöhung der Enthalpie, wodurch eine höhere Leistung erreicht werden kann. Dabei sieht das von Vogt et al. [43] entwickelte Konzept einen Systemdruck von 25 MPa und eine Aufheizung des Wassers von 280°C am Eintritt auf 380°C am Austritt vor. Die Maximalwerte der spezifischen Wärmekapazität liegen kurz vor dem pseudo-kritischen Punkt, welcher bei einem Druck von 25 MPa bei einer Temperatur von 384°C zu finden ist. Dies hat den Vorteil, dass eine relativ große Veränderung der zugeführten Enthalpie sich nur in einer geringen Änderung der Austrittstemperatur niederschlägt.

### 2.2 Analyse des Kerns

Durch die hohe Aufheizung des Kühlmittels im Kern ändert sich die Dichte des Kühlwassers sehr stark. Deshalb benötigt der SDWR zusätzliche Moderatorkanäle, um die sich mit der Dichte veränderten Moderatoreigenschaften zu kompensieren. Das Ziel dabei ist ein möglichst einheitliches Leistungsprofil in axialer Richtung. Da sich das relativ kühle Moderatorwasser nicht mit dem heißen Dampf vermischen soll, wird der SDWR im Gegenstromprinzip betrieben. Dieses Konzept wird in Abbildung 2.1 verdeutlicht. Der Designentwurf des Reaktordruckbehälters (RDB) folgt dabei den Vorschlägen von Fischer et al. [16]. Nach Eintritt des Speisewassers unterteilt es sich in zwei Ströme. 75% werden durch einen Ringspalt als Kühlwasser nach unten in das untere Plenum geleitet, die anderen 25% fließen nach oben in das obere Plenum. Dort werden 8.33% des Moderatorwassers durch die Moderatorkästen der Brennelemente und 16.67% durch die Spalte zwischen den Brennelementen nach unten geleitet. Nachdem es das untere Plenum erreicht hat, vermischt sich das Moderatorwasser wieder mit dem Kühlwasser. Nach der Vermischung fließt es durch die Eintrittsöffnungen der Cluster und wird in die Kühlkanäle der Brennelemente geleitet.

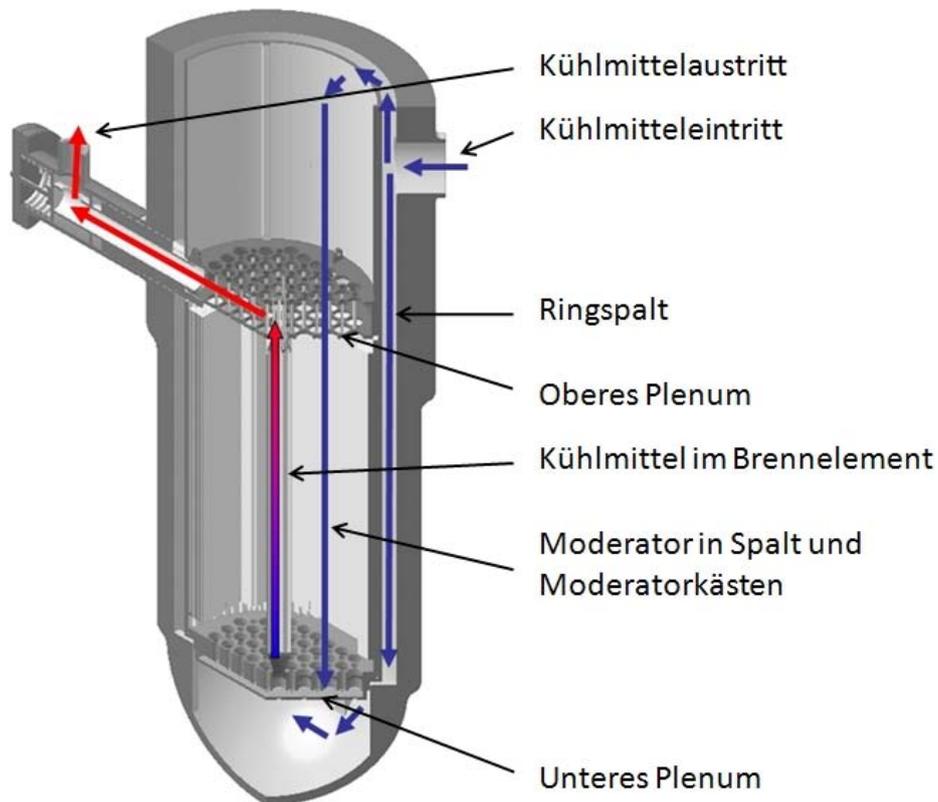


Abbildung 2.1: Strömungsverlauf im RDB [43]

In Abbildung 2.2 ist nochmals die Strömungsrichtung innerhalb und außerhalb der Brennelemente verdeutlicht. Dieses Design wurde von Hofmeister et al. [21] vorgeschlagen. Das zweireihige Brennelement besteht dabei aus 40 Stäben.

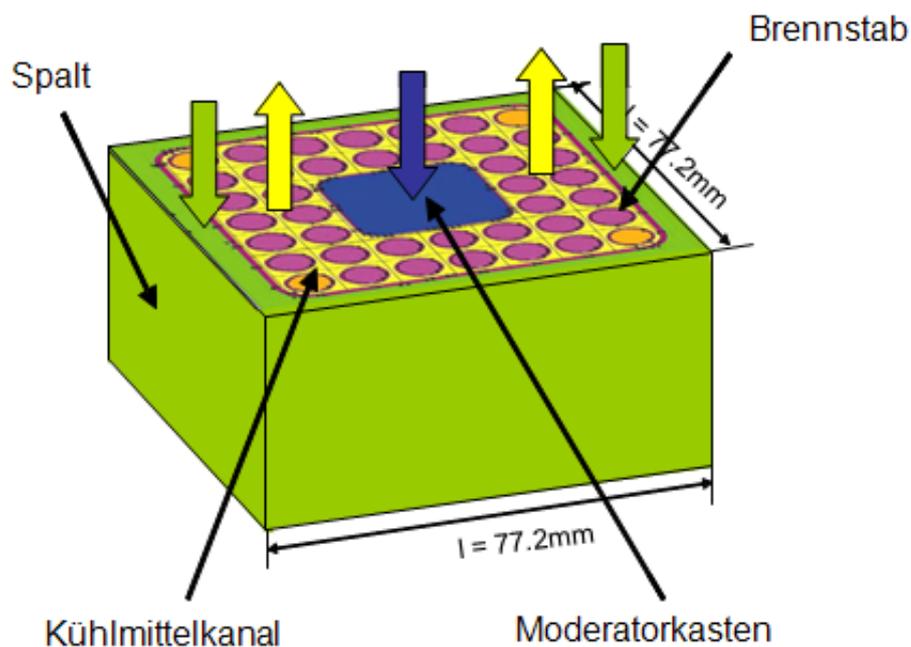


Abbildung 2.2: Ausschnitt eines Brennelements [43]

Um die Nutzung konventioneller Steuerstabantriebe zu gewährleisten, sind die Brennelemente in Cluster zusammengefasst, welche aus 3x3 Brennelementen bestehen, vgl. Abbildung 2.3.

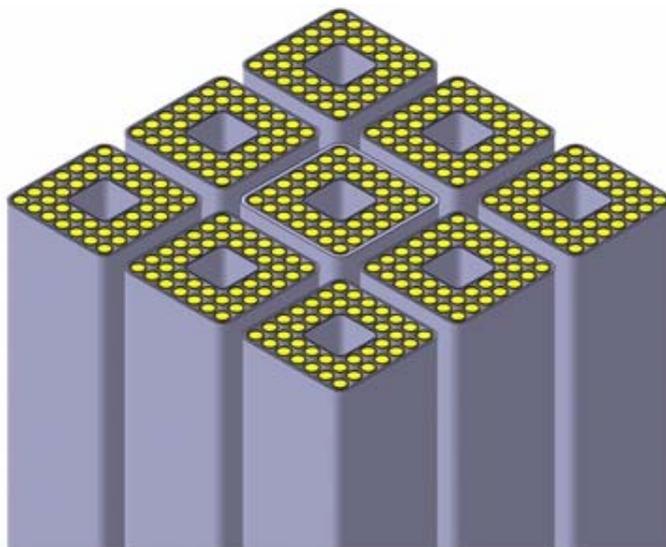


Abbildung 2.3: Brennelementcluster [21]

In Abbildung 2.4 ist die exakte Geometrie eines Brennelements vorgegeben. Es ist insgesamt 67.2 mm und der Wasserkasten 26 mm breit. Der Spalt zwischen den einzelnen Brennelementen hat eine Breite von 10 mm. Die Gesamtbreite des Kerns beträgt dabei 2.5 m mit einer aktiven Höhe von 4.2 m. Die restlichen Geometriedaten können Abbildung 2.4 entnommen werden.

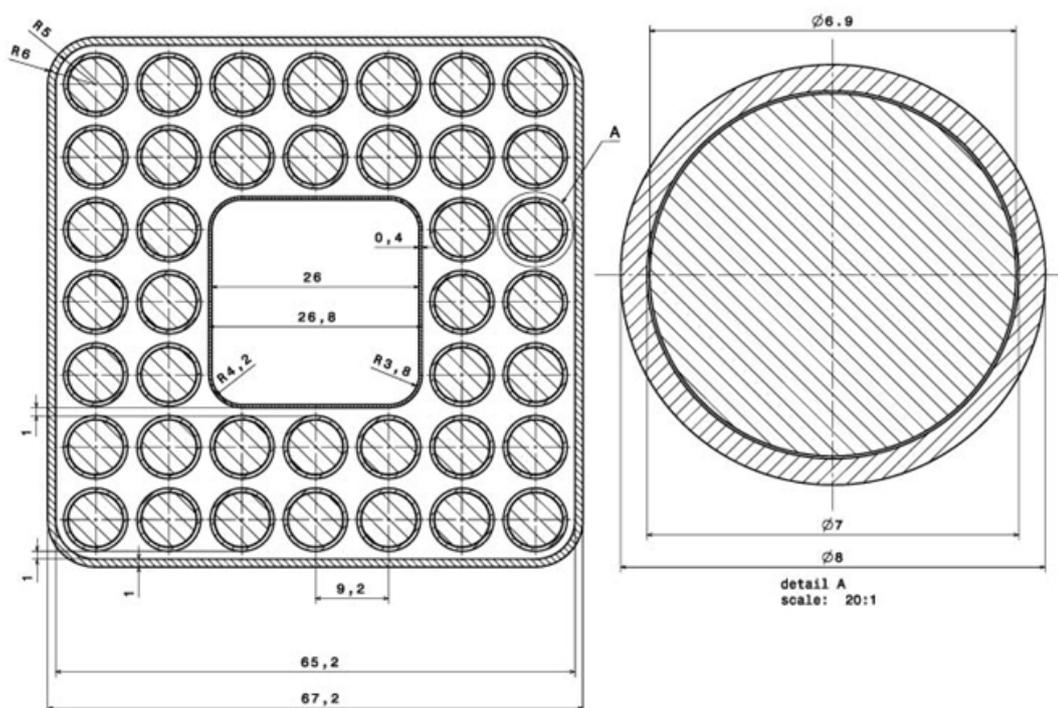


Abbildung 2.4: Brennelementparameter [21]

Der gesamte Reaktorkern besteht aus 88 Clustern und somit 792 Brennelementen. Abbildung 2.5 zeigt einen Querschnitt eines Achtel Kerns.

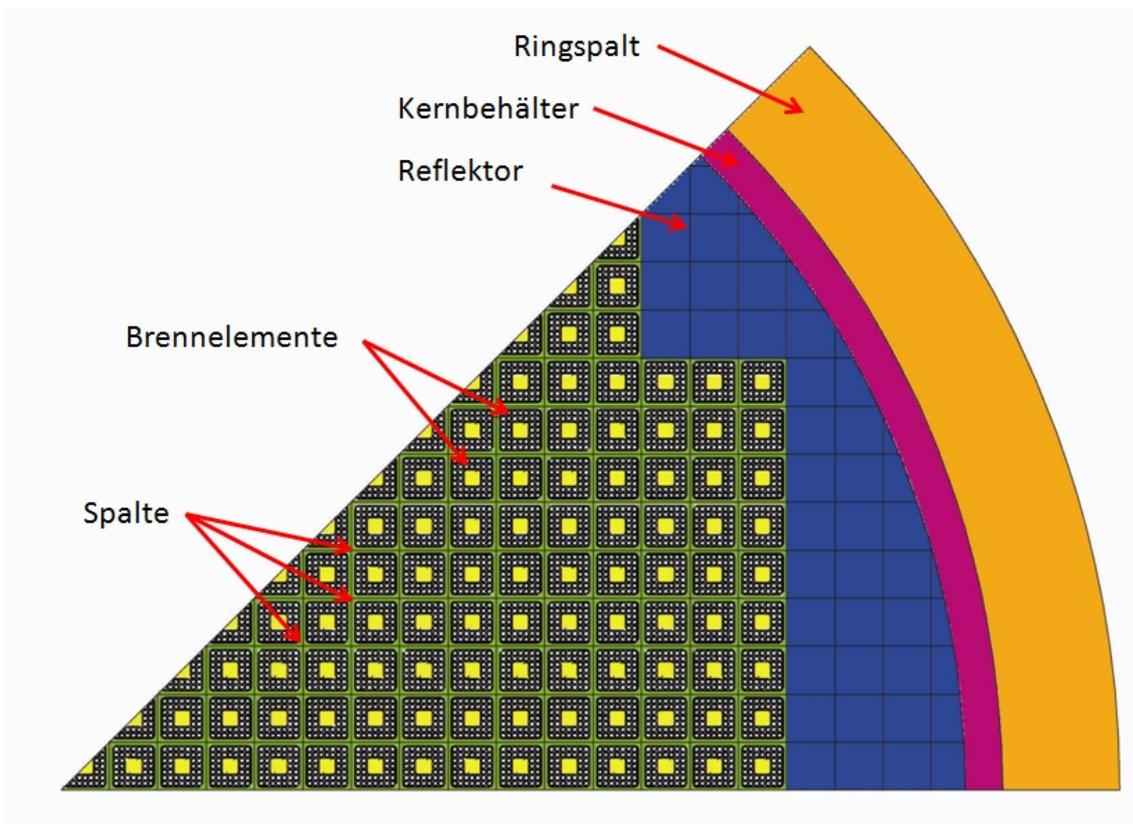


Abbildung 2.5: Querschnitt über 1/8 des Kerns [43]

Es ist deutlich die Komplexität der Geometrie des Kerns zu erkennen, was die Wahl eines Ansatzes für porösen Medien für die Analyse der Spaltströmung verdeutlicht, vgl. Kapitel 3.

Der Kern erreicht nach [43] eine spezifische Leistung von  $100 \text{ MW/m}^3$  und eine thermische Leistung von 2000 MW. Die elektrische Leistung beträgt 766 MW. Der Eintrittsmassenstrom des Moderatorwassers wird mit einem Wert von 2773 kg/s vorgegeben. Dies bedeutet einen Massenstrom des Moderatorwassers im Spalt von 0.5836 kg/s pro Volumenelement, das nach Abbildung 2.2 aus einem Brennelement und dem dazugehörigen halben Spalt, also 5 mm auf jeder Seite, besteht.

# Kapitel 3

## Herleitung der allgemeinen Porositätsgleichung

### 3.1 Einführung

Die Strömungs- und Wärmeübergangsanalyse basiert gewöhnlich auf Transportgleichungen, die aus gekoppelten Differentialgleichungen bestehen. Um Effekte wie Fließwiderstand oder Wärmefluß von einem gegebenen porösen Medium vorherzusagen, werden detaillierte Informationen der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in jeder Pore benötigt. Diese werden durch eine sehr feine Auflösung der Grenzschichten, bzw. der Scherschichten, gewonnen. Die geometrische Komplexität des Spaltraums, wie in Abbildung 2.5 gezeigt, verhindert allerdings die Lösung der detaillierten Geschwindigkeits- und Temperaturfelder im vorliegenden Modell. Die erforderliche Rechenzeit wäre bei einer CFD-Analyse viel zu hoch und wirtschaftlich nicht vertretbar. Deswegen müssen makroskopische, also über ein kleines Volumenelement gemittelt, Erhaltungsgleichungen mit Schließungstermen ausgearbeitet werden, die die verlorenen Informationen beinhalten. Die mikroskopischen Impuls- und Energiegleichungen werden durch die entsprechenden makroskopischen Gleichungen mit Hilfe einer bekannten empirischen Beziehung ersetzt. Die vorliegende Analyse wird unter der Annahme eines Mediums anisotroper Porosität behandelt. Diese ist jedoch konstant in radialer, als auch in axialer Richtung, worauf im folgenden Kapitel näher eingegangen wird. Die Herleitungen der Erhaltungsgleichungen für poröse Medien, die in dieser Arbeit ausgearbeitet wurden, orientieren sich zu großen Teilen an den Arbeiten von Hsu & Cheng [22] und Vafai & Tien [42].

### 3.2 Makroskopische Porenstrukturparameter

Praktisch alle makroskopischen Eigenschaften von porösen Medien werden mehr oder weniger von der Struktur der Poren beeinflusst. Makroskopische Porenstrukturparameter sind in den meisten Fällen vollständig von der Porenstruktur des Mediums abhängig und von keiner anderen Eigenschaft beeinflusst. Die wichtigsten Parameter sind u.a. die Porosität, und die Permeabilität.

### 3.2.1 Die Porosität $\varphi$

Die Porosität  $\varphi$  eines Mediums ist eine dimensionslose Größe, die als der Anteil des Gesamtvolumens des Mediums, der von dem Fluid eingenommen wird, definiert ist. Somit ist  $1 - \varphi$  der Anteil der vom Feststoff eingenommen wird. Für ein isotropes Medium gilt, dass  $\varphi$  durch die Flächenporosität ausgedrückt werden kann. In der vorliegenden Geometrie ist, wie bereits erwähnt, die Porosität anisotrop und in radialer und axialer Richtung konstant. Dies bedeutet, dass

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Sie ist dabei definiert als

$$\varphi_{1,3} = \frac{A_{f_{1,3}}}{A_{g_{1,3}}} \quad (3.2)$$

wobei  $A_{f_{1,3}}$  die Querschnittsfläche ist, die von dem Fluid in radialer beziehungsweise in axialer Richtung eingenommen wird.  $A_{g_{1,3}}$  ist die gesamte Fläche, die von Fluid und Feststoff in radialer oder axialer Richtung belegt wird.

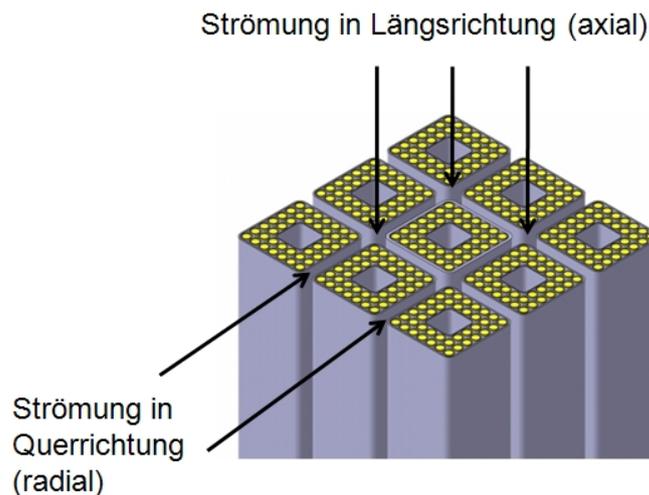


Abbildung 3.1: Durchströmen der Geometrie in Quer- und Längsrichtung

Bei dieser Definition von  $\varphi$  gilt die Annahme, dass alle Hohlräume miteinander verbunden sind. Falls bei einem Medium die Porenräume nicht alle miteinander verbunden sind, muss eine effektive Porosität eingeführt, definiert als Anteil verbundener Hohlräume zum gesamten Volumen. Natürliche Medien erreichen normalerweise kaum eine Porosität von 0.6. Für Schüttungen von Feststoffstrukturen gleichen Durchmessers kann  $\varphi$  zwischen 0.2545 und 0.4764 variieren. Ungleichheiten in der Korngröße führt zu kleineren Porositäten, da kleinere Körner Poren füllen, die von größeren geschaffen wurden. Metallische Schäume können Werte nahe 1 erreichen.

### 3.2.2 Die Permeabilität $K$

Die Permeabilität  $K$  ist unabhängig von Eigenschaften des Fluid und wird nur von der Geometrie des Mediums beeinflusst. Nach Vorstellung einer bekannten Methode zur Bestimmung dieses Koeffizienten  $K$  in Kapitel 3.5.1, werden in Kapitel 4 die in dieser Arbeit

verwendeten Ansätze vorgestellt. Dabei handelt es sich zum einen um eine Verwendung von Druckverlustkorrelationen und zum anderen um eine Analyse über eine CFD-Simulation mit Hilfe der Software Star-CD. Für die vorliegende Anwendung ist  $K$  anisotrop, aber konstant in radialer und axialer Richtung, was eine Aufteilung von  $K$  in eine Komponente in Querrichtung  $K_1$  und eine Komponente in Längsrichtung  $K_3$  zur Folge hat.

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Dies bringt somit auch eine getrennte Berechnung dieser Faktoren mit sich. Tabelle 3.1 zeigt eine Zusammenstellung von Porositäten und Permeabilitäten von porösen Medien.

Tabelle 3.1: Eigenschaften poröser Materialien (basierend auf Daten von Scheidegger [37] und Bejan und Lage [5]):

Material	Porosität $\varphi$	Permeabilität [ $cm^2$ ]	K	Oberfläche pro Volumeneinheit [ $cm^{-1}$ ]
Beton (gewöhnliche Mischung)	0,02 – 0,07			
Beton (pechhaltig)		$1 \cdot 10^{-9} - 42,3 \cdot 10^{-7}$		
Glasfaser	0,88 – 0,93			560 – 770
Haare (Säugetier)	0,95 – 0,99			
Leder	0,56 – 0,59	$9,5 \cdot 10^{-10} - 1,2 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^4 - 1,6 \cdot 10^4$	
Kalkstein	0,04 – 0,10	$2 \cdot 10^{-11} - 4,5 \cdot 10^{-10}$		
Katalysator (Fischer-Tropsch)	0,45			5,6 – $10^5$
Kohle	0,02 – 0,12			
Korkplatte		$2,4 \cdot 10^{-7} - 5,1 \cdot 10^{-7}$		
Körnig zerschlagener Fels	0,45			
Quarzkörner	0,65			
Quarzpulver	0,37 – 0,49	$1,3 \cdot 10^{-10} - 5,1 \cdot 10^{-10}$	$6,8 \cdot 10^3 - 8,9 \cdot 10^3$	
Sand	0,37 – 0,50	$2 \cdot 10^{-7} - 1,8 \cdot 10^{-6}$		150 – 220
Sandstein	0,08 – 0,38	$5 \cdot 10^{-12} - 3 \cdot 10^{-8}$		
Schieferpulver (schwarz)	0,57 – 0,66	$4,9 \cdot 10^{-10} - 4,4 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^3 - 8,9 \cdot 10^3$	
Ziegelstein	0,12 – 0,34	$4,8 \cdot 10^{-11} - 2,2 \cdot 10^{-9}$		
Zigaretten		$1,1 \cdot 10^{-5}$		
Zigarettenfilter	0,17 – 0,49			

### 3.3 Das Volumenmittelungsverfahren

In diesem Abschnitt wird der Volumenmittelungsprozess, der bei der Herleitung von Masse-, Impuls- und Energiegleichung Anwendung findet, vorgestellt. Es wird ein repräsentatives Volumen  $V$  in einem porösen Medium betrachtet, das aus einem Fluid und einer Feststoff

besteht. Wenn  $\Psi_f$  eine Größe ist, die mit dem Fluid in Verbindung steht, ist die spezifische Mittelung für  $\Psi_f$  definiert als [9, 40, 46]

$$\Psi_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \Psi_f dV \quad (3.4)$$

wobei die volumetrischen Integration über  $dV = dx'dy'dz'$  mit  $(x', y', z')$ , die die mikroskopischen Koordinaten kennzeichnen, erfolgt. In Gleichung 3.4 ist  $V_f$  das Volumen, das von dem Fluid belegt wird, und  $V_f + V_s = V$ , wobei  $V_s$  der Volumenanteil ist, der von dem Feststoff in  $V$  besetzt wird. Um die makroskopischen Gleichungen aus den mikroskopischen Gleichungen herzuleiten, werden die folgenden Mittelungstheoreme, ähnlich zu denen von Whitaker [46] und Slattery [40], benötigt

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla \Psi_f dV = \bar{\nabla} \left[ \frac{1}{V} \int_{V_f} \Psi_f dV \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \Psi_f dS \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla * \Psi_f dV = \bar{\nabla} * \left[ \frac{1}{V} \int_{V_f} \Psi_f dV \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \Psi_f * dS \quad (3.6)$$

wobei  $A_{fs}$  die Grenzfläche zwischen dem Fluid und dem Feststoff in  $V$  ist,  $dS$  der Oberflächenvektor und  $\Psi_f$  und  $\Psi_s$  ein Skalar bzw. ein Vektor sind. In den Gleichungen 3.5, 3.6 wird, wie bei den oben erwähnten Arbeiten, der Gradientenoperator in mikroskopischen Koordinaten  $(x', y', z')$ , ausgedrückt durch  $\nabla$  und der Gradientenoperator in makroskopischen Koordinaten  $(x, y, z)$ , ausgedrückt durch  $\bar{\nabla}$ , unterschieden. Diese sind wie folgt definiert:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x'} + j \frac{\partial}{\partial y'} + k \frac{\partial}{\partial z'} \quad (3.7)$$

$$\bar{\nabla} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.8)$$

### 3.4 Die makroskopische Kontinuitätsgleichung

Die mikroskopische Kontinuitätsgleichung für eine inkompressible Strömung ist gegeben durch

$$\nabla * v_f = 0 \quad (3.9)$$

wobei  $v_f$  den mikroskopische Geschwindigkeitsvektor bezeichnet. Wird Gleichung 3.9 in Bezug auf ein repräsentatives Volumen in einem porösen Medium integriert und der entstehende Ausdruck durch  $V$  geteilt. Dies führt mit Hilfe der Gleichungen 3.5, 3.6 und unter Berücksichtigung der Haftbedingung, zu

$$\bar{\nabla} * (\varphi \bar{v}_f) = 0 \quad (3.10)$$

wobei  $\bar{v}_f$  der im Fluidraum volumetrisch gemittelte Geschwindigkeitsvektor ist. Gleichung 3.10 kann somit zu

$$\bar{\nabla} * (\bar{v}) = 0 \quad (3.11)$$

umgeschrieben werden, wobei  $\bar{v} = \varphi \bar{v}_f$  den Darcy Geschwindigkeitsvektor mit  $\bar{v} = (u, v, w)^T$  beschreibt. Dieses Verhältnis wird in der Literatur häufig als Dupuit-Fochheimer Beziehung bezeichnet.

## 3.5 Die makroskopische Impulsgleichung

Im folgenden werden unterschiedliche Definitionen der Impulsgleichung für poröse Medien aufgezeigt und anschließend die allgemeine makroskopische Impulsgleichung theoretisch hergeleitet [23, 30].

### 3.5.1 Darcy's Gesetz und dessen Erweiterungen

Die Anfänge der Entwicklung von Differentialgleichungen zur Beschreibung eines Flusses durch ein poröses Medium liegen im 19. Jahrhundert. Henry Darcy's Nachforschungen [12] in der Hydrologie bei der Wasserversorgung von Dijon und seine Experimente zu stetigen, einseitig gerichteten Strömung in einem gleichförmigen Medium ergaben eine Proportionalität zwischen Flußmenge und angelegter Druckverlustrdifferenz. In der heutigen Schreibweise wird diese durch

$$u_f = -\frac{K}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.12)$$

ausgedrückt. Hierbei bezeichnet  $\frac{\partial p}{\partial x}$  den Druckgradienten in Fließrichtung und  $\mu_f$  die dynamische Viskosität des Fluids. Der Koeffizient  $K$  ist unabhängig von der Art des Fluids, hängt aber von der Geometrie des Mediums ab. Er hat die Einheit (Länge)<sup>2</sup> und wird als spezifische Permeabilität des Mediums bezeichnet. Im Fall der Einphasenströmung wird sie abgekürzt als Permeabilität bezeichnet. Die Permeabilitäten einiger porösen Medien finden sich in Tabelle 3.1 wieder.  $p$  beschreibt in Gleichung 3.12 einen spezifischen Druck. Wichtig bei dieser Beschreibung der Strömung ist, dass die Geschwindigkeit  $u_f$  nicht über ein Volumen gemittelt wurde. Bei hinzugefügten Termen, wie zum Beispiel der Corioliskraft, ist bei dieser Darstellung Vorsicht geboten, da zunächst über die Fluidphase gemittelt werden muss, bevor ein Widerstandsterm eingeführt werden darf.

Die verallgemeinerte, durch die volumengemittelte Geschwindigkeit ausgedrückte, Gleichung 3.12 lautet im dreidimensionalen Raum:

$$\bar{v} = -\mu_f^{-1} K * \nabla \bar{p} \quad (3.13)$$

wobei  $\bar{p}$  den volumengemittelten Druck  $\bar{p} = \varphi \bar{p}_f$  beschreibt.  $K$  ist im Allgemeinen ein Tensor zweiter Ordnung, siehe Kapitel 4. Im Falle eines isotropen Medium ist die Permeabilität ein Skalar und Gleichung 3.13 vereinfacht sich zu

$$\nabla \bar{p} = -\frac{\mu_f}{K} \bar{v}. \quad (3.14)$$

Darcy's Gesetz wurde in vielen Experimenten verifiziert.  $K$  ist ausschließlich von der Geometrie des Mediums abhängig. Es ist möglich  $K$  mit geometrischen Parametern zu bestimmen, vor allem bei einfachen Geometrien, wie etwa regelmäßige Kugelschüttungen [13]. Als Beispiel sei eine der bekanntesten Theorien von Carman-Kozeny erwähnt, die im Falle eines Bettes aus Partikeln oder Fasern mit dem mittleren Partikel- oder Faserdurchmessers  $d_p$  folgende Beziehung erlaubt:

$$K = \frac{d_p^2 \varphi^3}{180(1 - \varphi)^2} \quad (3.15)$$

Darcy's Gesetz unterliegt in vielen Bereichen mehreren Beschränkungen. Es ist im wesentlichen für inkompressible und isotherme schleichende Flüsse Newton'scher Fluide, durch

eine relativ langes, gleichartiges und isotropes poröses Medium mit niedrigem Durchlässigkeitsbeiwert  $k_d = K/\mu_f$ , gültig.

Bei höheren Geschwindigkeiten weicht diese Beziehung vom linearen Verhalten ab. Forchheimer [17] schlug eine zusätzliche quadratische Abhängigkeit zwischen Druckgradienten und Darcy-Geschwindigkeit vor

$$-\nabla\bar{p} = a'\bar{v} + b'\bar{v}^2 \quad (3.16)$$

$a'$  und  $b'$  sind dabei empirische Konstanten. Diese werden für jede Kombination von porösen Medium und Fluid neu bestimmt.

Die Abhängigkeit der Darcy-Geschwindigkeit von der Eigenschaft der Flüssigkeit und Größe und Form des porösen Mediums wurde von Ergun [15] genauer untersucht. Er modifizierte Gleichung 3.16 wie folgt:

$$-\nabla P = A\alpha\frac{\mu_f\bar{v}}{d_p^2} + B\beta\frac{\rho_f\bar{v}^2}{d_p} \quad (3.17)$$

mit

$$\alpha = \frac{(1-\varphi)^2}{\varphi^3} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1-\varphi}{\varphi^3} \quad (3.18)$$

Hierbei bezeichnen  $A$  und  $B$  Formfaktoren, welche dimensionslos sind und für jede Analyse experimentell ermittelt werden müssen. Ergun schlug für die Konstanten folgende Werte vor:

$$A = 150 \quad (3.19)$$

$$B = 1.75 \quad (3.20)$$

Diese sind nach Ergun auf alle Arten von Strömungen durch ein poröses Medium anwendbar, unabhängig von Fließgeschwindigkeit, Eigenschaften des Fluids oder Beschaffenheit des Feststoffs. Für die Definition der Permeabilität folgt somit:

$$K = \frac{d_p^2\varphi^3}{A(1-\varphi)^2} = \frac{d_p^2\varphi^3}{150(1-\varphi)^2} \quad (3.21)$$

Nach Erlangung zahlreicher experimenteller Daten schlug Macdonald et al. [28] allerdings folgende Werte vor:

$$A = 1.8 \quad (3.22)$$

$$B = 180 \quad (3.23)$$

Die Berechnung der Permeabilität  $K$  erfolgt in der Gegenwart separat für jedes Experiment. Vermeintlich allgemeingültige Gleichungen, wie die Vorschläge von Ergun und MacDonal, werden nicht mehr angewendet, da sie sich bei Vergleichen mit vielen Experimenten als zu ungenau erwiesen haben. Eine weitere Erweiterung der Darcy Gleichung ist die Brinkman Gleichung, der ein weiterer Trägheitsterm hinzugefügt wurde:

$$\nabla\bar{p} = -\frac{\mu_f}{K}\bar{v} + \mu_f\nabla^2\bar{v} \quad (3.24)$$

Der Erste Teil auf der rechten Seite der Gleichung 3.24 beschreibt den bereits erwähnten Darcy Term, der Andere den Reibungsterm, analog zur Navier-Stokes Gleichung. Dies ist

maßgeblich, da es für die Lösung der Strömung um ein Partikel eine schubspannungsfreie Randbedingung auf der Oberfläche erlaubt. Weitere Eigenschaften der Brinkman Gleichungen sind in Durlofsky et al. [14] erwähnt. Der Reibungsterm gewinnt dabei an Einfluss, wenn Wirbel entstehen oder eine Umkehr der Strömung eintritt, wie es im bearbeiteten Modell der Fall sein kann.

Brinkman [7] [8] erhielt eine Beziehung zwischen der Permeabilität  $K$  und der Porosität  $\varphi$ , welche nur gültig ist, wenn die Porosität groß genug und, bezogen auf Lundgren [27], größer als 0.6 ist. Dies ist aber höchst einschränkend, da die meisten natürlich auftretenden porösen Medien eine Porosität von  $\varphi < 0.6$  haben.

Es ist möglich eine kombinierte Brinkman-Forchheimer Gleichung durch Volumenmitteilung herzuleiten. Diese Herleitung wird in den nächsten beiden Kapiteln näher erläutert, wobei mit den bereits erwähnten empirischen Beziehungen des Druckverlustes begonnen wird.

### 3.5.2 Empirische Beziehungen

Der Reibungswiderstand verursacht in der Strömung durch ein poröses Medium einen Druckverlust, welcher proportional zu der Geschwindigkeit für niedrige Fließgeschwindigkeiten ist. Dies ist Grundlage des Darcy'schen Gesetzes, das den Druckverlust und die Geschwindigkeit in einem unbegrenztem porösen Medium in eine lineare Beziehung setzt. Es beschreibt also den laminaren Anteil des Druckverlustes bei niedrigen Geschwindigkeiten. Bei höheren Geschwindigkeiten werden Trägheitseffekte bedeutsamer, die ein Ansteigen des Strömungswiderstandes verursachen. Experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, dass der Druckverlust im Fluidraum des porösen Mediums proportional zu einer Kombination linearer und quadratischer Strömungsgeschwindigkeiten ist. Der quadratische Term beschreibt den erwähnten turbulenten Anteil des Gesamtdruckverlustes. Die Gleichung für inkompressible Strömungen lautet nach Vafai & Tien [42] und Hsu und Cheng [22]

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{\mu_f \varphi_1}{K} u - \frac{F \rho_f \varphi_1}{\sqrt{K}} u^2 \quad (3.25)$$

wobei  $\bar{p}$  den volumetrischen Druck (vgl. Kapitel 3.5.3),  $\mu_f$  die Fluidviskosität,  $K$  die Permeabilität,  $u$  die volumetrische Geschwindigkeit in Fließrichtung  $x$  und  $\rho_f$  die Fluidichte kennzeichnet.

$F$  ist eine von der Geometrie und der Geschwindigkeit abhängige Funktion und in der Regel nicht konstant. Die funktionale Abhängigkeit von  $F$  kann für bestimmte Geometrien und Strömungszustände anhand einiger empirischer Resultate hergeleitet werden [3, 24, 29], muss allerdings im vorliegenden Fall separat bestimmt werden.

### 3.5.3 Herleitung der makroskopischen Impulsgleichung

Die mikroskopische Impulsgleichung für eine inkompressible Strömung in einem porösen Medium wird durch die Navier-Stokes Gleichung, vgl. [32, 33], veranschaulicht

$$\rho_f \left[ \frac{\partial v_f}{\partial t} + \nabla * (v_f v_f) \right] = -\nabla p_f + \mu_f \nabla^2 v_f + \rho_f g \quad (3.26)$$

wobei  $\rho_f$  und  $\mu_f$  die Dichte und dynamische Viskosität des Fluids bezeichnen. Der Erste Term auf der linken Seite beschreibt dabei die Änderungen des Impulses in der Zeit, der

Zweite beschreibt den Impulstransport des Fluids und wird als konvektiver Term bezeichnet. Die Terme der rechten Seite berücksichtigen den Druck, den Einfluss der Reibung durch die Änderungen der Schubspannungen, und den Auftrieb, der auf das Fluid wirkt. Wird die obige Gleichung in Bezug auf ein repräsentatives Volumen integriert, erhält man mit Hilfe der Gleichungen 3.5, 3.6 und der Beziehung  $\bar{v} = \varphi \bar{v}_f$

$$\rho_f \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \bar{v}_f) + \bar{\nabla} * (\varphi \bar{v}_f \bar{v}_f) \right] = -\bar{\nabla} (\varphi \bar{p}_f) + \mu_f \bar{\nabla}^2 (\varphi \bar{v}_f) + \rho_f \varphi g + B \quad (3.27)$$

mit

$$B = -\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} p_f dS + \frac{\mu_f}{V} \int_{A_{fs}} (\nabla v_f) * dS \quad (3.28)$$

was der gesamten Widerstandskraft durch Effekte innerhalb des Volumens  $V$  entspricht. Dabei handelt es sich um Druck- und Reibungswiderstände.  $A_{fs}$  beschreibt in Gleichung 3.28 die Kontaktfläche von Fluid zu Feststoff.

Der mikroskopischen Geschwindigkeitsvektor wird in die Summe des volumetrisch gemittelten Geschwindigkeitsvektors  $\bar{v}_f$  und einen Schwankungsterm des Geschwindigkeitsvektors  $v'_f$  [20] wie folgt aufgespalten:

$$v_f = \bar{v}_f + v'_f \quad (3.29)$$

Es kann außerdem gezeigt werden [22], dass gilt:

$$\overline{v_f v_f} = \bar{v}_f \bar{v}_f + \overline{v'_f v'_f} \quad (3.30)$$

Einsetzen der Gleichung 3.30 in Gleichung 3.27 und Implementierung des Auftriebsterms führt zu

$$\rho_f \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \bar{v}_f) + \bar{\nabla} * (\varphi \bar{v}_f \bar{v}_f) + \bar{\nabla} * (\varphi \overline{v'_f v'_f}) \right] = -\bar{\nabla} (\varphi \bar{p}_f) + \mu_f \bar{\nabla}^2 (\varphi \bar{v}_f) + \varphi \rho_f g + B \quad (3.31)$$

Da die Mittelung über diese Schwankungsgröße vernachlässigt werden kann, reduziert sich die Gleichung 3.31 mit Implementierung der volumetrischen Geschwindigkeit  $\bar{v}$  zu

$$\rho_f \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\nabla} * (\varphi^{-1} \bar{v} * \bar{v}) \right] = -\bar{\nabla} \bar{p} + \mu_f \bar{\nabla}^2 \bar{v} + \varphi \rho_f g + B \quad (3.32)$$

wobei  $\bar{p} = \varphi \bar{p}_f$ . Der Term  $B$  ist, wie bereits erwähnt, ein Maß für den Fließwiderstand durch die feste Grundsubstanz. Er ist bestimmt durch die entwickelten empirischen Beziehungen nach Gleichung 3.25 im dreidimensionalen Fall

$$B = -\mu_f \varphi \bar{v} K^{-1} - \rho_f F |\bar{v}| \bar{v} \varphi K^{-0.5} \quad (3.33)$$

mit

$$K^{-0.5} = \begin{pmatrix} K_1^{-0.5} & 0 & 0 \\ 0 & K_1^{-0.5} & 0 \\ 0 & 0 & K_3^{-0.5} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Die Permeabilität wird dabei, wie bereits erläutert, als anisotrop aber konstant in radialer und axialer Richtung angenommen. Die makroskopische Impulsgleichung für eine inkompressible Strömung in porösen Medien lautet somit:

$$\rho_f \left[ \varphi^{-1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \varphi^{-1} \bar{\nabla} * (\varphi^{-1} \bar{v} * \bar{v}) \right] = - \varphi^{-1} \bar{\nabla} \bar{p} + \varphi^{-1} \mu_f \bar{\nabla}^2 \bar{v} - K^{-1} \mu_f \bar{v} - \rho_f K^{-0.5} F |\bar{v}| \bar{v} + \rho_f g \quad (3.35)$$

Dabei gibt die linke Seite wiederum die zeitliche Änderung des Impulses wieder und beinhaltet zusätzlich den konvektiven Term, der die ein- und austretenden Impulsströme beschreibt. Die rechte Seite beinhaltet die bereits vorgestellten Terme, wie Druck, Reibung und Auftrieb. Zusätzlich dazu beinhaltet sie die durch die Volumenmittelung verlorengangenen Informationen, wie Druck und Reibungswiderstände. Im folgenden werden Modellkoeffizienten  $c_{1j}$  und  $c_{2j}$  mit  $j = 1, 3$ , das die Wirkungsrichtung des Koeffizienten beschreibt, eingeführt. Diese dienen der Vereinfachung für die nachfolgenden Berechnungen in Kapitel 4. Aus Gleichung 3.35 folgt somit

$$\rho_f \left[ \varphi^{-1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \varphi^{-1} \bar{\nabla} * (\varphi^{-1} \bar{v} * \bar{v}) \right] = - \varphi^{-1} \bar{\nabla} \bar{p} + \varphi^{-1} \mu_f \bar{\nabla}^2 \bar{v} - c_{1j}^{-1} \mu_f \bar{v} - \rho_f c_{2j} |\bar{v}| \bar{v} + \rho_f g \quad (3.36)$$

mit  $c_{1j} = K_j$  im laminaren Teil und  $c_{2j} = F * K_j^{-0.5}$  im turbulenten Teil des zusätzlichen Druckverlustes.

## 3.6 Herleitung der makroskopischen Energiegleichung

Die mikroskopischen Energiegleichungen für die flüssige und feste Phase sind

$$(\rho C_p)_f \left[ \frac{\partial T_f}{\partial t} + \nabla * (v_f T_f) \right] = \nabla * (\lambda_f \nabla T_f) \quad (3.37)$$

und

$$(\rho C_p)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla * (\lambda_s \nabla T_s) \quad (3.38)$$

wobei  $T_f$  und  $T_s$  die Temperaturen des Fluids und des Festkörpers beschreiben, die Koeffizienten  $(\rho C_p)_f$  und  $(\rho C_p)_s$  die Wärmekapazitäten des Fluids und der festen Phase und  $\lambda_f$  beziehungsweise  $\lambda_s$  die Wärmeleitung des Fluids und des Feststoffs. Mit Hilfe der Übergangsbedingungen [22] auf der Fluid-Solid-Grenzfläche  $A_{fs}$

$$\begin{aligned} T_f &= T_s \\ n_{fs} * \lambda_f \nabla T_f &= n_{fs} * \lambda_s \nabla T_s \end{aligned}$$

wobei  $n_{fs}$  den nach außen gerichteten Normalenvektor beschreibt, und anschließender Volumenmittelung der Gleichungen 3.37 und 3.38 folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varphi (\rho C_p)_f \bar{T}_f \right] + (\rho C_p)_f \bar{\nabla} * \left[ \varphi \overline{v_f T_f} \right] &= \bar{\nabla} * \left[ \lambda_f \bar{\nabla} (\varphi \bar{T}_f) \right] \\ + \bar{\nabla} * \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \lambda_f T_f dS \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \lambda_f \nabla T_f dS & \quad (3.39) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varphi) (\rho C_p)_s \bar{T}_s] &= \bar{\nabla} * [\lambda_s \bar{\nabla} (1 - \varphi) \bar{T}_s] - \bar{\nabla} * \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \lambda_s T_s dS \right] \\ &- \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \lambda_s \nabla T_s dS \end{aligned} \quad (3.40)$$

wobei die linke Seite der Gleichung 3.39 die zeitliche Änderung der inneren und kinetischen Energie, und die durch die Strömung ein- und ausfließende Energieströme beschreibt. Die rechte Seite beschreibt die durch Wärmeleitung ein- und ausfließende Energieströme und beinhaltet die durch die Volumenmittelung verlorengegangenen Informationen auf der Grenzschicht zwischen Fluid und Feststoff. Dabei sind die volumetrisch gemittelten Temperaturen  $\bar{T}_f$  und  $\bar{T}_s$  durch

$$\begin{aligned} \bar{T}_f &= \frac{1}{V_f} \int_{V_f} T_f dV \\ \bar{T}_s &= \frac{1}{V_s} \int_{V_s} T_s dV \end{aligned} \quad (3.41)$$

definiert und  $dS$  ist der Oberflächenvektor vom Fluid in den Festkörper. Der Term  $\overline{v_f T_f}$  in Gleichung 3.39 ist definiert durch

$$\overline{v_f T_f} = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} v_f T_f dV \quad (3.42)$$

Werden die Gleichungen 3.39 und 3.40 addiert, führt dies mit Hilfe der Randbedingung zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi (\rho C_p)_f \bar{T}_f + (1 - \varphi) (\rho C_p)_s \bar{T}_s] + (\rho C_p)_f \bar{\nabla} * [\overline{\varphi v_f T_f}] = \\ \bar{\nabla} * \{ \lambda_f \bar{\nabla} (\varphi \bar{T}_f) + \lambda_s \bar{\nabla} [(1 - \varphi) \bar{T}_s] \} + \bar{\nabla} * \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} (\lambda_f T_f - \lambda_s T_s) dS \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nun folgt eine Aufspaltung von  $T_f$  und  $T_s$  in einen volumetrisch gemittelten Anteil und einen Anteil, der Schwankungen berücksichtigt

$$\begin{aligned} T_f &= \bar{T}_f + T'_f \\ T_s &= \bar{T}_s + T'_s \end{aligned} \quad (3.44)$$

Unter der Einbindung des lokalen thermischen Gleichgewichts

$$\bar{T}_f = \bar{T}_s = \bar{T} \quad (3.45)$$

führt dies unter Verwendung von Gleichung 3.30 und 3.44, eingebunden in Gleichung 3.43, und mit Hilfe von 3.45 zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi (\rho C_p)_f + (1 - \varphi) (\rho C_p)_s] \bar{T} + (\rho C_p)_f \bar{\nabla} * [\varphi (\bar{v}_f \bar{T} + \overline{v'_f T'_f})] = \\ \bar{\nabla}^2 [\varphi \lambda_f + (1 - \varphi) \lambda_s] \bar{T} + \bar{\nabla} * \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} (\lambda_f T'_f - \lambda_s T'_s) dS \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

wobei

$$\overline{v'_f T'_f} = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} v'_f T'_f dV \quad (3.47)$$

den Schwankungsanteil der konvektiven Wärmeausbreitung verkörpert, welcher zusätzlich, wie im folgenden Kapitel gezeigt, modelliert werden muss. Nozad et al. [31] zeigte, dass die Terme der rechten Seite durch

$$\overline{\nabla^2} [\varphi \lambda_f + (1 - \varphi) \lambda_s] \overline{T} + \overline{\nabla} * \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} (\lambda_f T'_f - \lambda_s T'_s) dS \right] = \overline{\nabla} * (\lambda_d \overline{\nabla T}) \quad (3.48)$$

abgeschätzt werden können, wobei  $\lambda_d$  die stagnierende Wärmeleitung des gesättigten porösen Mediums ist. Mit Gleichung 3.48 folgt nun die makroskopische Energiegleichung für Wärmeleitung in einem porösen Medium

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \varphi (\rho C_p)_f + (1 - \varphi) (\rho C_p)_s \right] \overline{T} + (\rho C_p)_f \overline{\nabla} * [\varphi (\overline{v}_f \overline{T} + \overline{v'_f T'_f})] = \overline{\nabla} * (\lambda_d \overline{\nabla T}) \quad (3.49)$$

Die linke Seite beschreibt wiederum die zeitliche Änderung der Energie und die Wärmeausbreitung durch Konvektion. Diese wurde unterteilt in eine volumetrisch gemittelte Ausbreitung und einen zugehörigen Schwankungsanteil. Die rechte Seite hingegen beschreibt die molekulare Wärmeausbreitung. Im vorliegenden Fall wird lediglich die Wärmeleitung vom heißen Kühlmittel innerhalb der Brennelementkästen an die Moderatorströmung im Spalt berücksichtigt. Die Wärmeleitung, die durch die Brennelemente auftreten kann, wird vernachlässigt, so dass in diesem Fall  $\lambda_s = 0$  gesetzt wird. Die Wärmeleitfähigkeit der Kästen findet sich dann lediglich in Kapitel 6.5.2 als zusätzlicher Wärmewiderstand wieder. Durch die Homogenisierung gibt es außerdem keine Schwankungen der Fluidtemperatur. Demnach gilt  $T'_f = 0$ , und es folgt für die vorliegende Geometrie nach Gleichung 3.48

$$\lambda_d = \varphi * \lambda_f \quad (3.50)$$

### 3.6.1 Schließungsmodell für den Schwankungsanteil der konvektiven Wärmeausbreitung [22]

Um den Schließungsterm der Wärmeausbreitung 3.42 genauer bestimmen zu können, wird ein Gebiet von Repräsentativen Volumenelementen (RVE, Bereiche mit vernachlässigbarer Interaktion) betrachtet. Umschreiben der Gleichung 3.47 mit Hilfe der RVE führt zu

$$\overline{v'_f T'_f} = \frac{N}{V_f} \int_{V_f^{(n)}} v_f^{(n)} T_f^{(n)} dV \quad (3.51)$$

wobei  $V_f^{(n)}$  das Volumen ist, das n-te RVE umschließt und  $N$  ist die Anzahl an RVE's in dem betrachteten Gebiet.  $v_f^{(n)}$  und  $T_f^{(n)}$  sind in Gleichung 3.51 die Schwankungen der lokalen Geschwindigkeit und Temperatur im Strömungsfeld des n-ten RVE, gegeben durch

$$v_f^{(n)} = v_f^{(n)} - \overline{v}_f \quad (3.52)$$

$$T_f^{(n)} = T_f^{(n)} - \overline{T}_f \quad (3.53)$$

siehe Gleichung 3.29.  $T_f^{(n)}$  bezeichnet dabei die lokale Temperatur in der Pore. Mit Hilfe der geometrischen Beziehung  $4\pi R^3 N/3V = 1 - \varphi$  [22] kann Gleichung 3.51 umgeschrieben werden zu

$$\overline{v'_f T'_f} = \frac{1 - \varphi}{\varphi} \int_{V_f^{*(n)}} v_f'^{(n)} T_f'^{(n)} dV^* \quad (3.54)$$

Hierbei beschreibt  $V_f^{*(n)} = V_f^{(n)}/(4\pi R^3/3)$  das dimensionslose Volumen, das das n-te RVE einschließt, wobei  $R$  der Radius des RVEs ist. Der Faktor  $\frac{(1-\varphi)}{\varphi}$  berücksichtigt in Gleichung 3.54 die lokale Porengeometrie. Um das Integral berechnen zu können, muss  $v_f'^{(n)}$  bestimmt werden, welche über die Randbedingungen

$$v_f^* = 0 \quad \text{auf der Oberfläche des RVEs} \quad (3.55)$$

und

$$v_f^* = \bar{v}_f / |\bar{v}_f| \quad \text{entfernt vom RVE} \quad (3.56)$$

definiert ist. Dabei ist  $v_f^*$  eine dimensionslose Variable. Zusätzlich muss  $T_f'^{(n)}$  bestimmt werden.

Um die Gleichung für  $T_f'^{(n)}$  herzuleiten, muss nochmals die mikroskopische Energiegleichung 3.37 für  $T_f^{(n)}$

$$(\rho C_p)_f \frac{\partial T_f^{(n)}}{\partial t} + (\rho C_p)_f \nabla * (v_f^{(n)} T_f^{(n)}) = \nabla * (\lambda_f \nabla T_f^{(n)}) \quad (3.57)$$

genauer betrachtet werden. Wird nun Gleichung 3.53 in Gleichung 3.57 eingesetzt und Gleichung 3.39 abgezogen und die entstandene Gleichung durch  $\varphi$  geteilt, führt dies zu

$$\begin{aligned} (\rho C_p)_f \left\{ \frac{\partial T_f'^{(n)}}{\partial t} + \nabla * [v_f'^{(n)} \bar{T}_f + \bar{v}_f T_f'^{(n)}] + \nabla * [v_f'^{(n)} T_f'^{(n)} + \overline{v_f T_f'^{(n)}}] \right\} = \\ \nabla * [\lambda_f \nabla T_f'^{(n)}] - \bar{\nabla} * \left[ \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} \lambda_f T_f dS \right] - \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} \lambda_f \nabla T_f * dS \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die beiden letzten Terme der linken Seite dieser Gleichung sind von höherer Ordnung und können somit vernachlässigt werden. Mit der zusätzlichen Verwendung der quasi-stationären Annahme von Zanotti und Carbonell [48], ändert sich Gleichung 3.58 zu

$$(\rho C_p)_f \nabla * (v_f'^{(n)} \bar{T}_f + \bar{v}_f T_f'^{(n)}) = \nabla * (\lambda_f \nabla T_f'^{(n)}) - \left[ \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} \lambda_f \nabla T_f'^{(n)} * dS \right] \quad (3.59)$$

wobei die Kontinuitätsgleichung und das folgende Integral benutzt wurde:

$$\int_{A_{fs}} \bar{T}_f dS = \int_{A_{fs}} \bar{\nabla} \bar{T}_f * dS = 0 \quad (3.60)$$

Dies bedeutet, dass es keine Änderungen der Temperatur auf der Oberfläche des Grenzgebietes gibt. Der integrale Term der rechten Seite ist im Volumen  $V_f$  konstant. Dieser wird

nun in den Wärmeleitungsterm  $\nabla * [\lambda_f \nabla T_f^{(n)}]$  impliziert. Ziel der Kombination beider Terme der rechten Seite von Gleichung 3.59, also der Kombination von Schwankungsanteil und Konstante, ist eine schwankende Größe zu erhalten, um die Gleichheit mit der die linke Seite zu gewährleisten. Im folgenden wird ein Lösungsansatz für  $T_f^{(n)}$  für große Reynoldszahlen betrachtet, so dass ein expliziter Ausdruck für die Wärmeausbreitung in Gleichung 3.51 berechnet werden kann. Eine Entwicklung für kleine Reynoldszahlen ist für das zugrundeliegende Modell nicht nötig.

### 3.6.2 Wärmeausbreitung für große Reynoldszahlen ( $Re \gg 10$ ) [22]

Für große Reynoldszahlen ( $Re \gg 10$ ) können die Terme auf der rechten Seite von Gleichung 3.59 vernachlässigt werden, da bei hohen Geschwindigkeiten die molekulare Wärmeleitung vernachlässigbar ist. Eine dimensionsbehaftete Analyse der vereinfachten Gleichung mit  $d_p$  als Längenskala der makroskopischen Koordinaten, ergibt

$$T_f^{(n)} = d_p f(r') * \bar{\nabla} \bar{T} \quad (3.61)$$

wobei der makroskopische Temperaturgradient  $\bar{\nabla} \bar{T}$  als eine Konstante in mikroskopischen Koordinaten betrachtet wird und  $f(r')$  eine dimensionslose Vektorfunktion darstellt, die von den mikroskopischen Koordinaten ( $r'$ ) abhängt, deren Ursprung im Zentrum des n-ten RVE liegt.

Die Geschwindigkeiten im n-ten RVE werden mit Hilfe der Gleichungen 3.55 und 3.56 bestimmt,

$$v_f^{(n)} = |\bar{v}_f| g(r') \quad (3.62)$$

$$v_f'^{(n)} = v_f^{(n)} - v_f = |\bar{v}_f| g'(r') \quad (3.63)$$

wobei  $g'(r')$  auch eine dimensionslose Vektorfunktion ist, die nur von den mikroskopischen Koordinaten abhängt. Werden die Gleichungen 3.61 und 3.63 in Gleichung 3.54 eingesetzt, führt dies zu

$$\overline{\varphi v_f' T_f'} = \tilde{\alpha}' : \bar{\nabla} \bar{T} \quad (3.64)$$

Der diffusive Wärmeausbreitungstensor  $\tilde{\alpha}'$  ist gegeben durch

$$\tilde{\alpha}' = -(1 - \varphi) |\bar{v}_f| d_p \int_{V_f^*} g'(r') f(r') dV^* \quad (3.65)$$

Beachtet werden muss, dass das Integral in Gleichung 3.65 ein dimensionsloser Tensor ist, der numerisch berechnet werden kann. Jedoch ist dies nicht nötig, wenn die Interaktion der RVEs vernachlässigt wird. Um diesem Effekt Rechnung zu tragen, muss nun das Integral durch einen unbekannt dimensionlosen Tensor  $\tilde{D}$  in Gleichung 3.65 ersetzt werden. Man erhält

$$\tilde{\alpha}' = \tilde{D} (1 - \varphi) |\bar{v}_f| d_p = \tilde{D} \frac{(1 - \varphi)}{\varphi} |\bar{v}_f| d_p \quad (3.66)$$

Aus Gleichung 3.66 folgt, dass der Ausbreitungstensor durch Wärmeleitung  $\tilde{\lambda}'$  bestimmt ist durch

$$\tilde{\lambda}' = (\rho C_p)_f \tilde{\alpha}' = \tilde{D} \lambda_f \frac{(1 - \varphi)}{\varphi} \frac{|\bar{v}| d_p}{\alpha_f} = \tilde{D} \lambda_f \frac{(1 - \varphi)}{\varphi} Pe \quad (3.67)$$

wobei  $Pe = |\bar{v}| d_p / \alpha_f$  die Peclet Zahl bezeichnet. Der Wert von  $\tilde{D}$  kann durch einen Vergleich mit Experimenten ermittelt werden. Die Gleichungen 3.66 und 3.67 zeigen, dass die Ausbreitung durch Wärmeleitung und die Wärmeausbreitung durch Diffusion bei hohen Reynoldszahlen linear proportional zur Peclet Zahl ist, was mit den meisten existierenden experimentellen Korrelationen [34, 35, 47], übereinstimmt.

Es muss noch einmal betont werden, dass die Abhängigkeiten der Porosität und der Geschwindigkeit bei hohen und bei niedrigen Reynoldszahlen unterschiedlich sind und in dieser Herleitung ausschließlich die Betrachtung für hohen Reynoldszahlen (turbulente Strömungen) erfolgte. Aus den Gleichungen 3.49 und 3.64 folgt nun die makroskopische Energiegleichung für ein poröses Medium

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \varphi (\rho C_p)_f + (1 - \varphi) (\rho C_p)_s \right] \bar{T} + (\rho C_p)_f \bar{\nabla} * [\bar{v} \bar{T}] = \bar{\nabla} * \left( \lambda_d \bar{\nabla} \bar{T} + \tilde{\lambda}' : \bar{\nabla} \bar{T} \right). \quad (3.68)$$

$\tilde{\lambda}' : \bar{\nabla} \bar{T}$  beschreibt dabei den turbulenten Wärmetransport zwischen zwei Volumen (RVEs). Dies bedeutet, dass der Schwankungsanteil des konvektiven Wärmetransports als zusätzliche Wärmeleitfähigkeit  $\tilde{\lambda}'$  berücksichtigt wird. Dieser Anteil wird oft auch als turbulente Wärmeleitfähigkeit bezeichnet.

### 3.6.3 Effektiver Querströmungsanteil für molekularen und turbulenten Energietransport [41]

Der Ausbreitungstensor durch turbulente Wärmeleitung  $\tilde{\lambda}'$  ist bei der vorliegenden Analyse, wie in diesem Kapitel gezeigt wird, ein Skalar. Dieser kann analog zu einer Unterkanalanalyse [41] mit Hilfe des Massenstromanteils in Querrichtung pro Einheitslänge  $W_{ij}^{*H}$ , bezogen auf den molekularen und turbulenten Energieaustausch, und der spezifischen Wärmekapazität abgeschätzt werden. Dies bedeutet, dass

$$\tilde{\lambda}' = W_{ij}^{*H} * C_p \quad (3.69)$$

Es wird also angenommen, dass das Modell für die turbulente Wärmeleitfähigkeit der Brennelementbündel mit quadratischem Querschnitt durch einen Ansatz für die Umströmung von Stabebündeln mit runden Stäben angenähert werden kann. Todreas und Kazimi [41] entwickelten ein Konzept gleicher Fluidvolumen  $V$ , die zwischen den Unterkanälen  $i$  und  $j$  über eine Spalt ausgetauscht werden. Dieses Konzept gilt für die Annahme gleicher Dichte und Einphasenströmungen und wird auch für das vorliegende Modell verwendet. Es wird in Abbildung 3.2 verdeutlicht:

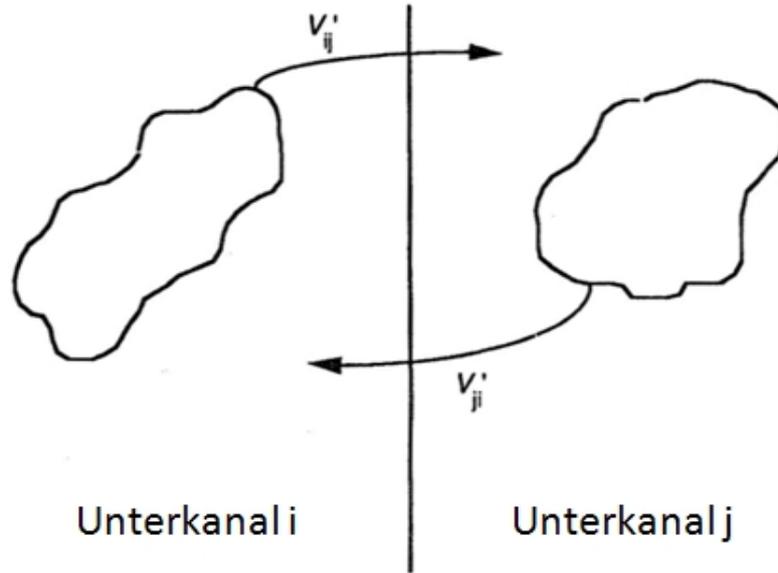


Abbildung 3.2: Fluidvolumina in den Unterkanälen

Für dieses Konzept gilt:

$$V'_{ij} = V'_{ji} \quad (3.70)$$

Die Notation ' beschreibt die Fluktuationen in der Zeit. Gleichung 3.70 beschreibt den Austausch der Fluidvolumen mathematisch. Der Austausch von Unterkanal  $i$  zu  $j$  ist also gleich dem Austausch von Unterkanal  $j$  zu  $i$ . Dies gilt ebenso für die in der Zeit fluktuierenden Quergeschwindigkeiten

$$v'_{ij} = v'_{ji} \quad (3.71)$$

Der gleiche Ansatz wird auch für den Energieaustausch der Unterkanäle angewendet. Der gesamte Austausch von Energie über den Spalt mit der Breite  $s$  ist definiert nach [41]

$$(\dot{q}s)_{i \leftrightarrow j} = W_{ij}^{*H} (h_i - h_j) \quad (3.72)$$

wobei  $h_i$  die Enthalpie des Unterkanals  $i$  und  $h_j$  die Enthalpie des Unterkanals  $j$  beschreibt. Für einen Druckwassereaktor, wie in der vorliegenden Anwendung, kann die Berechnung von  $W_{ij}^{*H}$  reduziert werden auf die Berechnung des turbulenten Anteils  $W_{ij}'^H$ . Dieser beschreibt folglich den gesamten Querströmungsanteil pro Einheitslänge, welcher im folgenden als  $W_{ij}'$  bezeichnet wird.

Für das vorliegende Modell gleicher Spaltbreiten ist dieser definiert als

$$W' = \frac{s}{z^T} \mu_f \frac{\epsilon}{\nu_f} \quad (3.73)$$

wobei  $\epsilon$  die Wirbelviskosität,  $\nu_f$  die kinematische Viskosität und  $z_{ij}^T$  den turbulenten Mischungsweg bezeichnet. Diese können abgeschätzt werden.  $\epsilon/\nu_f$  ist dabei proportional zur Reynoldszahl:

$$\frac{\epsilon}{\nu_f} = \omega' Re^b \quad (3.74)$$

wobei  $\omega$  den gesamten Widerstandsbeiwert verkörpert. Der turbulente Mischungsweg wurde noch nicht einheitlich wiedergegeben. Manche Autoren skalieren ihn über Brennstabdurchmesser  $d$ , andere über der Spaltbreite  $s$ , und wieder Andere über Beides. Der letzte Ansatz führt zu:

$$z^T = \omega_g d \left( \frac{s}{d} \right)^r \quad (3.75)$$

$\omega_g$  bezeichnet dabei den Widerstandsbeiwert des Spaltes und  $r$  einen Parameter, der in Tabelle 3.2 definiert wird. Aus Gleichung 3.73 folgt mit Hilfe der Gleichungen 3.74 und 3.75 für die Berechnung von  $W'$  unter Verwendung des hydraulischen Durchmessers  $d_h$

$$\frac{W'}{\mu_f} = \frac{\omega'}{\omega_g} Re^b \left( \frac{s}{d_h} \right)^{1-r} \quad (3.76)$$

Dabei ist  $\omega'$  definiert als

$$\omega' = 2\omega \quad (3.77)$$

Daraus folgt für die vorliegende Geometrie

$$W' = \mu_f \frac{2\omega}{\omega_g} Re^b \left( \frac{s}{d_h} \right)^{1-r} \quad (3.78)$$

da der Quermassenstromanteil für jeden Spalt gleich ist. Rogers und Tahir [36] haben die erhältliche Literatur für die verschiedenen Typen sich gegenseitig beeinflussender Unterkanäle verschiedener Designs zueinander in Beziehung gesetzt. Tabelle 3.2 fasst ihre Vorschläge für die Parameter  $\omega/\omega_g$ ,  $b$  und  $r$  zusammen. Die Korrelation nach Gleichung 3.78 ist gültig für  $Re > 5000$  und  $s/D > 0.032$ .

Tabelle 3.2: Empirische Durchmischungsparameter für Bündel mit rauhen Stäben

Anordnung	dreieckig-dreieckig	quadratisch-dreieckig	quadratisch-quadratisch
$\omega/\omega_g$	0,0018/2	0,0027	0,005/2
$r$	1,4	0,95	0,894
$b$	0,9	0,9	0,9

Für die nachfolgenden Rechnungen in Kapitel 6 werden die Parameter für rein quadratische Unterkanäle gewählt.

### Fazit

In Kapitel 3.4 und 3.5 wurden die allgemeinen makroskopischen Erhaltungsgleichungen für poröse Medien für Masse und Impuls hergeleitet. Für die anschließende Herleitung der makroskopischen Energiegleichung in Kapitel 3.6 wurde ein Modell für die Bestimmung des Schwankungsanteils der konvektiven Wärmeausbreitung entwickelt (Kapitel 3.6.1). Dieser Anteil des Energietransportes wurde durch eine zusätzliche turbulente Wärmeleitung modelliert (Kapitel 3.6.2) und anschließend in Anlehnung an eine Methode aus der Unterkanalanalyse berechnet (Kapitel 3.6.3).

# Kapitel 4

## Bestimmung der Modellkoeffizienten über Druckverlustkorrelationen

Nach der Einführung in Kapitel 3.5.1 erfolgt nun die Berechnung der Modellkoeffizienten  $c_{1j}$  und  $c_{2j}$  in der Impulsgleichung.

$$\rho_f \left[ \varphi^{-1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \varphi^{-1} \bar{\nabla} * (\varphi^{-1} \bar{v} * \bar{v}) \right] = -\varphi^{-1} \bar{\nabla} \bar{p} + \varphi^{-1} \mu_f \bar{\nabla}^2 \bar{v} - c_{1j}^{-1} \mu_f \bar{v} - \rho_f c_{2j} |\bar{v}| \bar{v} + \rho_f g \quad (4.1)$$

Diese können einerseits über Druckverlustkorrelationen, wie im nachfolgendem Kapitel gezeigt und über eine CFD-Berechnung bestimmt und anschließend verglichen werden.

### 4.1 Ansatz zur Bestimmung der Modellkoeffizienten $c_{1j}$ und $c_{2j}$ über Korrelationen

Für die Bestimmung der Koeffizienten ist die Annahme einer konstanten Darcygeschwindigkeit  $\bar{v} = (u, v, w)^T$  notwendig, was für den Fall reiner Querströmung bedeutet, dass  $v, z = 0$  und  $w = const.$  Als Konsequenz daraus sind auch die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . Dies bedeutet für das Modell, dass keine Haftbedingungen vorliegen, keine Beschleunigungskräfte und keine Volumenkräfte, wie etwa Auftrieb, wirken. Nochmals allgemein veranschaulicht bedeutet dies für die vorliegenden Impulsgleichung:

$$\rho_f \left[ \underbrace{\varphi^{-1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}_0 + \underbrace{\varphi^{-1} \bar{\nabla} * (\varphi^{-1} \bar{v} * \bar{v})}_0 \right] = -\varphi^{-1} \bar{\nabla} \bar{p} + \underbrace{\varphi^{-1} \mu_f \bar{\nabla}^2 \bar{v}}_0 - c_{1j}^{-1} \mu_f \bar{v} - \rho_f c_{2j} |\bar{v}| \bar{v} + \underbrace{\rho_f g}_0 \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = - \underbrace{\frac{\mu_f \varphi_1}{c_{1j}} u}_{lam. \text{ Anteil}} - \underbrace{\rho_f c_{2j} \varphi_1 |u| u}_{turb. \text{ Anteil}} \quad (4.3)$$

Somit wird der gesamte Druckverlust in Querrichtung durch den vorher beschriebenen laminaren und turbulenten Anteil des durch die Volumenmittelung eingebrachten Ausgleichsterms ausgedrückt. Die Modellkoeffizienten in Querrichtung lauten:

$$c_{11} = K_1 \quad \text{und} \quad c_{21} = \frac{F}{\sqrt{K_1}} \quad (4.4)$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass  $F$  eine Funktion, abhängig von der Reynoldszahl, ist. Somit ist  $F$  nicht ausschließlich von der Geometrie des Modells abhängig, sondern auch von der Geschwindigkeit und folglich ist  $c_{21}$  nicht konstant. Für ein begrenztes Intervall der Reynoldszahl ist  $F$  linear in der Geschwindigkeit und der Widerstand somit kubisch, siehe Lage et al. [25] und Achenbach [1]. Der Druckverlust in Querrichtung lautet somit:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\mu_f \varphi_1}{c_{11}} u - \rho_f c_{21} \varphi_1 |u| u \quad (4.5)$$

Da die Druckverlustkorrelationen und nachfolgenden CFD-Berechnungen, die in den folgenden Kapiteln eingeführt werden, über den volumengemittelten Druck  $\bar{p}_f$  definiert sind, muss Gleichung 4.5 umgeschrieben werden zu

$$\frac{\partial \varphi \bar{p}_f}{\partial x} = -\frac{\mu_f \varphi_1}{c_{11}} u - \rho_f c_{21} \varphi_1 |u| u \quad (4.6)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \bar{p}_f}{\partial x} = -\frac{\mu_f}{c_{11}} u - \rho_f c_{21} |u| u \quad (4.7)$$

Für eine anschauliche Betrachtungsweise ist es notwendig diese Gleichung zu integrieren

$$\frac{\partial \bar{p}_f}{\partial x} = -\frac{\mu_f}{c_{11}} u - \rho_f c_{21} |u| u \quad \Big| \int_0^x dx \quad (4.8)$$

und wir erhalten als Folge ein Ergebnis, das den Druckverlust pro Länge beschreibt.

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta \bar{p}_f}{x} = -\frac{\mu_f}{c_{11}} u - \rho_f c_{21} |u| u \quad (4.9)$$

Der Ansatz zur Bestimmung der Koeffizienten  $c_{13}$  bzw.  $c_{23}$  in Längsrichtung verläuft analog. Ausgehend von einem konstanten Geschwindigkeitsprofil in axialer Richtung, einsetzen von

$$c_{13} = K_3 \quad \text{und} \quad c_{23} = \frac{F}{\sqrt{K_3}} \quad (4.10)$$

und anschließender Integration der Gleichung wird ein Ansatz bestimmt, der den Druckverlust in Längsrichtung pro Länge beschreibt

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta \bar{p}_f}{z} = -\frac{\mu_f}{c_{13}} w - \rho_f c_{23} |w| w \quad (4.11)$$

Diese beiden Ansätze nach Gleichung 4.9 und 4.11 werden nun mit bekannten Ansätzen der Druckverlustbestimmung in Quer- und Längsrichtung korreliert.

### 4.1.1 Druckverlust im querangeströmten Rohrbündel

Die Strömung des Moderatorwassers im Spaltraum kann in erster Näherung als eine Strömung durch ein Rohrbündel aus zylindrischen Rohren betrachtet werden, für die es bereits empirische Korrelationen für den Druckverlust gibt.

Die nun folgenden Gleichungen sind von Bergelin [6] für den laminaren Bereich und Gnielinski für den turbulenten Bereich entwickelt worden und wurden von Gaddis [18] zusammengefasst und überarbeitet. Die Gleichung zur Berechnung des Druckverlustes in querangeströmten Bündeln aus glatten Kreisrohren in fluchtender Anordnung lautet:

$$\Delta\bar{p}_f = \xi N_W \frac{\rho_f \bar{v}_f^2}{2} \quad (4.12)$$

Diese ist gültig in dem für uns relevanten Reynoldszahlbereich. Dabei beschreibt  $N_W$  die Anzahl der Hauptwiderstände in Stromrichtung,  $\bar{v}_f$  bezeichnet die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt, also die Spaltgeschwindigkeit und  $\xi$  den Druckverlustbeiwert. Dabei ist die Anzahl der Hauptwiderstände identisch mit der Anzahl der Rohrreihen. Die Angabe eines Verhältnisses  $\varsigma$  zwischen Anzahl Rohrreihe pro vorgegebener Länge  $l_1$  erlaubt eine Korrelation zu der im vorhergehenden Kapitel entwickelten Druckverlustgleichung 4.9.

$$\varsigma = \frac{N_W}{l_1} \quad (4.13)$$

Dabei wird der Druckverlust in eine komplett laminare und komplett turbulente Komponente aufgeteilt, so dass die Berechnung der einzelnen Koeffizienten erfolgen kann. Dieser Ansatz wurde für eine fluchtende Anordnung runder Rohre entwickelt. Für die vorliegende Anwendung muss somit eine Vereinfachung der Brennelementkästen zu runden Rohren erfolgen. Die Breite der Kästen wird als Durchmesser der Rohre angenommen. Aus Gleichung 4.12 folgt

$$\frac{\Delta\bar{p}_f}{l_1} = \xi \varsigma \frac{\rho_f \bar{v}_f^2}{2} \quad (4.14)$$

Beim Vergleich der Ergebnisse mit den anschließenden CFD-Berechnungen ist darauf zu achten, dass die Ergebnisse der Korrelationen anschließend noch mit der angegebenen Länge  $l_1$  multipliziert werden müssen. Diese entspricht dabei der Breite des betrachteten Volumenelements nach Abbildung 2.2.

#### Druckverlustkorrelation für den laminaren Fall

Mit Hilfe der Gleichungen 4.9 und 4.14 lässt sich folgende betragsmäßige Beziehung für den rein laminaren Fall in Querrichtung ableiten:

$$\xi_1 \varsigma \frac{\rho_f u_f^2}{2} = \frac{\mu_f}{c_{11}} u \quad (4.15)$$

Hierbei wurde nach  $\frac{\Delta\bar{p}_f}{l}$  gleichgesetzt, der turbulente Anteil der Gleichung vernachlässigt und die Längeneinheiten vereinheitlicht.  $u$  beschreibt dabei die volumetrische Anströmgeschwindigkeit im freien Querschnitt. Diese ist definiert über einen konstanten Eingangsmassenstrom, bzw. als Volumenstrom/Gesamtfläche:

$$u = \frac{\dot{V}}{A_{ges}} \quad \text{mit} \quad \dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho_f} \quad (4.16)$$

Die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt  $u_f$  ist dabei wie folgt festgelegt:

$$u_f = \left( \frac{a}{a-1} \right) * u \quad \text{bzw.} \quad u = \varphi_1 * u_f \quad (4.17)$$

mit  $\varphi_1 = \frac{a-1}{a}$ .  $a$  bezeichnet dabei das Querteilungsverhältnis und ist definiert als

$$a = \frac{s_q}{d} \quad (4.18)$$

$s_q$  beschreibt hierbei die Querteilung und  $d$  den Aussendurchmesser der Rohre.

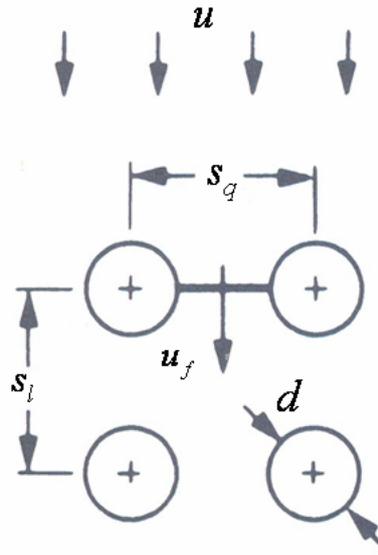


Abbildung 4.1: Zur Erläuterung der Begriffe

Für die Bestimmung des Koeffizienten  $c_{11}$  folgt somit:

$$c_{11} = \frac{2\mu_f (a-1)}{\xi_1 \varsigma \rho_f u_f a} \quad (4.19)$$

Der Druckverlustbeiwert  $\xi_1$  wird unter Berücksichtigung der Einflüsse der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte und der Anzahl der Rohrreihen für den rein laminaren Fall in [18] mit

$$\xi_1 = \xi_l f_{zn,l} \quad (4.20)$$

angegeben.  $\xi_l$  wird dabei bestimmt durch

$$\xi_l = \frac{f_{a,l,f}}{Re} \quad (4.21)$$

mit

$$Re = \frac{u_f d \rho_f}{\mu_f} \quad \text{und} \quad f_{a,l,f} = \frac{280\pi \left[ (b^{0,5} - 0,6)^2 + 0,75 \right]}{(4ab - \pi) a^{1,6}} \quad (4.22)$$

Falls die Strömung nicht isotherm ist, wird hier der laminare Anteil  $\xi_l$  mit dem Korrekturfaktor  $f_{zn,l}$  multipliziert. Für ihn gilt nach [19]

$$f_{zn,l} = \left( \frac{\mu_w}{\mu_f} \right)^{\frac{0,57}{\left[ \left( \frac{4ab}{\pi} - 1 \right) Re \right]^{0,25}}} \quad (4.23)$$

Dabei ist die Viskosität des Wassers  $\mu_w$  hier auf die mittlere Wandtemperatur zu beziehen. Einsetzen von  $\xi_1$  führt somit zu

$$c_{11} = \frac{2d(a-1)}{f_{a,l,f} f_{zn,l} \zeta a} \quad (4.24)$$

Insgesamt folgt, dass der Koeffizient  $c_{11}$  durch die Verwendung des Korrekturfaktors von der Geschwindigkeit abhängig und somit nicht konstant ist.

### Druckverlustkorrelation für turbulenten Fall

Die Druckverlustkorrelation für den turbulenten Anteil lautet nach Gleichung 4.9 und 4.14:

$$\xi_{2\zeta} \frac{\rho_f u_f^2}{2} = \rho_f c_{21} \varphi_1 |u| u \quad (4.25)$$

Für die Berechnung von  $c_{21}$  folgt:

$$c_{21} = \frac{\xi_{2\zeta}}{2\varphi_1^2} \quad \text{oder} \quad c_{21} = \frac{\xi_{2\zeta}}{2 * \left( \frac{a-1}{a} \right)^2} \quad (4.26)$$

Der Druckverlustbeiwert ist dabei eine Funktion der Reynolds-Zahl  $Re$ , des Querteilungsverhältnisses  $a$  und des Längsteilungsverhältnisses  $b$ . Es gilt:

$$Re = \frac{u_f d \rho_f}{\mu_f} \quad (4.27)$$

$$b = \frac{sl}{d} \quad (4.28)$$

Nun werden erneut Einflüsse der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte und der Anzahl der Rohrreihen berücksichtigt. Die Gleichung für den Druckverlustbeiwert im komplett turbulenten Fall lautet somit:

$$\xi_2 = (\xi_t f_{z,t} + f_{nt}) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Re + 1000}{2000} \right) \right] \quad (4.29)$$

mit

$$\xi_t = \frac{f_{a,t,f}}{Re^{0,1(b/a)}} \quad (4.30)$$

und

$$f_{a,t,f} = \left[ 0,22 + 1,2 \frac{1 - \left( \frac{0,94}{b} \right)^{0,6}}{(a - 0,85)^{1,3}} \right] * 10^{0,47(b/a - 1,5)} + [0,03(a-1)(b-1)] \quad (4.31)$$

Der ursprünglich für Strömung durch Rohre von Sieder und Tate [39] ermittelte Korrekturfaktor  $f_{z,t}$  wird hier häufig im turbulenten Bereich nicht isothermer Strömungen verwendet:

$$f_{z,t} = \left( \frac{\mu_w}{\mu_f} \right)^{0,14} \quad (4.32)$$

Er beschreibt das Verhältnis zwischen der Viskosität des Fluids bei der mittleren Wandtemperatur und der Viskosität des Fluids bei der momentanen Temperatur. Der Austrittsdruckverlust bei kleiner Rohrreihenanzahl ist für das vorliegende Modell zu vernachlässigen:

$$f_{n,t} = 0 \quad (4.33)$$

Als Fazit folgt wiederum, dass der Koeffizient  $c_{21}$  nicht konstant, sondern eine Funktion der Reynoldszahl ist, also somit geometrie- und geschwindigkeitsabhängig.

### 4.1.2 Druckverlust im Rohrbündel in Längsrichtung

Der Druckabfall in einem Rohr oder Kanal der Länge  $l_2$  wird mit der Gleichung

$$\Delta p = \frac{1}{2} \xi \frac{w_f^2 \rho_f l_2}{d_h} \quad (4.34)$$

bzw. mit Hilfe der Darcy-Beziehung

$$\frac{\Delta p}{l_2} = \frac{1}{2} \xi \frac{w_f^2 \rho_f}{\varphi_3^2 d_h} \quad (4.35)$$

beschrieben, vgl. Oertel [33], wobei  $w_f^2$  die Spaltgeschwindigkeit beschreibt,  $\xi$  wiederum den Druckverlustbeiwert und  $d_h$  den hydraulischen Durchmesser. Dieser ist definiert als

$$d_h = \frac{4A_1}{P_{wt}} \quad (4.36)$$

Dabei beschreibt  $A_1$  die durchströmte Fläche und  $P_{wt}$  den benetzten Umfang.

#### Druckverlustkorrelation für laminaren Fall

Aus der Beschreibung des Druckverlustes in Rohren bzw. Kanälen folgt für den ausschließlich laminaren Fall nach Gleichung 4.11 und 4.35:

$$\frac{1}{2} \xi_3 \frac{w_f^2 \rho_f}{\varphi_3^2 d_h} = \frac{\mu_f}{c_{13}} w \quad (4.37)$$

Dabei wird wiederum der turbulente Anteil der Gleichung (4.11) vernachlässigt. Daraus folgt für die Berechnung des Koeffizienten  $c_{13}$ :

$$c_{13} = \frac{2\mu_f \varphi_3 d_h}{\rho_f w \xi_3} \quad (4.38)$$

Dabei ist der Druckverlustbeiwert  $\xi_3$  wie folgt definiert:

$$\xi_3 = \frac{64}{Re} \quad (4.39)$$

Einsetzen der Reynoldszahl

$$Re = \frac{w d_h}{\varphi_3 \nu_f} \quad \text{mit} \quad \nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} \quad (4.40)$$

führt zu der letztendlichen Definition des Koeffizienten  $c_{13}$

$$c_{13} = \frac{\varphi_3 d_h^2}{32} \quad (4.41)$$

Nach Herleitung des Koeffizienten ist  $c_{13}$  konstant.

### Druckverlustkorrelation für turbulenten Fall

Die Korrelation in axialer Richtung für den turbulenten Fall nach Gleichung 4.11, mit der Vernachlässigung des laminaren Anteils, und 4.35 lautet:

$$\frac{1}{2} \xi_4 \frac{w^2 \rho_f}{\varphi_3^2 d_h} = \rho_f c_{23} |w| w \quad (4.42)$$

Es folgt

$$c_{23} = \frac{\xi_4}{2 d_h \varphi_3^2} \quad (4.43)$$

bzw. mit Hilfe der Blasius-Beziehung:

$$\xi_4 = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad 2320 < Re < 10^5 \quad (4.44)$$

Insgesamt wird der Koeffizient  $c_{23}$  bestimmt durch

$$c_{23} = \frac{1}{2 d_h \varphi_3^2} \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (4.45)$$

mit

$$Re = \frac{w_f d_h \rho_f}{\mu_f} \quad (4.46)$$

Daraus folgt, dass der Modellkoeffizient  $c_{23}$  abhängig von  $Re$ , und somit nicht konstant ist.

## 4.2 Berechnung der Koeffizienten

Nach der Herleitung der verwendeten Korrelationen werden nun die vier Koeffizienten für die vorliegende Anwendung bestimmt. Alle Stoffwerte werden dabei entsprechend für eine konstante Temperatur von 280°C angenommen. Somit folgt für die weiteren Berechnungen

$$\rho_f = 776.993 \frac{kg}{m^3} \quad (4.47)$$

$$\mu_f = 99.110 * 10^{-6} \frac{kg}{ms} \quad (4.48)$$

Des Weiteren werden die Porositäten mit

$$\varphi_1 = 0.1295 \quad (4.49)$$

$$\varphi_3 = 0.2475 \quad (4.50)$$

angegeben.

### 4.2.1 Bestimmung des laminaren Koeffizienten in Querrichtung

Das Verhältnis  $\zeta$  ist wie folgt definiert:

$$\zeta = \frac{N_W}{l_1} = \frac{3}{0.2316} = 12.953 \quad (4.51)$$

Da der Koeffizient  $c_{11}$  geschwindigkeitsabhängig ist, wird im folgenden der Massenstrom, also somit auch die Geschwindigkeit in Querrichtung, variiert und der dazugehörige Koeffizient berechnet. Das interessierende Geschwindigkeitsfeld ist dabei ein Intervall von 0.01 m/s bis 0.12 m/s. Die Gesamtfläche des zu betrachtenden Bereichs beträgt dabei  $A_{ges} = 0.3242 \text{ m}^2$ . Die Berechnung des Querteilungsverhältnisses erfolgt über das Verhältnis von Querteilung zu Durchmesser des Rohres. Wie bereits erwähnt werden dabei die Brennelementkästen als runde Rohre angenommen. Die Breite der Kästen entspricht dabei dem Durchmesser der Rohre. Das Querteilungsverhältnis ist gegeben nach Gleichung 4.18:

$$a = \frac{s_q}{d} = \frac{0.0772}{0.0672} = 1.1488 \quad (4.52)$$

Das Längsteilungsverhältnis  $b$  entspricht im vorliegenden Modell dem Querteilungsverhältnisses  $a$ . Somit kann die Berechnung des Druckverlustbeiwertes  $\xi_1$  erfolgen. Der Koeffizient  $f_{a,l,f}$  wurde dabei nach Gleichung 4.22 bestimmt mit

$$f_{a,l,f} = 320.59 \quad (4.53)$$

Die mittlere Wandtemperatur wird mit 344°C angegeben und somit folgt

$$\mu_w = 75.291^{-6} \frac{kg}{ms} \quad (4.54)$$

Der Korrekturfaktor, definiert nach Gleichung 4.23 ist geschwindigkeitsabhängig und unterliegt somit für das interessierende Geschwindigkeitsfeld folgenden Schwankungen

$$0.9894 \leq f_{zn,l} \leq 0.9933 \quad (4.55)$$

Der Korrekturfaktor wird als konstant angenommen, da die Auswirkungen auf die Berechnung des Koeffizienten unter 1% liegen. Nach Multiplikation mit der Querteilung kann das Ergebnis mit der CFD-Berechnung verglichen werden. Nach Gleichung 4.24 folgt damit

$$c_{11} = 3.262 * 10^{-7} \quad (4.56)$$

### 4.2.2 Bestimmung des turbulenten Koeffizienten in Querrichtung

Mit Hilfe der im vorangegangenen Unterkapitel definierten Größen kann nun auch die Berechnung des Koeffizienten  $c_{21}$  erfolgen. Der Druckverlustbeiwert ist dabei abhängig von der Reynoldszahl, der Konstanten  $f_{a,t,f}$  nach Gleichung 4.31, mit

$$f_{a,t,f} = 1.3361 \quad (4.57)$$

und des Korrekturfaktors für nichtisotherme Strömungen im turbulenten Bereich nach Gleichung 4.32

$$f_{z,t} = 0.9622 \quad (4.58)$$

Daraus folgt für die Berechnung des Koeffizienten nach Gleichung (4.26) für ein gegebenes Geschwindigkeitsfeld die in Abbildung 4.2 dargestellte Abhängigkeit von der Darcygeschwindigkeit.

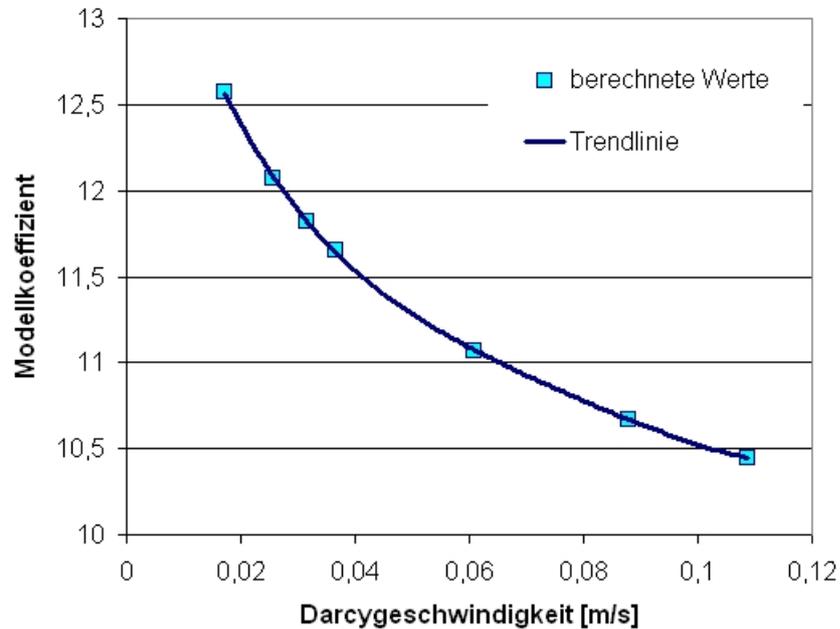


Abbildung 4.2: Abhängigkeit des Koeffizienten  $c_{21}$  von der Darcygeschwindigkeit

Das für eine bestimmte Geschwindigkeit berechnete Ergebnis muss, wie bereits erwähnt, mit der Querteilung multipliziert werden um die berechneten Ergebnisse der Korrelation später mit den Resultaten der CFD-Simulation vergleichen zu können. Die Funktion des Modellkoeffizienten in Abhängigkeit von der Darcygeschwindigkeit lautet:

$$c_{21}(u) = 376151u^4 - 118541u^3 + 14368u^2 - 903.26u + 108.79 \quad (4.59)$$

### 4.2.3 Bestimmung des laminaren Koeffizienten in Längsrichtung

Wie aus der Druckverlustkorrelation für den laminaren Fall hervorgeht, ist der Koeffizient  $c_{13}$  ausschließlich von der Porosität in Längsrichtung  $\varphi_3$  und dem hydraulischen Durchmesser abhängig. Dieser wird als Verhältnis von durchströmter Fläche  $A_1$  zu benetztem Umfang  $P_{wt}$  angegeben, wobei

$$A_1 = 0.001475 \text{ m}^2 \quad (4.60)$$

$$P_{wt} = 0.258499 \text{ m} \quad (4.61)$$

gilt. Daraus folgt für den hydraulischen Durchmesser

$$d_h = 0.022823 \text{ m} \quad (4.62)$$

Bei der folgenden CFD-Berechnung wird ein Ausschnitt eines Spaltes mit der Länge  $l_2 = 0.1 \text{ m}$  betrachtet. Um das Ergebnis der Korrelation mit der nachfolgenden Berechnung vergleichen zu können, muss das Ergebnis der Korrelation noch mit der Länge  $l_2$  multipliziert werden, und somit folgt für den Koeffizienten  $c_{13}$  nach Gleichung 4.41

$$c_{13} = 4.02875 * 10^{-7} \quad (4.63)$$

#### 4.2.4 Bestimmung des turbulenten Koeffizienten in Längsrichtung

Der Koeffizient wird gemäß Definition 4.43 berechnet und es folgt nach Multiplikation der einzelnen Resultate für das gegebene Geschwindigkeitsfeld mit der betrachteten Spaltlänge  $l_2$  die folgende Abhängigkeit des Koeffizienten von der Darcygeschwindigkeit:

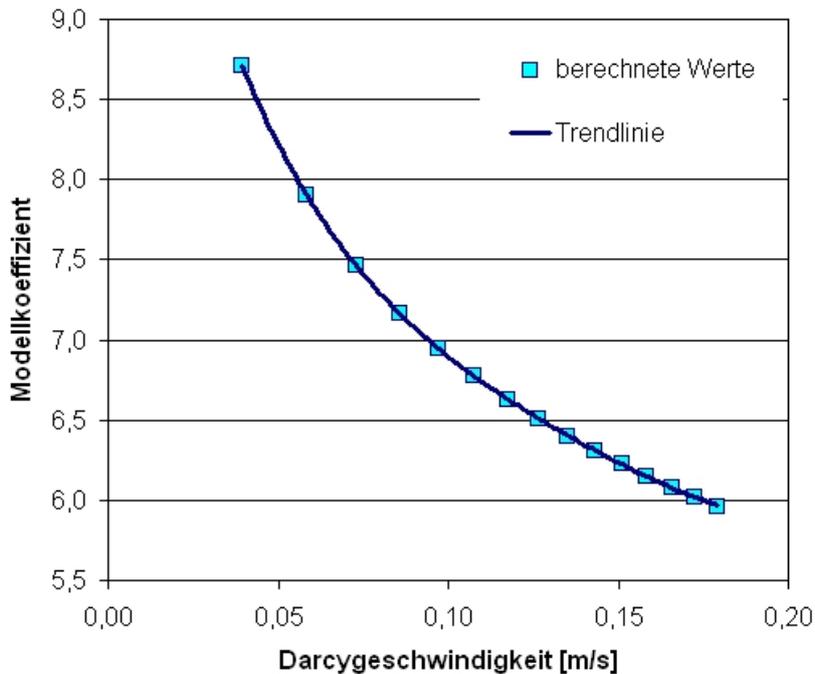


Abbildung 4.3: Abhängigkeit des Koeffizienten  $c_{21}$  von der Darcygeschwindigkeit

Die zugehörige Funktion lautet:

$$c_{23} = 7398.4w^4 - 4166.5w^3 + 920.19w^2 - 105.5w + 11.672 \quad (4.64)$$

# Kapitel 5

## Bestimmung der Koeffizienten mittels CFD

### 5.1 Numerische Grundlagen

Für die hier vorliegenden quadratischen Brennelementkästen werden geringfügig andere Druckverlustkoeffizienten erwartet als für Kreisrohre. Empirische Korrelationen liegen hierfür jedoch nicht vor. Die numerische Strömungsmechanik (CFD-Computational Fluid Dynamics) vermittelt stattdessen Einsichten in komplexe Strömungsvorgänge, wie sie auf experimentellem Wege nicht oder nur schwer darstellbar sind. Sie hat das Ziel, strömungsmechanische Probleme approximativ mit numerischen Methoden zu lösen. Dabei werden Modellgleichungen wie die Navier-Stokes-Gleichungen, welche in Kapitel 3.1 bereits erwähnt wurden, die Eulergleichungen oder andere Gleichungsmodelle verwendet. Die Rechnertechnik hat in den vergangenen Jahrzehnte enorme Fortschritte gemacht, wodurch es im Moment auch möglich ist komplizierte, dreidimensionale Strömungen auf Rechnern zu simulieren. Dabei hat die numerische Simulation von Strömungen, den großen Vorteil der Ersparnis von Entwicklungskosten und Entwicklungszeiten gegenüber aufwendigen und kostenintensiven Experimenten. Dieses Kapitel gibt einen kleinen Einblick in die Grundlagen der numerischen Strömungsmechanik, die der Berechnung der Modellkoeffizienten zugrunde liegt. Genauere Darstellungen finden sich in [33] und [32]. Dabei bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten  $u, v$  und  $w$  ausschließlich in Kapitel 5.1 die mikroskopischen Geschwindigkeiten.

#### 5.1.1 Grundgleichungen

Den Berechnungen liegen die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen zugrunde. Ihre ausführliche Herleitung kann [33] entnommen werden. Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Medien lautet

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

Hierbei ist die Summe der eintretenden Massenströme in ein Volumenelement  $dV$  gleich der Summe der austretenden Massenströme.

Die Impulserhaltungsgleichung nach Gleichung 3.26 wird in den Koordinatenrichtungen

x,y und z angegeben und lautet in ihrer nicht konservativen Form:

$$\begin{aligned}
\rho_f * \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u * \frac{\partial u}{\partial x} + v * \frac{\partial u}{\partial y} + w * \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \\
F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_f * \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) & \\
\rho_f * \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u * \frac{\partial v}{\partial x} + v * \frac{\partial v}{\partial y} + w * \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \\
F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_f * \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) & \\
\rho_f * \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u * \frac{\partial w}{\partial x} + v * \frac{\partial w}{\partial y} + w * \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \\
F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_f * \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Dabei bezeichnet  $F$  Volumenkräfte wie etwa Auftrieb, elektrische oder magnetische Kräfte, die in Richtung x, y und z auf das Volumenelement wirken. Diese spielen aber bei der Berechnung der Koeffizienten keine Rolle.

### 5.1.2 Turbulenzmodellierung

Die Turbulenz beschreibt eine räumliche und zeitlich ungeordnete Strömung eines Fluids. In der Strömungsmechanik wird sie als unregelmäßige Schwankung der Strömungsgröße über einem mittleren Wert gekennzeichnet. Sie beschreibt eine zusätzliche Durchmischung des Strömungsfeldes infolge von unterschiedlich großen und intensiven Wirbeln. Dies hat einen erhöhten Quer- und Längsimpulsaustausch im Strömungsfeld zur Folge. Die Navier-Stokes-Gleichungen können theoretisch direkt auf dieses Phänomen angewendet werden, jedoch hätte dies große Auswirkungen auf die Rechenzeiten, die enorm steigen würden. Demnach ist es vorteilhaft die mittleren Geschwindigkeiten und die Schwankungen in der Grundgleichung getrennt voneinander zu betrachten.

Dies ermöglicht der Reynolds - Ansatz. Demnach werden die Strömungsgrößen in einen zeitlichen Mittelwert und eine Schwankungsgröße unterteilt. Die zeitliche Mittelung

$$\tilde{u} = \frac{1}{\hat{T}} * \int_0^{\hat{T}} u * dt \tag{5.3}$$

nennt man auch Reynolds - Mittelung. Dabei beschreibt  $\hat{T}$  ein geeignet großes Zeitintervall. Für ein inkompressibles Fluid gilt somit für die Geschwindigkeiten  $u, v, w$  und für den Druck  $p$  unter der Berücksichtigung der Schwankungsgrößen, die mit einem Strich gekennzeichnet werden:

$$\begin{aligned}
u &= \tilde{u} + u' \quad , \quad v = \tilde{v} + v' \quad , \quad w = \tilde{w} + w' \\
p &= \tilde{p} + p'
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Die zeitlich gemittelte Kontinuitätsgleichung mit der Verwendung des Reynolds - Ansatzes lautet:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \tag{5.5}$$

Aus den inkompressiblen Impulsgleichungen ergeben sich die sogenannten Reynolds - Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\rho_f * \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u} * \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u} * \tilde{w}}{\partial z} \right) &= \\
F_x - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial z} - \rho_f * \left( \frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial (u' * v')}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial u' * w'}}{\partial z} \right) & \\
\rho_f * \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u} * \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v} * \tilde{w}}{\partial z} \right) &= \\
F_y - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zy}}{\partial z} - \rho_f * \left( \frac{\overline{\partial (v' * u')}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial (v' * w')}}{\partial z} \right) & \quad (5.6) \\
\rho_f * \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u} * \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v} * \tilde{w}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}^2}{\partial z} \right) &= \\
F_z - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial z} - \rho_f * \left( \frac{\overline{\partial (w' * u')}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial (w' * v')}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial z} \right) &
\end{aligned}$$

Durch die Anwendung der Reynolds-Mittelung ergeben sich zusätzliche Unbekannte, welche als turbulente Scheinspannungen oder Reynoldsspannungen bezeichnet werden. Diese können in einer 3x3 - Matrix zusammengefasst werden. Aus Symmetriegründen reduzieren sie sich auf 6 Unbekannte.

$$\tau' = -\rho_f * \begin{pmatrix} \overline{u'_1 * u'_1} & \overline{u'_1 * u'_2} & \overline{u'_1 * u'_3} \\ \overline{u'_2 * u'_1} & \overline{u'_2 * u'_2} & \overline{u'_2 * u'_3} \\ \overline{u'_3 * u'_1} & \overline{u'_3 * u'_2} & \overline{u'_3 * u'_3} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Die Reynoldsspannungen können jeweils separat mit den sogenannten Reynolds - Spannungsmodellen oder mit weniger numerischem Aufwand durch einen Wirbelviskositätsansatzes bestimmt werden. Letzteres wird im nachfolgenden Kapitel näher erläutert.

### 5.1.3 Das Konzept der Wirbelviskosität

Der Impulstransport in einer Strömung erfolgt auf einer mikroskopischen Ebene als Folge molekularer Diffusionsvorgänge. Dieser wird durch die innere Reibung, sogenannter molekularer Viskosität des Fluids  $\mu_f$ , repräsentiert. Somit liegt es nahe den zusätzlichen Impulsaustausch der Turbulenz mit einer turbulenten Viskosität, der sogenannten Wirbelviskosität,  $\mu_t$  zu modellieren. Mit Hilfe des Boussinesq-Ansatzes lassen sich die Reynolds-Spannungen wie folgt beschreiben:

$$-\rho_f * \begin{pmatrix} \overline{u'_1 * u'_1} & \overline{u'_1 * u'_2} & \overline{u'_1 * u'_3} \\ \overline{u'_2 * u'_1} & \overline{u'_2 * u'_2} & \overline{u'_2 * u'_3} \\ \overline{u'_3 * u'_1} & \overline{u'_3 * u'_2} & \overline{u'_3 * u'_3} \end{pmatrix} = f(\mu_t, k, \epsilon) \quad (5.8)$$

Die Modellierung der 6 Reynoldsspannungen reduziert sich somit auf die Modellierung des Koeffizienten  $\mu_t$ . Diese wird für die vorliegende Anwendung mit einem 2-Gleichungs-Transportmodell, dem sogenannten quadratischen k- $\epsilon$  Modell für hohe Reynoldszahlen, durchgeführt. Es berücksichtigt die hohe Anisotropie der Turbulenz und steht für eine hohe Genauigkeit. Einzelheiten sind [2] zu entnehmen. Die Bestimmungsgleichungen werden im folgenden Kapitel 5.1.4 näher erläutert.

### 5.1.4 k- $\epsilon$ -Modell und Logarithmisches Wandgesetz

Der Ansatz für die Berechnung der Wirbelviskosität lautet:

$$\mu_t = \rho_f * C_\mu * \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.9)$$

Hierbei beschreibt  $k$  die turbulente kinetische Energie, welche in den Wirbeln vorhanden ist. Im Gegensatz dazu beschreibt  $\epsilon$  die turbulente Dissipation, welche den turbulenten Zerfall durch Reibung beinhaltet. Durch den zusätzlichen Transport der beiden Größen durch das Strömungsfeld, müssen zwei weitere Transportgleichungen berücksichtigt werden. Zum einen für die turbulente kinetische Energie

$$\begin{aligned} \rho_f * \frac{\partial k}{\partial t} + \rho_f * \tilde{u}_j * \frac{\partial k}{\partial x_j} = \mu_t * \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} * \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial x_j} * \left( \mu_f * \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} * \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) - \rho_f * \epsilon \end{aligned} \quad (5.10)$$

und zum anderen für die Dissipation:

$$\begin{aligned} \rho_f * \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho_f * \tilde{u}_j * \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} * \frac{\epsilon}{K} * \mu_t * \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} * \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial x_j} * \left( \mu_f * \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} * \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 2} \rho_f * \frac{\epsilon^2}{K} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Durch die zusätzlichen Transportgleichungen erhöht sich der Rechenaufwand. Eine Möglichkeit diesen in Grenzen zu halten, ist die Unterteilung der Umströmung eines Körpers in verschiedene Schichten, welche unabhängig voneinander modelliert werden können. Dies ist zum einen die viskose Unterschicht, welche die wandnähste Schicht ist, der wandnahe Bereich und zuletzt die turbulente Außenströmung. Diese Unterteilung hat den Vorteil, dass das Netz in der Nähe des Randes nicht zu fein gewählt werden muss, um die hohen Gradienten der Strömungsgrößen darzustellen. Um den wandnahen Bereich zu modellieren kann das logarithmische Wandgesetz gewählt werden, welches auch im vorliegenden Modell Anwendung findet. Dieses besagt, dass die turbulenten Schwankungen mit zunehmendem Abstand zur Wand ebenso zunehmen. Löst man die Reynold-Gleichungen analytisch für einfache Strömungen, erhält man das logarithmische Wandgesetz [32]

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} * \ln y^+ + C \quad (5.12)$$

wobei

$$\kappa = 0.41 \quad , \quad C = 5.5$$

$$u^+ = \frac{\tilde{u}}{u_\tau} \quad , \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho_f}} \quad , \quad y^+ = \frac{z_w * u_\tau}{\nu}$$

wobei  $\kappa$  die von Kármán-Konstante und  $C$  eine Integrationskonstante bezeichnet.  $\tau_W$  beschreibt die mittlere Wandschubspannung,  $z$  den Wandabstand und  $u_\tau$  die Wandschubspannungsgeschwindigkeit. Dabei unterliegt es folgenden Beschränkungen. Für die Modellierung der viskosen Unterschicht kann ein linearer Zusammenhang zwischen Wandabstand und Geschwindigkeit in Strömungsrichtung angegeben werden:

$$u^+ = y^+ \quad (5.13)$$

Dies besagt, dass die Geschwindigkeit in unmittelbarer Wandnähe proportional zum Wandabstand ist, da an der Wand Haftbedingungen gelten ( $u, v=0$ ) und die turbulenten Schwankungen ebenso vernachlässigbar sind. Der dimensionslose Wandabstand ist dabei definiert als

$$y^+ = \frac{z * u_\tau}{\nu}$$

Das logarithmische Wandgesetz ist gültig für  $30 < y^+ < 100$ .

### 5.1.5 Netzgenerierung

Für die Diskretisierung werden im Innern und am Rande des Rechengebietes räumliche Stützstellen, auch Diskretisierungspunkte, Knoten oder Netzpunkte genannt, festgelegt. All diese Stützstellen zusammen bezeichnet man als numerisches Netz oder Gitter [32]. Dabei unterscheidet man zwischen strukturierten und unstrukturierten Gittern. Ein Spezialfall des strukturierten Netzes ist das blockstrukturierte Netz, auf welches im folgenden näher eingegangen werden soll.

- **Strukturierte Netze**

Unter einem strukturierten Netz versteht man ein geordnetes Netz, worin alle Zellen mit Hilfe eines einzigen Indextripels  $i, j, k$  erfasst werden können. Das einfachste strukturierte Netz ist das kartesische Netz, bei dem die Zellen in alle Richtungen gleich groß sind. Die Implementierung dieser Netze hat den Vorteil von geringerer Speicherbelegung, schnelleren Rechenzeiten sowie einer höheren Genauigkeit. Nachteil ist der hohe zeitliche Aufwand bei der Netzerstellung und sie sind nur für relativ einfache Geometrien einsetzbar.

- **Blockstrukturierte Netze**

Um die Vorteile von strukturierten Netzen auch bei komplizierteren Geometrien nutzen zu können, werden einzelne Regionen der Geometrie in sogenannte Blöcke zusammengefasst. Jeder dieser Blöcke kann durch ein lokales Koordinatensystem beschrieben werden, was eine beliebige Verfeinerung der Zellen entlang einer Koordinate erlaubt. Dadurch kann etwa ein Netz in Richtung eines Randes beliebig verfeinert werden, was z.B. eine hohe Auflösung der Grenzschicht zulässt, bei der hohe Gradienten auftreten können. Es ist darauf zu achten, dass die Randpunkte verschiedener Blöcke zusammenpassen, um Informationsverluste zu vermeiden.

- **Unstrukturierte Netze**

Bei einem unstrukturiertem Netz sind die räumlichen Stützstellen ungeordnet im Raum verteilt, wobei sie stets in Dreieckselementen zusammengefasst werden [33]. Jedem Elemente werden lokale Knotennummern zugewiesen, wobei diese wiederum mit globalen Knotennummern in Verbindung stehen. Somit stehen die einzelnen Elemente miteinander in Verbindung. Die Einsatzgebiete der unstrukturierten Netze sind komplizierte Geometrien, wobei sie sich durch ihre Flexibilität und Anpassungsfähigkeit auszeichnen. Eine Verfeinerung des Netzes an Stellen hoher Gradienten ist beliebig durchführbar. Nachteile sind der hohe Speicherplatzbedarf und die hohe Ungenauigkeit.

### 5.1.6 Randbedingungen

Nach der Erstellung eines Netzes müssen Randbedingungen auf jede freie Zelloberfläche gelegt werden. Hierfür werden drei verschiedene Typen von Randbedingungen verwendet.

- **Haftrandbedingungen:**

Diese Randbedingungen besagen, dass alle auftretenden Geschwindigkeiten direkt an der Wand gleich null gesetzt werden.

- **Symmetrierandbedingungen:**

Diese Randbedingungen lassen keine Geschwindigkeiten normal zu einer Symmetrieebene zu. Sie dürfen dann verwendet werden, wenn die Strömungsstruktur eine Symmetrieebene aufweist und von keinem Massenaustausch quer zur Symmetrieebene auszugehen ist.

- **Zyklische Randbedingungen:**

Bei zyklischen Randbedingungen werden festgelegte Zellpaare am Einström- und am Ausströmrand bestimmt, auf denen die Strömungsvariablen gleich sind. Dieser Vorgang wird im Allgemeinen als Matchen bezeichnet. Dies bedeutet, dass etwa die Geschwindigkeit an einer bestimmten Zelle am Ausströmrand gleich der Geschwindigkeit an einer festgelegten Zelle am Eintrittsrand ist. Gegebenenfalls kann auch eine Variable (z.B. Druck) mit einem bestimmten Offset belegt werden, vgl. Kapitel 5.2.4.

### 5.1.7 Lösungsverfahren

Die numerische Strömungsmechanik verwendet partielle gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche zur Berechnung der Strömung diskretisiert werden müssen. Diese Überführung wird als Diskretisierung bezeichnet. Die Änderungen der Variablen werden somit nicht mehr kontinuierlich in Zeit und Raum ausgedrückt, sondern nur in diskreten Punkten des Rechnernetzes an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit. Der Verlauf zwischen zwei Zeitpunkten wird approximiert.

Für die Diskretisierung im Raum gibt es mehrere Möglichkeiten, wie etwa die Finite Differenzen Methode, die Finite Volumenmethode oder die Methode der Finiten Elemente. Im weiteren Verlauf werden die folgenden zwei Verfahren verwendet:

- **Das Finite Volumen Verfahren (Star-CD):**

Die zugrunde liegenden Differentialgleichungen werden mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes über das gesamte Strömungsgebiet integriert. Dies bedeutet, dass für jede Zelle des gesamten Netzes das Volumenintegral in sechs Oberflächenintegrale umgewandelt wird und sich die Ordnung der Differentialquotienten um eins reduziert. Diese so erhaltenen Differentialgleichungen können nun mit einem Zeitintegrationsverfahren berechnet werden. Für die Berechnung der Modellkoeffizienten wurde das Crank-Nicolson Verfahren, und für die räumliche Diskretisierung wurde das auf der Finiten-Volumen Methode basierende Verfahren QUICK gewählt.

– **Das Crank-Nicolson Verfahren:**

Das Crank-Nicolson Verfahren ist ein zeitliches Diskretisierungsverfahren zweiter Ordnung. Es ist ein zentrales Differenzenverfahren, was bedeutet, dass die Berechnung des Ergebnisses aus alten und neuen Zeitschritten gewonnen wird. Das Verfahren ist implizit und somit sehr stabil und zusätzlich genauer.

– **Das QUICK-Verfahren:**

Das QUICK-Verfahren (Quadratic Upstream Interpolation of Convective Kinematics) ist ein Diskretisierungsansatz dritter Ordnung. Es legt eine Parabel durch zwei Punkte stromauf und einen Punkt stromab, um den Wert zu interpolieren. Es ist sehr genau und zusätzlich stabil. Der Berechnungsaufwand ist dagegen höher.

• **Die Methode der Finiten Elemente (Comsol):**

Bei der Methode der Finiten Elemente wird der Verlauf der Variablen in den Elementen zwischen den räumliche Stützstellen mit Hilfe von sogenannten Formfunktionen approximiert. Die zugrunde liegenden Differentialgleichungen werden z.B. mit Hilfe des Verfahrens mit konjugierten Gradienten (CG-Verfahren) oder des Galerkin Verfahrens näherungsweise gelöst.

### 5.1.8 Courantbedingung für instationäre Rechnungen

Die Stabilität eines Lösungsverfahrens, wie etwa dem Crank-Nicolson Verfahren, unterliegt der Courant-Friedrich-Lewy(CFL)-Bedingung [11]

$$c = \frac{u * \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.14)$$

wobei  $c$  die Courant Zahl,  $\Delta t$  der diskrete Zeitschritt und  $\Delta x$  die mittlere Zellweite ist. Diese Bedingung besagt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur so groß sein darf, dass ein Teilchen in einem bestimmten Zeitschritt nur eine Zelle weiterfließen darf, also keine Informationen verloren gehen und somit Resultate verfälscht werden. Deshalb muss immer gewährleistet sein, dass  $c \leq 1$ .

## 5.2 Berechnung der Modellkoeffizienten

Die nun folgenden Berechnungen werden mit Hilfe der CFD-Software STAR-CD durchgeführt. Dies ist ein leistungsfähiges Finite-Volumen-Programmpaket zur Lösung von strömungsmechanischen Problemen. Über die Berechnung der Koeffizienten mit Druckverlustkorrelationen kann das Spektrum der Reynoldszahlen sowohl in radialer, als auch in axialer Richtung, wiedergegeben werden. Dieses liegt im vollturbulenten Bereich für Rohrströmungen und somit können die laminaren Anteile der Gleichungen 4.9 und 4.11 vernachlässigt werden. Dadurch reduzieren sich diese für die Berechnung der Koeffizienten in radialer und axialer Richtung auf

$$\nabla p = \vartheta_1 * u^2 \quad \text{mit} \quad \vartheta_1 = c_{21} \rho_f \quad (5.15)$$

und

$$\nabla p = \vartheta_2 * w^2 \quad \text{mit} \quad \vartheta_2 = c_{23} \rho_f \quad (5.16)$$

Im folgenden werden nun die Austrittsgeschwindigkeiten für einen vorgegebenen Druckverlust mit Hilfe der Simulationssoftware für beide Fälle bestimmt. Beide Berechnungen werden auf dem gleichen Netz, jedoch mit unterschiedlichen Randbedingungen durchgeführt. Zunächst soll aber auf die Geometrie des Berechnungsgebietes eingegangen werden.

### 5.2.1 Geometrie

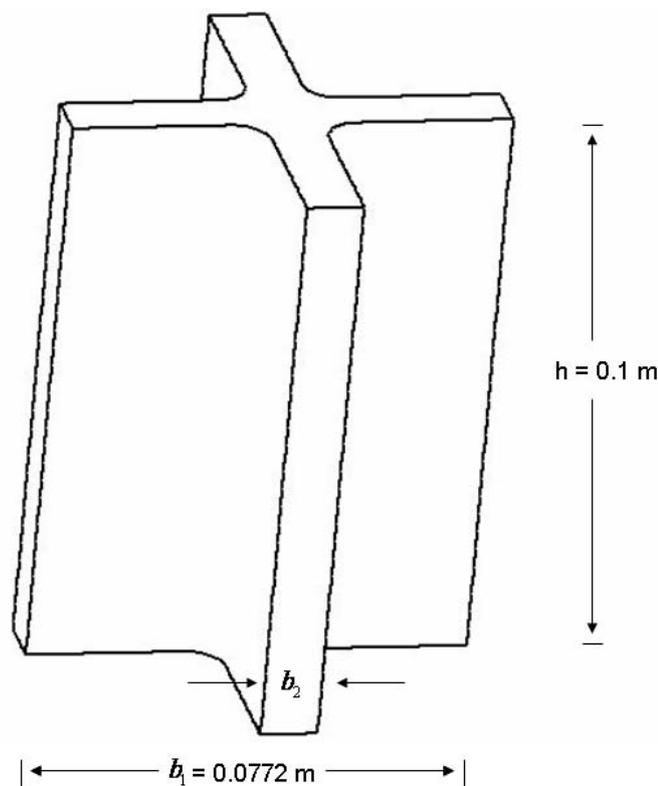


Abbildung 5.1: Geometrie des Spaltes

Um die Austrittsgeschwindigkeiten zu bestimmen wurde ein Spalt zwischen vier Brennelementen mit einer Höhe von  $h = 100 \text{ mm}$  und einer Gesamtbreite von  $b_1 = 77.2 \text{ mm}$  gewählt. Der Spalt hat dabei eine Breite von  $b_2 = 10 \text{ mm}$ .

### 5.2.2 Netzgenerierung

Für das vorliegende Modell wird ein blockstrukturiertes Netz verwendet. Dafür werden zunächst Knoten generiert, welche eine Punktwolke bilden, die anschließend mit sogenannten Splines verbunden werden. Des Weiteren wird das Gebiet mit Hilfe von Blöcken unterteilt, um ein möglichst homogenes Netz zu generieren, vgl. Abbildung 5.2, und den Vorteil der lokalen Verfeinerung des Netzes auszunutzen.

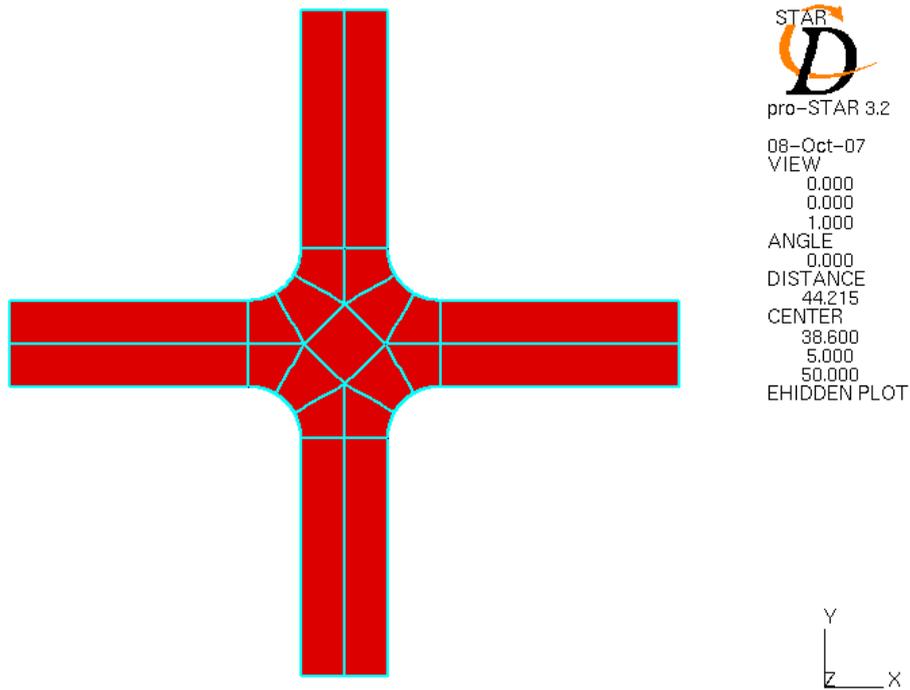


Abbildung 5.2: Blockstruktur des Netzes

In Abbildung 5.3 ist das fertige Netz in der Draufsicht dargestellt und die durchgeführte Verfeinerung in Richtung des Randes deutlich erkennbar.

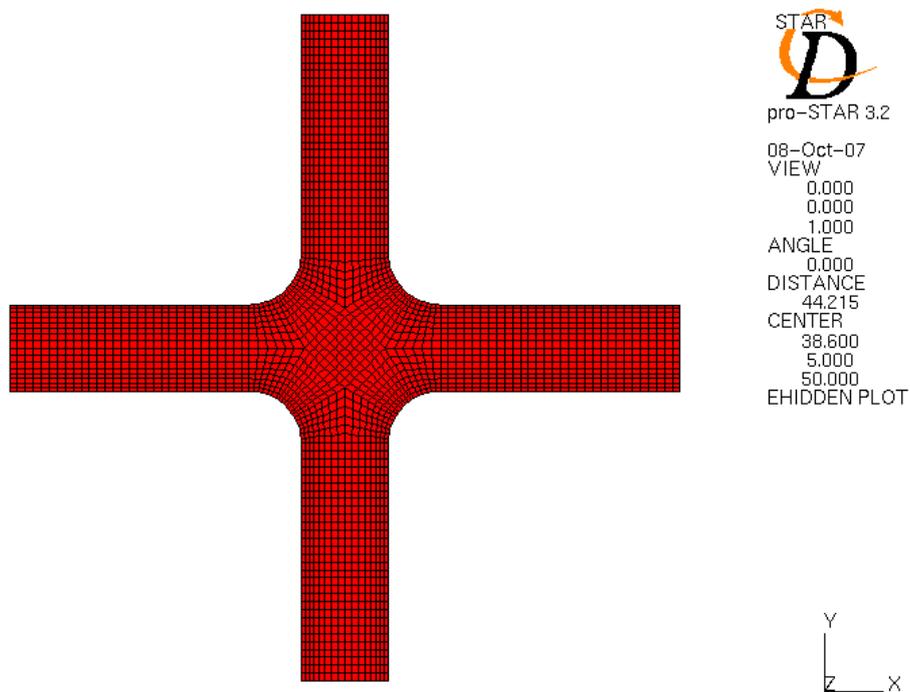


Abbildung 5.3: Generiertes strukturiertes Netz (Draufsicht)

Bei genauem Betrachten sind noch die Blöcke zu erkennen, in die die Geometrie vorher eingeteilt wurde. Eine ausreichende Verfeinerung in Richtung Wandnähe ist nötig, um die Grenzschicht aufzulösen und die Wandreibungsverluste richtig wiedergeben zu können. Die Zellgröße in axialer Richtung bleibt hingegen, wie in 5.4 gezeigt, konstant.

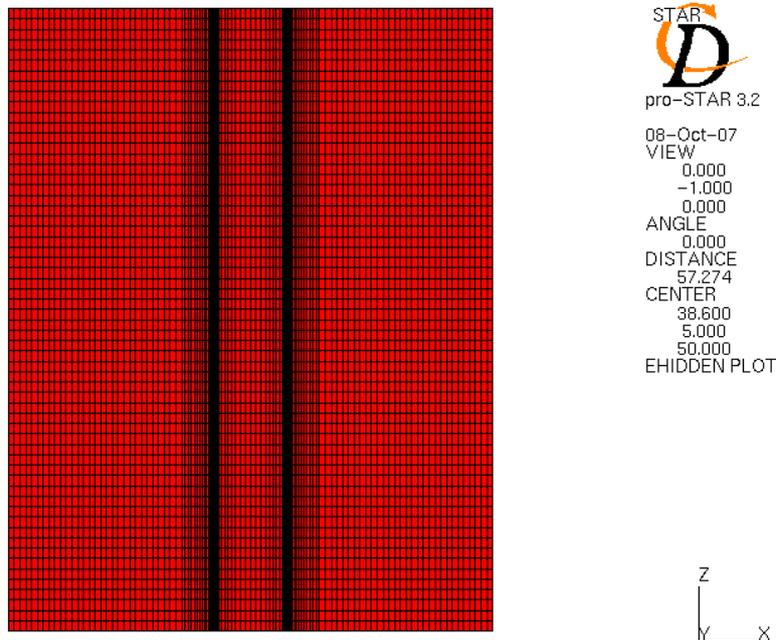


Abbildung 5.4: Generiertes strukturiertes Netz (Seitenansicht)

Insgesamt besteht das Netz aus 21 Blöcken und 157440 Zellen.

### 5.2.3 Eigenschaften des Fluids

Das hier verwendete Fluid ist Wasser bei einer konstanten Temperatur von 280°C und einem Druck von 25 MPa. Die wichtigsten Parameter dabei sind

$$\rho_f = 776.993 \frac{kg}{m^3} \quad (5.17)$$

$$\mu_f = 99.110 * 10^{-6} \frac{kg}{m \cdot s} \quad (5.18)$$

$$C_p = 4911 \frac{J}{kg \cdot K} \quad (5.19)$$

$$\lambda_f = 0.610735 \frac{W}{m \cdot K} \quad (5.20)$$

Die molekulare Masse beträgt dabei  $18 \frac{kg}{kmol}$ . Da die CFD-Berechnungen isotherm durchgeführt werden, treten keine Auftriebseffekte auf.

### 5.2.4 Berechnung des turbulenten Koeffizienten in Querrichtung

Wie bereits erwähnt ist der Koeffizient  $c_{21}$  abhängig von der Geschwindigkeit. Mit Hilfe des Ansatzes von Gleichung 5.15 werden zyklische Druckrandbedingungen, welche im folgenden

Unterkapitel näher erläutert werden, vorgegeben um die jeweilige Austrittsgeschwindigkeit zu ermitteln. Somit kann nun eine Funktion bestimmt werden, die den Verlauf des Koeffizienten abhängig von der Geschwindigkeit beschreibt.

### Randbedingungen

Zunächst werden alle Brennelementkastenwände mit Haftbedingungen belegt, vgl. Kapitel 5.1.6. Wird, wie im vorliegenden Modell, ein Turbulenzmodell verwendet, wird für die wandnächste Schicht eine Wandfunktion eingesetzt, die den Übergang von der Haftbedingung an der Wand zur turbulenten Strömung im Rechengebiet überbrückt und die Grenzschicht annähert.

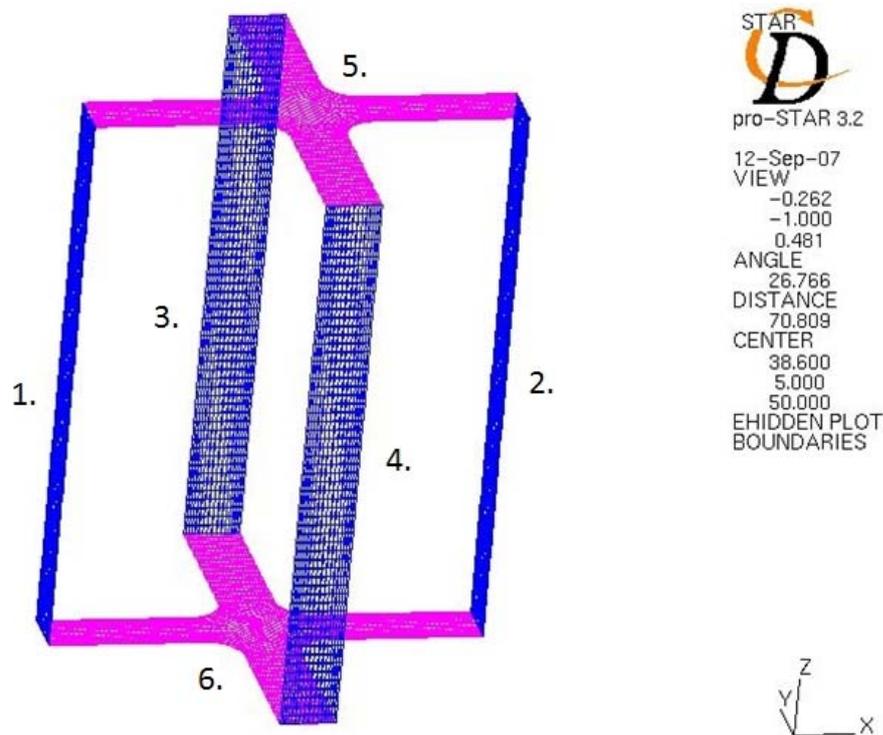


Abbildung 5.5: Randbedingungen

Für die Berechnung des Koeffizienten  $c_{21}$  soll reine Querströmung vorliegen und sich ein Strömungsfeld für eine vorgegebene Druckdifferenz einstellen. Somit werden an den Rändern 1. und 2., siehe Abbildung 5.5, zyklische Druckrandbedingungen gewählt. Star-CD bezeichnet diese auch als "partiell zyklisch", da nicht alle Variablen, wie etwa Druck, auf beiden Rändern identisch sind. Dieser unterscheidet sich durch eine feste Differenz.

An den Rändern 3. und 4. werden ebenfalls zyklische Randbedingungen festgelegt, aber alle Variablen werden hier auf beiden Rändern als identisch angenommen. Zuletzt werden symmetrische Randbedingungen für die Grenzen 5. und 6. gewählt, da reine Querströmung vorliegt.

Im folgendem werden also Druckdifferenzen an den Rändern 1. und 2. vorgegeben und die jeweiligen Geschwindigkeitsfelder hierfür berechnet. Eine geeignete Wahl sind Druckverluste von 2-90 Pa, da sie ein großes Spektrum des interessierenden Geschwindigkeitsfeldes wiedergeben. Dadurch kann, wie in Gleichung 5.15 zu sehen, die Funktion für  $c_{21}$  in Abhängigkeit der volumetrischen Geschwindigkeit bestimmt werden.

Als Anfangsbedingungen wurden folgende Werte gewählt:

$$\begin{aligned} u_f &= 0.1 \text{ m/s} \\ v_f, w_f &= 0 \text{ m/s} \\ p &= 0 \text{ Pa} \\ T &= 293 \text{ K} \end{aligned}$$

### Auswertungselemente

Wie nach den ersten Berechnungen zu erkennen war, musste ein transienter Lösungsansatz gewählt werden, da bei ersten stationären Lösungsansätzen Tendenzen für ein Fließen der Strömung u.a auch in  $y$ -Richtung zu erkennen waren. Für die zeitliche Diskretisierung wurde das Crank-Nicholson Verfahren gewählt, das in [45] und in Kapitel 5.1.7 näher beschrieben wird. Als Lösungsmodell wurde das Diskretisierungsverfahren QUICK gewählt. Das für beide Berechnungen verwendete Turbulenzmodell ist ein  $k$ - $\epsilon$ -Modell für hohe Reynoldszahlen zweiter Ordnung [2]. Außerdem wurde jeweils ein Vermischungsfaktor (Blending Factor) von 1 angenommen. Um die Stabilität des Algorithmusses zu gewährleisten, wurde, die angenommene Zeitschrittweite mit Hilfe der Courant-Friedrichs-Levy (CFL)-Bedingung [11]

$$c = \frac{u * \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.21)$$

bestimmt, vgl. Kapitel 5.1.8. Der mittlere Zellbreite der Zellen in radialer Richtung beträgt dabei  $0.92 \text{ mm}$ . Da, wie spätere Berechnungen des Spaltwassers und für die vorliegenden Druckverluste, die maximale volumetrische Quergeschwindigkeit den Wert von  $0.2 \text{ m/s}$  nicht überschreitet, wird zur Sicherheit eine maximale Quergeschwindigkeit von  $0.3 \text{ m/s}$  angenommen. Daraus folgt für die Berechnung des diskreten Zeitschritts mit einer Obergrenze von  $c = 1$

$$\Delta t = \frac{0.92 \text{ mm}}{300 \text{ mm/s}} = 0.003066 \text{ s} \quad (5.22)$$

Da die Courant Zahl immer kleiner 1 sein muss, wird der diskrete Zeitschritt, mit dem die Berechnungen durchgeführt werden sollen mit einem Wert von  $\Delta t = 0.002 \text{ s}$  festgelegt.

### Berechnung und Auswertung

Die Auswertung der Geschwindigkeiten am Austritt erfolgt für eine gegebene Druckdifferenz in einem Zeitfenster von 36 Sekunden, bzw. 9 Zeitschritten zu je 4 Sekunden. Dabei erfolgt eine Ausgabe dieser Geschwindigkeiten alle 0.02 Sekunden. Es werden somit 18000 Zeitschritte mit 1800 Ausgaben bestimmt.

Nach der Berechnung werden die Geschwindigkeiten für die jeweilige Zelle am Austritt gemittelt angegeben. Um eine mittlere Geschwindigkeit über den gesamten Austritt zu bestimmen, werden die Geschwindigkeiten der einzelnen Zellen über das Volumen gemittelt, da dieses in jeder Zelle unterschiedlich ist. Somit erhält man pro Zeitschritt eine gemittelte Austrittsgeschwindigkeit. Die Zeitabhängigkeit der Austrittsgeschwindigkeiten soll am Beispiel einer Druckdifferenz von 30 Pa gezeigt werden.

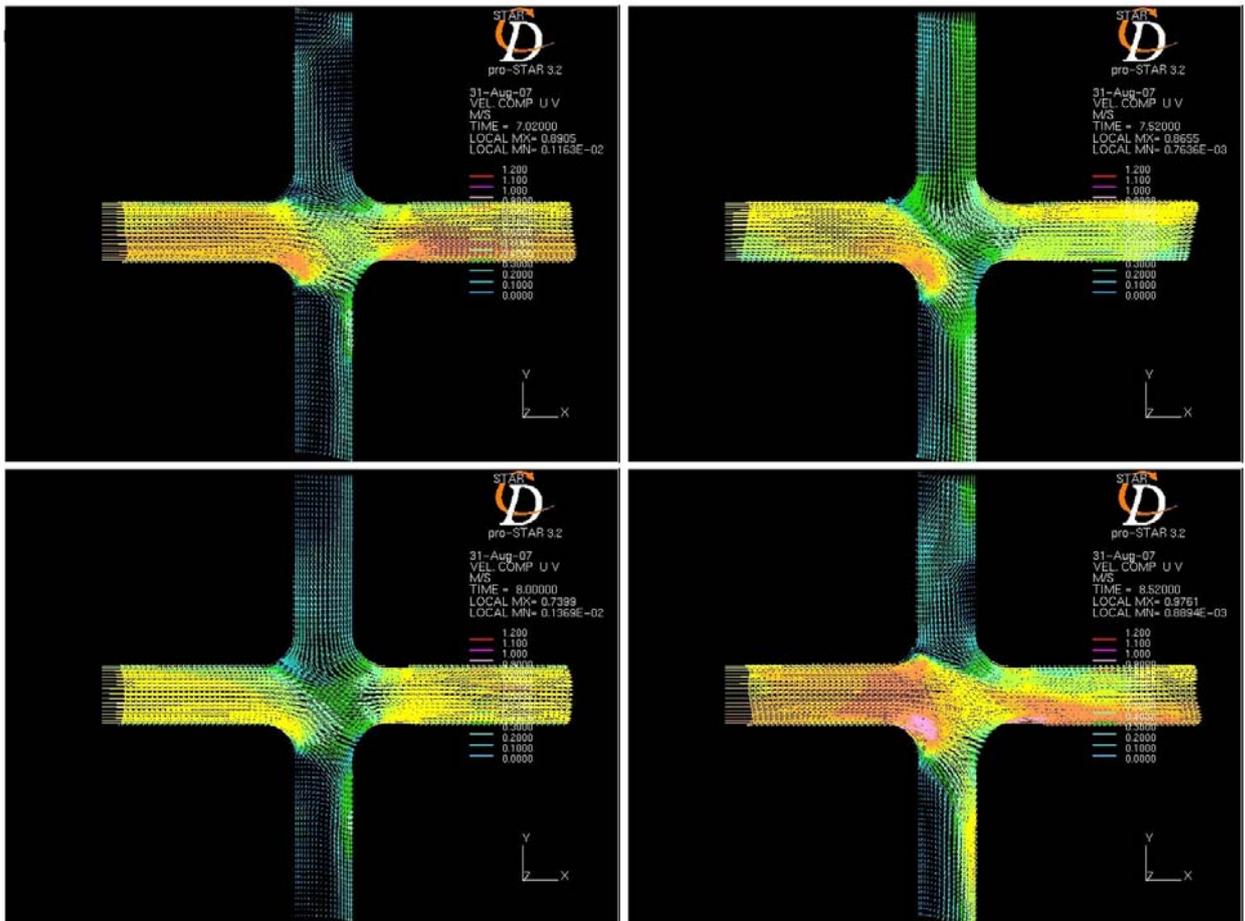


Abbildung 5.6: Strömungszustände für reine Querströmung für  $t=7s$ ,  $t=7.5s$ ,  $t=8s$ ,  $t=8.5s$

In dieser Zusammenstellung von vier Strömungszuständen im Zeitraum von 1.5 Sekunden ist die Zeitabhängigkeit deutlich zu erkennen. Dabei wurde das erste Bild 7 Sekunden nach Beginn der Berechnung aufgenommen. Die folgenden jeweils 0.5 Sekunden später. Im ersten Bild links oben ist die Austrittsgeschwindigkeit relativ hoch. Wie hier schon zu erahnen ist, prallt ein Teil der Strömung an die Wand der Brennelemente und verursacht einen Fluss quer zur Hauptströmungsrichtung. Diese variiert mit der Zeit und verursacht somit die bereits erwähnten Unterschiede in der Austrittsgeschwindigkeit, was die vermutete Wahl eines transienten Ansatzes rechtfertigt. Im nächsten Bild rechts oben ist die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung etwas geringer, jedoch der Fluss in y-Richtung hat stark zugenommen. Nach einem Abflachen der Strömungsintensität in der Abbildung links unten, nimmt sowohl die Ausströmgeschwindigkeit als auch der Fluss quer zur Hauptströmungsrichtung wieder deutlich zu, was in der Abbildung rechts unten zu sehen ist. Dieser Verlauf ist typisch für jede angenommene Druckdifferenz.

Dabei ist die Rate der Geschwindigkeitsänderungen, vgl. Abbildung 5.7, die die Intensität der Geschwindigkeitsänderungen erfasst, in allen Richtungen sehr schwankend. Ein Beobachten der Geschwindigkeiten an einer Kontrollzelle, vgl. Abbildung 5.8, spiegelt diese Erkenntnisse exakt wieder. Diese liegt ungefähr in der Mitte des betrachteten Spaltes. Die Änderungen der gemittelten Austrittsgeschwindigkeiten über die gesamten 36 Sekunden bei der vorgegebenen Druckdifferenz von 30 Pa ist dem folgenden Diagramm 5.9 zu entnehmen.

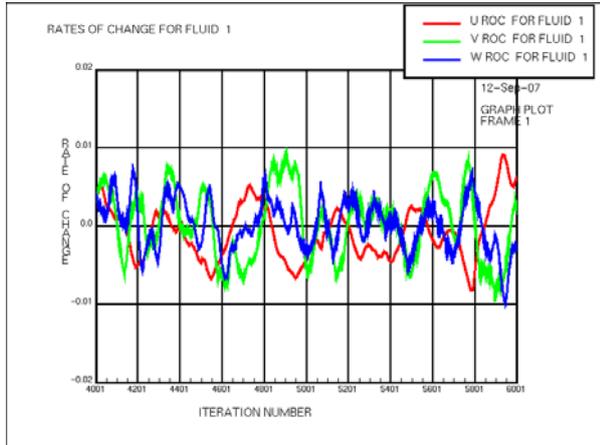


Abbildung 5.7: Änderungsrate der Geschwindigkeiten

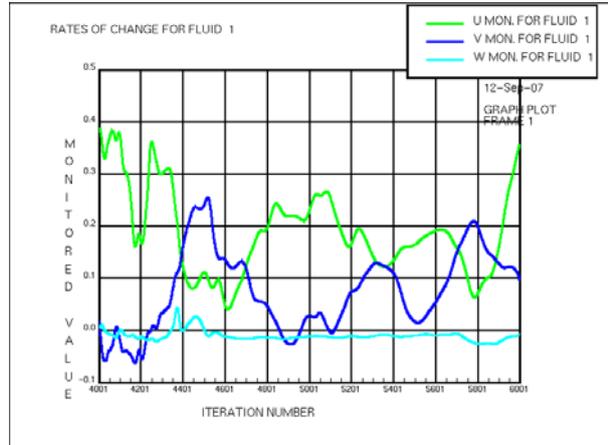


Abbildung 5.8: Geschwindigkeiten an Kontrollzelle

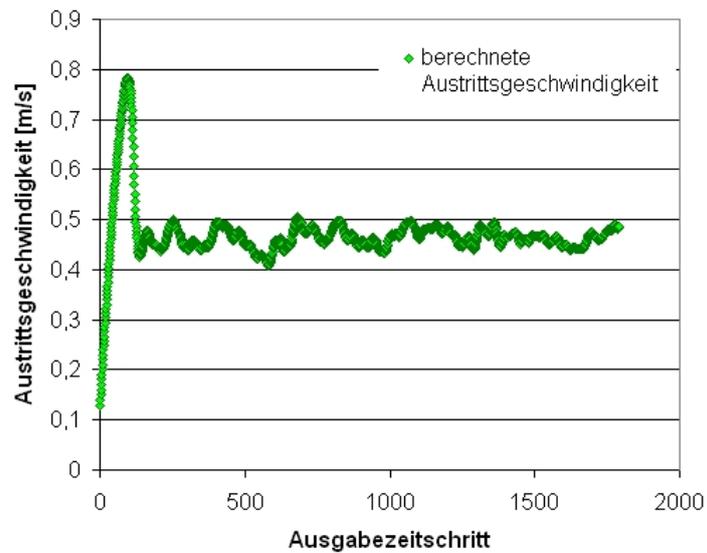


Abbildung 5.9: Geschwindigkeiten am Austritt

Diese Austrittsgeschwindigkeiten werden zum Schluss über die Gesamtzahl der Ausgabezeitschritte, also 1800, gemittelt. Somit erhält man eine gemittelte Geschwindigkeit, die für die Berechnung des Koeffizienten eingesetzt wird. Die Verteilung der  $y^+$ -Werte der wandnächsten Knotenpunkte des Gitters bei einer Druckdifferenz von 30 Pa entspricht dabei den geforderten Grenzen von  $30 \leq y^+ \leq 100$ , siehe Abbildung 5.10.

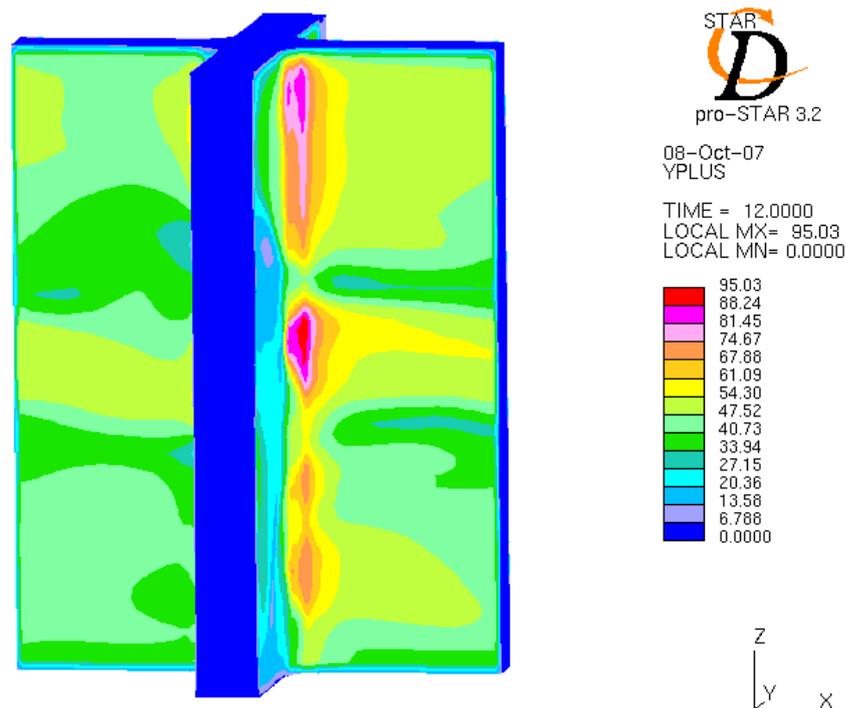


Abbildung 5.10:  $y^+$  Verteilung bei einer Druckdifferenz von 30 Pa nach 12 Sekunden

Das Verfahren wird nun mit mehreren Druckdifferenzen wiederholt. Somit erhält man eine Verteilung von volumetrischer Geschwindigkeit zu vorgegebenem Druckverlust.

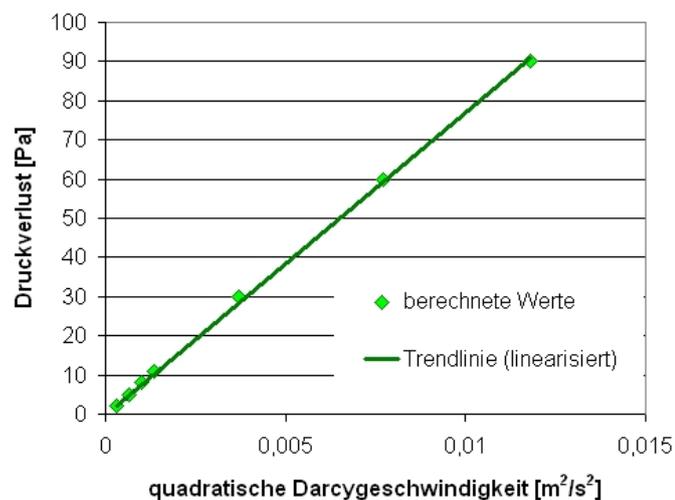


Abbildung 5.11: Abhängigkeit des Druckverlustes der Querströmung von der quadratischen Darcygeschwindigkeit

Man entnimmt dem Diagramm einen linearen Verlauf der quadratischen volumetrischen Geschwindigkeit über der Druckdifferenz. Die Gerade geht durch den Nullpunkt und somit kann nach Gleichung 5.15  $\vartheta_1$  als Steigung der Geraden  $\Delta p = 7699.1 u^2$  betrachtet werden. Folglich kann der Koeffizient  $c_{21}$  als konstant angenommen und berechnet werden.

$$\Rightarrow c_{21} = 9,9088 \quad (5.23)$$

### 5.2.5 Vergleich Korrelation und Rechnung für den Modellkoeffizienten $c_{21}$

Vergleicht man die Ergebnisse der Berechnungen des Koeffizienten  $c_{21}$  der Korrelationen mit den Ergebnissen der CFD-Simulation so fällt auf, dass bei niedrigen Geschwindigkeiten die Werte sich deutlich unterscheiden. Dies ist auf die instationären Effekte zurückzuführen, da diese bei niedrigen Geschwindigkeiten verstärkt auftreten. Sie nehmen jedoch immer mehr ab und bei einer volumetrischen Geschwindigkeit von etwa 0.04 bis etwa 0.05  $m/s$  nehmen die Werte der Korrelation den gleichen Verlauf wie die Werte der CFD-Rechnung an. Der Unterschied beträgt dabei weniger als 10 %. Abbildung 5.12 zeigt diesen Verlauf für die berechneten Werte für den Koeffizienten  $c_{21}$ .

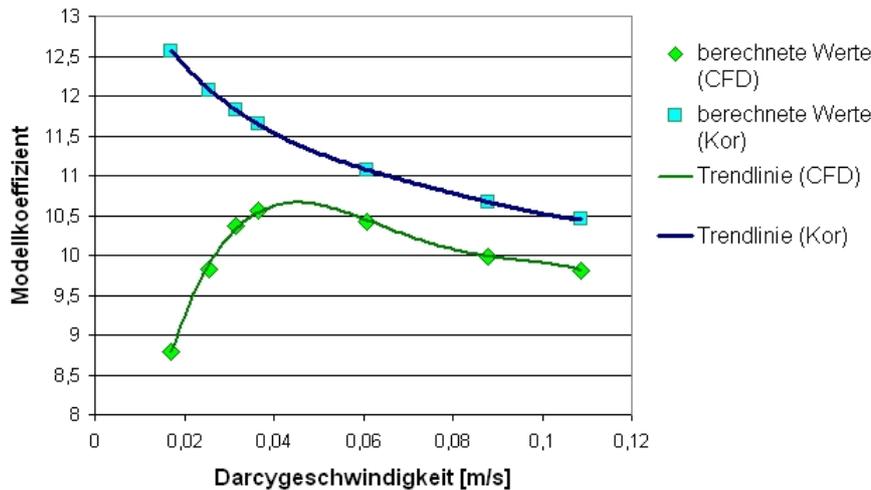


Abbildung 5.12: Vergleich der Werte der Koeffizienten in radialer Richtung

Die Gleichung für die berechneten Werte der CFD-Simulation lautet

$$c_{21} = -233148u^4 + 74393u^3 - 8539.2u^2 + 401.59u + 4.0579 \quad (5.24)$$

und die Gleichung für die berechneten Werte der Korrelation ist gegeben durch

$$c_{21} = 48737u^4 - 15359u^3 + 1861.6u^2 - 117.03u + 14.096 \quad (5.25)$$

### 5.2.6 Bestimmung des Koeffizienten $c_{23}$ der turbulenten axialen Strömung

#### Ansatz

Die Berechnung des Koeffizienten  $c_{23}$  erfolgt mit einem ähnlichen, aber stationären Ansatz. Dieser ist bestimmt durch die Gleichung 5.16

$$\nabla p = \vartheta_2 * w_f^2 \quad \text{mit} \quad \vartheta_2 = c_{23}\rho_f \quad (5.26)$$

#### Anfangs- und Randbedingungen

Es wurden Symmetrierandbedingungen für die Ränder 1. - 4. gewählt, und zyklische Druckrandbedingungen für die Ränder 5. und 6, vgl. Abbildung 5.5. Dabei wurden Druckdifferenzen von 1 - 15 Pascal vorgegeben und die Austrittsgeschwindigkeiten untersucht. Wiederum

entsprechen die Druckdifferenzen dem Geschwindigkeitsfeld von Interesse. Folgende Werte wurden als Anfangsbedingungen gewählt

$$\begin{aligned} u_f, v_f &= 0 \text{ m/s} \\ w_f &= -0,517 \text{ m/s} \\ p &= 0 \text{ Pa} \\ T &= 293 \text{ K} \end{aligned}$$

Dabei entspricht die Anfangsgeschwindigkeit  $w_f$  der von Vogt et al. [43] berechneten Eintrittsgeschwindigkeit des Moderatorwassers in den Spaltraum.

### Berechnung und Auswertung

Als Löser wurde wiederum das Diskretisierungsverfahren QUICK gewählt. Dabei wurde eine maximale Residuentoleranz mit  $1 \cdot 10^{-6}$  festgelegt. Falls dieser angegebene Toleranzwert erreicht ist, ist die Änderung der berechneten Größen so klein, dass die Iteration als konvergiert betrachtet wird. Die Anzahl der Iterationen wurde bei der ersten Druckdifferenz mit 5000 Iterationen vorgegeben und die berechneten Lösungen als Anfangsbedingungen für die nächste Rechnung einer neuen Druckdifferenz verwendet. Diese Lösungen konnten folglich mit einer geringeren Anzahl an Iterationen, insgesamt 3000 je Rechnung, bestimmt werden.

In der Abbildung 5.13 ist die Strömungsstruktur in axialer Richtung bei einer Druckdifferenz von 10 Pa in der Draufsicht dargestellt.

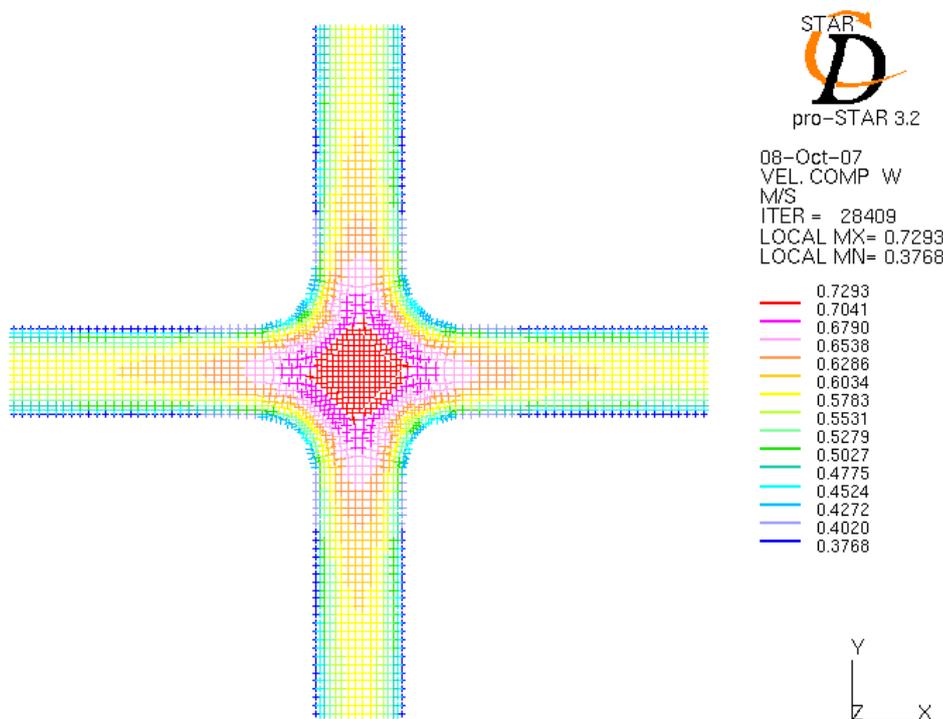


Abbildung 5.13: Strömungsstruktur in der Draufsicht

Es ist zu erkennen, dass die axiale Geschwindigkeit  $w_f$  in der Mitte der Kreuzung der Spalte am schnellsten ist und die Strömung sich in Wandnähe verlangsamt. Auch die Geschwindigkeit in Richtung Zentrum des Spaltes zwischen zwei Brennelementen nimmt deutlich

ab. In Strömungsrichtung ist dagegen keine Geschwindigkeitsänderung festzustellen. In radialer Richtung treten Sekundärströmungen auf, die sich an den Enden der Abrundungen der Brennelemente befinden. Diese treten bei jeder gewählten Druckdifferenz auf, sind aber am besten bei niedrigen Geschwindigkeiten zu erkennen, vgl. Abbildung 5.14 bei einer Druckdifferenz von 1 Pa.

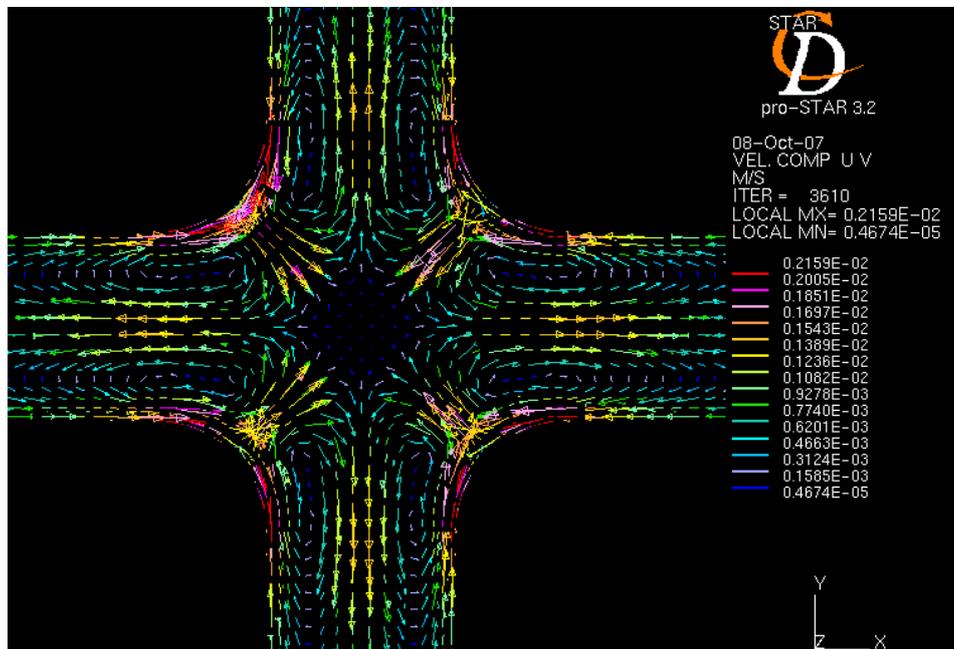


Abbildung 5.14: Sekundärströmungsstruktur im Spaltraum bei axialer Hauptströmung

Insgesamt konvergierte jede Rechnung für die gewählten Druckdifferenzen, was u.a. den beiden Abbildungen 5.15 und 5.16 für das Beispiel einer Druckdifferenz von 10 Pa, zu entnehmen ist.

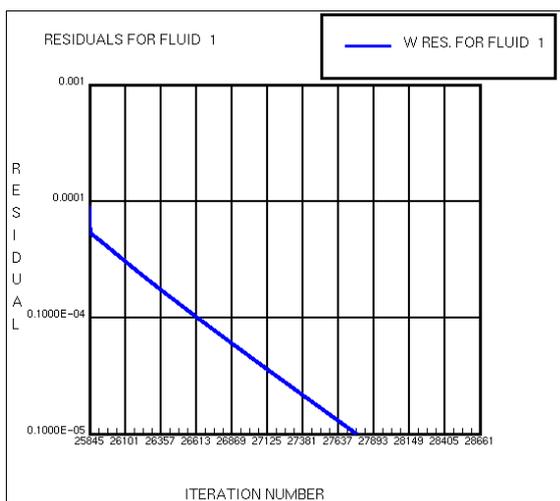


Abbildung 5.15: Residuum der axialen Geschwindigkeitskomponente

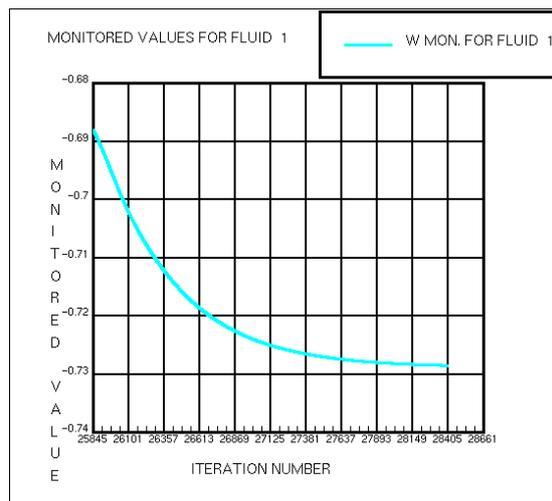


Abbildung 5.16: Geschwindigkeit an Kontrollzelle

Aus den Diagrammen ist zu entnehmen, dass der Wert für die Residuentoleranz vorzeitig erreicht wird und die Rechnung konvergiert. Die Änderung der Geschwindigkeit an einer

vorher festgelegten Kontrollzelle, die etwa in der Mitte der Kreuzung der Spalte liegt, ist somit vernachlässigbar.

Die  $y^+$ -Werte liegen ebenfalls im erlaubten Bereich, was Abbildung 5.17 verdeutlicht.

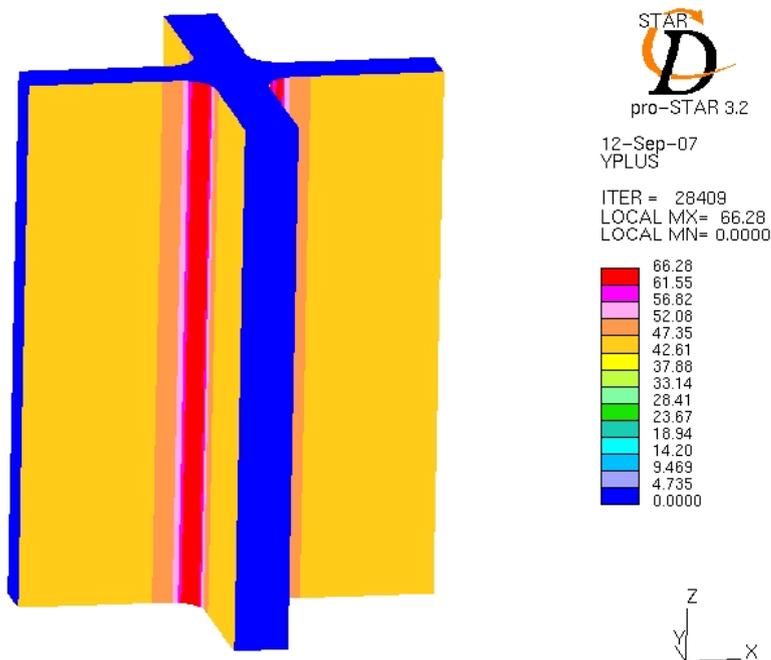


Abbildung 5.17:  $y^+$ -Verteilung

Eine Verteilung der volumetrischen Geschwindigkeit zu gegebenem Druckverlust entnimmt man Abbildung 5.18.

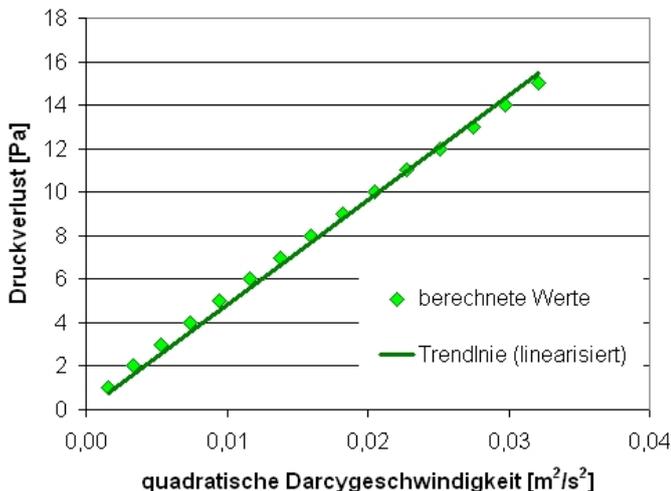


Abbildung 5.18: Abhängigkeit des Druckverlusts der turbulenten axialen Strömung von der quadratischen Darcygeschwindigkeit

Es ist wiederum ein linearer Verlauf zu erkennen und der Koeffizient kann wiederum als Steigung der Geraden  $\Delta p = 481.32 w^2$  interpretiert werden. Somit folgt für die Berechnung des Koeffizienten  $c_{23}$

$$\implies c_{23} = 0.6195 \tag{5.27}$$

### 5.2.7 Vergleich Korrelation und Rechnung für den Modellkoeffizienten $c_{23}$

Beim Vergleich der Werte des Koeffizienten  $c_{23}$  fällt auf, dass sie weitestgehend übereinstimmen und nur zu maximal 5 % voneinander abweichen, was die nachfolgende Abbildung belegt.

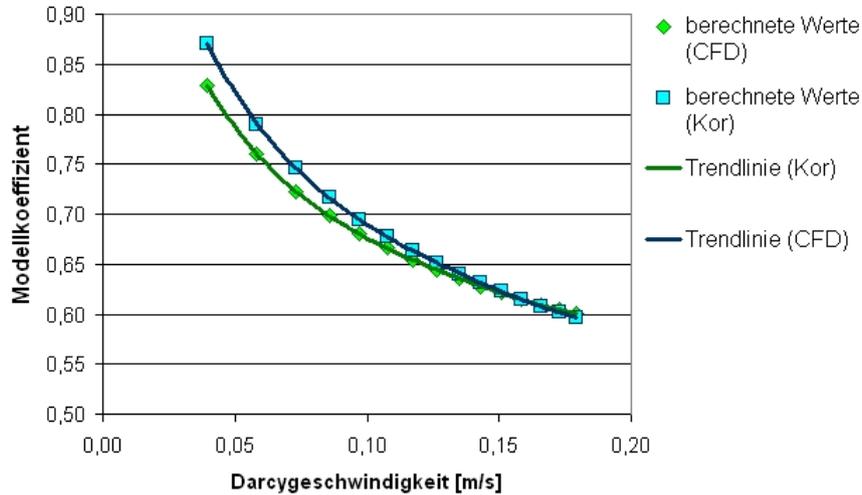


Abbildung 5.19: Vergleich der Werte der Koeffizienten in axialer Richtung

Die Gleichungen lauten

$$c_{23} = 662.19w^4 - 370.36w^3 + 81.143w^2 - 9.1591w + 1.0846 \quad (5.28)$$

für die CFD-Simulation und

$$c_{23} = 739.83w^4 - 416.65w^3 + 92.019w^2 - 10.55w + 1.1672 \quad (5.29)$$

für die Korrelation.

#### Fazit

Für die nachfolgenden Berechnungen der Strömungen im Reaktorkern mit Femlab werden die konstanten Werte der Koeffizienten  $c_{21}$  und  $c_{23}$  der CFD-Rechnung verwendet, bzw. die durch Druckverlustkorrelationen berechneten Werte der Koeffizienten  $c_{11}$  und  $c_{13}$ .

# Kapitel 6

## Analyse der Spaltströmung

Die Analyse der Spaltströmung wird mit Hilfe der Software Comsol durchgeführt. Sie dient zur Berechnung partieller Differentialgleichungen nach der Methode Finiter Elemente und ist dabei in vielen Bereichen einsetzbar, wie zum Beispiel in der Strömungsmechanik, Mikrosystemtechnik, Nanotechnologie, Biomedizin oder in den Geowissenschaften. Dabei können mit der "Multiphysics"-Anwendung mehrere physikalische Modelle beliebig gekoppelt werden. Dies ist ein großer Vorteil gegenüber anderen Simulationssoftwarepaketen, welcher auch in der vorliegenden Anwendung genutzt wird. Wie bereits erwähnt, soll die abwärtsgerichtete Strömung in den Spalten des SDWR untersucht und mögliche Naturkonvektion vorhergesagt werden. Dabei werden die Gleichungen für Impuls und Energie für ein poröses Medium gekoppelt und somit ein homogenes Strömungsfeld berechnet. Im folgenden soll nun untersucht werden, ab welcher Eintrittsgeschwindigkeit keine Naturkonvektion mehr eintritt.

### 6.1 Geometrie

Die Geometrie des Reaktors wird vereinfachend als zweidimensional und rotationssymmetrisch angenommen. Dies hat den Vorteil der Ersparnis von Rechenzeit, welche sich drastisch gegenüber einer 3-dimensionalen Geometrie reduziert. Der 2-dimensionale, rotationssymmetrische Schnitt durch den Kern des Reaktors (vgl. Abbildung 6.1), hat somit eine Breite von 1.25 m und eine Länge von 4.2 m. Die Geometriedaten des Brennelements können Abbildung 2.4 entnommen werden. Die wichtigsten Parameter werden im folgenden nochmals zusammengefasst:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 0.1295 \\ \varphi_3 &= 0.2475 \\ c_{11} &= 3.262 * 10^{-07} \\ c_{21} &= 9.9088 \\ c_{13} &= 4.029 * 10^{-07} \\ c_{23} &= 0.6195\end{aligned}$$

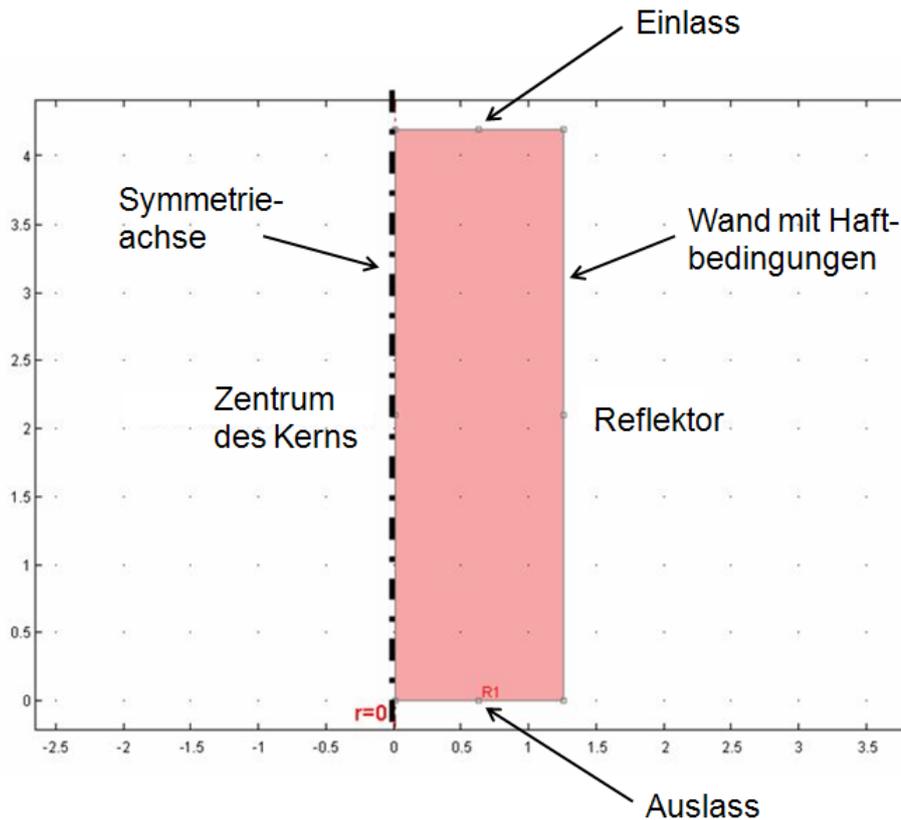


Abbildung 6.1: Geometrie des Kerns

## 6.2 Netzgenerierung

Das Netz ist ein automatisch generiertes, unstrukturiertes Dreiecksgitter, welches insgesamt aus 3210 Elementen besteht, vgl. Abbildung 6.2.

## 6.3 Gleichungssystem

Die in Kapitel 3 hergeleiteten Gleichungen werden in Zylinderkoordinaten transformiert und in Comsol implementiert. Dazu werden die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung in das vorgegebene Modell der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung, und die Energiegleichung in das Modell für Konvektion und Wärmeleitung eingebunden und umgewandelt. Hierzu wurde die bereits erwähnte "Multiphysics"-Anwendung genutzt, die eine Kopplung beider Modelle miteinander ermöglicht.

Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\rho_f (r * (u_r + v_z) + u) = 0 \quad (6.1)$$

$u_r$  ist dabei die Ableitung der volumetrischen Geschwindigkeit  $u$  nach  $r$ .

Die allgemeine Impulsgleichung wird mit Hilfe der Boussinesq Approximation umgeschrieben. Dies bedeutet, dass die Dichte nur im Auftriebsterm variabel und von der Temperatur abhängig ist. Alle anderen Größen, wie etwa Viskosität oder Wärmekapazität werden temperaturabhängig gewählt (siehe Kapitel 6.4). Die Impulsgleichungen in radialer und axialer

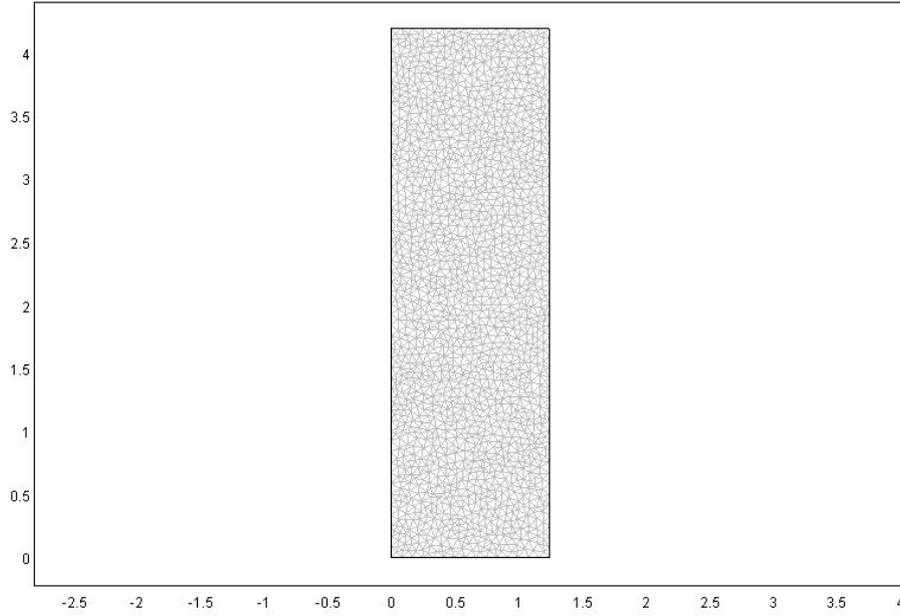


Abbildung 6.2: Netzstruktur

Richtung lauten

$$\frac{\rho_f r}{\varphi_1} u_t + \nabla * \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{p} * r}{\varphi_1} - \frac{2r\mu_f(T)u_r}{\varphi_1} \\ -\frac{r\mu_f(T)(u_z + v_r)}{\varphi_1} \end{array} \right] = \frac{p}{\varphi_1} - \frac{r\rho_f(u * u_r + v * u_z)}{\varphi_1^2} \quad (6.2)$$

$$- \frac{2\mu(T) * u}{\varphi_1 r} - \frac{r\mu_f(T) * u}{c_{11}} - c_{21} r \rho_f * u \sqrt{u^2 + v^2}$$

und

$$\frac{\rho_f r}{\varphi_3} v_t + \nabla * \left[ \begin{array}{c} -\frac{r\mu_f(T)(v_r + u_z)}{\varphi_3} \\ \frac{\bar{p} * r}{\varphi_3} - \frac{2r\mu_f(T)v_z}{\varphi_3} \end{array} \right] = -\frac{r\rho_f(u * v_r + v * v_z)}{\varphi_3^2}$$

$$- \frac{r\mu_f(T) * v}{c_{13}} - c_{23} r \rho_f * v \sqrt{u^2 + v^2} + r * g * (\rho_f - \rho_f(T)) \varphi_3 \quad (6.3)$$

Die Energiegleichung ist gegeben durch

$$r\rho_f C_p(T) * \bar{v}_t + \nabla * \left[ \begin{array}{c} r\varphi_3 \lambda_f(T) + rW' C_p(T) * T_r \\ -r\varphi_3 \lambda_f(T) * T_z \end{array} \right] = \quad (6.4)$$

$$r * \dot{Q}''' - r\rho_f C_p(T) * u * T_r - r\rho_f C_p(T) * v * T_z$$

Die Wärmequelle  $\dot{Q}'''$  muss vorgegeben werden, worauf in Kap. 6.5 näher eingegangen wird.

## 6.4 Stoffwerte für Wasser bei überkritischem Druck

Die folgenden Formeln wurden entwickelt, um die Temperaturabhängigkeit von Stoffwerten wie Dichte, Wärmeleitfähigkeit, Viskosität und Wärmekapazität bei numerischen Analysen einbeziehen zu können. Diese werden jeweils bei einem Druck von 250 bar über der Temperatur entwickelt. Dies geschah in Analogie zu Laurien [26], welcher die Stoffeigenschaften für einen Druck von 245 bar ermittelte, durch Anpassen der Koeffizienten. Als Basis dienen dabei die Stoffdaten von Wagner und Kruse [44].

### 6.4.1 Gebrauchsformel für die Dichte

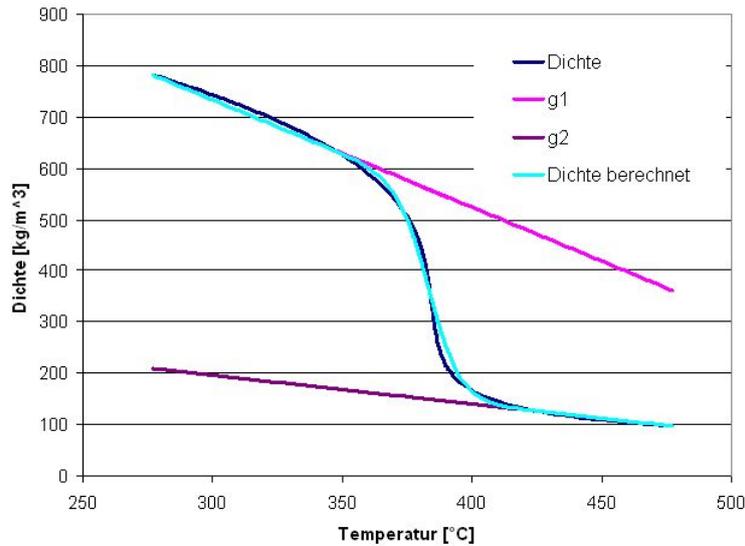


Abbildung 6.3: Dichte bei  $p = 250$  bar

$$\begin{aligned}
 \rho_f &= g_1 * f + g_2 * (1 - f) & (6.5) \\
 g_1 &= 781.725 + (634.909 - 781.725)/(347 - 277) * (T - 277) \\
 g_2 &= 124.963 + (97.051 - 124.963)/(477 - 427) * (T - 427) \\
 f &= 1/(1 + \text{Exp}((T - 384)/6))
 \end{aligned}$$

### 6.4.2 Gebrauchsformel für die Viskosität

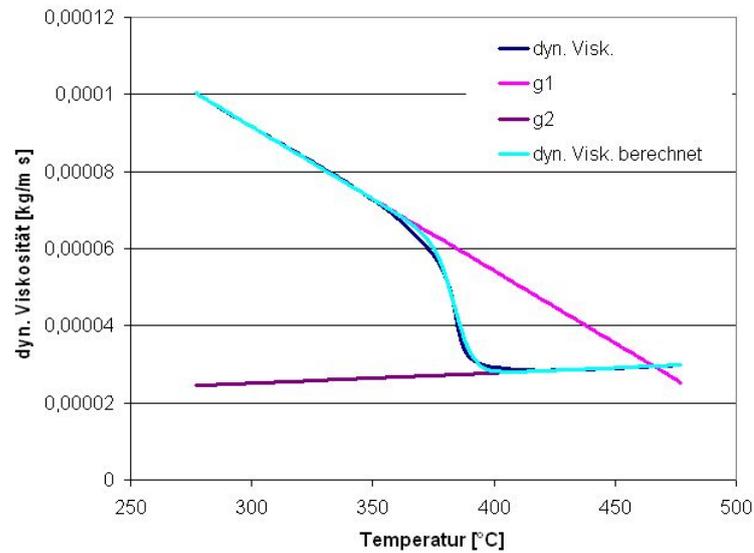


Abbildung 6.4: dynamische Viskosität bei  $p = 250$  bar

$$\begin{aligned} \mu_f &= g_1 * f + g_2 * (1 - f) & (6.6) \\ g_1 &= 0.000100276 + (0.000074047 + 0.000100276)/(347 - 277) * (T - 277) \\ g_2 &= 0.000028474 + (0.000029812 + 0.000028474)/(477 - 427) * (T - 427) \\ f &= 1/(1 + \text{Exp}((T - 384)/4)) \end{aligned}$$

### 6.4.3 Gebrauchsformel für die Wärmeleitfähigkeit

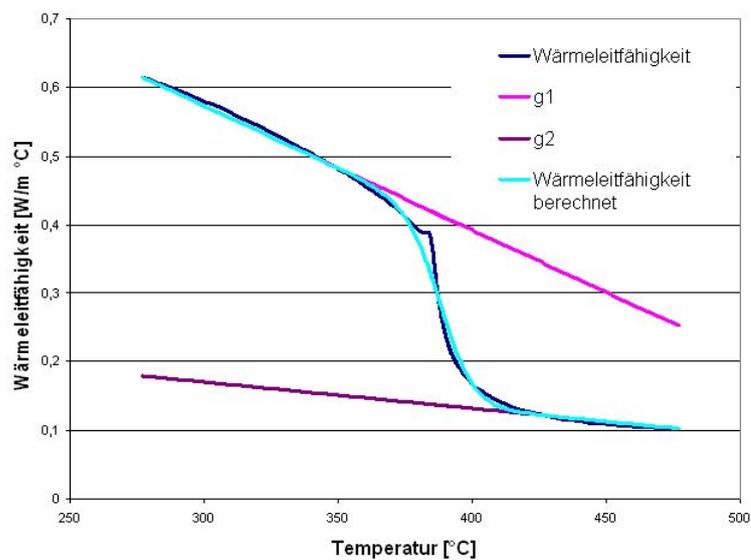


Abbildung 6.5: Wärmeleitfähigkeit bei  $p = 250$  bar

$$\begin{aligned}
 \lambda_f &= g_1 * f + g_2 * (1 - f) & (6.7) \\
 g_1 &= 0,614805 + (0,487911 - 0,614805)/(347 - 277) * (T - 277) \\
 g_2 &= 0,121544 + (0,102409 - 0,121544)/(477 - 427) * (T - 427) \\
 f &= 1/(1 + \text{Exp}((T - 389)/6))
 \end{aligned}$$

#### 6.4.4 Gebrauchsformel für die spezifische Wärmekapazität

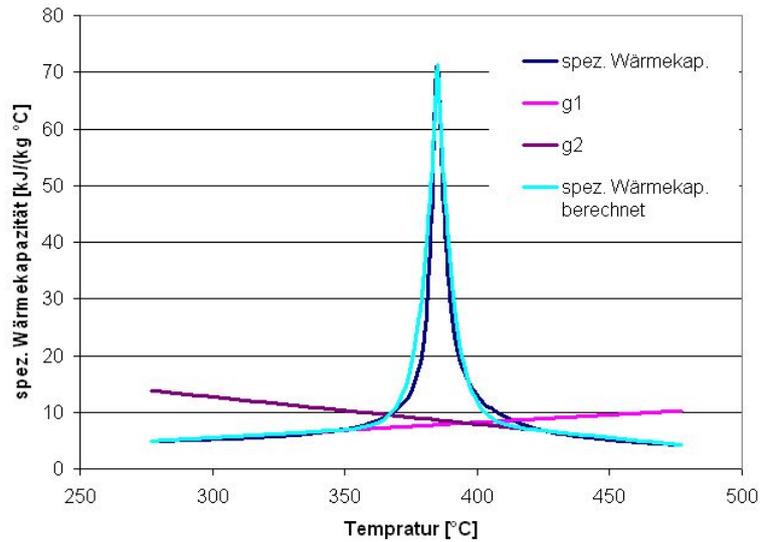


Abbildung 6.6: spezifische Wärmekapazität bei  $p = 250$  bar

$$\begin{aligned}
 c_p &= g_1 * f + g_2 * (1 - f) + 63 * \text{Exp}(-|0.15 * |T - 385|^{1.08}|) & (6.8) \\
 g_1 &= 4.878 + (6.758 - 4,878)/(347 - 277) * (T - 277) \\
 g_2 &= 6.596 + (4.207 - 6.596)/(477 - 427) * (T - 427) \\
 f &= 1/(1 + \text{Exp}((T - 384)/6))
 \end{aligned}$$

## 6.5 Bestimmung der Wärmezufuhr

### 6.5.1 Wärmedurchgang durch eine ebene Wand

Ein Vorgang wird als Wärmedurchgang bezeichnet, wenn von einem Fluid Wärme an eine Wand übergeht, diese darin fortgeleitet und auf der anderen Seite an ein zweites Fluid übertragen wird, vgl. Abbildung (6.7). Der durch eine ebenen Wand durchtretende Wärmestrom  $\dot{Q}$  [ $W/m^2$ ] ist nach [4] definiert:

$$\dot{Q}'' = k * (T_1 - T_2) \quad (6.9)$$

wobei  $\hat{k}$  den Wärmedurchgangskoeffizienten [ $W/m^2K$ ] beschreibt.

### 6.5.2 Berechnung des Wärmestroms $\dot{Q}'''$ [ $W/m^3$ ]

Bei der Berechnung des Wärmestroms muss darauf geachtet werden, dass dieser pro Volumeneinheit  $V$  bestimmt wird. Diese Volumeneinheit berechnet sich aus der Länge  $a = 0.0772 \text{ m}$ , vgl. Abbildung 2.2 und einer beliebigen Höhe

$$V = a^2 * h \quad (6.10)$$

Die Übertragungsfläche  $A$  wird beschrieben als

$$A = U * h \quad (6.11)$$

wobei  $U$  den Umfang der Übertragungsfläche darstellt, welcher  $0.2585 \text{ m}$  beträgt. Mit der Definition des Wärmestroms

$$\dot{Q}''' = \frac{A * \hat{k} * (T_1 - T_2)}{V} \quad (6.12)$$

folgt somit

$$\dot{Q}''' = \frac{U}{a^2} * \hat{k} * (T_1 - T_2) \quad (6.13)$$

In diesem Fall spiegelt die Temperatur 1 die Temperatur des Kühlmittels wieder und Temperatur 2 die berechnete Temperatur des Spaltes, wobei im weiteren Verlauf  $T_1$  als  $T_c$

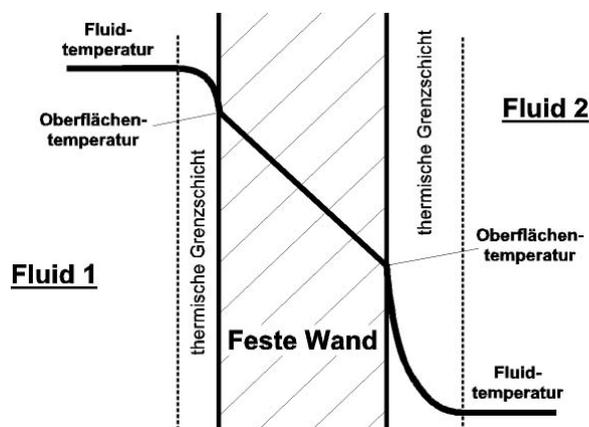


Abbildung 6.7: Wärmedurchgang durch eine ebene Wand

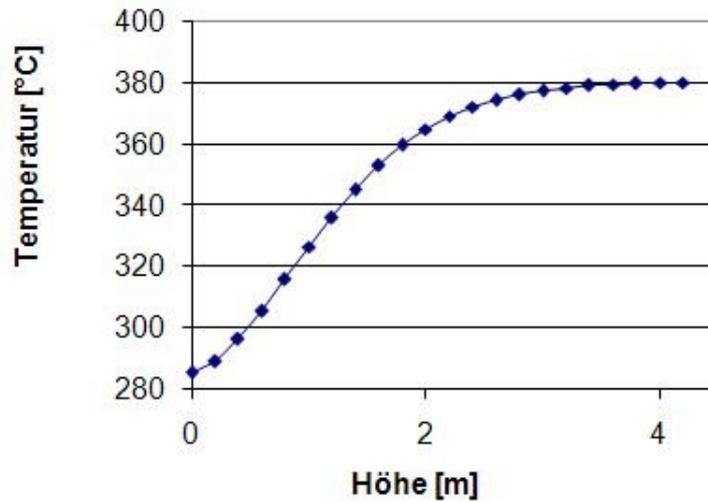


Abbildung 6.8: Temperatur des Kühlwassers  $T_c$

(coolant) und  $T_2$  als  $T_g$  (gap) bezeichnet wird. Die Temperaturverteilung des Kühlmittels  $T_c$  wird nach Vogt et al. [43] über die Höhe des Kerns vorgegeben und bleibt über alle Zeitschritte hinweg konstant, vergleiche Abbildung 6.8 und Abbildung 6.9.

$$T_c(z) = 1.414575z^4 - 12.02627z^3 + 24.27124z^2 + 28.80423z + 283.5561 \quad (6.14)$$

Somit wird eine konstante Aufheizung des Spaltwassers über den Radius  $r$  des Reaktors angenommen. Insgesamt folgt daraus für die Berechnung des Wärmestroms

$$\dot{Q}''' = \frac{U * \hat{k} * (T_c - T_g)}{a^2} \quad (6.15)$$

$\hat{k}$  ist definiert als

$$\frac{1}{\hat{k}} = \frac{1}{\alpha_c} + \frac{s}{\lambda_m} + \frac{1}{\alpha_g} \quad (6.16)$$

Darin bezeichnet  $\lambda_m$  die Wärmeleitfähigkeit von Stahl bei der mittleren Temperatur,  $s$  die Dicke der Wand und  $\alpha_c$  bzw.  $\alpha_g$  die lokalen temperaturabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten des Kühlmittels und des Spaltes.

### Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten $\hat{k}$

#### Bestimmung von $\alpha_c(T_c(z))$ bzw. $\alpha_c(z)$ :

Die Berechnung des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten erfolgt über die Definition der Nusselt-Zahl  $Nu$  [4]. Aus der allgemeinen Darstellung

$$Nu = \alpha * l / \lambda_f \quad (6.17)$$

folgt für das gegebene Problem

$$\alpha_c(r, z) = \frac{\lambda_f(z) * Nu(r, z)}{d_h} \quad (6.18)$$

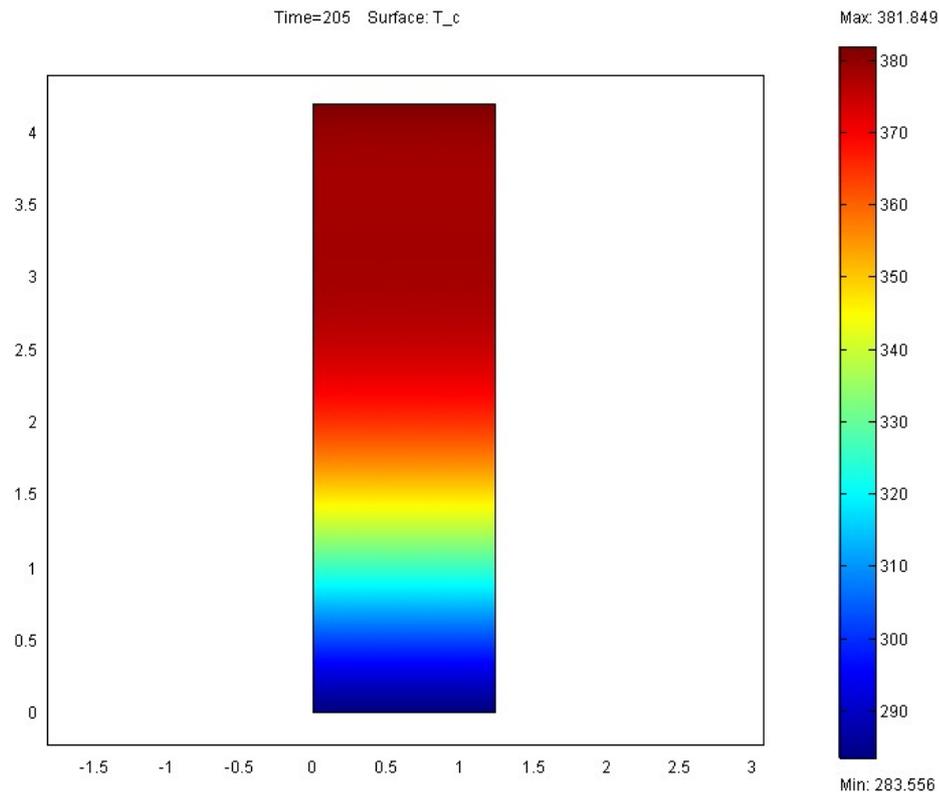


Abbildung 6.9: Temperaturverteilung des Kühlwassers

Der hydraulische Durchmesser  $d_h$  bestimmt sich durch die Gleichung

$$d_h = \frac{4 * A}{U} = \frac{4 * \text{durchströmte Querschnittsfläche}}{\text{benetzter Umfang}} \quad (6.19)$$

Die durchströmte Querschnittsfläche des Brennelements beläuft sich dabei auf  $1516 \text{ mm}^2$  und die Berechnung des benetzten Umfangs ergibt einen Betrag von  $1357.5 \text{ mm}$ .

$$\Rightarrow d_h = 0.00447 \text{ m} \quad (6.20)$$

Über die Dittus Boelter Korrelation für turbulente Rohrströmungen wird die Nusselt-Zahl

$$Nu(r, z) = 0,023 * Re(z)^{0.8} * Pr(r, z)^{0.33} \quad (6.21)$$

bestimmt. Dabei ist die Reynoldszahl vorgegeben mit

$$Re(z) = \frac{u(r, z)d_h}{\nu_f(z)} \quad \text{bzw.} \quad Re(r, z) = \frac{G(r, z) * d_h}{\mu_f(z)} \quad (6.22)$$

Die Massenstromdichte wurde dabei als ein konstanter Wert nach Vogt et al. [43] von  $2300 \text{ kg/m}^2\text{s}$  angenommen. Die Berechnung der Prandtl-Zahl ist über die Bestimmung der temperaturabhängigen Faktoren  $c_p(z)$ ,  $\mu_f(z)$ ,  $\lambda_f(z)$  wie folgt definiert:

$$Pr(z) = \frac{c_p(z) * \mu_f(z)}{\lambda_f(z)} \quad (6.23)$$

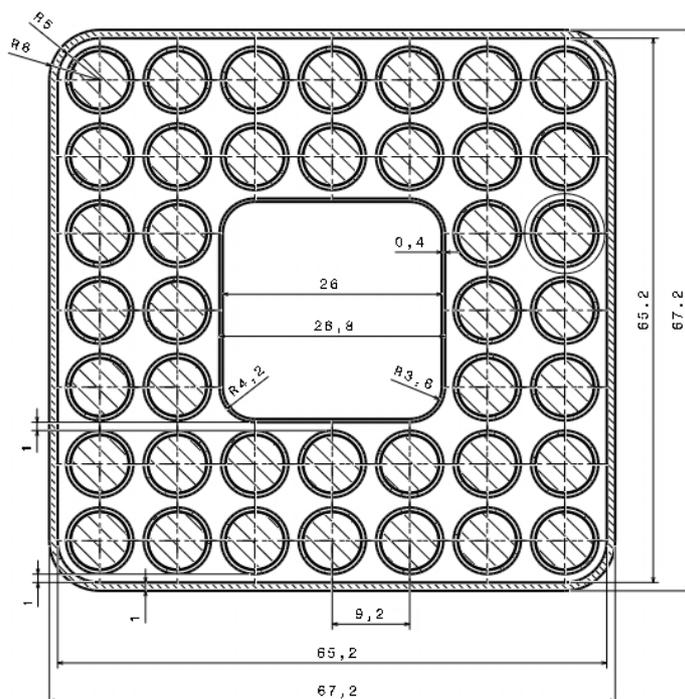


Abbildung 6.10: Geometrie eines Brennelements

Somit ist die Berechnung des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_c$  gewährleistet.

Die temperaturabhängige Berechnung von  $\alpha_g$  ist ähnlich der obigen Berechnung. Unterschiede bestehen im hydraulischen Durchmesser  $d_h$ , der mit einem Wert von  $0.022823\text{ m}$  nach Gleichung 4.62 angegeben wird und in der Berechnung der Reynoldszahl, die über den Spaltgeschwindigkeit und der durchströmten Fläche  $A = 0.001474,9\text{ m}^2$  bestimmt wird. Die Temperatur des Spaltes wird in jedem Zeitschritt neu berechnet.

Die Dicke der Wand beträgt  $s = 1\text{ mm}$  und die Wärmeleitfähigkeit von Stahl wird bei einer konstant angenommenen Temperatur von  $305^\circ\text{C}$  mit  $18\text{ W/mK}$  angegeben.

Somit kann die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten  $\hat{k}$  erfolgen und daher auch die Berechnung des gesamten Wärmestroms  $\dot{Q}'''$ . Dieser ist durch die Temperaturänderungen im Spalt nicht konstant.

## 6.6 Berechnung des turbulenten Quermassenstromanteils $W'$

Die Berechnung und Implementierung des Quermassenstromanteils in Femlab nach Gleichung 3.78 verläuft temperaturabhängig.

$$W' = \mu_f(T) \frac{2\omega}{\omega_g} Re(T)^b \left(\frac{s}{D}\right)^{1-r} \quad (6.24)$$

Die Parameter  $\omega/\omega_g$ ,  $b$  und  $r$  sind nach Tabelle 3.2 definiert als

$$\frac{\omega}{\omega_g} = 0.005/2 \quad , \quad b = 0.9 \quad , \quad r = 0,894$$

Die Spaltbreite  $s$  beträgt  $0.001m$  und der hydraulische Durchmesser  $d_h = 0,022823m$ . Somit ist die Bedingung für die Verwendung der Korrelation erfüllt, da das Verhältnis  $s/d = 0.04382$  beträgt und somit größer ist als die geforderten  $0.032$ . Die Reynoldszahl erfüllt ebenso die an sie gestellten Bedingungen. Somit lautet die Gleichung

$$W' = \mu_f(T)(0.005)Re(T)^{0.9} (0.04382)^{0.106} \quad (6.25)$$

## 6.7 Anfangs- und Randbedingungen

Um die Grenze bestimmen zu können, ab welcher Geschwindigkeit keine Umkehrströmung mehr auftritt, werden mehrere Eintrittsgeschwindigkeiten am oberen Rand, vgl. Abbildung 6.1, festgelegt, die zwischen  $v = 0.05$  m/s und  $v = 0.15$  m/s variieren. Die radiale Geschwindigkeit ist dabei  $u = 0$ . Somit kann jeweils das Verhalten der Strömung bestimmt werden. Auf der Mittelachse des Reaktorkerns wurden Axialsymmetrie- und auf der Umfangsfläche Schlupfbedingungen gewählt. Die Ausströmrandbedingung wird mit einer konstanten Druckbedingung von  $p = 0$  festgelegt. Diese Bedingungen bleiben für alle Eintrittsgeschwindigkeiten gleich.

Als Randbedingungen für die Energiegleichung wurde eine Eintrittstemperatur von  $280^\circ\text{C}$  am oberen Rand gewählt, auf der Mittelachse wiederum axialsymmetrische und auf der Umfangsfläche adiabate Randbedingungen. Als Austrittsbedingung am unteren Rand wurde konvektiver Fluss festgelegt, was bedeutet, dass keine Wärmeleitung am Austritt vorliegt.

Als Anfangsbedingungen wurden folgende Werte gewählt:

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ m/s} \\ v &= -0.1 \text{ m/s} \\ P &= 0 \text{ Pa} \\ T &= 280^\circ\text{C} \end{aligned}$$

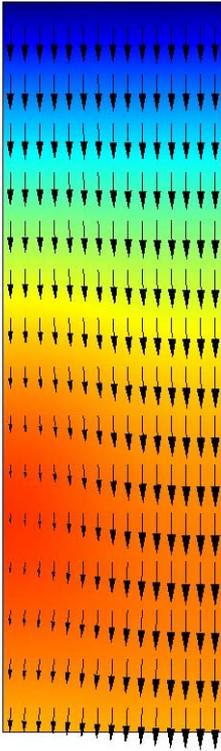
## 6.8 Berechnung und Auswertung

Um das Verhalten der Strömung zu analysieren muss ein transienter Löser gewählt werden. Pro Zeitschritt wird die Lösung mit dem linearen Löser „Um-pack“ mit der Lösungsform „General“ bestimmt. Eine detailliertere Beschreibung des Lösungsalgorithmusses ist [10] zu entnehmen.

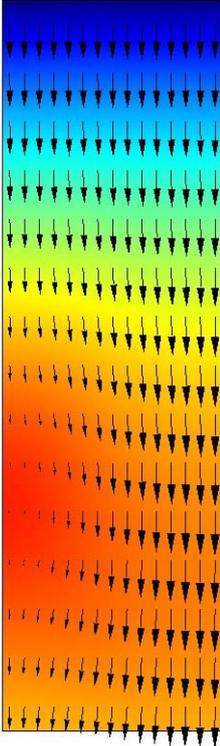
Die Diskretisierung konvektions-dominierter Transportprobleme kann Instabilitäten der Lösung verursachen. Diese Instabilitäten können aufgespürt werden. Es sind Oszillationen, die insbesondere dort auftreten, wo steile Gradienten vorliegen. Die Oszillationen können so groß sein, dass sie die Konvergenz der Lösung verhindern. Um sie auszuschließen gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum Einen die Verfeinerung des Netzes, was im vorliegenden Fall keinen Einfluss auf die Lösung hatte, zum anderen die Einführung zusätzlicher künstlicher Diffusion. Dabei wird nicht das ursprüngliche Problem gelöst, sondern ein durch die künstliche Diffusion modifiziertes. Im vorliegenden Modell wird isotrope Diffusion mit einem Wert vom  $0.75$  verwendet [10]. Um die Auswirkungen der künstlichen Diffusion auf das Ergebnis feststellen zu können, sollte das Modell mit einem bekannten Beispiel verifiziert werden. Dies war auf Grund von Zeitmangels in dieser Arbeit nicht möglich.

Im Folgenden wird das Verhalten der Strömung bei einer Eintrittsgeschwindigkeit von  $v = -0.06 \text{ m/s}$  über einen Zeitraum von  $200 \text{ s}$  näher betrachtet. Die Zeitschrittweite beträgt dabei  $0.1 \text{ sec}$ . Dabei ist nach etwa  $80 \text{ s}$  der Beginn einer Strömungsumkehr im Zentrum des Kerns zu beobachten, welche sich im Laufe der Zeit weiter ausbildet. Nach  $135 \text{ s}$  bricht die Aufwärtsströmung im Zentrum des Kerns zusammen und verlagert sich in Richtung des Reflektors. Unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie bildet sich also eine ringförmige Zone mit Aufwärtsströmung. In der Nähe der Symmetrieebene und am Rand des Kerns befinden sich Zonen mit abwärtsgerichteter Strömung. Diese Entwicklung ist nach etwa  $155 \text{ sec}$  abgeschlossen und ab diesem Zeitpunkt bleibt das Verhalten der Strömung stationär.

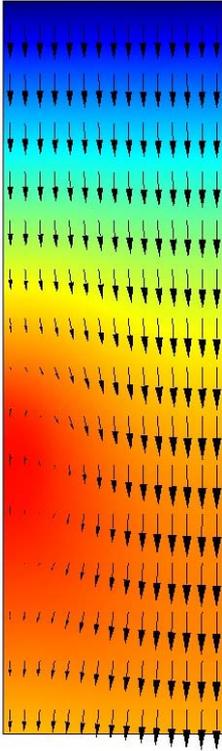
In den folgenden Abbildungen ist das Entstehen von Naturkonvektion anhand der Temperaturentwicklung aufgezeigt. Die Pfeile geben das Geschwindigkeitsfeld mit dessen Intensität wieder. Dabei tritt die Umkehrströmung bei einer Temperatur von etwa  $330^\circ\text{C}$  ein und führt zu einer Aufheizung von etwa  $342^\circ\text{C}$  an der Spitze dieser Strömung. Nach dem Einsetzen der Verlagerung fällt die maximale Temperatur wieder auf etwa  $336^\circ\text{C}$  und schwankt nur noch leicht.



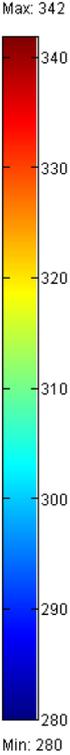
t=80s



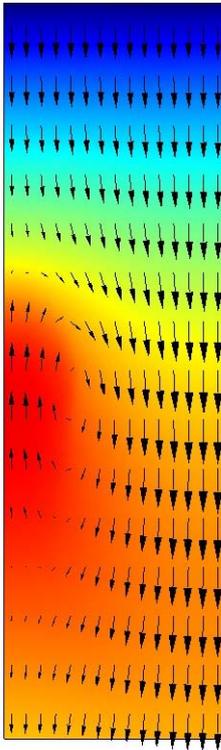
t=85s



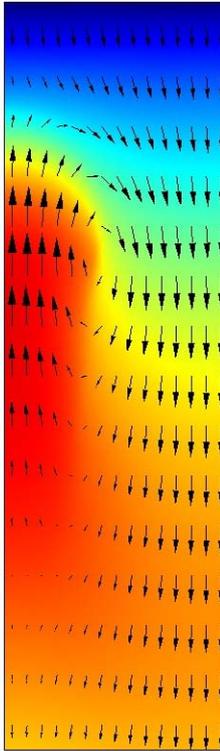
t=90s



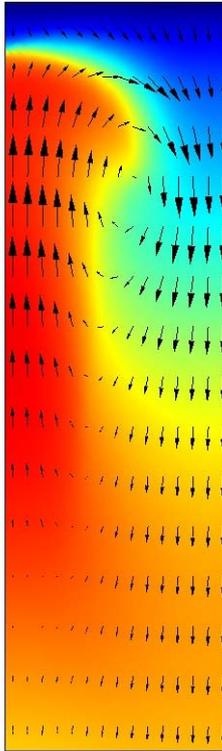
Temperaturskala



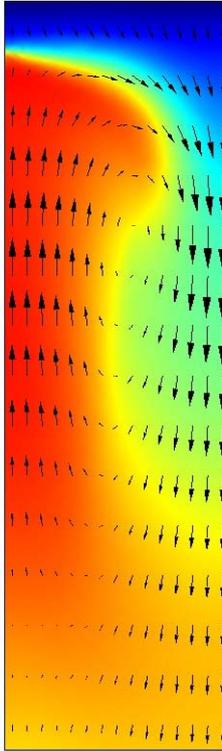
t=95s



t=100s



t=105s



t=110s

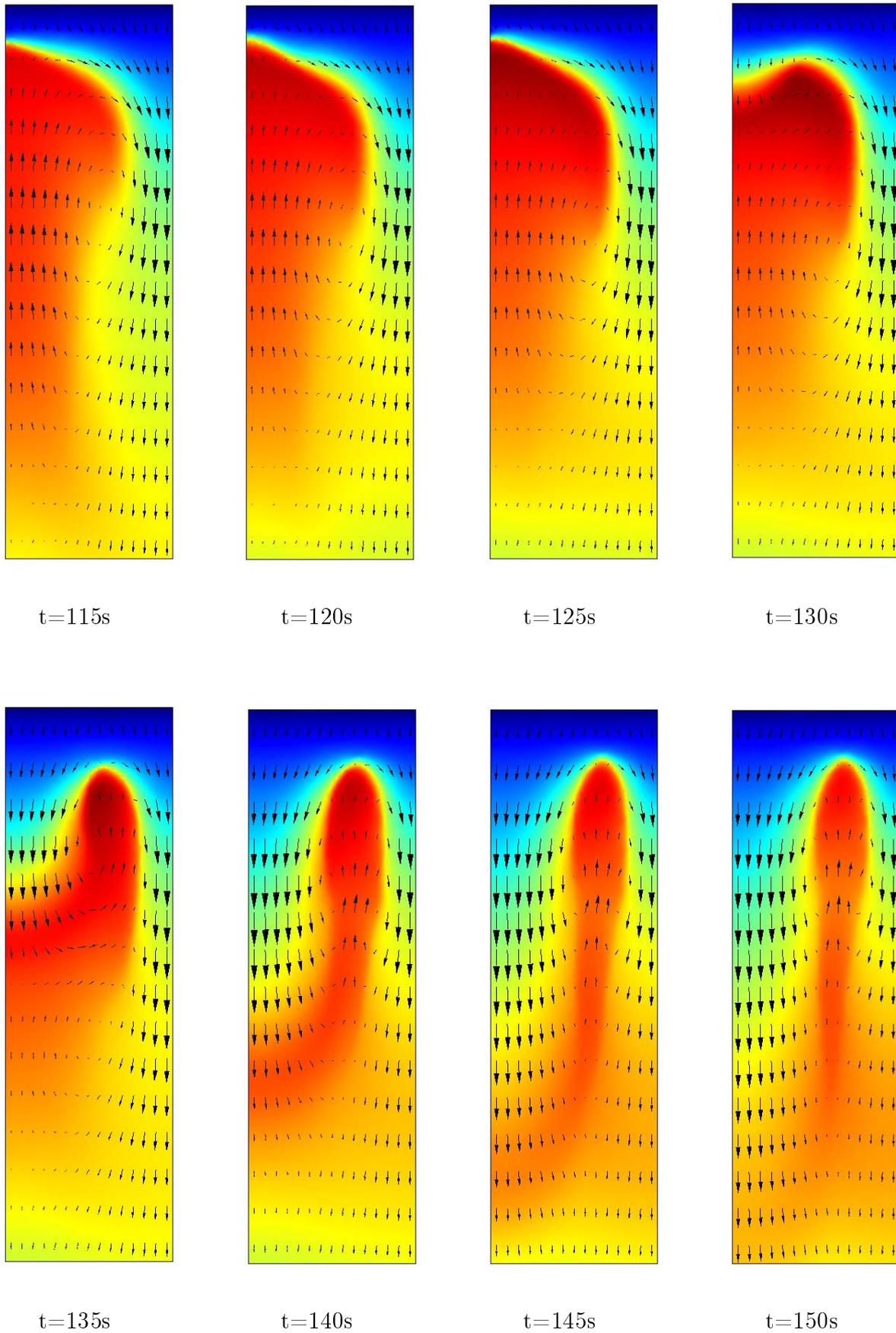
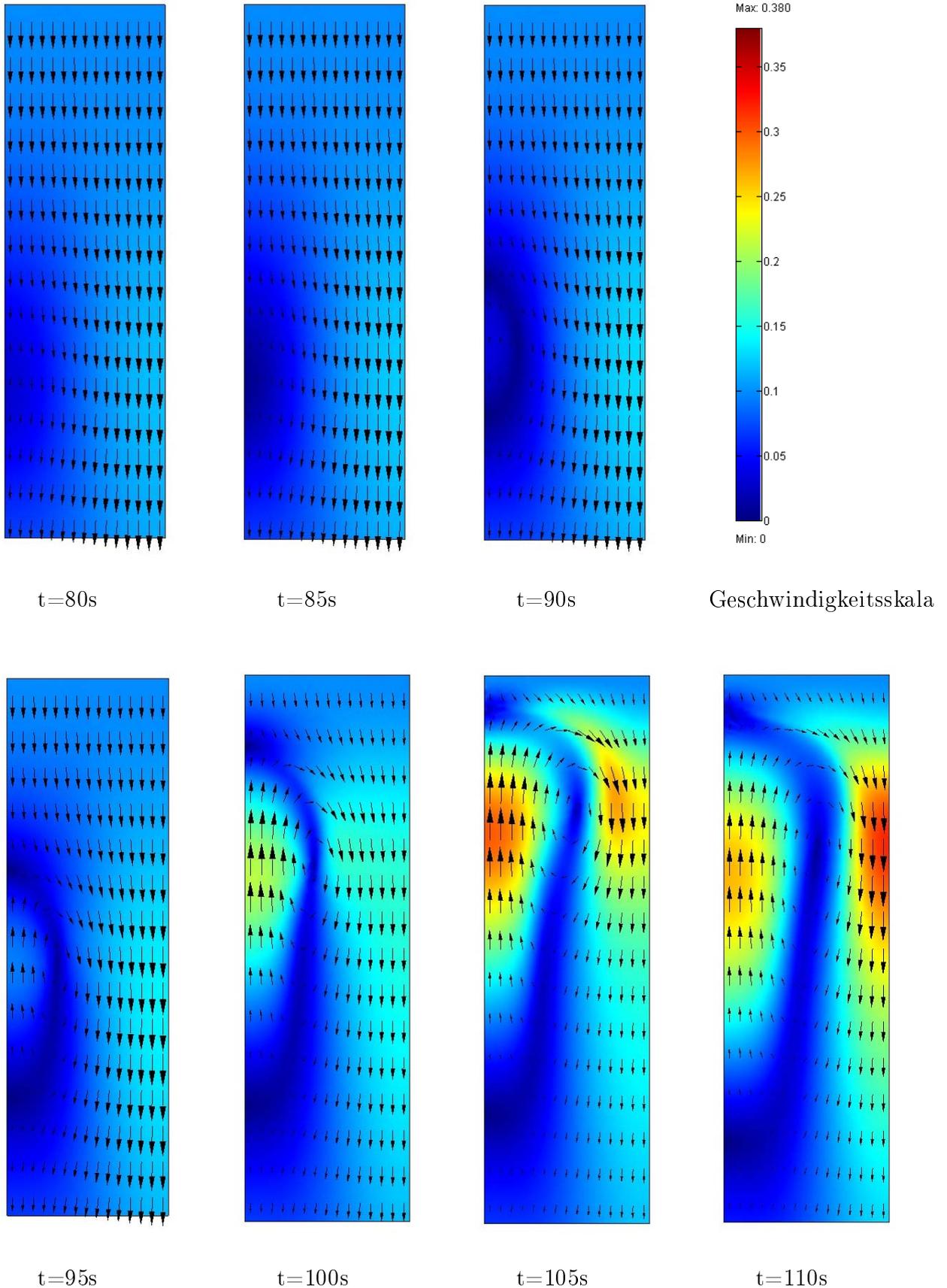


Abbildung 6.11: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren für verschiedene Zeitpunkte

Der Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit ist den folgenden Abbildungen zu entnehmen. Dabei tritt die betragsmäßig maximale Geschwindigkeit dort auf, wo die Umkehrströmung im Zentrum des Kerns zusammenbricht.



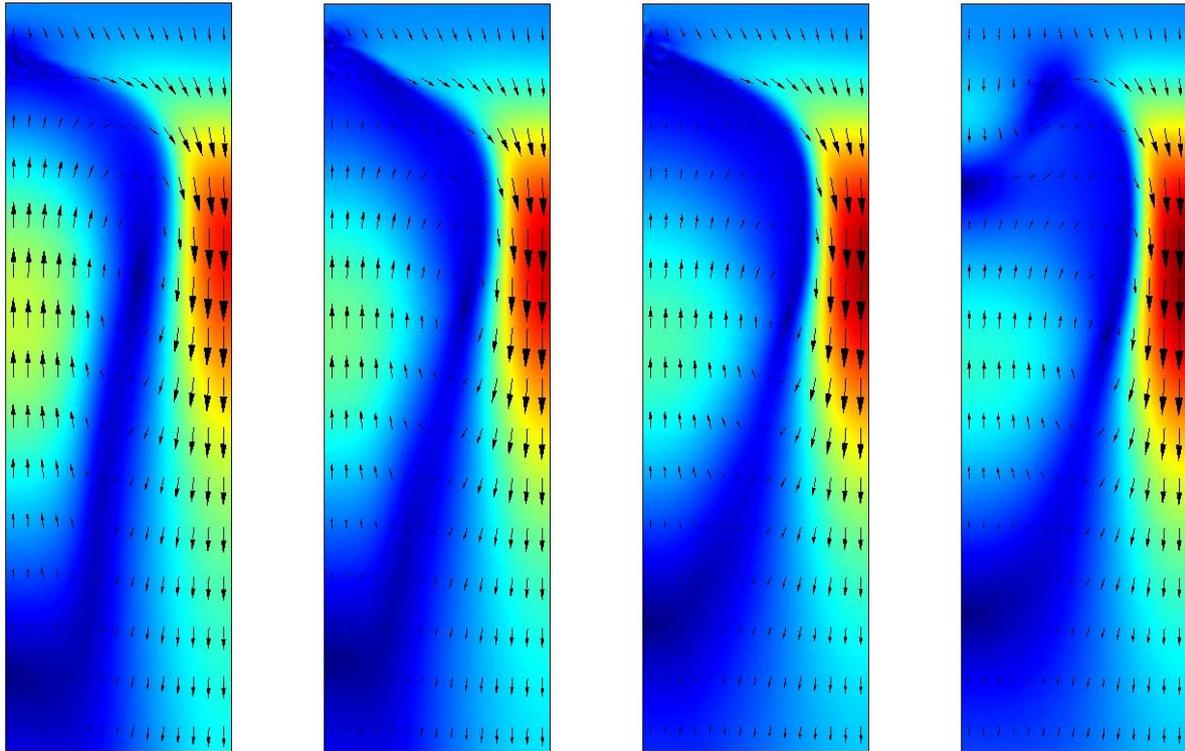
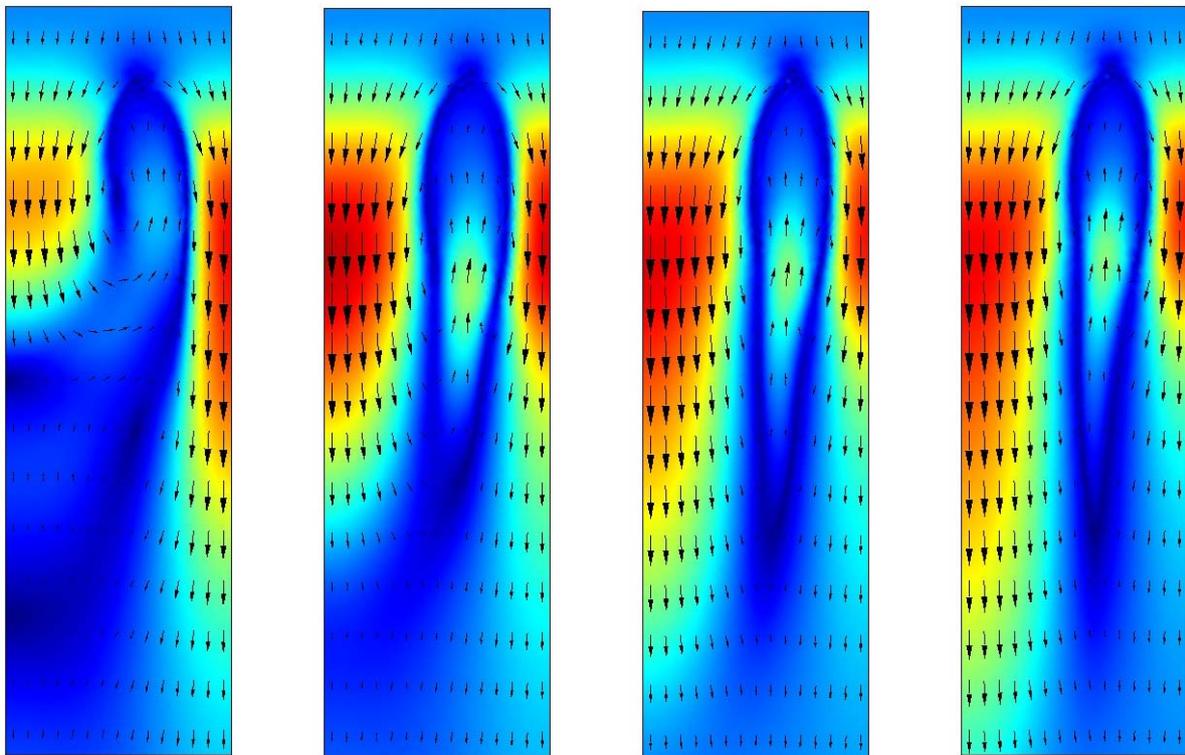
 $t=115s$  $t=120s$  $t=125s$  $t=130s$  $t=135s$  $t=140s$  $t=145s$  $t=150s$ 

Abbildung 6.12: Betrag und Richtung der Geschwindigkeit

Die maximale Geschwindigkeit in radialer Richtung beträgt dabei  $0.115 \text{ m/s}$ . Diese wird nach etwa 110 Sekunden nach Beginn der Rechnung bei Erreichen der maximalen Höhe der Umkehrströmung erzielt, vgl. Abbildung 6.13.

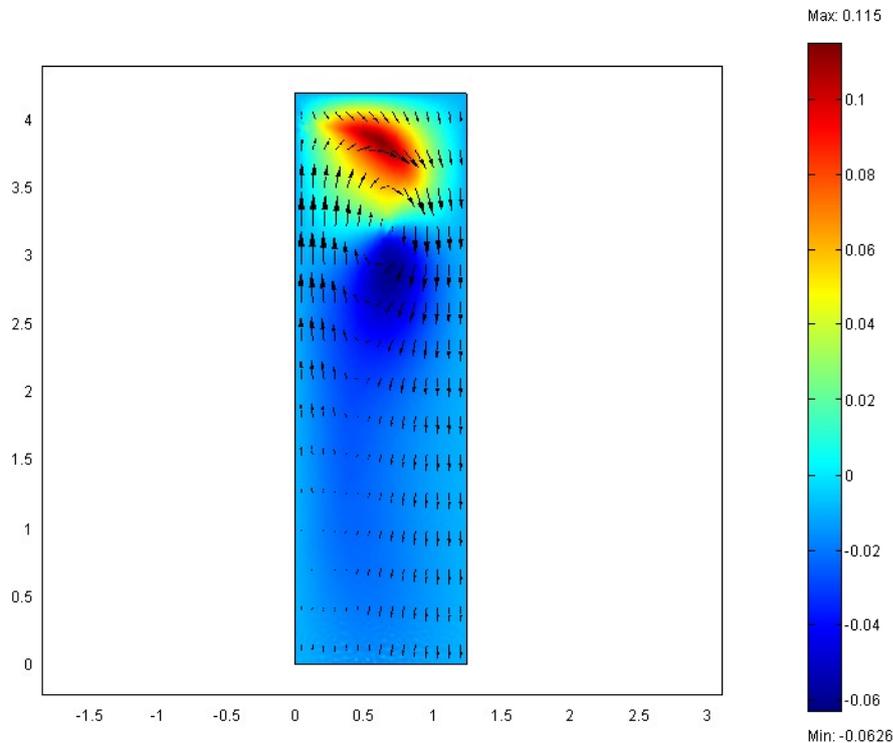


Abbildung 6.13: Geschwindigkeit in radialer Richtung

Nach Analyse der Strömung für verschiedene Eintrittsgeschwindigkeiten liegt die Grenze für auftretende Naturkonvektion zwischen  $\bar{v} = -0.065 \text{ m/s}$  und  $\bar{v} = -0.07 \text{ m/s}$ . Danach entwickelt sich die Umkehrströmung bei der erstgenannten Geschwindigkeit nach etwa  $200 \text{ sec}$  aus. Bei der zweitgenannten Geschwindigkeit war nach etwa  $600 \text{ sec}$  kein Auftreten von Naturkonvektion zu beobachten. Die Temperaturen der maximalen Aufheizung blieben dabei unter der Grenze für das Eintreten dieses Phänomens. Für niedrigere Eintrittsgeschwindigkeiten bildete sich die Umkehrströmung entsprechend früher aus, wobei der Verlauf der Entwicklung der Strömung ähnlich zu der gezeigten war. Für höhere Geschwindigkeiten, wie die bereits erwähnten  $0.07 \text{ m/s}$ , war ebenso keine Entwicklung der Naturkonvektion zu beobachten.

Die volumetrische Eintrittsgeschwindigkeit eines SDWR wurde von Vogt et al. [43] mit  $0.13 \text{ m/s}$  vorgegeben. Somit ist für diese Eintrittsgeschwindigkeit keine Naturkonvektion zu erwarten und die Stabilität der Abwärtsströmung ist gewährleistet.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war die Codeentwicklung und die numerische Simulation der Moderatorströmung in den Spalten zwischen den Brennelementen eines Reaktorkerns mit einem Ansatz für poröse Medien. Dieser wurde auf den von Vogt et al. entwickelten SDWR angewendet und mit Hilfe der Software Comsol auf mögliche Entstehung von Naturkonvektion untersucht.

Zunächst wurden die für die Analyse der Spaltströmung benötigten Grundgleichungen für poröse Medien hergeleitet und die auftretenden makroskopischen Strukturparameter berechnet. Die Berechnung der zusätzlich geschwindigkeitsabhängigen Koeffizienten wurde mit Hilfe von Druckverlustkorrelationen und CFD-Simulationen mit der Software Star-CD durchgeführt und anschließend verglichen. Dabei ist aufgefallen, dass sich die Ergebnisse des geschwindigkeitsabhängigen Parameters der Korrelation in Längsrichtung nur unwesentlich von denen der CFD-Simulation unterscheiden. Die Unterschiede in Querrichtung waren bei niedrigen Geschwindigkeiten viel größer als bei höheren, bei denen sie nur um etwa 8% voneinander abwichen. Alle Koeffizienten konnten jedoch im interessierten Geschwindigkeitsbereich als konstant angenommen werden und somit vereinfachte sich die Analyse der Spaltströmung.

Für die abschließende Untersuchung der Moderatorströmung in den Spalten zwischen den Brennelementen des SDWR wurde zunächst die Grenze für den Eintritt von Naturkonvektion bestimmt. Dabei wurde eine zweidimensionale, axial- und rotationssymmetrische Geometrie vorgeschlagen und die Eintrittsgeschwindigkeiten variiert. Es wurde festgestellt, dass die von Vogt et al. festgelegte Eintrittsgeschwindigkeit von  $0.13 \text{ m/s}$  keine Auswirkung auf die Stabilität der Spaltströmung hat. Mischkonvektion trat erst bei Eintrittsgeschwindigkeiten unterhalb von  $0.065 \text{ m/s}$  ein. Änderungen der Geometrie, wie bessere Isolierung der Brennelemente, oder eine Erhöhung der Eintrittsgeschwindigkeit um die Stabilität zu verbessern, sind nicht notwendig.

Um diesen Code auch für andere Reaktorkerne anwenden zu können, muss lediglich die Geometrie des Kerns und der Brennelemente bekannt sein, sowie die Eintrittsgeschwindigkeit des Fluids, die Temperaturverteilung des Kühlmittels und der Massenstrom in den Brennelementen.

Um den Code zu verifizieren, wäre es hilfreich in einer nachfolgenden Studien- oder Diplomarbeit bekannte Beispiele aus der Literatur nachzurechnen und die Ergebnisse des

entwickelten Codes zu vergleichen und eventuelle Abweichungen zu korrigieren. Es ist geplant diesen Code auf das aktuelle HPLWR-Projekt anzuwenden, um damit Aussagen über eintretende Naturkonvektion treffen zu können.

# Kapitel 8

## Nomenklatur

### Lateinische Buchstaben

$a$	Querteilungsdurchmesser
$A$	durchströmte Fläche
$A_{fs}$	Grenzfläche zwischen Fluid und Feststoff
$b$	Längsteilungsdurchmesser
$B$	zusätzlicher Widerstandsterm
$c$	Courant Zahl
$c_{ij}$	Modellkoeffizienten
$C$	Integrationskonstante
$C_p$	spezifische Wärmekapazität
$d$	Außendurchmesser der Rohre
$\tilde{D}$	dimensionsloser Tensor
$f_-$	Faktoren zur Bestimmung der Druckverlustbeiwerte in Rohrbündeln
$f', g'$	dimensionslose Vektorfunktion
$F$	Inertialkoeffizient
$g$	Erdbeschleunigung
$G$	Massenstromdichte
$h_i, h_j$	Enthalpie des Unterkanals $i, j$
$k$	kinematische Energie
$\hat{k}$	Wärmeübergangskoeffizient
$K$	Permeabilität des porösen Mediums
$l$	Länge
$\dot{m}$	Massenstrom
$n_{fs}$	nach außen gerichteter Normalenvektor
$N_w$	Anzahl der Hauptwiderstände in Strömungsrichtung (hier Anzahl Rohrreihen)
$Nu$	Nusselt Zahl
$\dot{Q}'''$	Wärmezufuhr
$P_{wt}$	benetzter Umfang
$Pe$	Peclet Zahl
$Pr$	Prandtl Zahl
$\bar{p}$	volumetrischer Druck
$\bar{p}_f$	volumengemittelter Druck

$r$	Radius des Reaktors
$R$	Radius des repräsentativen Volumenelements
$Re$	Reynolds Zahl
$s_q$	Querteilung
$s_l$	Längsteilung
$S$	Oberflächenvektor
$t$	Zeit
$T_f, T_s$	Temperatur des Fluids, Feststoffs
$\bar{v}$	volumetrischer Geschwindigkeitsvektor oder Darcygeschwindigkeitsvektor
$u, v, w$	Komponenten des Darcygeschwindigkeitsvektors
$\bar{v}_f$	volumetrisch gemittelter Spaltgeschwindigkeitsvektor
$u_f, v_f, w_f$	Komponenten des volumetrisch gemittelten Spaltgeschwindigkeitsvektors
$v_f^*$	dimensionslose Geschwindigkeit
$V$	repräsentatives Volumen
$\dot{V}$	Volumenstrom
$W_{ij}^{*H}$	Massenstromanteil in Querrichtung pro Einheitslänge
$W'$	turbulenter Massenstromanteil in Querrichtung pro Einheitslänge
$y^+$	dimensionsloser Wandabstand
$z^t$	turbulenter Mischungsweg

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	lokaler Wärmeübergangskoeffizient
$\tilde{\alpha}'$	diffusiver Wärmeausbreitungstensor
$\beta_f$	thermaler Ausdehnungskoeffizient des Fluids
$\epsilon$	Wirbelviskosität
$\varphi$	Porosität des Mediums
$\kappa$	von Kármán Konstante
$\rho_f, \rho_s$	Dichte des Fluids bzw Feststoffs
$\lambda_f, \lambda_s$	Wärmeleitfähigkeit des Fluids bzw. Feststoffs
$\tilde{\lambda}'$	Wärmeausbreitung durch Wärmeleitung
$\mu_f$	dynamische Viskosität des Fluids
$\mu_w$	dynamische Viskosität des Fluids bei mittlerer Wandtemperatur
$\nu_f$	kinematische Viskosität des Fluids
$\omega$	Widerstandsbeiwert
$\sigma$	Normalspannung
$\varsigma$	Anzahl Rohrreihen pro Länge
$\tau$	Wandschubspannung
$\xi$	Druckverlustbeiwert

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Strömungsverlauf im RDB [43] . . . . .	4
2.2	Ausschnitt eines Brennelements [43] . . . . .	4
2.3	Brennelementcluster [21] . . . . .	5
2.4	Brennelementparameter [21] . . . . .	5
2.5	Querschnitt über 1/8 des Kerns [43] . . . . .	6
3.1	Durchströmen der Geometrie in Quer- und Längsrichtung . . . . .	8
3.2	Fluidvolumina in den Unterkanälen . . . . .	21
4.1	Zur Erläuterung der Begriffe . . . . .	26
4.2	Abhängigkeit des Koeffizienten $c_{21}$ von der Darcygeschwindigkeit . . . . .	31
4.3	Abhängigkeit des Koeffizienten $c_{21}$ von der Darcygeschwindigkeit . . . . .	32
5.1	Geometrie des Spaltes . . . . .	40
5.2	Blockstruktur des Netzes . . . . .	41
5.3	Generiertes strukturiertes Netz (Draufsicht) . . . . .	41
5.4	Generiertes strukturiertes Netz (Seitenansicht) . . . . .	42
5.5	Randbedingungen . . . . .	43
5.6	Strömungszustände für reine Querströmung für $t=7s$ , $t=7.5s$ , $t=8s$ , $t=8.5s$	45
5.7	Änderungsrate der Geschwindigkeiten . . . . .	46
5.8	Geschwindigkeiten an Kontrollzelle . . . . .	46
5.9	Geschwindigkeiten am Austritt . . . . .	46
5.10	$y^+$ Verteilung bei einer Druckdifferenz von 30 Pa nach 12 Sekunden . . . . .	47
5.11	Abhängigkeit des Druckverlustes der Querströmung von der quadratischen Darcygeschwindigkeit . . . . .	47
5.12	Vergleich der Werte der Koeffizienten in radialer Richtung . . . . .	48
5.13	Strömungsstruktur in der Draufsicht . . . . .	49
5.14	Sekundärströmungsstruktur im Spaltraum bei axialer Hauptströmung . . . . .	50
5.15	Residuum der axialen Geschwindigkeitskomponente . . . . .	50
5.16	Geschwindigkeit an Kontrollzelle . . . . .	50
5.17	$y^+$ -Verteilung . . . . .	51
5.18	Abhängigkeit des Druckverlusts der turbulenten axialen Strömung von der quadratischen Darcygeschwindigkeit . . . . .	51
5.19	Vergleich der Werte der Koeffizienten in axialer Richtung . . . . .	52
6.1	Geometrie des Kerns . . . . .	54

---

6.2	Netzstruktur . . . . .	55
6.3	Dichte bei $p = 250$ bar . . . . .	56
6.4	dynamische Viskosität bei $p = 250$ bar . . . . .	57
6.5	Wärmeleitfähigkeit bei $p = 250$ bar . . . . .	57
6.6	spezifische Wärmekapazität bei $p = 250$ bar . . . . .	58
6.7	Wärmedurchgang durch eine ebene Wand . . . . .	59
6.8	Temperatur des Kühlwassers $T_c$ . . . . .	60
6.9	Temperaturverteilung des Kühlwassers . . . . .	61
6.10	Geometrie eines Brennelements . . . . .	62
6.11	Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren für verschiedene Zeitpunkte . . . . .	66
6.12	Betrag und Richtung der Geschwindigkeit . . . . .	68
6.13	Geschwindigkeit in radialer Richtung . . . . .	69

# Literaturverzeichnis

- [1] ACHENBACH, E.: Heat and flow characteristics of packed beds. *Exp. Thermal Fluid Sci.* 10 (1995), S. 17–27
- [2] BAGLIETTO, E.: Anisotropic Turbulence Modeling for Accurate Rod Bundle Simulations. *Proceedings of ICONE 14*. Miami, Florida, July 17-20, 2006
- [3] BEAVERS, G.S. ; SPARROW, E.M.: Non-Darcy flow through fibrous porous media. *J. Appl. Mech* 36 (1969), S. 711–714
- [4] BEITZ, W. ; GROTE, K.-H.: *Doppel-Taschenbuch für den Maschinenbau*. Berlin. Springer-Verlag, 1991
- [5] BEJA, A. ; LAGE, J.L.: Heat transfer from a surface covered with hair. KAKAÇ, Kilkış B. Kulacki F.A. Arinç F. S. (Hrsg.): *Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media*. Dordrecht, The Netherlands. Kluwer Academic Publishers, 1991, S. 823 – 848
- [6] BERGELIN, O.P. ; COLBURN, A.P. ; HULL, H.L.: Heat transfer and pressure drop during viscous flow across un baffled tube banks / University of Delaware, Engineering Experimental Station. Newark, Delaware, 1950 (Bulletin Nr.2). – Forschungsbericht
- [7] BRINKMAN, H.C.: A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl. Sci. Res.* 1 (1947), S. 27–34
- [8] BRINKMAN, H.C.: On the permeability of media consisting of closely packed porous particles. *Appl. Sci. Res.* 1 (1947), S. 81–86
- [9] CARBONELL, R.G. ; WHITAKER, S.: Heat and mass transfer in porous media. BEAR, Y. (Hrsg.) ; CORAPCIOGLU, M.Y. (Hrsg.): *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*. Dordrecht, Niederlande. Martinus Nijhoff, 1984, S. 121–198
- [10] COMSOL, Inc.: *Femlab Manual*. – [www.femlab.de](http://www.femlab.de)
- [11] COURANT, E. ; FRIEDRICHS, K. ; LEWY, H.: Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen* 100 (1928), S. 32–74
- [12] DARCY, H.P.G.: *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Paris. Victor Dalmont, 1856
- [13] DULLIEN, F.A.L.: *Porous Media, Fluid Transport and Pore Structure*. New York, N.Y. Academic Press, Inc., 1979
- [14] DURLOVSKY, L. ; BRADY, J.F.: Analysis of the Brinkman equation as a model for flow in porous media. *Physics of Fluids* 30 (1987), Nr. 11, S. 3329–3341

- [15] ERGUN, S.: Fluid flow through packed columns. *Chem. Engng. Prog.* 48 (1952), S. 89–94
- [16] FISCHER, K. ; STARFLINGER, J. ; SCHULENBERG, T.: Conceptual design of a reactor pressure vessel and its internals for a HPLWR. *Proc. ICAPP 06, P 6098*. Reno, US, Juni 4-8, 2006
- [17] FORCHHEIMER, P.: Wasserbewegung durch Boden. *Z. Ver. deutscher Ingenieure* 45 (1901), S. 1736–1741, 1781–1788
- [18] GADDIS, E.S.: Druckverlust in querangeströmten Bündeln aus glatten Kreis- und Ovalrohren. *VDI Wärmeatlas*. 8. Auflage. VDI-Gesellschaft Verfahrenstechnik und Chemieingenieurwesen, 1997, Kapitel Lda
- [19] GADDIS, E.S. ; GNIELINSKI, V.: Druckverlust in querdurchströmten Rohrbündeln. *VT-Verfahrenstechnik* 17 (1983), Nr. 7, S. 410–418
- [20] GRAY, W.G.: A derivation of the equations for multiphase transport. *Chem. Engng. Sci.* 30 (1975), S. 229–233
- [21] HOFMEISTER, J. ; SCHULENBERG, T. ; STARFLINGER, J.: Optimization of a fuel assembly for a HPLWR. *Proc. ICAPP 05, P 5077*. Seoul, Korea, Mai 2005
- [22] HSU, C.T. ; CHENG, P.: Thermal dispersion in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer* 33 (1990), S. 1587–1597
- [23] INGHAM, D.B.: *Transport Phenomena in Porous Media*. Kidlington, Oxford. Elsevier Science Ltd, 1998
- [24] KOH, J.C. ; DUTTON, J.C. ; BENSON, B.A.: Friction factor for isothermal and non-isothermal flow through porous media. *J. Heat Transfer* 99c (1977), S. 367–374
- [25] LAGE, J.L. ; ANTOHE, B.V.: Two types of nonlinear pressure drop versus flow-rate relation observed for saturated porous media. *ASME J. Fluids Engng* 119 (1997), S. 701–706
- [26] LAURIEN, E. ; WINTTERLE, T.: Secondary Flows in the Cooling Channels of the HPLWR. *Proceedings of ICAPP 07, P 7089*. Nice, France, Mai 13-18, 2007
- [27] LUNDGREN, T.S.: Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. *J. Fluid Mech.* 51 (1972), S. 273–299
- [28] MACDONALD, I.F. ; CHU, M.J. ; GUILLOT, P.P. ; NG, K.M.: Flow through porous media: The Ergun equation revisited. *Ind. Chem. Fundam.* 18 (1979), S. 199–208
- [29] MUSKAT, M.: *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*. Michigan. Edwards, 1946
- [30] NIELD, D.A. ; BEJAN, A.: *Convection in Porous Media 2nd ed.* Berlin, Germany. Springer-Verlag, 1998
- [31] NOZAD, R.G. ; CARBONELL, R.G. ; WHITAKER, S.: Heat conduction in multiphase systems: I. Theory and experiment for two-phase systems. *Chem. Engng Sci.* 40 (1985), S. 843–855

- [32] OERTEL, H.: *Numerische Strömungsmechanik*. Braunschweig/Wiesbaden, Germany. Vieweg Verlag, 1999
- [33] OERTEL, H.: *Strömungsmechanik*. Braunschweig/Wiesbaden, Germany. Vieweg Verlag, 1999
- [34] PLAUTZ, D.A. ; JOHNSTONE, H.F.: Heat and mass transfer in packed beds. *A.I.Ch.E.* 1 (1955), S. 193–199
- [35] QUINTON, J.H. ; STORROW, J.A.: Heat transfer to air flowing through packed tubes. *Chem. Engng Sci.* 5 (1956), S. 245–257
- [36] ROGERS, J.T. ; TAHIR, A.E.: Turbulent Interchange Mixing in Rod Bundles and the Role of Secondary Flows. *ASME 75-HT-31* (1975)
- [37] SCHEIDEGGER, A.E.: *The physics of flow through porous media*. Toronto, Canada. University of Toronto Press, 1974
- [38] SCHULENBERG, T. ; SQUARERE, D. ; STRUWE, D. ; OKA, Y. ; BITTERMANN, D. ; AKSAN, N. ; MARACZY, C. ; KYRKI-RAJAMÄKI, R. ; SOUYRI, A. ; DUMAZ, P.: High Performance Light Water Reactor. *Nucl. Eng. and Design* 221 (2003), S. 167–180
- [39] SIEDER, E.N. ; TATE, G.E.: Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes. *Industrial and engineering Chemistry* 28 (1936), Nr. 12, S. 1429–1464
- [40] SLATTERY, J.C.: Flow of viscoelastic fluids through porous media. *A.I.Ch.E.* 13 (1967), S. 1066–1071
- [41] TODREAS, N.E. ; KAZIMI, M.S.: *Elements of Thermal Hydraulic Design*. New York, N.Y. Taylor and Francis, 2001
- [42] VAFAI, K. ; TIEN, C.L.: Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media. *Int. J. Heat Transfer* 24 (1981), S. 195 – 203
- [43] VOGT, B. ; STARFLINGER, J. ; SCHULENBERG, T.: Near Term Application of Supercritical Water Technologies. *Proc. ICONE 14, P 89732*. Miami, Florida, Juli 17-20, 2006
- [44] WAGNER, W. ; KRUSE, A.: *The Industrial Standard IAWPS-IF97 for the Thermodynamic properties and Supplementary Equations for other Properties, Properties of Water and Steam*. Heidelberg. Springer, 1997
- [45] WESSELING, P.: *Principals of Computational Fluid Dynamics*. New York, N.Y. Springer, 2001
- [46] WHITAKER, S.: Diffusion and dispersion in porous media. *A.I.Ch.E.* 13 (1967), S. 420 – 427
- [47] YAGI, S. ; KUNII, D.: Studies on heat and mass transfer near wall surface on packed tubes. *A.I.Ch.E.* 6 (1960), S. 97 – 104
- [48] ZAROTTI, F. ; CARBONELL, R.G.: Development of transport equations for multiphase systems II. *Chem. Engng Sci.* 39 (1984), S. 263 – 278