

Hochschule Karlsruhe  
Technik und Wirtschaft  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



Karlsruhe Institute of Technology

# Simulation eines Ultraschalltomographen im k-Space

Ausarbeitung zur Erlangung des Master of Science  
der Fachrichtung Informatik

am Institut für Prozessdatenverarbeitung und Elektronik (IPE)  
des Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

für die

Hochschule Karlsruhe (University of Applied Science)

vorgelegt von  
Michael Zapf

Karlsruhe, 14. April 2010

Referent:	Prof. Dr. Peter Henning
Koreferent:	Prof. Dr. Norbert Link
Projektbetreuer:	Dr. Nicole V. Ruiter

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

---

(Michael Zapf)

Karlsruhe, den 14. April 2010

# Danksagung

An dieser Stelle danke ich allen, die am Gelingen dieser Arbeit durch ihren fachlichen Rat und ihre Hilfe oder durch Motivation beigetragen haben. Insbesondere gilt mein Dank:

- Zuallererst meinem Professor Dr. Peter Henning für die spontane Bereitschaft die Betreuung, trotz vielfacher Belastung, zu übernehmen.
- Dr. Nicole Rüter, der Projektleiterin und meiner Mentorin, ohne die das Projekt Masterarbeit nicht möglich gewesen wäre.
- Der PDV-Gruppe des IPE für die Unterstützung durch die großzügige Bereitstellung ihres Arbeitsservers mit ausreichend Arbeitsspeicher für die Speicher- und rechenintensiven Simulationen.
- Robin Dapp, Marcus Hardt und Johannes Kissel als bereitwillige Sparringspartner für wilde Fourierraumsspekulationen und iteratives Korrekturlesen an meiner Ausarbeitung.

# Zusammenfassung

Am Institut für Prozessdatenverarbeitung und Elektronik (IPE) des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) wird ein 3D Ultraschall Computertomograph (USCT) für die Brustkrebsdiagnose entwickelt. Das Design eines neuen Demonstrators (USCT3Dv2) wurde in einer früheren Arbeit in einer Simulation bestimmt die rein auf den verwendeten Bildgebungsalgorithmen beruhte. Diese Simulationen sind zu rechenaufwändig um in hochaufgelösten Bildrekonstruktionen als Abbildungssystemkompensation zu dienen.

In der Optik existiert eine fourierbasierende Modellierung von Abbildungssystemen als lineare und invariante Systeme, die *k-Space-Analyse*. Aus elementaren Systemeigenschaften kann eine Abbildungsfunktion abgeleitet werden, die die komplexen Abbildungseigenschaften repräsentiert. Für einen neuen 3D-Demonstrator wurde die k-Space-Analyse evaluiert und implementiert.

Zwei Modellierungsansätze wurden verfolgt, jede eine Teilmenge der Systemeigenschaften beschreibend. *Ewaldsphären-Konstruktion* basierende Modellierung der weitläufig verteilten 3D-Apertur wurde entwickelt. Die resultierende Simulation zeigte eine gute Übereinstimmung mit der Referenz-Simulation über viele Metriken und bei deutlich reduziertem Ressourcenbedarf. Eine *Fraunhofer-Diffraktionsapproximation* basierende Simulation deckt die Systemeigenschaften bandbegrenzte Sensorik mit weitem Öffnungswinkel ab. Hier konnte die Simulation eine hohe Kohärenz gegenüber einer Referenzmessungen von 95,8% erzielen. Zusätzlich wurden aus inversen Simulationen Vorhersagen über ideale Aperturen und ideale Sensorikstrukturierung abgeleitet. Damit wurde dem existierenden Design eine gute Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen bescheinigt. Es konnte gezeigt werden das die beiden Modellierungen jeweils den gewählten Teil der Systemeigenschaften abdecken und damit die Anforderungen erfüllen. Im Ausblick wird ein integrierter Modellierungsansatz für die entwickelten Teilmodellierungen vorgeschlagen und erste Teilergebnisse präsentiert.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Ultraschall und Brustkrebsdiagnostik . . . . .	1
1.2	Konzept der Ultraschall Computertomographie als Bildgebungs- verfahren . . . . .	3
1.3	Ultraschall Computertomographie am KIT . . . . .	4
1.4	Motivation dieser Arbeit . . . . .	11
1.5	Wissenschaftlicher Beitrag . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Grundlagen der US-Bildgebung</b>	<b>13</b>
2.1	Stand der Wissenschaft . . . . .	13
2.2	Systembegriff . . . . .	14
2.3	Ultraschallphysik . . . . .	16
2.4	Optik und Ultraschall . . . . .	17
2.5	Diffraktive Ultraschallsysteme als lineare invariante Systeme . . .	20
2.6	Eigenschaften von Abbildungssystemen im Ortsraum . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Abbildungssysteme im Frequenzraum</b>	<b>31</b>
3.1	Fouriertransformation . . . . .	31
3.2	Whittaker-Shannon Abtastungs-Theorem . . . . .	36
3.3	Applikationen der Fourieranalyse . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Systemmodellierungen und Simulationen</b>	<b>49</b>
4.1	Evaluierung von Rahmenbedingungen . . . . .	49
4.2	Simulierung der Aperturen als Ebene-Wellen Quellen . . . . .	55
4.3	Modellierung von strukturierten US-Transducern . . . . .	56
4.4	Modellierung ausgedehnter Sensorik mit Ortsposition und Ab- strahlvektor . . . . .	71

4.5	Bestimmung der Sensorcharakteristiken als Referenzwerte . . . . .	73
4.6	Evaluierung der simulierten Sensorikcharakteristiken . . . . .	77
4.7	Simulation der idealen Apertur mit der Ewaldsphärenkonstruktion	79
4.8	Simulation der idealen Apertur mit der Fraunhofer Diffraktion . .	81
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>85</b>
5.1	Quantifizierung und Evaluierung . . . . .	85
5.2	Evaluation mit der Schwarzenberg'sche Simulation . . . . .	88
5.3	k-Space Support als Abbildungsfunktion . . . . .	98
5.4	Ableitung von optimalen Aperturen aus dem k-Space mit der in- versen Ewaldsphären-Konstruktion . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Diskussion und Ausblick</b>	<b>103</b>
6.1	Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	103
6.2	Ausblick . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Abbildungsanhang</b>	<b>119</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>135</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>139</b>

# 1 Einleitung

Ultraschall als bildgebendes Verfahren hat in der modernen medizinischen Diagnostik einen festen Platz eingenommen [24]. Obwohl Ultraschall gegenüber konkurrierenden Methoden wie der Röntgenuntersuchung einen entscheidenden Vorteil besitzt, den der völligen Gewebeverträglichkeit, besitzen herkömmliche US-Systeme auch deutliche Schwächen. Übliche Ultraschall Handscanner (Sonographie) erzeugen stark verrauschte Bilder (siehe Abb. 1.3 oben-rechts) von stark variierender Auflösung, was zu großem Interpretationsbedarf des behandelnden Arztes führt. Desweiteren erlaubt die Handführung des Sensorkopfes und die Druckdeformation des Gewebes weder eine genaue räumliche Lokalisierung einer festgestellten Auffälligkeit, noch eine Reproduktion der Ergebnisse.

## 1.1 Ultraschall und Brustkrebsdiagnostik

Die Reproduzierbarkeit von Bildern ist besonders wichtig mit Hinblick auf spezielle Applikationen, wie bei der Brustkrebsvorsorgeuntersuchung („Screening“), oder die Untersuchung von Brustkrebsverdachtsfällen.

Ein erhärteter Verdacht des Arztes soll dann möglicherweise durch eine Gewebebiopsie verifiziert werden. Die genaue räumliche Kenntnis des verdächtigen Bereiches in der Brust kann zu einer schonenderen und effektiveren Probeentnahme und/oder Behandlung führen. Die Röntgenmammographie, der Goldstandard für Voruntersuchungen, als 2D-Projektionsverfahren mit starker Verformung der Brust, liefert diese Information nur unzureichend.

### 1.1.1 Medizinische Rahmenbedingung

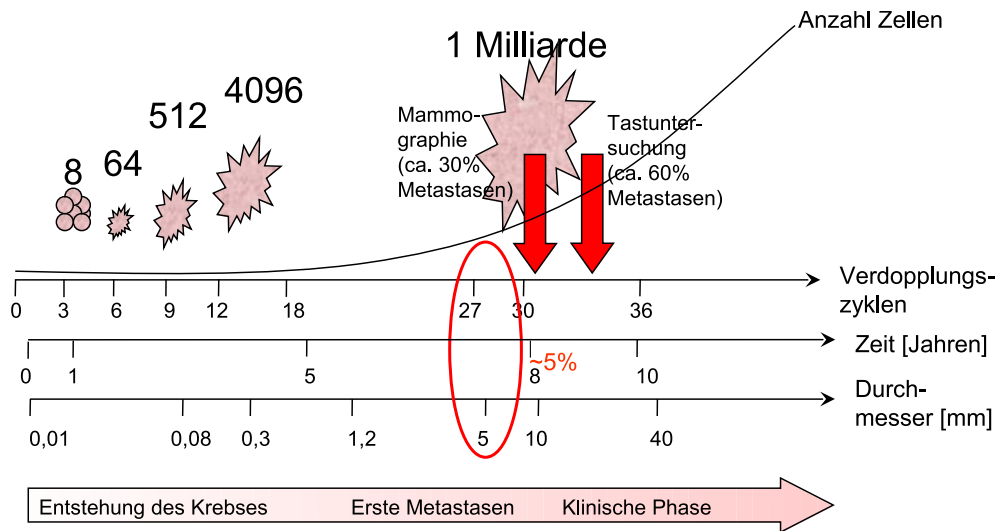


Abbildung 1.1: Medizinische Motivation für ein hochauflösendes Bildgebungsverfahren: Korrelation zwischen Verdopplungszyklen von Krebszellen, Tumorgröße und Metastasenwahrscheinlichkeit, Quelle: [41]

Brustkrebs ist eine der tödlichsten Krebsarten bei Frauen in den westlichen Industrienationen. Charakteristisch für diese Erkrankung ist der Zusammenhang zwischen der Überlebenswahrscheinlichkeit und Tumorgröße, siehe Abb. 1.1. Grund hierfür ist dass erst ab einer bestimmten Größe der wachsende Tumor anfängt Tochtergeschwulste (Metastasen) in die Blutbahn abzugeben, was mit einer sehr niedrigen Überlebenswahrscheinlichkeit korreliert [41]. Ziel aller diagnostischen Ansätze für Brustkrebs ist die Identifizierung zu einem möglichst frühen Zeitpunkt der Tumorentwicklung.

Der medizinische Goldstandard hierzu sind die regelmäßigen Mammographie-Screenings, welche Frauen ab einem Alter von 40 Jahren angeboten werden. Diese röntgen-basierenden Mammographie-Screenings besitzen neben der oben erwähnten ungenügenden Reproduzierbarkeit auch die Eigenschaft, dass sie ionisierende Strahlung verwenden.

Krebs- und krebsindizierende Strukturen besitzen typischerweise mehrere physikalischen Eigenschaften, die sie von dem sie umgebenden Haut-, Fett-, Drüsen- und Muskelgewebe unterscheiden. Hier verspricht ein Ultraschallverfahren, welches in der Lage ist mehrere dieser physikalischen Eigenschaften zu visualisieren,

eine verbesserte Sensitivität, als auch Spezitivität der Krebsdetektion gegenüber existierenden monomodalen Verfahren.

## 1.2 Konzept der Ultraschall Computertomographie als Bildgebungsverfahren

Grundlegende Voraussetzung jeder Ultraschallmessung ist das Vorhandensein eines Trägermediums für die Ultraschallwellen. Ultraschall-Frequenzen von ca. 1 bis 10 MHz, wie in der Medizin verwendet, werden in dem sehr wasserhaltigen organischen Material des Körpers gut transportiert. Mit steigender Frequenz nimmt die theoretische Auflösung, aber auch die Signaldämpfung zu.

Die Ultraschall Computertomographie (USCT) wird anhand eines 2D-Schemas erläutert, die prinzipiellen Konzepte entsprechen denen des 3D-Tomographen.

Im schematischen Ablauf einer Reflektionstomographie (siehe Abb. 1.2) gibt ein Ultraschall-Sender eine Welle in den Messraum ab.

In der Mitte der kreisförmigen Messbehälter in Abb. 1.2 ist ein beispielhaftes Messobjekt platziert, ein sogenannter Punktstreuer. An einem Objekt mit einer anderen Ultraschallgeschwindigkeit (das Messobjekt, die Luft-Wasser Grenzfläche, etc.), wird die Wellenfront in Abhängigkeit des Schallgeschwindigkeitsunterschiedes gebrochen und reflektiert. Die seit dem aussenden eines Signalpulses messenden Empfänger nehmen Druck über Zeitsignale auf, siehe 1.2. Die räumliche Verteilung der Sensoren um das Messobjekt ermöglicht das Durchführen zweier Arten von Tomographie, der *Transmissions- und der Reflektionstomographie*. Auch unterscheidbar durch den Zwischenwinkel  $\alpha$  zwischen den Abstrahl- bzw. Empfangsrichtungen der Sensoren.

Vereinfacht kann gesagt werden dass die Transmissionstomographie, definiert über  $\alpha > 90^\circ$ , die Gewinnung von zwei physikalischen Modalitäten, der Schallgeschwindigkeit als auch der Dämpfungseigenschaften erlaubt, siehe Abb. 1.2 links. Der Fall der Reflektionstomographie, mit Zwischenwinkeln  $\alpha < 90^\circ$ , erlaubt vor allem die Gewinnung von Reflektionen durch Schallgeschwindigkeitsunterschieden. Diese treten beim Übergang zwischen zwei Gewebearten auf und beinhalten daher eine Art morphologische Information, siehe Abb. 1.2 rechts.

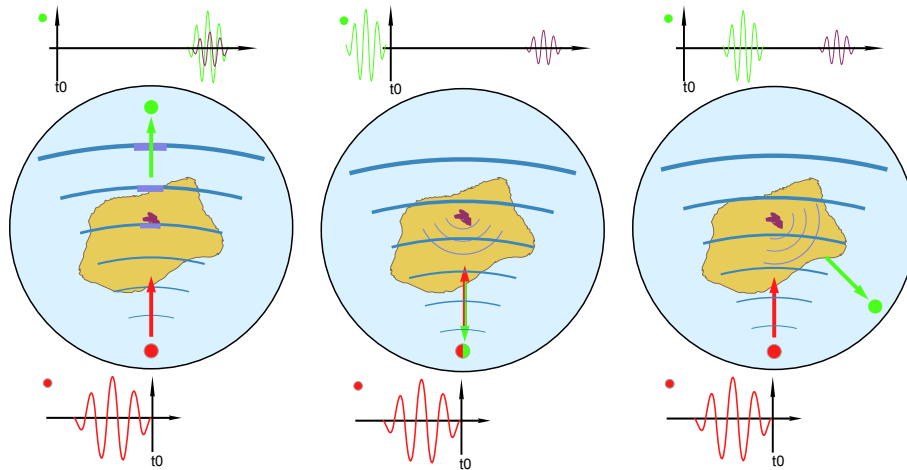


Abbildung 1.2: *Datennahmemodi der SAFT Ultraschallbildgebung: (links) Transmissionsmessung; die Information ergibt sich als Dämpfung der Amplitude oder Zeitverzögerung durch Schallgeschwindigkeitsunterschiede; (mitte) Puls-Echo Reflektionsmessung mit Sender und Empfänger nahe beieinander, Gewinnung von morphologischen Eigenschaften durch Reflektion an Kanten, (rechts) Reflektionsmessung über räumlich getrennte Sender und Empfänger.*

### 1.3 Ultraschall Computertomographie am KIT

Am Institut für Prozessdatenverarbeitung und Elektronik (IPE) des Karlsruher Institut für Technologie (KIT) wird ein solches Ultraschall Computertomographie Verfahren entwickelt. Erzielt werden sollen reproduzierbare räumliche Bilder von organischem Gewebe, vergleichbar mit der Magnet-Resonanz-Tomographie (MRT), spezialisiert auf die Detektion von Brustkrebs und Vorläuferstrukturen. Als Frequenzbandbreite der verwendeten Schallwellen wurden 2 bis 4 MHz gewählt [46]. Dies ergab sich aus der Anwendung Brustkrebsdetektion mit spezifischen Eindringtiefen- und Dämpfungsanforderungen für die Schallwellen.

Mit den bisherigen USCT-Demonstrator (USCT3Dv1) wurde das prinzipielle Verfahren an unbeweglichen Testobjekten (Phantomen) ausgearbeitet und optimiert. Das verwendete medizinischen Brustphantom, Modell 051 der CIRS, Inc. [5], hat brustähnliche Eigenschaften für drei verschiedene Abbildungssystemmodalitäten

### 1.3 Ultraschall Computertomographie am KIT

Ultraschall-, Röntgen- und MRT-basierende. Dadurch wurde ein direkter Vergleich der drei Verfahren möglich, siehe Abb. 1.3. Solche Querschnittinformationen

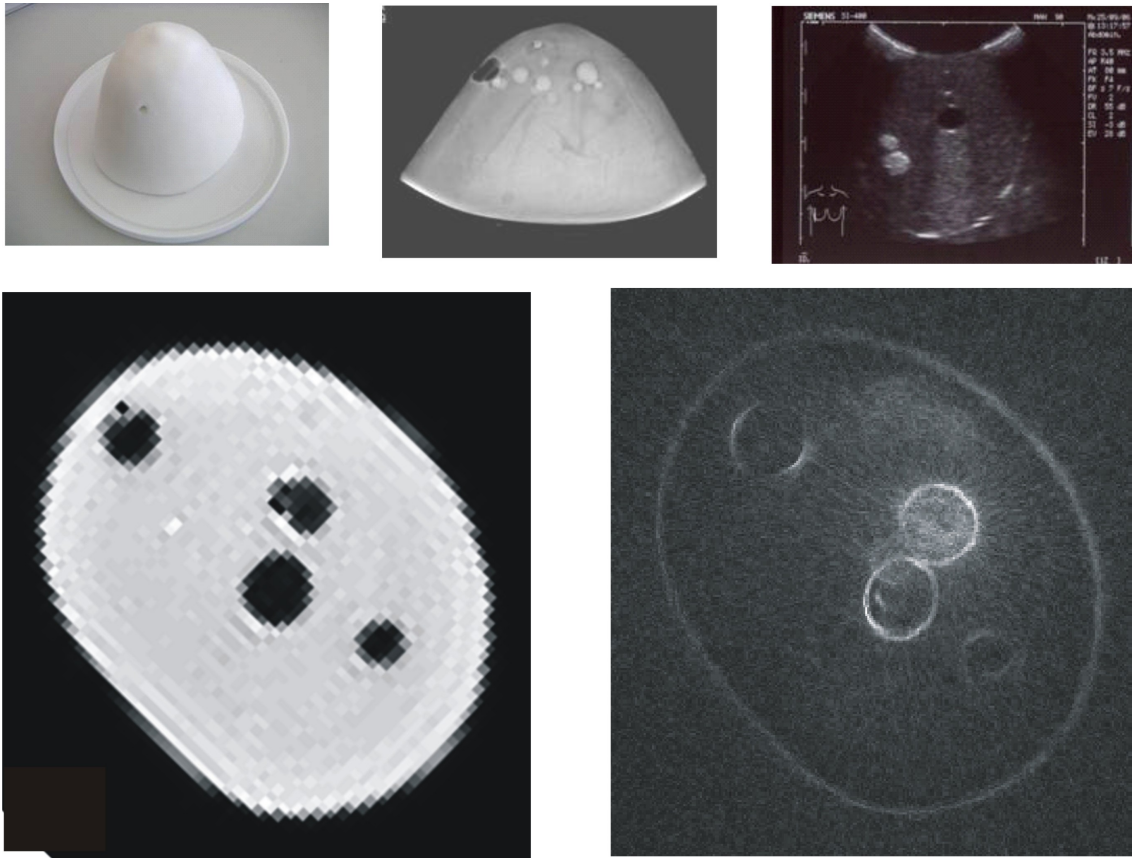


Abbildung 1.3: *Bildgebung eines Brust Phantoms mit verschiedenen medizinischen Verfahren: (links-oben) medizinisches Biopsiebrustphantom mit krebsähnlichen Strukturen, (mitte-oben) Röntgenmammogramm, (rechts-oben) Sonographie Bildgebung, (links-unten) MRT Bildgebung, (rechts-unten) USCT Reflektionsbild*

werden in einem sequentiellen Messverfahren in ca. 8 Stunden aufgenommen und später zu Bildern rekonstruiert. Dieses Vorgehen der Datengewinnung ist für lebendes Gewebe durch den langen Zeitraum ungeeignet.

Der nächste Entwicklungsschritt des Projekts ist die Entwicklung eines Demonstrators mit den benötigten Eigenschaften für erste in-vivo Messungen. Ziel ist das Vermessen von Probandinnen im Rahmen einer medizinischen Studie, siehe

## 1 Einleitung

schematische Abb. 1.4.

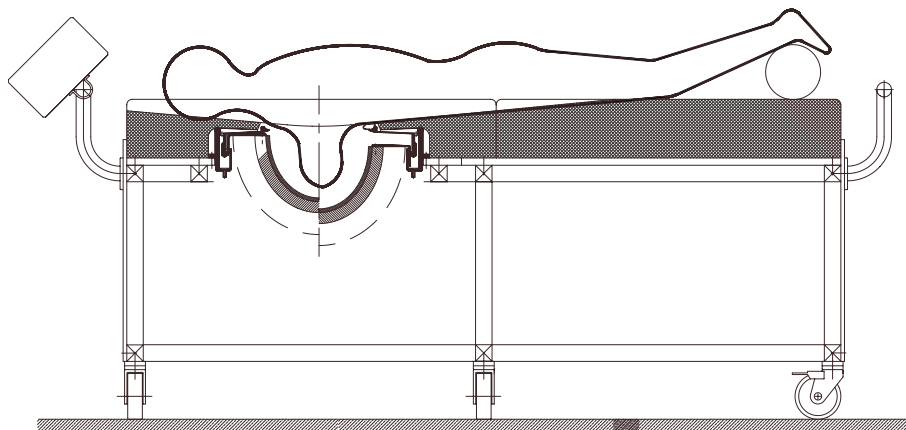


Abbildung 1.4: *USCT3Dv2 schematischer Messablauf mit Probandin: die Patientin liegt auf einer Matratze in die mittig eingelassen der Wasser gefüllte Messbehälter ist. Während der Messung kann der Messbehälter rotiert und gesenkt werden um mehr verschiedene Messpositionen zu erhalten, die Patientin ist davon entkoppelt da sie nur auf der Matraze aufliegt.*

Ein geeigneter Prototyp, ein *3D USCT Demonstrator der 2. Generation (USCT3Dv2)*, befindet sich im aktuellen Aufbau. Dieser ist u.a. durch weitere Parallelisierung der Datenaufnahme-Hardware (Daten-Akquise-Hardware, DAQ-Hardware)) für eine deutliche Reduktion der Mess- und Aufnahmezeiten optimiert, vollständige Messungen werden in unter 3 Minuten möglich sein.

### 1.3.1 Komponenten des USCT-Demonstrators

#### Messbehälter

Der im Aufbau befindliche Ultraschall Computer Tomograph (siehe Abb. 1.5) besteht aus einem semi-ellipsoidalen Messbehälter mit in die Wand eingelassenen US-Wandlern. Der oberste horizontale innere Durchmesser beträgt 17,1 cm, die Tiefe 12,6 cm, und ist optimiert für die Aufnahme einer durchschnittlichen weiblichen Brust (Cup B-C), [28]. Der Gesamtmessbehälter ist außerdem rotier-, heb-





Abbildung 1.5: *USCT3Dv2 Gesamtaufbau: (Mitte) zerlegter Messaufbau, (rechts in der Liege) eingebaut der Messbehälter mit leeren Sockeln für Sensoren, darunter Hub- und Rotationsmechanik, (links-oben) Kontroll-PC, (rechts-mitte) DAQ Hardware*

und senkbar, wodurch sich innerhalb eines gewissen Rahmens beliebige neue geometrische Messpositionen erzielen lassen. Mit Translation- und Rotation lassen sich mehrere Millionen einzigartige Messkombinationen für ein typische Messkonfiguration erzielen. Als Koppelmedium zwischen den Schallwandlern und einem mittig positionierten Messobjekt wird entgastes Wasser dienen.

#### **Ultraschall-Sensorik**

Die Schallwandler basieren auf dem Piezo Effekt und sind für einen Frequenzbereich zwischen 2 und 4 MHz optimiert. Die verwendeten Ultraschallsensoren sind als Arrays mit mehreren Wandlern aufgebaut. Sie sind individuell und differenziert als Sender und Empfänger ansteuerbar [10]. Die für das USCT Projekt

## 1 Einleitung

speziell entwickelten Sensoren werden unfokussiert betrieben, sowohl als Sender wie als Empfänger. Eine charakteristische Eigenschaft ist die im Vergleich zur Sonographie Sensorik kleine aktive Fläche um möglichst Kugelwellen senden und empfangen zu können. Dadurch ergibt sich ein geringer empfangener und gesendeter Schalldruck, jeweils für Empfänger und Sender. Das macht es nötig die Signal-to-Noise-Ratio (SNR) von den Messsignalen mit einer aufwendigen Signalverarbeitungskette zu erhöhen.

### Digitalisierung und Signalverarbeitung

Die Datennahme erfolgt durch ein parallele DAQ Hardware [21] mit 480 parallelen Kanälen, welche jeweils mit 10 MHz und 12 Bit digitalisiert werden. Verwendete Methoden zur SNR Optimierung sind ein schmaler analoger Bandfilter, Mittelung von Messungen, als auch eine aufwendige spätere digitale Signalverarbeitung in der Bildgebungssoftware.

#### 1.3.2 Bildgebungsablauf

Ein beispielhafter Bildgebungsablauf, von der Messung bis zum Bild, ist mit einem typischen Messobjekt in Abb. 1.6 dargestellt.

Bei einer USCT Messung wird ein US-Schallwandler durch Anlegen eines Spannungspulses zum Schwingen angeregt. Dieser Puls ist für das USCT Projekt ein auf die Sensorikbandbreite angepasster gedämpfter sinoider Puls mit einer Mittelfrequenz zwischen 2 und 3 MHz. Durch den piezoelektrischen Effekt beginnt der angeregte Transducer (Schallwandler, US-Sensorik) mechanisch zu schwingen an und gibt über eine Einkopplung ins Wasser eine Kugelwelle unfokussiert in den Messraum ab.

Mit dieser Anregung des Senders beginnt die Messung der durch den inversen Piezoeffekt an den Empfangssensoren anliegenden Spannung (siehe Abb. 1.6), wobei alle Transducer eines Sensorarrays gleichzeitig messen. Diese den Schalldruck über Zeit repräsentierende Spannung wird in Phase und Amplitude abgenommen und von der DAQ Hardware digitalisiert und gespeichert. Diese so gewonnenen Daten werden für jede Sender-Empfänger-Kombination als *Amplituden Scan*

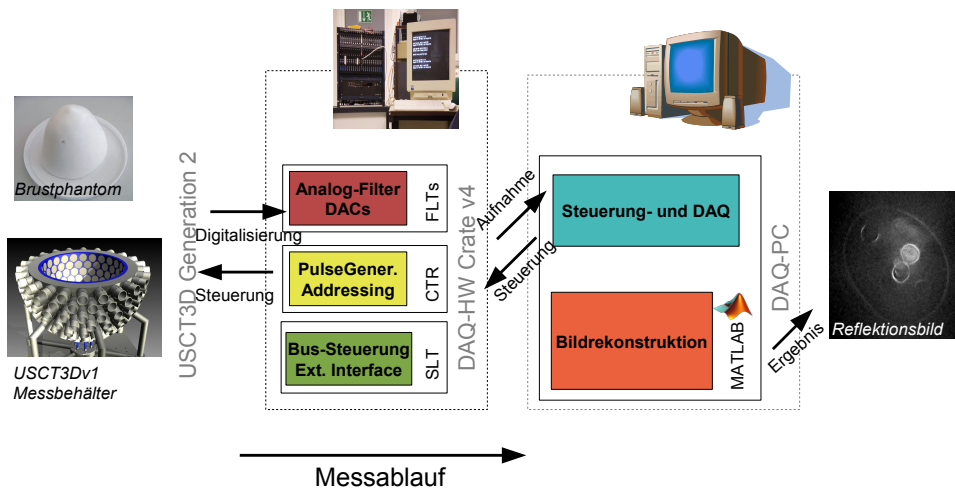


Abbildung 1.6: *System- und Messablaufschemata USCT3Dv2 mit den Schritten eines typischen Messablaufs, Ablauf von links nach rechts: 1. Einbringen eines Brust Phantoms als Messobjekt in den Messbehälter, 2. DAQ Hardware beginnt zu messen, Senderanregung mit dem Kontrollboard (CTR) bei gleichzeitiger Digitalisierung der Empfänger mit den FLTs; 3. Übertragung der Messdaten mit der SLT Karte über ein Ethernet-Interface auf einen PC; 4. Matlab basierende Bildgebung mit dem SAFT Algorithmus)*

oder *A-Scan* bezeichnet. Der Vorgang wird für alle vordefinierten räumlichen Sende- und Empfangspositionen wiederholt, typischerweise mehrere Millionen Positionen.

### 1.3.3 Bildgebung mit der *Synthetic Aperture Focussing Technique*

Bei der sich anschließenden Bildrekonstruktion der Reflektionstomographie (siehe Abb. 1.3 links-unten) werden 3D-Bildvolumen, basierend auf dem *Synthetic Aperture Focussing Technique* (SAFT) (auch *Full-Aperture-Sum-Delay Algorithmus*, *Ellipsoid Backprojection*, *SAR*), erzeugt [1][7]. Im Gegensatz zu der in der Sonographie üblichen „Phased Array Technologie“ ist hier im Rahmen der Si-

## 1 Einleitung

gnalabtastgenauigkeit beliebiges Ortsfokussieren nach der Messung während der Bildrekonstruktion möglich, mehr hierzu unter [36].

Die Grundidee ist die Umkehrung des Messvorgangs: es wird für jeden Zeitpunkt in einem gemessenen A-Scan und für die räumliche Sender- wie Empfängerpositionen die potentiellen Reflektionsstellen im Bildraum bestimmt. In allen potentiellen Reflektionsstellen, die im 3D-Raum einen Ellipsoid beschreiben, wird der zugehörige Messwert im Bild aufaddiert. Dies wird für alle A-Scans wiederholt. Dadurch dass verschiedene räumliche Sender-Empfängerkombinationen unterschiedliche Ellipsoide erzeugen, überlagern sich im Idealfall alle diese Ellipsoide nur im tatsächlichen Reflektionspunkt. Für genügend A-Scan mitteln sich die positiven und negativen Signalanteile aus und gehen im Hintergrundrauschen des Bildes unter. Dies wird als kohärente Bildgebung bezeichnet, da eine kohärente (gleichphasige) Überlagerung der Phasen der Signale nötig ist. Dies stellt große Anforderungen an die Präzision des Abbildungssystems und das Wissen über die geometrische Meßkonfiguration. Eine vereinfachte, robustere Variante ist die inkohärente Bildgebung bei der mit der rein positiven Einhüllenden (Hilbert-Transformation) der A-Scans gearbeitet wird.

## 1.4 Motivation dieser Arbeit

Für den neu aufgebauten Ultraschalltomographen der zweiten Generation (USCT3Dv2) soll ein, die Abbildungseigenschaften vorhersagendes, Modell mit Hilfe der Fourier-Systemtheorie erstellt werden.

Dies kann dann dazu dienen die bisher erreichte Abbildungsqualität einzuschätzen, und Bereiche mit potentielltem Optimierungspotential zu identifizieren.

Es ist eine generische *proof-of-concept* Implementierung in Matlab gewünscht, der Standardentwicklungsplattform des USCT Projekts. Eine quantitative Evaluierung für die im USCT Projekt existierenden und weitere theoretische Abbildungssystemvarianten sind zu erstellen und miteinander zu vergleichen.

Von Interesse ist ebenso die Vorhersage optimaler Aperturgeometrien und quantitativer Metriken zur absoluten Bewertung der Abbildungsgüte von Abbildungssystemen.

## 1.5 Wissenschaftlicher Beitrag

- Evaluation und Einführung in die k-Space basierende Fourieranalyse nach J. Goodman *Fourier Optics* [11] für das USCT Projekts.
- Modellierung und Implementierung einer schnellen und speichereffizienten Simulation für mehrere US-Abbildungssysteme
- Validierung und Verifikation, Quantifizierung und Vergleich von Abbildungseigenschaften mit gemessenen Referenzdaten
- Evaluation und Vergleich der Modellierungen mit den Referenzdaten der Arbeit von G. Schwarzenberg [28].



# 2 Grundlagen der US-Bildgebung

## 2.1 Stand der Wissenschaft

Das Thema *Fouriergestützte Simulation von Abbildungssystemen* die auf Ultraschall basieren ist seit vielen Jahren ein aktives Forschungsgebiet. Im ursprünglichen Design des USCT wurden ähnliche Konzepte ([46] Seite 48-51 Kap.3.1.2) erstmalig für eine Einschätzung der 3D-Eigenschaften der Apertur verwendet.

### Existierende Konzepte zur Simulation von Ultraschallsystemen

Es existieren Applikationen zur Simulation von Ultraschall Sensorik, u.a. Jensens *Field II* [16], jedoch sind sie optimiert für 2D-„Phased array“-Sensoren und auch für planare Sensorabstrahlflächen. Generischere Ansätze als Finite-Elemente Simulation beispielweise mit *ANSYS* [3] oder *Wave3000* [6] als Modellierungswerkzeuge wären zu rechenaufwendig und nicht in der Lage, das Gesamtsystem in 3D und/oder mit der nötigen Auflösung zu modellieren, wie sich in vorherigen Arbeiten herausstellte [42].

*Das USCT Projekt als 3D-SAFT-Abbildungssystem erfordert einen flexiblen Ansatz der im Rahmen der Möglichkeiten vorhandener Computerhardware liegt.*

Im Rahmen einer Doktorarbeit von G.F. Schwarzenberg (2008) wurde bereits eine realitätsnahe Simulation und fundierte Vorhersage eines USCT-Abbildungssystems durchgeführt [28]. Konzept dieser Arbeit war eine Verwendung der tatsächlich vorhandenen Bildgebungsalgorithmen um realistische Abschätzungen der zu erwartenden Abbildungen und ihrer Qualitätsmetriken zu erhalten. Diese werden als Referenz und zur Evaluation verwendet.

## Fourierbasierendes Systemkonzepte zur Simulation von Ultraschallsystemen

Das Konzept der vorliegende Arbeit soll ein *fourierbasierendes Modellierungssystem* sein. Dieses wurde kompakt beschrieben als: „...i.e. the use of spatial- and temporal-frequency domain representations of ultrasound system impulse responses and scattering functions to understand and analyze both conventional and hypothetical imaging methods.“ J. Goodman [11]. Dies soll vereinfachte Betrachtung des USCT-Systems als (wellenbasiertes) Bildgebungssystem ermöglichen.

Folgerichtig stützt sich die Arbeit bei den Konzepten und Theorien vor allem auf das hervorragende Buch von J. Goodman *Fourieroptics* [11]. Zusätzlich wurde das *'k-Space tutorial'* von Anderson und Tahey [2] als auch *'Principles of Computerized tomographic Imaging'* von Kak und Slaney [17] herangezogen.

Voraussetzungen und Themen, die von dieser Arbeit berührt werden, sind vielfältig: medizinische Bildgebung, US-Sensorbau, Bildgebungssystembetrachtungen, Signalverarbeitung, Wellenphysik usw. Im Folgenden werden die notwendigen Konzepte und Ideen eingeführt. Für ausführliche Einführungen und Beweisführungen wird auf die angegebenen Quellen und Literatur verwiesen.

## 2.2 Systembegriff

Kernbegriff in der Fourieroptik ist die Beschreibung eines Abbildungssystems als *System*. Der verwendete Systembegriff mit zugehörigen spezifischen Eigenschaften und Qualitäten wird eingeführt. Der Begriff des *Systems* stammt ursprünglich aus der Elektronik und bezieht sich auf Bauteilnetze. Dort beschreibt er das Verhalten eines Eingangsparameters zu einem Ausgangsparameter (z.B.: Spannung, Strom, Widerstand...), über einen unabhängigen Parameter, wie z.B. die Zeit. Mathematisch ausgedrückt, verbindet ein 2D-System die Funktion  $g_1$  mit  $g_2$  mit den beiden unabhängigen Parametern  $x$  und  $y$ :

$$g_2(x_2, y_2) = S(g_1(x_1, y_1)) \quad (2.1)$$

durch die Systemantwort  $S$ .



### 2.2.1 Linearität

Eine Unterklasse dieses allgemeinen Systembegriffs ist das *lineare System* mit den Eigenschaften Determinismus und der Überlagerbarkeit/Zerlegbarkeit für seine Eingangsfunktionen. Dies entspricht mathematisch:

$$S\{ap(x_1, y_1) + bq(x_1, y_1)\} = aS\{p(x_1, y_1)\} + bS\{q(x_1, y_1)\} \quad (2.2)$$

mit den beliebigen Eingangsfunktionen  $p, q$  und der sich ergebenden *Systemantwort*  $S$ .

Lineare Systeme beschreiben also Systeme auf die verschiedene oder komplexe Stimuli (Anregung) wirken, die Reaktion des Systems ist für den komplexen Stimulus, wie auch die Summe der zerlegten Stimuli, identisch. Diese additive *Superposition* (Überlagerung, Synthese) von elementaren Stimulie-Funktionen können dann beispielsweise Teilelemente des Systems (Transducer, Array) oder die einzelnen Frequenzbänder sein.

Solch eine Überlagerung kann mathematisch als Integral, genannt das *Superpositionsintegral* beschrieben werden, hier für einen 2D-Ortsraum:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(x_{i_1}, y_{i_1})h(x_{i_1}, y_{i_1}; x_2, y_2) dx_{i_1} dy_{i_1} \quad (2.3)$$

mit  $h$  als *Impulsantwort* des Systems und  $g_1$  einem räumlichen Objekt im System und  $g_2$  der Systemantwort auf  $g_1$ .

### 2.2.2 Invarianz

Eine weitere Vereinfachung des Systembegriffs findet statt wenn für die Systemfunktion  $h$  Invarianz oder eine nichtfunktionale Abhängigkeit angenommen wird. Für diesen Fall nimmt das Superpositionsintegral eine einfachere Form an, hier mit Invarianz gegenüber dem Ort:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(x_{i_1}, y_{i_1})h(x_2, y_2) dx_{i_1} dy_{i_1}. \quad (2.4)$$

Beispielsweise, für den Fall einer reinen Distanzabhängigkeit:

$$g_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_{i_1}, y_{i_1})h(x_{i_1} - x_2, y_{i_1} - y_2) dx_{i_1} dy_{i_1} \quad (2.5)$$

Dieses lässt sich als die *Konvolution (Faltung)* des Systemeingangs mit der Impulseantwort interpretieren lässt, also:

$$g_2 = g_1 \otimes h \quad (2.6)$$

Die Eigenschaften eines linearen Systems sind für weitere Betrachtungen wünschenswert.

Im Weiteren wird diskutiert, ob sich solche linearen Systembetrachtungen auf die Ultraschallbildgebung anwenden lassen.

### 2.3 Ultraschallphysik

Der Bogen zur Anwendbarkeit der Systemtheorie für die Ultraschallbildgebung wird über den Ultraschall als Wellenphänomen, beispielsweise von Insana and Brown prägnant eingeführt: *„Fluids have elasticity (compressibility  $\kappa$ ) and inertia (mass density  $\rho$ ), the two characteristics required for wave phenomena in a spatially distributed physical system whose elements are coupled. Elasticity implies that any deviation from the equilibrium state of the fluid will tend to be corrected; inertia implies that that the correction will tend to overshoot, producing the need for a correction in the opposite direction and hence allowing for the possibility of propagating phenomena - acoustic pressure waves.“* [14]

Solch ein Verhalten lässt sich näherungsweise als lineares Schwingsystem folgendermaßen beschreiben:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \rho_0 \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

mit  $p$  als Druck,  $\rho_0$  als Dichte und  $\kappa$  als der Kompressibilität. Dies ist die ein-dimensionale Form der (skalaren) Wellengleichung über der Zeit  $t$  und dem Ort  $z$ .

Womit Ultraschallinteraktion in Medien als lineares System plausibel, und die Ultraschallwelle der elektromagnetischen *Optik* als vergleichbar eingeführt ist. Für weitere Betrachtungen von Ultraschallsystemen als Bildgebungssystem wird auf die existierenden Theorien für die elektromagnetischen Wellen zurückgegriffen, der Bereich der Physik der als *Optik* bekannt ist.

## 2.4 Optik und Ultraschall

Der Bogen zur elektromagnetischen Optik, für die ausführliche Konzepte und Theorien für die Bildgebung existieren, wurde über den Wellencharakter beider Phänomene geschlagen. Welche Modellierungen und Beschreibungen bietet die Optik an? Eine Übersicht der verschiedenen komplexen Ansätze liefert die Abb. 2.1.

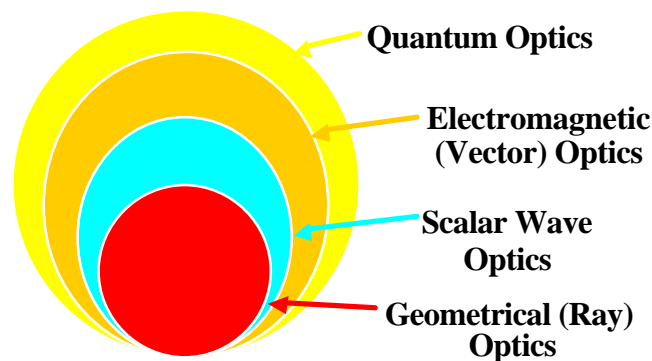


Abbildung 2.1: Hierarchie der Optik laut [15], von der Snell'schen geometrischen Optik über die wellengleichungsbasierte Diffraktionsoptik bis zur Quantenoptik.

### 2.4.1 Geometrische Optik: Reflektion und Brechung

Die älteste und einfachste Beschreibungsmöglichkeit ist der Weg über die *geometrische Optik*, die Wellenphänomene als Strahl approximiert. Damit lässt sich die Interaktion des Ultraschallsystems mit dem zu messenden Objekt in Abhängigkeit der Wellenlänge der verwendeten Welle und des Mediums bestimmen. Dies ist über die Snell'sche Regel formuliert:

$$n_1 \cdot \sin \alpha_2 = n_2 \cdot \sin \alpha_1 \quad (2.8)$$

mit  $n_1$ ,  $n_2$  als Schallgeschwindigkeit und  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  als Zwischenwinkel zur Grenzfläche, siehe Abb. 2.2.

Für Objekte größer  $\lambda/2$  gilt die Snell'sche Regel für Reflektion und Streuwinkel und ist vom skalaren Wert der Schallgeschwindigkeit abhängig.

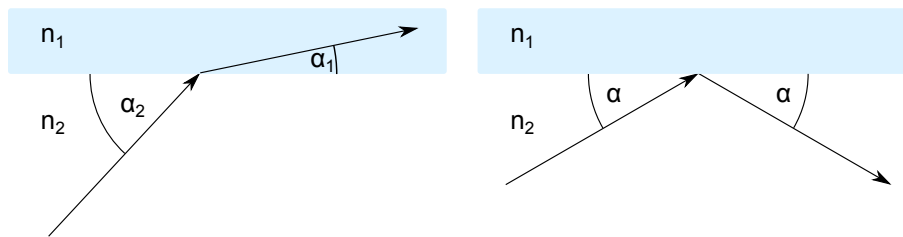


Abbildung 2.2: Elementare Effekte der geometrischen Optik: (links) Refraktion (Brechung) an einer Grenzschicht mit Eintrittswinkel  $\alpha_1$  und Austrittswinkel  $\alpha_2$ , (rechts) Reflexion an einer Grenzschicht dem Winkel  $\alpha$ .

Sind das abzubildende Objekt, die Elemente des Abbildungssystems und die Trägerwelle in ungefähr gleicher Größenordnung, ist diese Beschreibung unzureichend, die nächst-komplexere Modellierung wird benötigt.

## 2.4.2 Skalare Wellenoptik: Interferenz und Beugung (Diffraction)

Die Grundidee hier ist die Beschreibung von US über Wellen statt Strahlen. Elemente zur eindeutigen Charakterisierung einer Welle sind ihre *Amplitude*, also die Stärke ihrer Auslenkung und die Richtung ihrer Ausbreitung als *Richtungsvektor*. Der zentrale Punkt der Wellenoptik ist der Ansatz, dass Wellen eine *Phase* besitzen, welche sich additiv oder subtraktiv überlagern können.

*Beugung (Diffraction)* ist der Effekt der hieraus resultiert, welcher über Interferenz von Huygen'sche Elementarwellen modelliert werden kann, siehe Abb. 2.3.

Übertragung in den Ultraschallkontext: Punktstreuer (ein Objekt mit einer Ausdehnung nahe oder unter der Wellenlänge) lässt sich mit Snell'scher Strahlengeometrie nicht mehr beschreiben. Das prognostizierte Verhalten einer reinen richtungsabhängigen Reflektion tritt so in der Realität nicht mehr auf. Einerseits scheint sich die Welle um den Punktstreuer herum auszubreiten, andererseits zeigt dieser Streuer ein allseitiges Abstrahlverhalten. Diese Effekte werden unter dem Oberbegriff Beugung (oder Diffraction) zusammengefasst und gehen auf physikalische Effekte zurück, die sich durch das in Betracht ziehen einer Welle mit einer

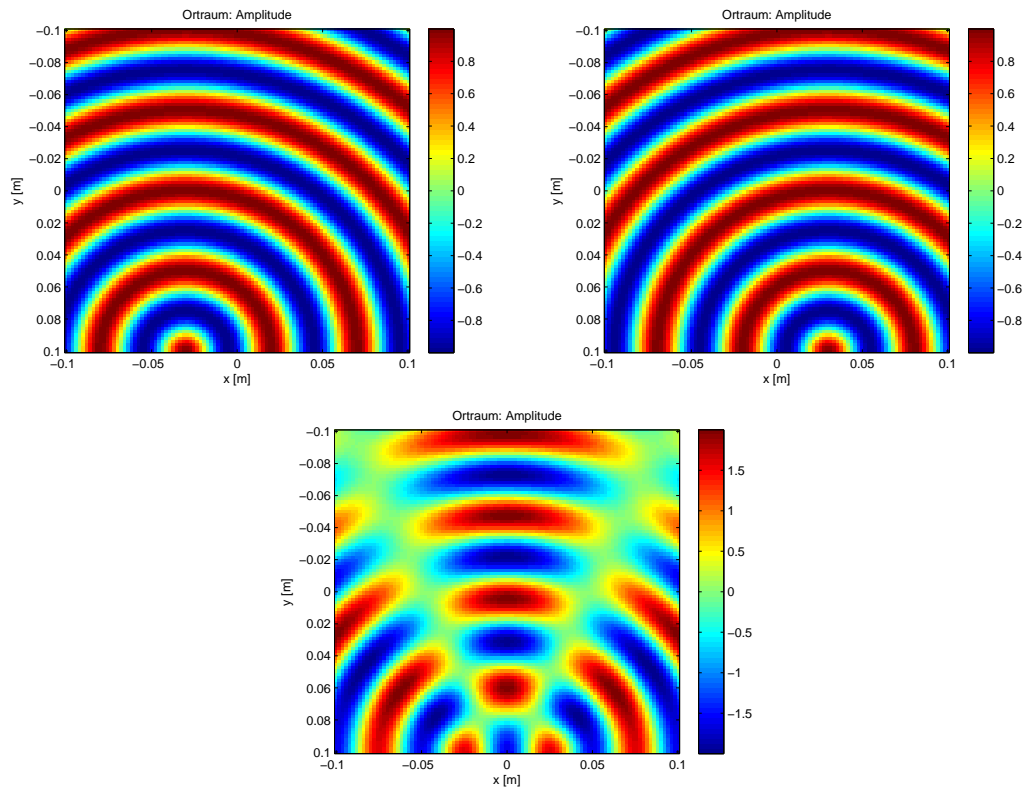


Abbildung 2.3: *Diffraktion zweier Ringwellen: (oben links, oben rechts) zwei zeitstationäre, monochromatische Ringwellen mit der Wellenlänge 0,02 m im Ortsraum, die Wellenzentren um 0,06 m voneinander versetzt; (unten) additive und subtraktive Interferenzen der beiden überlagerten Ringwellen*

Phase erklären lässt.

Mit dieser Eigenschaft lässt sich die Interaktion mit Objekten nahe und unter der betrachteten Wellenlänge beschreiben. Dies ist notwendig, da für USCT sowohl die zu betrachtenden Objekte nahe oder unterhalb der verwendeten Wellenlänge liegen, als auch die Funktionselemente des USCT-Abbildungssystems [46].

Ein Gegenbeispiel für ein System in denen das nicht nötig ist, sind typischerweise elektrische, da ein Kondensator oder anderes aktives Bauteil im Vergleich zu der elektrischen Wellenlänge sehr klein ist.

### 2.4.3 Vektorielle Wellenoptik und darüber hinaus

Eine vektorielle Beschreibung ist beispielsweise für die elektromagnetischen Wellen notwendig, da diese durch die beiden vektoriellen Größen — elektrisches Feld und magnetisches Feld — getrieben sind. Im US-Bildgebungsfall, kann der Druck typischerweise als näherungsweise skalare Größe angenommen werden [13] [39]. Die skalare Beschreibung ist ausreichend, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind [11]:

- diffraktive Strukturbetrachtung nicht zu nahe an der Apertur (Fernfeld)
- Apertur ist groß im Vergleich zur Wellenlänge.

Die Quantenoptik entfällt für Materiewellen, da Quanteneffekte erst viele Größenordnung unter der im USCT Demonstrator vorhandenen und relevanten Bereich (ungefähr 1 m bis  $1 \times 10^{-4}$  m) auftreten.

## 2.5 Diffraktive Ultraschallsysteme als lineare invariante Systeme

Gesucht ist also eine skalare Wellenbeschreibung für diffraktive Systeme, welche die oben geforderten Bedingungen als ein System mit Invarianz und Linearität erfüllt.

### 2.5.1 Räumliche und zeitliche Invarianz im US Kontext

Hier folgt eine physikalische Interpretation ob der Systemansatz *invariant* für USCT anwendbar ist. Zeitliche Invarianz bedeutet: zwischen nacheinander gesendeten oder empfangenen Pulsen verändert (altert, etc) das System sich nicht. Dies ist mit guter Näherung erfüllt da die verwendeten Piezokeramiken chemisch stabil sind und weit unterhalb der potentiellen Depolarisierungsspannung (mehrere 100 V) betrieben werden.

Räumliche Invarianz bedeutet, dass die Systemeigenschaften für jeden betrachteten Raumpunkt identisch sind, was i.A. nicht erfüllt ist. Für begrenzte Raumbere-

reiche, eine *Region-of-Interest (ROI)*, kann diese Annahme akzeptabel sein.

## 2.5.2 Skalare Wellengleichung für homogene Medien

Der erste Teil wird über eine allgemeine mathematische Beschreibung für ein Wellenfortsetzungssystem begonnen und dann als physikalisch akzeptable Interpretation eingeführt.

Es wird mit einer reinen monochromatischen und skalaren Wellengleichung für homogene Medien begonnen, mit  $u(P, t)$  für den Ort und Zeit,  $P(t)$  für die Welle:

$$u(P, t) = A(P) \cdot \cos(2\pi f \cdot t + \phi(P)) \quad (2.9)$$

mit  $A(P)$  als ortsabhängiger Amplitudenfunktion und  $\phi(P)$  als Phasenfunktion.  $u(P, t)$  repräsentiert im US-Fall den Schalldruck und  $f$  die Zeitfrequenz.

Eine kompaktere Schreibweise unter Nutzung der komplexen Zahl  $j$  sieht folgendermaßen aus:

$$u(P, t) = \Re(U(P)e^{-j \cdot 2\pi f \cdot t}) \quad (2.10)$$

mit  $\Re$  als „realer Anteil von“ und:

$$U(P) = a(P)e^{-j \cdot 2\phi(P)} \quad (2.11)$$

als komplexwertige Funktion  $U(P)$ .

Da sie für physikalisch Ultraschallwellen gelten soll, müssen selbige für jeden Punkt in *Raum* und *Zeit* folgende Wellengleichung erfüllen:

$$\nabla^2 u(P, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\nabla^2}{dt^2} u(P, t) = 0 \quad (2.12)$$

Diese Form ist von Ort und Zeit abhängig. Eine Aufspaltung wird erreicht, indem davon ausgegangen wird, dass immer nur eine *zeitliche Frequenz (f)* betrachtet wird (stationärer Zustand). Dann wird  $u(P, t)$  allein durch  $U(P)$  beschrieben und durch einsetzen von Gl. 2.11 in Gl. 2.12 kann die zeitunabhängige Helmholtz-Gleichung erhalten werden:

$$\nabla^2 k(P)^2 U(P) = 0 \quad (2.13)$$

mit  $k(P) = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\omega}{c}$ , wobei  $\lambda$  der Wellenlänge der räumlichen Welle entspricht.

Im homogenen Medium mit nur einer (Orts-)Frequenz  $k(P) = k_0$  ergibt sich:

$$\nabla^2 k_0^2 U(P) = 0. \quad (2.14)$$

Mit dem Ausschreiben des Gradienten-Operators  $\nabla^2$  ergibt sich in der 2D-Form:

$$\frac{d^2 u(P)}{dx^2} + \frac{d^2 u(P)}{dy^2} + k_0^2 U(P) = 0. \quad (2.15)$$

Der Argumentation von Kak und Slaney [17] (Seite 206 Gl. 9) folgend, nehmen wir als mögliche Lösung  $u(P) = e^{j\vec{k}P}$  mit  $\vec{k} = (k_x, k_y)$  als 2-D Ausbreitungsvektor und  $U(P)$  repräsentiert dann eine 2D-Ebene-Welle mit der Raumfrequenz  $|\vec{k}|$ . Dies entspricht der 2D-Fouriertransformation und erlaubt, beliebige Funktionen als Summe von Ebenen-Wellen zu formen. Die Bedingung der Wellengleichung erfüllen nur planare Wellen die Gl. 2.16 erfüllen:

$$|\vec{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 = k_0^2. \quad (2.16)$$

Weitere Ergebnisse dieser Formulierung unter [17], Seite 206 unten.

### 2.5.3 Skalare Wellengleichung für inhomogene Medien

Reflektionen entstehen an Mediengrenzen, wobei die Medien durch unterschiedliche Dichten und Kompressibilität gekennzeichnet sind. Für eine Bildgebung die selbige abbildet, ist eine solche Formulierung nötig: Schlüsselemente hier sind die *Born- und Rytov Näherung*, auf die nicht weiter eingegangen, sondern auf [11] und [17] Seite 212 verwiesen.

### 2.5.4 Winkelspektrum von planaren Wellen

Neben den oben angedeuteten Varianten der Einführung der skalaren Wellengleichung, wird hier die von [11] (Seite 55 Kap. 3.10) verwendete Variante genutzt, die am nächsten an der linearen Systemtheorie liegt. Grundidee ist, dass für eine planare Apertur  $U(x, y, 0)$  auf der Ebene  $z = 0$  die diffraktiven Überlagerungen für jede weitere Ebene  $U(x, y, z)$  als Überlagerung der durch die Ausbreitung phasenverschobenen Ebenen-Wellen von  $U(x, y, 0)$  ergeben, siehe Abb. 4.18.



In folgenden Ausführungen gibt also die Z-Dimension die Ausbreitungsrichtung an, die auch der Normalenvektor zu der planaren Aperturebene ist.

Die 2D-Fourier Beschreibung entlang  $z = 0$  hierfür ist dann:

$$A(f_x, f_y; 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (2.17)$$

mit dem Spektrum  $A(f_x, f_y, 0)$ . Die Fouriertransformation kann als lineare Zerlegung einer komplexen Funktion in einfachere betrachtet werden. Um diese Sichtweise zu stärken drehen wir die Gleichung um, zur inversen Fouriertransformation ihres Spektrums:

$$U(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(f_x, f_y; 0) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y. \quad (2.18)$$

In Gleichung 2.18 lässt sich nun direkt die physikalische Bedeutung hineininterpretieren, nämlich der innere Teil des Integrals als *planare Welle* mit einem Richtungsvektor. Eine planare Welle in einer zeitunabhängigen, komplexwertigen Schreibweise:

$$P(x, y, z) = e^{j\vec{k}\vec{r}} \quad (2.19)$$

mit  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  und  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{z})$  mit  $\hat{\phantom{x}}$  als Einheitsvektor.

Es ergibt sich als komplexwertige Amplitude  $P$  über eine die Z-Dimension ([11] Gl. 3-61):

$$P(x, y, z) = e^{j\vec{k}\vec{r}} = e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \beta y} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z} \quad (2.20)$$

Die Richtungs-Cosinus sind miteinander verbunden durch:  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ . Deshalb lässt sich entlang der Ebene  $z = 0$  die komplexe Funktion  $e^{j2\pi(f_x x + f_y y)}$  als *Wellenausbreitung* mit:

$$\alpha = \lambda f_x \quad \beta = \lambda f_y \quad \gamma = \sqrt{1 - (\alpha f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} \quad (2.21)$$

beschreiben. In der Fourierzerlegung für  $U$  wird die planare komplexwertige Wellenamplitude mit den Raumfrequenzen  $(f_x, f_y)$  einfach zu  $A(f_x, f_y; 0) df_x df_y$  für  $f_x = \alpha/\lambda$  und  $f_y = \beta/\lambda$ .

Aus diesem Grund wird die *Wellenausbreitung* mit:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; 0\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} dx dy \quad (2.22)$$

das Winkelspektrum von  $U(x, y, 0)$  genannt.

### 2.5.5 Ausbreitung des Winkelspektrums entlang $z$

Nehmen wir für ein Winkelspektrum diesmal einen Abstand  $z$  an, welcher der Ausbreitung der planaren Welle nach  $z$  entspricht:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} dx dy \quad (2.23)$$

Wenn sich der Zusammenhang von  $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; 0\right)$  und  $A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right)$  finden lässt, ist der Wellenausbreitungseffekt beschrieben.

Mit dem Fourierintegraltheorem lässt sich Gl. 2.23 umformulieren zu:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) e^{j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)} d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda}. \quad (2.24)$$

Da  $U$  auch die Helmholtzgleichung erfüllen muss, muss  $A$  diese Differentialgleichung erfüllen ([11] Seite 57):

$$\frac{d^2}{dz^2} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) + \left(\frac{2\pi^2}{\lambda} (1 - \alpha^2 - \beta^2) A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right)\right) = 0. \quad (2.25)$$

Eine elementare Lösung der Gleichung lässt sich in dieser Form schreiben:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; 0\right) e^{j\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z\right)}. \quad (2.26)$$

Nun lässt sich die Lösungsmenge  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$  so interpretieren, dass sie reine Phasenverschiebung für verschiedene Distanzen  $z$  ist. Für die Lösungsmenge  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$  ergibt sich eine imaginäre Wurzel, was in einer effektiven Dämpfung über die Ausbreitung resultiert, ein physikalisches Phänomen welches als *Evanescent Waves* (schwindende Welle) bekannt ist. Dies hat zur Folge, dass kein Winkelspektrumsbeitrag jenseits der nicht imaginären Lösungsmenge möglich ist. Außerdem ist dies die entscheidende Erklärung, warum keine bessere Auflösung eines Objekts als die Wellenlänge der eingestrahnten Welle, möglich ist.

### 2.5.6 Amplituden-Übertragungsfunktion

Laut [11] (*Fourier optics*: Seite 58 Gl.3-70 und 3-71) lässt sich die Beziehung von diffraktiven Strukturen (z.B. den sich aus Sender- und Empfangsaperturen ergebenden Feldern) als *Amplituden-Übertragungsfunktion* ( $t_A$ ) modellieren. Es

wird  $t_A$  als Quotient von Eingangsfeld  $U_i$  zu dem sich überlagerndem Ausgangsfeld  $U_t$  über die drei Raumdimensionen definiert:

$$t_A(x, y) = \frac{U_t(x, y, z)}{U_i(x, y, z)}. \quad (2.27)$$

Wir suchen das sich ergebende Feld als:  $U_t(x, y, 0) = t_A(x, y) \cdot U_i(x, y, 0)$ . Mit dem Fourierkonvolutiontheorem, siehe Abschnitt 3.9, ergibt sich das selbe für die räumlichen Frequenzspektren:

$$A_t(f_x, f_y) = [A_i(f_x, f_y) \otimes T(f_x, f_y)] \quad (2.28)$$

mit

$$T(k_x, k_y, k_z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} t_A(x, y, z) e^{-j \cdot 2\pi(x+y+z)}. \quad (2.29)$$

Hiermit ist die Diffraction einer Apertur und eines Ebenen-Wellen Feldes als Konvolution eingeführt.

### 2.5.7 Kohärente und unkohärente Abbildungssysteme

Wenn die Überlegung aus Absatz 2.5.6 mit komplexwertigen (phasenbehafteten) Ebenen-Wellen durchgeführt werden, ergibt sich eine Beschreibung eines *kohärenten* Abbildungssystems, zu welchen typischerweise die ultraschallbasierenden Abbildungssysteme gehören. Wird die obige Modellierung mit der phasenlosen Intensität  $I_i(x, y, z) = U_i(x, y, z)^2$  verwendet, kann eine inkohärentes Abbildungssystem beschrieben werden, wie zum Beispiel die meisten elektromagnetischen Abbildungssysteme (z.B.: Röntgen).

### 2.5.8 Diffraction mit der Fraunhofer Approximation

Eine weitere Möglichkeit die Diffraction von Strukturen und zu nähern ist die Fresnelapproximation, und darauf aufbauend, die Fraunhofer Approximation. Grundidee hier ist wieder die Annahme zweier koplanarer (auf zwei parallelen Ebenen) Funktionen  $U_i(x, y, 0)$  und  $U_t(x, y, z)$ . Es wird mit der hier nicht eingeführten

## 2 Grundlagen der US-Bildgebung

Fresnel-Diffraktions-Approximation begonnen, (siehe [11] Seite 66 Kapitel 4.2 oder [2] „*k-space tutorial*“ Formel 2.1 bis 2.7.):

$$h(x_0, y_0; x_1, y_1) \approx \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{\frac{jk}{2z}(x_0^2+y_0^2)} \otimes e^{\frac{jk}{2z}(x_1^2+y_1^2)} \cdot e^{-\frac{jk}{z}(x_0x_1+y_0y_1)} \quad (2.30)$$

Mit der Fraunhoferannahme  $z \gg \frac{k(x_1^2+y_1^2)_{max}}{2}$  werden die quadratischen Terme als  $\approx 1$  angenommen. Mit dem Fourierkonvolutionstheorem ergibt sich

$$U(x_0, y_0) \approx \frac{e^{jkz} e^{\frac{jk}{2z}(x_0^2+y_0^2)}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{-\frac{j2\pi}{\lambda z}(x_0x_1+y_0y_1)} dx_1 dy_1. \quad (2.31)$$

Unter Vernachlässigung des quadratischen Skalierungs-Term vor dem Integral ist dies genau die Fouriertransformation der Apertur. Die Fraunhofer-Diffraktions-Approximation kann als Sonderfall der oben eingeführten planaren Aperturbeschreibung, Kapitel 2.5.4, mit  $U_t(x, y, z)$  und einem  $z = \infty$  verstanden werden.

## 2.6 Eigenschaften von Abbildungssystemen im Ortsraum

Die klassische Optik beschreibt Abbildungssysteme über ein Anzahl von quantitativen Metriken, die hier eingeführt werden.

### 2.6.1 Apertur (Blendöffnung)

In der Optik bezeichnet man die Gesamtheit der räumlichen Ausdehnung der aktiven Abbildungselemente als *Apertur*. Über die räumliche Ausprägung dieser Struktur lässt sich das abbildende Verhalten von Systemen beschreiben/herleiten.

Die Abstrahlcharakteristik einer solchen Struktur lässt sich als Interferenz von vielen *Huygenselementarwellen* beschreiben, beispielsweise für eine 1D-Spaltapertur, siehe Abb. 2.4. Auf Modellierungen und Beschreibungen wird später eingegangen.

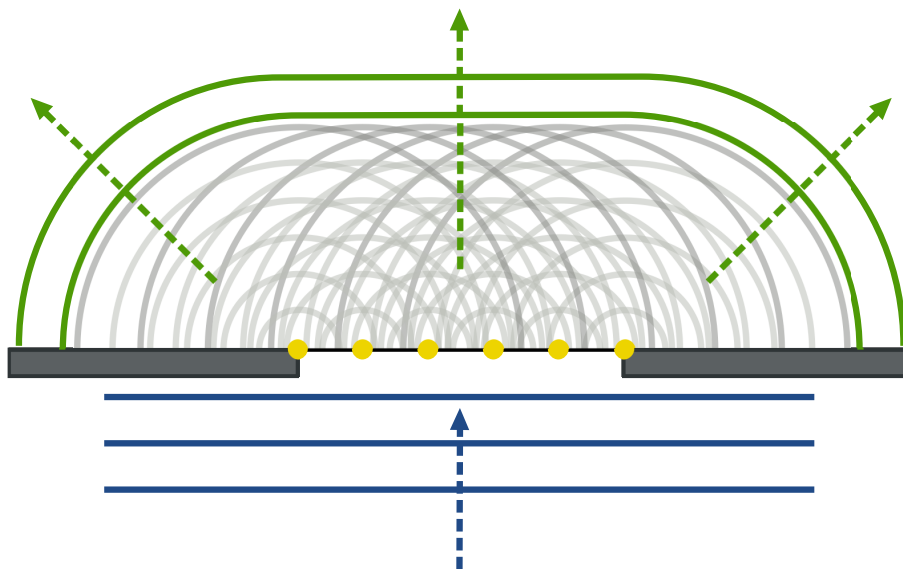


Abbildung 2.4: *Diffraktive Interaktion einer Ebenen-Wellen an einer Spaltapertur, angedeutet die diskrete Entwicklung über sechs Huygens Kugelwellen; Quelle: [43]*

## 2.6.2 Auflösung und Abbildungsfunktion

Der Systembegriff *Systemfunktion* geht für Abbildungssysteme in die *Abbildungsfunktion* über. Diese geht für den Spezialfall des Diracpuls als Objektfunktion in die Punktspreizfunktion, im englischen *Point-Spread-Function* oder *PSF*, über. Diese wird auch zur scharfen Definition des intuitiven Begriffs *Auflösung* dienen [40].

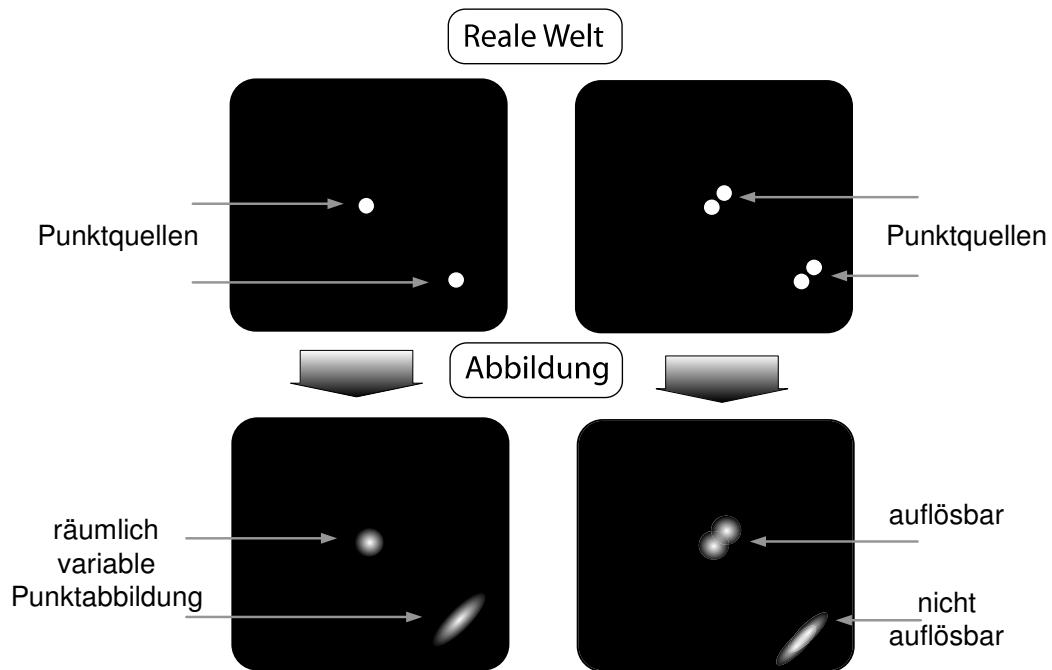


Abbildung 2.5: *Auflösung als Trennbarkeit von Objekten in Abbildungen: reale Punktquellen (oben-links, oben-rechts) werden durch ein raumvariantes Abbildungssystem abgebildet, (unten-links) aus den unendlich kleinen Punktquellen werden ortsabhängige Punktspreizfunktionen (PSF) gewonnen, (unten-rechts) die mittige PSF genügt zum unterscheiden der Punktquellen mit diesem spezifischen Abstand, die PSF in der rechten unteren Ecke genügt nicht mehr zur Trennung; Quelle: [28]*

Der Begriff Auflösung lässt sich definieren als der Abstand bei dem zwei Objekte, abgebildet durch eine System, gerade noch zu trennen sind, siehe Abbildung 2.5. Die Trennbarkeitsgrenze wird über *Halbwertsbreite* auch *Fullwidth-Half-Maximum*

(*FWHM*) definiert. Zwei Punktstreuer, die einen Abstand geringer als diese Maß haben sind nicht mehr auseinanderzuhalten, was auch als *Auflösungsmaß* für Systeme dienen kann:

$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}f(x_{\max}) \quad (2.32)$$

mit  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$  als die beiden Punkte um das Maximum  $f(x_{\max})$  der 1D-Abbildungsfunktion  $f(x)$ , bei der sie auf 50% abgefallen ist. Dieses Maß ist ein spezifisches für jedes Abbildungssystem und dessen Eigenschaften, wie beispielsweise dessen Ortsabhängigkeit.

### 2.6.3 Tiefenschärfe (Depth-of-Field)

Der Begriff der Tiefenschärfe ergibt sich aus fokussierten planaren optischen Systemen. Dort beschreibt es den Bereich, der näherungsweise noch als fokussiert anzusehen ist. Für typische fokussierende Abbildungssysteme existiert ein direkter Zusammenhang zwischen der Aperturausdehnung und der Größe des Bereichs der einem konkreten Auflösungsmetrikerwert genügt.

Die Tiefenschärfe ist eine Ausprägung des Systembegriffs Ortsvarianz der Abbildungsfunktion, in diesem Fall in Abhängigkeit von der Tiefe, typischerweise als Z-Dimension.

Da das USCT-Abbildungssystem als Ganzes keine planare Apertur besitzt, wird diese Metrik nicht direkt untersucht werden, sondern das allgemeinere Konzept PSF.

### 2.6.4 Kontrast

Kontrast ist intuitiv ein klarer Begriff, jedoch objektiv nicht ganz klar fassbar. Es existieren mehrere Beschreibungen in der Optik. Da im Rahmen dieser Arbeit der Kontrast nicht untersucht wird, wird hierauf nicht weiter eingegangen.





# 3 Abbildungssysteme im Frequenzraum

Nach einer frequenz-unabhängigen Betrachtung von Abbildungssystemen im Objektraum wenden wir uns der Fourieranalyse bzw. -betrachtung analog der Betrachtung in Goodmans *Fourier Optics* zu.

Hierzu führen wir die relevanten Ideen und Terminologien ein.

## 3.1 Fouriertransformation

Die Fouriertransformation hat in der Signal- und Bildverarbeitung eine wichtige Stellung. Einer der Gründe hierfür ist der geänderte Blickwinkel, den ein Betrachter dadurch auf Problemstellungen erlangen kann.

Idee im Kontext der Bildgebung ist die Änderung der Betrachtung von einer orts-abhängigen Amplitudenbetrachtung zu einer frequenzabhängigen Magnitudenbetrachtung. Dies entspricht der Dekomposition des Ortsbilds in ortsunabhängige (nur global durch die Phase verschobene) Frequenzanteile, beschrieben durch:

$$G = \mathcal{F}[g] \tag{3.1}$$

$$G(o) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) \cdot e^{2\pi i v o} dv \tag{3.2}$$

$$\mathcal{F}_v^{-1}[g(v)](o) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) \cdot e^{2\pi i v o} dv \tag{3.3}$$

mit  $g$  als kontinuierlicher und integrierbarer Ortsfunktion,  $G$  der Fouriertransformierten hiervon.

### 3.1.1 n-D Fouriertransformation und Separabilität

In zwei oder drei Dimensionen können (Pixel- bzw. Voxelbild) die Bildfunktionen durch die oben eingeführte 1D-Fouriertransformation beschrieben werden, wenn sie separabel sind. Separabilität einer Funktionen zu ihren Parametern ist gegeben wenn sie als Produkt mehrere Funktionen beschrieben werden kann, welche jeweils nur von einem Parameter abhängig sind. Beispielsweise die Funktion  $g$  abhängig von  $x$  und  $y$  ist separierbar, wenn die Funktionen  $g_x, g_y$  existieren.

$$g(x, y) = g_x(x)g_y(y) \quad (3.4)$$

Für den 2D-Fall der Fouriertransformation ergibt sich laut [11], Seite 10ff, folgendes:

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_x(x)e^{-j2\pi(f_x x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} g_y(y)e^{-j2\pi(f_y y)} dy \quad (3.6)$$

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = \mathcal{F}_x\{g_x\}\mathcal{F}_y\{g_y\} \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Eigenschaften: Begrenzte Ortsausdehnung und Bandbegrenzung

Es ist eine Eigenschaft der Fourierbetrachtung, dass jeder Frequenzanteil einer *unbegrenzten* Welle im Ursprungsraum entspricht. Umgekehrt kann ein begrenzt gefüllter Ortsraum nur eine Frequenzentsprechung mit unendlich vielen Elementen finden. Diese Eigenschaft wird bezeichnet als *ortsbegrenzt*. Ein begrenzt ausgefüllter Frequenzraum führt zu Ortsraumfrequenzen, die sich von  $+\infty$  bis  $-\infty$  erstrecken (*bandbegrenzt*). Daraus folgt, dass gleichzeitige Orts- wie Bandbegrenztheit nicht möglich sind.

Aus praktischer Sicht lässt sich dieses Problem aufweichen, indem für Funktionen, die zwar nicht bandbegrenzt sind jedoch einen signifikanten Anteil in einem Band haben, angenommen wird, dass sie *näherungsweise* sowohl band- als auch ortsbegrenzt sind.

### 3.1.3 Fouriertheoreme

An dieser Stelle werden einige mathematische Eigenschaften des Fourierraums eingeführt, da sie später verwendet werden. Ausführlichere Einführungen und Beweise sind unter [11] zu finden.

#### Linearitätstheorem (Fouriersynthesetheorem)

Das Linearitätstheorem besagt, dass die Fouriertransformation von gewichteten Funktionen einfach auch der gewichteten Summe der individuellen Transformationen entspricht:

$$\mathcal{F}(\alpha g + \beta h) = \alpha \mathcal{F}(g) + \beta \mathcal{F}(h) \quad (3.8)$$

mit  $g, h$  als die zu fouriertransformierenden und  $\alpha$  und  $\beta$  als Vorfaktoren.

#### Konvolutionstheorem

Das Konvolutionstheorem besagt das eine Konvolution zweier Funktionen einer Multiplikation der fouriertransformierten einzelnen Funktionen entspricht.

$$\mathcal{F}(f \otimes g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad (3.9)$$

mit  $g, h$  als die zu fouriertransformierenden Funktionen.

#### Fourier Integraltheorem

Dieses Theorem ermöglicht die Umkehrung der Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x, y)\} = g(x, y) \quad (3.10)$$

mit  $g, h$  als die zu fouriertransformierenden Funktionen.

### 3.1.4 Der Fourierraum als Orts-Frequenzraum (k-Space)

Nehmen wir einen 2D-Fourierraum und interpretieren wir ihn physikalisch als die *Ortsfrequenzen*. Der örtliche Frequenzraum wird gebildet aus örtlichen Ebenen-Wellen mit Frequenz und Phase für eine gesetzte Frequenz. Unter Abb. 3.1 ein

### 3 Abbildungssysteme im Frequenzraum

Beispiel mit der entsprechenden Ortsraum Repräsentation.  $\mathcal{F}(g(x, y)) = G(f_x, f_y)$  mit den Raumparametern mit der Einheit Metern und der Fourierentsprechung  $\text{m}^{-1}$ . Ist er auf eine Wellenzahl  $k_0$  ( $k_0 = \frac{2\pi}{m}$ ) normalisiert, also einer Basisfrequenz und ihrem harmonischen Vielfachen, so wird dieser so skalierte Ortsfrequenzraum auch *k-Space* genannt.

Die Charakteristik eines mehrdimensionalen k-Space lässt sich aus den Eigenschaften des assoziierten Ortsraumes ableiten. 2D-Bilder und 3D-Bildvolumen werden typischerweise über die Eigenschaften *Bildpunktanzahl*  $n_V$  und *Bildpunktgröße*  $s_V$  charakterisiert, letztere Eigenschaft mit der Einheit Meter. Häufigster Fall bei Bildern ist, dass die Größe aller Pixel (oder Voxel in 3D) identisch entlang einer Raumachse ist. Das periodische Auftreten der Pixel lässt sich als äquidistante *Abtastung (Sampling)* des kontinuierlichen Ortsraums mit der Frequenz  $f_S = \frac{1}{s_V}$  interpretieren, mit allen Konsequenzen, die sich aus einer Diskretisierung ergeben (siehe Abschnitt 3.2).

Durch das Abtasten wird die Auflösung auf die halbe Abtastfrequenz begrenzt,  $f_S/2$ , genannt die *Nyquist Frequenz*, hier für alle Raumachsen als identische Ortsauflösung.

Im k-Space ist diese Eigenschaft direkt repräsentiert. Die höchste den k-Space umfassende Ortsfrequenz ist genau  $f_S/2$ . Sie umfasst also auch die (Raum-)Größe, sowohl in positiver als auch in negativer Richtung, über jede Raum-Dimension. Die Eigenschaft „Bildgröße“ (also  $n_V \cdot s_V$ ) findet sich als Pixel- oder Voxelkantengröße des k-Space wieder,  $s_{V_{k\text{space}}} = 1/n_V \cdot s_V$ .

#### **Superimposition**

Nach dem Fouriersynthesetheorem lässt sich durch Überlagerung jede Ortsstruktur komponieren, z.B. die für die Ultraschallbildgebung wichtige Kugelwelle.

### 3.1 Fouriertransformation

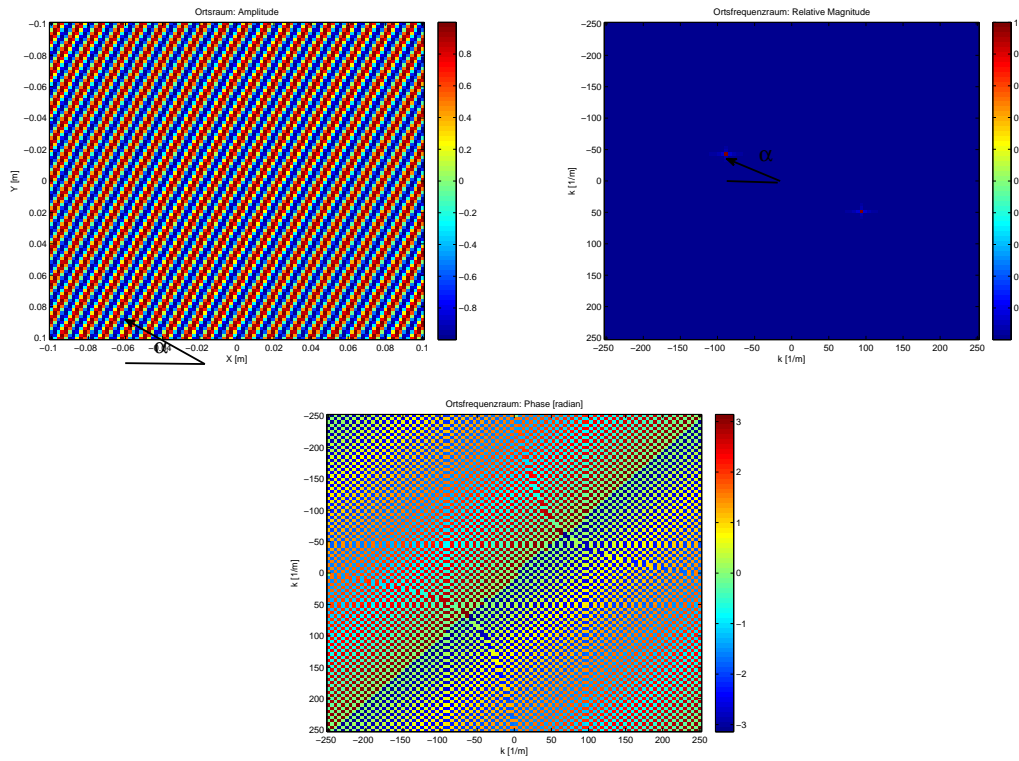


Abbildung 3.1: Ebene-Welle im  $k$ -Space: (links-oben) planare Raumwelle, (rechts-oben) Magnitude des zugehörigen Ortsfrequenzraums ( $k$ -Space), (unten) Phase des zugehörigen Frequenzraums, der Winkel  $\alpha$  findet sich in beiden Repräsentationen wieder

#### Ortstranslation

Verschiebungen von Objekten im Ortsraum stellen sich im  $k$ -Space als Phasenverschiebung der Frequenzanteile dar, siehe Abb. 3.3.

### 3 Abbildungssysteme im Frequenzraum

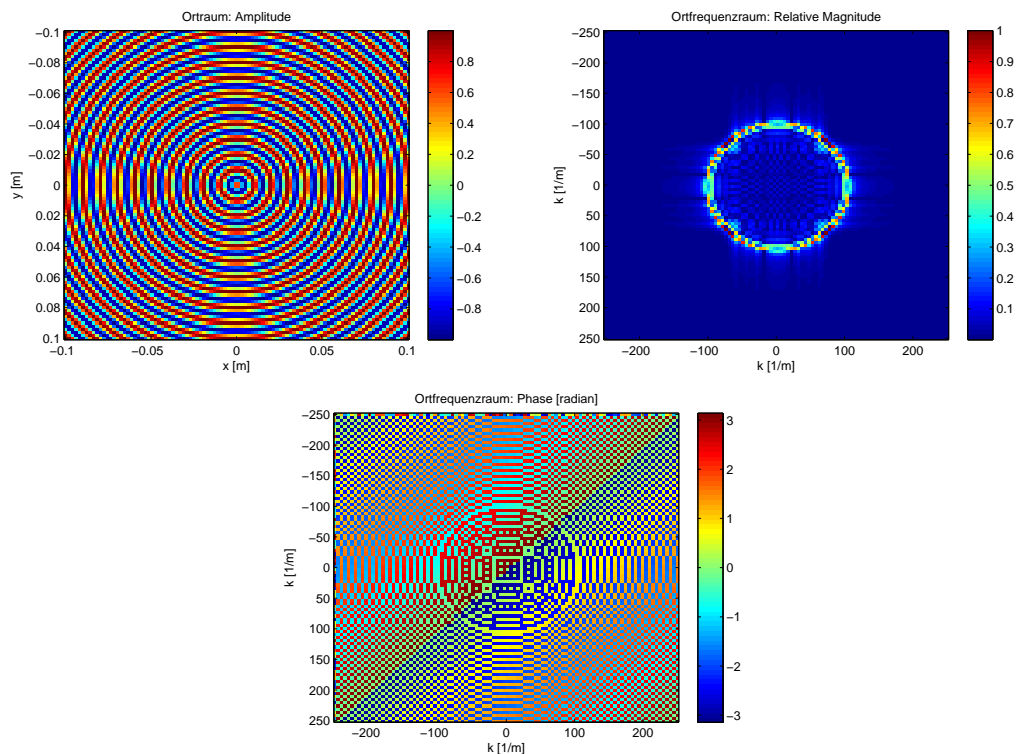


Abbildung 3.2: (links) 2D-Kreis-Welle, (mitte) Magnitude des zugehörigen Frequenzraums, (rechts) Phase des zugehörigen Frequenzraums; durch Superimposition von vielen planaren Elementarwellen lässt sich jede Ortswelle generieren

## 3.2 Whittaker-Shannon Abtastungs-Theorem

Das Abtastungstheorem spielt in der Signal- und Bildverarbeitung und in den gesamten Computerwissenschaften eine herausragende Rolle.

Auch auf die Annahmen dieser Arbeit hat es einen starken Einfluss, bei der Wahl einer ausreichenden Abtastung der 1D-Signaldaten, 2D- oder 3D-Bildern und des k-Space. Sogar örtliche Verteilung der diskreten Aperturpositionen im 3D-Raum lässt sich *Raumabtastung* begreifen, mit allen ihren Effekten (Raumaliasing=Grating Lobes) Aus Implementierungssicht spielt das Theorem für Rechenzeit und Speicherbedarf eine signifikante Rolle (z.B. bei Überabtastung).

Eine Art der Einführung des Abtasttheorems ist die Betrachtung der *Abtastungen* (engl. Sampling) einer kontinuierlichen Funktion  $g(t)$  an äquidistanten Positionen in

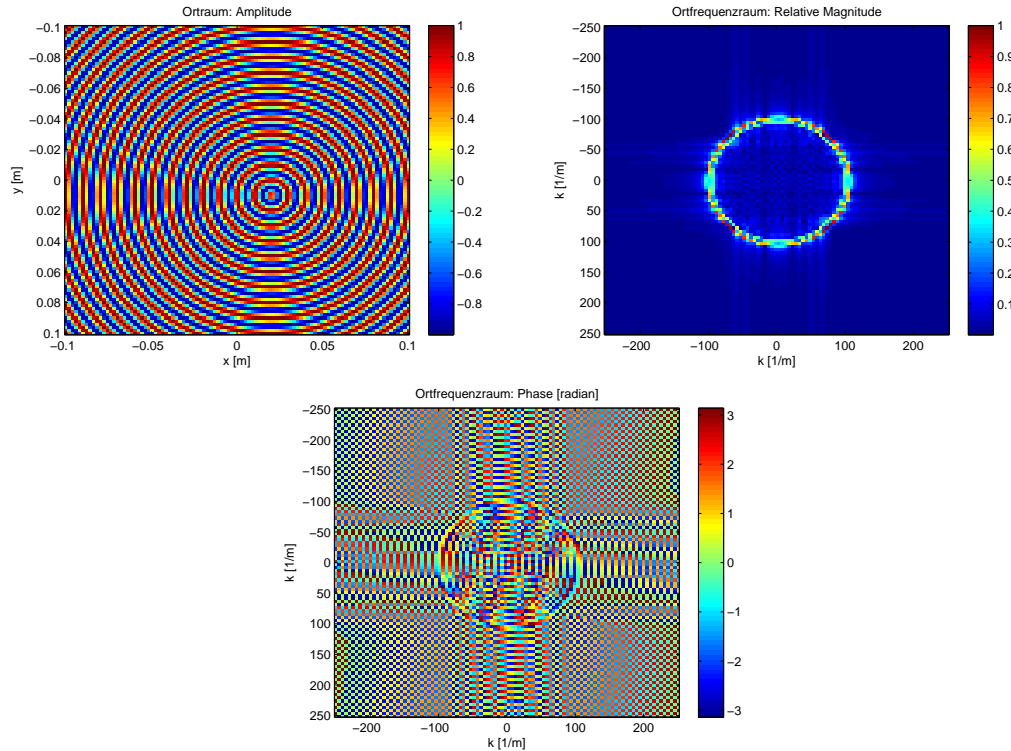


Abbildung 3.3: (links) 2D-Kreis-Welle verschoben, (mitte) Magnitude des zugehörigen Frequenzraums, (rechts) Phase des zugehörigen Frequenzraums; eine Verschiebung im Ortsraum repräsentiert sich im Frequenzraum als reine Phasenverschiebung, die Magnitude bleibt identisch. (Abweichungen im Frequenzraum sind durch die Ortsbegrenztheit bedingt)

infinitesimaler Zeit. Eine unendlich schmale Funktion wird als Diracpuls modelliert und die Abtastung kann als Multiplikation dieses Pulses mit dem analogen Bild betrachtet werden, [11] Kapitel 2.4.1. Die unbegrenzte Funktion  $g(t)$  wird also mit unendlich vielen Diracpulsen  $\delta$  mit dem Abstand  $s$  multipliziert:

$$g_s(t) = C(t/s) \otimes g(t) \quad (3.11)$$

Diese vielen äquidistanten Diracpulse  $C(t/s)$  werden auch als „Kammfunktion“ bezeichnet. Die sich ergebende diskrete, über  $t$  abgetastete Funktion sei  $g_s(t)$ .

Mit dem Fourierkonvolutionstheorem lässt sich die Abtastung als Faltung der Spektren von  $g(s)$  und  $C(t/s)$  betrachten, also  $G(s) = \mathcal{F}(g(s))$ . Laut mathematischem

Tabellenwerk geht die Kammfunktion im Fourierraum in  $\mathcal{F}(C(t/s)) = t \cdot C(t \cdot f_t)$  über, erneut eine *periodische* sich unendlich wiederholende Funktion.

$$G_s(f_t) = t \cdot C(t \cdot f_t) \otimes G(f_t) \quad (3.12)$$

Der Abstand dieser sich wiederholenden Strukturen ist von großer Bedeutung. Er kann als *Bandbreite* eines Systems interpretiert werden. Diese Bandbreite kann auch als Bereich verstanden werden, in dem ein System als Funktion mit einer eindeutigen und umkehrbaren Abbildung agiert. Wird dieser Bereich überschritten, beginnen die periodischen Strukturen sich zu überlappen. Es ist nicht mehr unterscheidbar welcher Kamm — und damit welche Frequenz — für diesen Beitrag verantwortlich war. Das System agiert in diesem Bereich nicht mehr als eindeutige und umkehrbare Funktion, ein Effekt der als *Aliasing* bekannt ist.

Die Bandbreite  $B$  ergibt sich am unteren Frequenzrand aus der Länge einer zu diskretisierenden Funktion  $g_s$ . Der obere Rand ergibt sich aus der Wiederholrate der Abtastung  $s$ , der Abtastfrequenz.

Dies lässt sich direkt auf höherdimensionale Betrachtungen erweitern. Unter leicht anderen Ausgangsbedingungen wurde dies bei der Einführung des  $k$ -Space getan, siehe Abschnitt 3.1.4 oder auch in [11] Kapitel 2.4.1.

## 3.3 Applikationen der Fourieranalyse

### 3.3.1 Fourieranalyse

Wie in Abschnitt 3.1.4 eingeführt, ist die in der Fourieranalyse verwendete Repräsentation des durch ein Abbildungssystem abgebildeten Ortsraums die Fouriertransformierte des Ortsraum (auch reziproker Raum genannt, nach der inversen Einheit  $\text{m}^{-1}$ , oder *k-Space*, nach  $k = \frac{1}{\lambda}$ ). Durch den veränderten Blickwinkel der Ortsfrequenzrepräsentation entstehen neue Interpretationsmöglichkeiten des Abbildungssystems.

Einige dieser Betrachtungs- und Anwendungsmöglichkeiten werden im Folgenden aufgezeigt.



### 3.3.2 Systemfunktion und Abbildungsfunktion

Ein mit der linearen Systemtheorie beschriebenes Abbildungssystem, Annahme der Invarianz in Zeit und Ort vorausgesetzt, kann durch seine Ortsfrequenzen mit Phase und Magnitude vollständig charakterisiert werden [11]. Der Einfluss eines solchen linearen Systems auf ein abzubildendes Objekt wird die *Abbildungsfunktion* genannt.

Die Verschmierung eines Objekts  $f_O(x, y)$  durch die abbildungssystem-spezifische PSF  $f_A(x, y)$ , siehe Abschnitt 2.6.2, kann mathematisch als Faltung betrachtet werden. Eine abzubildende *Objektfunktion*  $f_O(x, y)$  im Ortsraum wird mit einer *Abbildungsfunktion*  $f_A(x, y)$  gefaltet, hier beispielhaft im 2D-Ortsraum mit  $x$  und  $y$ , es ergibt sich die Abbildung  $f_R(x, y)$ .

$$f_R(x, y) = f_O(x, y) \otimes f_A(x, y) \quad (3.13)$$

Mit dem Konvolutiontheorem, siehe Abschnitt 3.9, ergibt sich statt der Faltung im Ortsraum eine einfache Multiplikation der fouriertransformierten Objekt- und Abbildungsfunktion.

Besitzt die Abbildungsfunktion nur einen Realanteil und die Imaginäranteile sind Null, ist sie also nicht komplexwertig, geht diese Filterfunktion in eine *Bandpassfunktion* über. Ein Beispiel mit dem in der medizinischen Bildgebung als Simulationsreferenz verwendeten Shepp-Logan-Kopf-Phantom ist unter Abb. 3.4 zu sehen [33].

### 3.3.3 Region-of-support (Ortsbandbreite)

Eine Konsequenz der Ortsbegrenztheit von kontinuierlichen Objekten ist, dass sie im äquivalenten k-Space typischerweise unbegrenzt sind, siehe Abschnitt 3.1.2. Durch die Verwendung eines abgetasteten und begrenzten Ortsraums mit isotroper und konstanter Bildpunktgröße ergibt sich ein begrenzter k-Space, mit einer zusätzlichen Annahme. Diese Annahme ist die *Periodizität* (und damit des Objekts) des beschriebenen Ortsraums. Die Bildpunktgröße ( $s_V$  [m], für alle Raumdimensionen) und die Bildgesamtgröße ( $s_B$  [m], für alle Raumdimensionen), ergeben die einen k-Space definierenden Parameter  $k_0 = 1/s_B$ ,  $k_{max} = \frac{1}{s_V \cdot 2}$  und

### 3 Abbildungssysteme im Frequenzraum

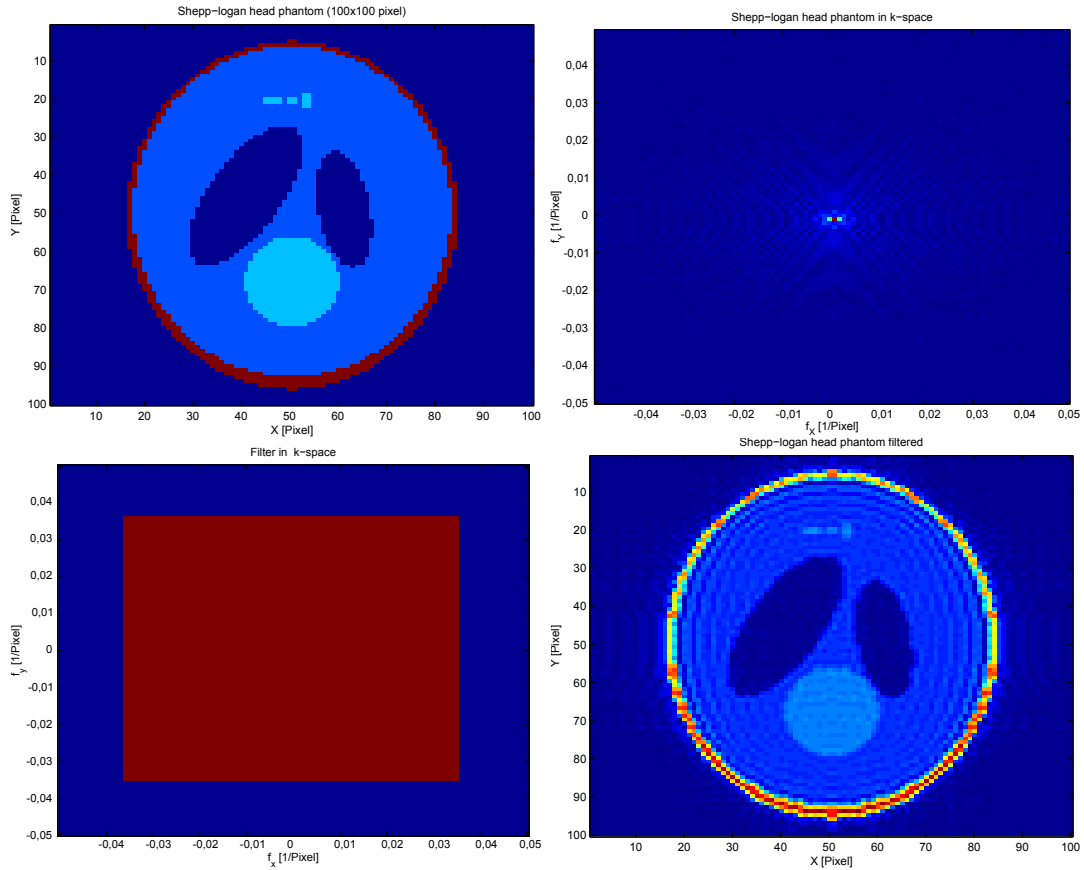


Abbildung 3.4: Beispiel des  $k$ -Spaces als 2D-Filter für eine Objektfunktion: (links-oben) Shepp-Logan-Kopf-Phantom (SL) zwischen null (blau) und eins (rot) normalisiert, (rechts-oben) SL in  $k$ -Space Repräsentation, (links-unten) ein rechteckiger, binärer 2D-Tiefpassfilter mit einer relativen Magnitude zwischen null und eins (blau bis rot), (rechts-unten) die Ortsrepräsentation der Multiplikation aus SL-Phantom und Filter im Fourierraum, die die sich ergebende Abbildung

$$k_{min} = -\frac{1}{s_V \cdot 2} \text{ (in Einheit [1/m] für alle k-Space Dimensionen).}$$

Dieser  $k$ -Space sollte im Idealfall von von einem Abbildungssystem vollständig gefüllt werden, also als *All-Pass* arbeiten, siehe Abschnitt 3.3.2. Reale Systeme erfüllen dies typischerweise nur teilweise. Eine Qualitätsmetrik für Abbildungssysteme kann daraus abgeleitet werden, die *Ortsbandbreite* oder *Region-of-Support*

$O_{BB}$ .

Um die Abbildungsgüte eines existierenden Abbildungssystems zu beurteilen, kann ein Quotient aus der Summe des Beiträge  $k_{AS}$  durch die Summe des theoretische idealen k-Space  $k_{tAS}$  gebildet werden:

$$O_{BB} = \frac{\sum k_{AS}}{\sum k_{tAS}}. \quad (3.14)$$

### 3.3.4 Ortsraum-Ortsbandbreiten Produkt

Als ein Maß für die Komplexität eines abzubildenden Objekts  $O(x, y, z)$  wird in [11] Kapitel 2.4.2, das Produkt aus seinen Beitrag im k-Space  $f_O(f_x, f_y, f_z)$  und der Größe im Ortsraum vorgeschlagen  $OOBB(O, f_O)$ . Idee ist, dass komplexe Objekte sowohl im Ortsraum wie im k-Space eine ausgedehnte Repräsentation benötigen. Ortsdiskrete und binarisierte Volumenbeiträge aus beiden Räumen müssen ungleich null sein für ein komplexes Objekt:

$$OOBB = \sum_z \sum_y \sum_x \text{Bin}(O(x, y, z)) \cdot \sum_{f_z} \sum_{f_y} \sum_{f_x} \text{Bin}(f_O(f_x, f_y, f_z)) \quad (3.15)$$

Ein Beispiel für ein nicht-komplexes Objekt ist die (unendliche) Fläche im Ortsraum. Ihr Betrag im Ortsraum geht zwar gegen unendlich, ist jedoch im k-Space mit gegen null gehender Bandbreite nur als singuläre Nullfrequenz repräsentiert, so dass also das Ortsraum-Ortsbandbreiten Produkt gegen null geht. Das Maximum der Komplexität ist in Analogie zum „Zaun-Flächen“ Extremwertproblem bei gleichgroßen Beiträgen beider Faktoren erreicht.

### 3.3.5 Sender-Empfänger-Objekt-Interaktion

Das Abbildungssystem besteht typischerweise aus zwei Komponenten, einer Quelle von Wellen (Sender) und einer Senke von Wellen (Empfänger). Das Fourierdiffraktionstheorem beschreibt den Zusammenhang zwischen eingestrahnten Wellen, Objektinteraktion und aufgenommenen Wellen. Dies ermöglicht letztendlich die Modellierung des Abbildungssystems aus seinen Komponenten.

Es lassen sich die Abbildungsfähigkeiten für Sender-Empfänger-Kombinationen für ein im k-Space repräsentiertes Objekt über die Diffraktion als Interferenz mit

### 3 Abbildungssysteme im Frequenzraum

Huygens Kugelwellen anschaulich herleiten.

Abbildung 3.5 zeigt eine Abbildungssituation im Sinne der Fourieranalyse, ein Ebenen-Wellen Transducer generiert kontinuierlich eine monochromatische Welle in axialer Richtung. Gleichzeitig agiert er als potentieller Empfänger einer Ebenen-Welle mit gleicher Frequenz und um  $180^\circ$  gedrehtem Richtungsvektor („Puls-Echo-Fall“). In der Bildmitte ist ein sich periodisch unendlich wiederholendes Objekt platziert, welches die Wellen reflektiert, hier diskret approximiert als Menge von Punktstreuern. Die physikalischen Kugelwellenbeiträge überlagern sich (näherungsweise) zu einer Ebenen-Welle. Der Transducer ist als Empfänger nur sensitiv für genau eine Ebenen-Welle mit nur einer Ausbreitungsrichtung, jedoch *beliebige Phasen und Amplituden dieser Welle!* Der Transducer agiert also als Detektor für einen spezifischen Ebene-Wellen-Typ und misst zusätzlich die Informationen Amplitude und Phase.

Für welche Objekte reflektieren und überlagern sich die gesendeten Ebene-Wellen wieder genau zu solchen vom Empfänger geforderten Wellen?

Eine Objektstruktur, die eine unendliche Ebenen-Welle zurückwerfen kann, muss selbst örtlich unbegrenzt sein, daher die Forderung einer periodischen Objektstruktur. Bei geometrisch additiver und subtraktiver Überlagerung für potentielle Periodizitäten für Objektstrukturen zeigt sich, dass es genau eine Periodizität gibt, die die Forderung einer kontinuierlichen Ebenenwelle als Reflektion mit dieser Frequenz erfüllt.

Überraschenderweise kann im „Puls-Echo-Fall“ (Sender- und Empfänger-Zwischenwinkel ist  $0^\circ$ ) ein Objekt mit der halben Wellenlänge als periodische Strukturbreite der Trägerfrequenz  $\lambda$  detektiert werden.

In Abbildung 3.6 wird ein Beispiel für eine Objektstrukturbreite gezeigt die nicht detektiert werden kann. Dies ist im der rechten k-Space Abbildungsteil repräsentiert durch das Nicht-Überlappen des rot markierten Supportbereichs des Abbildungssystems mit der schwarz markierten Objektfunktion.

Für den monochromatischen Fall und unterschiedliche Positionen von Empfänger und Sender existiert genau eine Objektperiodizität (mit beliebiger Phase) unter einem spezifischen Winkel, welche detektiert werden kann, siehe Abb. 3.7.

Die Eigenschaft die eine solche Sender-Objekt-Empfänger-Kombination erfüllen muss, ist eine Interferenz mit exakter Phase Null über Zeit und Raum zu einer

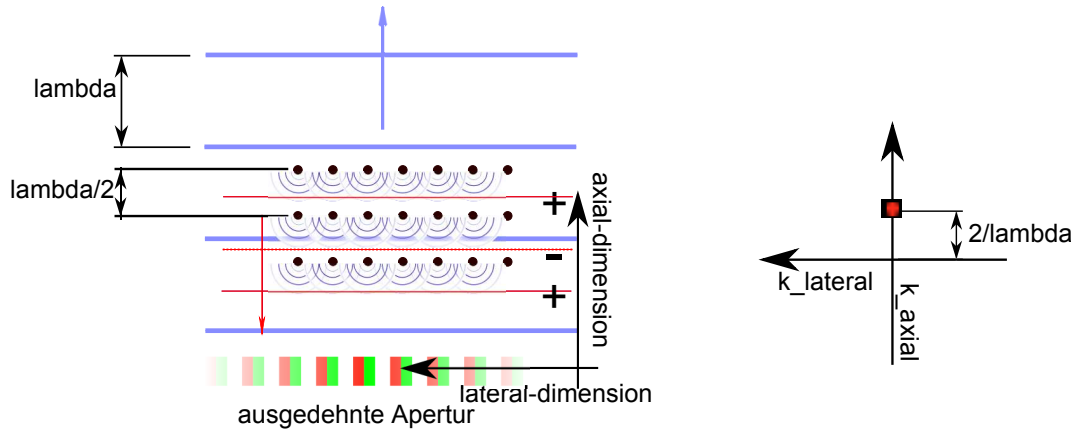


Abbildung 3.5: *Sender-Empfänger-Interaktion mit Objekt mit  $\lambda/2$ : (links) Ortsraum, die rote räumlich unbegrenzte Senderapertur sendet kontinuierlich eine Ebenen-Welle mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der durch den blauen Pfeil gezeigten Abstrahlrichtung. Gleichzeitig agiert die grüne Apertur als Empfänger einer Ebenen-Welle mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der Empfangsrichtung gezeigt durch den roten Pfeil. Die durch Punktstreuer diskret approximiert räumlich unbegrenzt periodische Objektstruktur besitzt eine Periodizität in Richtung der Transducerachse von  $\lambda/2$ . Die sich ausbreitende Ebenen-Wellen werden an jedem diskreten Punktstreuer reflektiert und durch das zweimalige durchlaufen von  $\lambda/2$  (einmal durch die gesendete Welle, und einmal durch die reflektierte Welle) überlagern sich diese reflektierten Wellen genau und phasenunversetzt (Verschiebung von  $\lambda$  ist durch die Periodizität äquivalent keiner Phasenverschiebung) mit der gerade entstehenden Welle an der nächsten Punktstreuerreihe. Die Reflektionsüberlagerung ist perfekt additiv. (rechts) Der äquivalente k-Space mit rotem Punkt der die Abbildungseigenschaft des Systems repräsentiert, der schwarze Punkt steht für die Objektfunktion, da beide überlappen ist die Abbildung/Detektion erfolgreich.*

neuen Ebenen-Welle.

Dies ist erfüllt wenn die den Sender  $\vec{v}_S$ , den Empfänger  $\vec{v}_E$  und das Objekt  $\vec{v}_O$

### 3 Abbildungssysteme im Frequenzraum

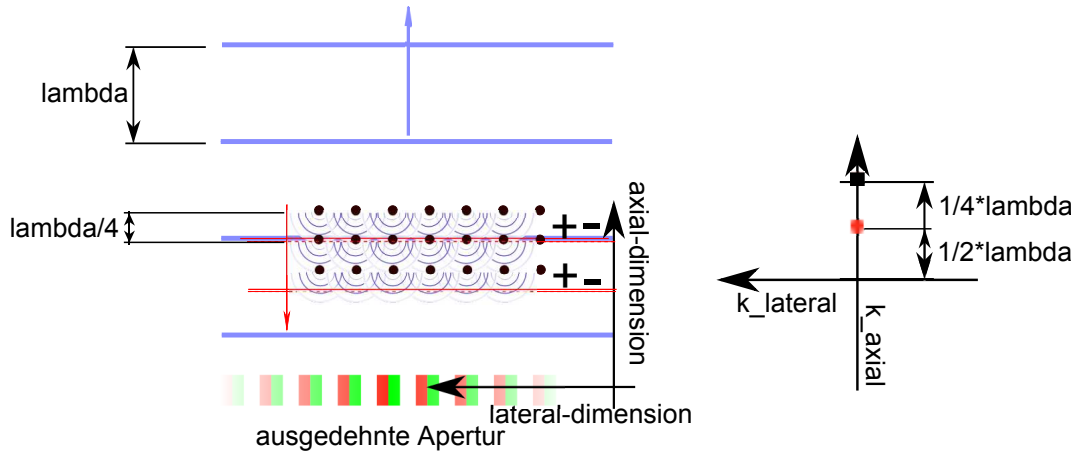


Abbildung 3.6: *Sender-Empfänger-Interaktion mit Objekt mit  $\lambda/4$ : (links) Ortsraum, die rote, räumlich unbegrenzte Senderapertur sendet kontinuierlich eine Ebenen-Welle mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der durch den blauen Pfeil gezeigten Abstrahlrichtung. Gleichzeitig agiert die grüne Apertur als Empfänger einer Ebene-Welle mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der Empfangsrichtung gezeigt durch den roten Pfeil. Die durch Punktstreuer diskret approximierter räumlich unbegrenzt periodische Objektstruktur besitzt eine Periodizität in Richtung der Sendewelle von  $\lambda/4$ . Die sich ausbreitende Ebenen-Wellen werden an jedem diskreten Punktstreuer reflektiert, durch das zweimalige durchlaufen von  $\lambda/4$  (einmal durch die gesendeten Wellen, und einmal durch die reflektierten Wellen), überlagern sich diese reflektierten Wellen genau um  $\lambda/2$  phasenversetzt mit der gerade entstehenden Reflektionswelle an der nächsten Punktstreuerreihe. Es entsteht eine perfekte Auslöschung wodurch das Objekt für den Empfänger nicht existent ist. (rechts) Der äquivalenter  $k$ -Space mit rotem Punkt der die Abbildungseigenschaft des Systems repräsentiert, der schwarze Punkt steht für die Objektfunktion, da beide sich nicht überlappen erfolgt keine Abbildung/Detektion.*

beschreibenden Ebenen-Wellen im  $k$ -Space folgendes erfüllen:

$$\vec{v}_O = -\vec{v}_S + \vec{v}_E . \quad (3.16)$$

$$\|\vec{v}_S\| = \|\vec{v}_E\| = k_S = k_R \quad (3.17)$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen von  $\vec{v}_S$  und  $\vec{v}_E$  ergeben sich durch die Reflektion an der Objektstruktur, siehe Abb. 3.8. Alle diese potentiellen Beiträge im k-Space für einen Sender, beliebige Empfänger und eine monochromatische Frequenz werden als *Ewaldsphäre* bezeichnet. Im Rahmen der Röntgenkristallographie wurde dieses Konzept zuerst verwendet um die Periodizität von Kristallgittern zu bestimmen [8].

### 3.3.6 Ewaldsphären-Konstruktion

Dies lässt sich auch als k-Space Beitrag unter zwei Winkeln interpretieren, was auf spezifische im Raum stehende Sensoren mit monochromen Frequenzen abgebildet werden kann, siehe Beispielabbildung 3.8.

Auch die *Fourier-Scheiben* Konstruktion, siehe [17] Kap. 3, für die Projektionsbildgebungsverfahren ergibt sich als Spezialfall der Ewaldsphären-Konstruktion. Sie entspricht einer Entwicklung wie der der roten Linie in Abb. 3.8, jedoch mit  $\vec{v}_s = \vec{v}_r$ . Aus dieser Konstruktion lassen sich weitere Eigenschaften ableiten. Die Unterscheidung von Beiträgen die von Sender-Empfänger-Kombinationen bei einem Winkel größer  $90^\circ$  entstehen, bildet sich als eine Halbkugel der Ewaldsphäre heraus (im Bild gepunktet) und die Beiträge unter  $90^\circ$  als die andere Hälfte.

Dies lässt sich wiederum den Bildgebungsmethoden Transmissions- und Reflektionstomographie zuordnen. Der Bereich der Reflektionstomographie im k-Space umfasst  $2 \cdot k$  bis  $\sqrt{2} \cdot k$  und der Transmissionsbereich 0 bis  $\sqrt{2} \cdot k$ . Der Reflektionsbereich vergrößert den k-Space Raum um den Faktor 2 des eigentlich aufgrund der eingestrahlten Wellenlänge  $\lambda$  zu erwartenden Wertes. Umgekehrt begrenzt eine reine Transmissionsbildung den k-Space auf einen Bereich bis maximal  $\sqrt{2} \cdot k$ .

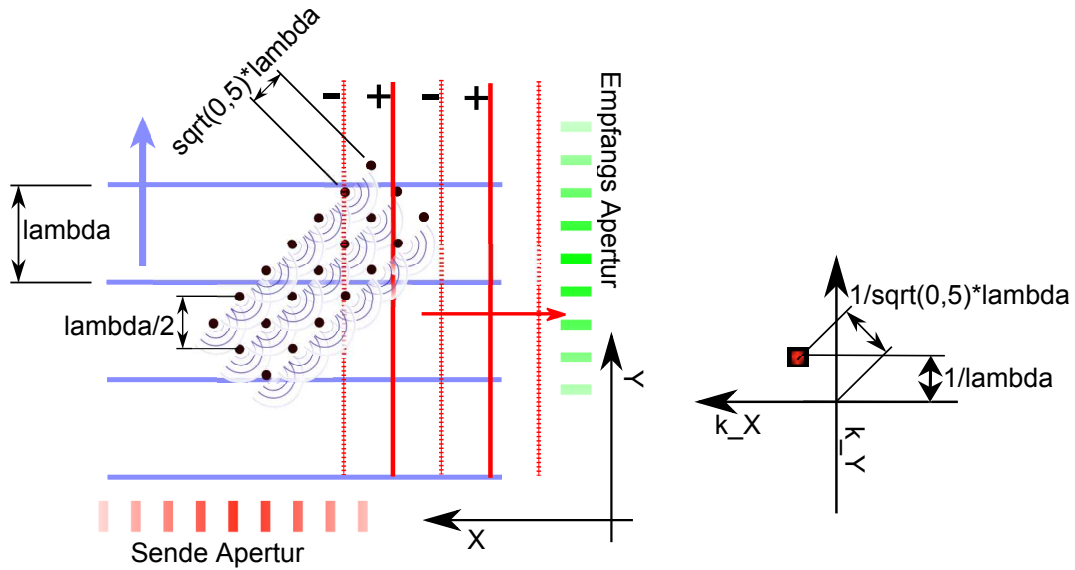


Abbildung 3.7: *Sender-Empfänger-Objekt Interaktion für getrennte Sender und Empfänger: (links) Ortsraum, die rote räumlich unbegrenzte Senderapertur sendet kontinuierlich eine Ebene-Welle mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der durch den blauen Pfeil gezeigten Abstrahlrichtung. Gleichzeitig agiert die grüne Apertur als Empfänger einer Ebene-Welle mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der Empfangsrichtung gezeigt durch den roten Pfeil. Die durch Punktstreuere diskret approximierte räumlich unbegrenzt periodische Objektstruktur besitzt eine Periodizität  $\lambda \cdot \sqrt{0,5}$ . In Richtung der Transducerachse ergibt sich wieder der additive Wegunterschied von jeweils  $\lambda/2$ . Die sich ausbreitende Ebenen-Wellen werden an jedem diskreten Punktstreuere unter einem Winkel von  $45^\circ$  reflektiert. Durch das zweimalige durchlaufen von  $\lambda/2$  (einmal durch die gesendete Welle, und einmal durch die reflektierte Welle), überlagern sich diese reflektierte Wellen genau um  $\lambda$  phasenversetzt mit der gerade entstehenden Reflektionswelle an der nächsten Punktstreuereihe. Es entsteht eine perfekte Überlagerung wieder zu einer Wellenlänge  $\lambda$  mit dem grünen Richtungsvektor. Das Objekt ist also für den Empfänger als Reflektion sichtbar. (rechts) Der äquivalenter k-Space mit rotem Punkt der die Abbildungseigenschaft des Systems repräsentiert, der schwarze Punkt steht für die Objektfunktion, da beide überlappen erfolgt eine Abbildung/Detektion.*



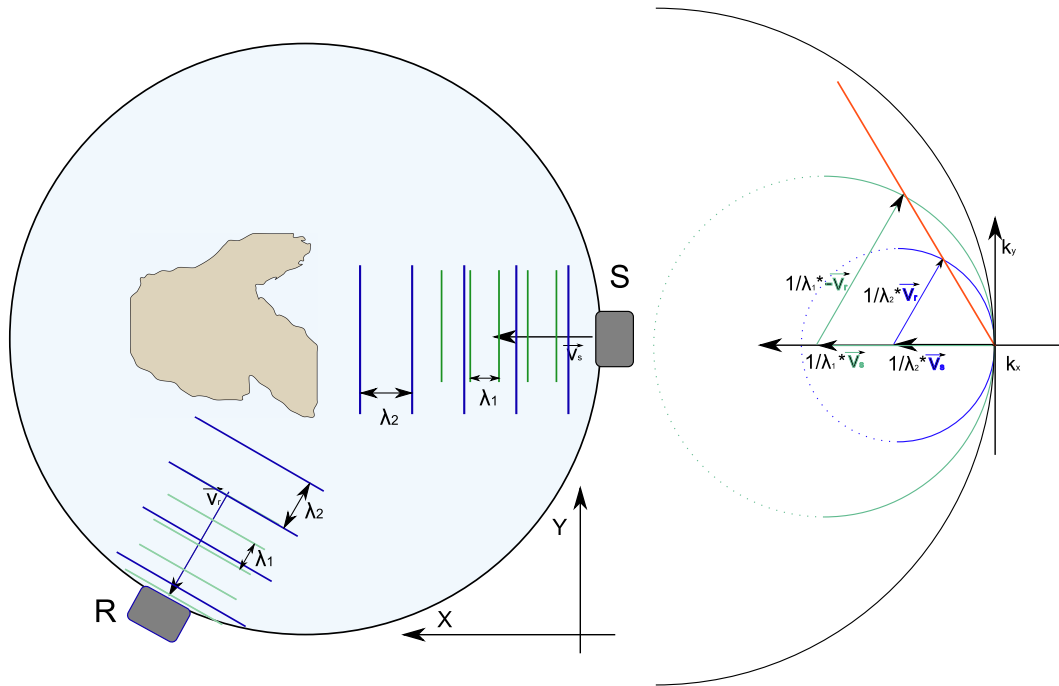


Abbildung 3.8: Ewaldsphären Konstruktion für zwei monochromatische Ebenen-Wellen: (rechts)  $k$ -Space, die Sender- Empfänger-Normalenvektoren finden sich als  $\vec{v}_s$  und  $-\vec{v}_r$  wieder, mit der reziproken Länge  $k = \frac{1}{\lambda}$ . Die rote Linie zeigt die Entwicklung des  $k$ -Space Beitrags für konstante  $\vec{v}_s$  und  $-\vec{v}_r$  aber variierende  $k$  an, also mit der Frequenz in ihrer „Größe“ skalierende Ewaldsphären. (links) Sender- und Empfänger-Normalenvektoren im Ortsraum ( $\vec{v}_s$  und  $\vec{v}_r$ ), zwei Beispielwellenlängen  $\lambda_1$  (grün) und  $\lambda_2$  (blau).



# 4 Systemmodellierungen und Simulationen

## 4.1 Evaluierung von Rahmenbedingungen

Aus den USCT Projekt Zielen und der konkreten Hauptapplikation USCT3Dv2 ergeben sich die Anforderungen für die Systemmodellierung: einerseits die Genauigkeit (Präzision) die erzielt werden soll, andererseits die Komplexität der Implementierung als auch der Algorithmik.

Im Gegensatz zu üblichen Ultraschallansätzen (z.B. Sonographie) ist USCT ein echtes 3D-Verfahren, so dass dadurch eine 3D Modellierung und Simulation mit wesentlich mehr Aufwand notwendig ist. Des Weiteren ist USCT ein polychromatisches Verfahren mit nicht vernachlässigbarer Bandbreite, monochromatische Ansätze aus der Optik sind möglicherweise nicht einsetzbar.

Weitere die Apertur betreffende Eigenschaften wie die Verteilung der Aperturteile in 3D, die nicht ko-planarer ausgerichtete Sensorik und getrennter Sender und Empfängerpositionen, sind komplex und in der Literatur kaum beschrieben für Modellierungen und Simulationen.

### 4.1.1 Informationstechnische Rahmenbedingungen

Der Aufwand der zu berechnenden Simulation ist neben der algorithmischen Komplexität vor allem durch die „Größe“ des zu analysierenden Parameterraums gegeben. Wobei Größe sich hier als Anzahl der numerisch diskret bestimmten Simulationstützpunkte ergibt, also eine Beziehung zum Abtasttheorem existiert, siehe

Abschnitt 3.2. Die Zielauflösung des USCT Projekts [9] liegt bei ungefähr  $1 \cdot 10^{-4}$  m.

Eine anderer Weg sie abzuschätzen ist über die Wellenlänge  $\lambda$  der primär verwendeten US-Frequenz. Für den im Aufbau befindlichen Tomographen wurde die Hauptfrequenz  $f = 2,8$  MHz gewählt und mit einer typischen Ultraschallgeschwindigkeit von Wasser bei Raumtemperatur  $v_{H_2O} = 1480$  m/s ergibt sich mit [22]:

$$\lambda = \frac{v_{H_2O}}{f} \quad (4.1)$$

eine Wellenlänge von  $5,3 \cdot 10^{-4}$  m. Der zu erzielende Aufnahmebereich (ROI, Region-of-Interest) deckt einen 3D-Kubus von  $0,1 \text{ m} \times 0,1 \text{ m} \times 0,1 \text{ m}$  ab, was durch eine abzubildene Brust einer typischen Probandin mit Körbchengröße B-C motiviert ist, siehe Abb. 4.1 [28]. Ein für die angegebene ROI und mit  $1 \cdot 10^{-4}$  m und

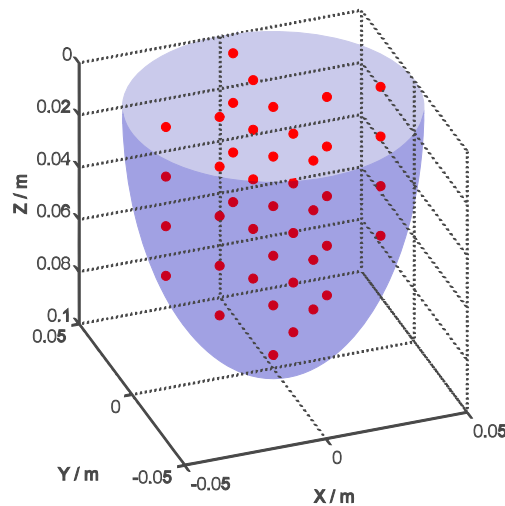


Abbildung 4.1: *Region-of-Interest für USCT3Dv2: grauer Halbellipsoid zeigt ROI, zusätzlich angezeigt die 42 Stützpunkte der Schwarzenberg'schen Simulation, Quelle: [28]*

doppelter Fließkomma-Präzision aufgelöstes Voxelbild hat bereits 7,45 GByte allein an Speicher, was es notwendig erscheinen lässt, effektive und speichersparende Algorithmen und Implementierungen zu wählen.

### 4.1.2 Selektion der Test Ultraschallsysteme

Als die zu analysierenden Abbildungssysteme wurden mehrere Aperturen ausgewählt, es wurde sich auf drei Systeme beschränkt, zwei direkt dem USCT Projekt zugehörig und ein hypothetisches System von theoretischem Interesse.

Die *USCT3Dv1* Apertur des existierenden und im Betrieb befindlichen USCT3Dv1 Tomographen wurde gewählt da für ihn Referenzdaten verfügbar sind. Auch besitzt er eine rotationssymmetrische, geschichtete, zylindrische Apertur. Optimierte wurde sie für eine uniforme Flächenabdeckung der Aperturwände, siehe [46]. Die Auflösung dieses Systems in Z-Richtung ist um ein Vielfaches geringer als entlang der XY-Ebene. Hauptmotivation für eine simulierende Untersuchung ist der Vergleich mit dem im Aufbau befindlichen USCT3Dv2 Demonstrator.

Bei dieser zweiten Generation (USCT3Dv2) wurde die Geometrie aufwendig über mehrere Metriken optimiert. Ziel war die Reduktion der Z-Auflösungsschwäche als auch eine homogenere Ausstrahlung des Zielbereichs, [28]. Motivation hier ist ein Vergleich mit den damals über aufwändigere Methoden gewonnenen Metriken.

Das dritte Abbildungssystem soll die Geometrie einer typischen 2D-Sonographie-Apertur haben, siehe Abb. 4.4, jedoch mit dem USCT Projekt vergleichbaren Frequenzeigenschaften. Solche Sonographie Apertur werden typischerweise im phased array Modus betrieben und werden deshalb auch unter anderen Prämissen entworfen als die beiden USCT Aperturen die der SAFT Bildgebung dienen. Weitere Motivation für eine Sonographie Geometrie ist der Vergleich einer 3D- mit einer 2D-Apertur. Die Apertur ist in den beiden USCT Systemen weitläufig in 3D verteilt, die Sonographieapertur liegt räumlich eng auf einer 2D-Ebene was zu deutlich unterschiedlichen Abbildungseigenschaften führen muss.

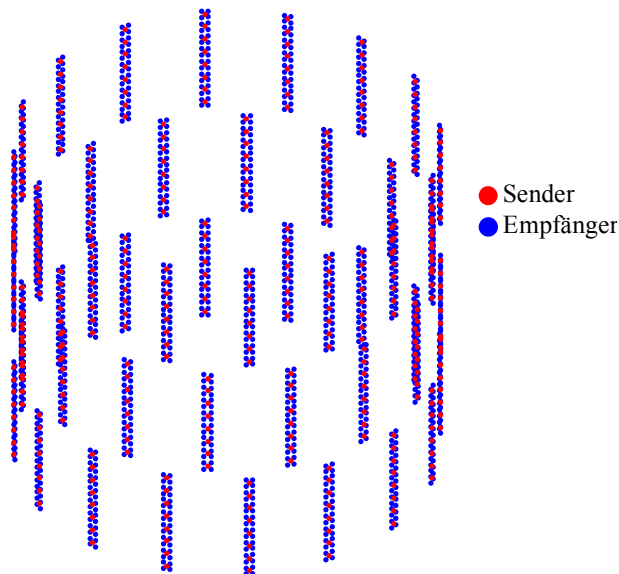


Abbildung 4.2: *USCT3Dv1 Sensorik Geometrie: farbcodiert die relativen Raumpositionen für Sender und Empfänger*

### **Apertur USCT3Dv1**

Der im Jahr 2005 fertiggestellte USCT3Dv1 Demonstrator besitzt auf dem 0,184 m durchmessenden zylindrischen Meßbehälter 24 gleichverteilte Ebenen entlang der Z-Achse, siehe Abb. 4.2. Auf jeder Ebene sind jeweils 16 Sender äquiangular (gleichwinklig) verteilt, insgesamt 384 Sender. Ebenfalls ringförmig verteilt, jedoch auf 48 Ebenen sind jeweils 16 Empfängerpärchen äquiangular verteilt, insgesamt 1536 Empfänger. Die Normalen der Abstrahlflächen der Sender und Empfänger sind parallel der XY-Ebene auf die mittige Rotationsachse gerichtet. Eine Region-of-Interest ist nicht vom Projekt definiert, es wird die gleiche ROI wie für die USCT3Dv2 Geometrie verwendet, mittig über die Z-Achse positioniert.

### **Apertur USCT3Dv2**

Die Apertur der aktuell im Aufbau befindlichen Hardware befindet sich dünnverteilt auf einem halb-ellipsoidalen 3D-Körper. Die Parameter dieses rotationsymmetrischen halb-ellipsoiden Körpers sind 0,18 m als lange Ellipsenachse in Richtung Z (Tiefe) und 0,12 m als kurze Ellipsenachse auf der XY-Ebene. Es ergibt sich ein

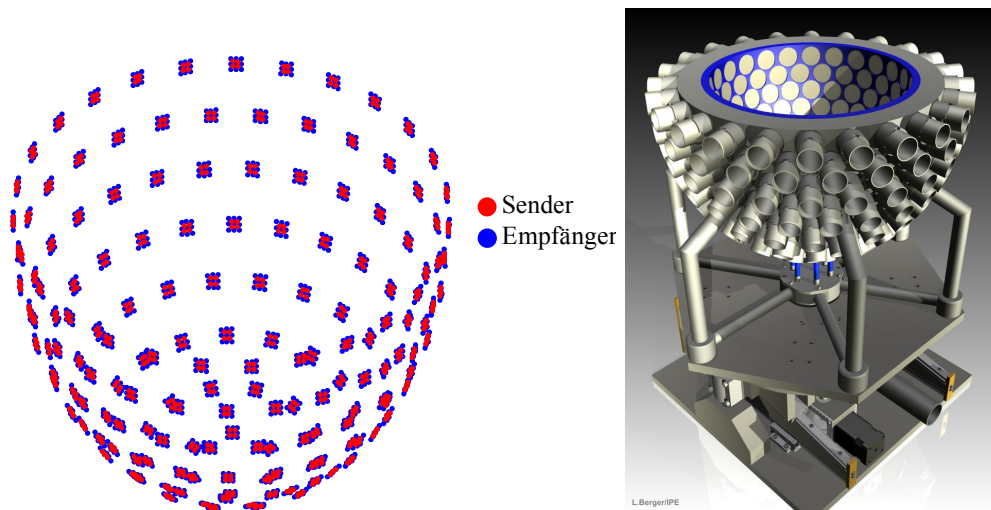


Abbildung 4.3: (links) USCT3Dv2 Sensorik Geometrie mit farbcodierten Sendern und Empfängern, (rechts) Schema Gesamtsystem USCT3Dv2 mit mechanischem Unterbau

Durchmesser am oberen Rand von 0,24 m, siehe Abb. 4.3. Auf den 157 ungefähr gleichförmig verteilten Sensorplätzen liegen versetzt jeweils neun Empfänger und vier Sendern. Da diese neun Empfänger und vier Sender auf dem selben Sensor sitzen, besitzen sie eine identische Abstrahlrichtung.

Die Abstrahlungsnormalen sind auf einen ungefähr 0,1 m großen Bereich in der Mitte gerichtet. Dieser Bereich, Region-of-Interest (ROI) genannt, wird in einer Messung der Bereich sein in dem sich die zu vermessende Brust befinden wird, siehe hierzu die definierende Doktorarbeit [28].

## Sonographie

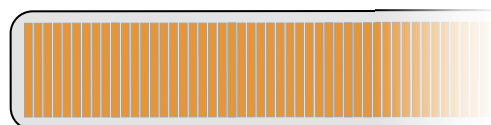


Abbildung 4.4: Struktur einer typischen Sonographie Scanner: 256 Lamellen entlang der X-Achse, braune Elemente stehen für Transducer Flächen die sowohl als Sender als auch Empfänger agieren können

Die angenommene Sonographie Geometrie steht auch als Beispiel für eine Phased-Array Architektur, siehe Abb. 4.6, bestehend aus vielen parallelen Sensorlamellen über die X-Dimension. Die Ausdehnung der einzelnen Elemente über die X-Achse entspricht der Unterelemente der USCT3Dv1- und USCT3Dv2-Aperturen, siehe Abb. 4.4. Die Elemente sind individuell ansteuerbar und agieren sowohl als Sender, als auch Empfänger. Die große Abstrahlfläche, erreicht durch eine große Ausdehnung über die Z-Achse (0,0049 m), erzeugt eine hohe Schallintensität beim Senden und hohe Sensitivität beim Empfangen. Nachteil hiervon ist, dass durch die große Integrationsfläche auch die Auflösung über Z um Größenordnung geringer als in der XY-Ebene zu erwarten ist. Dies lässt eine Verwendung dieser Apertur effektiv nur für eine 2D Bildgebung zu, mit Objekten die konstant über ihre Z-Achse sind. Die Normalenvektoren der Elemente sind identisch untereinander und liegen parallel zu der XY-Ebene.

Als Region-of-Interest (ROI) wird die gleiche Größe wie für USCT3Dv2 verwendet, als Abstand von der Apertur wurde 0,04 m gewählt.



## 4.2 Simulation der Aperturen als Ebene-Wellen Quellen

### 4.2.1 Ewaldsphären als monochromatische Sender-Empfänger Modellierung

In der Literatur ([34], [2] etc.) wird ein Konzept verwendet welches mit einer linearen Systembeschreibung zusammenpasst: Eine monochromatische Sender-Empfänger Gesamtbeschreibung über die *Ewaldsphären-Konstruktion* im Frequenzraum 3.8. Eine solche monochromatische Frequenzbetrachtung kann durch die Linearitätseigenschaften des  $k$ -Space in eine polychromatische überlagert werden, siehe Fouriereigenschaften in Kap. 2. Ebene-Wellen als einfachste Grundelemente mit deren Abstrahlrichtung, ist ein Modellierungsansatz für Aperturen die als Wellenquellen und -senken agieren.

Die Annahme jedoch, Senderlemente senden räumlich unbegrenzte Ebenen-Wellen aus, bedingt konsequenterweise, dass nur unendliche breite Aperturen dies erreichen. Analog müssen Empfänger ebenfalls unendlich lang sein um Ebenen-Wellen empfangen zu können. Auch wenn solche Sensoren nicht baubar sind, sind sie ein hilfreiches theoretisches Konstrukt da vereinfachende Betrachtungen mit ihnen möglich sind.

Eine solche Ebenen-Welle lässt sich entsprechend der Ebenengleichung als Richtungsvektor und Ortsvektor charakterisieren, mehr ist nicht nötig da endliche Ausdehnung (als Höhe, Breite, Strukturierung...) der Sensorik in dieser Modellierung nicht mehr vorhanden sind. Der Ortsvektor geht im  $k$ -Space in eine periodische Phase von 0 bis  $2\pi$  über.

Daraus ergibt sich eine Aperturbeschreibung über den Richtungsvektoren und Ortsvektor der Transducer und ihrer Ultraschallfrequenz im monochromatischen Fall, im polychromatischen Fall ihrer Bandbreite.

## 4.2.2 Ortsinformation und Abstrahlrichtungsvektoren

Die räumliche Positionen und die Abstrahlnormalen der Sensorik kann aus im Projekt existierende Datenbeschreibungen der Aperturen entnommen werden. Die räumliche Position stellen sich als Ortsvektor vom Koordinatenursprung und die Abstrahlrichtungsvektoren als auf Länge eins normalisierte Richtungsvektoren  $\vec{v}_{nv}$  dar. In der k-Space Repräsentation geht der Ortsvektor  $\vec{v}_O$ :

$$P(\lambda) = 2\pi \cdot \text{mod}(\|\vec{v}_O\|, \lambda); \quad (4.2)$$

in eine Phase  $P(\lambda)$  über. *Modulo* ist hier kontinuierlich definiert als  $\text{mod}(f_1, f_2) = (f_1/f_2) - \text{floor}(f_1/f_2)$  mit beliebigen  $f_1$  und  $f_2$ .

## 4.3 Modellierung von strukturierten US-Transducern

### 4.3.1 Ultraschall-Aperturen

Das obige Modell ist durch die Annahme von unbegrenzt ausgedehnten Sensoren beschränkt. In der Realität ist die Geometrie der Sensorik strikten geometrischen Anforderungen unterworfen die Dicke, Länge und Struktur definieren. Hierbei sind viele Faktoren wie Schallwandler Effektivität, Impedanzanpassungen, Reflektion innerhalb der Piezokeramiken etc. zu berücksichtigen. Dies ist notwendig um Sensoren zu erhalten die eine ausreichende Signalintensität (Schalldruck), Bandbreite als auch geforderte Abstrahlcharakteristik besitzen, siehe hierzu [10] [20].

Die räumliche Abstrahlcharakteristik kann als das Ergebnis von vielen diffraktiv sich überlagernden Huygenswellen betrachtet werden. In der Optik werden die sich ergebenden diffraktiven Überlagerungen in zwei abstandsabhängige Bereiche eingeteilt, das Nahfeld und das Fernfeld [11]. Das Nahfeld kann über die Fresnel-diffraktion approximiert beschrieben werden, dies hat jedoch keine Relevanz für unsere Betrachtung da typische USCT Anwendungsentfernung weit im Fernfeld liegen, siehe Abb. 4.8. Das USCT relevante Fernfeld ist mit einer Fraunhofer Diffraktionsbeschreibung nur noch winkelabhängig, siehe Abschnitt 2.5.8.

Die so beschreibbare winkelabhängige Amplitude ist ein wichtiger Faktor im Sensordesign. Die winkelabhängige Amplitude, also der Öffnungswinkel, ist reziprok

proportional der Aperturgröße, andererseits ist die abgestrahlte Amplitudenhöhe (oder die Empfangsensitivität) direkt proportional der Aperturfläche. Hier muss beim Design der Aperturgeometrie ein Kompromiss gefunden werden, besonders mit Hinblick einer SAFT Applikation die einen breiteren Öffnungswinkel als Phased Array Anwendungen (z.B. wie die Sonographie) benötigt [20].

Geometrische Grundeigenschaften der Aperturen können als Ergebnisse einer räumlichen Abtastungsbetrachtung gesehen werden: die Ausdehnung (die Unterelementgröße lateral zur Abstrahlachse) und Periodizität mehrerer dieser Unterelemente sollte kleiner als  $\lambda$  sein, siehe Abb. 4.5. Räumliches Aliasing, welches in der Abbildungssystemtheorie als *Grating Lobes* bezeichnet werden, wäre die Folge falls dies missachtet wird. Hier wird für eine ausführliche Einführung in diese Thematik jedoch auf die Literatur verwiesen [11].

Zusätzlich ergibt sich eine komplexere Wellenüberlagerung durch Unterstrukturierung (Zerlegung der Elemente in Unterelemente) und phasenverschobene und verschieden gewichtete Ansteuerung selbiger für *Phased Array* Applikationen.

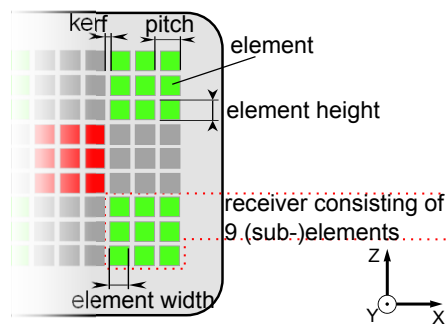


Abbildung 4.5: *Transducer Apertur Terminologie: Grüne Elemente agieren als Empfänger, rote Elemente als Sender, graue Elemente sind inaktiv.*

Auch der Modus wie Transducerelemente betrieben und vernetzt werden, kann sehr unterschiedlich sein, werden die Unterelemente phasenversetzt angesteuert spricht man von *Phased-Array*. Hier wird durch phasenverschiebung aktiv auf Ziel-Raumpunkte fokussiert sowohl beim Senden als auch beim Empfangen, siehe Abb. 4.6 mitte. Werden diese Unterelemente nicht phasenversetzt angesteuert spricht man von *SAFT*, dem im USCT Projekt eingesetzten Verfahren. Hier wird das Fokussieren im Nachhinein in Software durchgeführt, während der Messung

wird versucht den vollständigen Messraum in 3D aufzunehmen.

Werden die Unterelemente mit unterschiedlicher Verstärkung angesteuert, spricht man von Apodisierung, Motivation hier ist die Optimierung der Sensorik Öffnungswinkel [20].

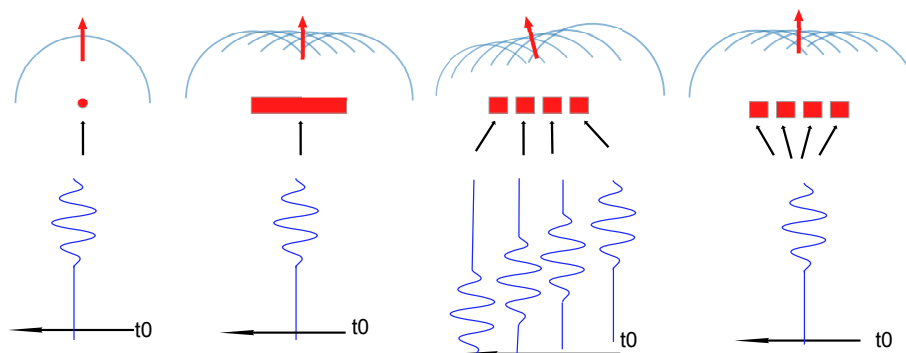


Abbildung 4.6: *Interferenz von ausgesendeten Wellen zum Zeitpunkt  $t$  nach Anregungszeitpunkt  $t_0$ : (ganz links) hypothetische Punktquelle, der ideale SAFT Sensor; (links) reale, plane Rechteck-Quelle, approximiert eine Punktquelle; (rechts) Anregung einer unterstrukturierten Geometrie (ein „Array“) durch einen zeitlich phasenversetzten Puls für eine Phased Array Anwendung. Durch den Phasenversatz wird eine gezielte örtliche Überlagerung erreicht, eine Fokussierung, sowohl beim Senden als auch Empfangen; (ganz rechts) ein unterstrukturierte Geometrie wird nicht phasenversetzt angeregt für eine SAFT Anwendung, für den SAFT Anwendungsfall ist die Unterstrukturierung durch bessere Abstrahleigenschaften motiviert.*

### 4.3.2 Eigenschaften von US-Sensorik

Ultraschallwandlerbau ist ein großes und spezifisches Forschungsfeld für sich, deswegen hier nur eine begrenzte Einführung, für detaillierte Betrachtungsweisen wird auf die Literatur verwiesen [20].

#### **Frequenzabhängigkeit und Abstrahlcharakteristik**

Die Effektivität der Wirkung einer realen US-Sensorik als Schall-Spannungswandler (und umgekehrt) ist frequenzabhängig. Die Frequenz größter Sensitivität einer US-Sensorik wird typischerweise als *Mittel- oder Hauptfrequenz* bezeichnet. Um diese Frequenz fällt die Sensitivität ab, die Frequenzbreite die erreicht wird bis man einen 50 % Sensitivitätsabfall erreicht, wird *Bandbreite* genannt.

Besitzt eine US-Sensorik keine unendlich kleine Aperturfläche (ist also keine „Punktquelle“), hat sie ein Abstrahlverhalten in Abhängigkeit des Aperturgeometry und des Abstandes. Wird der Abstandsverlust (geometrische Dämpfung) herausmodelliert und man untersucht diese Charakteristik für sehr große Abstände, verhält sich Sensorik näherungsweise nur noch winkelabhängig, im 3D-Fall über Ebenenwinkel und Höhenwinkel [20].

Eine winkelabhängige Sensitivitätsmetrik ist in vielen Feldern des Sensortechnik bekannt, für US-Hydrophone als *Winkelsensitivität* (oder Direktivität, Winkelcharakteristik) [25] [20]. Speziell im Falle einer als Sender agierenden Sensorik wird sie *Abstrahlcharakteristik* genannt, im Falle des Empfangens von Ultraschallwellen *Öffnungswinkel*. Meistens wird sie, wie bei der Frequenzbandbreite, über den Halbwertsabfall definiert, es wird in dieser Arbeit ebenso verfahren.

#### **Laterale und Axiale Bandbreite**

Im k-Space stellen sich Bandbreite und Winkelcharakteristik einer US-Sensorik als *axiale* und *laterale Bandbreite* dar [2].

Die axiale Bandbreite ergibt aus der Sensorikbandbreite entlang der Empfangs- oder Abstrahlachse der Sensorik im k-Space, deswegen auch *axiale* Bandbreite genannt. Die laterale Auflösung (wörtlich „*Seitenauflösung*“) beschreibt die Breite des Supports entlang der Abstrahlachse im k-Space. Für eine monochromatische Kugelwellen sendende Sensorik, bildet sie die laterale Bandbreite entlang eines Rings oder Kugel konzentrisch um die Nullfrequenz im k-Space aus, siehe Abb. 4.7. Es besteht ein prinzipieller reziproker Zusammenhang zwischen Aper-

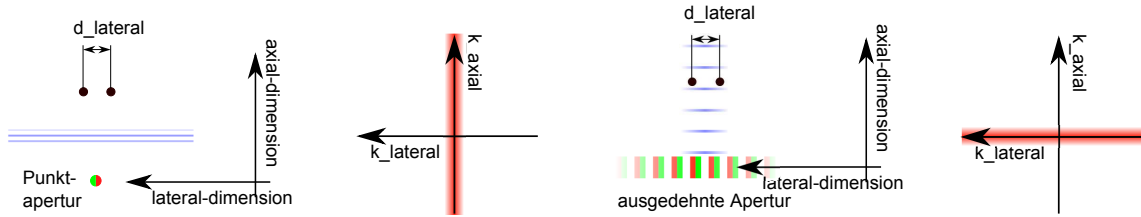


Abbildung 4.7: Auflösungsvermögen von zwei Punktobjekten die nur entlang der lateralen Dimension getrennt sind: (links) Punkttransducer mit zeitlich unbegrenzter Bandbreite, sendet eine zeitliche kurze Ebenen-Welle aus, in  $k$ -Space Betrachtung also mit sehr hoher Bandbreite. Als Empfänger agierend kann der Transducer Reflektionen von axial differenzierten Objekten trennen da er zeitlich kurze Pulse empfangen und über Laufzeitunterschiede trennen kann. Die lateral getrennten Punktstreuer können nicht auflösen werden da kein Laufzeitunterschied existiert. (rechts) Eine räumlich unbegrenzte Apertur mit minimaler zeitlicher Bandbreite kann die beiden Punktobjekte im Phased Array Betrieb auflösen. Durch die Überlagerung unendlicher vieler örtlich versetzter Kugelwellen entlang der Apertur, entsteht eine lateral schmale Welle mit der der Raum nach Objekten „abgescannt“ werden kann.

turgrößen und lateraler Bandbreite. Beispielsweise besitzt eine Punktapertur eine große Bandbreite, eine große, räumlich ausgedehnte Apertur eine kleine Bandbreite [2]. Beide Bandbreiten tragen gleichsam zum  $k$ -Space Support bei, wobei jedoch typischerweise ein nicht gleichgroßer Beitrag geleistet wird, als ein *Verhältnis* besteht. Dies kann ein Ansatz für eine Metrik für Sensorikdesignoptimierungen sein, für welche je nach Anwendungsfall ein anders Verhältnis beider gefordert werden könnte.

### 4.3.3 Simulation von ausgedehnten Sensorikaperturen als Fraunhofer Diffraction

Eine Modellierung von ausgedehnten, planen Sensoraperturen ist als Diffraction möglich mit Hilfe der Fraunhofer Approximation aus Abschnitt 4.3.8, da die Be-

### 4.3 Modellierung von strukturierten US-Transducern

dingung für eine Fernfeldannahme für die Anwendung USCT3Dv2 erfüllt ist. Dies kann abgeschätzt werden mit der „*antennas designer's formula*“ (siehe [11] Gl. 4-27):

$$z > \frac{2 \cdot D^2}{\lambda} \quad (4.3)$$

mit  $z$  als mindest Apertur-Objektabstand,  $\lambda$  der Wellenlänge und  $D$  als Aperturweite.

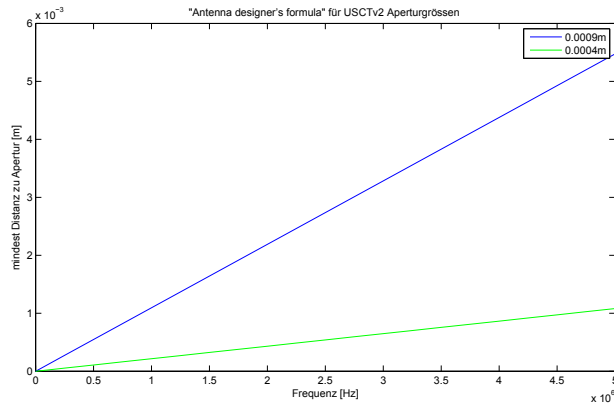


Abbildung 4.8: „*Antennas designers formula*“: Bestimmung der Mindestabstände Objekt-Apertur für die erfüllt sein muss für die (näherungsweise) Validität der Fraunhofer Approximation, (grün) kleinste Aperturweite des USCT3Dv2, (blau) größte auftretende Aperturweite; X-Achse Frequenzen der Bandbreite des USCT3Dv2 Systems (in Hz), Y-Achse Mindestabstand (in m)

Mit den räumlichen Ausmaßen des USCT3Dv2 Messbehälter von 0,12 m und 0,18 m über die beiden Ellipsoidhalbachsen und einer mittig liegendem ROI von 0,1 m sind die in Gl. 4.3 geforderten minimal Transducer-Objekt Distanzen um Größenordnungen übererfüllt.

#### 4.3.4 USCT3Dv1 Sensorstruktur

Die USCT3Dv1 Sensorik wurde am IPE gefertigt und im Rahmen einer Diplomarbeit entworfen [10]. Strukturierung und Unterstrukturierung wurde durch das Ansägen der schallwandlerischen Kernkomponente PZT-Piezoplatte erreicht [10]. Eine Sägeblattbreite von  $1 \cdot 10^{-4}$  m und Sägeabstand von  $4 \cdot 10^{-4}$  m führen zu der

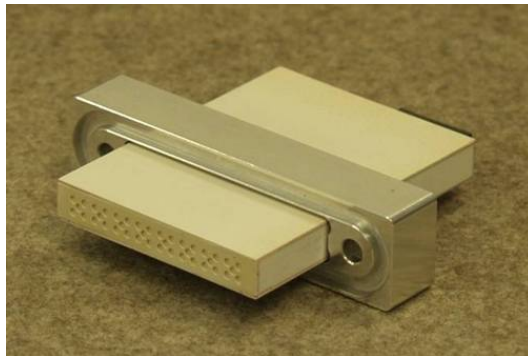


Abbildung 4.9: *USCT3Dv1 Transducer im Gehäuse*

in Abb. 4.12 gezeigten Struktur. Die unterstrukturierte Piezoplatte wurde durch elektrisches verbinden zu größeren Sender- und Empfängereinheiten verbunden. Jeweils neun quadratisch angeordnete Unterelemente bilden durch zusammenbonden einen ansteuerbaren Transducer. Pro Piezoplatine ergeben sich vier Empfänger und ein Sender, siehe Abb. 4.10. Mit Verstärker, Multiplexer und Treiberelektronik wurde die Piezoplatte in einem Gehäuse wasserdicht vergossen, und die Abstrahlfläche durch Abschleifen auf  $\lambda/4$  für eine optimale Abstrahlleistung bei der Mittelfrequenz optimiert.

#### 4.3.5 USCT3Dv2 Sensorstruktur

Die USCT3Dv2 Sensorik wurde ebenfalls am IPE entworfen und gefertigt. Strukturierung und Unterstrukturierung wurde durch das Ansägen einer Piezoplatte erreicht. Eine Sägeblattbreite von  $1 \cdot 10^{-4}$  m und Sägeabstand von  $4 \cdot 10^{-4}$  m führen zu der in 4.12 gezeigten Unterstrukturierung. Jeweils vier quadratisch angeordnete Unterelemente bilden durch elektrisches zusammenbonden einen ansteuerbaren Transducer. Pro Piezoplatine ergeben sich neun Empfänger und vier Sender, siehe Abb. 4.14. Diese USCT3Dv2 Sensorik wird mit Verstärkungs- und Steuerungselektronik in Edelstahlgehäusen vergossen, siehe Abb. 4.13. Zusätzlich werden Streukappen um die aktive Abstrahlfläche angebracht um potentiell störende Reflektionen von der Abstrahlfläche durch andere Sender zu minimieren.



### 4.3 Modellierung von strukturierten US-Transducern

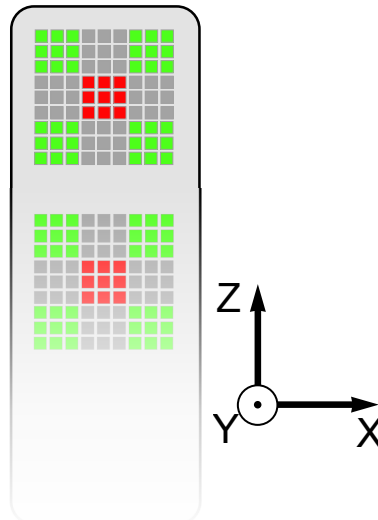


Abbildung 4.10: *Struktur und Unterstruktur der USCT3Dv1 Sensorik: grün markiert die als Empfänger agierende Struktur, rot markiert die als Sender agierende Struktur, es sind jeweils neun Unterstrukturelemente zu einer Sender- oder Empfängerstruktur elektrisch verbunden*

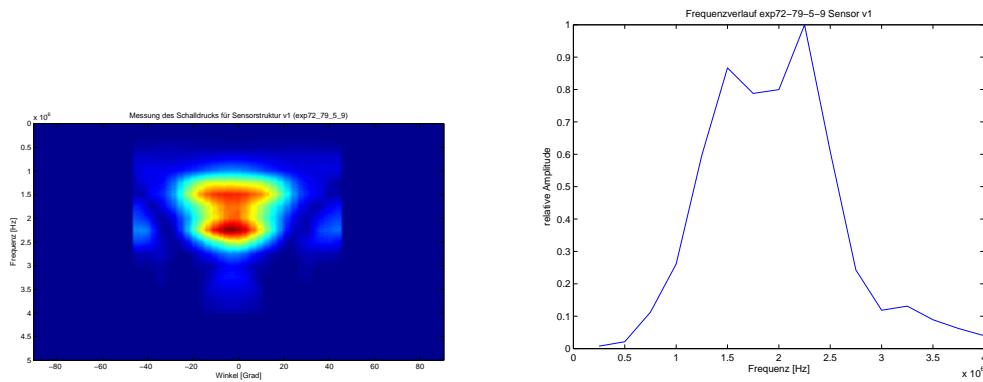


Abbildung 4.11: *Gemessene Charakteristik USCT3Dv1: (links) Druckmessung als Frequenz über dem Winkel der Sensorstruktur v1, (rechts) frequenzabhängige Transducer Sensitivität für USCTv1 Transducer aus 512-fach gemittelter Messung*

## 4 Systemmodellierungen und Simulationen

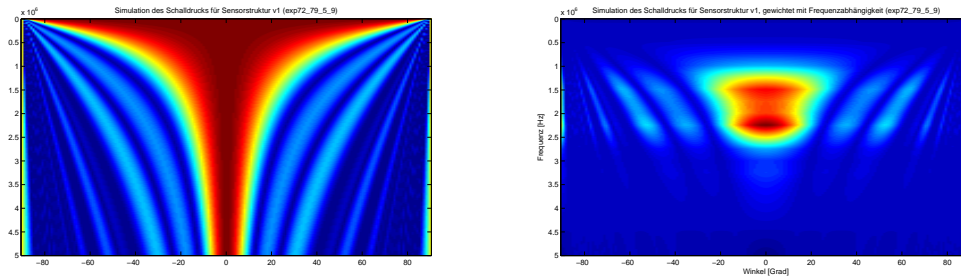


Abbildung 4.12: *Simulierte Charakteristik USCT3Dv1: (links) 1D-Simulation (Fraunhofer Approximation) des relativen Drucks als Frequenz über dem Winkel, (rechts) Simulation gewichtet mit der winkelunabhängigen axial Frequenzsensitivität gewonnen aus der Referenzmessung, siehe Abb. 4.11*

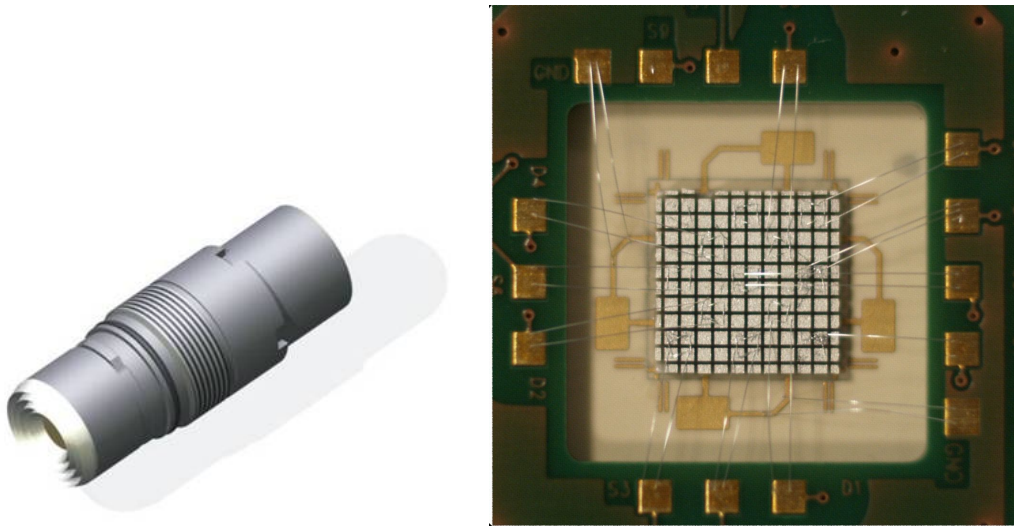


Abbildung 4.13: *USCT3Dv2 Sensorik Apertur: (links) USCT3Dv2 Schemabild, Transducer im Edelstahlgehäuse mit Streukappen auf Abstrahlfläche, (rechts) Piezostruktur und Unterstruktur, Seitenlänge eines elementaren Unterelement-Quaders  $4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ , Sägebreite (engl. kerf)  $1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$*

### 4.3.6 Sonographie Apertur

Die angenommen Elementgröße über die X-Achse entspricht der Unterelementgröße der Transducer von USCT3Dv1 und USCT3Dv2, also  $4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Die Aus-

### 4.3 Modellierung von strukturierten US-Transducern

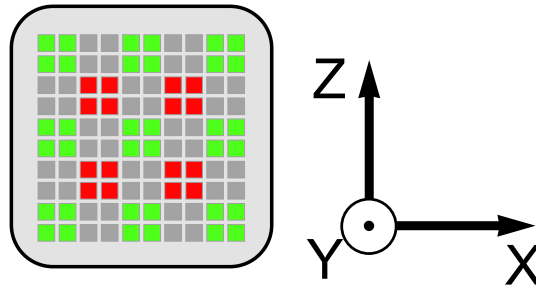


Abbildung 4.14: *Struktur und Unterstruktur der USCT3Dv2 Sensorik: grün die als Empfänger agierenden Elemente, rot die als Sender agierenden, es sind jeweils vier Unterstrukturelemente zu einer Sender- oder Empfängerstruktur elektrisch verbunden*

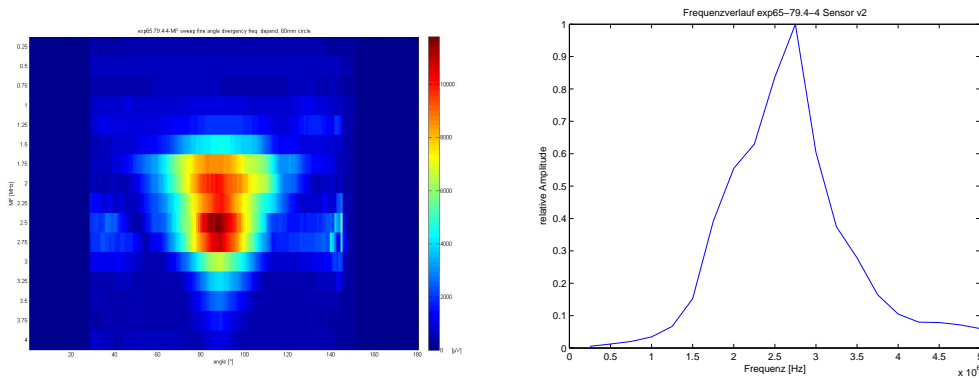


Abbildung 4.15: *Gemessene Charakteristik USCT3Dv2: (links) Druckmessung als Frequenz über dem Winkel der Sensorstruktur v2, (rechts) frequenzabhängige Sensitivität für USCT3Dv2 Transducer aus 512-fach gemittelter Messung*

dehnung über die Z-Achse entspricht der Gesamthöhe der von USCT3Dv2 über die aktive Fläche einer Piezokeramik, also  $4,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Da keine Referenzmessung verfügbar, wird ein gaußförmige Frequenzsensitivität angenommen.

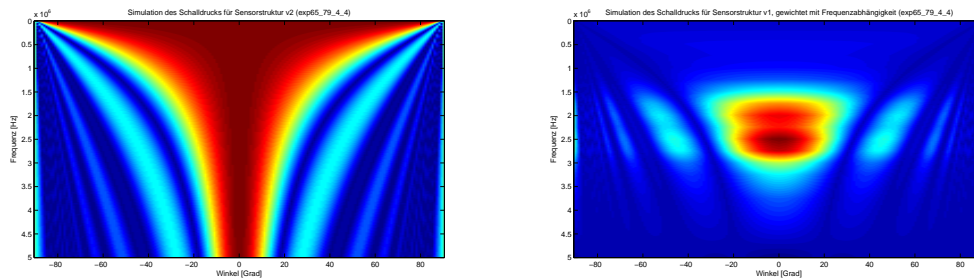


Abbildung 4.16: *Simulierte Charakteristik USCT3Dv2: (links) 1D-Simulation (Fraunhofer Approximation) des relativen Drucks als Frequenz über dem Winkel, (rechts) Simulation gewichtet mit der durch aus der Referenzmessung gewonnenen winkelunabhängigen Frequenzsensitivität, siehe Abb. 4.15*

### 4.3.7 Annahmen für eine planare Apertur Modellierung als Fraunhofer Diffraction

Es soll die 3D-Abstrahlung der Sensorik über eine Bandbreite von Frequenzen untersucht werden. Es wird die Fraunhofer Diffraction verwendet, siehe Abschnitt 4.3.8, da die Voraussetzungen für die zu betrachtende Geometrien erfüllt sind. Unter einer Winkelbetrachtung wird für Ebenenvektor und Höhenvektor (und Vernachlässigung der geometrischen Ausdehnung) jeweils eine 1D-Definition der Apertur verwendet.

Die Sensorikapertur wird also 2D modelliert, analog zu den optischen Spalt- und Doppelspaltversuchen (siehe auch Goodman Kapitel 3.4 „*formulation of diffraction as planar screen*“), analog einer *Blendöffnung* mit den Eigenschaften transparent oder undurchgängig (opaque). Die Tiefendimension der Sensorik wird nicht berücksichtigt.

### 4.3.8 Laterale Bandbreite über Fraunhofer Diffractions Approximation

Die eingeführte Fraunhofer Diffraction wird zur Beschreibung des diffraktiven Fernfelds von Aperturstrukturen benutzt, siehe Abschnitt 2.5.8, um die *laterale*

### 4.3 Modellierung von strukturierten US-Transducern

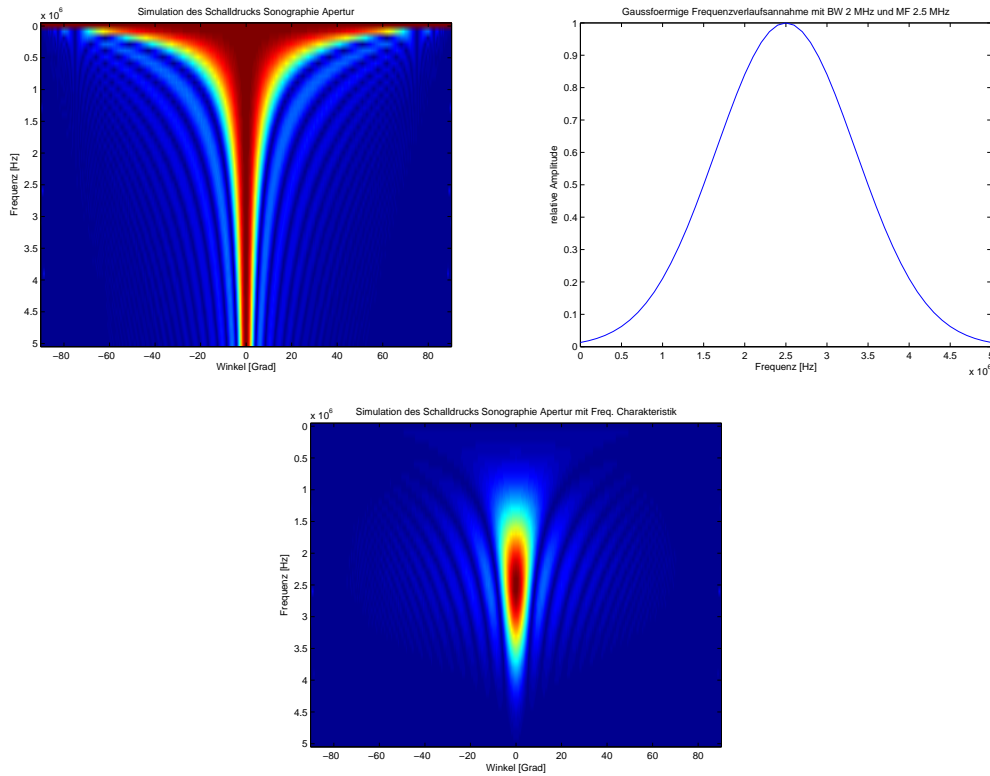


Abbildung 4.17: *Gemessene und simulierte Charakteristik Sonographie Apertur: (links) Fraunhofer Diffraktionsapproximation für die Abstrahlcharakteristik der Sonographie Apertur, (rechts oben) gaussförmige Frequenzsensitivitätsannahme mit Mittelfrequenz 2,5 MHz und Bandbreite 2 MHz, (unten) Simulation gewichtet mit der winkelunabhängigen gaußförmigen Frequenzsensitivität*

le Bandbreite zu bestimmen, siehe Abb. 4.18.

Danach kann eine mit  $s_f$  diskret abgetastete räumliche 1D-Apertur  $A(x)$ , im Fourierraum ( $F_A(f_x) = \mathcal{F}(A(x))$ ) transformiert, die Winkelabstrahlcharakteristik angenähert abbilden, hier beispielhaft für die X-Dimension.

Die Position im 1D-Ortsfrequenzraum  $f_x$  ergibt sich als:  $f_x = \frac{x}{\lambda \cdot d_f}$ , mit der Wellenlänge  $\lambda$  und  $d_f$  als einer Fokusdistanz in Metern. Da die Fraunhofer Approximation invariant bis auf die Winkel ist, bietet sich eine Winkelbeschreibung an, die *Winkelspektrumsdarstellung*, siehe Abschnitt 2.5.4. Mit der Tangensgleichung  $\tan(\beta) = \frac{x}{d_f}$  wird der Beugungswinkel  $\beta$  eingeführt. Zusammen

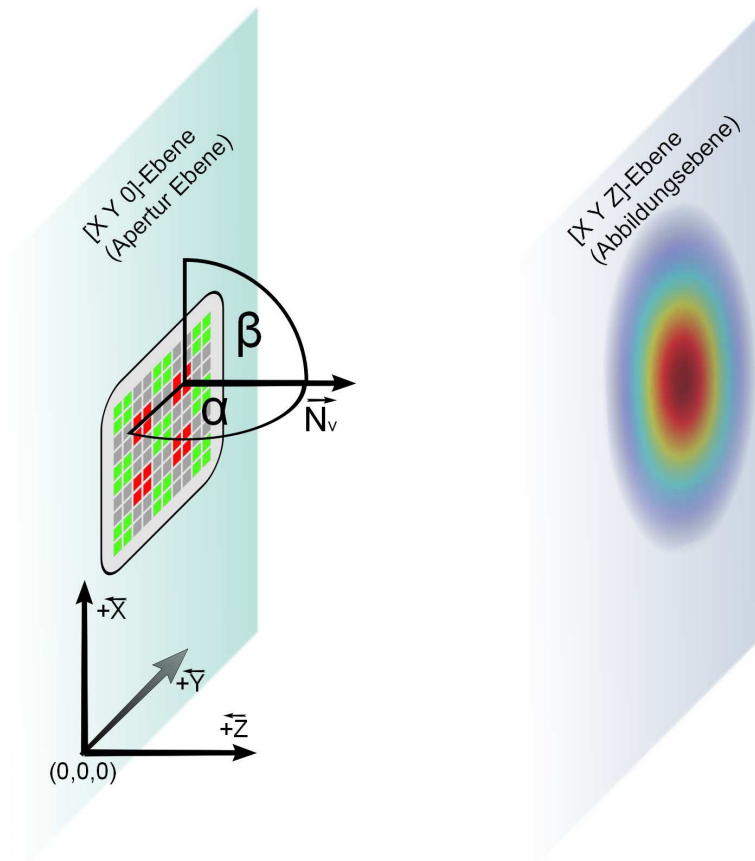


Abbildung 4.18: *Koordinatensystem der Fraunhofer Diffraktionsbeschreibung: (links) diffraktive agierende beliebige plane („planare“) Struktur, gezeigt wird der Abstrahlhöhenwinkel  $\beta$  und Ebenenwinkel  $\alpha$  (die beiden Beugungswinkel) für den Sender rechts oben, die Abstrahlnormale ist als  $\vec{N}_v$  eingezeichnet, (rechts) Abbildungsebene der Amplitude des diffraktiven Wellenphänomens, eingezeichnet das absolute der relativen Amplitude zwischen rot (maximaler Druck) und blau (minimaler Druck) für einen Bereich auf einer angenommenen Abbildungsebene parallel zur Aperturebene („koplanar“)*

mit der obigen Gleichung ergibt sich  $f_\alpha = \frac{\tan(\beta)}{\lambda}$ , die Fokusdistanz kürzt sich heraus [2] [11].

Komplexe 1D-Aperturen lassen sich mit Hilfe der Fouriertheoreme aus einfache-

ren Strukturen konstruieren, ein Beispiel mit einer doppelrechteck Apertur in Abb. 4.19.

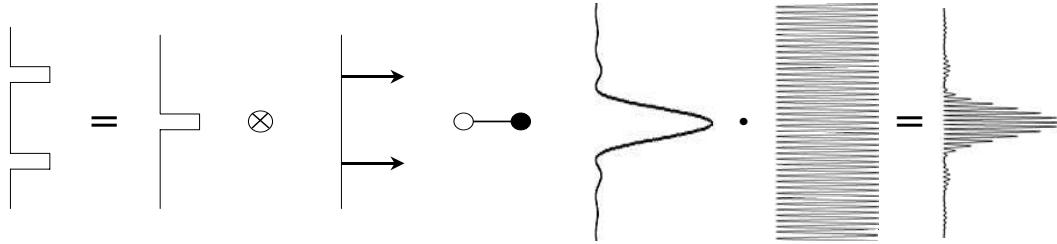


Abbildung 4.19: *Fraunhofer Diffractions Konstruktion im Fourierraum für zweier rechteckiger Aperturen: (von links nach rechts) komplexe Apertur, wird in zwei Elementarfunktionen zerlegt. Diese Rechteckfunktion und zwei Diracpulse bilden über eine Konvolution wieder die Apertur. Diese Elementarfunktionen werden in den Fourierraum transformiert, und mit dem Fourierkonvolutiontheorem als Multiplikation wieder vereinigt. Dies ergibt die Fouriertransformation der ursprünglichen, komplexen Aperturfunktion.*

### 4.3.9 Axiale Bandbreite aus Referenzmessungen

Die axiale Bandbreite ist ohne eine Simulation, die die Materialeigenschaften und die räumliche Tiefenstrukturierung der Sensorik einfließen lässt, nicht abzuschätzen [20]. Hierzu läuft gegenwärtig im USCT Projekt eine weitere Diplomarbeit auf Basis der *Finite Elemente Modellierung (FEM)* [19]. Alternativ zu einer gaußförmigen axialen Frequenzannahme stand die Gewinnung von echten Referenzdaten zur Wahl, da ein Messplatz für Sensoren vorhanden ist. Für die benötigten Frequenzinformationen der Sensorik wurden Referenzmessungen an dem projektzugehörigem Sensormessplatz vorgenommen, das genaue Vorgehen wird in Abschnitt 4.5 beschrieben.

### Modellierung mit einer winkelabhängigen Frequenzverschiebung

Aus geometrischen Überlegungen heraus und nach ersten Evaluierungen gegen die Referenzdaten wurde deutlich, dass die Simulationsgüte zwar akzeptabel scheint,

doch es wohl Effekte gibt welche in der Modellierung nicht ausreichend berücksichtigt werden. Möglich und wahrscheinlich ist, dass die existierende reale Sensorik aufgrund Dämpfung, Anpassschichten, und anderer Eigenschaften frequenzverschoben agiert. Ein andere Annahme die durch die deutlich verbesserte Simulationsgüte, siehe Tab. 5.9, gestützt wird, dass die von der Sensorik effektiv aufgenommene Frequenz zusätzlich winkelabhängig ist, in (schwacher) Analogie zum Dopplereffekt. Eine solche Abhängigkeit wurde versucht empirisch als  $f_\alpha = f \cdot \cos(\alpha)$  modelliert. Andere Modellierungsversuche als reine Frequenzverschiebung führten zu weniger guter Übereinstimmung mit den Referenzmessungen. Die endgültige Beurteilung dieser Modellierung steht noch an, siehe auch hierzu Abb. 5.2 und Abb. 5.3.



## 4.4 Modellierung ausgedehnter Sensorik mit Ortsposition und Abstrahlvektor

Eine konsequente Weiterentwicklung der bisher präsentierten Ideen und Modellierungen wäre eine Simulation, die die Eigenschaften von Ewaldsphärenkonstruktion und Fraunhofer Apertursimulation vereinigt. Idee ist hier die Verbesserung der Simulation über ein einfließen der Fernfeldmodellierung der Sensorik-Apertur und weitere Berücksichtigung der globalen Sensorposition und der Abstrahlnormale unter realistischeren geometrischen Annahmen als in der reinen Ewaldsphärenkonstruktion.

Die Simulierung der Frequenzcharakteristik geht über einen reinen geometrischen aperturbasierenden Ansatz hinaus, so dass auf vorgegebene Daten aus Messungen, oder die Annahme einer gaußförmigen Charakteristik zurückgegriffen wird — eine übliche Methode [2].

### 4.4.1 Amplitude über die Fraunhofer Diffraktions Approximation des Fernfeldes

Die Gewinnung der winkelabhängigen Amplitude für eine Aperturstruktur, wird über die Fraunhofer Diffraktion beschrieben, siehe Abschnitt 4.3.8.

### 4.4.2 Fokussierung

Die Fokussierung auf einen Punkt wird bei SAFT Abbildungssystemen durch Zeitverschiebung im Ortsraum erreicht. Eine Zeitverschiebung, also das Vergehen von Zeit, ist im Zusammenhang mit Wellen mit einer Ausbreitung verbunden, welche jedoch nicht explizit modelliert wird. Die Simulation muss (und ist nicht) für alle Ausbreitungszeitpunkte korrekt sein, sondern nur für den Zeitpunkt an dem die Welle mit dem abzubildendem Ortspunkt interagiert.

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit guter Näherung als frequenzunabhängig angenommen werden kann, also keine Dispersion existiert, verhält sich die Orts-

ausbreitung von Ultraschallwellen unabhängig der Frequenz proportional der Zeit [13]. Bekanntermaßen formuliert als:  $s(t) = v_{H2O} \cdot t$  — unabhängig der eingestrahelten Frequenz — mit  $v_{H2O} = 1480$  ms. Was sich frequenzabhängig verhält ist jedoch die Phase  $P(f, t)$ . Es entsteht durch die Ausbreitung mit der Zeit eine versetzte Phasenlage, eine Phasenverschiebung:

$$\lambda(f) = \frac{v_{H2O}}{f} \quad (4.4)$$

$$P(f, t) = 2\pi \cdot \text{mod}(s(t), \lambda(f)). \quad (4.5)$$

### 4.4.3 Ortsanpassung

Eine weitere Phasenverschiebung entsteht dadurch, dass die diffraktiv interagierenden Strukturen (Sender, Empfänger, etc.) örtlich voneinander getrennt sein können. Modelliert wird dies ebenfalls über den Phasenanteil. Eine Translation entlang des Ortsvektors  $\vec{V}_{dO}$ , aus den beiden Ortsvektoren  $\vec{V}_{O1}$  und  $\vec{V}_{O2}$  gebildet, mit den Anteilen der Ebenen-Wellen (Richtungsvektor  $\vec{V}_{PW}$ ) in dessen Richtung.

$$\lambda(f) = \frac{v_{H2O}}{f} \quad (4.6)$$

$$\vec{V}_{dO} = \vec{V}_{O2} - \vec{V}_{O1} \quad (4.7)$$

$$S_f(t, f) = \sum (\vec{V}_{dO} \cdot \vec{V}_{PW}) \cdot s(t) \quad (4.8)$$

$$P(f, s) = 2\pi \cdot \text{mod}(S_f, \lambda). \quad (4.9)$$

### 4.4.4 Diffraktive Interaktion im k-Spaces als Konvolution

Im *k-Space Tutorial* und in Goodmans *Fourier Optics* im Kapitel „Winkelspektrum“ (Kap. 3.10.3), wird eine polychromatische k-Space Entwicklung für komplexe Sender- und Empfängermodellierung definiert, über axiale und laterale Bandbreite, Orts- und Normalenvektor, gezeigt. Erste Schritte die Diffraction als Konvolution in einem 3D-Winkelspektrum zu modellieren wurden getan. Jedoch erfordert dies noch weitere theoretische Grundlagenuntersuchung, welche in einer nachfolgenden Arbeit durchgeführt werden kann. Zwischenergebnisse sind im Ausblick gezeigt, Abschnitt 6.2.1.

## 4.5 Bestimmung der Sensorcharakteristiken als Referenzwerte

Für die Evaluation der Fraunhofer Simulation, als auch zur Gewinnung von axialen Bandbreiten der Sensorgeometrien, sollen Referenzdaten bestimmt werden. Referenzwerte für die zur Verfügung stehenden Sensoren USCT3Dv1 und

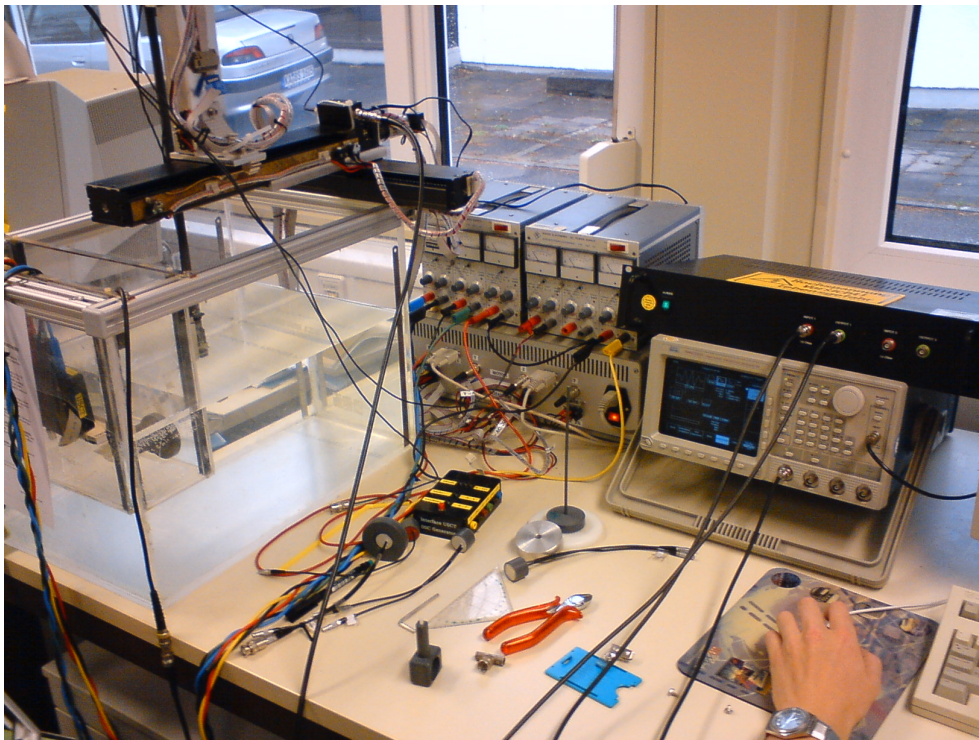


Abbildung 4.20: *Sensormessplatz des USCT Projekts: (links) Wasser gefüllter Messbehälter; (ganz rechts) Steuerungs- und DAQ PC, (mitte) Arbitrary-Wave-Generator (Tektronix AWG2021)*

USCT3Dv2 wurden mit dem zum Projekt zugehörigen Sensormessplatz bestimmt [26]. Dieser besteht aus einem Wassertank, dem Messbehälter, mit einem kalibrierten und verfahrbaren Hydrophon, ein Onda HNC-400 [25], mit einer 6 dB Bandbreite von 1 bis 10 MHz und einem Öffnungswinkel bei 5 MHz von 60°. Es stehen Buchsen in der Stirnseite des Messbehälters zur Verfügung in die die zu vermessenden Sensoren eingeschraubt werden können, siehe Abb. 4.20. Die Position des Hydrophons relativ zur Sensorbuchse kann über einen PC gesteuert und

in alle drei Raumrichtungen verfahren werden, jedoch nicht rotiert. Die Sensoren können mit beliebigen Pulsformen angeregt werden und parallel dazu wird über eine Digitalisierungskarte der gemessene Druck am Hydrophon gemessen. Die Steuerungs- und DAQ-Software basiert auf *Labwindows* in der Version 6, die Datenverarbeitung und Auswertung wurde in *Mathworks Matlab* vorgenommen [38] [23]. Zu den Möglichkeiten des Messplatzes zählen Messabläufe über verschiedene Raumpositionen und Anregungspulse der Sensoren, welche genutzt wurden um die Sensorik zu charakterisieren.

### Sensorcharakterisierung

Es wurde angenommen, dass die Sensorstrukturen durch ihre zweidimensionale, spiegelsymmetrische Piezostruktur als zwei separierbare eindimensionale Funktionen zu betrachten sind. Der am Hydrophon gemessene relative Druck,  $P_m$  besteht dann aus der prinzipiellen frequenzabhängigen Sensitivität  $S(f)$  und zwei Apertur abhängigen Komponenten,  $f(A_x)$  und  $f(A_y)$ , entlang der Symmetrieachsen  $x$  und  $y$ :

$$P_m(x, y, f) = f(A_x(x)) \cdot f(A_y(y)) \cdot S(f). \quad (4.10)$$

Da die zu messende Sensoriken USCT3Dv1 und USCT3Dv2 jeweils identisch über ihre jeweiligen Achsen  $x$  und  $y$  sind, genügt die Vermessung entlang einer Achse. Die andere Achse muss im Winkel  $0^\circ$  vermessen werden, was hier  $y = 0$  oder  $x = 0$  entspricht, da dann kein Einfluss der Winkelcharakteristik über diese Dimension auf die Messung existiert. Beispielweise  $f(A_x)$  entlang für  $y = 0$  über  $x$ :  $P_m(x, 0, f) = f(A_x(x)) \cdot f(A_y(0)) \cdot S(f) = P_m(x, 0)$ . Die prinzipielle Frequenzabhängigkeit wird mit festhalten beider Ortsparameter  $X$  und  $Y$  und einem Messlauf über  $f$  bestimmt:

$$S(f) = P_m(0, 0, f) = f(A_x(0)) \cdot f(A_y(0)) \cdot S(f). \quad (4.11)$$

Die relative 2D-Aperturfunktion,  $P_m(x, y, f)$ , aus den gemessenen Werten ( $P_m(x, 0, f)$ ) ergibt sich dann als:  $P_m(x, y, f) = P_m(x, 0, f) \cdot P_m(y, 0, f) / S(f)$ , mit einmaligen herauskompensieren der zweimal einfließenden prinzipiellen Frequenzabhängigkeit die sich durch diese multiplikative Überlagerung ergibt.

Da das Hydrophon nicht schwenkbar ist, wird der empfangene Druck des als Sender agierenden Transducer mit der winkelabhängigen Sensitivität des Hydrophons gemessen. Mit den Kalibrationsdaten des Hydrophons über Frequenz,  $SH(f)$ , und Ort,  $f(H_x(x))$ , wurde dieser Effekt in den gemessenen Daten ( $PH_m(x, 0, f)$ ) kompensiert („Deconvolution“):

$$P_m(x, 0, f) = \frac{PH_m(x, 0, f)}{f(H_x(x)) \cdot S_H(f)}. \quad (4.12)$$

### Parameterraum

Die Messung soll für die auf der Fernfeldannahme basierenden Simulation als Referenz dienen. Daher ist eine Vermessung des vollständigen Abstrahlungsfeldes über die Raumkoordinaten  $(x, y, z)$  und zusätzlich der Frequenzen als 4D-Parameterraum nicht nötig. Es genügt ein 3D-Parameterraum über Höhenwinkel  $\beta$ , Ebenenwinkel  $\alpha$  und einem Frequenzraum  $f$  für eine die Fernfeldbedingung erfüllende fixe Distanz.

Mit der in Abschnitt 4.5 eingeführten Annahme, dass die beiden Winkeleigenschaften separierbar, und die beiden vermessenen Transducertypen identisch über ihre beiden Spiegelachsen sind, reduziert sich das Problem weiter auf ein 2D-Problem.

Ziel ist also die Vermessung eines 2D-Parameterraums über die relative Winkelsensitivität  $\alpha$  entlang einer Spiegelsymmetrieachse der Transducer und die relative Frequenzsensitivität  $f$  des als Sender agierenden zu vermessenden Transducers.

Der Messplatz erlaubt eine Schrittweite von 0,001 m und ist durch Seitenwände, Wasserstand, Position der Sensorbuchse und Hydrophonausdehnung räumlich begrenzt. Durch das nicht schwenkbare Hydrophon und die räumliche Begrenzung ergibt sich ein effektiver Messbereich für Winkel, deutlich kleiner als die theoretisch erwarteten  $-90^\circ$  bis  $+90^\circ$ , ungefähr  $-50^\circ$  bis  $+50^\circ$  über die YZ-Ebene.

Es wurde eine Koordinatenliste definiert mit 180 Positionen entlang eines Halbkreises für einen konstanten Druck ohne den zusätzlichen Bedarf, den geome-

trischen Ausbreitungsverlust zu kompensieren. Auf jeder der Messpositionen des Hydrophons wurde ein schmalbandiger Puls durch den Transducer abgegeben. Die verwendete Mittelfrequenz des sinoidalen Pulses wurde über die bekannte Bandbreite der Sensorik und etwas darüber hinaus zwischen 250 kHz und 4 MHz in 250 kHz Schritten während der Messung durchlaufen.

Da die Sensorik über eine kleine Abstrahlfäche verfügt (ebenfalls das Hydrophon für eine große Winkelunabhängigkeit) sind die erzielten relativen Rauschabstände (engl. SNR, Signal-To-Noise-Ratio) gering. Zusätzlich wurde durch elektromagnetisches Einstreuen (EMV) des Mess-PCs und der anderen aktiven elektrischen Komponenten (DAQ, AWG, etc) das Messsignal mit verschiedenenfrequenten Anteilen überlagert. Um den Einfluss zu minimieren wurde die Messung vielfach wiederholt, und softwareseitig gemittelt (512 maliges messen, resultierend in  $\sqrt{512}$  SNR-Gewinn). Außerdem wurde ein Bandpass über den Sensitivitätsbereich des Hydrophons verwendet (1 bis 10 MHz). Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Abb. 4.12 und Abb. 4.16 zu sehen und sind als axiale Bandbreite in die Fraunhofer Simulationen eingeflossen.

## 4.6 Evaluierung der simulierten Sensorikcharakteristiken

Die Qualität der simulierten Transducercharakteristiken über Frequenz und Winkel sollen mit den gemessenen Referenzdaten quantitativ verglichen werden. Hierzu wurden die beiden Datensätze in den 3D-Winkelfrequenzraum überführt, mit Höhenwinkel  $\alpha$ , Ebenenwinkel  $\beta$  und Frequenz  $f$ .

Quantifizierbare und vergleichbare Metriken zur Bewertung der Qualität der Simulation sind erwünscht. Der *Mean-Square-Error* (MSE) bietet sich als eingeführte Standardmetrik an, dessen Verlauf quadratisch mit der Abweichung wächst, also *aussreißersensitiv* ist und auch *mittelwertverschiebungsensitiv* ist.

Als lineare zusätzliche Metrik wird die *Kohärenz* verwendet, ein Standardmaß aus der Signal- und Systemtheorie, nicht zu verwechseln mit dem physikalischen Kohärenzbegriff [44]. Die Kohärenz bietet sich als Metrik an, da sie eine Ähnlichkeitsaussage zwischen 0 (maximale Unähnlichkeit) und 1 (identisch) erlaubt. Die Kohärenz kann als normalisierte Korrelation betrachtet werden, welche wiederum als gleitendes Skalar-Vektorprodukt interpretiert werden kann, welches die Basis als relatives Ähnlichkeitsmaß bildet.

Zur Implementierung der Kohärenz wurde die Korrelation als Konvolution umgeformt und mit dem Fourierekonvolutiontheorem im Fourierraum als Multiplikation durchgeführt, da die Konvolution im Ortsraum für große und mehrdimensionale Probleme rechenaufwendig ist.

Die nötige Korrelation  $\text{Corr}(f_1, f_2)$  wurde folgendermaßen definiert:

$$\text{Corr}(f_1, f_2) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_1) \cdot \text{Conj}(\mathcal{F}(f_2))) \quad (4.13)$$

für mittelwertsfreie, zwischen null und eins normalisierte und beliebig dimensionale Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ . Die konkrete Kohärenz  $\text{Coer}(G_m, H_m)$  der simulierten und gemessenen winkel- und frequenzabhängigen 3D-Sensorcharakteristiken  $G_m(\alpha, \beta, f)$  und  $H_m(\alpha, \beta, f)$  ergibt sich dann als:

$$\text{Coer}(H_m, G_m, f) = \frac{\max(\text{Corr}(H_m, G_m))^2}{\max(\text{Corr}(G_m, G_m) \cdot \max(\text{Corr}(H_m, H_m)))} \quad (4.14)$$

#### 4 Systemmodellierungen und Simulationen

Als zweite Metrik wurde der *mean-square-error* MSE betrachtet:

$$MSE(a, b) = \frac{1}{i} \sum_i (a(i) - b(i))^2. \quad (4.15)$$

Ergebnisse dieser Analyse sind unter Abschnitt 5.2.6 zu finden.



## 4.7 Simulation der idealen Apertur mit der Ewaldsphärenkonstruktion

Unter der Betrachtung von k-Space Beiträgen als Abbildungsfunktion ist die ideale Füllung eine äquidistante und gleichgewichtete Abtastung des gesamten Raumes, also eine Abbildungsfunktion die als *All-pass* auf eine, sich im k-Space befindliche, Objektfunktion wirkt. Dieses Ideal eines k-Space Support für alle auftretenden k-Space Frequenzen wird versucht, über eine inverse Ewaldsphärenkonstruktion von *Ebenen-Wellen Sender-Empfänger-Kombinationen* zu generieren, siehe Abschnitt 3.3.6.

Unter der Betrachtung der potentiellen Füllung über die Ewaldsphären-Konstruktion wird deutlich, dass es keine Eindeutigkeit gibt, sondern mehrere Wege den gleichen k-Space Punkt ( $\vec{k}(f_x, f_y, f_z)$ ) zu erreichen:

$$\vec{k}(f_x, f_y, f_z) = k_s \cdot -\vec{v}_s(f_x, f_y, f_z) + k_r \cdot \vec{v}_r(f_x, f_y, f_z) \frac{\cos(\alpha)}{(\vec{v}_s \cdot \vec{v}_r)} \cdot \|\vec{k}(f_x, f_y, f_z)\| \quad (4.16)$$

mit den Richtungsvektoren  $\vec{v}_s$  und  $\vec{v}_r$  des Senders und Empfängers und der zugehörigen Ortsfrequenz bzw. Vektorlänge  $k_s$  und  $k_r$ . Außerdem gilt  $k_s = k_v$ .

Der in Abb. 4.21 gezeigte Füllansatz ergibt sich über Annahme eines fixen Sender-Normalenvektor  $\vec{v}_{s1} = [0 \ 1 \ 0]$ . Für ein zu erzeugendes Ortsbild mit den Eigenschaften Bildpunktanzahl  $n_v$  und isotrope Bildpunktgröße  $s_v$  ergibt sich die definierenden Eigenschaften des zu füllenden k-Space als  $n_{V_{k\text{space}}}$  und  $s_{V_{k\text{space}}}$  direkt aus  $s_v$  und  $n_v$ , siehe Absatz 3.1.4.

Es wird über die inverse Ewaldsphären-Konstruktion nun versucht den k-Space zu füllen. Es ergeben sich Empfänger-Normalenvektoren ( $\vec{v}_r$ ) in einem polychromatischen Ergebnisraum über eine Anzahl von Empfänger-Vektoren, die der Anzahl von Pixeln entspricht.

Die Bandbreite der sich ergebenden Frequenzen kann als *Bandbreitenbedarf* für ein Abbildungssystem, welches ein solchen k-Space füllen kann, interpretiert werden. Auch die sich aus den Empfänger-Normalenvektoren  $\vec{v}_r$  und den Sender-Normalenvektoren  $\vec{v}_s$  ergebenden Zwischenwinkel können als Systemanforderun-

## 4 Systemmodellierungen und Simulationen

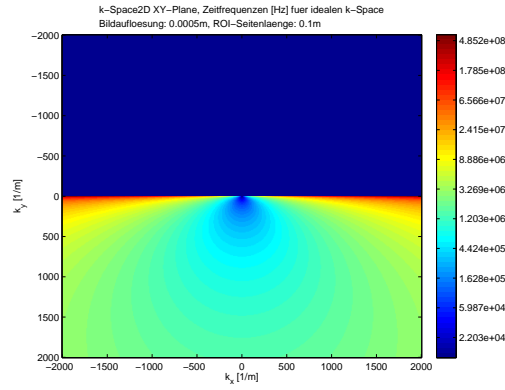


Abbildung 4.21: *k-Space Konstruktion mit vorgegebenem Sender-Normalenvektor  $\vec{v}_{s1}$ , im Bild logarithmisch aufgetragen die nötige Zeit-Frequenz ( $f = \frac{v_{H2O}}{k_s}$ ) über den 2D-k-Space die eine Sender Empfänger Kombination besitzen muss um einen Beitrag zu leisten. Mit einem Sender ist maximal der halbe k-Space zu füllen, wenn realistisch angenommen wird, dass planare Sensoren eine maximale Abstrahlcharakteristik von  $+90^\circ$  bis  $-90^\circ$  besitzen.*

gen interpretiert werden. Ein Beispiel für eine vollständige Füllung (k-Space Support) ist im Ergebnisteil Abb. 5.4 zu sehen.

## 4.8 Simulation der idealen Apertur mit der Fraunhofer Diffraktion

Ansatz hier ist die direkte Berechnung einer gewünschten Ortsraum-Schallkeule im k-Space. In einer inversen Verwendung der Fraunhofer Diffraktion kann das Absolutum der k-Space Repräsentation dieser Schallkeule, entlang einer Frequenz und über die Ortswinkel, als Apertur Definition interpretiert werden, siehe auch Abb. 4.7.

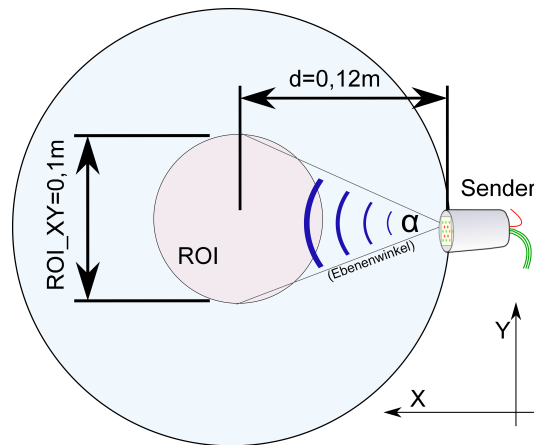


Abbildung 4.22: Abschätzung der optimalen Abstrahlcharakteristik eines Senders  $S$  für den USCT3Dv2 Messaufbau: Ausdehnung der Region-Of-Interest  $ROI_{XY} = 0,1\text{ m}$ , Abstand  $d$  zum Sensor  $S$ :  $d = 0,12\text{ m}$ , der sich ergebende Öffnungswinkel ist  $\alpha = 45,23^\circ$

Da für jede Frequenz die Geometrie anders skaliert wird, kann eine physikalische Apertur nur für eine Frequenz optimal sein.

Für eine optimale USCT3Dv2 Sensorik wählen wir die Mittelfrequenz als Zielfrequenz, als alternativer Ansatz wäre auch die größte Frequenz denkbar. Die gewünschte Abstrahlcharakteristik ergibt sich über den Abstand der ROI zur Apertur. Hierzu wird der oberste Ringdurchmesser der USCT3Dv2 Gesamtapertur als *worst-case* verwendet (da hier der größte Winkel auftritt), mit  $d = 0,12\text{ m}$  zum Mittelpunkt der ROI und mit einer Ausdehnung von  $ROI_{XY} = 0,10\text{ m}$  über  $XY$ , siehe Abb. 4.22.

Über  $\alpha = 2 \cdot 180 \cdot \arctan(0,5 \cdot ROI_{XY}/d)/\pi$  ergibt sich als optimaler Abstrahlwinkel

#### 4 Systemmodellierungen und Simulationen

$\alpha = 45, 23^\circ$  für die ROI über die XY-Ebene.

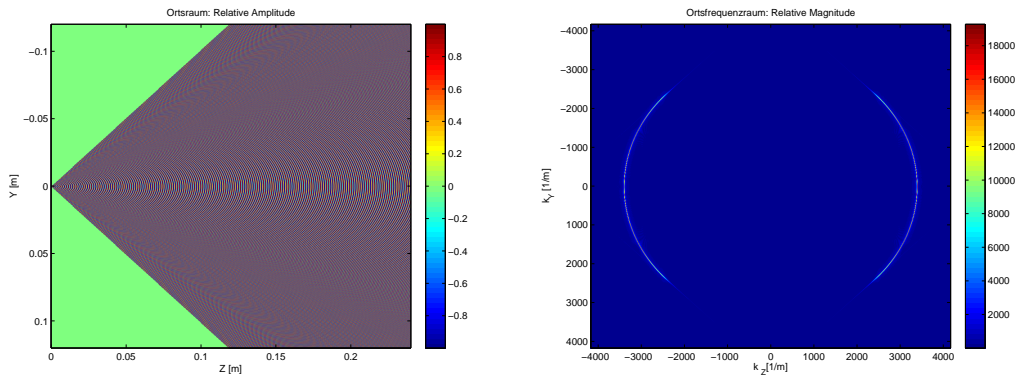


Abbildung 4.23: *Ideales Abstrahlprofil für USCT3Dv2 (2D): (links) Eine Quelle in Position  $X = 0, Y = 0$  und  $Z = 0$  sendet eine monochromatische Welle mit der Mittelfrequenz  $2,5 \cdot 10^6$  MHz und einem Öffnungswinkel von  $45, 23^\circ$ ; (rechts) die Repräsentation im  $k$ -Space*

Für die Simulation wird im Ortsraum eine Welle mit der monochromatischen Frequenz 2,5 MHz und einem hart bei  $45, 23^\circ$  begrenzten Öffnungswinkel generiert, ausgehend von einer unbekanntenen Schallquelle in  $x = 0$  m und  $y = 0$  m. In Abb. 4.23 ist sowohl die Ortsraum als auch Ortsfrequenzraum Repräsentation gezeigt. Im nächsten Schritt wird auf die koplanare Konfiguration der Fraunhofer Diffraktion zurückgegriffen mit der zu findenden Aperturschicht  $U_i(x, y, 0)$  und als Diffraktionsschicht  $U_t(x, y, z)$  mit  $Z = 0,096$  m. Die Wahl der Schicht ist (bis auf Periodizitäts- und Abtastüberlegungen) beliebig, da die reine Winkelabhängigkeit der Fraunhofer Diffraktion verwendet wird. Ausbreitungsrichtung der Welle ist die Z-Dimension. Diese Schicht wird invers fouriertransformiert und erzeugt  $U_i(x, y, 0)$ , welches noch in Abhängigkeit des Abstandes und der Wellenlänge skaliert wird. In Abb. 4.24 unten links, ist die generierten kontinuierlichen Aperturwerte gegeben. Dies kann physikalisch als „Aperturdurchlässigkeit“ interpretiert werden oder als verschiedene räumliche Anregungsstärken. Unten rechts in Abb. 4.24 sind die Phasenverschiebung gegeben, welche ebenfalls benötigt werden um die angestrebte Abstrahlcharakteristik zu erzeugen.

## 4.8 Simulation der idealen Apertur mit der Fraunhofer Diffraction

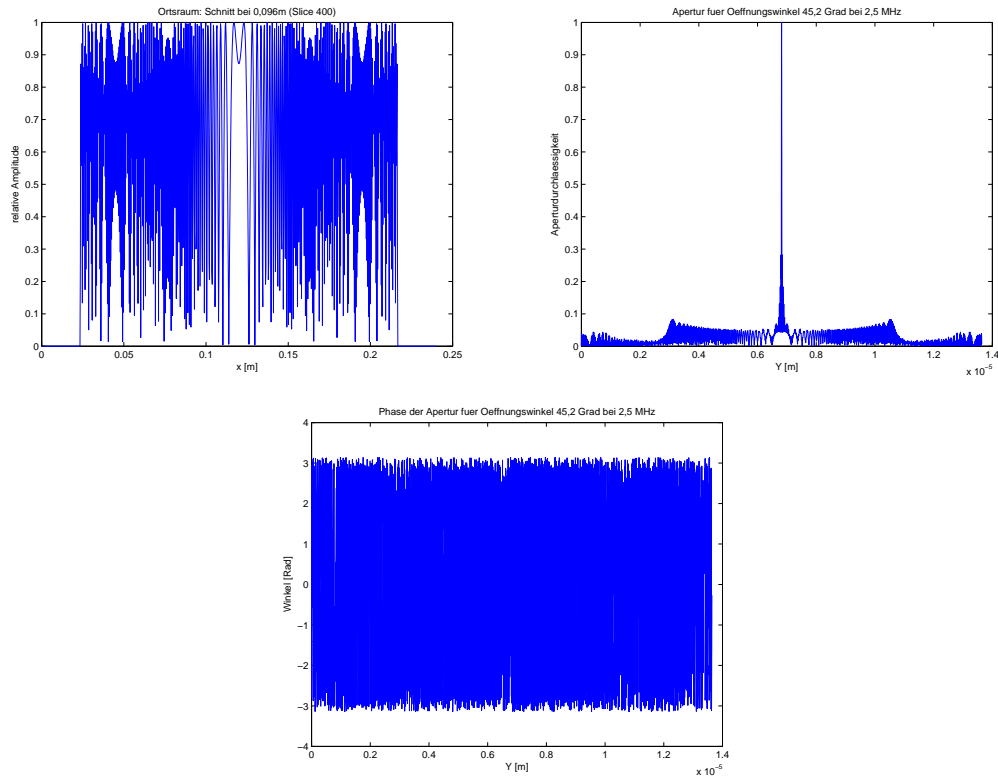


Abbildung 4.24: *Inverse Fraunhofer Diffraction: (links-oben) X Dimension eines koplanarer Schnitt  $U_i(x, y, z)$  für  $Z = 0,096$  m (die Werte entlang  $Y$  sind identisch zu denen entlang  $X$ ), (rechts-oben) die Frequenz und Abstand skalierte inverse Fouriertransformierte, interpretierbar als kontinuierliche Aperturdurchlässigkeit, (recht-unten) die Phasenverschiebungen die nötig sind um die gewünschte Abstrahlcharakteristik zu erzeugen*



# 5 Ergebnisse

## 5.1 Quantifizierung und Evaluierung

Zur Quantifizierung wurden zuvor schon eingeführte Konzepte verwendet. Beispielsweise als Metrik der Güte eines  $k$ -Spaces der *k-Spaces Support* als prozentuale Füllung für ein eine perfekte Abbildung.

Zur Visualisierung des Einflusses der Abbildungsfunktion wurde der Medizintechnik-Standard Shepp-Logan-Kopf-Phantom verwendet [27]. Da Matlab auch mit der *Imaging Processing Toolbox* nur die 2D-Variante unterstützt, wurde auf einen frei verfügbaren Ersatz zurückgegriffen [37].

### 5.1.1 Analyseraum und Koordinatensystem

Die Metriken wurden entlang der Raumkoordinaten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  bestimmt, entsprechend der im USCT Projekt üblichen Definitionen, siehe Abb. 5.1. Dies ist sinnvoll da auch die Symmetrieachsen der Aperturen den Dimensionen folgen, sind die Extremwerte ebenfalls entlang der Dimensionen zu erwarten.

### 5.1.2 Ewaldsphären basierte Simulationen

Auf Basis der in Abschnitt 3.3.6 eingeführten Konstruktion wurden vier verschiedene Varianten für jede der drei Abbildungssysteme erzeugt:

**EW-1** eine idealisierte, auf Ewaldsphären basierte Modellierung der USCT3Dv1 Apertur für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen.

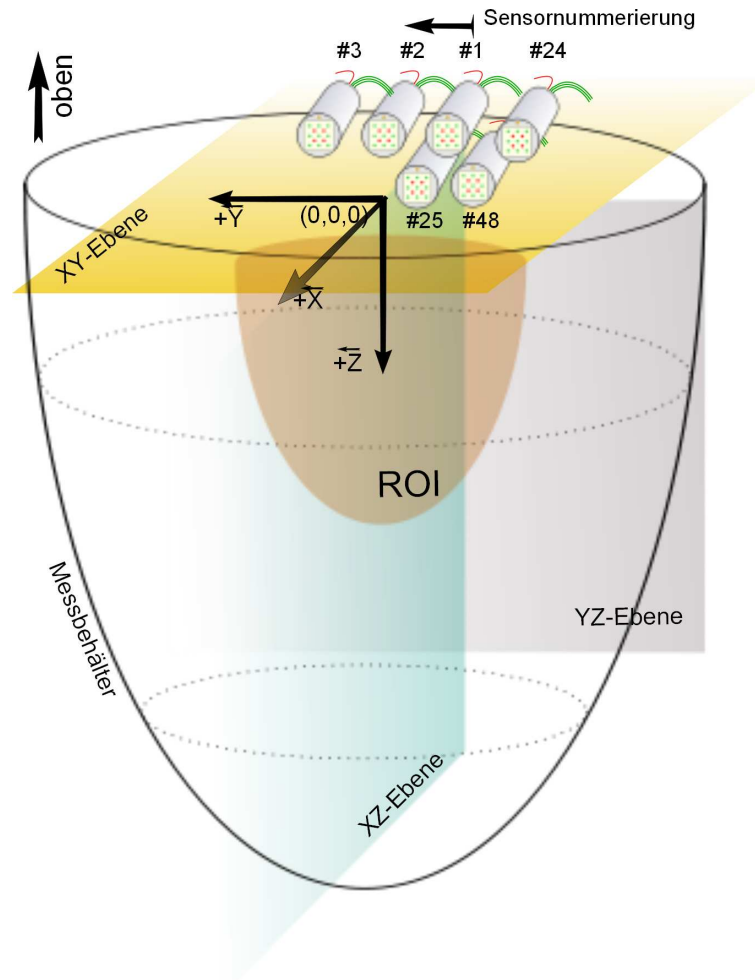


Abbildung 5.1: *USCT3Dv2 Koordinatensystem mit den drei Raumachsen, Ebenen und relativer Positionierung zu der Sensoriknummerierung*

**EW-1N** eine idealisierte, auf Ewaldsphären basierte Modellierung der USCT3Dv1 Apertur für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen, jedoch normalisiert.

**EW-2** eine idealisierte, auf Ewaldsphären basierte Modellierung der USCT3Dv2 Apertur für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen.

**EW-2N** eine idealisierte, auf Ewaldsphären basierte Modellierung der USCT3Dv2 Apertur für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen, jedoch normalisiert.

**EW-3** eine idealisierte, auf Ewaldsphären basierte Modellierung der Sonographie



Apertur für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen.

**EW-3N** eine idealisierte, auf Ewaldsphären basierte Modellierung der Sonographie Apertur für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen, jedoch normalisiert.

Die Varianten mit angehängten  $N$  („normalisiert“) bezeichnen eine Version mit binarisierten  $k$ -Space Support. Annahme hier ist, dass eine optimale Bildgebung die korrekte Gewichtung der Ortsfrequenzanteile kennt, und korrekt gewichtet verwendet. Dies ist ein akzeptable Annahme, da die USCT Signalverarbeitung stark in diese Richtung optimiert ist [28]. In den folgenden Auswertungen bezeichnen „2D“ gekennzeichnete Varianten Auswertungen auf Basis von 2D-Ausschnitten aus dem 3D- $k$ -Space.

Für die als „3D“ gekennzeichneten Supportfunktion entlang einzelner Dimensionen wurden 2D äquivalente Versionen aus den Ortsraumbildern der 3D- $k$ -Space generiert. Hierzu wurde der 3D- $k$ -Space in den Ortsraum transformiert, ein 2D-Ausschnitt selektiert und in den  $k$ -Space transformiert. Der Vergleich zwischen 2D- und 3D- $k$ -Space wurde in Abschnitt 5.2.4 gezogen.

### 5.1.3 Fraunhofer Diffraction basierte Simulationen

Auf Basis der in Abschnitt 4.8 eingeführten Konstruktion wurden vier verschiedene Varianten für jede der drei Abbildungssysteme erzeugt:

**FH-1** eine idealisierte Fraunhofer basierte Modellierung einer einzelnen USCT3Dv1 Sensorik sowohl mit lateraler, als auch axialer Bandbreite.

**FH-1 $f(\alpha)$**  eine idealisierte Fraunhofer basierte Modellierung einer einzelnen USCT3Dv1 Sensorik sowohl mit lateraler, als auch axialer Bandbreite und mit zusätzlicher winkelabhängiger Frequenzmodellierung.

**FH-2** eine idealisierte Fraunhofer Diffraction basierte Modellierung einer einzelnen USCT3Dv2 Sensorik sowohl mit lateraler, als auch axialer Bandbreite.

**FH-2 $f(\alpha)$**  eine idealisierte Fraunhofer Diffraction basierte Modellierung einer einzelnen USCT3Dv2 Sensorik sowohl mit lateraler, als auch axialer Bandbreite

und mit zusätzlicher winkelabhängiger Frequenzmodellierung.

**FH-3** eine idealisierte Fraunhofer Diffraktion basierte Modellierung einer einzelnen Sonographie Sensorik sowohl mit lateraler, als auch axialer Bandbreite.

## 5.2 Evaluation mit der Schwarzenberg'sche Simulation

Die Schwarzenberg'sche Arbeit stützte sich auf die existierenden Bildgebungsalgorithmen und bestimmte unter Modellierung der komplexen Bildentstehung realitätsnahe Metriken und Ergebnisse [28]. Durch die spezifischen auf USCT zugeschnittenen Annahmen repräsentieren sie auch den algorithmischen Stand des USCT Projekts zu diesem Zeitpunkt. Dadurch diese Vermengung von Bildgebungsalgorithmik und Abbildungssystemsimulation ergibt dieser Ansatz eine tendenzielle *Unterschätzung der maximalen theoretischen Abbildungsgüte* des USCT-Abbildungssystems.

Der Ansatz der vorliegenden Arbeit unter Nichteinbeziehung der Bildgebung und Signalverarbeitung und durch optimistische Annahmen bei der Aperturmodellierung stellt eine tendenzielle *Überschätzung der maximalen Abbildungsgüte* der USCT-Abbildungssysteme dar.

Es wurden vier Modellierungen und Resultate aus der Schwarzenberg'schen Analyse verwendet:

**S-1** eine idealisierte USCT3Dv1 Modellierung für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen über die SAFT Bildgebung mit Signalverarbeitung[29].

**S-2** eine realistische USCT3Dv1 Modellierung für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen, wie S-1 mit zusätzlicher Modellierung der Öffnungswinkelcharakteristiken, dem geometrischen Ausbreitungsverlust und einer Gewebedämpfung in der spezifizierten ROI [30].

**S-3** eine realistische USCT3Dv1 Modellierung für alle Empfänger-

Senderkombinationen ohne Motorpositionen, wie S-2 mit zusätzlicher Modellierung eines realistischen Punkt-Streuermodells („Rayleigh-Streuer“) [31]. )

**S-4** eine realistische USCT3Dv2 Modellierung für alle Empfänger-Senderkombinationen ohne Motorpositionen, wie S-2 mit zusätzlicher Modellierung eines realistischen Punkt-Streuermodells („Rayleigh-Streuer“) [32].

Als Fokuspunkt für alle späteren Analysen wurde der Simulationspunkt aus der ROI:  $x = 0$  m,  $y = 0$  m,  $z = 0,04$  m verwendet.

### 5.2.1 k-Space Support für die Ebene-Wellen Modellierung

Für die k-Space Support Untersuchung wurde die Ortsauflösung durch die maximale auftretende Ortsfrequenz begrenzt, hier wurde  $f_{max}$  mit 4 MHz angenommen. Die mittlere Schallgeschwindigkeit in Wasser bei Raumtemperatur wird als  $v_{H_2O} = 1480$  m/s angenommen. Damit ergibt sich:

$$voxelSize = \frac{1}{maxFreq} \cdot v_{H_2O} \quad (5.1)$$

und eine konkretes  $voxelSize = 3,7 \cdot 10^{-4}$  m. Die diskrete Ausdehnung des Bildes über alle drei Raumdimensionen ergab sich mit der gegebenen ROI-Ausdehnung von  $ROI = 0,1$  m als  $nVoxelZ = nVoxelX = nVoxelY = \text{ceil}(\frac{ROI}{voxelSize})$ , hier also  $nVoxelX = 271$ . Die Binarisierung der Filter wurde über den empirisch gewählten Grenzwert  $t = 0,25$  realisiert, alle Beiträge kleiner  $t$  wurden auf 0 gesetzt, die übrigen auf 1.

#### USCT3Dv1

Die unter Abb. 7.1 bis Abb. 7.5 gezeigten Ergebnisse gelten für die eingeführte USCT3Dv1 Geometrie, mit 1536 Empfängern und 384 Sendern. Effektiv wurden 589.824 unterschiedliche Messkombinationen für die Simulation berücksichtigt. Auf eine Erweiterung durch zusätzliche Daten durch Translationen/Rotation wurde aus Gründen der Rechenzeit und Vergleichbarkeit zwischen USCT3Dv1

und v2 verzichtet. Mit der gewählten Konfiguration besitzen beide Architekturen mehrere hunderttausend Messpositionen, die Sonographie fällt mit unter 100.000 Positionen dagegen etwas ab.

### **USCT3Dv2**

Die unter Abb. 7.6 bis Abb. 7.10 präsentierten Simulationen gelten für die oben eingeführte USCT3Dv2 Geometrie, mit 1413 Empfängern und 628 Sendern. Effektiv ergeben sich 887.364 unterschiedliche Messkombinationen die berücksichtigt wurden.

### **Sonographie**

Die unter Abb. 7.11 bis 7.15 präsentierten Simulationen gelten für die oben eingeführte Sonographie Geometrie, mit 256 Empfängern und 256 Sendern. Effektiv ergeben sich 65.536 unterschiedliche Messkombinationen die berücksichtigt wurden. Die Bildausdehnung und Bildauflösung wurde wie für USCT3Dv1 gewählt.

### **5.2.2 k-Space Support der Ebene-Wellen Simulation**

In Tab. 5.1 wird der k-Space Support für die drei untersuchten Apertur-Geometrien gezeigt. Die k-Space Parameter Auflösung und Ausdehnung ergeben sich durch die ROI von  $x = 0,1$  m  $y = 0,1$  m und  $z = 0,1$  m, und die verwendete Ortsvoxelgröße  $3,7 \cdot 10^{-4}$  m, siehe Abschnitt 3.1.4.

Der 2D-USCT3Dv1-Support ist über die XY-Ebene größer ist als über die XZ-Ebene, dies scheint zuerst überraschend. Gründe hierfür sind das der Schnitt über die XZ-Ebene fast den optimalen Fall wiedergibt und das die Auflösung dieser Apertur über die XY-Ebene stark von zusätzlichen Rotationspositionen abhängt, die hier fehlen. Dies korrigiert sich wenn der 3D-Support der XY-Ebene betrachtet wird, die XZ-Ebene gewinnt kaum noch, es zeigt sich das erwartete Verhalten, der XY-Support ist deutlich besser als der XZ-Support.

Die USCT3Dv2 Apertur zeigt in der Support Analyse das erwartete Verhalten sowohl in der 2D- als auch 3D-Variante, ein näherungsweise homogener Support

k-Space Support	<i>EW-1N</i>	<i>EW-2N</i>	<i>EW-3N</i>
<i>XY-Ebene 2D</i>	11,22%	32,88%	10,62%
<i>XZ-Ebene 2D</i>	26,48%	34,17%	0,15%
<i>XY-Ebene 3D</i>	42,88%	51,45%	3,91%
<i>XZ-Ebene 3D</i>	29,46%	37,10%	0,14%

Tabelle 5.1: *k-Space Support für die drei untersuchten Aperturen, gegeben jeweils für die drei Raumachsen und die 2D- und 3D-k-Space Untersuchungen*

über die beiden Ebenen. Grund hierfür ist das geänderte Grunddesign im Gegensatz zu USCT3Dv1, weg von einer XY-Schichten Verteilung hin zu einer fast halbkugelförmigen homogenen Verteilung mit über Z variierenden Abstrahlnormalen. Daraus ergibt sich das die Informationsbeiträge sich nicht mehr in einzelnen Bereichen drängen sondern den k-Space homogener füllen. Ein anderer Effekt ist, dass zusätzliche Messpositionen durch Rotation gewonnen, nicht nur Beiträge zu XY liefern würden sondern auch zum XZ-Support.

Für die Sonographie ergibt sich ebenfalls das erwartete Bild, nur für den entworfenen 2D XY-Support Fall ergeben sich signifikante Beiträge. Der Beitrag über XZ ist praktisch nichtexistent. Interessant ist der Abfall beim XY-Support für den 3D-Fall. Dies ergibt sich dadurch, dass keine zusätzlichen Beiträge einfließen, also der 2D-Beitrag nur mit vielen Null-Beiträgen heruntergemittelt wird, auch sichtbar in der Abb. 7.14 rechts.

### 5.2.3 FWHM als Auflösungsmetrik aus dem k-Space Support

In Tab. 5.2 ist die Auflösung als FWHM für die drei untersuchten Apertur-Geometrien gezeigt. Die k-Space Parameter Auflösung und Ausdehnung ergeben sich durch die ROI von  $x = 0,1 \text{ m}$ ,  $y = 0,1 \text{ m}$  und  $z = 0,1 \text{ m}$ , und die verwendete Ortsvoxelgröße  $3,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ , siehe Abschnitt 3.1.4. Die FWHM wurde, wie eingeführt, als Halbwertsabfall und für jede Raumdimension bestimmt.

Die für die USCT3Dv1 Apertur gewonnenen Auflösungsmaße spiegeln die Erwartungen wider, Auflösungen im Untermillimeter Bereich mit einer deutlich schlechteren Auflösung über Z als X und Y. Die Verwendung der 3D-Informationen führt zu

FWHM [m]	<i>EW-1</i>	<i>EW-2</i>	<i>EW-3</i>
<i>X 2D</i>	$13,04 \cdot 10^{-4}$	$6,23 \cdot 10^{-4}$	$4,83 \cdot 10^{-4}$
<i>Y 2D</i>	$13,04 \cdot 10^{-4}$	$6,23 \cdot 10^{-4}$	$27,89 \cdot 10^{-4}$
<i>Z 2D</i>	$21,38 \cdot 10^{-4}$	$20,43 \cdot 10^{-4}$	$\infty$
<i>X 3D</i>	$5,39 \cdot 10^{-4}$	$5,55 \cdot 10^{-4}$	$4,83 \cdot 10^{-4}$
<i>Y 3D</i>	$5,39 \cdot 10^{-4}$	$5,55 \cdot 10^{-4}$	$27,89 \cdot 10^{-4}$
<i>Z 3D</i>	$10,16 \cdot 10^{-4}$	$9,02 \cdot 10^{-4}$	$\infty$

Tabelle 5.2: *Die FWHM als Auflösungsmetrik für die drei untersuchten Aperturen, gegeben jeweils für die drei Raumachsen und die 2D- und 3D-k-Space Untersuchungen*

einer deutlichen Steigerung über alle Dimensionen.

Die USCT3Dv2 Apertur zeigt die erwartete deutliche Verbesserung der Auflösung über die X und Y Dimension gegenüber der USCT3Dv1 Apertur. Die USCT3Dv2 Auflösung über Z ist jedoch nur marginal gegenüber USCT3Dv1 besser geworden. Ein Grund hierfür ist die Wahl der XZ-Ebene welche für USCT3Dv1 über Z die Auflösung etwas zu optimistisch überschätzt. Dies sollte noch weitergehend untersucht werden.

Die Sonographie Apertur zeigt erwartungsgemäß über X die beste Auflösung aller Aperturen und über Y eine um eine Größenordnung geringere Auflösung. Über Z ist keine effektive Auflösung zu vorhanden. Da die FWHM ein relatives Maß ist, ist hier im Gegensatz zur Support-Metrik, siehe Tab. 5.1, keine Degradierung von 2D auf 3D festzustellen.

#### 5.2.4 Vergleich von Abbildungssystemen als 2D- und 3D-Systeme

Die beiden USCT Aperturen sind im Raum verteilt und haben auch Winkelcharakteristiken die eine Aufnahme eines signifikanten 3D-Bereichs erlaubt. Die Aufnahme von 2D-Schichtbilder ist ebenfalls möglich, diese ergeben sich ebenfalls aus Informationen aus allen Ebenen. Dies steht im Gegensatz zur ebenfalls

Schichtbilder generierenden Sonographie Apertur die jedoch nur über 2D-Daten aufnimmt. Eine der Fragen die das USCT-Projekt interessiert, ist die Größe dieses Beitrages gegenüber einer direkten Verwendung als 2D-Bildgebungssystem.

Dies wurde untersucht, indem aus gewonnenen 3D-k-Space Support-Räumen 2D-Schnitte genommen, und diese als Abbildungsfunktionen verwendet wurden. Im Abbildungsanhang und in der Auswertung sind diese Versionen bezeichnet als  $2D$  mit den jeweiligen Ebenen  $XY$ ,  $YZ$  und  $XZ$ .  $3D$  wurde gewonnen indem zuerst der vollständige 3D-k-Space Support Raum als Abbildungsfunktion verwendet und dann im Ergebnisbild ein 2D-Schnitt durchgeführt und in den k-Space zurücktransformiert wurde. Dies bezeichnen wir als den 3D-Support für einer 2D-Schicht eines 3D-Abbildungssystems und machen damit 2D- und 3D-Systeme vergleichbar.

$$\Delta FWHM_{3D2D} = 1 - \frac{FWHM_{3D}}{FWHM_{2D}} \quad (5.2)$$

Die Ergebnisse diese Vorgehens, die 3D- und 2D-Fähigkeiten einer Apertur zu untersuchen, sind in den Tab. 5.3 zu sehen. Die untersuchten Aperturen zeigen das qualitativ erwartete Verhalten, die USCT3Dv2 Apertur besitzt eine bessere Z-Auflösung als die USCT3Dv1 Apertur. Der Sonographie Apertur wird eine nicht existente Z-Auflösung bescheinigt. Ein interessanter Effekt ist, dass eine 3D-Verwendung der Sonographie Aperture die Bildqualität im Gegensatz zur 2D-Schichtverwendung, reduziert siehe Abb. 7.14. Hintergrund hier ist der „mittelnde Effekt“ der Integration über die Z-Lamellenhöhe der Apertur. In der in Tab. 5.3 gezeigten FWHM Analyse ist dieser Effekt nicht zu sehen da die verwendeten Punktobjekte nicht durch eine Z Integration degradiert werden. Dies zeigt auch die Begrenztheit der relativen Metrik FWHM.

### 5.2.5 Vergleich mit den Schwarzenberg'schen Simulationen

Die Schwarzenberg'schen Simulationen im Vergleich mit den Ewaldsphären basierenden Simulationen für die USCT3Dv1 Apertur der FWHM Metrik sind unter Tab. 5.4 zu sehen. Das gleiche für die USCT3Dv2 Apertur ist unter Tab. 5.5 präsentiert.

$\Delta FWHM_{3D2D}$ [%]	<i>EW-1</i>	<i>EW-2</i>	<i>EW-3</i>
<i>X-Dimension</i>	-58,67%	-10,91%	0%
<i>Y-Dimension</i>	-58,67%	-10,91%	0%
<i>Z-Dimension</i>	-52,48%	-55,85%	0%

Tabelle 5.3: *Prozentuale Änderung der FWHM Abbildungsmetrik von 2D auf 3D für verschiedene Simulationen und die drei untersuchten Aperturen, gegeben jeweils für die drei Raumachsen, konsequenterweise ergibt sich keine Änderung für die Sonographie Apertur*

FWHM USCT3Dv1 [m]	<i>S-1</i>	<i>S-2</i>	<i>S-3</i>	<i>EW-1</i>
<i>X 3D</i>	$27 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-4}$	$25 \cdot 10^{-4}$	$5,39 \cdot 10^{-4}$
<i>Y 3D</i>	$27 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-4}$	$25 \cdot 10^{-4}$	$5,39 \cdot 10^{-4}$
<i>Z 3D</i>	$36 \cdot 10^{-4}$	$37 \cdot 10^{-4}$	$66 \cdot 10^{-4}$	$10,16 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 5.4: *FWHM für die USCT3Dv1 Apertur, gegeben jeweils für die drei Raumachsen für die drei Schwarzenberg'schen Simulationen (*S-1*, *S-2* und *S-3*) und die Ewaldsphären basierte (*EW-1*)*

FWHM USCT3Dv2 [m]	<i>S-4</i>	<i>EW-2</i>
<i>X 3D</i>	$29 \cdot 10^{-4}$	$5,55 \cdot 10^{-4}$
<i>Y 3D</i>	$29 \cdot 10^{-4}$	$5,55 \cdot 10^{-4}$
<i>Z 3D</i>	$30 \cdot 10^{-4}$	$9,02 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 5.5: *FWHM für die USCT3Dv2 Apertur, gegeben jeweils für die drei Raumachsen für die Schwarzenberg'schen Simulation (*S-4*) und die Ewaldsphären basierte (*EW-2*)*



$\Delta\text{FWHM}$ $\frac{\text{USCT3Dv2}}{\text{USCT3Dv1}}$ [%]	<i>S-1 zu S-4</i>	<i>S-2 zu S-4</i>	<i>S-3 zu S-4</i>	<i>EW-1 zu EW-2</i>
<i>X 3D</i>	+7,41	+107,14	+16,0	+2,97
<i>Y 3D</i>	+7,41	+107,14	+16,0	+2,97
<i>Z 2D</i>	-16,66	-18,92	-54,55	-11,22

Tabelle 5.6: *Prozentuale Änderung der FWHM von USCT3Dv1 zu USCT3Dv2, gegeben jeweils für die drei Raumachsen für die Schwarzenberg'schen Simulationen und die Ewaldsphären basierte Simulation*

Relat. FWHM $\frac{Z}{X}$ USCT3Dv1 [%]	<i>S-1</i>	<i>S-2</i>	<i>S-3</i>	<i>EW-1</i>
<i>Z/X 3D</i>	+33,3	+164,3	+164,0	+83,4

Tabelle 5.7: *Relatives Verhältnis der FWHM Auflösungsmetrik für die X zu Z Dimension bestimmt, für die USCT3Dv1 Apertur*

Da aus der Schwarzenberg'schen Arbeit die USCT3Dv2 Apertur vorhergesagt wurde, die eine Verbesserung in der Auflösung gegenüber der USCT3Dv1 sein soll, wurde dies nachvollzogen. Es wurde über die drei Dimensionen für alle Simulationsansätze für die eine USCT3Dv1 wie USCT3Dv2 Modellierung existiert, die prozentuale Veränderung der FWHM bestimmt. Negative Werte stehen für eine kleinere relative FWHM, also eine bessere Auflösung. Die Ergebnisse sind gelistet unter in Tab. 5.6.

Alle Schwarzenberg'schen Simulationsvarianten sagten eine teilweise deutlich verbesserte Z Auflösung bei leichter Verschlechterung der X und Y Auflösung voraus. Die Ewaldsphärensimulation zeigt dies ebenfalls, wenn auch weniger deutlich.

Desweiteren wurde versucht die Tendenzen, die die verschiedenen Simulationsmethoden über die Dimensionen haben, zu erfassen und vergleichen. Es wurde das relative Verhältnis aus der FWHM über die Z zur X Dimension bestimmt, zu sehen unter Tabelle 5.7 und 5.8.

Bei dem prozentuale Verhältnis X zu Z für die USCT3Dv1 Apertur liegt die Ewald-

Relat. FWHM $\frac{Z}{X}$	USCT3Dv2 [%]	S-4	EW-2
Z/X 3D		+3,05	+62,5

Tabelle 5.8: *Relatives Verhältnis der FWHM Auflösungsmetrik für die X zu Z Dimension bestimmt, für die USCT3Dv2 Apertur*

Evaluation FH Simulation	FH-1	FH-2	FH-1 $f(\alpha)$	FH-2 $f(\alpha)$
Kohärenz	0,9207	0,8908	0,9574	0,9587
MSE	0,0015	0,0025	0,0011	0,0021

Tabelle 5.9: *Evaluation der Fraunhofer basierenden Simulationen der Winkelsensitivität: Evaluation der simulierten Winkelsensitivität (lateral Auflösung) gegen Referenzmesswerte für USCT3Dv1 und USCT3Dv2, als Metriken kamen Kohärenz und MSE zur Verwendung. Die zusätzlich winkelabhängige Modellierung  $f(\alpha)$  führt für beide Aperturen und nach allen Metriken zu einer besseren Übereinstimmung mit der Referenzmessung.*

sphärensimulation in der gleichen Größenordnung und zeigt die gleiche Tendenz. Für die USCT3Dv2 Apertur sagt die Schwarzenberg'sche Simulation S-4 ziemliche Gleichheit voraus, hier weicht die Simulation EW-2 doch deutlich ab, was noch zu untersuchen ist.

### 5.2.6 Evaluation der Fraunhofer basierenden Simulationen der Winkelsensitivität

In Tab. 5.9 ist die Evaluation der Fraunhofer basierenden Simulationen der Winkelsensitivität für die zwei gegen Referenzmessungen evaluierten Apertur-Geometrien gezeigt.

Die gute Übereinstimmung der Fraunhofer Modellierung für beide Aperturen und alle Metriken ist in Abb. 5.2 und Abb. 5.3 jeweils oben, ebenfalls deutlich. Hier wird ein parallel zu Apertur liegender Querschnitt gezeigt. Er wurde über die XY-

## 5.2 Evaluation mit der Schwarzenberg'sche Simulation

Ebene aus dem 3D-Modell und für eine Frequenz genommen. Die zusätzlich winkelabhängige Modellierung  $f(\alpha)$  führt für beide Aperturen und nach allen Metriken zu einer besseren Übereinstimmung mit der Referenzmessung, siehe Tab. 5.9. Die Kohärenz erhöht sich deutlich und der MSE Wert fällt etwas ab durch diese angepasste Modellierung.

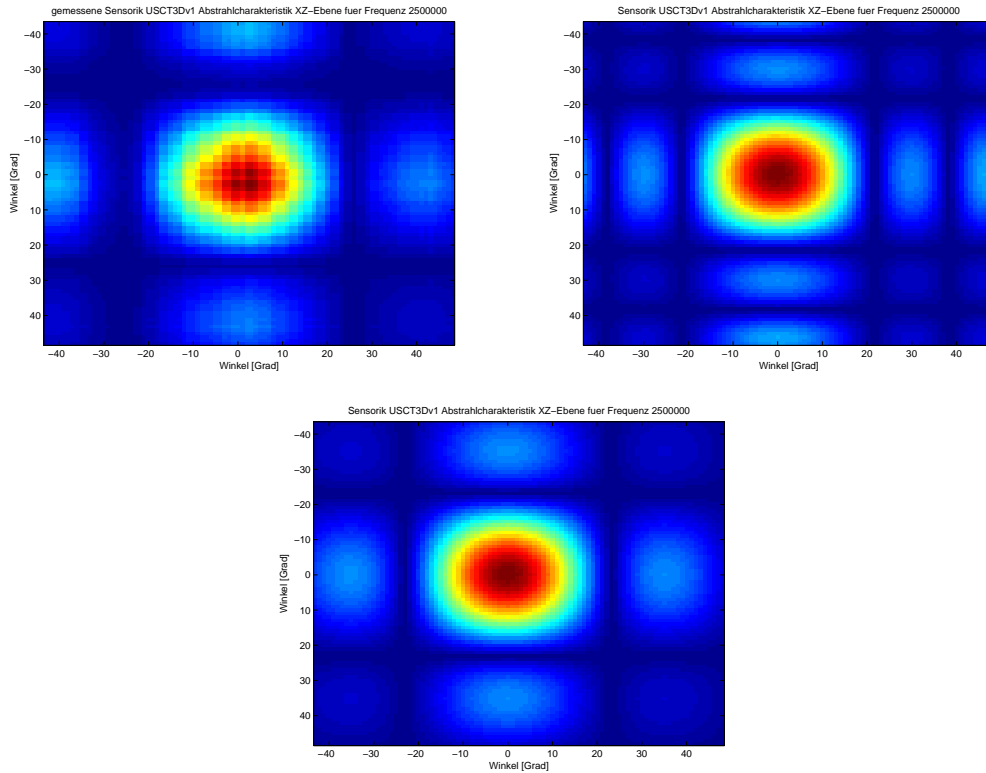


Abbildung 5.2: *USCT3Dv1 Simulationsevaluation: (links) Referenzmessung, (rechts) Fraunhofer Diffraktionsmodellierung, (unten) Fraunhofer Diffraktionsmodellierung mit  $f(\alpha)$*

## 5 Ergebnisse

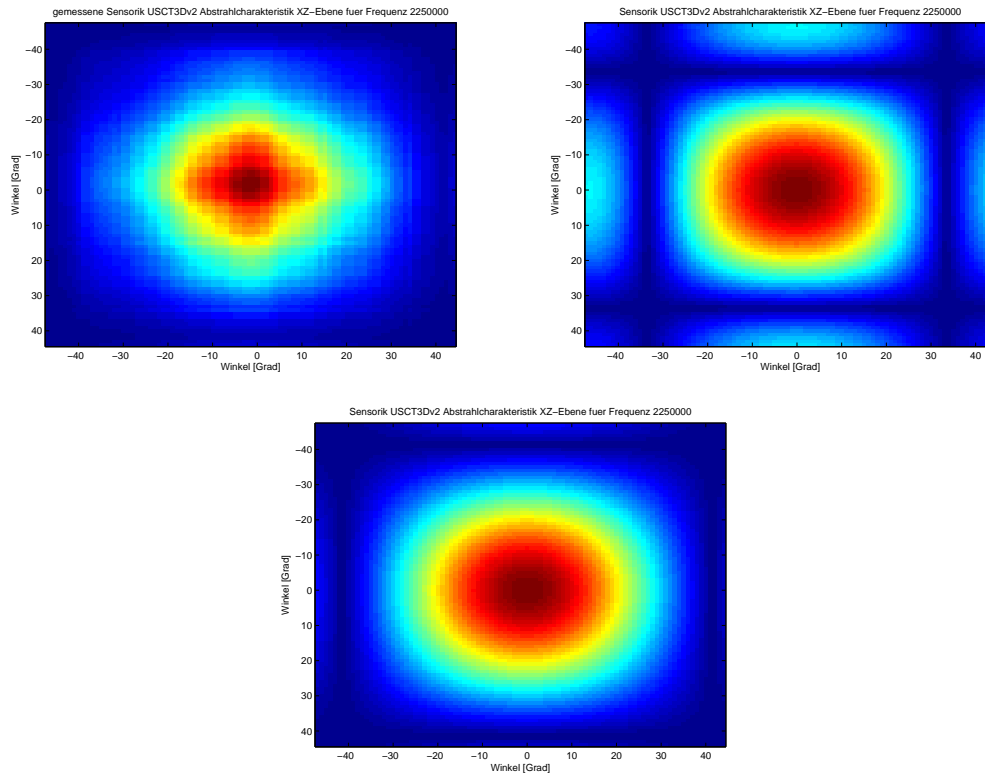


Abbildung 5.3: *USCT3Dv2 Simulationsevaluation: (links) Referenzmessung, (rechts) Fraunhofer Diffraktionsmodellierung, (unten) Fraunhofer Diffraktionsmodellierung mit  $f(\alpha)$*

### 5.3 k-Space Support als Abbildungsfunktion

Der k-Space Support kann direkt zur Simulation der Abbildung eines spezifischen Abbildungssystem dienen. Es wird eine Objektfunktion mit dem Abbildungssystem spezifischen k-Space Support (interpretiert als die ortsunabhängige Punktspreizfunktion) im Frequenzraum multipliziert. Das Ergebnis kann in den Ortsraum transformiert werden und wird als Abbildung des spezifischen Abbildungssystems betrachtet.

Hier wurde konkret der für die drei Ultraschall-Abbildungssysteme jeweils generierte 3D-k-Space als Abbildungsfunktion mit einem dreidimensionalen Shepp-Logan-Kopf-Phantom verwendet [33].

Ergebnisse von EW-1, EW-2 und EW-3 Simulation in allen Varianten und

Permutationen sind im Abbildungsanhang präsentiert. Die USCT3Dv1 Apertur unter Abb. 7.4 und Abb. 7.5, die USCT3Dv2 Apertur unter Abb. 7.9 und Abb. 7.10 und die Sonographie Apertur unter Abb. 7.14 und Abb. 7.15.

Auffällig sind die großen visuellen Differenzen zwischen den normalisierten und unnormalisierten Simulationsvarianten. Ohne Normalisierung ergeben sich stark in den niedrigen Ortsfrequenzen überbetonte, weichgezeichnete Abbildungen, was die Bedeutung einer komplexen, dies berücksichtigenden Bildgebung für USCT zeigt.

## 5.4 Ableitung von optimalen Aperturen aus dem k-Space mit der inversen Ewaldsphären-Konstruktion

Es wurde eine Geometrie-Konfiguration gesucht, welche einen homogenen, gleich-abgetasteten k-Space mit der Ebenen-Welle Annahme für Aperturen generiert. Die Rahmenbedingungen des Ortsraums sind die Standard USCT3Dv2 ROI von  $x = 0,1\text{ m}$ ,  $y = 0,1\text{ m}$  und  $z = 0,1\text{ m}$  Ausdehnung und einer etwas reduzierten Ortsauflösung von  $5 \cdot 10^{-4}\text{ m}$ , welche jedoch noch die Untermillimeter mindest Auflösungsanforderungen des USCT Projekts erfüllen.

Ausgangspunkt war die minimale Konfiguration um einen 3D-k-Space zu füllen. Dies kann mit zwei als Sender agierende Transducer,  $S1$  und  $S2$ , und beliebig vielen Empfängern erreicht werden [17]. Die Sender wurden mit gespiegelten Abstrahlnormalenvektoren,  $S1_v = [0 \ -1 \ 0]$  und  $S2_v = [0 \ 1 \ 0]$ , gegeneinander gestellt, jeweils den rückseitigen Winkelraum zwischen  $< -90^\circ$  und  $> 90^\circ$  des anderen ausfüllend, sowohl für Ebenen- als auch Höhenwinkel. Es ergeben sich für die freien Parameter, Frequenz der Welle  $f = 1/k$  und Normalen-Vektor der Empfänger  $v_r$ , die in Abb. 5.4 gezeigten Verteilungen.

In Abb. 5.4 zu sehen, ergibt sich eine fast Gleichverteilung für die Höhen- und Ebenenwinkel (links unten) jedoch eine sehr spezifische Zeitfrequenzverteilung

## 5 Ergebnisse

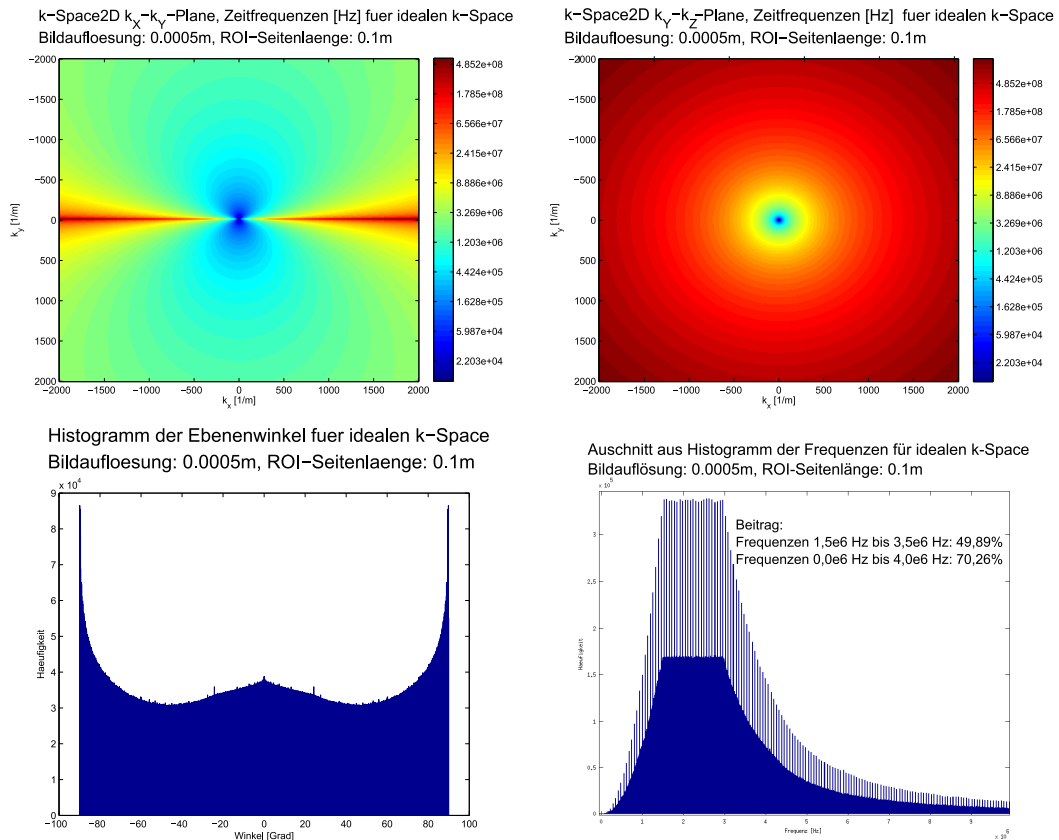


Abbildung 5.4: Ableitung von Sensorik aus optimalem  $k$ -Space: (links-oben) gefüllter  $k$ -Space mit jeweils nötiger Frequenz für die XY-Ebene in logarithmischer Skalierung, (rechts-oben) gefüllter  $k$ -Space mit jeweils nötiger Frequenz für die YZ-Ebene in logarithmischer Skalierung, (links-unten) Verteilung der nötigen Höhenwinkel (und auch Ebenenwinkel, identisch), (rechts-unten) Ausschnitt aus dem Histogramm der benötigten Frequenzen, 49 % aller notwendigen Frequenzen („Bandbreite“) befindet sich zwischen 1,5 MHz und 3,5 MHz

(rechts unten). In einer axialen Bandbreiten Interpretation dieser Zeitfrequenzen für Transducer lässt sich diese mit den existierenden Bandbreiten im Projekt vergleichen, eine Art „Optimalität“.

Aus Sensorik des USCT3Dv2 Projekts, mit einer Bandbreite 1,5 MHz und 3,5 MHz, würden 49,89 % der notwendigen Frequenzen für eine ideale Füllung des oben spezifizierten  $k$ -Spaces abgedeckt. Für theoretische Sensoren mit einer Bandbreite

zwischen 0 MHz und 4 MHz würde sich eine 70,26 % Abdeckung der notwendigen Zeitfrequenzen ergeben.

Eine andere interessante Interpretation ist die gute Übereinstimmung der Mittelfrequenz der Simulation von 2,3 MHz mit der Annahme des USCT Projekts von 2,5 bis 2,8 MHz die über einen völlig anderen Ansatz gewonnen wurden, was als Indiz für die Validität der Simulation und/oder der Berechtigung der Projektannahme interpretiert werden kann.





# 6 Diskussion und Ausblick

## 6.1 Zusammenfassung und Diskussion

Im Rahmen dieser Arbeit wurden k-Space basierende Ansätze für USCT-Abbildungssysteme evaluiert und entwickelt. Außerdem führt diese Arbeit das USCT Projekt auch erstmalig in die Möglichkeiten der k-Space Repräsentation ein.

Die relevanten Rahmenbedingungen für eine Modellierung der gegebenen Aperturen wurden aus dem Projekt extrahiert und sind in die Überlegungen eingeflossen:

- 3D-ROI, Seitenlänge 0,1 m mit räumlicher Auflösung  $< 0,1 \cdot 10^{-3}$  m
- $> 500.000$  unterschiedliche Sender-Empfänger Kombinationen
- räumlich getrenne Sensorik (nicht koplanar), mit endlicher axialer und lateraler Bandbreite

### 6.1.1 Algorithmische Herausforderungen

Um eine gangbare Lösung zu finden, wurde eine Literatur und Stand-der-Wissenschaftsrecherche Referenzwerke der Optik [11], medizinischen Bildgebung [17] und aktueller Veröffentlichungen herangezogen [34].

Hiermit wurde im Theorieteil der Zusammenhang aus physikalischer Diffraktionsbeschreibung von Wellenphänomene und einer linearen Abbildungssystembeschreibung im k-Space mit ihren Einschränkungen aufgezeigt und Möglichkeiten aufgezeigt:

- zeit- und ortsinvariante Modellierung der Diffraktion
- monochromatische Modellierung mit Ebenenwellen
- Ortsunbegrenztheit oder Periodizität

Dies wurde in zwei Simulationsansätze überführt:

Die aus der Röntgen-Kristallographie adaptierte monochromatische Ewaldsphären-Konstruktion (EW-1, EW-2, EW-3) basiert direkt auf den im  $k$ -Space elementaren Ebenen-Wellen. Die Ewaldsphärenentwicklung erlaubt die Modellierung als zeitlich stationäres und räumlich invariantes lineares System. Eine komplexe Modellsynthese aus beliebig räumlich positionierten Sender und Empfänger Kombinationen ist hiermit möglich. Mit dieser Simulation ist es möglich die vollständige, räumliche USCT3Dv2 ROI zu modellieren. Auch die geforderte Untermillimeter Auflösung und die vielen tausend diskreten Sendern und Empfängern sind modellierbar. Die Gewinnung von simulierten Abbildungsfunktionen in endlicher Rechenzeit für existierende und viele mögliche zukünftige USCT System ist nun möglich.

Grenzen dieses Ansatzes sind das nicht-modellieren der geometrische Distanzen, da das Konzept „Abstand“, als Ebene-Wellen modelliert, sich nur als (periodische) Phase repräsentiert. Die im USCT existenten Kugelwellen werden nur, unter der Annahme axialen Bandunbegrenztheit modelliert, aus Ebenen-Wellen synthetisierbar. Die laterale Bandbreite wird in diesem Modell aus unendlichen Ebenen-Wellen nicht erfasst. Diese Einschränkung der Aperturmodellierung als axialer und lateraler Bandunbegrenztheit wurden versucht mit einer weitergehenden Modellierung zu überwinden.

Dass diese Modellierung für das USCT Projekt trotz unrealistischer Annahmen relevant sein kann, zeigt der Vergleich mit den Schwarzenbergschen Modellierungen. Die Ewaldsphärenmodellierung überschätzt die Qualität in allen Metriken zwar deutlich, ist jedoch die relativen Verhältnisse wärend.

Ein zweiter Simulationsansatz wurde aus der Fraunhofer Diffraktionsbeschreibung abgeleitet für Aperturen mit räumlicher Ausdehnung. Im Gegensatz zur Ewaldsphärenmodellierung kann hiermit die laterale Bandbreite von räumlich ausgedehnter Sensorik simuliert werden. Außerdem kann sowohl eine axiale

Bandbreite, als auch geometrische Distanz in die Simulation einfließen. Die Güte dieser laterale Bandbreiten Modellierung für räumlich ausgedehnte Sensorik wurde in einem Vergleich mit Referenzmessungen gezeigt und zeigt eine gute Übereinstimmung.

Eine Weg für eine Integration beider Simulationen, die die Qualitäten beider Ansätze vereint, wurde begonnen und kann für den nicht-koplanaren Fall der USCT-Abbildungssysteme Teil einer weiterführenden Untersuchung sein.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass eine Modellierung der USCT Apertur Geometrien gefunden wurde, welche ihre kritische Anforderung, beliebig im dreidimensionalen Raum verteilt, abdeckt. Außerdem wurde eine weiterer vielversprechender Ansatz verfolgt, der für USCT3Dv1, USCT3Dv2 und die angenommen Sonographie Apertur die axiale und laterale Frequenzabhängigkeiten auch als lineares System modellierbar macht.

### 6.1.2 Herausforderungen bei der Implementierung

Als prinzipielle große Herausforderung stellte sich das Abtasttheorem und seine Implikationen für die Implementierung heraus. Da die USCTv2 eine fast beliebig im raumpositionierte Sensorik besitzt sind die sich ergebenden polychromatischen Beiträge im k-Space weder äquidistant noch gleichverteilt im Raum um die Null-Frequenz verteilt. Effektive polare FFT und IFFT Ansätze sind nicht Teil von Matlab und auch noch aktiver und i.a. ungelöster Forschungsgegenstand [4] [18]. Deshalb wurde mit verschiedenen Interpolationsmethoden (Nächster-Nachbar-, Lineare-, Spline-, Polynom-, 3D-meshing-Interpolation) und auch nicht äquidistanten Fourieransätzen („nonuniform FFT“) experimentiert. Die Nächster-Nachbar-Interpolations stellt sich als einzigst sinnvoll gangbarer Weg heraus, da die hocgradige nicht-äquidistante Verteilung der Daten sich Standardansätzen widersetzte.

Bei der Fraunhofer Diffraktion stellte sich die Frage der Abtastung erneut. Eine nicht-äquidistante Beschreibung der Ortspunkte würde die Simulation beliebiger geometrischer Sensorik Strukturen ermöglichen. Die nicht-äquidistanten

Fouriertransformation ist jedoch, im Gegensatz zur der üblichen und in Matlab gut integrierten äquidistanten Fast-Fourier-Transformation (FFT), algorithmisch besonders für hochdimensionale Problem zu aufwendig. Es wurde sich auf eine über die beiden Dimensionen separable und äquidistante Aperturbeschreibungen beschränkt. Dies ermöglicht die Verwendung der schnellen beliebig dimensional *FFTh* Funktion von Matlab. Da die hoch aufgelösten und breitbandigen k-Space Simulationen weiterhin die Rechnerkapazitäten sprengten, wurde auf den für die angenommenen Testaperturen ausreichende Modellierung zurückgegangen. Diese beschreibt die Sensorik als nicht nur separabel, sondern völlig unabhängig. Effektiv bedeutet dies, dass die 2D-Sensorikapertur durch zwei 1D-Definitionen beschrieben, und später Multiplikativ überlagert wurde.

Insgesamt war an vielen Stellen der Implementierung, eine Balance zwischen der in Matlab propagierten Vektorisierung (mit zusätzlichen Arbeitspeicherbedarf) und einer sequentiellen Codeformulierung nötig. Häufig führte eine reine Version der beiden Varianten zur Überschreitung des verfügbaren Speicherrahmens oder einer vertretbaren Rechenzeit. Die Versuche einer speichersparende Wahl eines Datentyps mit ausreichender Dynamik und Präzision stellte sich ebenso als knifflig heraus. Eine Erfahrungswert war, dass schon eine ungünstig, als zwei sukzessive Divisionen formulierte Gleichung als Gleitkommazahl einfacher Präzision („float“), in einem Zwischenschritt bereits den Dynamikbereich überschritt und zu überraschend nichtlinearen Ergebnissen führte. Dies geschah trotz vorheriger Abschätzung des Datentyps als ausreichend für den Ergebnisraum.

Eine andere, positive Erkenntnis war die Verwendung der Rekursion als Methode, um mit Speicherüberläufen bei der Vektorisierung umzugehen. Matlab besitzt keine zuverlässige und vom Betriebssystem unabhängige Methode zur Bestimmung des verfügbaren physikalischen und virtuellen Arbeitsspeicher. Daher erfolgt die Bestimmung einer Vektorisierungsblockungsgröße häufig typischerweise empirisch, dies ist jedoch unzuverlässig und nicht meistens nicht optimal. Der nun verwendete Ansatz war die Bestimmung einer zu als gut zu erwartenden Blockgröße und für den Fehlerfall eine rekursive Zerlegung, was sich als akzeptable und effektive adaptive Methode erwies.

Trotz dieser Überlegungen und Optimierungen blieben der Simulationsaufwand in 3D mit Auflösungen im Untermillimeter Bereich, in Rechenzeit und vor allem Speicherbedarf gewaltig. Es konnte jedoch auf einen Rechnerserver zugegriffen werden, welcher gerade im Aufbau für eine Großexperiment ist. Hierdurch wurde ein Quad-Xeon Server mit 96 GByte RAM und 64 Bit Suse Linux verfügbar, auf welchem Matlab 2009b (64 Bit Release) installiert wurde. Der für USCT geforderte 3D-k-Space mit der Untermillimeter Auflösung resultierte in Datenmengen, die am Stück im Speicher gehalten wurden, von mehreren dutzende GByte und dies typischerweise mindestens zweimal für k-Space Repräsentation und Ortsraumrepräsentation.

## 6.2 Ausblick

### Integration in bestehende Projektanalysesoftware

Es bietet sich an, die entwickelten k-Space basierende Methoden zur Vorhersage von Abbildungseigenschaften direkt in eine vorhandenen USCT-Analyse-Werkzeuge zu integrieren. Im Moment wird diese Analysesoftware, genannt *Diagtool*, für die neue USCT3Dv2 Hardware adaptiert, in diesem Kontext wurden auch mögliche Integrationsschnittstellen für k-Space Simulationen vorgesehen [12].

### Weitergehende Evaluation der Fraunhofer Diffraktionsmodellierung ( $FH - 1(\alpha)$ und $FH - 2(\alpha)$ )

Der physikalische Hintergrund der angenommenen zusätzlichen Frequenzabhängigkeit, modelliert als  $FH - 1(\alpha)$  und  $FH - 2(\alpha)$ , ist noch nicht vollständig verstanden. Eine breitere Datenbasis könnte hilfreich sein den Effekt genauer zu beschreiben um ihn einer physikalischen Ursache zuordnen zu können. Hierzu wäre es hilfreich die Referenzmessungen höher aufgelöst, sowohl Winkel- als auch Frequenzdimensional, zu wiederholen. Die Modellierung der axialen Bandbreite, der Abstrahlcharakteristik und eventueller winkelabhängiger Frequenzverschiebungen ist im USCT Projekt im Moment Thema einer weiteren Masterarbeit.

Die Methoden und Ergebnisse dieser FEM basierenden Arbeit könnten in die Untersuchung einfließen oder als Basis dienen [19].

### **Verhältnis von axialer und ateraler Bandbreite**

Weitere Informationsextraktion aus den existierenden Modellierungen wäre z.B. die Bestimmung des Verhältnis der Abbildungsbeiträge unterschieden als lateralen und axialen Bandbreitenbeiträge.

Solch ein Maß wäre für das Sensorik- und Gesamtaperturdesign von großem Interesse. Einerseits ist der Aufwand zur baulichen Optimierung der jeweiligen Bandbreite Werte unterschiedlich, andererseits ist durch den SAFT Ansatz größere bauliche Flexibilität möglich. Es kann genutzt werden das bei einer das Objekt umschließenden Apertur, laterale und axiale Dimension nicht mehr orthogonal zueinander sind, also ineinander überführbar sind. Dies könnte für eine konsequentere Optimierung der Sensorik auf eine der beiden Bandbreiten genutzt werden. Die im k-Space fehlenden orthogonalen Beiträge werden dann durch räumlich rotiert positionierte Sensoren geliefert, siehe Abschnitt 4.8.

### **Erweiterung der Modellierung von optimalen Aperturen**

Die schon mit den einfachen Modellierungsansätze erzielten Ergebnisse waren vielversprechend und gaben dem USCT Projekt eine positive Rückmeldung über einige der nun unabänderlichen Designentscheidungen, wie Wahl der verwendeten Frequenzbereiche oder die Sensorikverteilung.

Mit der Integration weiterer zusätzlicher Metriken kann aus den nun initial vorhandenen Ansätzen ein Werkzeug zur Definierung neuer optimaler Ultraschallabbildungssysteme entstehen. Möglichkeiten wäre bei der inversen Ewaldsphären-Konstruktion zu Bestimmungen von Aperturen, weiter Kriterien einfließen zu lassen. Dies ermöglicht aus der nicht eindeutigen Abbildung eines k-Space Beitrages auf Sender- und Empfänger-Apertur und jeweilige Zeitfrequenzen, die nach dieser Metrik optimale Kombination zu finden, siehe Abschnitt 4.8. Eine mögliche Metrik für USCT wäre die "Messzeit,,. k-Space-Beiträge denen zur Gewinnung ein lang-

wieriges Motordrehen vorausgeht, werden durch andere Sensoren ersetzt die dafür breitbandiger verwendet werden. Für eine Optimierung nach der Metrik „Auflösung“ würden sich das Gegenteil ergeben, die Sensoren würden schmalbandig in ihrer optimalen Bandbreite mit bestmöglichem SNR verwendet. Die fehlenden Beiträge würden durch das exzessive verwenden von vielen räumliche Positionen gewonnen, was zeitaufwändig wäre.

### 6.2.1 Ausblick: Simulation von beliebigen, bandbegrenzten Aperturen im k-Space

Die Ewaldsphären basierte Simulation beinhaltet Annahmen, welche für das USCT zwar akzeptabel jedoch nicht optimal sind. Optimal wäre eine Simulation die ein lineares System modelliert, jedoch die Eigenschaften der Fraunhofer Diffraktionsbeschreibung mit der der Ewaldsphären-Konstruktion verbindet.

Eine Eigenschaftskombination mit dies erfüllt wird im Anderson „k-Space tutorial“ angedeutet (ohne jedoch nicht detailliert eingeführt zu werden), ebenso gibt es Verbindungen zu den Ausführung über das Winkelspektrum in Goodmans *Fourier Optics*.

Es gilt, die koplanare, winkelabhängige Formulierung der Fraunhoferdiffraktion mit der für den Raum als frequenzabhängigen Phasenverschiebung, Ewaldsphären-Konstruktion zu kombinieren.

Zwischenschritt auf dem Weg zu einer Modellierung, ist die Winkelspektrums Beschreibung einer eindeutig als Sender oder Empfänger agierenden Apertur. Es gilt wieder die Annahme der örtlichen Invarianz durch Festlegung eines Fokuspunkts in der ROI mittig.

Die Phase  $P$  (in radian) für den (virtuellen) Fokuspunkt ergibt sich als:

$$P(s, f) = 2\pi \cdot \text{mod}(s, \lambda(f)) \quad (6.1)$$

mit  $f$  der Mittelfrequenz,  $\lambda = v_{H_2O}/f$  und der Distanz  $s$ .

Mit der bekannten gewünschten Magnitude,  $(f_A(f_x, f_y, f_z))$  ergibt sich:

$$k(f_x, f_y, f_z) = \cos(P(s, f)) \cdot f_A(f_x, f_y, f_z) + \sin(P(s, f)) \cdot f_A(f_x, f_y, f_z) \cdot j \quad (6.2)$$

als komplexwertiger k-Space  $k(f_x, f_y, f_z)$ .

Durch Transformation dieses kartesischen Raums in einen Winkelraum lässt sich das entstehende Winkelspektrum direkt als optimale Abstrahlcharakteristik eines Sensors interpretieren. Für eine Bildgebungsinterpretation ist dies für Sender und Empfänger aufzubauen und mit einer noch zu findenden Diffraktionsfunktion diffraktiv interagieren zu lassen, ein Zwischenschritt dorthin ist in Abb. 6.1 zu sehen, mit Generierung einer gewünschten Sensorik mit axialer und lateraler Bandbreite und der korrekten Repräsentation im Ortsraum als Kugelwelle fokussiert an einem Ort. Dass die äußeren Ausläufer der Kugelwelle an beiden Seiten des Bildes austreten und auf der anderen Seite wieder herein „aliasen“ ist eine Eigenschaft und zu erwartende Folge einer etwas zu knapp bemessenen k-Space Auflösung.

Für den koplanaren Fall, dass der Sender auch Empfänger agiert, ergibt sich der Support k-Space direkt als Konvolution über die laterale Dimension eines Sender- und eines Empfänger Winkelspektrums. Die Mehrzahl der Sender-Empfänger-Kombinationen im USCT Kontext sind nicht koplanar weswegen dies eine noch zu lösende Herausforderung ist. Möglicherweise ist die Emulation über „virtuelle“ koplanare Sensorik möglich, über die inverse Fraunhofer aus rotierten existierten Charakteristiken.

### 6.2.2 Ausblick: k-Space und Bildgebung

#### Intensitäts- oder Amplitudenmodellierung

Weitere Anwendungen der k-Space Apertur Modellierung ergeben sich durch die Verwendung als Simulationswerkzeug zum Vergleich kohärenter oder inkohärenter Abbildungsmethoden. Dies kann durch eine Intensitäts- statt einer Amplitudenmodellierung erreicht werden [11]. Beide Modellierungen können für Vergleichszwecke als Varianten der beschriebenen Methoden erstellt werden.

Ein Anwendung solcher kohärenten Simulationen sind Specklemuster (oder Lichtgranulation) Vorhersagen. Dies ist ein Bildrauschen welches die Güte von kohärenten Abbildungssystemen, wie auch bei der USCT, deutlich reduzieren kann [45].



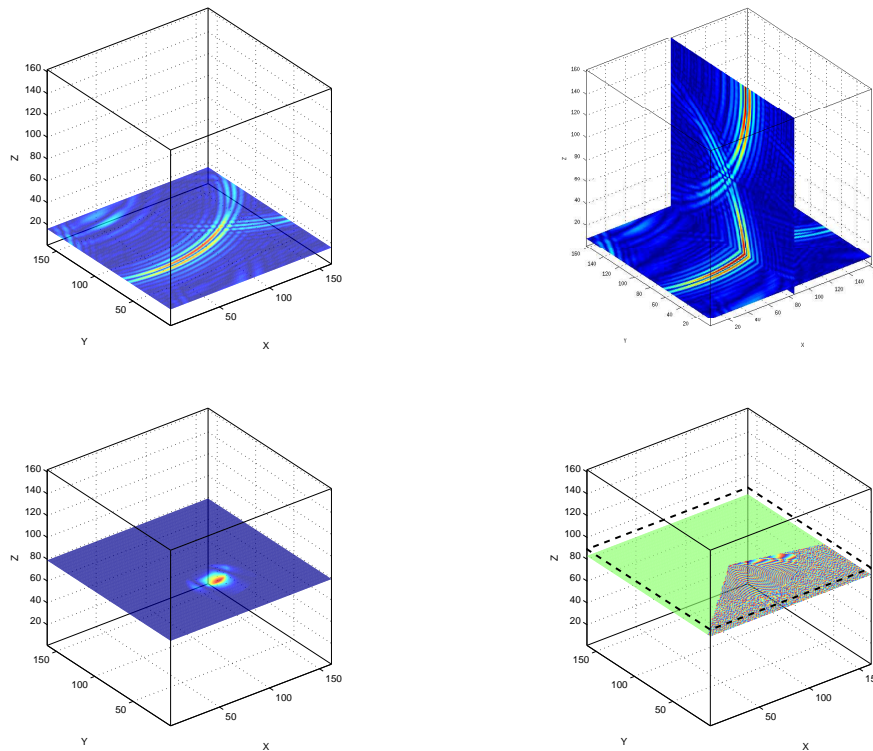


Abbildung 6.1: Gesamtmodellierung einer Apertur im  $k$ -Space: (oben-links, oben-rechts) Welle im Ortsraum nach inverser Fouriertransformation des  $k$ -Space, (links-unten) Fraunhofer Simulation basierende Intensität der Apertur, verwendet als Absolutum des  $k$ -Space, (rechts-unten) Generierung der  $k$ -Space Phase aus Ortstranslation und Wellenausbreitung

Weitere Anwendungsfelder von  $k$ -Space Simulationen sind für Bildgebungsmethoden findbar. Wie im Ergebniskapitel 5 gezeigt wurde, ist eine Normalisierung der Beiträge pro Frequenz für Abbildungen großer Güte essentiell. Alternativ zu den bestehenden Ansätzen könnte eine  $k$ -Space Support Simulation als Normalisierung für ein rekonstruiertes Bild dienen.

Ein noch konsequenterer Ansatz wäre in Analogie zum MRT [35] die direkte Synthetisierung einer Abbildung im  $k$ -Space. Hierzu könnte mit einer  $k$ -Space Simulation die besten  $k$ -Space Beiträge aus verfügbaren Sender-

Empfängerkombinationen und ihren polychromatischen Beiträgen selektiert werden. Dies könnte mit schon existierenden Daten geschehen, oder als Messliste für eine neu durchzuführende Messung. Positive Effekte wären möglicherweise deutlich verringerte Datenmenge und Messzeit bei gleicher Qualität.

# Literaturverzeichnis

- [1] F. Anderson and F. Morgan. Active Imaging Analysis via Ellipsoidal Projections. In *Acoustical Imaging*, volume 21, pages 171–181, 1995.
- [2] M. E. Anderson and G. E. Trahey. A seminar on k-space applied to medical ultrasound. Web publikation, Department of Biomedical Engineering, Duke University, 2000.
- [3] ANSYS Inc. ANalysis SYStem Version 12.1. <http://www.ansys.com/>.
- [4] A. Averbuch, R. R. Coifman, D. L. Donoho, M. Elad, and M. Israeli. Fast and accurate polar fourier transform. 2006.
- [5] Inc. CIRS. Triple Modality Biopsy Training Phantom; Model 051. [http://www.cirsinc.com/051\\_mri.html](http://www.cirsinc.com/051_mri.html), 2010.
- [6] Cyberlogic Inc. Wave3000 – Software for 3D Ultrasound Simulation. <http://www.cyberlogic.org/wave3000.html>.
- [7] T. Deck, T.O. Müller, and R. Stotzka. Rekonstruktion von Geschwindigkeits- und Absorptionsbildern eines Ultraschall-Computertomographen. In *Bildverarbeitung für die Medizin 2003*, Informatik Aktuell, pages 136 – 140, 2003.
- [8] P. P. Ewald. Introduction to the dynamical theory of X-ray diffraction. *Acta Crystallographica Section A*, 25(1):103–108, Jan 1969.
- [9] H. Gemmeke and N.V. Ruiter. 3D Ultrasound Computer Tomography for Medical Imaging. *Nucl. Instr. Meth.*, 2:1057 – 1065, 2007.
- [10] G. Göbel. Entwicklung eines Ultraschallsensorarrays mit miniaturisierten Komponenten. Master’s thesis, Fachhochschule Karlsruhe, 2002.
- [11] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, New York,

- 2nd edition, 1968.
- [12] T. Hopp, G.F. Schwarzenberg, M. Zapf, and N.V. Rüter. A Matlab GUI for the Analysis and Reconstruction of Signal and Image Data of a SAFT-based 3D USCT. *Intern. Journal On Advances in Software*, 2:11–21, 2009.
  - [13] J. Huijssen. *Modeling of nonlinear medical diagnostic ultrasound*. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology, 2008.
  - [14] Michael F. Insana and David G. Brown. *Acoustic scattering theory applied to soft biological tissues.*, pages 76–124. CRC Press, Boca Raton, 1993.
  - [15] Dwight L. Jaggard. Introduction to ee 511: Introduction to fourier optics and fourier optics and image understanding. Web publikation, School of Engineering and Applied Science, University of Pennsylvania, 2000.
  - [16] J.A. Jensen. Field: A Program for Simulating Ultrasound Systems. In *Paper presented at the 10th Nordic-Baltic Conference on Biomedical Imaging Published in Medical and biological Engineering and Computing, Volume 34, Supplement 1, Part 1*, pages pp. 351–353, 1996.
  - [17] A.C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized tomographic Imaging*. Society of Industrial and Applied Mathematics, New York, classics edition siam edition, 2001.
  - [18] Jens Keiner, Stefan Kunis, and Daniel Potts. Using nfft 3—a software library for various nonequispaced fast fourier transforms. *ACM Trans. Math. Softw.*, 36(4):1–30, 2009.
  - [19] B. Kohout. Finite Elemente Simulation von Ultraschallwandlersystemen für die Ultraschall-Computertomographie. Master’s thesis, KIT, 2010.
  - [20] J. Krautkrämer and H. Krautkrämer. *Ultrasonic Testing of Materials*. Springer-Verlag, 1990.
  - [21] M. Kleifges und die Auger-Kollaboration. Status of the southern pierre auger observatory. In *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, volume 150, pages 181–185, Januar 2006.
  - [22] W. Marczak. Water as a Standard in the Measurements of Speed of Sound in

- Liquids. *Acoustical Society of America Journal*, 102(5):2776–2779, November 1997.
- [23] National Instruments Corporation. LabWindows/CVI Full Development System 6.0 - Windows 2000/95/98/ME/NT. <http://www.ni.com/lwcvl/>, 2010.
- [24] S. J. Norton and M. Linzer. Ultrasonic Reflectivity Imaging in Three Dimensions: Exact Inverse Scattering Solutions for Plane, Cylindrical and Spherical Apertures. In *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, volume 28, pages 202–220, 1981.
- [25] Onda Corporation. Onda Needle Hydrophone HNC-400. [http://www.ondacorp.com/images/brochures/Onda\\_HNC\\_DataSheet.pdf](http://www.ondacorp.com/images/brochures/Onda_HNC_DataSheet.pdf).
- [26] L. Petzold. Aufbau eines Messplatzes zur Ermittlung der Schallfeldcharakteristik eines Ultraschallwandlers. Master's thesis, Westsächsische Fachhochschule Zwickau, 2005.
- [27] M. Schabel. 3D Shepp-Logan phantom. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/9416-3d-shepp-logan-phantom>, 2005.
- [28] G.F. Schwarzenberg. *Untersuchung der Abbildungseigenschaften eines 3D-Ultraschall-Computertomographen zur Berechnung der 3D-Abbildungsfunktion und Herleitung einer optimierten Sensorgeometrie*. PhD thesis, Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH), 2008.
- [29] Schwarzenberg, G.F. Schwarzenberg'sche Simulation S-1 der USCT3Dv1 Apertur. Technical report, FZK, 2008. [ipefser1://schwarzenberg/Results/ResultsFromPSFAnalysis/3DPSFcalcs/ExactCalc3D/CylindricalGeom/FullDataSet/01\\_allInfluences.fig](ipefser1://schwarzenberg/Results/ResultsFromPSFAnalysis/3DPSFcalcs/ExactCalc3D/CylindricalGeom/FullDataSet/01_allInfluences.fig).
- [30] Schwarzenberg, G.F. Schwarzenberg'sche Simulation S-2 der USCT3Dv1 Apertur. Technical report, FZK, 2008. [ipefser1://schwarzenberg/Results/ResultsFromPSFAnalysis/3DPSFcalcs/ExactCalc3D/CylindricalGeom/FullDataSet/02\\_allInfluences\\_deltaS=9\\_smallerPSFs.fig](ipefser1://schwarzenberg/Results/ResultsFromPSFAnalysis/3DPSFcalcs/ExactCalc3D/CylindricalGeom/FullDataSet/02_allInfluences_deltaS=9_smallerPSFs.fig).
- [31] Schwarzenberg, G.F. Schwarzenberg'sche Simulation S-3 der USCT3Dv1 Apertur. Technical report, FZK, 2008. <ipefser1://schwarzenberg/Results/ResultsFromPSFAnalysis/3DPSFcalcs/ExactCalc3D/>

- Cylindrical\_Geom/FullDataSet/04\_noInfluences\_deltaS9\_smallerPSFs.fig.
- [32] Schwarzenberg, G.F. Schwarzenberg'sche Simulation S-4 der USCT3Dv2 Apertur. Technical report, FZK, 2008. [ipefser1://schwarzenberg/Results/-ResultsFromPSFAnalysis/3DPSFcalcs/ExactCalc3D/EllipticalGeom/-FullDataSet/01\\_allInfluences.fig](http://ipefser1://schwarzenberg/Results/-ResultsFromPSFAnalysis/3DPSFcalcs/ExactCalc3D/EllipticalGeom/-FullDataSet/01_allInfluences.fig).
- [33] L.A. Shepp and B.F. Logan. The fourier reconstruction of a head section. In *IEEE Transactions on Nuclear Science vol. 21, no. 3*, IEEE Transactions on Nuclear Science, pages pp. 21–43, June 1974.
- [34] F. Simonetti, L. Huang, and N. Duric. Frequency diversity in breast ultrasound tomography. *Medical Imaging 2008: Physics of Medical Imaging*, 6913(1):69134E, 2008.
- [35] Stanislav Sýkora. K-space formulation of MRI. *Stan's Library, Ed.S.Sykora*, 1:11–21, 2005.
- [36] R. Stotzka, G. Göbel, and K. Schlote-Holubek. Development of transducer arrays for ultrasound-computertomography. In *SPIE's Internl. Symposium Medical Imaging 2003*, 2003.
- [37] Inc. The Mathworks. phantom - Create head phantom image. <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/images/phantom.html>, 2010.
- [38] The MathWorks, Inc. MATLAB - The Language Of Technical Computing. <http://www.mathworks.com/>.
- [39] K. W. A. van Dongen and W. M. D. Wright. A Forward Model and Conjugate Gradient Inversion Technique for Low-Frequency Ultrasonic Imaging. *Journal of the Acoustical Society of America*, 120(4):2086–2095, 2006.
- [40] D. Vilkomerson, J. Greenleaf, and V. Dutt. Towards a Resolution Metric for Medical Ultrasonic Imaging. In *IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 1405–1410, 1995.
- [41] D. von Fournier, H. J. H.-W. Anton, and G. Bastert. *Cancer Diagnosis: Early Detection*. Springer, 1992.

- [42] M. Weber. Ultraschallsimulation fuer Ultraschall-Computertomographie. Master's thesis, Hochschule Mannheim, 2005.
- [43] Wikimedia Foundation. Diffraction). <http://en.wikipedia/diffraction>, 2010.
- [44] Wikimedia Foundation. Kohärenz (Signalanalyse). [http://de.wikipedia.org/wiki/Kohärenz\\_\(Signalanalyse\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Kohärenz_(Signalanalyse)), 2010.
- [45] Wikimedia Foundation. Speckle. <http://en.wikipedia/Speckle>, 2010.
- [46] J. Würfel. Dreidimensionale Ultraschallcomputertomographie — Aufbau eines Prototyps. Master's thesis, Universität Karlsruhe, 2000.





# 7 Abbildungsanhang

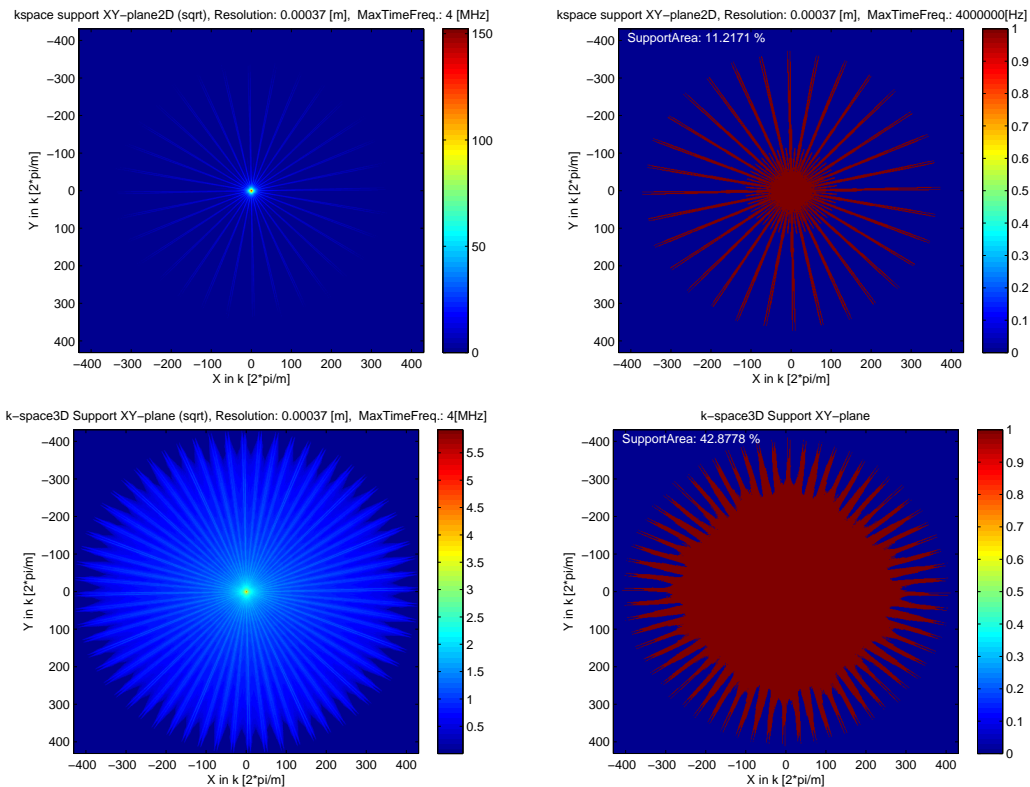


Abbildung 7.1:  $k$ -Space Füllung der  $k_x k_y$  Ebene USCT3Dv1; (links) unnormalisierter  $k$ -Space der Simulation, (rechts) binarisierter  $k$ -Space, (oben) 2D-Schnitt aus 3D- $k$ -Space, (unten) Simulation eines 2D- $k$ -Space äquivalent zum 3D- $k$ -Space für diese Ebene

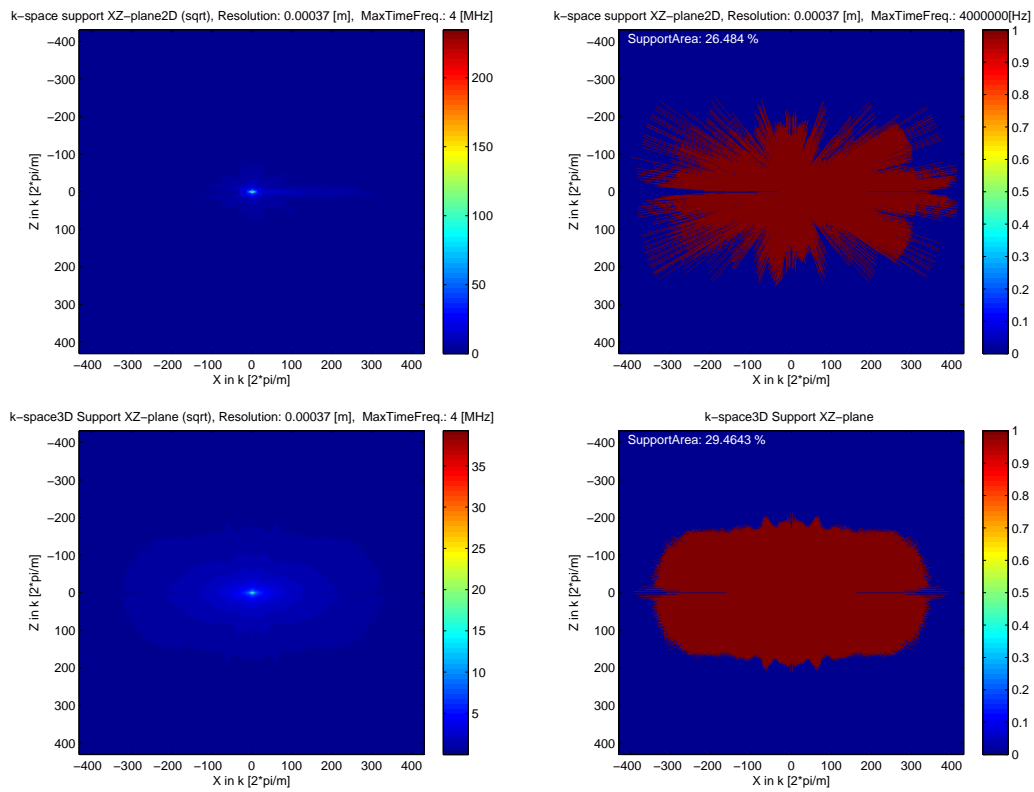


Abbildung 7.2:  $k$ -Space Füllung  $k_x k_z$  Ebene USCT3Dv1; (links) unnormalisierter  $k$ -Space der Simulation, (rechts) binarisierter  $k$ -Space, (oben) 2D-Schnitt aus 3D- $k$ -Space, (unten) Simulation eines 2D- $k$ -Space äquivalent zum 3D- $k$ -Space für diese Ebene

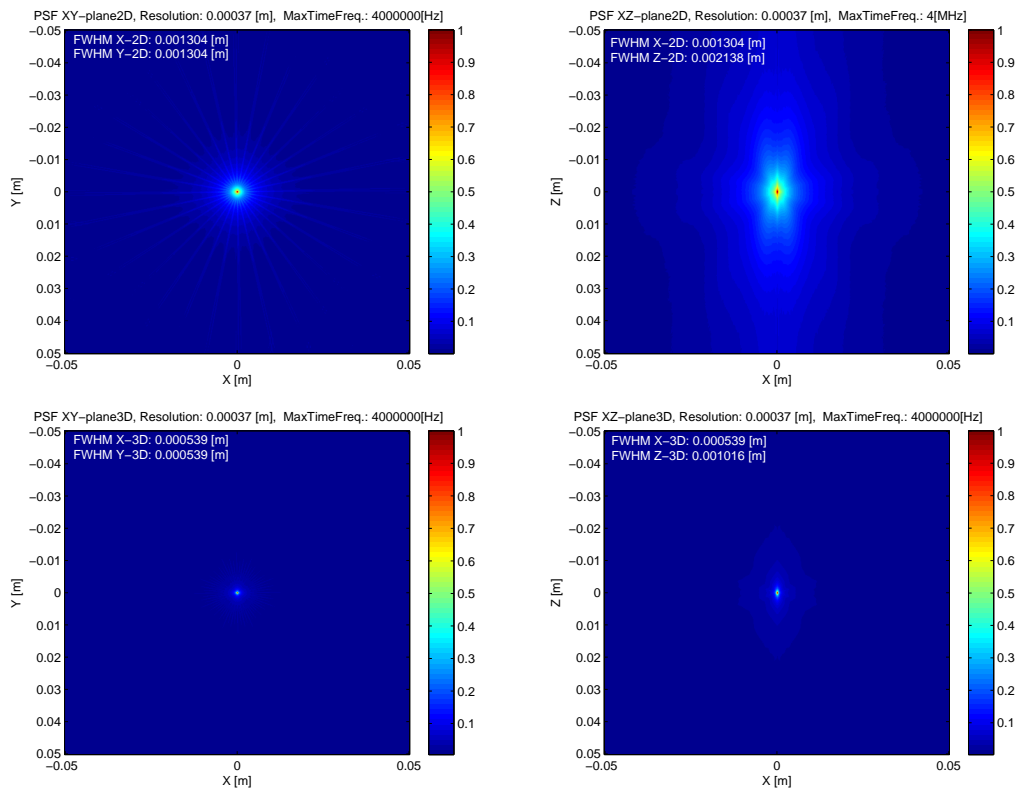


Abbildung 7.3: Ortsraum PSF USCT3Dv1 aus Punktstreuer mit Abbildungsfunktion; (links) XY Ebene, (rechts) XZ Ebene, (oben) mit 2D-Abbildungsfunktion, (unten) mit 3D-Abbildungsfunktion

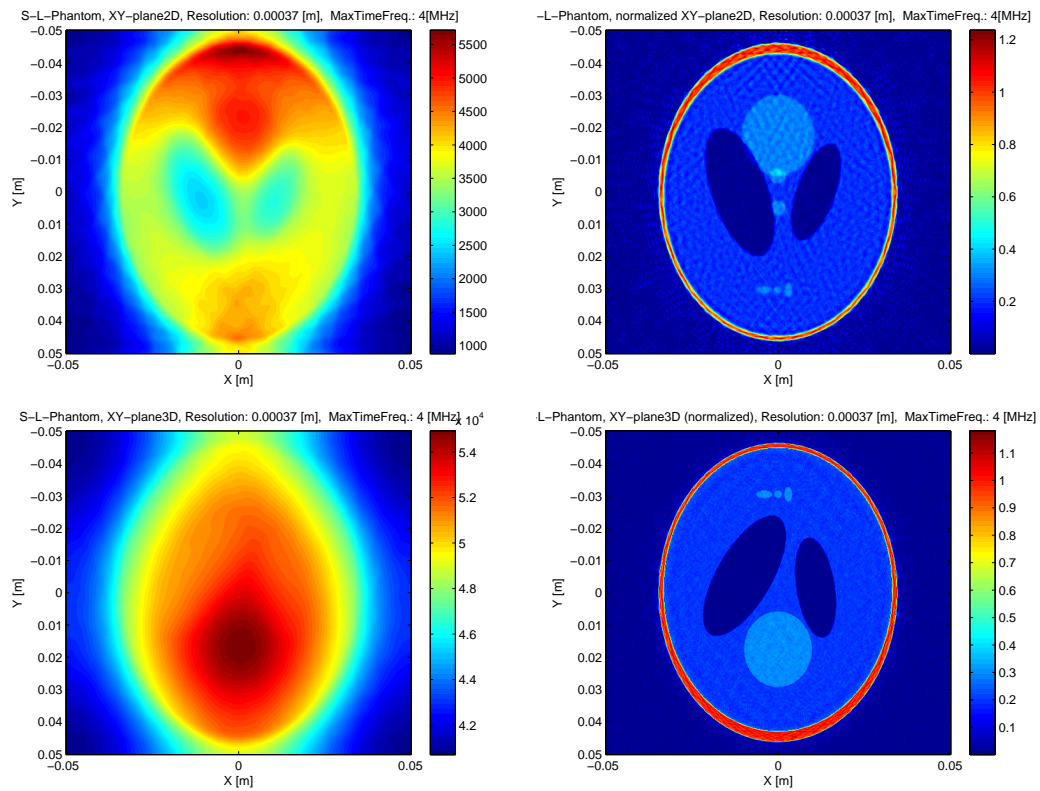


Abbildung 7.4: Abbildungsfunktion XZ USCT3Dv1 SL-Phantom und die Verwendung als Filterfunktion mit dem Shepp-Logan-Kopf-Phantom

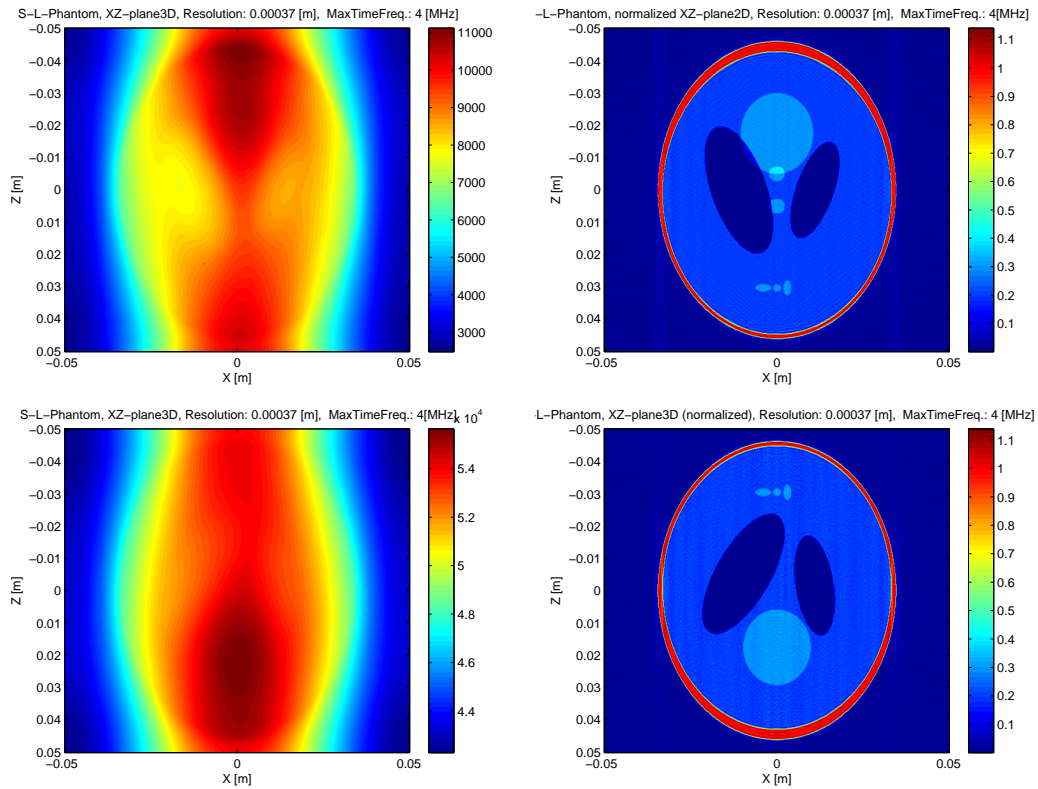


Abbildung 7.5: *k*-Space Support USCT3Dv1 und die Verwendung als 3D-Filterfunktion für das Shepp-Logan-Kopf-Phantom

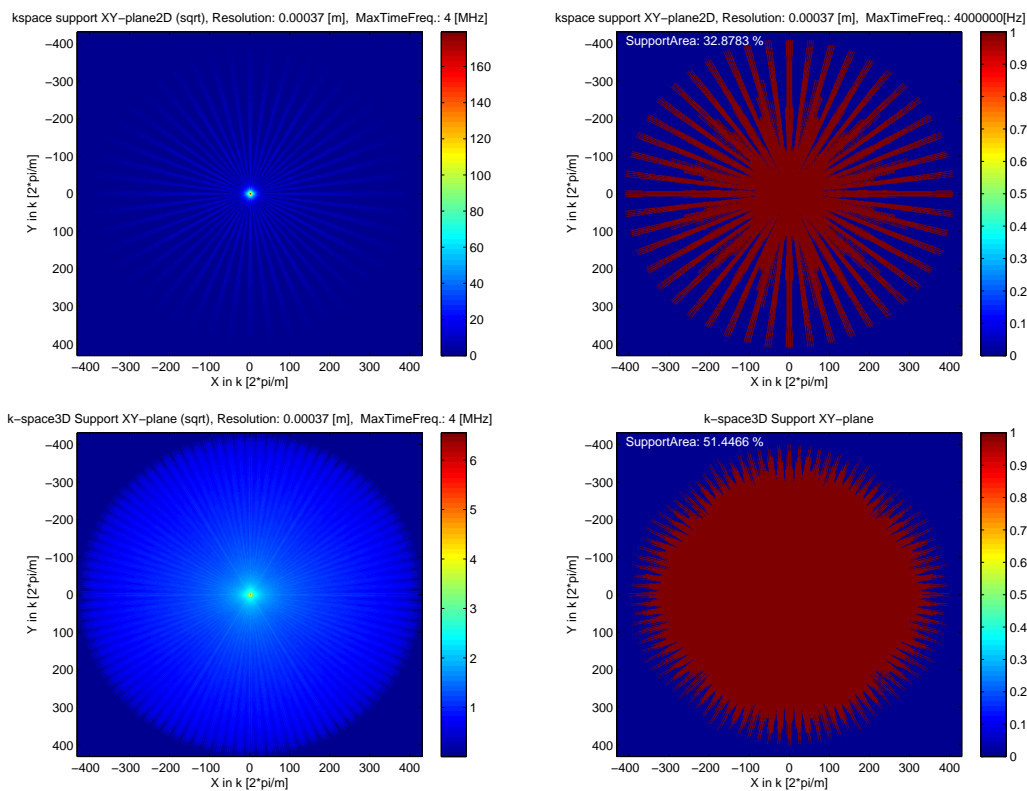


Abbildung 7.6:  $k$ -Space Füllung  $k_X k_Y$  Ebene USCTv2; (links) unnormalisierter  $k$ -Space der Simulation, (rechts) binarisierter  $k$ -Space, (oben) 2D-Schnitt aus 3D- $k$ -Space, (unten) Simulation eines 2D- $k$ -Space äquivalent zum 3D- $k$ -Space für diese Ebene

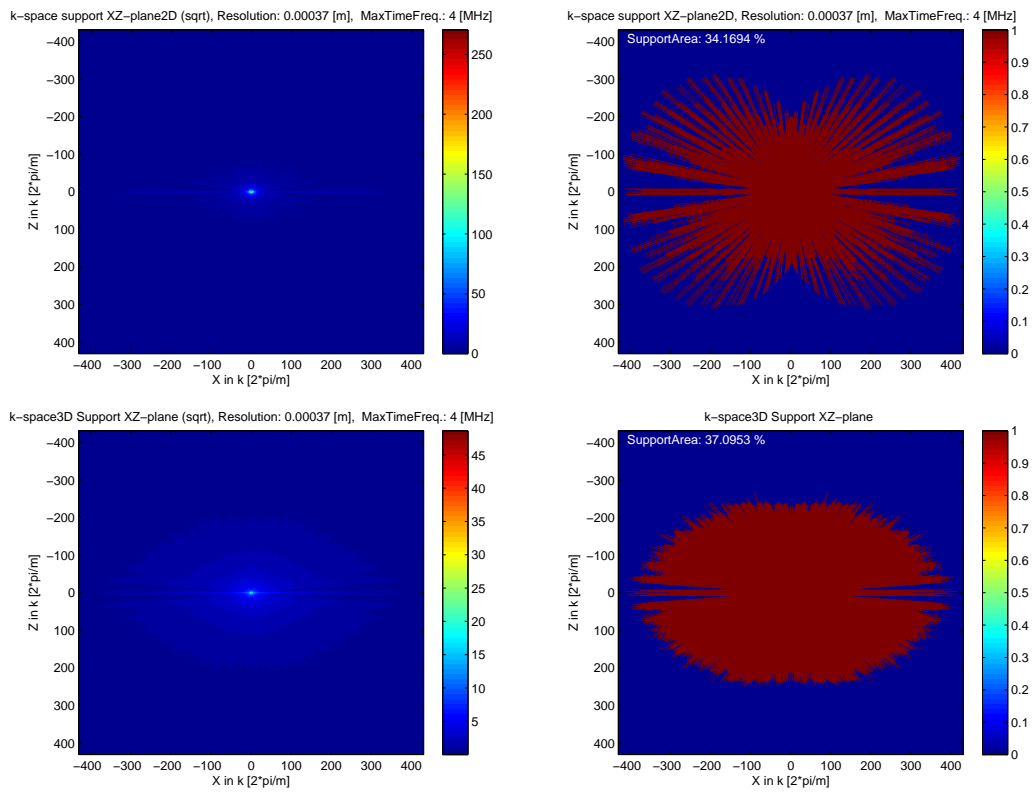


Abbildung 7.7:  $k$ -Space Füllung  $k_x k_z$  Ebene USCTv2; (links) unnormalisierter  $k$ -Space der Simulation, (rechts) binarisierter  $k$ -Space, (oben) 2D-Schnitt aus 3D- $k$ -Space, (unten) Simulation eines 2D- $k$ -Space äquivalent zum 3D- $k$ -Space für diese Ebene

## 7 Abbildungsanhang

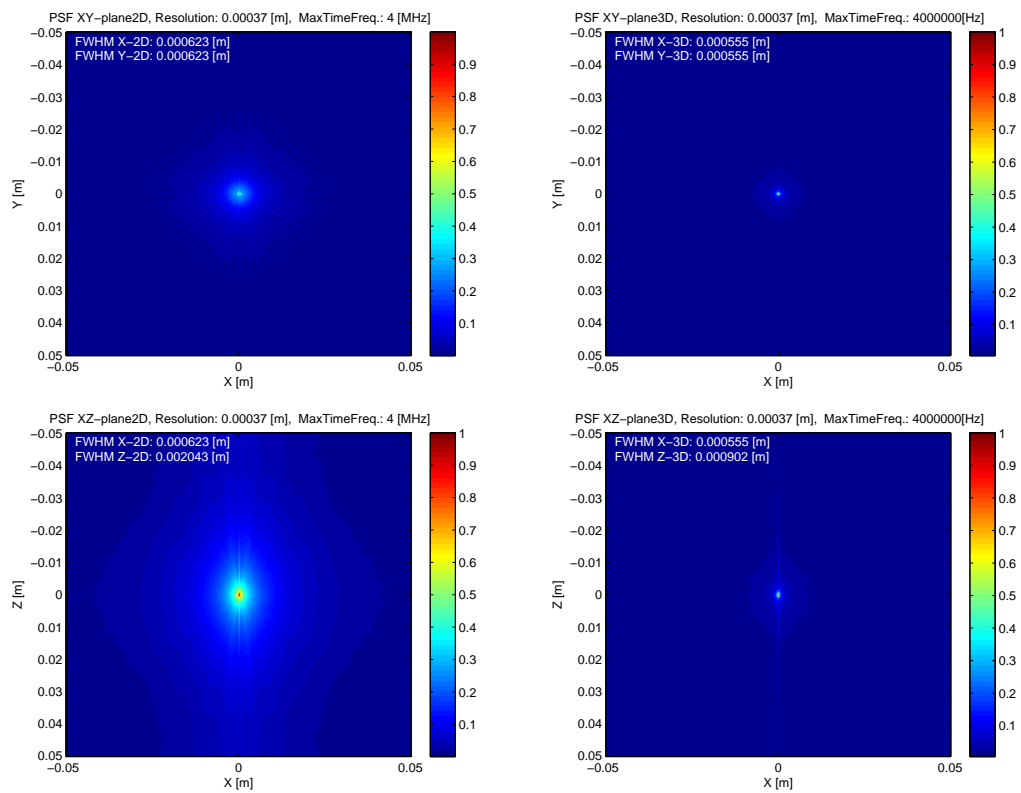


Abbildung 7.8: *PSF USCT3Dv2 aus Punktstreuer mit Abbildungsfunktion; (links) XY Ebene, (rechts) XZ Ebene, (oben) mit 2D-Abbildungsfunktion, (unten) mit 3D-Abbildungsfunktion*



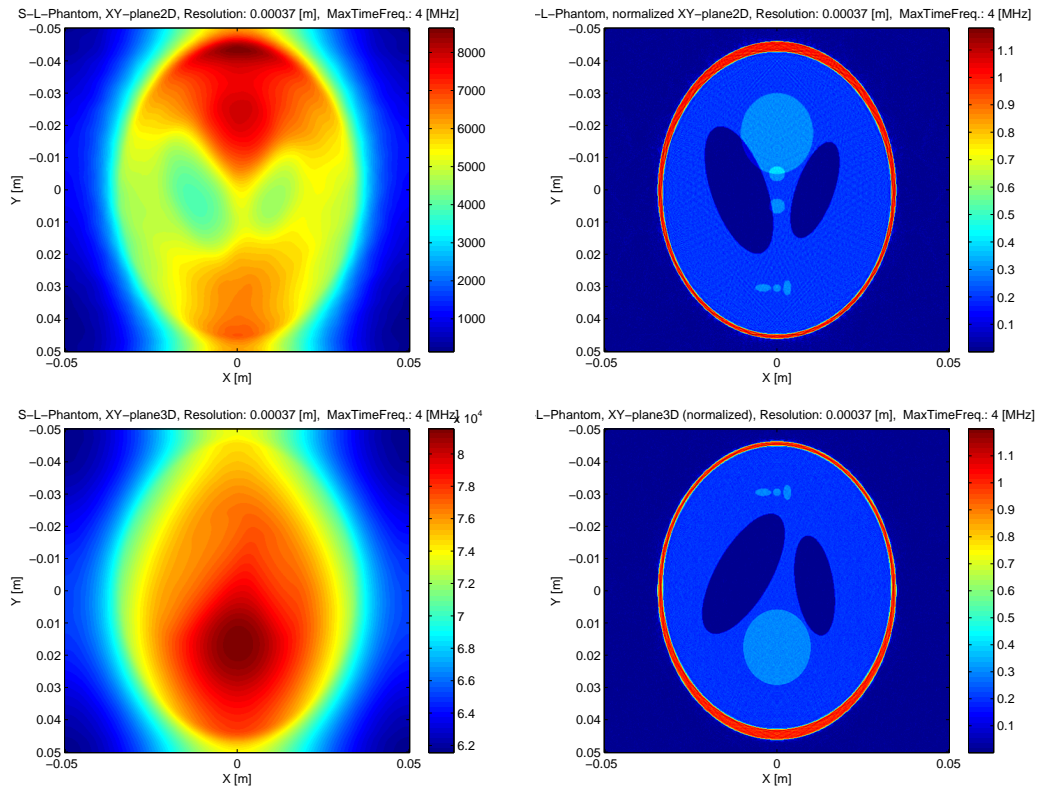


Abbildung 7.9: *Abbildungsfunktion XY USCT3Dv2 mit dem Shepp-Logan Kopf Phantom*

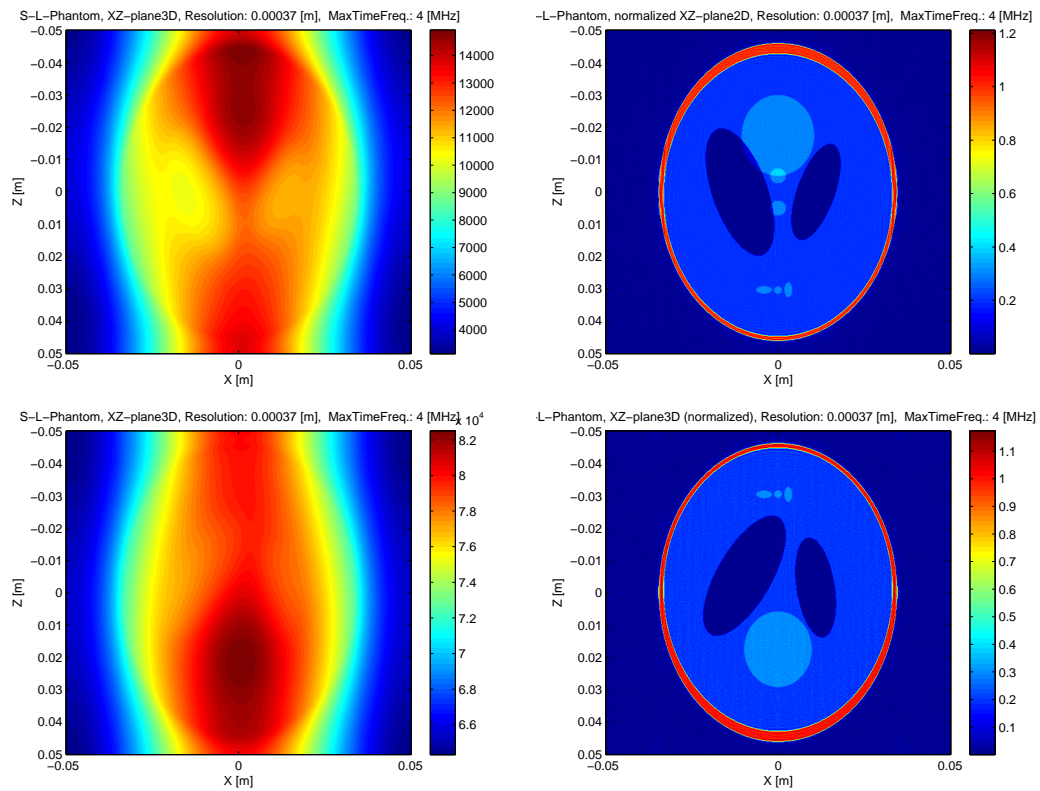


Abbildung 7.10: Abbildungsfunktion XZ USCT3Dv2 mit dem Shepp-Logan-Kopf-Phantom

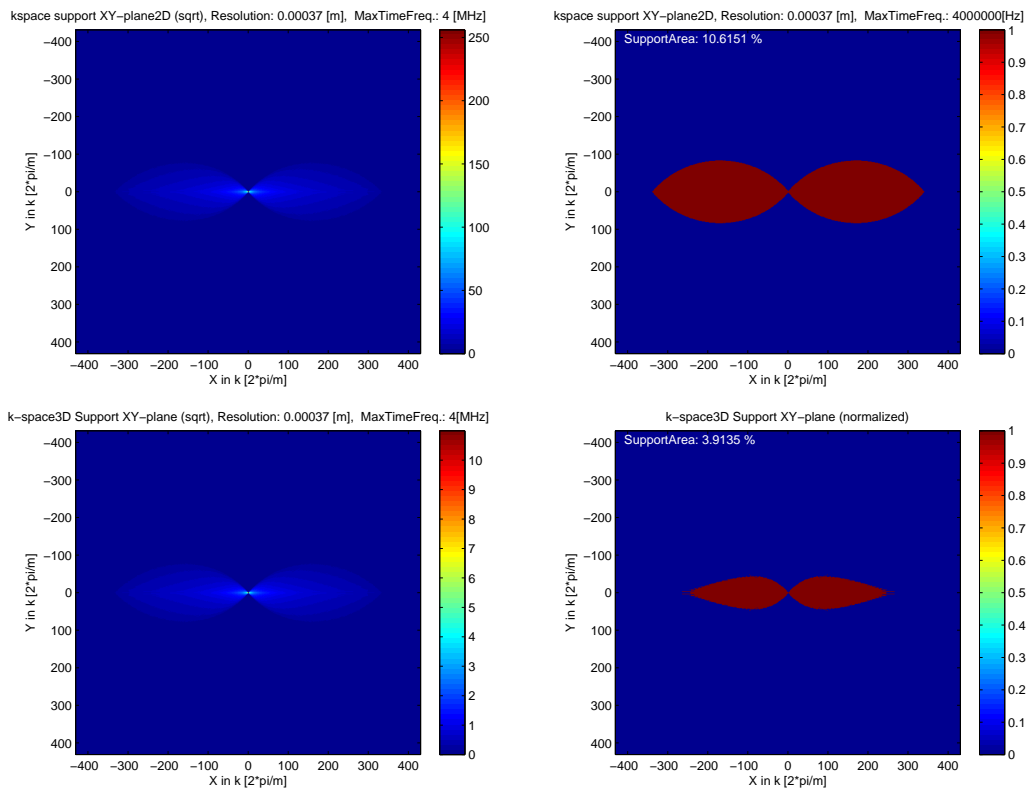


Abbildung 7.11: *k*-Space Support  $k_X k_Y$  Ebene Sonographie; (links) unnormalisierter *k*-Space der Simulation, (rechts) binarisierter *k*-Space, (oben) 2D-Schnitt aus 3D-*k*-Space, (unten) Simulation eines 2D-*k*-Space äquivalent zum 3D-*k*-Space für diese Ebene

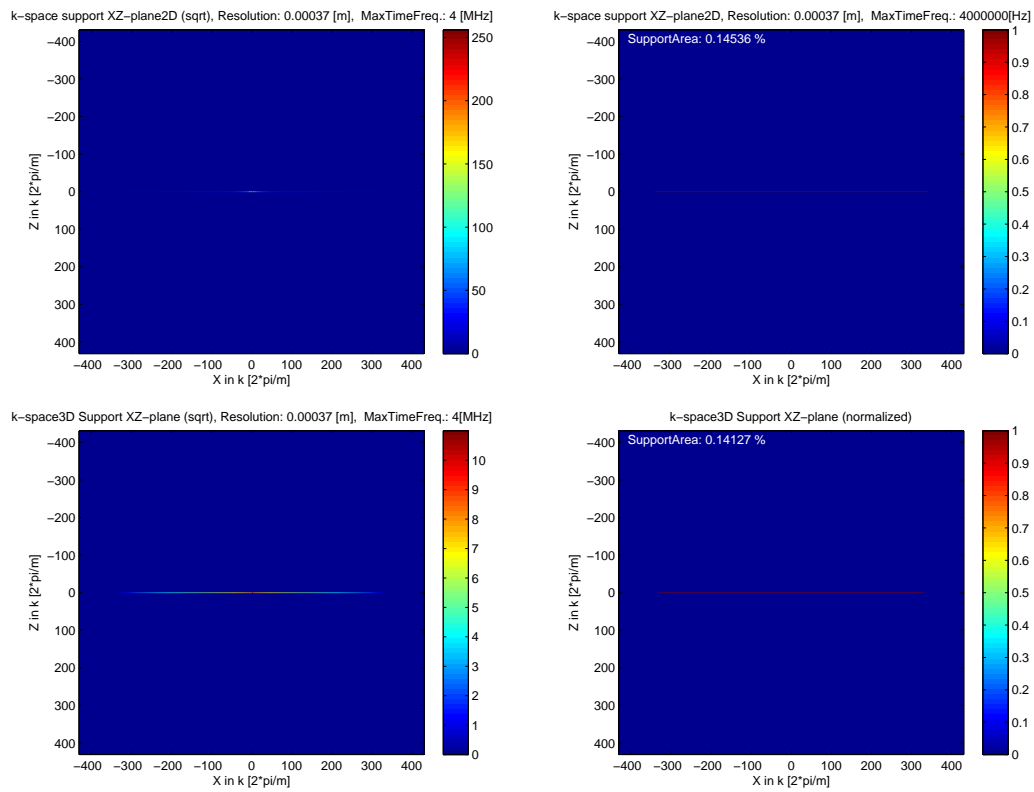


Abbildung 7.12: *k*-Space Support  $k_X k_Z$  Ebene Sonographie; (links) unnormalisierter *k*-Space der Simulation, (rechts) binarisierter *k*-Space, (oben) 2D-Schnitt aus 3D-*k*-Space, (unten) Simulation eines 2D *k*-Space äquivalent zum 3D-*k*-Space für diese Ebene

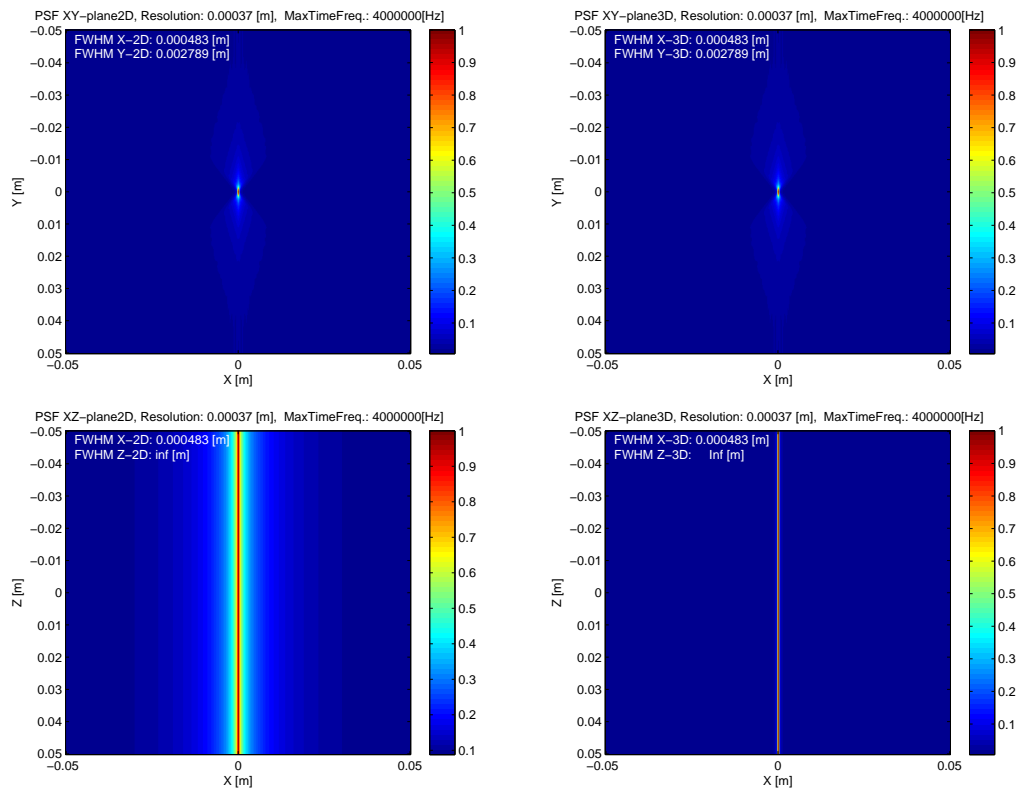


Abbildung 7.13: *PSF Sonographie aus Punktstreuer mit Abbildungsfunktion; (links) XY Ebene, (rechts) XZ Ebene, (oben) mit 2D-Abbildungsfunktion, (unten) mit 3D-Abbildungsfunktion*

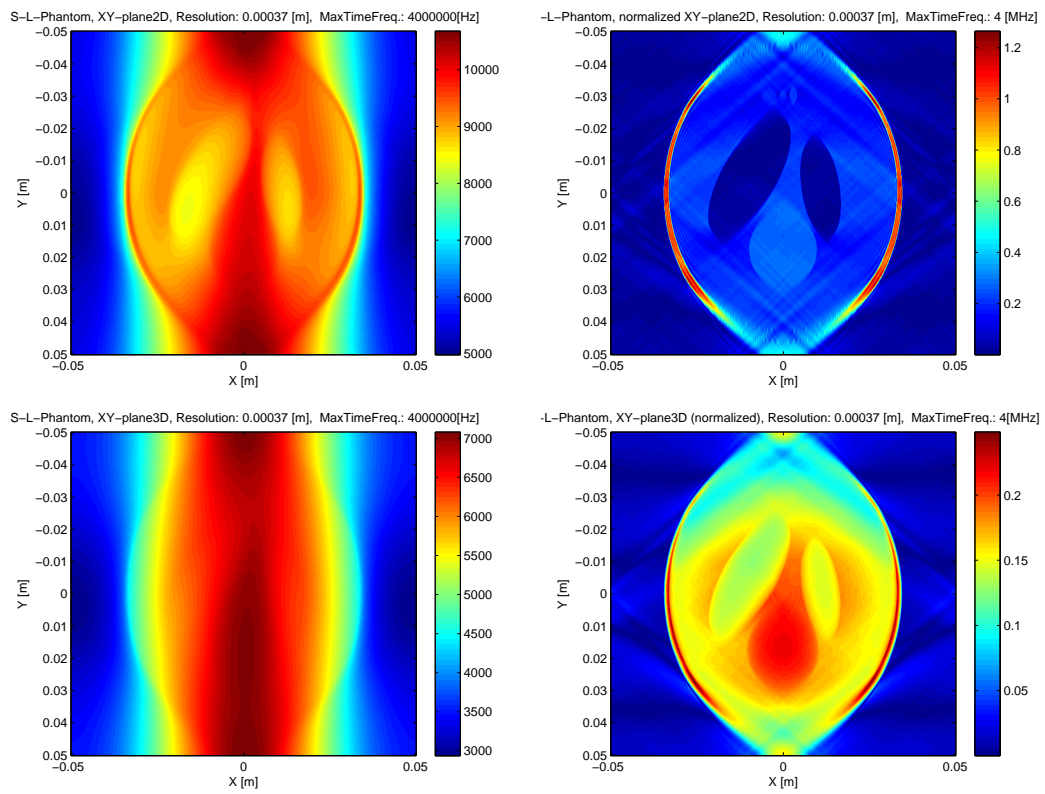


Abbildung 7.14: *Abbildung XY Sonographie mit dem SL-Phantom*

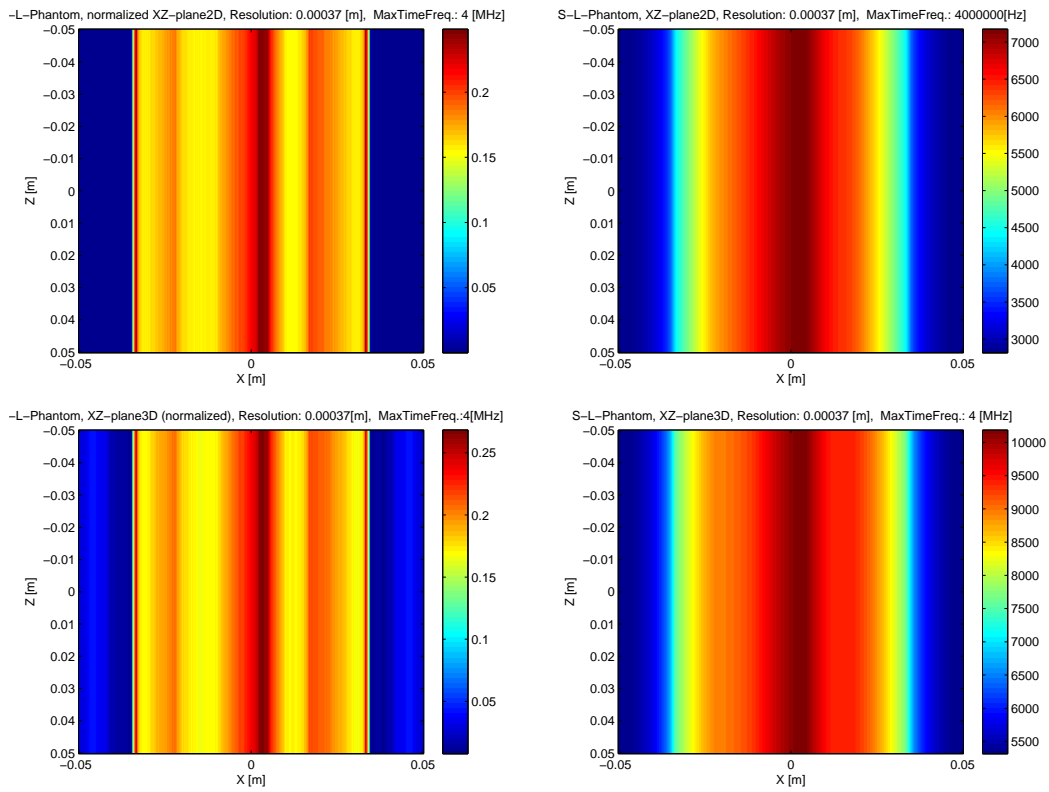


Abbildung 7.15: *Abbildung XZ Sonographie mit dem SL-Phantom*





# Abbildungsverzeichnis

1.1	Medizinische Motivation für ein hochauflösendes Bildgebungsverfahren . . . . .	2
1.2	Datennahmemodi der SAFT Ultraschallbildung . . . . .	4
1.3	Bildgebung eines Brust Phantoms mit verschiedenen Verfahren . .	5
1.4	USCT3Dv2 schematischer Messablauf mit Probandin . . . . .	6
1.5	USCT3Dv2 Gesamtaufbau . . . . .	7
1.6	System- und Messablaufschemata USCT3Dv2 . . . . .	9
2.1	Hierarchie der Optik . . . . .	17
2.2	Refraktion (Brechung) an einer Grenzschicht . . . . .	18
2.3	Diffraction zweier Ringwellen . . . . .	19
2.4	Diffraktive Interaktion einer Ebenen-Welle an einer Schlitzapertur	27
2.5	Auflösung von Abbildungen über die Punktspreizfunktion . . . . .	28
3.1	Ebene-Welle im k-Space . . . . .	35
3.2	Synthese von Kreiswelle aus Ebene-Wellen im k-Space . . . . .	36
3.3	Translation im k-Space . . . . .	37
3.4	Beispiel des k-Spaces als 2D-Filter für eine Objektfunktion . . . . .	40
3.5	Sender-Empfänger-Interaktion mit Objekt mit $\lambda/2$ . . . . .	43
3.6	Sender-Empfänger-Interaktion mit Objekt mit $\lambda/4$ . . . . .	44
3.7	Sender-Empfänger-Objekt Interaktion für getrennte Sender und Empfänger . . . . .	46
3.8	Ewaldsphären-Konstruktion für zwei monochromatische Ebenen-Wellen . . . . .	47
4.1	Region-of-Interest für USCT3Dv2 . . . . .	50
4.2	USCT3Dv1 Apertur Geometrie . . . . .	52

4.3	USCT3Dv2 Apertur Geometrie . . . . .	53
4.4	Sonographie Apertur . . . . .	53
4.5	Transducer Apertur Terminologie . . . . .	57
4.6	Interferenz von ausgesendeten Wellen verschiedener Aperturen . .	58
4.7	Auflösungsvermögen von zwei Punktobjekten die nur entlang der lateral Dimension getrennt sind . . . . .	60
4.8	„Antennas designers formula“ . . . . .	61
4.9	<i>USCT3Dv1 Transducer im Gehäuse</i> . . . . .	62
4.10	Struktur und Unterstruktur der USCT3Dv1 Sensorik . . . . .	63
4.11	Gemessene Charakteristik USCT3Dv1 . . . . .	63
4.12	Simulierte Charakteristik USCT3Dv1 . . . . .	64
4.13	USCT3Dv2 Sensorik Apertur . . . . .	64
4.14	Struktur und Unterstruktur der USCT3Dv2 Sensorik . . . . .	65
4.15	Gemessene Charakteristik USCT3Dv2 . . . . .	65
4.16	Simulierte Charakteristik USCT3Dv2 . . . . .	66
4.17	Gemessene und simulierte Charakteristik Sonographie Apertur . .	67
4.18	Koordinatensystem der Fraunhofer Diffraktionsbeschreibung . . .	68
4.19	Fraunhofer Diffraktions Konstruktion . . . . .	69
4.20	Sensormessplatz des USCT Projekts . . . . .	73
4.21	Inverse k-Space Konstruktion für vorgegebenem Sender- Normalenvektor . . . . .	80
4.22	Abschätzung einer optimalen Abstrahlcharakteristik für USCT3Dv2	81
4.23	Ideales Abstrahlprofil für USCT3Dv2 (2D) . . . . .	82
4.24	Inverse Fraunhofer Diffraktion zur Abstrahlcharakteristik Generie- rung im k-Space . . . . .	83
5.1	USCT3Dv2 Koordinatensystem . . . . .	86
5.2	USCT3Dv1 Fraunhofer Simulationsevaluation . . . . .	97
5.3	USCT3Dv2 Fraunhofer Simulationsevaluation . . . . .	98
5.4	Ableitung von Sensorik aus optimalem k-Space . . . . .	100
6.1	Gesamtmodellierung einer Apertur im k-Space . . . . .	111
7.1	k-Space Füllung der $k_X k_Y$ Ebene USCT3Dv1 . . . . .	119
7.2	k-Space Füllung $k_X k_Z$ Ebene USCT3Dv1 . . . . .	120

7.3	Ortsraum PSF USCT3Dv1 . . . . .	121
7.4	Abbildungsfunktion XZ USCT3Dv1 . . . . .	122
7.5	<i>k</i> -Space Support USCT3Dv1 und die Verwendung als 3D- Filterfunktion für das Shepp-Logan-Kopf-Phantom . . . . .	123
7.6	k-Space Füllung $k_X k_Y$ Ebene USCT3Dv2 . . . . .	124
7.7	k-Space Füllung $k_X k_Z$ Ebene USCT3Dv2 . . . . .	125
7.8	Ortsraum PSF USCT3Dv2 . . . . .	126
7.9	Abbildungsfunktion XY USCT3Dv2 mit dem Shepp-Logan Kopf Phantom . . . . .	127
7.10	Abbildungsfunktion XZ USCT3Dv2 mit dem Shepp-Logan-Kopf- Phantom . . . . .	128
7.11	k-Space Support $k_X k_Y$ Ebene Sonographie . . . . .	129
7.12	k-Space Support $k_X k_Z$ Ebene Sonographie . . . . .	130
7.13	PSF Sonographie . . . . .	131
7.14	Abbildung XY Sonographie mit dem SL-Phantom . . . . .	132
7.15	Abbildung XZ Sonographie mit dem SL-Phantom . . . . .	133



# Tabellenverzeichnis

5.1	<i>k</i> -Space Support für die drei untersuchten Aperturen, gegeben jeweils für die drei Raumachsen und die 2D- und 3D- <i>k</i> -Space Untersuchungen	91
5.2	Die FWHM als Auflösungsmetrik für die drei untersuchten Aperturen, gegeben jeweils für die drei Raumachsen und die 2D- und 3D- <i>k</i> -Space Untersuchungen . . . . .	92
5.3	Prozentuale Änderung der FWHM Abbildungsmetrik von 2D auf 3D für verschiedene Simulationen und die drei untersuchten Aperturen, gegeben jeweils für die drei Raumachsen, konsequenterweise ergibt sich keine Änderung für die Sonographie Apertur . . . . .	94
5.4	FWHM für die USCT3Dv1 Apertur, gegeben jeweils für die drei Raumachsen für die drei Schwarzenberg'schen Simulationen (S-1, S-2 und S-3) und die Ewaldsphären basierte (EW-1) . . . . .	94
5.5	FWHM für die USCT3Dv2 Apertur, gegeben jeweils für die drei Raumachsen für die Schwarzenberg'schen Simulation (S-4) und die Ewaldsphären basierte (EW-2) . . . . .	94
5.6	Prozentuale Änderung der FWHM von USCT3Dv1 zu USCT3Dv2, gegeben jeweils für die drei Raumachsen für die Schwarzenberg'schen Simulationen und die Ewaldsphären basierte Simulation	95
5.7	Relatives Verhältnis der FWHM Auflösungsmetrik für die X zu Z Dimension bestimmt, für die USCT3Dv1 Apertur . . . . .	95
5.8	Relatives Verhältnis der FWHM Auflösungsmetrik für die X zu Z Dimension bestimmt, für die USCT3Dv2 Apertur . . . . .	96
5.9	Evaluation der Fraunhofer basierenden Simulationen der Winkelsensitivität . . . . .	96