Kompositionsoperatoren auf gewichteten Bergmanräumen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Ulrich Böttger
aus Ludwigshafen am Rhein

Tag der mündlichen Prüfung: 11.2.1998
Referent: Prof. Mortini
Korreferenten: Prof. Jarchow, Prof. v. Renteln

Inhaltsverzeichnis

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all denen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere

- bei meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums in jeder Hinsicht unterstützt haben,
- bei allen, die während meiner Arbeit am Lehrstuhl Prof. Dr. M. Schneider für ein angenehmes Arbeitsklima gesorgt haben,
- bei Herrn AOR Dr. Müller-Rettkowski für sein Interesse sowie für einige Literaturhinweise,
- bei meinem ehemaligen Kommilitonen Dipl.-Math. Georg Hoever für das Korrekturlesen dieser Arbeit,
- bei Herrn Priv.-Doz. Dr. Rudolf Rupp für sein großes Interesse an der Arbeit, viele nützliche Hinweise sowie ebenfalls das Korrekturlesen,
- bei den Herren Professoren Dr. Jarchow und Dr. v. Renteln für die Übernahme der Korreferate und
- bei Herrn Prof. Dr. Mortini für die fruchtbare Themenstellung, die gute Betreuung und viele anregende Fragen.

0 Einleitung

Zu einer holomorphen Selbstabbildung φ der offenen komplexen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ ist der Kompositionsoperator C_φ auf dem Raum $\mathrm{H}(\mathbb{D})$ der in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen definiert durch

$$C_\varphi : \quad \mathrm{H}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathbb{D}) , \quad f \longmapsto f \circ \varphi .$$

Seit Mitte der sechziger Jahre wird untersucht, für welche φ das dazugehörige C_φ eine Selbstabbildung spezieller (vollständig) normierter Unterräume von $\mathrm{H}(\mathbb{D})$ ist. Liegt eine Selbstabbildung vor, so ist diese nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig (vgl. Satz 4.1); es stellt sich aber die Frage, wie andere funktionalanalytische Eigenschaften – etwa Kompaktheit, abgeschlossener Bildraum, Spektrum – mit Eigenschaften von φ – wie Maximalbetrag, Randwerte, Winkelderivierte, Fixpunkte – zusammenhängen. Die Selbstabbildungs- und Kompaktheitsuntersuchungen wurden im Rahmen von Hilberträumen zunächst für den ungewichteten Hardyraum

$$\mathcal{H}^2 = \{f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})\colon\ f(z) = \textstyle\sum_{n=0}^\infty a_n z^n,\ \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty\}$$

angestellt (s. z.B. [Ry, No, Sc, ST, MS, S1]). Danach wurden sie auf die Bergmanräume

$$\mathcal{A}^2_{G_\alpha} = \{f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})\colon\ \textstyle\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 G_\alpha(z)\, dz d\overline{z} < \infty\}$$

sowie die Dirichleträume

$$\mathcal{D}^2_{1,G_\alpha} = \{f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})\colon\ \textstyle\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 G_\alpha(z)\, dz d\overline{z} < \infty\}$$

zu den durch

$$G_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \qquad (\alpha > -1) \tag{1.6}$$

definierten Standardgewichten ausgedehnt (s. z.B. [MS, S1, Zo]). Kriete und MacCluer betrachten dann 1992 in [KM] allgemeiner gewichtete Bergmanräume $\mathcal{A}^2_G$, wobei sie als Gewichtsfunktionen G bei der Integration beliebige in

$\mathbb{D}\backslash\{0\}$ stetige, rotationsinvariante, integrierbare, positive Funktionen zulassen.
Die meisten bisher bekannten Resultate sind in den Büchern [S2] und [CM] zusammengefaßt.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit führen wir die oben erwähnten Funktionenraumklassen der gewichteten Bergman- und Dirichleträume ein (Def. 1.5 bzw. 1.23), wobei wir sogar Maße als Gewichte erlauben (Def. 1.1). Bisher war nur bekannt, dass es zu jedem gewichteten Bergmanraum einen gewichteten Dirichletraum mit äquivalenter Norm gibt, wohingegen wir beweisen konnten, dass jeder gewichtete Bergmanraum sogar als normierter Raum ein gewichteter Dirichletraum ist (Satz 1.31). Hauptbestandteil dieses Beweises ist der Übergang von einem Gewicht G zu dem durch

$$H(z) := 4 \int_{|z|}^{1} \int_{s}^{1} G(t) t dt \, \frac{ds}{s} \tag{1.35}$$

definierten Gewicht H. Diese Definition hat gegenüber der in der Literatur üblichen viele Vorteile, so z. B. dass H in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ subharmonisch ist. In Satz 1.34 charakterisieren wir umgekehrt diejenigen gewichteten Dirichleträume, die als normierte Räume gewichtete Bergmanräume sind.
Gewichtete Dirichleträume und damit erst recht gewichtete Bergmanräume sind als normierte Räume gewichtete Hardyräume

$$\mathcal{H}^2_{(p_n)} = \{f \in \mathrm{H}(\mathbb{D}) \colon f(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} p_n |a_n|^2 < \infty\}$$

(s. Def. 1.9) mit einer geeigneten Folge (p_n) [Sätze 1.14 u. 1.24]. Neu sind unsere Sätze 1.20 und 1.22 bzw. 1.27 und 1.29, die zeigen, wie man aus der Folge (p_n) die Gewichte der Bergman- bzw. Dirichleträume zurückerhält.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Bedingungen an zwei Gewichte der Raum zu dem ersten Gewicht eine Teilmenge des Raums zu dem zweiten Gewicht ist. Während bekannt war, dass bei zwei stetigen Gewichten G und $\tilde{G}$ aus

$$\limsup_{w \in \mathbb{D}, \ w \to \partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{G}(w)}{G(w)} < \infty$$

folgt, dass $\mathcal{A}^2_G \subseteq \mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ und $\mathcal{D}^2_{1,G} \subseteq \mathcal{D}^2_{1,\tilde{G}}$, geben wir in Satz 2.3 ein Kriterium, wann umgekehrt aus $\mathcal{D}^2_{1,G} \subseteq \mathcal{D}^2_{1,\tilde{G}}$ folgt, dass obiger lim sup endlich ist. Ebenfalls neu ist Satz 2.7, der besagt, dass es zu jedem Bergmanraum $\mathcal{A}^2_G$ einen weiteren Bergmanraum $\mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ gibt mit $\mathcal{A}^2_{\tilde{G}} \not\subseteq \mathcal{A}^2_G$ und $\mathcal{A}^2_G \not\subseteq \mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$.
Während Kriete und MacCluer in [KM] ihr Hauptaugenmark auf regulär schnelle Gewichte G legen (d. h. für alle $\alpha \in (-1,\infty)$ gibt es ein $r \in (0,1)$, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist), definieren wir in 2.10 regulär langsame Gewichte G als solche, für die es ein $\alpha \in (-1,\infty)$ und ein $r \in (0,1)$ gibt, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton wachsend in $[r,1)$ ist. Beispiele derartiger Gewichte sind durch

$$G(z) := (1-|z|^2)^\alpha \left(1 - \log(1-|z|^2)\right)^\beta \tag{2.11}$$

mit $\alpha \in (-1,\infty)$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gegeben. Durch Anwendung obigen Kriteriums erhalten wir

Korollar 2.16 *Es seien $\mathcal{A}^2_G$ und $\mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ zwei Bergmanräume und dazu die Gewichte H bzw. $\tilde{H}$ gemäß* (1.35) *gebildet. Ist G regulär langsam, so gilt $\mathcal{A}^2_G \subseteq \mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ genau dann, wenn* $\limsup_{w\to\partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{H}(w)}{H(w)} < \infty$.

Wir bemerken auch, dass eine solche Charakterisierung direkt anhand des Quotienten $\frac{\tilde{G}}{G}$ im Allgemeinen nicht möglich ist.
Im letzten Abschnitt dieses Kapitels weisen wir nach, dass der ungewichtete Hardyraum $\mathcal{H}^2$ zwar der Schnitt über alle gewichteten Bergmanräume ist, nicht jedoch der Schnitt über alle Bergmanräume $\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ zu den Standardgewichten, obwohl man $\mathcal{H}^2$ in vielerlei Hinsicht als Grenzfall $\alpha = -1$ der $\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ ansehen kann.

Das dritte Kapitel ist dem Studium von Anzahlfunktionen gewidmet, welche im vierten Kapitel zur Untersuchung der Kompositionsoperatoren benötigt werden. Zu einem Gewicht H und einer holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ ist die Anzahlfunktion K_φ definiert durch

$$K_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} H(z) \qquad (w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}) \ , \tag{3.2}$$

wobei bei der Summation die Vielfachheit der Urbilder berücksichtigt wird. Ist das Gewicht H gemäß (1.35) gebildet, so beweisen wir in den Sätzen 3.9

und 3.11, dass K_φ stetig und subharmonisch ist in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ mit $K_\varphi(w) \leq H(\frac{\varphi(0)-w}{1-\overline{\varphi(0)}w})$. Diese Ergebnisse sind neu und zeigen, dass derartige Anzahlfunktionen glatter sind als die bekannte Nevanlinnasche Anzahlfunktion, die im Allgemeinen nicht stetig ist (Abschnitt A.2).

Im letzten Kapitel zeigen wir zunächst

Theorem 4.3 *Es seien* $\mathcal{D}^2_{1,H}$ *ein gewichteter Dirichletraum,* φ *eine holomorphe Selbstabbildung von* $\mathbb{D}$ *und zu* H *und* φ *die Anzahlfunktion* K_φ *gemäß* (3.2) *gebildet. Ist* $\varphi \in \mathcal{D}^2_{1,H}$ *und* $\limsup_{w\to\partial\mathbb{D}} \frac{K_\varphi(w)}{H(w)} < \infty$ *, so ist* C_φ *eine* (*stetige*) *Selbstabbildung von* $\mathcal{D}^2_{1,H}$*. Ist* $\varphi \in \mathcal{D}^2_{1,H}$ *und* $\limsup_{w\to\partial\mathbb{D}} \frac{K_\varphi(w)}{H(w)} = 0$ *, so ist* C_φ *eine kompakte Selbstabbildung von* $\mathcal{D}^2_{1,H}$*.*

Der Beweis orientiert sich an [S1]; das Resultat wurde jedoch in dieser Allgemeinheit noch nicht veröffentlicht. Wie im zweiten Kapitel geben wir mit Theorem 4.7 ein Kriterium, wann die obigen Bedingungen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig sind. Die Notwendigkeit war bisher nur für den ungewichteten Hardyraum $\mathcal{H}^2$ (der gleich dem gewichteten Dirichletraum $\mathcal{D}^2_{1,G_1}$ ist) und für die Bergmanräume zu den Standardgewichten bekannt. Wir jedoch zeigen mit Hilfe dieses Kriteriums

Satz 4.12 *Ist* $\mathcal{A}^2_G$ *ein gewichteter Bergmanraum zu einem regulär langsamen Gewicht* G*, so ist jedes* C_φ *eine* (*stetige*) *Selbstabbildung von* $\mathcal{A}^2_G$*. Diese ist genau dann kompakt, wenn* $\limsup_{w\to\partial\mathbb{D}} \frac{K_\varphi(w)}{H(w)} = 0$ *, wobei* H *zu* G *gemäß* (1.35) *und* K_φ *zu* H *und* φ *gemäß* (3.2) *gebildet ist.*

Im Fall des ungewichteten Hardyraums $\mathcal{H}^2$ und der Bergmanräume zu den Standardgewichten sind einfachere Kriterien für die Kompaktheit von Kompositionsoperatoren bekannt. So ist C_φ genau dann kompakt auf einem Bergmanraum zu einem Standardgewicht, wenn φ keine (endliche) Winkelderivierte [vgl. Def. 4.13] besitzt, und diese Bedingung ist notwendig für Kompaktheit auf $\mathcal{H}^2$. Bei injektivem φ ist sie auch im $\mathcal{H}^2$-Fall hinreichend; darüberhinaus gibt es weitere Kriterien. Durch Vergleich mit den Bergmanräumen zu den Standardgewichten und mit $\mathcal{H}^2$ sowie mittels unseres Satzes 4.12 erhalten wir

Korollar 4.18 *Ist* C_φ *kompakt auf* $\mathcal{H}^2$*, so ist* C_φ *kompakt auf jedem gewichteten Bergmanraum.*

Besitzt φ in keinem Punkt der Einheitskreislinie eine (endliche) Winkelderivierte, so ist C_φ kompakt auf jedem gewichteten Bergmanraum $\mathcal{A}_G^2$, für den es ein $\alpha\in(-1,\infty)$ gibt, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$.
Ist C_φ kompakt auf einem gewichteten Bergmanraum $\mathcal{A}_G^2$ zu einem regulär langsamen Gewicht G, so besitzt φ in keinem Punkt der Einheitskreislinie eine (endliche) Winkelderivierte.

Insbesondere ist auf einem Bergmanraum $\mathcal{A}_G^2$ zu einem regulär langsamen Gewicht, für das es ein $\alpha\in(-1,\infty)$ gibt, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$, die Kompaktheit von C_φ gleichbedeutend damit, dass φ in keinem Punkt der Einheitskreislinie eine (endliche) Winkelderivierte besitzt. Eine derartige Charakterisierung der Kompaktheit von C_φ durch die Winkelderivierten von φ war bisher nur für die Bergmanräume zu den Standardgewichten und die Bergmanräume zu regulär schnellen Gewichten bekannt. Die Voraussetzung im mittleren Teil von Korollar 4.18, dass es ein $\alpha\in(-1,\infty)$ gibt, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$, ist notwendig. Mit Satz 4.19 weisen wir nämlich abschließend die Existenz von gewichteten Bergmanräumen $\mathcal{A}_G^2$ und holomorphen Selbstabbildungen φ von $\mathbb{D}$ ohne (endliche) Winkelderivierte nach, für die C_φ nicht kompakt auf $\mathcal{A}_G^2$ ist.

Da unser Hauptaugenmerk auf gewichteten Räumen liegt, werden wir den Zusatz „gewichtet“ bei Bergman-, Dirichlet- und Hardyräumen im Folgenden weglassen und dafür beispielsweise dem Hardyraum $\mathcal{H}^2$ den Zusatz „ungewichtet“ voranstellen. Für weitere Hinweise zu der von uns verwendeten Notation verweisen wir auf das Symbolverzeichnis.
Einige der obigen Resultate haben wir, um eine in sich geschlossene Darstellung zu erhalten, als Spezialfälle oder in einer etwas abgewandelten Notation zitiert.
Des Weiteren haben wir versucht, die Regeln der Rechtschreibreform zu beachten. Dies ist uns sicherlich nicht durchgängig gelungen, erklärt aber die eine oder andere seltsam anmutende Schreibweise.

1 Die Funktionenraumklassen

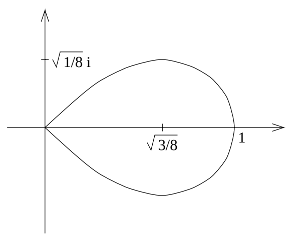
Im ersten Abschnitt dieses Kapitels führen wir die Funktionenraumklasse der (gewichteten) Bergmanräume ein, den Hauptgegenstand unserer Untersuchungen. In den beiden folgenden Abschnitten stellen wir dann noch zwei umfassendere Klassen von Funktionenräumen vor – die der (gewichteten) Hardyräume und die der (gewichteten) Dirichleträume –, da es sich oftmals als nützlich erweisen wird, die Bergmanräume in diesem allgemeineren Rahmen zu betrachten. Dabei werden die meisten unserer Resultate nicht nur für sämtliche (gewichteten) Bergmanräume, sondern darüber hinaus noch für eine Reihe von (gewichteten) Dirichleträumen Gültigkeit besitzen.

1.1 Bergmanräume

Zur Definition der (gewichteten) Bergmanräume müssen wir zunächst klären, was wir unter Gewichten verstehen. Dazu bezeichne A das normalisierte Lebesguemaß auf $\mathbb{D}$.

Definition 1.1 (Gewichte) *Ein positives, endliches, rotationsinvariantes Borelmaß μ auf $\mathbb{D}$ mit T im Träger heißt Gewichtsmaß. Mit ihm sei immer das auf $[0,1)$ durch $\hat{\mu}(M) := \mu(\{z\in\mathbb{D}\colon |z|\in M\})$ für Borelmengen $M\subseteq[0,1)$ definierte Borelmaß $\hat{\mu}$ assoziiert. Gilt $\mu(\mathbb{D})=1$, so nennen wir μ normalisiert.*
Ist G eine stetige Funktion von $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ nach $(0,\infty)$ und durch $d\mu:=GdA$ ein Gewichtsmaß μ definiert, so heißt G stetiges Gewicht. Mit ihm sei stets die in $(-1,1)$ durch $\hat{G}(x) := G(\sqrt{\frac{1+x}{2}})$ definierte Funktion $\hat{G}$ verbunden. Besitzt $\hat{G}$ eine holomorphe Fortsetzung nach $\mathbb{D}$, so nennen wir G ein holomorphes Gewicht.

Maße als Gewichte zuzulassen und die Klassifikation der holomorphen Gewichte sind neu. Allerdings wird unser Satz 1.7 zeigen, dass man sich bei der Betrachtung von (gewichteten) Bergmanräumen o.B.d.A. auf stetige (sogar holomorphe) Gewichte beschränken kann. Es ist klar, dass ein stetiges Gewicht genau dann ein holomorphes ist, wenn es als Funktion in $(0,1)$ eine holomorphe Fortsetzung nach $\sqrt{\frac{1+\mathbb{D}}{2}}$ besitzt. Warum wir den Begriff des holomorphen Gewichts gerade so ausgebildet haben, werden die Sätze 1.22 und 1.29 sowie vor allem Gleichung 4.9 zeigen. Dass $\hat{\mu}$ tatsächlich ein Borelmaß auf $[0,1)$ ist, und zwar ein positives, endliches mit 1 im Träger, prüft man sofort anhand der Definition nach. Wegen der Rotationsinvarianz von μ erhält man die Darstellung



die Menge $\sqrt{\frac{1+\mathbb{D}}{2}}$

$$d\mu(re^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{d\theta}{2\pi}\, d\hat{\mu}(r) \ . \tag{1.2}$$

Umgekehrt definiert diese Gleichung für ein positives, endliches Borelmaß $\hat{\mu}$ auf $[0,1)$ mit 1 im Träger offensichtlich ein Gewichtsmaß μ, und dieses ist genau dann normalisiert, wenn $\hat{\mu}([0,1))=1$.

Satz 1.34 und die Definitionen 1.30 und 2.4 werden zeigen, dass es sinnvoll ist, bei stetigen Gewichten (integrierbare) Singularitäten im Nullpunkt zuzulassen. Um zu entscheiden, ob eine Funktion G ein stetiges Gewicht ist, muss man nicht das durch GdA definierte Maß betrachten:

Satz 1.3 *Eine stetige Funktion G von $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ nach $(0,\infty)$ ist genau dann ein stetiges Gewicht, wenn G rotationsinvariant ist mit $\int_0^1 G(r)rdr < \infty$, und ein stetiges Gewicht G ist genau dann normalisiert, wenn $2\int_0^1 G(r)rdr = 1$.*

Beweis: Erfüllt G die im Satz genannten Bedingungen, so ist durch

$$d\hat{\mu}(r) := 2G(r)rdr \tag{1.4}$$

ein positives, endliches Borelmaß $\hat{\mu}$ auf $[0,1)$ mit 1 im Träger [da G stetig und positiv] definiert. Damit definiert $\frac{d\theta}{2\pi}\, d\hat{\mu}(r) = \frac{1}{\pi}\, d\theta\, G(r)rdr = G(re^{\mathrm{i}\theta})dA(re^{\mathrm{i}\theta})$ nach obiger Bemerkung ein Gewichtsmaß μ.

Umgekehrt ist durch GdA wegen der Stetigkeit von G nur dann ein rotationsinvariantes Maß definiert, wenn G rotationsinvariant ist, und für ein rotationsinvariantes Maß dieser Bauart gilt $\int_{\mathbb{D}} GdA = 2\int_0^1 G(r)rdr$. $\square$

Dieser Satz zeigt, dass unsere Definition stetiger Gewichte mit derjenigen aus [KM, S. 755] übereinstimmt. Allerdings fordern Kriete und MacCluer für alle ihre Resultate, dass G monoton fallend in $(0,1)$ ist [KM, S. 756]. Wir werden im Folgenden trotz Verzichtes auf diese Regularitätsbedingung weitreichendere Ergebnisse erzielen. Dies liegt vor allem an der Verbesserung bei (1.35).
Mit Hilfe obiger Gewichte erklärt man die Klasse der (gewichteten) Bergmanräume durch

Definition 1.5 (Bergmanräume) (vgl. [CM, S. 133]) *Zu einem Gewichtsmaß μ definieren wir*

$$\begin{aligned}
\|f\|_\mu^2 &:= \int_{\mathbb{D}} |f|^2\, d\mu \qquad (f\in \mathrm{H}(\mathbb{D}))\ , \\
\mathcal{A}_\mu^2 &:= \{f\in\mathrm{H}(\mathbb{D})\colon \|f\|_\mu<\infty\} \qquad \textit{und} \\
\langle f,g\rangle_\mu &:= \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, d\mu \qquad (f,g\in\mathcal{A}_\mu^2)\ .
\end{aligned}$$

Der Raum $\mathcal{A}_\mu^2$ heißt (gewichteter) Bergmanraum zu μ. Ist μ normalisiert, so nennen wir auch $\mathcal{A}_\mu^2$ normalisiert. Gilt $\mu=GdA$ mit einem stetigen Gewicht G, so schreiben wir entsprechend $\|\cdot\|_G$, $\mathcal{A}_G^2$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$.

Die Endlichkeit von μ garantiert, dass konstante Funktionen sowie allgemeiner Polynome und $\mathcal{H}^\infty$-Funktionen in $\mathcal{A}_\mu^2$ liegen, und die Rotationsinvarianz von μ führt dazu, dass die Kompositionsoperatoren C_φ zu $\varphi(z)=\eta z$ mit $\eta\in\mathrm{T}$ Isometrien auf allen Bergmanräumen sind. Diese wünschenswerten Eigenschaften motivieren zu einem gewissen Grad die Einschränkungen an Gewichtsmaße. Eine noch bessere Motivation stellt die Tatsache dar, dass diese Einschränkungen notwendig dafür sind, dass Bergmanräume (gewichtete) Hardyräume sind (s. den Beweis von Satz 1.14).
Mit der angegebenen Norm und dem gegebenen Skalarprodukt ist $\mathcal{A}_\mu^2$ als Unterraum von $L^2(\mathbb{D},\mu)$ ein Innenproduktraum. Satz 1.14 wird zeigen, dass $\mathcal{A}_\mu^2$ ein abgeschlossener Unterraum ist und sogar ein Hilbertscher Funktionenraum. Weiterhin ist ein Bergmanraum $\mathcal{A}_\mu^2$ genau dann normalisiert, wenn $\|1\|_\mu=1$.

Eingehend untersucht (s. z.B. [S1, Kap. 6] u. [CM, Kap. 3]) sind die Bergmanräume zu den Standardgewichten. Diese sind definiert durch

$$G_\alpha(z) := (\alpha{+}1)(1{-}|z|^2)^\alpha \qquad (\alpha{>}{-1}) \ . \tag{1.6}$$

Die Bergmanräume $\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ nennen wir Standardbergmanräume. Der bekannteste Bergmanraum, der ungewichtete Bergmanraum $\mathcal{A}^2{=}\mathcal{A}^2_A$, ist der Fall $\alpha{=}0$.

Wesentlich erleichtert wird die Untersuchung der Bergmanräume dadurch, dass man sich auf solche zu holomorphen Gewichten beschränken kann. Dies liegt daran, dass bei $\int_{\mathbb{D}} |f|^2\, d\mu$ der Integrand so glatt ist, dass man das Maß μ entsprechend glätten kann:

Satz 1.7 *Zu jedem Gewichtsmaß μ und jedem $\gamma{>}1$ gibt es ein holomorphes Gewicht G mit $\mathcal{A}^2_\mu{=}\mathcal{A}^2_G$ und* $\|\cdot\|_\mu \le \|\cdot\|_G \le \gamma\|\cdot\|_\mu$.

Beweis: Der Beweis gliedert sich in drei Schritte: Als Erstes eliminieren wir die Punktmassen des mit μ assoziierten Maßes $\hat\mu$, finden dann ein stetiges Gewicht und schließlich ein holomorphes mit den geforderten Eigenschaften.
Seien also r_n die Stellen, an denen $\hat\mu$ Punktmasse hat, und $b_n{=}\hat\mu(\{r_n\})$ [wegen der Endlichkeit von $\hat\mu$ ist die Menge der Punktmassestellen höchstens abzählbar]. Zu jedem r_n seien s_n und t_n zunächst noch beliebig gewählt mit $r_n < s_n < t_n < 1$. Nun definieren wir $\hat\nu$ durch

$$\hat\nu := \hat\mu + \sum_n b_n(\hat\nu_n{-}\delta_{r_n}) \ ,$$

wobei die $\hat\nu_n$ punktmassefreie Wahrscheinlichkeitsmaße mit Träger $[r_n, s_n]$ seien. Dann definiert $\hat\nu$ gemäß (1.2) wiederum ein Gewichtsmaß ν. Nach [Ru, Th. 17.3] ist $|f|^2$ subharmonisch in $\mathbb{D}$ für $f{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D})$. Daraus folgt nach [Du, Th. 1.6.], dass

$$m_f(r) := \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, \frac{d\theta}{2\pi} \tag{1.8}$$

monoton wächst in r und konvex in $\log r$ ist. Aus der Monotonie erhält man

$$\|f\|^2_\mu \overset{(1.2)}{=} \int_{[0,1)} m_f(r)\, d\hat\mu(r)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,1)} m_f(r)\,d\hat{\nu}(r) + \sum_n b_n \left(m_f(r_n) - \int_{[r_n,s_n]} m_f(r)\,d\hat{\nu}_n(r) \right) \\
&\leq \|f\|_\nu^2 + 0 \;.
\end{aligned}
$$

Monotonie und Konvexität zusammen liefern

$$
\begin{aligned}
\|f\|_\nu^2 &= \int_{[0,1)} m_f(r)\,d\hat{\nu}(r) \\
&\leq \int_{[0,1)} m_f(r)\,d\hat{\mu}(r) + \sum_n b_n(m_f(s_n) - m_f(r_n)) \\
&\leq \int_{[0,1)} m_f(r)\,d\hat{\mu}(r) + \sum_n b_n \Bigg(\frac{\log t_n - \log s_n}{\log t_n - \log r_n} m_f(r_n) + \\
&\qquad\qquad \frac{\log s_n - \log r_n}{\log t_n - \log r_n} m_f(t_n) - m_f(r_n) \Bigg) \\
&\leq \int_{[0,1)} m_f(r)\,d\hat{\mu}(r) + \sum_n \Bigg[b_n \frac{\log s_n - \log r_n}{\log t_n - \log r_n} \cdot \\
&\qquad\qquad \left(-m_f(r_n) + \frac{1}{\hat{\mu}([t_n,1))} \int_{[t_n,1)} m_f(r)\,d\hat{\mu}(r) \right) \Bigg] \\
&\leq \int_{[0,1)} m_f(r)\,d\hat{\mu}(r) \\
&\quad + \sum_n \frac{b_n}{\hat{\mu}([t_n,1))} \cdot \frac{\log s_n - \log r_n}{\log t_n - \log r_n} \int_{[0,1)} m_f(r)\,d\hat{\mu}(r) \\
&= \left(1 + \sum_n \frac{b_n}{\hat{\mu}([t_n,1))} \cdot \frac{\log s_n - \log r_n}{\log t_n - \log r_n} \right) \|f\|_\mu^2
\end{aligned}
$$

Da 1 im Träger von $\hat{\mu}$ ist, ist $\hat{\mu}([t_n,1)){>}0$, und zu festen t_n kann man die s_n so wählen, daß die Summe beliebig klein wird. Somit gibt es zu jedem $\gamma{>}1$ ein punktmassefreies Gewichtsmaß ν mit $\|\cdot\|_\mu \leq \|\cdot\|_\nu \leq \gamma\|\cdot\|_\mu$.
Sei nun $q{<}1$ beliebig, aber fest. Da $\hat{\nu}$ punktmassefrei ist, findet man $r_n{\in}[0,1)$ mit $\hat{\nu}([r_n,1)) = q^n\hat{\nu}([0,1))$ $(n{\in}\mathbb{N}_0)$. Die Folge (r_n) ist streng monoton wachsend, und weil 1 im Träger von $\hat{\nu}$ ist, gilt $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Wählt man nun eine in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ stetige, rotationsinvariante und positive Funktion G mit

$2\int_0^{r_1} G(r)rdr = \frac{1}{q^2}\hat{\nu}([r_1,r_2))$ und

$$2\int_{r_n}^{r_{n+1}} G(r)rdr = \hat{\nu}([r_{n-1},r_n)) = (1-q)\hat{\nu}([0,1))q^{n-1} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

[definiere G sukzessiv in $(0,r_1]$, $(r_1,r_2]$, $(r_2,r_3]$, ... und setze dann $G(z){:=}G(|z|)$], so ist dieses G ein stetiges Gewicht nach Satz 1.3 wegen $\int_{r_1}^1 G(r)rdr = \frac{1}{2}\hat{\nu}((0,1]) < \infty$. Weiterhin gilt wegen der Monotonie der m_f, dass

$$\begin{aligned}
\|f\|_\nu^2 &= \int_{[0,1)} m_f(r)\,d\hat{\nu}(r) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty}\hat{\nu}([r_{n-1},r_n))m_f(r_n)\\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} m_f(r_n)\int_{r_n}^{r_{n+1}} G(r)rdr \;\le\; 2\int_{r_1}^1 m_f(r)\,G(r)rdr\\
&\overset{(1.2,1.4)}{\le} \|f\|_G^2\\
&\le 2m_f(r_1)\int_0^{r_1} G(r)rdr + 2\sum_{n=1}^{\infty} m_f(r_{n+1})\int_{r_n}^{r_{n+1}} G(r)rdr\\
&= \frac{1}{q^2}\hat{\nu}([r_1,r_2))m_f(r_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{\nu}([r_{n-1},r_n))m_f(r_{n+1})\\
&= \frac{1}{q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\nu}([r_{n+1},r_{n+2}))m_f(r_{n+1}) \;\le\; \frac{1}{q^2}\int_{[r_1,1)} m_f(r)\,d\hat{\nu}(r)\\
&\le \frac{1}{q^2}\|f\|_\nu^2\ ,
\end{aligned}$$

d. h. $\|\cdot\|_\nu \le \|\cdot\|_G \le \frac{1}{q}\|\cdot\|_\nu$. Da $q{<}1$ beliebig war, haben wir damit bisher gezeigt, dass es zu jedem $\gamma{>}1$ ein stetiges Gewicht G gibt mit $\|\cdot\|_\mu \le \|\cdot\|_G \le \gamma\|\cdot\|_\mu$.

Nun wählen wir eine Abbildung ψ, welche die Menge $M{:=}\{z{\in}\mathbb{C}\colon |\mathrm{Im} z|{<}\frac{\pi}{2}\}$ schlicht auf $\mathbb{D}$ und $\mathbb{R}$ auf $(-1,1)$ abbildet (z. B. $\psi(z) := \frac{e^{z+i\pi/2}-i}{e^{z+i\pi/2}+i}$) und definieren $g{:=}\hat{G}{\circ}\psi$ in $\mathbb{R}$ (für die Definition von $\hat{G}$ siehe 1.1). Nach dem Satz von Carleman (s. [Ga, S. 135][1]) gibt es, da g in $\mathbb{R}$ positiv ist, zu jedem $\varepsilon{>}0$

[1] Der dortige Beweis enthält einen Fehler; man muss zu seinem Beginn max durch min ersetzen.

eine ganze Funktion $\tilde{g}$ mit

$$|\,(1{+}\varepsilon)g(x) - \tilde{g}(x)\,| < \varepsilon g(x)$$

für $x{\in}\mathbb{R}$. Indem man den Beweis dieses Satzes betrachtet oder nachträglich zu der Funktion $z \longmapsto \frac{1}{2}\big(\tilde{g}(z){+}\overline{\tilde{g}(\overline{z})}\big)$ übergeht, kann man annehmen, daß $\tilde{g}$ reell in $\mathbb{R}$ ist. Definiert man $\hat{\tilde{G}} := \tilde{g}\circ\psi^{-1}$ in $\mathbb{D}$ und $\tilde{G}(z) := \hat{\tilde{G}}(2|z|^2{-}1)$ für $z{\in}\mathbb{D}\backslash\{0\}$, so gilt $G \le \tilde{G} \le (1{+}2\varepsilon)G$, d. h. $\tilde{G}$ ist ein holomorphes Gewicht mit $\|\cdot\|_G \le \|\cdot\|_{\tilde{G}} \le \sqrt{1{+}2\varepsilon}\|\cdot\|_G$.
Zusammenfassend gibt es also zu jedem $\gamma{>}1$ ein holomorphes Gewicht mit den geforderten Eigenschaften. □

1.2 Hardyräume

Die innere Struktur der Bergmanräume wird am deutlichsten, wenn man sie als Teilklasse der (gewichteten) Hardyräume auffaßt. Wir beginnen diesen Abschnitt, indem wir diese umfassende Funktionenraumklasse einführen:

Definition 1.9 (Hardyräume) (s. [Sd, Kapitel 6]) *Eine Folge $\wp{=}(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiver Zahlen, für die die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n}w^n$ Konvergenzradius größergleich 1 hat, heißt Gewichtsfolge. Zu ihr definieren wir*

$$\begin{aligned}
\|f\|_\wp^2 &:= \sum_{n=0}^{\infty} p_n|a_n|^2 \qquad (f{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D}),\ f(z){=}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)\ , \\
\mathcal{H}_\wp^2 &:= \{f{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D}){:}\ \|f\|_\wp{<}\infty\} \qquad \textit{und} \\
\langle f,g\rangle_\wp &:= \sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n\overline{b_n} \qquad (f,g{\in}\mathcal{H}_\wp^2,\ g(z){=}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)\ .
\end{aligned}$$

Der Raum $\mathcal{H}_\wp^2$ heißt (gewichteter) Hardyraum zu $\wp$; im Fall $p_0{=}1$ heißen er und $\wp$ normalisiert.

Auch Hardyräume sind genau dann normalisiert, wenn $\|1\|_\wp{=}1$, und die C_φ zu $\varphi(z){=}\eta z$ mit $\eta{\in}\mathrm{T}$ sind auf allen Hardyräumen Isometrien, genauso wie bei Bergmanräumen. Des Weiteren stimmen offensichtlich zwei Normen $\|\cdot\|_\wp$ und $\|\cdot\|_{\tilde{\wp}}$ genau dann überein, wenn $\wp{=}\tilde{\wp}$, und die Monome $z \longmapsto z^n$ $(n{\in}\mathbb{N}_0)$

bilden ein vollständiges Orthogonalsystem eines jeden Hardyraums. Weiterhin werden wir gleich sehen, dass sämtliche Hardyräume Hilberträume sind, so dass die Monome sogar eine Orthogonalbasis sind. Tatsächlich ist zu unserer Definition äquivalent, dass Hardyräume Hilberträume mit Vektoren aus $\mathrm{H}(\mathbb{D})$ sind, in denen die Monome eine Orthogonalbasis bilden (s. [CM, S. 14ff.]).
Der bekannteste Hardyraum ist der ungewichtete Hardyraum $\mathcal{H}^2{=}\mathcal{H}^2_{(1)}$. Auch dieser ist eingehend untersucht (s. z.B. [S2]).
Hardyräume allgemein sind nicht nur wie eben erwähnt Hilberträume, sondern es gilt darüber hinaus

Satz 1.10 (vgl. [CM, S. 16f.]) *Jeder Hardyraum $\mathcal{H}^2_\wp$ ist ein Hilbertscher Funktionenraum.*

Beweis: Ist ν das Maß auf $\mathbb{N}_0$ mit $\nu(n){=}p_n$ $[\wp{=}(p_n)]$, so gilt nach der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung für eine feste Folge (a_n) aus $L^2(\mathbb{N}_0,\nu)$ und $r{\in}[0,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n \leq \sqrt{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n|a_n|^2}\sqrt{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n}r^{2n}} < \infty \ .$$

Die Funktion $z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist also aus $\mathrm{H}(\mathbb{D})$. Damit ist $(a_n) \longmapsto (z{\mapsto}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)$ ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\mathbb{N}_0,\nu)$ auf $\mathcal{H}^2_\wp$, d. h. $\mathcal{H}^2_\wp$ ist ein Hilbertraum. Definiert man zu $b{\in}\mathbb{D}$

$$k_b(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{b}^n}{p_n}z^n \ , \tag{1.11}$$

so gilt, da $\wp$ eine Gewichtsfolge ist,

$$\|k_b\|^2_\wp = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\frac{|b|^{2n}}{p_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n}|b|^{2n} < \infty \ , \tag{1.12}$$

also $k_b{\in}\mathcal{H}^2_\wp$. Ferner berechnet man für $f{\in}\mathcal{H}^2_\wp,\ f(z){=}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

$$\langle f, k_b\rangle_\wp = \sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n\frac{b^n}{p_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n = f(b) \ ,$$

so dass $\mathcal{H}^2_\wp$ in den k_b reproduzierende Kerne besitzt. □

Für spätere Zwecke bemerken wir noch, dass auch die durch

$$\hat{k}_b(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\overline{b}^{n-1}}{p_n} z^n \tag{1.13}$$

definierten Funktionen wegen

$$\|\hat{k}_b\|_{\wp}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{n^2|b|^{2(n-1)}}{p_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2|b|^{2(n-1)}}{p_n} < \infty$$

(beachte, dass mit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} w^n$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{p_n} w^{n-1}$ Konvergenzradius größergleich 1 hat) aus $\mathcal{H}_{\wp}^2$ sind, wobei

$$\langle f, \hat{k}_b \rangle_{\wp} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n a_n \frac{n b^{n-1}}{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n b^{n-1} = f'(b) \ .$$

Der vorangegangene Satz motiviert die Definition der Gewichtsfolgen, da aus ihr zum einen die Existenz reproduzierender Kerne folgt und zum anderen, dass $\mathcal{H}_{\wp}^2$ vollständig ist. Die definierende Bedingung an Gewichtsfolgen ist sogar charakteristisch für jede einzelne der beiden Folgerungen. Besitzt nämlich der zu einer beliebigen positiven Folge $\hat{\wp}=(p_n)$ analog zu Definition 1.9 gebildete Raum $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{\wp}}^2$ für alle $b\in\mathbb{D}$ reproduzierende Kerne k_b, $k_b(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, so folgt $b^n = \langle \mathrm{id}^n, k_b \rangle_{\hat{\wp}} = p_n \overline{c_n}$ ($n\in\mathbb{N}_0$, beachte $\mathrm{id}^n \in \hat{\mathcal{H}}_{\hat{\wp}}^2$), also $k_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{b}^n}{p_n} z^n$, woraus wegen $k_b\in\hat{\mathcal{H}}_{\hat{\wp}}^2\subseteq \mathrm{H}(\mathbb{D})$ folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} w^n$ Konvergenzradius größergleich 1 besitzt. Gilt unabhängig von der Existenz reproduzierender Kerne, dass $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{\wp}}^2$ vollständig ist, so liegt für jede Folge (a_n) mit $\sum_{n=0}^{\infty} p_n |a_n|^2 < \infty$ die durch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definierte Funktion als Grenzwert der Cauchyfolge $(z\mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n)_N$ in $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{\wp}}^2$, d. h. die Potenzreihe hat Konvergenzradius größergleich 1. Betrachtet man speziell $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{p_n}}$, so sieht man, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)\sqrt{p_n}}} \leq 1$. Daraus wiederum folgt, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{p_n}} \leq 1$, d. h., dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} w^n$ Konvergenzradius größergleich 1 besitzt.

Dass Bergmanräume Hilbertsche Funktionenräume sind, folgt nun aus dem eben bewiesenen Satz und

Satz 1.14 (vgl. [CM, S. 197]) *Jeder Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$ ist ein Hardyraum, genauer: Mit*

$$p_n := \int_{[0,1)} r^{2n}\, d\hat{\mu}(r) \tag{1.15}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt* $(\mathcal{A}^2_\mu, \|\cdot\|_\mu) = (\mathcal{H}^2_{(p_n)}, \|\cdot\|_{(p_n)})$ *, wobei* $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ *und* $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{p_n} = \infty$.

Beweis: Für $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, gilt für die in (1.8) für $r \in [0,1)$ eingeführte Größe $m_f(r)$:

$$\begin{aligned} m_f(r) &= \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \left(\lim_{N\to\infty} \left| \textstyle\sum_{n=0}^N a_n r^n e^{in\theta} \right|^2 \right) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{n,m=0}^N a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} , \end{aligned} \tag{1.16}$$

wobei die Vertauschung von Grenzwert und Integral wegen $\sum_{n=0}^\infty |a_n| r^n < \infty$ erlaubt ist. Für die Norm von f ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \|f\|^2_\mu &\overset{(1.2)}{=} \int_{[0,1)} m_f(r)\, d\hat{\mu}(r) = \int_{[0,1)} \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \right) d\hat{\mu}(r) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N \left(|a_n|^2 \int_{[0,1)} r^{2n}\, d\hat{\mu}(r) \right) = \sum_{n=0}^\infty p_n |a_n|^2 , \end{aligned}$$

wobei die Vertauschung von Grenzwert und Integral diesmal durch den Satz von der monotonen Konvergenz gerechtfertigt ist.
Nun müssen wir noch zeigen, dass (p_n) eine Gewichtsfolge ist, d. h. dass die Potenzreihe $\sum \frac{1}{p_n} w^n$ Konvergenzradius größergleich 1 besitzt. Sei dazu $r \in [0,1)$ beliebig, aber fest und weiterhin $s \in (\sqrt{r}, 1)$. Es ergibt sich $p_n \geq s^{2n} \int_{[s,1)} d\hat{\mu}(t) = cs^{2n}$ mit $c := \int_{[s,1)} d\hat{\mu}(t)$ unabhängig von n und positiv, da 1 im Träger von $\hat{\mu}$ ist. Daraus folgt $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{p_n} r^n \leq \frac{1}{c} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{r}{s^2}\right)^n < \infty$, so dass der Konvergenzradius von $\sum \frac{1}{p_n} w^n$ tatsächlich größergleich r und damit größergleich 1 ist.

Die Zusatzaussage über die Konvergenz der p_n folgt direkt aus deren Definition mittels des Satzes von der dominierten Konvergenz, und daraus folgt sofort die Divergenz der Reihe über $\frac{1}{p_n}$. □

Wir bemerken, dass ein Bergmanraum wegen $p_0 = \hat{\mu}([0,1)) = \mu(\mathbb{D})$ genau dann im Bergmanraum-Sinn normalisiert ist, wenn er im Hardyraum-Sinn normalisiert ist. Für stetige Gewichte berechnet man wegen (1.4)

$$p_n = 2\int_0^1 r^{2n+1} G(r)\,dr \ . \tag{1.17}$$

Speziell für die in (1.6) definierten Standardgewichte G_α $(\alpha{>}{-1})$ erhält man aus

$$\int_0^1 r^{2n+1} G_\alpha(r)\,dr = -\left[\tfrac{1}{2} r^{2n}(1-r^2)^{\alpha+1}\right]_{r=0}^1 + \int_0^1 n r^{2n-1}(1-r^2)^{\alpha+1}\,dr$$

$(n{\in}\mathbb{N}_0)$ nach kurzer Rechnung mittels vollständiger Induktion nach n

$$p_{\alpha,n} = (-1)^n \binom{-(\alpha+2)}{n}^{-1} \ . \tag{1.18}$$

Dies zeigt zum einen, dass die Standardgewichte normalisiert sind, zum anderen erkennt man den ungewichteten Hardyraum $\mathcal{H}^2$ als Grenzfall $\alpha{=}{-1}$. Damit übertragen sich viele – jedoch nicht alle – Eigenschaften der Standardbergmanräume auf $\mathcal{H}^2$ (s. Abschnitt 2.3 für eine detailiertere Diskussion). Für die reproduzierenden Kerne der Standardbergmanräume und von $\mathcal{H}^2$ berechnet man

$$k_{\alpha,b}(z) \overset{(1.11)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-(\alpha+2)}{n} (-\bar{b}z)^n = (1-\bar{b}z)^{-(\alpha+2)} \tag{1.19}$$

und damit für deren Norm

$$\|k_{\alpha,b}\|^2_{(p_{\alpha,n})} = \langle k_{\alpha,b}, k_{\alpha,b}\rangle_{(p_{\alpha,n})} = k_{\alpha,b}(b) = (1-|b|^2)^{-(\alpha+2)} \ .$$

Ist allgemein $\mathcal{H}^2_\wp$ ein Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$, so kann man nicht nur – wie im letzten Satz gezeigt – aus dem Gewichtsmaß μ die Folge $\wp$ bestimmen, sondern auch umgekehrt aus der Folge $\wp$ das Maß μ rekonstruieren:

Satz 1.20 *Sind zu einem Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$ die p_n gemäß* (1.15) *gebildet, so gilt für* $r\in(0,1)$

$$\hat{\mu}([0,r]) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n} \binom{m_n}{k} (-1)^k p_{nk}$$

mit $\quad m_n := \left[\frac{1}{nr^{2n}}\right]$.

Man beachte, dass $\hat{\mu}$ und damit auch μ durch die Werte von $\hat{\mu}([0,r])$ eindeutig festgelegt ist.

Beweis: Zu festem $r\in(0,1)$ betrachten wir in Anlehnung an [Ku] die durch

$$Q_n(t) := \left(1 - t^{2n}\right)^{m_n}$$

definierten Polynome. Da diese in $[0,1]$ monoton fallend sind mit Werten in $[0,1]$, gilt unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m_n} \binom{m_n}{k} (-1)^k p_{nk} \quad &\overset{(1.15)}{=} \quad \int_{[0,1)} \sum_{k=0}^{m_n} \binom{m_n}{k} (-1)^k t^{2nk}\, d\hat{\mu}(t) \\
&= \quad \int_{[0,1)} Q_n(t)\, d\hat{\mu}(t) \\
&\geq \quad Q_n(r)\hat{\mu}([0,r]) \;=\; \left(1 - r^{2n}\right)^{m_n} \hat{\mu}([0,r]) \\
&\geq \quad (1-m_n r^{2n})\hat{\mu}([0,r]) \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \hat{\mu}([0,r])
\end{aligned}$$

und für n mit $\sqrt[n]{n}r<1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m_n} \binom{m_n}{k} (-1)^k p_{nk} \quad &= \quad \int_{[0,1)} Q_n(t)\, d\hat{\mu}(t) \\
&\leq \quad \hat{\mu}([0,\sqrt[n]{n}r)) + Q_n(\sqrt[n]{n}r)\hat{\mu}([0,1)) \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \hat{\mu}([0,r]) + 0
\end{aligned}$$

(beachte $\frac{1}{Q_n(\sqrt[n]{n}r)} = (1+\frac{n^2r^{2n}}{1-n^2r^{2n}})^{m_n} \geq 1 + \frac{m_n n^2 r^{2n}}{1-n^2r^{2n}} \longrightarrow \infty$), womit die Behauptung bewiesen ist. □

Dieser neue Satz liefert interessante Aufschlüsse über die Darstellung von Bergmanräumen als Hardyräume. Denn beschränkt man sich bei dem Grenzübergang auf $n\in N\mathbb{N}$ mit festem $N\in\mathbb{N}$, so zeigt der Satz, dass μ und damit

auch die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bereits durch $(p_n)_{n\in N\mathbb{N}_0}$ bestimmt ist. Dies bedeutet, dass in dem Fall, dass $\mathcal{H}^2_\wp$ ein Bergmanraum ist, innerhalb der Folge $\wp$ sehr viele Abhängigkeiten bestehen, so dass es uns hoffnungslos erscheint, diejenigen Folgen sinnvoll zu charakterisieren, für die $\mathcal{H}^2_\wp$ ein Bergmanraum ist.
Außerdem folgt aus dem vorangegangenen Satz das intuitiv naheliegende

Korollar 1.21 *Für zwei Gewichtsmaße μ und $\tilde{\mu}$ sind* $\|\cdot\|_\mu = \|\cdot\|_{\tilde{\mu}}$ *und* $\mu{=}\tilde{\mu}$ *äquivalent.*

Beweis: Bildet man zu μ und $\tilde{\mu}$ die Folgen (p_n) bzw. $(\tilde{p}_n)$ gemäß (1.15), so gilt:

$$\mu = \tilde{\mu} \overset{(1.20)}{\iff} (p_n) = (\tilde{p}_n) \iff \|\cdot\|_{(p_n)} = \|\cdot\|_{(\tilde{p}_n)} \overset{(1.14)}{\iff} \|\cdot\|_\mu = \|\cdot\|_{\tilde{\mu}} \quad \square$$

Ist ein Bergmanraum $\mathcal{A}^2_G$ zu einem hinreichend glatten Gewicht gebildet, so gibt es eine weitere – ebenfalls noch nicht in der Literatur betrachtete – Möglichkeit, aus der Hardyraum-Darstellung dieses Bergmanraums das Gewicht G zu rekonstruieren. Dabei sei an den Zusammenhang zwischen G und $\hat{G}$ gemäß Definition 1.1 erinnert.

Satz 1.22 *Es sei $\mathcal{A}^2_G$ ein Bergmanraum für den $\hat{G}$ in* $(-1,1)$ *punktweise in Legendrepolynome entwickelbar ist, und dazu die p_n gemäß* (1.17) *gebildet. Dann gilt für $z{\in}\mathbb{D}\setminus\{0\}$*

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(2|z|^2{-}1)$$

mit

$$c_n = (2n{+}1)\sum_{l=0}^{n}\left((-1)^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n{+}l}{n}p_l\right) ,$$

wobei mit P_n die Legendrepolynome bezeichnet sind.

Die Bedingung an $\hat{G}$ ist beispielsweise für stetig differenzierbare Gewichte G erfüllt (s. [Sa, S. 235]), also insbesondere für holomorphe Gewichte. In diesem Zusammenhang sei an Satz 1.7 erinnert, der gezeigt hat, dass man zu jedem Gewichtsmaß μ ein holomorphes Gewicht G findet, so dass $\|\cdot\|_\mu$ und $\|\cdot\|_G$ äquivalent sind.

Beweis: Für die Legendrepolynome gilt folgende Entwicklung in die Potenzen von $\frac{1+x}{2}$:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &\overset{\text{[Sa, S. 174]}}{=} \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}((x+1)^n)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}((x-1)^n)\right) \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x-1)^k\right) \\
&= 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}^2(x+1)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(x+1)^{k-j}(-2)^j\right) \\
&= 2^{-n}\sum_{j=0}^{n}\left((x+1)^{n-j}(-2)^j\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{k}{j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-j}(-1)^j\binom{n}{j}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-j}{n-k}\right) \\
&\overset{\text{[Wa, S. 41]}}{=} \sum_{j=0}^{n}\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-j}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{2n-j}{n}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{n}\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^{l}(-1)^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n+l}{n}\right)
\end{aligned}$$

Für $x\in(-1,1)$ ist nach Voraussetzung $\hat{G}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$ mit

$$\begin{aligned}
c_n &\overset{\text{[Sa, S. 220]}}{=} \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\hat{G}(x)P_n(x)\,dx \\
&= \frac{2n+1}{2}\sum_{l=0}^{n}\left((-1)^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n+l}{n}\int_{-1}^{1}\hat{G}(x)\left(\frac{x+1}{2}\right)^l dx\right) \\
&\overset{r^2=\frac{x+1}{2}}{=} \frac{2n+1}{2}\sum_{l=0}^{n}\left((-1)^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n+l}{n}\cdot 4\int_{0}^{1}r^{2l+1}G(r)\,dr\right)
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(1.17)}{=} \qquad (2n+1)\sum_{l=0}^{n}\left((-1)^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n+l}{n}p_l\right) \ .$$

Übertragen auf G bedeutet dies $G(r) = \hat{G}(2r^2-1) = \sum_{l=0}^{n} c_n P_n(2r^2-1)$. □

1.3 Dirichleträume

Bei der Untersuchung der Kompositionsoperatoren auf Bergmanräumen wird sich eine weitere Möglichkeit, die Bergmanraum-Norm einer holomorphen Funktion darzustellen, als nützlich erweisen (s. Gleichung 3.3). Dazu definieren wir zunächst allgemein

Definition 1.23 (Dirichleträume) (vgl. [CM, S. 133]) *Zu einem Gewichtsmaß ν und einer Zahl $q>0$ definieren wir*

$$\begin{aligned} \|f\|_{q,\nu}^2 &:= q|f(0)|^2 + \|f'\|_\nu^2 \qquad (f\in\mathrm{H}(\mathbb{D}))\ , \\ \mathcal{D}_{q,\nu}^2 &:= \{f\in\mathrm{H}(\mathbb{D})\colon \|f\|_{q,\nu}<\infty\} \qquad \textit{und} \\ \langle f,g\rangle_{q,\nu} &:= qf(0)\overline{g(0)} + \langle f',g'\rangle_\nu \qquad (f,g\in\mathcal{D}_{q,\nu}^2)\ . \end{aligned}$$

Der Raum $\mathcal{D}_{q,\nu}^2$ heißt (gewichteter) Dirichletraum zu q und ν. Ist $q=1$, so nennen wir $\mathcal{D}_{q,\nu}^2$ normalisiert, und gilt $\nu=GdA$ mit einem stetigen Gewicht G, so schreiben wir entsprechend $\mathcal{D}_{q,G}^2$ u.s.w.

In der Literatur werden oftmals nur normalisierte Dirichleträume betrachtet, was keine Einschränkung darstellt, da $\|\cdot\|_{q,\nu}$ und $\|\cdot\|_{1,\nu}$ stets äquivalent sind. Der Vorteil unserer allgemeineren Definition liegt in der Gültigkeit von Satz 1.31 sowie darin, dass man am Index des Normsymbols erkennen kann, ob die Norm zu einem Bergman-, Hardy- oder Dirichletraum gehört. Die Dirichleträume $\mathcal{D}_{1,G_\alpha}^2$ zu den in (1.6) definierten Standardgewichten nennen wir Standarddirichleträume; der Dirichletraum $\mathcal{D}_{1,A}^2$ wird in der Literatur häufig als (ungewichteter) Dirichletraum bezeichnet.
Genauso wie im letzten Abschnitt beweist man die folgenden Aussagen, die wir daher ohne Beweis angeben:

Satz 1.24 *Jeder Dirichletraum $\mathcal{D}^2_{q,\nu}$ ist ein Hardyraum, genauer: Mit $q_0{:=}q$ und*

$$q_n := n^2 \int_{[0,1)} r^{2(n-1)}\, d\hat{\nu}(r) \tag{1.25}$$

für $n{\in}\mathbb{N}$ gilt $(\mathcal{D}^2_{q,\nu}, \|\cdot\|_{q,\nu}) = (\mathcal{H}^2_{(q_n)}, \|\cdot\|_{(q_n)})$. *Ist $d\nu{=}GdA$ mit einem stetigen Gewicht G, so hat man für $n{\in}\mathbb{N}$*

$$q_n = 2n^2 \int_0^1 r^{2n-1} G(r)\, dr \ . \tag{1.26}$$

Insbesondere sind also auch Dirichleträume Hilbertsche Funktionenräume.

Satz 1.27 *Sind zu einem Dirichletraum $\mathcal{D}^2_{q,\nu}$ die q_n gemäß* (1.25) *gebildet, so gilt $q{=}q_0$ sowie für $r{\in}(0,1)$*

$$\hat{\nu}([0,r]) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n} \binom{m_n}{k} (-1)^k \frac{q_{nk+1}}{(nk{+}1)^2}$$

mit $m_n := \left[\frac{1}{nr^{2n}}\right]$.

Korollar 1.28 *Für zwei positive Zahlen q und $\tilde{q}$ sowie zwei Gewichtsmaße ν und $\tilde{\nu}$ gilt* $\|\cdot\|_{q,\nu} = \|\cdot\|_{\tilde{q},\tilde{\nu}}$ *genau dann, wenn $q{=}\tilde{q}$ und $\nu{=}\tilde{\nu}$.*

Satz 1.29 *Es sei $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum, für den $\hat{G}$ in* $(-1,1)$ *punktweise in Legendrepolynome entwickelbar ist, und dazu die q_n gemäß* (1.25) *gebildet. Dann gilt $q{=}q_0$ sowie für $z{\in}\mathbb{D}\backslash\{0\}$*

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(2|z|^2{-}1)$$

mit

$$c_n = (2n{+}1) \sum_{l=0}^{n} \left((-1)^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n{+}l}{n} \frac{q_{l+1}}{(l{+}1)^2} \right) \ .$$

Ein spezieller Dirichletraum ist der ungewichtete Hardyraum $\mathcal{H}^2{=}\mathcal{H}^2_{(1)}$. Dies folgt aus der Littlewood-Paley-Identität (s. [CM, S. 34]), die

$$\|f\|^2_{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = |a_0|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log\tfrac{1}{|z|}\, dA(z) = \|f\|^2_{1,H_{-1}}$$

für $f\in\mathrm{H}(\mathbb{D})$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, besagt, so dass $(\mathcal{H}^2_{(1)}, \|\cdot\|_{(1)}) = (\mathcal{D}^2_{1,H_{-1}}, \|\cdot\|_{1,H_{-1}})$ mittels

$$H_{-1}(z) := 2\log\tfrac{1}{|z|} \qquad (z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}) \; . \tag{1.30}$$

Der nächste Satz stellt die noch fehlende Beziehung zwischen den drei eingeführten Funktionenraumklassen her. Er zeigt nicht nur, dass es zu jedem Bergmanraum einen Dirichletraum mit äquivalenter Norm gibt, was bereits bekannt war (s. [CM, S. 133] o. [KM, S. 762]), sondern dass jeder Bergmanraum in der Tat ein Dirichletraum ist.

Satz 1.31 *Jeder Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$ ist ein Dirichletraum, genauer: Mit* $p := \int_{[0,1)} d\hat{\mu}$ *und*

$$H(z) := 2\int_{[0,1)} \max\{0, \log\tfrac{1}{|z|} - \log\tfrac{1}{t}\}\, d\hat{\mu}(t) \tag{1.32}$$

für $z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$ gilt $(\mathcal{A}^2_\mu, \|\cdot\|_\mu) = (\mathcal{D}^2_{p,H}, \|\cdot\|_{p,H})$.

Beweis: Die Funktion H ist stetig wegen der Endlichkeit von $\hat{\mu}$ und der gleichgradigen Stetigkeit des Integranden bezüglich der Variablen $z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$ und dem Parameter $t\in[0,1)$, positiv wegen

$$H(|z|) > 2\left(\log\tfrac{1}{|z|} - \log\tfrac{2}{1+|z|}\right)\int_{[\frac{1+|z|}{2},1)} d\hat{\mu} > 0$$

sowie rotationsinvariant. Da wegen $H(z) \le 2\log\frac{1}{|z|}\int_{[0,1)} d\hat{\mu} = 2p\log\frac{1}{|z|}$ auch die Integralbedingung von Satz 1.3 erfüllt ist, ist H somit ein stetiges Gewicht, d. h. $\mathcal{D}^2_{p,H}$ ist ein Dirichletraum, und es gilt mit den Bezeichnungen von (1.17) und (1.26) für $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} q_n &= 2n^2\int_0^1 r^{2n-1} H(r)\, dr \\ &= 4n^2\int_0^1 r^{2n-1}\int_{[0,1)} \max\{0, \log\tfrac{1}{r} - \log\tfrac{1}{t}\}\, d\hat{\mu}(t)\, dr \\ &= 4n^2\int_{[0,1)}\int_0^1 r^{2n-1} \max\{0, \log\tfrac{1}{r} - \log\tfrac{1}{t}\}\, dr\, d\hat{\mu}(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,1)} 4n^2 \int_0^t (\log t - \log r) r^{2n-1}\, dr\, d\hat{\mu}(t) \\
&= \int_{[0,1)} 2n \left(\lim_{s \searrow 0} \left[(\log t - \log r) r^{2n} \right]_{r=s}^{t} + \int_0^t r^{2n-1}\, dr \right) d\hat{\mu}(t) \\
&= \int_{[0,1)} (0 + t^{2n})\, d\hat{\mu}(t) \;=\; p_n \;,
\end{aligned}
$$

also $\|\cdot\|_{p,H} = \|\cdot\|_\mu$ (beachte $p{=}p_0$ nach Definition). Dabei ist das Vertauschen der Integrationsreihenfolge durch die Positivität des Integranden gerechtfertigt. □

Da wir nun wissen, dass jeder Bergmanraum ein Dirichletraum ist, stellt sich natürlich die Frage, bei welchen Dirichleträumen es sich um Bergmanräume handelt. Beim Versuch, diese Frage im mengentheoretischen Sinn zu beantworten, tritt die im zweiten Kapitel näher beleuchtete Schwierigkeit auf, zu entscheiden, wann zwei Dirichleträume als Mengen gleich sind. Im Gegensatz zu Hardyräumen sind wir aber in der Lage, die Klasse von Dirichleträumen zu charakterisieren, die als normierte Räume Bergmanräume sind. Dazu definieren wir zunächst zu einem stetigen Gewicht G als Vergleichsfunktion mit dem in (1.30) definierten Gewicht H_{-1}, das die Darstellung des ungewichteten Hardyraums $\mathcal{H}^2$ als Dirichletraum ermöglicht,

$$
E(z) := \frac{G(z)}{H_{-1}(z)} = \frac{G(z)}{2 \log \frac{1}{|z|}} \qquad (z \in \mathbb{D} \backslash \{0\}) \tag{1.33}
$$

(vgl. [KM, S. 767]). Mit dieser Definition gilt

Satz 1.34 *Ein Dirichletraum* $(\mathcal{D}^2_{q,\nu}, \|\cdot\|_{q,\nu})$ *ist genau dann ein Bergmanraum* $(\mathcal{A}^2_\mu, \|\cdot\|_\mu)$ *, wenn* ν *von der Form* $d\nu{=}H\,dA$ *mit einem in* $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ *subharmonischen stetigen Gewicht* H *ist, für das die zu* H *gebildete Vergleichsfunktion* E *die beiden Bedingungen* $E{\le}q$ *und* $\lim_{z \nearrow \mathbb{T}} E(z) = 0$ *erfüllt. Der Dirichletraum ist genau dann ein Bergmanraum zu einem stetigen Gewicht, wenn* H *zusätzlich zweimal stetig partiell differenzierbar ist mit* $\triangle H{>}0$ *in* $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ *und* $\lim_{z\to 0} E(z) = q$ *, und genau dann ein Bergmanraum zu einem holomorphen Gewicht, wenn* H *nochmals zusätzlich ein holomorphes Gewicht ist.*

Ist $\|\cdot\|_{q,H} = \|\cdot\|_\mu$ *, so gilt* $\hat\mu([r,1)) = -\frac{r}{2}H'_-(r)$ *für* $r\in(0,1)$ *und* $\hat\mu([0,1))=q$*,* H *und* E *sind streng monoton fallend in* $(0,1)$*, und* H *hat in* 0 *eine logarithmische Singularität, genauer*

$$\lim_{z\to 0}\frac{H(z)}{\log\frac{1}{|z|}} = 2\lim_{z\to 0}E(z) = 2\hat\mu((0,1)) \ .$$

Ist sogar $\|\cdot\|_{q,H} = \|\cdot\|_G$ *, so gilt darüber hinaus* $G = \frac{1}{4}\triangle H$ *.*

Beweis: Ist $\|\cdot\|_\mu = \|\cdot\|_{q,\nu}$, so gilt $\|\cdot\|_{p,H} = \|\cdot\|_{q,\nu}$ mit p und H gemäß Satz 1.31, also $q{=}p$ und $d\nu{=}HdA$ nach Korollar 1.28. In diesem Fall ist H subharmonisch, da H als stetiges Gewicht stetig ist und als Integral über subharmonische Funktionen der Mittelwertungleichung subharmonischer Funktionen genügt, und wir haben $H(z)\leq 2p\log\frac{1}{|z|}$, also $E\leq p{=}q$, im Beweis von Satz 1.31 gesehen. Weiterhin gilt

$$E(z) = \frac{H(z)}{2\log\frac{1}{|z|}} = \int_{[0,1)} 1_{t\geq|z|}\left(1-\frac{\log\frac{1}{t}}{\log\frac{1}{|z|}}\right)d\hat\mu(t) \ ,$$

woraus mit dem Satz von der dominierten Konvergenz $\lim_{z\nearrow\mathbb{T}}E(z) = 0$ und $\lim_{z\to 0}E(z) = \hat\mu((0,1))$ folgt sowie für $0<|z_1|<|z_2|<1$

$$E(z_1)-E(z_2) \geq \int_{[z_2,1)}\left(\frac{\log\frac{1}{t}}{\log\frac{1}{|z_2|}} - \frac{\log\frac{1}{t}}{\log\frac{1}{|z_1|}}\right)d\hat\mu(t) > 0 \ ,$$

was die behauptete Monotonie von E beweist (beachte, dass 1 im Träger von $\hat\mu$ ist). Die Monotonie von H folgt aus der von E.
Gilt $d\mu{=}GdA$ mit einem stetigen Gewicht G, so erhält man für $r\in(0,1)$

$$\begin{aligned} H(r) &\overset{(1.4)}{=} 4\int_0^1 \max\{0,\log\tfrac{1}{r}-\log\tfrac{1}{t}\}\,G(t)tdt \;=\; 4\int_r^1\int_r^t\frac{ds}{s}\,G(t)tdt \\ &= 4\int_r^1\int_r^1 1_{s\leq t}\frac{ds}{s}\,G(t)tdt \;=\; 4\int_r^1\int_s^1 G(t)tdt\,\frac{ds}{s} \ , \end{aligned}$$

was zeigt, dass H als Funktion in $(0,1)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Dies ist wegen der Rotationsinvarianz von H gleichbedeutend damit, dass H in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Stellt man den Laplace-Operator in Polarkoordinaten dar, so erhält man

$$\triangle H(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \;=\; \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right) + \frac{\partial^2 H}{r^2\partial\theta^2}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$$

$$= \quad -4\frac{\partial}{r\partial r}\int_r^1 G(t)tdt \;=\; 4G(r) > 0 \;.$$

Außerdem gilt mit dem bisher gezeigten im Fall $d\mu{=}GdA$

$$\lim_{z\to 0} E(z) = \hat{\mu}((0,1)) = \hat{\mu}([0,1)) = p = q \;.$$

Ist G sogar ein holomorphes Gewicht, so hat G eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{G}$ von $(0,1)$ nach $\sqrt{\frac{1+\mathbb{D}}{2}}$, so dass

$$\tilde{H}(z_0) := 4\int_{z_0}^1 \int_z^1 \tilde{G}(w)w\,dw\,\frac{dz}{z}$$

eine holomorphe Fortsetzung von H, aufgefasst als Funktion in $(0,1)$, nach $\sqrt{\frac{1+\mathbb{D}}{2}}$ definiert. Damit ist H ein holomorphes Gewicht.
Gelte nun umgekehrt $d\nu{=}HdA$, wobei H die Bedingungen des Satzes erfülle. Daraus folgt nach A.1, dass H als Funktion in $(0,1)$ linksseitige Ableitungen besitzt, die linksseitig stetig sind mit $\int_r^1 H'_-(t)\,dt = -H(r)$ $[r{\in}(0,1)]$ und für die $rH'_-(r)$ monoton wachsend in r ist mit $-2q \le rH'_-(r) < 0$ $[r{\in}(0,1)]$ und $\lim_{r\nearrow 1} rH'_-(r) = 0$. Damit kann man auf $[0,1)$ ein positives, endliches Borelmaß $\hat{\mu}$ definieren durch $\hat{\mu}([0,1)){:=}q$ und

$$\hat{\mu}([r,1)) := -\frac{r}{2}H'_-(r) \qquad (r{\in}(0,1))$$

Wegen $rH'_-(r){<}0$ für $r{\in}(0,1)$ hat es 1 im Träger, definiert also ein Gewichtsmaß μ gemäß (1.2). Bildet man zu diesem p und $\tilde{H}$ gemäß Satz 1.31 und dazu $\tilde{E}$ gemäß (1.33), so gilt $p = \int_{[0,1)} d\hat{\mu} = q$ nach Definition von $\hat{\mu}$ sowie $\lim_{z\to 0}\tilde{E}(z) = \hat{\mu}((0,1))$ nach dem bisher Gezeigten. Weiterhin erhält man, wenn man $\tilde{H}$ wie oben umformt,

$$\tilde{H}(r) = 2\int_r^1 \hat{\mu}([s,1))\,\frac{ds}{s} = -\int_r^1 H'_-(s)\,ds = H(r) \;,$$

$[r{\in}(0,1)]$ also $\|\cdot\|_\mu = \|\cdot\|_{p,\tilde{H}} = \|\cdot\|_{q,H}$.
Ist H zusätzlich zweimal stetig differenzierbar mit $\triangle H{>}0$ und $\lim_{z\to 0} E(z) = q$, so gilt für $G{:=}\frac{1}{4}\triangle H$ [also mit obiger Darstellung des Laplace-Operators und wenn man G und H als Funktionen in $(0,1)$ auffasst $G(r) = \frac{1}{4}H''(r) + \frac{1}{4r}H'(r)$] wegen $\lim_{r\nearrow 1} rH'(r) = 0$, dass

$$\hat{\mu}([r,1)) = -\frac{r}{2}H'(r) = \frac{1}{2}\int_r^1 (\,tH''(t) + H'(t)\,)\,dr = 2\int_r^1 G(t)tdt$$

für $r\in(0,1)$. Wegen

$$\hat{\mu}([0,1)) = q = \lim_{z\to 0} E(z) = \lim_{z\to 0} \tilde{E}(z) = \hat{\mu}((0,1)) \ ,$$

also $\hat{\mu}(\{0\})=0$, folgt daraus $d\hat{\mu}(r) = 2G(r)rdr$, d. h. $d\mu=GdA$. Da G nach Definition stetig und positiv ist, ist es daher ein stetiges Gewicht mit $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_\mu = \|\cdot\|_{q,H}$.

Ist H nochmals zusätzlich ein holomorphes Gewicht, so hat H eine holomorphe Fortsetzung $\check{H}$ von $(0,1)$ nach $\sqrt{\frac{1+\mathbb{D}}{2}}$. Damit definiert $\check{G}(z) := \frac{1}{4}\left(\check{H}''(z) + \frac{1}{z}\check{H}'(z)\right)$ eine holomorphe Fortsetzung von G, aufgefasst als Funktion in $(0,1)$, nach $\sqrt{\frac{1+\mathbb{D}}{2}}$, so dass G ein holomorphes Gewicht ist. □

Der vorangegangene Satz zeigt, dass es der natürlichste Rahmen ist, Bergmanräume zu Gewichtsmaßen zu betrachten, denn die Charakterisierung der Dirichleträume, die derartige Bergmanräume sind, ist einfacher als die Charakterisierung der Dirichleträume, die Bergmanräume zu stetigen oder holomorphen Gewichten sind.

In der in obigem Beweis hergeleiteten Form

$$H(r) = 4\int_r^1 \int_s^1 G(t)tdt\,\frac{ds}{s} \tag{1.35}$$

wird die Ähnlichkeit zu der in [KM, S. 762] gegebenen Definition am deutlichsten. Die Subharmonizität des dort definierten Gewichtes H können Kriete und MacCluer allerdings nur unter deren Generalvoraussetzung, dass Gewichte in $(0,1)$ monoton fallende Funktionen sind, und auch dann nur in der Nähe der Einheitskreislinie garantieren, und die Normen der entsprechendenden Bergman- und Dirichleträume sind nicht wie bei uns gleich, sondern nur äquivalent.

2 Beziehungen zwischen einzelnen Funktionenräumen

2.1 Beziehungen allgemein

Zunächst charakterisieren wir die Beziehungen, in denen zwei Hardyräume zueinander stehen können. Dabei kann man sich leicht Beispiele für alle bei Mengen überhaupt möglichen Fälle konstruieren, nämlich dass die beiden Hardyräume gleich sind, dass keiner in dem jeweils anderen enthalten ist oder dass der eine echt in dem anderen enthalten ist. Ist ein Hardyraum in einem anderen enthalten, so kann man danach unterscheiden, ob die Inklusionsabbildung von dem kleineren in den größeren stetig oder gar kompakt ist.

Satz 2.1 *Es seien* $\mathcal{H}^2_\wp$ *und* $\mathcal{H}^2_{\tilde\wp}$ $[\wp=(p_n)$ *bzw.* $\tilde\wp=(\tilde p_n)]$ *zwei Hardyräume. Genau dann gilt* $\mathcal{H}^2_\wp \subseteq \mathcal{H}^2_{\tilde\wp}$, *wenn* $\limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde p_n}{p_n} < \infty$. *In diesem Fall ist die Inklusionsabbildung* $\iota\colon \mathcal{H}^2_\wp \longrightarrow \mathcal{H}^2_{\tilde\wp}$ *stetig. Sie ist genau dann kompakt, wenn* $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde p_n}{p_n} = 0$.

Insbesondere gilt $\mathcal{H}^2_\wp \subset \mathcal{H}^2_{\tilde\wp}$ genau dann, wenn $\limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde p_n}{p_n} < \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} \frac{\tilde p_n}{p_n} = 0$ sowie $\mathcal{H}^2_\wp = \mathcal{H}^2_{\tilde\wp}$ genau dann, wenn $(\frac{\tilde p_n}{p_n})$ nach oben und von Null weg beschränkt ist, wobei $\|\cdot\|_\wp$ und $\|\cdot\|_{\tilde\wp}$ in diesem Fall äquivalent sind.

Beweis: Haben wir $\limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde p_n}{p_n} = \infty$, so wählen wir eine Teilfolge (n_k) mit $\tilde p_{n_k} > 2^k p_{n_k}$ und definieren

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{\sqrt{2^k p_{n_k}}} \ .$$

Dann gilt $f \in \mathcal{H}^2_\wp$ [also insbesondere $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$, wie im Beweis von Satz 1.10 gesehen], jedoch $f \notin \mathcal{H}^2_{\tilde\wp}$. Gibt es umgekehrt eine Konstante C mit $\tilde p_n \le C p_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt $\|\cdot\|_{\tilde\wp} \le \sqrt{C}\|\cdot\|_\wp$, also $\mathcal{H}^2_\wp \subseteq \mathcal{H}^2_{\tilde\wp}$ und die Stetigkeit der

Inklusionsabbildung.
Mit $e_n(z):=\frac{z^n}{\sqrt{p_n}}$ ist $\{e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}^2_\wp$ und (e_n) damit eine schwache Nullfolge in $\mathcal{H}^2_\wp$. Somit folgt aus der Kompaktheit der Inklusionsabbildung $\frac{\tilde{p}_n}{p_n} = \|e_n\|^2_{\tilde{\wp}} \longrightarrow 0$ bei $n\to\infty$. Gelte nun in der anderen Richtung $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{p}_n}{p_n} = 0$, und sei (f_n) eine schwache Nullfolge in $\mathcal{H}^2_\wp$, wobei $f_n(z) = \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} z^k$. Dazu wählen wir eine Konstante C mit $\|f_n\|^2_\wp \leq C$ für $n\in\mathbb{N}$. Ist ein $\varepsilon>0$ vorgegeben, so finden wir ein $N\in\mathbb{N}$ mit $\frac{\tilde{p}_n}{p_n} < \frac{\varepsilon}{C}$ für $n\geq N$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2_{\tilde{\wp}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{p}_k}{p_k} |\langle f_n, e_k\rangle_\wp|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} \tilde{p}_k |a_{n,k}|^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{p}_k}{p_k} |\langle f_n, e_k\rangle_\wp|^2 + \varepsilon ,
\end{aligned}$$

wobei die verbleibende Summe wegen der schwachen Konvergenz von (f_n) in $\mathcal{H}^2_\wp$ gegen Null geht, so dass $\|f_n\|^2_{\tilde{\wp}}$ für große n kleiner als 2ε ist, was zeigt, dass (f_n) in der Norm von $\mathcal{H}^2_{\tilde{\wp}}$ gegen Null konvergiert. □

Bergman- und Dirichleträume kann man ja nach Satz 1.7 o.B.d.A. zu stetigen oder sogar zu holomorphen Gewichten bilden. Will man jedoch direkt an zwei stetigen Gewichten erkennen, in welchem Verhältnis die zu ihnen gebildeten Bergman- bzw. Dirichleträume stehen, so begegnet man einigen Schwierigkeiten. Allerdings spielt es keine Rolle, ob man Bergman- oder Dirichleträume betrachtet, denn es gilt

Satz 2.2 *Sind G und $\tilde{G}$ zwei stetige Gewichte und $q,\tilde{q}>0$, so gilt $\mathcal{A}^2_G \subseteq \mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ genau dann, wenn $\mathcal{D}^2_{q,G} \subseteq \mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$. In diesem Fall ist ι_1: $\mathcal{A}^2_G \to \mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ genau dann kompakt, wenn ι_2: $\mathcal{D}^2_{q,G} \to \mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$ kompakt ist.*

Beweis: Bildet man zu G und $\tilde{G}$ gemäß (1.17) p_n bzw. $\tilde{p}_n$ sowie zu G und q bzw. $\tilde{G}$ und $\tilde{q}$ gemäß Satz 1.24 q_n und $\tilde{q}_n$, so gilt $\frac{\tilde{p}_n}{p_n} = \frac{\tilde{q}_{n+1}}{q_{n+1}}$. Daraus folgt die Behauptung, da es nach Satz 2.1 für die Lage der entsprechenden Räume zueinander nur auf das Verhalten der beiden Quotienten bei $n\to\infty$ ankommt. □

Bevor wir näher auf die oben erwähnten Schwierigkeiten eingehen, geben wir zwei positive Resultate, von denen das zweite neu zu sein scheint, obwohl es einfach zu beweisen ist.

Satz 2.3 (vgl. [KM, S. 762]) *Es seien G und $\tilde{G}$ zwei stetige Gewichte sowie $q, \tilde{q}>0$:*
Aus $\limsup_{z\nearrow \mathrm{T}} \frac{\tilde{G}(z)}{G(z)} < \infty$ *folgt* $\mathcal{A}^2_G \subseteq \mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ *und* $\mathcal{D}^2_{q,G} \subseteq \mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$.
Aus $\lim_{z\nearrow \mathrm{T}} \frac{\tilde{G}(z)}{G(z)} = 0$ *folgt* $\mathcal{A}^2_G \subset \mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ *und* $\mathcal{D}^2_{q,G} \subset \mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$, *wobei die Inklusionsabbildung von dem kleineren in den größeren Raum jeweils kompakt ist.*

Beweis: Nach Satz 2.2 reicht es, die Aussagen für die Bergmanräume zu beweisen. Dazu führen wir diese Aussagen auf Satz 2.1 zurück, d. h. wir bilden zu G und $\tilde{G}$ die Gewichtsfolgen (p_n) bzw. $(\tilde{p}_n)$ gemäß (1.17):
Aus $\limsup_{z\nearrow \mathrm{T}} \frac{\tilde{G}(z)}{G(z)} < \infty$ folgt die Existenz einer Konstanten C mit $\frac{\tilde{G}}{G} \leq C$ in $[\frac{1}{2}, 1)$ und damit

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_n &= 2\int_0^1 r^{2n}\,\tilde{G}(r) r dr \;\leq\; \frac{2}{2^{2n}} \int_0^{1/2} \tilde{G}(r) r dr + 2\int_{1/2}^1 r^{2n}\,\tilde{G}(r) r dr \\
&\leq 2\frac{\int_0^{1/2} \tilde{G}(r) r dr}{\int_{1/2}^1 \tilde{G}(r) r dr} \int_{1/2}^1 r^{2n} \tilde{G}(r) r dr + 2\int_{1/2}^1 r^{2n}\,\tilde{G}(r) r dr \\
&\leq 2C\frac{\int_0^1 \tilde{G}(r) r dr}{\int_{1/2}^1 \tilde{G}(r) r dr} \int_{1/2}^1 r^{2n}\, G(r) r dr \;\leq\; C\frac{\int_0^1 \tilde{G}(r) r dr}{\int_{1/2}^1 \tilde{G}(r) r dr} p_n \;.
\end{aligned}$$

Wählt man für den zweiten Teil der Aussage zu $\varepsilon>0$ ein $r\in(0,1)$ mit $\frac{\tilde{G}}{G} \leq \varepsilon$ in $[r, 1)$ und weiterhin $s\in(r,1)$, so folgt mit ähnlicher Rechnung wie eben

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_n &= 2\int_0^r t^{2n}\,\tilde{G}(t) t dt + 2\int_r^1 t^{2n}\,\tilde{G}(t) t dt \\
&\leq 2\frac{r^{2n}}{s^{2n}} \frac{\int_0^r \tilde{G}(t) t dt}{\int_s^1 \tilde{G}(t) t dt} \int_s^1 t^{2n}\,\tilde{G}(t) t dt + 2\int_r^1 t^{2n}\,\tilde{G}(t) t dt \\
&\leq \varepsilon \left(\frac{r^{2n}}{s^{2n}} \frac{\int_0^r \tilde{G}(t) t dt}{\int_s^1 \tilde{G}(t) t dt} + 1 \right) p_n \;.
\end{aligned}$$

Da der geklammerte Faktor gegen 1 strebt bei $n\to\infty$, ist $\frac{\tilde{p}_n}{p_n} < 2\varepsilon$ für große n, was $\frac{\tilde{p}_n}{p_n} \to 0$ bei $n\to\infty$ beweist. □

In vielen Fällen werden die Kriterien des vorangegangenen Satzes greifen, da die beteiligten Gewichte glatt genug sind. So zeigt der Satz beispielsweise, dass für die Standardbergmanräume $\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ $(\alpha{>}{-1})$ gilt $\mathcal{A}^2_{G_\alpha}{=}\mathcal{A}^2_{G^*_\alpha}$ mit

$$G^*_\alpha(z) := \frac{2^\alpha}{,\,(\alpha{+}1)}(\log \tfrac{1}{|z|})^\alpha \ . \tag{2.4}$$

Damit gilt auch $\mathcal{D}^2_{1,G_\alpha}{=}\mathcal{D}^2_{1,G^*_\alpha}$, so dass man wegen (1.30) $\mathcal{H}^2$ als Standarddirichletraum erkennt. Außerdem hat obige Darstellung der Standardgewichte den Vorteil, dass die zu G^*_α gemäß (1.17) gebildeten $p^*_{\alpha,n}$ eine schönere Form haben als die $p_{\alpha,n}$ zu G_α [vgl. (1.18)]:

$$\begin{aligned} p^*_{\alpha,n} \quad &= \quad \frac{2^{\alpha+1}}{,\,(\alpha{+}1)}\int_0^1 r^{2n+1}(\log \tfrac{1}{r})^\alpha\, dr \\ &\overset{x=2(n+1)\log\frac{1}{r}}{=} \quad \frac{1}{(n{+}1)^{\alpha+1},\,(\alpha{+}1)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^\alpha\, dx \;=\; \frac{1}{(n{+}1)^{\alpha+1}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Bildet man des Weiteren zu den G_α die Gewichte H_α gemäß (1.35), so erhält man mit der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{r\nearrow 1}\frac{H_\alpha(r)}{G_{\alpha+2}(r)} &= \lim_{r\nearrow 1}\frac{4\int_r^1\int_s^1 G_\alpha(t)tdt\,\frac{ds}{s}}{(\alpha{+}3)(1{-}r^2)^{\alpha+2}} \\ &= \lim_{r\nearrow 1}\frac{4/r}{2r(\alpha{+}2)(\alpha{+}3)}\,\frac{-\int_r^1 G_\alpha(t)tdt}{-(1{-}r^2)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{2}{(\alpha{+}2)(\alpha{+}3)}\lim_{r\nearrow 1}\frac{rG_\alpha(r)}{2r(\alpha{+}1)(1{-}r^2)^\alpha} \\ &= \frac{1}{(\alpha{+}2)(\alpha{+}3)}\ , \end{aligned} \tag{2.6}$$

so dass $\mathcal{A}^2_{G_\alpha}{=}\mathcal{D}^2_{1,G_{\alpha+2}}$. Auch die Standardbergmanräume sind also – genauso wie $\mathcal{H}^2$ – im mengentheoretischen Sinn Standarddirichleträume.

Wie bereits eingangs dieses Abschnitts erwähnt, ist es einfach, zu einem Hardyraum $\mathcal{H}^2_\wp$ einen weiteren Hardyraum $\mathcal{H}^2_{\tilde\wp}$ zu konstruieren mit $\mathcal{H}^2_\wp \not\subseteq \mathcal{H}^2_{\tilde\wp} \not\subseteq \mathcal{H}^2_\wp$. Damit findet man natürlich auch zu jedem Bergmanraum einen Hardyraum mit obiger Inklusionseigenschaft. Weniger offensichtlich jedoch ist

Satz 2.7 *Zu jedem Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$ gibt es einen Bergmanraum $\mathcal{A}^2_{\tilde\mu}$ mit $\mathcal{A}^2_\mu \not\subseteq \mathcal{A}^2_{\tilde\mu} \not\subseteq \mathcal{A}^2_\mu$.*

Beweis: Zum Beweis des Satzes werden wir zwei Funktionen $f,g\in\mathrm{H}(\mathbb{D})$ konstruieren mit $f\in\mathcal{A}^2_\mu$ und $g\notin\mathcal{A}^2_\mu$ und der Zusatzeigenschaft, dass es $t_k\nearrow 1$ gibt mit $\frac{m_f(t_k)}{m_g(t_k)}\geq 2^k$ [m_f, m_g nach (1.8)]. Definiert man dann gemäß (1.2) $\tilde{\mu}$ durch $\hat{\tilde{\mu}} := \sum_{k=1}^\infty \frac{2^{-k}}{m_g(t_k)}\delta_{t_k}$, so ist $\tilde{\mu}$ ein Gewichtsmaß [endlich wegen der Monotonie von m_g und $g\neq 0$] mit $\|f\|_{\tilde{\mu}}=\infty$ und $\|g\|_{\tilde{\mu}}=1$ [beachte (1.2)], so dass $\mathcal{A}^2_{\tilde{\mu}}$ ein Bergmanraum mit den geforderten Eigenschaften ist.
Für die Konstruktion von f und g verwenden wir den Ansatz

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty \sqrt{a_k} z^{m_k} \qquad \text{und} \qquad g(z) = \sum_{k=0}^\infty \sqrt{b_k} z^{n_k}$$

mit $a_k, b_k>0$ und Teilfolgen (m_k) und (n_k) von $\mathbb{N}_0$. Damit gilt wegen (1.16)

$$m_f(r) = \sum_{k=0}^\infty a_k r^{2m_k} \qquad \text{bzw.} \qquad m_g(r) = \sum_{k=0}^\infty b_k r^{2n_k} \ .$$

Weiterhin sei zu dem Gewicht μ die Folge (p_n) gemäß (1.17) gebildet. Wir setzen $s_0:=m_0:=n_0:=0$, $a_0:=b_0:=1$ und $\tilde{f}_0:=\tilde{g}_0:=1$ und werden induktiv für $k=1,2,3,...$ die Zahlen $a_k, b_k, C_k>0$, $m_k, n_k\in\mathbb{N}$ mit $m_k>m_{k-1}$ und $n_k>n_{k-1}$ sowie $r_k, s_k\in(0,1)$ mit $s_{k-1}<r_k<s_k$ und damit die Polynome $\tilde{f}_k(r) := \sum_{j=0}^k a_j r^{m_j}$ und $\tilde{g}_k(r) := \sum_{j=0}^k b_j r^{n_j}$ definieren. Sei zu diesem Zweck $R\in(s_{k-1},1)$ und $C_k := \max\{1, 2^{k+1}\tilde{g}_{k-1}(r) - \tilde{f}_{k-1}(r)\colon r\in[R,1]\}$. (1)
Da $\tilde{f}_{k-1}$ und $\tilde{g}_{k-1}$ als Polynome stetig in $[R,1]$ sind, gilt $C_k\in[1,\infty)$.
Wähle $m_k>m_{k-1}$ mit $p_{m_k} \leq 2^{-k}C_k^{-1}$ (2)
(beachte $\lim_{j\to\infty} p_j = 0$ nach Satz 1.14) und $r_k\in[R,1)$ mit $r_k^{m_k}\geq\frac{1}{2}$. (3)
Definiere damit $a_k := r_k^{-m_k} C_k \leq 2C_k$. (4)
Wähle $s_k\in(r_k,1)$ beliebig und dazu $n_k>n_{k-1}$ mit

$$\forall j=1,...,k: \quad (\tfrac{r_j}{s_k})^{n_k} \leq 2^{-k}\tilde{g}_{j-1}(r_j)\hat{\mu}([\sqrt{s_k},1)) \tag{5}$$

(beachte $r_j\leq r_k<s_k$), und definiere $b_k := \frac{s_k^{-n_k}}{\hat{\mu}([\sqrt{s_k},1))}$. (6)
Damit ist die induktive Definition beendet. Mit unserem Ansatz für f gilt

$$\|f\|^2_\mu = \|f\|^2_{(p_j)} = \sum_{k=0}^\infty p_{m_k} a_k \overset{(2,4)}{\leq} p_0 + \sum_{k=1}^\infty (2^{-k}C_k^{-1})(2C_k) < \infty \ ,$$

also $f{\in}\mathcal{A}^2_\mu$ und insbesondere (wie im Beweis von Satz 1.10 gesehen) $f{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D})$. Setzt man $\tilde{g}(r) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^{n_k}$, so gilt für $j{\in}\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(r_j) &\overset{(6)}{=} \tilde{g}_{j-1}(r_j) + \sum_{k=j}^{\infty} \frac{s_k^{-n_k}}{\hat{\mu}([\sqrt{s_k},1))} r_j^{n_k} \\
&\overset{(5)}{\le} \tilde{g}_{j-1}(r_j) + \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} \tilde{g}_{j-1}(r_j) \ \le\ 2\tilde{g}_{j-1}(r_j) < \infty\ . \qquad (7)
\end{aligned}$$

Wegen $r_k^{m_k} \ge \frac{1}{2}$ nach (3) und der strengen Monotonie der m_k gilt $r_k \nearrow 1$, d. h. die Potenzreihe für $\tilde{g}$ hat Konvergenzradius größergleich 1. Dann hat aber auch die obige Potenzreihe für g Konvergenzradius größergleich 1, d. h. $g{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D})$. Man berechnet

$$\begin{aligned}
\|g\|_\mu^2 &\overset{(1.4)}{=} \int_{[0,1)} m_g(r)\, d\hat{\mu}(r) \ = \int_{[0,1)} \tilde{g}(r^2)\, d\hat{\mu}(r) \\
&\ge \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{[\sqrt{s_k},1)} r^{2n_k}\, d\hat{\mu}(r) \overset{(6)}{\ge} \sum_{k=1}^{\infty} 1 \ = \ \infty\ ,
\end{aligned}$$

so dass $g{\notin}\mathcal{A}^2_\mu$, und mit $t_k{:=}\sqrt{r_k} \nearrow 1$ gilt für $k{\in}\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
m_g(t_k) &= \tilde{g}(r_k) \overset{(7)}{\le} 2\tilde{g}_{k-1}(r_k) \overset{(1)}{\le} 2^{-k}\,(\,C_k + \tilde{f}_{k-1}(r_k)\,) \\
&\overset{(4)}{=} 2^{-k}\,(a_k r_k^{m_k} + \tilde{f}_{k-1}(r_k)\,) \ = \ 2^{-k} \tilde{f}_k(r_k) \ \le\ 2^{-k} m_f(t_k)\ .
\end{aligned}$$

Damit haben f und g die zu Beginn des Beweises geforderten Eigenschaften. □

Man kann natürlich mit einem zu einem holomorphen Gewicht G gebildeten Bergmanraum starten und erhält ein Gewichtsmaß $\tilde{\mu}$ mit $\mathcal{A}^2_G \not\subseteq \mathcal{A}^2_{\tilde{\mu}} \not\subseteq \mathcal{A}^2_G$. Wählt man zu $\tilde{\mu}$ gemäß Satz 1.7 ein holomorphes Gewicht $\tilde{G}$ mit $\mathcal{A}^2_{\tilde{G}}{=}\mathcal{A}^2_{\tilde{\mu}}$, so gilt wegen Satz 2.3

$$\limsup_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{G(z)}{\tilde{G}(z)} = \infty \qquad \text{und} \qquad \liminf_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{G(z)}{\tilde{G}(z)} = 0\ .$$

trotz der Glattheit der beiden Gewichte. Bildet man zu ihnen p und H bzw. $\tilde{p}$ und $\tilde{H}$ gemäß Satz 1.31, so gilt wiederum nach Satz 2.3

$$\limsup_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{H(z)}{\tilde{H}(z)} = \infty \qquad \text{und} \qquad \liminf_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{H(z)}{\tilde{H}(z)} = 0$$

trotz der Subharmonizität von H und $\tilde{H}$ sowie der weiteren Glättung durch zweimaliges Hochintegrieren. Weiterhin gilt beispielsweise $\mathcal{A}^2_{G+\tilde{G}} \subset \mathcal{A}^2_G$ mit

$$\limsup_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{G(z)+\tilde{G}(z)}{G(z)} = \infty \qquad \text{und} \qquad \liminf_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{G(z)+\tilde{G}(z)}{G(z)} = 1 \tag{2.8}$$

und entsprechenden Beziehungen für H und $H+\tilde{H}$. Andererseits kann man zu einem beliebigen holomorphen Gewicht G mit den Methoden aus dem Beweis von Satz 1.7 zunächst ein stetiges und dann ein holomorphes Gewicht $\tilde{G}$ konstruieren mit $\tilde{G} \geq G$, $\|\cdot\|_G \leq \|\cdot\|_{\tilde{G}} \leq 2\|\cdot\|_G$ sowie $\tilde{G}(\mathrm{e}^{-1/2n}) = G(\mathrm{e}^{-1/2n})$ und $\tilde{G}(\mathrm{e}^{-1/(2n-1)}) = nG(\mathrm{e}^{-1/(2n-1)})$ für $n \in \mathbb{N}$. Wiederum gilt wie bei (2.8)

$$\limsup_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{\tilde{G}(z)}{G(z)} = \infty \qquad \text{und} \qquad \liminf_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{\tilde{G}(z)}{G(z)} = 1 \ ,$$

obwohl diesmal $\mathcal{A}^2_G = \mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$. Dies zeigt, dass eine allgemein gültige Charakterisierung der Lage von $\mathcal{A}^2_G$ und $\mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ zueinander mittels des Grenzverhaltens des Quotienten $\frac{\tilde{G}(z)}{G(z)}$ bei $z \nearrow \mathrm{T}$ unmöglich ist. Etwas besser sieht es aus, wenn man die Subharmonizität der Gewichte voraussetzt, wie sie beispielsweise bei denjenigen stetigen Gewichten gegeben ist, die gemäß (1.32) gebildet sind (s. Satz 1.34). Um das entsprechende Resultat formulieren zu können, müssen wir die durch

$$S_a(z) := \frac{a-z}{1-\overline{a}z} \qquad (a \in \mathbb{D})$$

definierten bijektiven Selbstabbildungen von $\mathbb{D}$ einführen, die spezielle Blaschkefaktoren sind. Es gilt $S_a \circ S_a = \mathrm{id}$, und man berechnet

$$S_a'(z) = -\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \ .$$

Damit ist der folgende – noch nicht bekannte – Satz verständlich:

Satz 2.9 *Es seien $\mathcal{D}^2_{q,G}$ und $\mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$ zwei Dirichleträume, wobei $\tilde{G}$ in $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ subharmonisch sei. Existiert ein $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$ mit $f'(0) \neq 0$, für das die durch*

$$f_w := \frac{1}{\sqrt{G(w)}}\, f \circ (\overline{w} S_w) \qquad (w \in \mathbb{D})$$

definierten Funktionen $\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \|f_w\|_{q,G} < \infty$ erfüllen, so gilt $\mathcal{D}^2_{q,G} \subseteq \mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$ genau dann, wenn $\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{\tilde{G}(w)}{G(w)} < \infty$.

Beachte

$$\begin{aligned}
\|f_w\|_{q,G}^2 &= q\frac{|f(\overline{w}S_w(0))|^2}{G(w)} + \frac{|w|^2}{G(w)}\int_{\mathbb{D}} |S_w'|^2 |f'\circ(\overline{w}S_w)|^2\, G dA \\
&\overset{(2.1)}{\leq} q\frac{|f(|w|^2)|^2}{G(w)} + \frac{|w|^2}{G(w)}\left(\frac{1+|w|}{1-|w|}\right)^2 \left(\sup_{z\in|w|\mathbb{D}} |f'(z)|^2\right)\int_{\mathbb{D}} G dA \\
&< \infty\ .
\end{aligned}$$

Beweis: Die Rückrichtung der Äquivalenz gilt nach Satz 2.3 allgemein. Gilt umgekehrt $\mathcal{D}^2_{q,G}\subseteq\mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$, so ist die Inklusionsabbildung von dem kleineren in den größeren Raum nach Satz 2.1 stetig und damit $\limsup_{w\nearrow \mathrm{T}} \|f_w\|_{\tilde{q},\tilde{G}} < \infty$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\|f_w\|_{\tilde{q},\tilde{G}}^2 &\geq \int_{\mathbb{D}} |f_w'|^2\, \tilde{G} dA \;=\; \frac{|w|^2}{G(w)}\int_{\mathbb{D}} |f'\circ(\overline{w}S_w)|^2 \tilde{G}\, |S_w'|^2 dA \\
&= \frac{|w|^2}{G(w)}\int_{\mathbb{D}} |f'(\overline{w}z)|^2 \tilde{G}(S_w(z))\, dA(z)\ .
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $c>0$ und ein $r\in(0,1)$ mit $|f'|\geq c$ in $r\mathbb{D}$. Wegen der Subharmonizität von $\tilde{G}$ in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ ist $\tilde{G}\circ S_w$ subharmonisch in $\mathbb{D}\backslash\{w\}$, also in $r\mathbb{D}$ für $|w|\geq r$. Somit gilt für $w\in\mathbb{D}\backslash r\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
\|f_w\|_{\tilde{q},\tilde{G}}^2 &\geq \frac{c^2|w|^2}{G(w)}\int_{r\mathbb{D}} \tilde{G}(S_w(z))\, dA(z) \\
&\geq \frac{c^2r^2|w|^2}{G(w)}\tilde{G}(S_w(0)) \;=\; c^2r^2|w|^2\frac{\tilde{G}(w)}{G(w)}\ ,
\end{aligned}$$

also

$$\limsup_{w\nearrow \mathrm{T}} \frac{\tilde{G}(w)}{G(w)} \leq \frac{1}{c^2r^2}\limsup_{w\nearrow \mathrm{T}} \|f_w\|_{\tilde{q},\tilde{G}}^2 < \infty\ . \qquad \square$$

Eine große Klasse von Dirichleträumen, die der Voraussetzung obigen Satzes genügen, werden wir im folgenden Abschnitt angeben.

2.2 Schnelle und langsame Gewichte

In diesem Abschnitt definieren wir zunächst durch Vergleich mit den Standardgewichten bzw. den dazugehörigen Standardbergmanräumen zwei Klassen von Gewichten:

Definition 2.10 (schnelle und langsame Gewichte) *Ein Gewichtsmaß μ heißt schnell, wenn $\mathcal{A}^2_\mu \supseteq \mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ für alle $\alpha\in(-1,\infty)$, und langsam, wenn es ein $\alpha\in(-1,\infty)$ gibt mit $\mathcal{A}^2_\mu \subseteq \mathcal{A}^2_{G_\alpha}$. Ein stetiges Gewicht G heißt schnell bzw. langsam, wenn das durch $G dA$ definierte Gewichtsmaß schnell bzw. langsam ist. Regulär schnell heißt ein stetiges Gewicht, wenn es für alle $\alpha\in(-1,\infty)$ ein $r\in(0,1)$ gibt, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist, und regulär langsam, wenn es ein $\alpha\in(-1,\infty)$ und ein $r\in(0,1)$ gibt, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton wachsend in $[r,1)$ ist.*

Aus Satz 2.3 folgt, dass regulär schnelle oder langsame Gewichte insbesondere schnell bzw. langsam sind, und mit einer Konstruktion wie im Beweis von Satz 2.7 lässt sich zeigen, dass es Gewichte gibt, die weder schnell noch langsam sind. Kriete und MacCluer bezeichnen in [KM, S. 756] stetige Gewichte als schnell, wenn für alle $\alpha\in(-1,\infty)$ gilt $\lim_{z\nearrow \mathbb{T}} \frac{G(z)}{G_\alpha(z)} = 0$, d. h. wenn sie schneller gegen Null gehen bei $z\nearrow\mathbb{T}$ als jedes Standardgewicht. Wiederum Satz 2.3 zeigt, dass in diesem Sinne schnelle Gewichte auch nach unserer Definition schnell sind. Wir haben die Definition so gewählt, um sie auf Gewichtsmaße ausdehnen zu können. Der Begriff des regulär schnellen Gewichts ist identisch mit demjenigen aus [CM, S. 198]. Als Beispiele für regulär schnelle Gewichte geben Cowen und MacCluer die durch

$$G(z) := \exp\left(-c(\log\tfrac{1}{1-|z|})^\beta\right) \qquad \text{und} \qquad G(z) := \exp\left(-c(\tfrac{1}{1-|z|})^\beta\right)$$

für $c>0$ und $\beta>1$ bzw. $\beta>0$ definierten Gewichte. Eine Untersuchung von Bergmanräumen zu schnellen Gewichten findet sich in [KM] (vgl. auch Theorem 4.14).

Die Klassifikation der (regulär) langsamen Gewichte ist genauso wie der Rest dieses Abschnitts neu. Bei regulär langsamen Gewichten beachte man, dass aus dem monotonen Wachsen von $\frac{G}{G_\alpha}$ in $[r,1)$ folgt, dass $\frac{G}{G_{\alpha'}}$ für alle $\alpha'>\alpha$ monoton wachsend in $[r,1)$ ist mit $\lim_{z\nearrow\mathbb{T}} \frac{G(z)}{G_{\alpha'}(z)} = \infty$. Beispiele für regulär langsame Gewichte sind insbesondere die Standardgewichte selbst sowie allgemeiner die durch

$$G(z) := (1-|z|^2)^\alpha \left(1-\log(1-|z|^2)\right)^\beta \tag{2.11}$$

für $\alpha\in(-1,\infty)$ und $\beta\in\mathbb{R}$ definierten Gewichte (betrachte $\frac{G}{G_{\alpha+1}}$).

Wir betrachten nun zunächst den Übergang von einem Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$ zu dem Dirichletraum $\mathcal{D}^2_{p,H}$ gemäß Satz 1.31 und klären, wie Schnelligkeit und Langsamkeit von μ mit der entsprechenden Eigenschaft von H zusammenhängen. Im Fall $\mu{=}GdA$ untersuchen wir entsprechend, ob sich ggf. auch die Regularität überträgt. Dazu benötigen wir

Lemma 2.12 *Es seien $r{\in}(0,1)$ sowie ϕ und ψ zwei in $[r,1)$ definierte positive Funktionen. Ist $\frac{\phi}{\psi}$ monoton wachsend in $[r,1)$, so ist auch $\frac{\int_s^1 \phi(t)dt}{\int_s^1 \psi(t)dt}$ monoton wachsend für $s{\in}[r,1)$. Insbesondere ist $\frac{H_\alpha}{G_{\alpha+2}}$ monoton fallend in $(0,1)$ und $\frac{H_\alpha}{G_{\alpha+2+\gamma}}$ monoton wachsend in $[\frac{1}{\sqrt{1+\gamma}},1)$ für $\alpha{\in}(-1,\infty)$ und $\gamma{>}0$.*

Beweis: Die allgemeine Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\frac{\int_s^1 \phi(t)\,dt}{\int_s^1 \psi(t)\,dt} &= \frac{-\phi(s)\int_s^1 \psi(t)\,dt + \psi(s)\int_s^1 \frac{\phi(t)}{\psi(t)}\psi(t)\,dt}{(\int_s^1 \psi(t)\,dt)^2} \\ &\geq \frac{-\phi(s)\int_s^1 \psi(t)\,dt + \psi(s)\frac{\phi(s)}{\psi(s)}\int_s^1 \psi(t)\,dt}{(\int_s^1 \psi(t)\,dt)^2} = 0\,.\end{aligned}$$

Speziell für H_α gilt nach (1.35)

$$H_\alpha(r) = 4\int_r^1 \int_s^1 t(\alpha{+}1)(1{-}t^2)^\alpha\,dt\,\frac{ds}{s} = 2\int_r^1 (1{-}s^2)^{\alpha+1}\,\frac{ds}{s}\,.$$

Da $\frac{s(1-s^2)^{\alpha+1}}{\frac{1}{s}(1-s^2)^{\alpha+1}}$ monoton wachsend für $s{\in}(0,1)$ ist, folgt aus dem eben bewiesenen allgemeinen Resultat, dass

$$\frac{\int_r^1 s(1-s^2)^{\alpha+1}\,dr}{\int_r^1 \frac{1}{s}(1-s^2)^{\alpha+1}\,dr} = \frac{1}{(\alpha{+}2)(\alpha{+}3)}\frac{G_{\alpha+2}(r)}{H_\alpha(r)}$$

monoton wachsend für $r{\in}(0,1)$ ist. Daraus, dass $\frac{\frac{1}{s}(1-s^2)^{\alpha+1}}{s(1-s^2)^{\alpha+1+\gamma}}$ monoton wachsend für $s{\in}[\frac{1}{\sqrt{1+\gamma}},1)$ ist, erhält man analog die Behauptung über $\frac{H_\alpha}{G_{\alpha+2+\gamma}}$. □

Mit diesem Lemma sind wir nun in der Lage, den angekündigten Satz zu beweisen:

Satz 2.13 *Es sei μ ein Gewichtsmaß und dazu p und H gemäß Satz 1.31 gebildet. Genau dann ist μ schnell oder langsam, wenn auch H schnell bzw. langsam ist. Gilt $\mu{=}GdA$ und ist G regulär schnell oder langsam, so überträgt sich auch die Regularität auf H.*

Beweis: Wegen $\mathcal{A}^2_{G_\alpha}{=}\mathcal{D}^2_{1,G_{\alpha+2}}$ nach (2.6) ist $\mathcal{A}^2_\mu{\subseteq}\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ gleichbedeutend damit, dass $\mathcal{D}^2_{p,H}{\subseteq}\mathcal{D}^2_{1,G_{\alpha+2}}$. Letzteres ist nach Satz 2.2 äquivalent dazu, dass $\mathcal{A}^2_H{\subseteq}\mathcal{A}^2_{G_{\alpha+2}}$. Damit folgt aus der Langsamkeit von μ diejenige von H.
Ist andererseits H langsam, also $\mathcal{A}^2_H{\subseteq}\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ für ein $\alpha{\in}(-1,\infty)$, so gilt auch $\mathcal{A}^2_H{\subseteq}\mathcal{A}^2_{G_{\alpha+2}}$ und damit nach Obigem $\mathcal{A}^2_\mu{\subseteq}\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$, so dass auch μ langsam ist.
Ist μ schnell, d. h. gilt $\mathcal{A}^2_\mu{\supseteq}\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ für alle $\alpha{\in}(-1,\infty)$, so folgert man wie eben, dass dies äquivalent ist zu $\mathcal{A}^2_H{\supseteq}\mathcal{A}^2_{G_{\alpha+2}}$ für alle $\alpha{\in}(-1,\infty)$. Da Letzteres mit $\mathcal{A}^2_H{\supseteq}\mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ für alle $\alpha{\in}(-1,\infty)$ gleichbedeutend ist, sind somit die Schnelligkeit von μ und diejenige von H äquivalent.
Wendet man Lemma 2.12 nacheinander auf $\frac{G(t)t}{G_\alpha(t)t}$ und $\frac{\frac{1}{s}\int_s^1 G(t)tdt}{\frac{1}{s}\int_s^1 G_\alpha(t)tdt}$ an, so erkennt man, dass sich die Monotonie von $\frac{G}{G_\alpha}$ auf $\frac{H}{H_\alpha}$ überträgt. Ist also G regulär schnell und zu $\alpha{\in}(-1,\infty)$ ein $r{\in}(0,1)$ so gewählt, dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist, so ist auch $\frac{H}{H_\alpha}$, damit nach Lemma 2.12 auch $\frac{H}{G_{\alpha+2}}$ und somit erst recht $\frac{H}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$. Ist andererseits G regulär langsam und entsprechend $\alpha{\in}[0,\infty)$ und $r{\in}[\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ gewählt, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton wachsend in $[r,1)$ ist, so erkennt man entsprechend $\frac{H}{G_{\alpha+3}}$ als monoton wachsend in $[r,1)$, d. h. H ist regulär langsam. $\square$

Im zweiten Teil dieses Abschnitts wenden wir uns wieder der Aufgabe zu, die Lage zweier Bergman- oder Dirichleträume zueinander mittels ihrer Gewichte zu charakterisieren. Der folgende Satz zeigt, dass auf die meisten regulär langsamen Gewichte Satz 2.9 anwendbar ist:

Satz 2.14 *Es sei $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum zu einem regulär langsamen Gewicht und dazu $m{\in}\mathbb{N}$ und $r{\in}(0,1)$ so gewählt, dass $\frac{G}{G_{2m-1}}$ monoton wachsend in $[r,1)$ ist. Gibt es ein $\alpha{\in}(-1,2m{-}1]$, für das $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend ist in $[s,1)$ für ein $s{\in}[r,1)$, so gilt für $f_w := \frac{1}{\sqrt{G(w)}}(1{-}\overline{w}S_w)^m$, dass $\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \|f_w\|_{q,G} < \infty$.*

Beispielsweise erfüllen die in (2.11) definierten Gewichte die Voraussetzungen dieses Satzes.

Beweis: Es gilt

$$(1-\overline{w}S_w(z))^m = \left(\frac{1-|w|^2}{1-\overline{w}z}\right)^m = (1-|w|^2)^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} (-\overline{w}z)^n$$

und damit mit q_n gemäß Satz 1.24

$$\begin{aligned}
\|f_w\|_{q,G}^2 &= \frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \sum_{n=0}^{\infty} q_n \binom{-m}{n}^2 |w|^{2n} \\
&= \frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \left(q_0 + q_1 m^2 |w|^2 + q_2 \tfrac{m^2(m+1)^2}{4} |w|^4 \right) \\
&\quad + \frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \sum_{n=3}^{\infty} q_n \binom{-m}{n}^2 |w|^{2n} .
\end{aligned}$$

Dabei geht der erste Summand nach Wahl von m gegen Null bei $w \nearrow \mathrm{T}$, so dass noch die Beschränktheit des zweiten Summanden zu zeigen ist. Wegen $\lim_{n\to\infty} |\binom{-m}{n}|/(n+1)^{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}$ gibt es eine Konstante C mit $\binom{-m}{n}^2 \leq C(n+1)^{2m-2}$, so dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} q_n \binom{-m}{n}^2 |w|^{2n} &\leq C \sum_{n=3}^{\infty} q_n (n+1)^{2m-2} |w|^{2n} \\
&= 2C \sum_{n=3}^{\infty} [n^2(n+1)^{2m-2}] |w|^2 |w|^{2(n-1)} \int_0^1 t \cdot t^{2(n-1)} G(t)\, dt \\
&\leq 2C \int_0^1 \sum_{n=3}^{\infty} [4^{2m}(n-2)^{2m}] |tw|^{2(n-1)}\, G(t) t dt \\
&\leq 4^{2m} \cdot 2C \int_0^1 \sum_{n=3}^{\infty} \int_{n-2}^{n-1} x^{2m} |tw|^{2x}\, dx\, G(t) t dt \\
&\leq 4^{2m} \cdot 2C \int_0^1 \int_0^{\infty} x^{2m} |tw|^{2x}\, dx\, G(t) t dt \\
&\overset{y=2x\log\frac{1}{|tw|}}{=} 4^{2m} \cdot 2C \int_0^1 \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{2\log\frac{1}{|tw|}}\right)^{2m} \mathrm{e}^{-y} \frac{dy}{2\log\frac{1}{|tw|}}\, G(t) t dt
\end{aligned}$$

$$= \qquad 2^{2m} C(2m)! \int_0^1 \frac{G(t)tdt}{(\log \frac{1}{|tw|})^{2m+1}} \ ,$$

also

$$\frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \sum_{n=3}^{\infty} q_n \binom{-m}{n}^2 |w|^{2n}$$
$$\leq \quad 2^{2m} C(2m)! \frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \int_0^1 \frac{G(t)tdt}{(\log \frac{1}{|tw|})^{2m+1}} \ .$$

Zum Abschluss des Beweises spalten wir für $|w| \in (s,1)$ das Integral in drei Teile und berechnen mittels der Monotonie von $\frac{G(t)}{(1-t^2)^{\alpha}}$

$$\begin{aligned}
\frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \int_{|w|}^1 \frac{G(t)tdt}{(\log \frac{1}{|tw|})^{2m+1}} &\leq (1-|w|^2)^{2m-\alpha} \int_{|w|}^1 \frac{t(1-t^2)^{\alpha}\, dt}{(\log \frac{1}{|tw|})^{2m+1}} \\
&\leq \frac{(1-|w|^2)^{2m-\alpha}}{(\log \frac{1}{|w|})^{2m+1}} \int_{|w|}^1 t(1-t^2)^{\alpha}\, dt \\
&= \frac{(1-|w|^2)^{2m-\alpha}}{(\log \frac{1}{|w|})^{2m+1}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} \\
&\leq \frac{2^{2m}}{\alpha+1} \ ,
\end{aligned}$$

mittels der Monotonie von $\frac{G(t)}{(1-t^2)^{2m-1}}$

$$\begin{aligned}
\frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \int_r^{|w|} \frac{G(t)tdt}{(\log \frac{1}{|tw|})^{2m+1}} &\leq (1-|w|^2) \int_r^{|w|} \frac{t(1-t^2)^{2m-1}}{(\log \frac{1}{|tw|})^{2m+1}}\, dt \\
&\leq 2^{2m}(1-|w|) \int_r^{|w|} \frac{1}{(1-t)^2}\, dt \\
&= 2^{2m} \left(1 - \tfrac{1-|w|}{1-r}\right) \leq 2^{2m}
\end{aligned}$$

sowie wegen $\frac{G(t)}{(1-t^2)^{2m}} \longrightarrow 0$ bei $t \nearrow 1$

$$\frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \int_0^r \frac{G(t)tdt}{(\log \frac{1}{|tw|})^{2m+1}} \leq \frac{(1-|w|^2)^{2m}}{G(w)} \frac{\int_0^r G(t)tdt}{(\log \frac{1}{r})^{2m+1}} \xrightarrow{w \nearrow \mathrm{T}} 0 \ . \qquad \square$$

Dieser Satz wird bei den Untersuchungen in Abschnitt 4.1 nochmals eine wichtige Rolle spielen. Im jetzigen Zusammenhang folgt aus ihm sowie Satz 2.9 unmittelbar

Korollar 2.15 *Es seien $\mathcal{D}^2_{q,G}$ und $\mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$ zwei Dirichleträume, wobei G regulär langsam sowie $\tilde{G}$ in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ subharmonisch sei. Gibt es ein $\alpha\in(-1,\infty)$, für das $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend ist in $[r,1)$ für ein $r\in(0,1)$, so gilt $\mathcal{D}^2_{q,G}\subseteq\mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$ genau dann, wenn $\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}}\frac{\tilde{G}(w)}{G(w)}<\infty$.*

Wir spezialisieren dieses Korollar nun noch weiter, und zwar auf Dirichleträume, die Bergmanräume sind:

Korollar 2.16 *Es seien $\mathcal{A}^2_G$ und $\mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ zwei Bergmanräume und dazu H bzw. $\tilde{H}$ gemäß* (1.35) *gebildet. Ist G regulär langsam, so gilt $\mathcal{A}^2_G\subseteq\mathcal{A}^2_{\tilde{G}}$ genau dann, wenn $\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}}\frac{\tilde{H}(w)}{H(w)}<\infty$.*

Beweis: Nach Satz 1.34 ist $\tilde{H}$ subharmonisch und $H=\frac{H}{G_0}$ monoton fallend in $(0,1)$, und nach Satz 2.13 ist H regulär langsam. Damit folgt die Behauptung aus Korollar 2.15. □

Wie im letzten Abschnitt erklärt, ist das Resultat des vorangegangenen Korollars maximal in dem Sinn, dass eine allgemein gültige Charakterisierung mittels des Quotienten $\frac{\tilde{G}}{G}$ nicht möglich ist.

2.3 $\mathcal{H}^2$ und die Bergmanräume

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Lage des ungewichteten Hardyraums $\mathcal{H}^2$ zu den Bergmanräumen. Diese wird charakterisiert durch

Satz 2.17 *Es gilt*

$$\mathcal{H}^2=\bigcap_{\mu:\ \mu\ \text{Gewichtsmaß}}\mathcal{A}^2_\mu\ ,$$

und die Inklusionsabbildung von $\mathcal{H}^2$ in einen beliebigen Bergmanraum ist kompakt.

Insbesondere ist also $\mathcal{H}^2$ in jedem Bergmanraum enthalten, und es gilt $\mathcal{H}^\infty \subseteq \bigcap \mathcal{A}^2_\mu = \mathcal{H}^2$.

Beweis: Ist $\mathcal{A}^2_\mu$ ein Bergmanraum, so gilt gemäß Satz 1.14 $\|\cdot\|_\mu = \|\cdot\|_{(p_n)}$, wobei $p_n \to 0$ bei $n \to \infty$. Daraus folgt nach Satz 2.1 $\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{A}^2_\mu$ mit kompakter Inklusionsabbildung.
Laut [S2, S. 12] gilt $\|f\|^2_{(1)} = \lim_{r \nearrow 1} m_f(r)$ mit m_f gemäß (1.8). Ist nun $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D}) \setminus \mathcal{H}^2$, so findet man folglich $r_n \in [0,1)$ mit $r_n \nearrow 1$ und $m_f(r_n) > 2^n$. Definiert man $\hat{\mu} := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \delta_{r_n}$, so ist das zugehörige μ ein Gewichtsmaß. Für dieses gilt $\|f\|^2_\mu = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} m_f(r_n) = \infty$ [beachte (1.2)], d. h. $f \notin \mathcal{A}^2_\mu$, so dass f auch nicht im Schnitt aller Bergmanräume enthalten ist. □

Wie in (2.5) gesehen gilt $\mathcal{A}^2_{G_\alpha} = \mathcal{H}^2_{(p^*_{\alpha,n})}$ $(\alpha > -1)$, wobei $\lim_{\alpha \searrow -1} p^*_{\alpha,n} = 1$, und in vielerlei Hinsicht kann man $\mathcal{H}^2$ als Grenzfall $\alpha = -1$ der Standardbergmanräume auffassen, so z. B. bei den reproduzierenden Kernen der jeweiligen Räume [s. (1.19)]. Auch bei der Darstellung der Standardbergmanräume und von $\mathcal{H}^2$ als Dirichleträume kommt dieses Verhalten zum Ausdruck: Es gilt $\mathcal{H}^2 = \mathcal{D}^2_{1,H_{-1}} = \mathcal{D}^2_{1,G_1}$ gemäß (1.30) und Satz 2.3 sowie $\mathcal{A}^2_{G_\alpha} = \mathcal{D}^2_{1,G_{\alpha+2}}$ $(\alpha > -1)$ gemäß (2.6). Weiterhin wird bei den durch $G_\alpha dA$ definierten Wahrscheinlichkeitsmaßen bei $\alpha \searrow -1$ immer mehr Masse zur Einheitskreislinie hin verschoben, und tatsächlich gilt $\|f\|^2_{(1)} = \int_0^{2\pi} |f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$, wobei die radialen Grenzwerte $f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) := \lim_{r \nearrow 1} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ für Funktionen $f \in \mathcal{H}^2$ für fast alle θ existieren (s. [Ru, Th. 17.11]). Der ungewichtete Hardyraum $\mathcal{H}^2$ korrespondiert also mit dem normalisierten eindimensionalen Lebesguemaß auf $\mathbb{T}$. Dies stellt zwar kein Gewichtsmaß dar, wendet man aber darauf dennoch formal Satz 1.31 an, so erhält man das stetige Gewicht H_{-1} und damit die Littlewood-Paley-Identität.
Allerdings gibt es auch Unterschiede zwischen $\mathcal{H}^2$ und den Standardbergmanräumen, beispielsweise bei der Untersuchung der Kompaktheit von Kompositionsoperatoren (s. Theorem 4.14). Letzteres liegt sicherlich auch daran, dass eine entsprechende Verschärfung von Satz 2.17 nicht möglich ist: Die durch $f(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$ definierte Funktion ist offensichtlich Element von

$$\bigcap_{\alpha \in (-1,\infty)} \mathcal{H}^2_{(p^*_{\alpha,n})} \setminus \mathcal{H}^2 = \bigcap_{\alpha \in (-1,\infty)} \mathcal{A}^2_{G_\alpha} \setminus \mathcal{H}^2 .$$

Weitergehend kann man sogar zeigen, dass der Schnitt über alle Standardbergmanräume überhaupt kein Hardyraum ist: Nimmt man nämlich $\mathcal{H}^2_\wp = \bigcap_{\alpha\in(-1,\infty)} \mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ $[\wp{=}(p_n)]$ an, so folgt bei beliebigem $-1{<}\alpha'{<}\alpha$ aus Satz 2.3, dass $\mathcal{H}^2_\wp \subseteq \mathcal{H}^2_{(p^*_{\alpha',n})} \subset \mathcal{H}^2_{(p^*_{\alpha,n})}$. Damit gibt es nach Satz 2.1 zu jedem $\alpha{\in}(-1,\infty)$ eine Teilfolge $(n_{\alpha,k})$ mit $p_{n_{\alpha,k}}/p^*_{\alpha,n_{\alpha,k}} = p_{n_{\alpha,k}}(n_{\alpha,k}{+}1)^{\alpha+1} \longrightarrow \infty$ bei $k{\to}\infty$. Wählt man nun eine Folge (α_k) mit $\alpha_k{\searrow}{-1}$, so existiert daher eine Teilfolge (n_k) mit $p_{n_k}(n_k{+}1)^{\alpha_k+1} \geq 2^k$. Für die durch $f(z) := \sum_{k=1}^\infty \frac{z^{n_k}}{\sqrt{p_{n_k}}}$ definierte Funktion gilt nun einerseits offensichtlich $\|f\|_\wp{=}\infty$. Andererseits gibt es zu festem $\alpha{\in}(-1,\infty)$ ein K mit $\alpha_k{\leq}\alpha$ für $k{\geq}K$, womit

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{(p^*_{\alpha,n})} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_{n_k}(n_k{+}1)^{\alpha+1}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{p_{n_k}(n_k{+}1)^{\alpha+1}} + \sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{p_{n_k}(n_k{+}1)^{\alpha_k+1}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{p_{n_k}(n_k{+}1)^{\alpha+1}} + \sum_{k=K}^{\infty} 2^{-k} \;<\; \infty \;.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $\mathcal{H}^2_\wp \subset \bigcap_{\alpha\in(-1,\infty)} \mathcal{A}^2_{G_\alpha}$ im Widerspruch zur Annahme.

3 Anzahlfunktionen

In diesem Kapitel entwickeln wir die Theorie der Anzahlfunktionen, die wir im vierten Kapitel zur Untersuchung der Kompositionsoperatoren benötigen werden.

3.1 Anzahlfunktionen allgemein

Für eine holomorphe Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ bezeichne $n_\varphi(w) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ die Anzahl der Urbilder von $w \in \mathbb{D}$ unter φ bei Berücksichtigung der Vielfachheit. Ist $\varphi = a$, d. h. φ konstant, so gilt $n_\varphi(a) = \infty$ und $n_\varphi(w) = 0$ für $w \neq a$. Für nichtkonstantes φ haben die w-Stellen von φ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{D}$. Also nimmt φ den Wert w in jeder Kreisscheibe $B_r(0)$ $(r \in [0,1))$ nur endlich oft an. Die Menge der Urbilder von w ist somit höchstens abzählbar, und man kann die Urbilder so anordnen, daß ihr Betrag wächst. Seien demgemäß $z_{\varphi,1}(w), z_{\varphi,2}(w), \ldots$ die Urbilder von w (Vielfachheit berücksichtigt), wobei $|z_{\varphi,j}(w)| \leq |z_{\varphi,j+1}(w)|$ [leere Bedingung für $n_\varphi(w) \in \{0,1\}$; $j = 1, \ldots, n_\varphi(w) - 1$ für $n_\varphi(w) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; $j \in \mathbb{N}$ für $n_\varphi(w) = \infty$]. Wenn klar ist, zu welcher Selbstabbildung die obigen Größen gebildet sind, werden wir den Index φ jeweils weglassen.
Diese Notation dient zu einer Verallgemeinerung der Variablentransformationsformel auf nicht-injektive Abbildungen. Da diese Verallgemeinerung in der Literatur überhaupt nicht oder nur sehr knapp und ohne Messbarkeitsbetrachtungen bewiesen wird, geben wir an dieser Stelle einen vollständigen Beweis.

Satz 3.1 (vgl. [Mo, S. 25]) *Es seien φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ und $h\colon \mathbb{D} \setminus \{0\} \to [0, \infty]$ Lebesgue-messbar. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{D}\setminus\{0\}} h|\varphi'|^2 \, dA = \int_{\mathbb{D}\setminus\{\varphi(0)\}} \sum_{n=1}^{n(w)} h(z_n(w)) \, dA(w) \ ,$$

wobei $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}\to[0,\infty],\ w\mapsto\sum_{n=1}^{n(w)} h(z_n(w))$ *wiederum Lebesgue-messbar ist.*

Beachte, dass der rechte Integrand auch bei konstantem φ definiert ist, da in diesem Fall $n(w)=0$ für $w\in\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$.

Beweis: Ist φ konstant, so ist $\varphi'=0$ sowie $\sum_{n=1}^{n(w)} h(z_n(w)) = 0$ für $w\in\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$, was den Satz beweist. Andernfalls besteht die Beweisidee darin, die punktierte Einheitskreisscheibe in abzählbar viele Mengen zu unterteilen, in denen φ injektiv ist, und dort die Variablentransformationsformel für injektive Abbildungen anzuwenden.
Sei dazu $A:=\{z\in\mathbb{D}\colon\ \varphi'(z)=0\}\cup\{0\}$. Weil φ nicht konstant ist, hat A keinen Häufungspunkt in $\mathbb{D}$. Also gibt es zu jedem $z\in\mathbb{D}\backslash A$ eine offene Kreisscheibe $U_z\subseteq\mathbb{D}\backslash A$, in der φ injektiv ist. Sei für $j\in\mathbb{N}$

$$K_j = \overline{B_{1-2^{-j}}(0)} \setminus \bigcup_{a\in A} B_{2^{-j}}(a) \subseteq \mathbb{D}\setminus A\ .$$

Dann sind die K_j beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Deren offene Überdeckung $\{U_z\colon\ z\in K_j\}$ hat somit eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir $U_{j,1},...,U_{j,l_j}$ ($l_j=0$ bei $K_j=\emptyset$). Nach Konstruktion der U_z ist $\varphi_{j,l}:=\varphi|_{U_{j,l}}$ schlicht. Damit ist für jede Lebesgue-messbare Funktion $\tilde{h}\colon\ \mathbb{D}\backslash\{0\}\to[0,\infty]$ die Abbildung $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}\to[0,\infty],\ w\mapsto\sum_{n\colon z_n(w)\in U_{j,l}}\tilde{h}(z_n(w))$ Lebesgue-messbar, da sie auf $(\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\})\backslash\varphi(U_{j,l})$ [Lebesgue-messbar, da $\varphi(U_{j,l})$ offen] Null ist und auf $\varphi(U_{j,l})$ mit $\tilde{h}\circ\varphi_{j,l}^{-1}$ übereinstimmt, wobei $\tilde{h}\circ\varphi_{j,l}^{-1}$ als Verkettung einer Lebesgue-messbaren mit einer biholomorphen Funktion Lebesgue-messbar ist. Weiterhin gilt nach der Variablentransformationsformel für injektive Abbildungen

$$\begin{aligned}\int_{U_{j,l}} \tilde{h}|\varphi'|^2\, dA &= \int_{\varphi(U_{j,l})} \tilde{h}\circ\varphi_{j,l}^{-1}\, dA \\ &= \int_{\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}} \sum_{n\colon z_n(w)\in U_{j,l}} \tilde{h}(z_n(w))\, dA(w)\ .\end{aligned}$$

Da A keinen Häufungspunkt in $\mathbb{D}$ besitzt, hat jedes $z\in\mathbb{D}\backslash A$ einen positiven Abstand zu A, ist also, da es auch einen positiven Abstand zu T hat, ab einem j_0 in den K_j enthalten. Wegen $U_z\subseteq\mathbb{D}\backslash A$ gilt daher $\mathbb{D}\backslash A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \subseteq$

$\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{l_j} U_{j,l} \subseteq \mathbb{D}\backslash A$, und definiert man die Lebesgue-messbaren Mengen $V_{j,l}$ durch

$$V_{j,l} := U_{j,l} \setminus \left(\bigcup_{\iota=1}^{j-1} \bigcup_{\lambda=1}^{l_\iota} U_{\iota,\lambda} \cup \bigcup_{\lambda=1}^{l-1} U_{j,\lambda} \right) ,$$

so ist $\mathbb{D}\backslash A$ sogar die disjunkte Vereinigung der $V_{j,l}$. Damit gilt für alle $w{\in}\mathbb{D}\backslash\varphi(A)$, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_j}\sum_{n:\, z_n(w)\in U_{j,l}} 1_{V_{j,l}}(z_n(w))h(z_n(w))$$

$$\overset{V_{j,l}\subseteq U_{j,l}}{=} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_j}\sum_{n:\, z_n(w)\in V_{j,l}} h(z_n(w)) \;=\; \sum_{n=1}^{n(w)} h(z_n(w)) \;.$$

Wie bei der Einführung von $z_{\varphi,j}(w)$ erhält man, dass A und damit auch $\varphi(A)$ höchstens abzählbar ist. Die Mengen A und $\varphi(A)$ sind damit Nullmengen. Wegen der Lebesgue-Messbarkeit der $V_{j,l}$ ist die Funktion $1_{V_{j,l}}{\cdot}h$ und damit nach Obigem (mit $\tilde{h}{:=}1_{V_{j,l}}{\cdot}h$) auch die Funktion $w \longmapsto \sum_{n:\, z_n(w)\in U_{j,l}} 1_{V_{j,l}}(z_n(w))h(z_n(w))$ Lebesgue-messbar. Insbesondere ist somit $w \longmapsto \sum_{n=1}^{n(w)} h(z_n(w))$ als punktweise-fast-überall-Grenzwert [pktw. in $\mathbb{D}\backslash\varphi(A)$] Lebesgue-messbarer Funktionen Lebesgue-messbar (beachte die Vollständigkeit des Lebesguemaßes).

Mit dem bisher Gezeigten und dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}\backslash\{0\}} h|\varphi'|^2\, dA \;&=\; \int_{\mathbb{D}\backslash A} h|\varphi'|^2\, dA \\
=\;& \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_j}\int_{V_{j,l}} h|\varphi'|^2 dA \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_j}\int_{U_{j,l}} 1_{V_{j,l}} h|\varphi'|^2\, dA \\
=\;& \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_j}\int_{\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}} \sum_{n:\, z_n(w)\in U_{j,l}} 1_{V_{j,l}}(z_n(w))h(z_n(w))\, dA(w) \\
=\;& \int_{\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}} \sum_{n=1}^{n(w)} h(z_n(w))\, dA(w) \;.
\end{aligned}$$

□

Ist nun $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum zu einem stetigen Gewicht, so erhält man mit obigem Satz für die Norm von $C_\varphi f$ $(f \in \mathrm{H}(\mathbb{D}))$

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f\|^2_{q,G} &= q|(f\circ\varphi)(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}\setminus\{0\}} |(f\circ\varphi)'|^2 G\, dA \\
&= q|f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}\setminus\{0\}} |f'\circ\varphi|^2|\varphi'|^2 G\, dA \\
&= q|f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}\setminus\{\varphi(0)\}} \sum_{n=1}^{n(w)} |f'(\varphi(z_n(w)))|^2 G(z_n(w))\, dA(w) \\
&= q|f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}\setminus\{\varphi(0)\}} |f'(w)|^2 \sum_{n=1}^{n(w)} G(z_n(w))\, dA(w) \ .
\end{aligned}$$

Die vorangegangene Formel legt es nahe, der in dem Integral auftretenden Summe einen Namen zu geben:

Definition 3.2 (Anzahlfunktionen) *Zu einem stetigen Gewicht G und einer holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ heißt die durch*

$$K_\varphi(w) := \sum_{n=1}^{n(w)} G(z_n(w))$$

in $\mathbb{D}\setminus\{\varphi(0)\}$ definierte Funktion Anzahlfunktion.

Anzahlfunktionen nehmen im Allgemeinen Werte in $[0,\infty]$ an, beispielsweise gilt $K_\varphi(w)=0$ für $w \in \mathbb{D}\setminus\varphi(\mathbb{D})$ (leere Summe). Des Weiteren ist nach Satz 3.1 K_φ Lebesgue-meßbar, und die Norm von $C_\varphi f$ läßt sich nunmehr schreiben als

$$\|C_\varphi f\|^2_{q,G} = q|f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'|^2 K_\varphi\, dA \ , \tag{3.3}$$

wobei die Definitionslücke von K_φ an der Stelle $\varphi(0)$ (genauso wie diejenige stetiger Gewichte im Nullpunkt) bei der Integration unerheblich ist. In der Literatur werden die Variablentransformationsformel und Anzahlfunktionen zumeist nur für nichtkonstante Selbstabbildungen betrachtet. Allerdings gelten Formel 3.3, auf der unsere Stetigkeits- und Kompaktheitsuntersuchungen aufbauen, sowie alle unsere Sätze (mit Beweis) auch im Fall konstanter Selbstabbildungen, so dass wir diese Einschränkung nicht machen und uns damit unnötige Fallunterscheidungen sparen.

Oftmals ist es nützlich, das Randverhalten einer holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ zunächst nicht zu berücksichtigen. Dazu definieren wir $\varphi_r(z){:=}\varphi(rz)$ für $r{\in}(0,1]$, so dass die φ_r wiederum holomorphe Selbstabbildungen von $\mathbb{D}$ sind, die jedoch für $r{<}1$ noch holomorph in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ sind und $\overline{\varphi_r(\mathbb{D})}{\subseteq}\mathbb{D}$ erfüllen. Sie sind die Einschränkungen von φ auf $B_r(0)$, deren Definitionsbereich dann auf ganz $\mathbb{D}$ aufgebläht wird. Mit Hilfe dieser Funktionen geben wir

Definition 3.4 (reduzierte Anzahlfunktionen)
Zu einem stetigen Gewicht G, einer holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ und $r{\in}(0,1]$ sei $K_{\varphi,r}{=}K_{\varphi_r}$. Für $r{\in}(0,1)$ heißen diese in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ definierten Funktionen reduzierte Anzahlfunktionen.

Die bekannteste Anzahlfunktion, die auch der Ausgangspunkt für die Betrachtung von Anzahlfunktionen im Zusammenhang mit Kompositionsoperatoren war (s. [S1]), ist die Nevanlinnasche Anzahlfunktion.

Definition 3.5 (Nevanlinnasche Anzahlfunktion) (vgl. [S2, S. 179])
Zu einer holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ ist die Nevanlinnasche Anzahlfunktion N_φ in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ definiert durch

$$N_\varphi(w) := \sum_{n=1}^{n(w)} \log \tfrac{1}{|z_n(w)|} \ .$$

Die Nevanlinnasche Anzahlfunktion ist endlich in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$, denn es gilt

Lemma 3.6 (Littlewoodsche Ungleichung) (s. [S2, S. 187]) *Für die zu einer beliebigen holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ gebildete Nevanlinnasche Anzahlfunktion gilt*

$$N_\varphi(w) \leq \log \left| \tfrac{1-\overline{\varphi(0)}w}{\varphi(0)-w} \right| \qquad (w{\in}\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}) \ .$$

Insbesondere zeigt die Littlewoodsche Ungleichung, dass $\lim_{w\nearrow\mathrm{T}} N_\varphi(w) = 0$. Für weitere Eigenschaften der Nevanlinnaschen Anzahlfunktion siehe das Ende des folgenden Abschnitts.
Die Nevanlinnasche Anzahlfunktion ist bis auf den Faktor 2 die Anzahlfunktion zu dem in (1.30) definierten Gewicht H_{-1}, das die Darstellung des ungewichteten Hardyraums $\mathcal{H}^2$ als Dirichletraum erlaubt. Um im Hinblick auf den nächsten Abschnitt die Littlewoodsche Ungleichung in einen allgemeineren Rahmen zu stellen, schreiben wir sie in der Form

$$2N_\varphi(w) \leq H_{-1}\left(\tfrac{\varphi(0)-w}{1-\overline{\varphi(0)}w}\right) = H_{-1}(S_{\varphi(0)}(w)) \ .$$

3.2 Anzahlfunktionen bei Bergmanräumen

Im Zusammenhang mit Kompositionsoperatoren betrachtet Shapiro in [S1] Anzahlfunktionen zu den Standardgewichten und erwähnt, dass eine Verallgemeinerung auf Dirichleträume möglich sein müßte. Einen ersten Schritt in diese Richtung machen Kriete und MacCluer für Bergmanräume, die ja gemäß Satz 1.31 spezielle Dirichleträume sind, in [KM]. Allerdings definieren sie explizit keine Anzahlfunktionen und untersuchen auch deren Eigenschaften nicht genauer, was wir im Folgenden tun werden. Und da in dem Fall, dass $\mathcal{D}^2_{p,H}$ ein Bergmanraum ist, das Gewicht H nach Satz 1.34 besondere Eigenschaften hat, werden wir in diesem Fall für die Anzahlfunktionen auch entsprechend schöne Resultate zu erhalten. Diese Resultate gelten dann meist noch in einem etwas allgemeineren Rahmen, so z. B. bei

Satz 3.7 *Es seien G ein stetiges Gewicht und φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$. Gilt $\limsup_{z\nearrow\mathrm{T}} E(z) < \infty$ für die zu G gemäß* (1.33) *gebildete Vergleichsfunktion E, so ist die zu G und φ gemäß Definition 3.2 gebildete Anzahlfunktion K_φ endlich in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$.*

Beweis: Wir wählen nach Vorraussetzung $r{\in}(0,1)$ und $C{<}\infty$ mit $E{<}C$ in $\mathbb{D}\backslash r\mathbb{D}$, und zu festem $w{\in}\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ sei $N{\in}\mathbb{N}_0$ die Anzahl der Urbilder von w unter φ mit Betrag kleiner r bei Berücksichtigung der Vielfachheit. Damit gilt

$$\begin{aligned} K_\varphi(w) &= \sum_{n=1}^{N} G(z_n(w)) + \sum_{n=N+1}^{n(w)} E(z_n(w))H_{-1}(z_n(w)) \\ &\le \sum_{n=1}^{N} G(z_n(w)) + C \sum_{n=N+1}^{n(w)} H_{-1}(z_n(w)) \\ &\le \sum_{n=1}^{N} G(z_n(w)) + 2CN_\varphi(w) \;<\; \infty \;, \end{aligned}$$

da zum einen $2N_\varphi$ die Anzahlfunktion zu H_{-1} und φ ist und N_φ zum anderen endlich ist nach Lemma 3.6. □

Stellt man an die Vergleichsfunktion E etwas stärkere Forderungen als in obigem Satz, so sind die zu dem dazugehörigen Gewicht G gebildeten Anzahlfunktionen nicht nur endlich, man kann sogar die Littlewoodsche Ungleichung 3.6 übertragen:

Satz 3.8 *Es seien G ein stetiges Gewicht, φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$, $a{=}\varphi(0)$ und zu G und φ die Anzahlfunktion K_φ gemäß Definition 3.2 gebildet. Gibt es ein $r{\in}(0,1)$, für das die zu G gemäß* (1.33) *gebildete Vergleichsfunktion E monoton fallend in $[r,1)$ ist, so gilt* $\lim_{w\nearrow\mathbb{T}} K_\varphi(w) = 0$ *sowie* $K_\varphi(w) \le 2E(r)N_\varphi(w)$ *und*

$$K_\varphi(w) \le G(S_a(w)) = G\left(\tfrac{\varphi(0)-w}{1-\overline{\varphi(0)}w}\right)$$

für $w{\in}\mathbb{D}\backslash S_a(r\mathbb{D})$, und K_φ ist endlich in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$.

Für die Definition der S_a siehe (2.1).

Beweis: Die behauptete Endlichkeit von K_φ folgt aus Satz 3.7.
Die beiden Ungleichungen sind für $w{\in}\mathbb{D}\backslash\varphi(\mathbb{D})$ trivialerweise erfüllt; im Fall $w{\in}\varphi(\mathbb{D})\backslash S_a(r\mathbb{D})$ gilt für $N{\in}\mathbb{N}$ mit $N{\le}n(w)$

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{N} |z_j(w)| &= \exp\left(-\textstyle\sum_{j=1}^{N} \log \frac{1}{|z_j(w)|}\right) \;\ge\; \exp(-N_\varphi(w)) \\ &\overset{(3.6)}{\ge} \exp(\,-\tfrac{1}{2}H_{-1}(S_a(w))\,) \;=\; |S_a(w)| \;\ge\; r \end{aligned}$$

[beachte $S_a(\mathbb{D}\backslash S_a(r\mathbb{D})) = \mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}$], also $r \leq \prod_{j=1}^{N} |z_j(w)| \leq |z_n(w)|$ für jedes Urbild $z_n(w)$. Damit folgt aus der Monotonie von E

$$\sum_{n=1}^{N} G(z_n(w)) = \sum_{n=1}^{N} E(z_n(w))H_{-1}(z_n(w)) \leq E(r) \sum_{n=1}^{N} H_{-1}(z_n(w)) \ .$$

Lässt man ggf. N gegen Unendlich gehen, folgt daraus die erste Ungleichung. Schätzt man nicht ganz so grob ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} G(z_n(w)) &\leq \sum_{n=1}^{N} E\left(\prod_{j=1}^{N} z_j(w)\right) H_{-1}(z_n(w)) \\ &= E\left(\prod_{n=1}^{N} z_n(w)\right) H_{-1}\left(\prod_{n=1}^{N} z_n(w)\right) \\ &= G\left(\prod_{n=1}^{N} z_n(w)\right) \ . \end{aligned}$$

Beachtet man obige Abschätzung für $\prod_{j=1}^{N} |z_j(w)|$ und dass aus der Monotonie von E folgt, dass auch G in $[r, 1)$ monoton fallend ist, so folgt daraus $\sum_{n=1}^{N} G(z_n(w)) \leq G(S_a(w))$ und damit die zweite Ungleichung. Weiterhin folgt aus der Monotonie von E, dass $\lim_{z \nearrow \mathrm{T}} G(z) = 0$, woraus man mittels der eben bewiesenen Ungleichung $\lim_{w \nearrow \mathrm{T}} K_\varphi(w) = 0$ ableitet. □

Dieser Satz greift insbesondere, wenn man Bergmanräume als Dirichleträume darstellt. In diesem Fall können wir jedoch noch weitreichendere Aussagen beweisen:

Satz 3.9 *Es seien $\mathcal{A}^2_\mu$ Bergmanraum, φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ sowie p und H zu μ gemäß Satz 1.31 und K_φ zu φ und H gemäß Definition 3.2 gebildet. Dann gelten $K_\varphi \leq 2pN_\varphi < \infty$ in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$,*

$$K_\varphi(w) \leq H(S_{\varphi(0)}(w)) = H\left(\frac{\varphi(0)-w}{1-\overline{\varphi(0)}w}\right) \qquad (w \in \mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\})$$

und $\lim_{w \nearrow \mathrm{T}} K_\varphi(w) = 0$ *. Des Weiteren hat K_φ bei nichtkonstantem φ in $\varphi(0)$ eine logarithmische Singularität, genauer*

$$\lim_{w \to \varphi(0)} \frac{K_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w-\varphi(0)|}} = 2\hat{\mu}((0,1)) \ .$$

Beweis: Dass wir Satz 3.8 mit beliebigem $r\in(0,1)$ auf $\mathcal{D}^2_{p,H}$ anwenden können, folgt aus Satz 1.34. Da dieser Satz auch $E\leq p$ gezeigt hat, sind alle Behauptungen mit Ausnahme derer über die Singularität bereits bewiesen. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
\limsup_{w\to\varphi(0)} \frac{K_\varphi(w)}{\log\frac{1}{|w-\varphi(0)|}} &\leq \lim_{w\to\varphi(0)} \frac{H\left(\frac{\varphi(0)-w}{1-\overline{\varphi(0)}w}\right)}{\log\frac{1}{|w-\varphi(0)|}} \\
&= 2\lim_{w\to\varphi(0)} \frac{\log\left|\frac{1-\overline{\varphi(0)}w}{\varphi(0)-w}\right|}{\log\frac{1}{|w-\varphi(0)|}} \lim_{w\to\varphi(0)} E\left(\frac{\varphi(0)-w}{1-\overline{\varphi(0)}w}\right) \\
&= 2\cdot 1\cdot \lim_{z\to 0} E(z) \;=\; 2\hat{\mu}((0,1))\ ,
\end{aligned}$$

letzteres wiederum nach Satz 1.34. Für die umgekehrte Abschätzung schreiben wir die nichtkonstante Funktion φ in der Nähe der 0 in der Form $\varphi = \varphi(0)+\psi^k$ mit schlichtem ψ und $\psi(0)=0$. Wählt man ein $\gamma\in(0,|\psi'(0)|)$, so gilt $|\psi^{-1}(z)|\leq\frac{|z|}{\gamma}$ für kleine z und damit

$$\begin{aligned}
\liminf_{w\to\varphi(0)} \frac{K_\varphi(w)}{\log\frac{1}{|w-\varphi(0)|}} &= \liminf_{\varrho\searrow 0,\ \theta\text{ bel.}} \frac{K_\varphi(\varphi(0)+\varrho e^{i\theta})}{\log\frac{1}{|\varrho e^{i\theta}|}} \\
&\geq \liminf_{\varrho\searrow 0,\ \theta\text{ bel.}} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{H\left(\psi^{-1}(\varrho^{1/k}e^{i(\theta+2\pi l)/k})\right)}{\log\frac{1}{\varrho}} \\
&= \liminf_{\varrho\searrow 0,\ \theta\text{ bel.}} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{H\left(\psi^{-1}(\varrho^{1/k}e^{i(\theta+2\pi l)/k})\right)}{\log\frac{1}{|\psi^{-1}(\varrho^{1/k}e^{i(\theta+2\pi l)/k})|}} \frac{\log\frac{1}{|\psi^{-1}(\varrho^{1/k}e^{i(\theta+2\pi l)/k})|}}{\log\frac{1}{\varrho}} \\
&\geq \liminf_{\varrho\searrow 0,\ \theta\text{ bel.}} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{H\left(\psi^{-1}(\varrho^{1/k}e^{i(\theta+2\pi l)/k})\right)}{\log\frac{1}{|\psi^{-1}(\varrho^{1/k}e^{i(\theta+2\pi l)/k})|}} \frac{\log\frac{\gamma}{\varrho^{1/k}}}{\log\frac{1}{\varrho}} \\
&= k\cdot 2\lim_{z\to 0} E(z)\cdot\frac{1}{k} \;=\; 2\hat{\mu}((0,1))\ ,
\end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Während wir bisher Abschätzungen für K_φ gegeben haben, untersuchen wir nun die analytischen Eigenschaften von (reduzierten) Anzahlfunktionen.

Satz 3.10 *Es seien G ein stetiges Gewicht, φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ und zu φ und G die reduzierten Anzahlfunktionen $K_{\varphi,r}$ gemäß Definition 3.4 gebildet. Gilt* $\lim_{z\nearrow\mathbb{T}} G(z) = 0$ *, so ist $K_{\varphi,\cdot}(\cdot)$ stetig in $(0,1)\times(\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\})$. Ist G zusätzlich subharmonisch in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$, so sind G und das zu G gemäß* (1.33) *gebildete E monoton fallend in* $(0,1)$*, $K_{\varphi,r}$ subharmonisch in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ für festes $r\in(0,1)$ und $K_{\varphi,\cdot}(w)$ monoton wachsend in* $(0,1]$ *für festes $w\in\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$, und K_φ erfüllt in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ die Mittelwertungleichung subharmonischer Funktionen.*

Beweis: Erfüllt G auch die Zusatzvoraussetzung der Subharmonizität, so gilt für festes $r\in(0,1)$, dass $G(z) = E(r)H_{-1}(z)$ für z mit $|z|=r$ und $\lim_{z\nearrow\mathbb{T}} G(z) = E(r)\lim_{z\nearrow\mathbb{T}} H_{-1}(z) = 0$, also $G \leq E(r)H_{-1}$ in $\mathbb{D}\backslash r\mathbb{D}$ wegen der Harmonizität von H_{-1}. Daraus folgt $E(s)\leq E(r)$ für $s\in[r,1)$, so dass E und damit erst recht G monoton fallend in $(0,1)$ ist.
Ordnet man bei $z_{\varphi_r,\cdot}(w)$ die Urbilder mit gleichem Betrag entsprechend, so gilt $rz_{\varphi_r,n}(w)=z_{\varphi,n}(w)$ $[n=1,...,n_{\varphi_r}(w)]$. Nach Voraussetzung kann man G über $\mathbb{T}$ hinaus stetig durch Null fortsetzen, und unter der Zusatzvoraussetzung der Subharmonizität ist dieses G monoton fallend in $(0,\infty)$. Mit der so in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ definierten Funktion G gilt

$$K_{\varphi,r}(w) = \sum_{n:\,|z_{\varphi,n}(w)|<R} G(\tfrac{1}{r}z_{\varphi,n}(w)) = \sum_{n=1}^{N} G(\tfrac{1}{r}z_{\varphi,n}(w))$$

für alle $R\in[r,1]$ bzw. alle N mit $n_{\varphi_r}(w)\leq N\leq n_\varphi(w)$, also insbesondere

$$K_{\varphi,r}(w) = \sum_{n=1}^{n_\varphi(w)} G(\tfrac{1}{r}z_{\varphi,n}(w)) \ .$$

Dies beweist die Monotonie von $K_{\varphi,\cdot}(w)$ im Fall der Subharmonizität von G.
Sei nun $(r,w)\in(0,1)\times(\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\})$ beliebig, fest. Dazu wählen wir $R\in(r,1)$, so dass kein Urbild von w unter φ den Betrag R hat (beachte, dass die Menge der Urbilder von w unter φ höchstens abzählbar ist). Seien nun $z_1,...,z_m$ (paarweise verschieden) die Urbilder von w unter φ mit Betrag kleiner(gleich) R und $k_1,...,k_m$ ihre Vielfachheiten (ggf. $m=0$). Dann gibt es disjunkte Umgebungen $U_j\subseteq B_R(0)$ von z_j und in U_j schlichte Funktionen ψ_j mit $\varphi_j :=$

$\varphi|_{U_j} = w + \psi_j^{k_j}$ in U_j, wobei $\psi_j(z_j)=0$ ($j=1,...,m$). Angenommen, es gibt eine Folge (w_n) mit $w_n \to w$ und dazu $\zeta_n \in \overline{B_R(0)} \setminus \bigcup_{j=1}^m U_j$ mit $\varphi(\zeta_n)=w_n$. Da $\overline{B_R(0)}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (n_k) mit $\zeta_{n_k} \longrightarrow \zeta \in \overline{B_R(0)}$. Wegen der Stetigkeit von φ ist $\varphi(\zeta)=w$. Daraus folgt, daß es ein j_0 gibt mit $\zeta=z_{j_0}$ im Widerspruch zu $\zeta_{n_k} \notin U_{j_0}$, $\zeta_{n_k} \to \zeta$. Also gibt es ein $\varrho_0 \in (0, |w-\varphi(0)|)$ mit $B_{\varrho_0}(w) \subseteq \bigcap_{j=1}^m \varphi(U_j)$, so daß für jeden Punkt in $B_{\varrho_0}(w)$ alle Urbilder unter φ mit Betrag kleinergleich R in $\bigcup_{j=1}^m U_j$ liegen. Da die ψ_j schlicht sind, sind somit die Urbilder von $w+\varrho e^{i\theta}$ ($\varrho \in [0, \varrho_0)$) mit Betrag kleinergleich R gerade $\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j} e^{i(\theta+2\pi l)/k_j})$ ($j=1,...,m$; $l=0,...,(k_j-1)$) [beachte $\varphi_j^{-1}(B_{\varrho_0}(w)) \subseteq U_j \subseteq B_R(0)$]. Da wegen der Schlichtheit der ψ_j für $\varrho \neq 0$ alle Urbilder einfach sind, die U_j disjunkt sind und z_j gerade ein k_j-faches Urbild ist, sind in dieser Notation die Vielfachheiten berücksichtigt. Damit gilt nach obiger Darstellung von $K_{\varphi,r}(w)$ für alle $s \in (0, R]$, $\varrho \in [0, \varrho_0)$ und θ

$$K_{\varphi,s}(w+\varrho e^{i\theta}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_j-1} G\left(\tfrac{1}{s}\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j} e^{i(\theta+2\pi l)/k_j})\right) .$$

Für $(s_n, w+\varrho_n e^{i\theta_n}) \longrightarrow (r, w)$ gilt $\psi_j^{-1}(\varrho_n^{1/k_j} e^{i(\theta_n+2\pi l)/k_j}) \longrightarrow \psi_j^{-1}(0) = z_j$ und damit $\frac{1}{s_n}\psi_j^{-1}(\varrho_n^{1/k_j} e^{i(\theta_n+2\pi l)/k_j}) \longrightarrow \frac{1}{r} z_j$, woraus wegen der Stetigkeit von G

$$\begin{aligned} K_{\varphi,s_n}(w+\varrho_n e^{i\theta_n}) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_j-1} G\left(\tfrac{1}{s_n}\psi_j^{-1}(\varrho_n^{1/k_j} e^{i(\theta_n+2\pi l)/k_j})\right) \\ &\longrightarrow \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_j-1} G(\tfrac{1}{r} z_j) \;=\; K_{\varphi,r}(w) \end{aligned}$$

folgt, womit die Stetigkeit von $K_{\varphi,\cdot}(\cdot)$ in $(0,1) \times (\mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\})$ gezeigt ist.

Ist G subharmonisch in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, so ist die fortgesetzte Funktion subharmonisch in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Unter Verwendung der obigen Bezeichnungen ist damit auch die Funktion $z \longmapsto G\left(\frac{1}{r}\psi_j^{-1}(z)\right)$ in $B_{\rho_0}(0)$ als Verkettung einer subharmonischen mit einer holomorphen Funktion subharmonisch (s. [HK, S. 53]). Somit gilt für $\varrho \in (0, \varrho_0)$

$$\int_0^{2\pi} K_{\varphi,r}(w+\varrho e^{i\theta}) \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1}\int_0^{2\pi} G\left(\tfrac{1}{r}\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi l)/k_j})\right)\frac{d\theta}{2\pi}\\
&\overset{\vartheta=\theta/k_j}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1} k_j\int_0^{2\pi/k_j} G\left(\tfrac{1}{r}\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vartheta+2\pi l/k_j)})\right)\frac{d\vartheta}{2\pi}\\
&= \sum_{j=1}^{m} k_j\int_0^{2\pi} G\left(\tfrac{1}{r}\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})\right)\frac{d\vartheta}{2\pi}\\
&\geq \sum_{j=1}^{m} k_j G(\tfrac{1}{r}\psi_j^{-1}(0)) \;=\; \sum_{j=1}^{m} k_j G(\tfrac{1}{r}z_j) \;=\; K_{\varphi,r}(w)\ ,
\end{aligned}
$$

d. h. $K_{\varphi,r}$ erfüllt in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ die Mittelwertungleichung subharmonischer Funktionen. Da wir oben die Stetigkeit von $K_{\varphi,r}$ gezeigt haben, ist $K_{\varphi,r}$ somit subharmonisch. Wegen der Monotonie von $K_{\varphi,\cdot}(w)$ folgt daraus mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $K_\varphi{=}K_{\varphi,1}$ der Mittelwertungleichung subharmonischer Funktionen genügt. □

Da H_{-1} alle Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes erfüllt, haben wir insbesondere die bekannten Eigenschaften der reduzierten Nevanlinnaschen Anzahlfunktionen bewiesen: die Stetigkeit von $N_{\varphi,\cdot}(\cdot)$ in $(0,1)\times(\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\})$, die Monotonie in der ersten und Subharmonizität in der zweiten Variablen sowie dass N_φ selbst der Mittelwertungleichung subharmonischer Funktionen genügt.

Ist $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum zu einem subharmonischen stetigen Gewicht G mit $\lim_{z\nearrow\mathrm{T}} G(z) = 0$, so haben wir gerade gezeigt, dass das zu G gebildete E monoton fallend ist in $(0,1)$ ist, so dass entweder $\lim_{z\nearrow\mathrm{T}} E(z) > 0$ und damit $\mathcal{D}^2_{q,G}{=}\mathcal{H}^2$ nach Satz 2.3, oder $\lim_{z\nearrow\mathrm{T}} E(z) = 0$. In diesem Fall ist der Dirichletraum $(\mathcal{D}^2_{q,G}, \|\cdot\|_{q,G})$ bei $E{\leq}q$ ein Bergmanraum nach Satz 1.34. Bei $\lim_{z\to 0} E(z) > q$ überlegt man sich, dass $\mathcal{D}^2_{q,G}{=}\mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}$, wobei $(\mathcal{D}^2_{\tilde{q},\tilde{G}}, \|\cdot\|_{\tilde{q},\tilde{G}})$ ein Bergmanraum ist mit $\tilde{q} := \frac{G(\frac{1}{4})-G(\frac{1}{2})}{H_{-1}(\frac{1}{4})-H_{-1}(\frac{1}{2})}$, $\tilde{G}{:=}G$ in $\mathbb{D}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{D}$ und $\tilde{G} := \tilde{q}H_{-1} + \frac{G(\frac{1}{2})H_{-1}(\frac{1}{4})-G(\frac{1}{4})H_{-1}(\frac{1}{2})}{H_{-1}(\frac{1}{4})-H_{-1}(\frac{1}{2})}$ in $\frac{1}{2}\mathbb{D}\backslash\{0\}$. Zumindest im mengentheoretischen Sinn ist also $\mathcal{D}^2_{q,G}$ in jedem Fall gleich $\mathcal{H}^2$ oder einem Bergmanraum. Beschränkt man sich von vornherein auf Bergmanräume, so kann man die Stetigkeitsaussage von Satz 3.10 auf $r{=}1$ ausdehnen:

Satz 3.11 *Es seien $\mathcal{A}^2_\mu$ Bergmanraum, φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ sowie p und H zu μ gemäß Satz 1.31 und $K_{\varphi,r}$ zu φ und H gemäß Definition 3.4 gebildet. Dann ist $K_{\varphi,\cdot}(\cdot)$ stetig in $(0,1]{\times}(\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\})$ sowie $K_{\varphi,r}$ subharmonisch in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ für festes $r{\in}(0,1]$ und $K_{\varphi,\cdot}(w)$ monoton wachsend in $(0,1]$ für festes $w{\in}\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$.*

Damit ist insbesondere $K_\varphi{=}K_{\varphi,1}$ stetig und subharmonisch in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$.

Beweis: Die Stetigkeit in $(0,1){\times}(\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\})$, die Monotonie in der ersten und für $r{\in}(0,1)$ auch die Subharmonizität in der zweiten Variablen folgen wegen Satz 1.34 aus dem eben bewiesenen Satz.
Um die Stetigkeit von $K_{\varphi,\cdot}(\cdot)$ in den Punkten $(1,w)$ mit $w{\neq}\varphi(0)$ zu zeigen, wählen wir ein $\varrho_1{\in}(0,|w{-}\varphi(0)|)$ und bestimmen dazu eine Konstante C mit $N_\varphi{<}C$ in $B_{\varrho_0}(w)$ [beachte (3.6)]. Bildet man zu H die Vergleichsfunktion E gemäß (1.33), so ist E monoton fallend in $(0,1)$ mit $\lim_{z\nearrow\mathbb{T}} E(z) = 0$ nach Satz 1.34. Daher können wir zu $\varepsilon{>}0$ ein $R{\in}(0,1)$ wählen mit $E(R){\leq}\varepsilon$ und wiederum so, dass kein Urbild von w unter φ den Betrag R hat. Dann gilt mit der Konstruktion aus dem Beweis des vorangegangenen Satzes für $s{\in}(0,1]$ und $\varrho{\in}[0,\min\{\varrho_0,\varrho_1\})$:

$$
\begin{aligned}
&|\,K_{\varphi,1}(w) - K_{\varphi,s}(w{+}\varrho e^{i\theta})\,|\\
&\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1}\left|H(\psi_j^{-1}(0)) - H\left(\tfrac{1}{s}\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j}e^{i(\theta+2\pi l)/k_j})\right)\right|\\
&\quad + \sum_{n:\,|z_{\varphi,n}(w)|\geq R} H(z_{\varphi,n}(w))\\
&\quad + \sum_{n:\,|z_{\varphi,n}(w+\varrho e^{i\theta})|\geq R} H\left(\tfrac{1}{s}z_{\varphi,n}(w{+}\varrho e^{i\theta})\right)\\
&\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1}\left|H(\psi_j^{-1}(0)) - H\left(\tfrac{1}{s}\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j}e^{i(\theta+2\pi l)/k_j})\right)\right|\\
&\quad + 2\varepsilon \sum_{n:\,|z_{\varphi,n}(w)|\geq R} \log\tfrac{1}{|z_{\varphi,n}(w)|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\varepsilon \sum_{n:\, R \le |z_{\varphi,n}(w+\varrho+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| < s} \log \tfrac{s}{|z_{\varphi,n}(w+\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|} \\
\le\ & \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_j-1} \left| H(\psi_j^{-1}(0)) - H\left(\tfrac{1}{s}\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi l)/k_j})\right)\right| \\
&+ 2\varepsilon N_\varphi(w) + 2\varepsilon N_\varphi(w+\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \\
\le\ & \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_j-1} \left| H(\psi^{-1}(0)) - H\left(\tfrac{1}{s}\psi_j^{-1}(\varrho^{1/k_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi l)/k_j})\right)\right| + 4C\varepsilon
\end{aligned}
$$

Wegen der Stetigkeit von H und ψ_j^{-1} gibt es ein $r\in(0,1)$ und ein $\varrho_2\in(0,\min\{\varrho_0,\varrho_1\})$, so dass für $s\in(r,1]$ und $\varrho\in[0,\varrho_2)$ die verbleibende Summe kleiner $C\varepsilon$ ist. Damit gilt für $(s,v)\in(r,1]\times B_{\varrho_2}(w)$, dass $|K_{\varphi,1}(w)-K_{\varphi,s}(v)| < 5C\varepsilon$, was die Stetigkeit von $K_{\varphi,\cdot}(\cdot)$ im Punkt $(1,w)$ beweist, da C unabhängig von ε ist. Schließlich ist die Funktion $K_{\varphi,1}(\cdot)$ subharmonisch, da sie wie eben gezeigt stetig ist und nach Satz 3.10 die Mittelwertungleichung subharmonischer Funktionen erfüllt. □

Hier stellt sich nun heraus, dass Anzahlfunktionen zu Bergmanräumen sogar glatter sind als die Nevanlinnasche Anzahlfunktion. Letztere ist nämlich im Allgemeinen nicht subharmonisch, da sie als Grenzwert monoton wachsender stetiger Funktionen zwar untenhalbstetig, aber nicht notwendigerweise obenhalbstetig ist (siehe A.2 für ein konkretes Beispiel). Allerdings hat die Menge, auf der N_φ nicht obenhalbstetig ist, Kapazität 0 und damit Lebesguemaß 0 (s. [He, Th. 7.33 u. 7.39]).

4 Stetigkeit und Kompaktheit der Kompositionsoperatoren

In diesem Kapitel schränken wir den zu einer holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ gebildeten Kompositionsoperator

$$C_\varphi : \quad \mathrm{H}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathbb{D}) \ , \quad f \longmapsto f \circ \varphi$$

– ohne dies im Folgenden am Operatorsymbol kenntlich zu machen – auf die in Kapitel 1 definierten Funktionenräume ein, also im allgemeinsten Fall auf Hardyräume $\mathcal{H}^2_\wp$. Wir nennen C_φ stetig oder kompakt auf $\mathcal{H}^2_\wp$, wenn $C_\varphi \mathcal{H}^2_\wp \subseteq \mathcal{H}^2_\wp$ und C_φ als linearer Operator von $\mathcal{H}^2_\wp$ nach $\mathcal{H}^2_\wp$ stetig bzw. kompakt ist.
Allgemein ist die Operatornorm eines linearen Operators $L\colon \mathcal{H}^2_\wp \to \mathcal{H}^2_\wp$ mit Hilfe der Norm $\|\cdot\|_\wp$ von $\mathcal{H}^2_\wp$ definiert durch

$$\|L\|_\wp := \sup\{\|Lf\|_\wp \colon f \in \mathcal{H}^2_\wp,\ \|f\|_\wp \leq 1\} \ .$$

Da $\|\cdot\|_\wp$ und auch die Normen von Bergman- und Dirichleträumen stets auf ganz $\mathrm{H}(\mathbb{D})$ definiert sind ($\|f\|_\wp = \infty$ für $f \notin \mathcal{H}^2_\wp$), können wir die Operatornorm von C_φ (d. h. eigentlich von $C_\varphi|_{\mathcal{H}^2_\wp}$) wie oben auch definieren, wenn wir a priori nicht wissen, dass $C_\varphi \mathcal{H}^2_\wp \subseteq \mathcal{H}^2_\wp$. Mit dieser erweiterten Definition ist C_φ stetig auf $\mathcal{H}^2_\wp$ genau dann, wenn $\|C_\varphi\|_\wp < \infty$.
Ein stetiger linearer Operator $B\colon \mathcal{H}^2_\wp \to \mathcal{H}^2_\wp$ heißt kompakt, wenn er jede beschränkte Teilmenge von $\mathcal{H}^2_\wp$ auf eine relativ kompakte Menge abbildet. Da $\mathcal{H}^2_\wp$ ein Hilbertraum ist, ist dies äquivalent dazu, dass B vollstetig ist. Dies bedeutet, dass für jede Folge (f_n), die in $\mathcal{H}^2_\wp$ schwach gegen 0 konvergiert, die Bildfolge (Bf_n) in der Norm von $\mathcal{H}^2_\wp$ gegen 0 konvergiert.
Für einen stetigen linearen Operator $L\colon \mathcal{H}^2_\wp \to \mathcal{H}^2_\wp$ definiert man die essentielle Norm als Abstand in der Operatornorm zu den kompakten (linearen) Operatoren:

$$\|L\|_{\wp;e} := \inf\{\|L-B\|_\wp \colon B\colon \mathcal{H}^2_\wp \to \mathcal{H}^2_\wp \text{ kompakt}\}$$

Da wir für jeden kompakten Operator $B\colon \mathcal{H}^2_\wp \to \mathcal{H}^2_\wp$ auch die Operatornorm $\|C_\varphi - B\|_\wp$ ganz allgemein definieren können, wenn wir noch nicht einmal wissen, dass $C_\varphi \mathcal{H}^2_\wp \subseteq \mathcal{H}^2_\wp$, geschweige denn, dass C_φ stetig auf $\mathcal{H}^2_\wp$ ist, können wir auch die essentielle Norm für jeden Kompositionsoperator C_φ definieren. Damit ist C_φ genau dann stetig auf $\mathcal{H}^2_\wp$, wenn $\|C_\varphi\|_{\wp;e} < \infty$, und genau dann kompakt auf $\mathcal{H}^2_\wp$, wenn $\|C_\varphi\|_{\wp;e} = 0$ (beachte, dass die Menge der kompakten Operatoren als Teilmenge der Menge der stetigen linearen Operatoren abgeschlossen bzgl. der Operatornorm ist).

Um stetig oder gar kompakt auf einem Hardyraum $\mathcal{H}^2_\wp$ zu sein, muss ein Kompositionsoperator C_φ nach Definition vor allem $\mathcal{H}^2_\wp$ in sich abbilden. Dafür ist, da $\mathrm{id}\colon z \mapsto z$ oder allgemeiner $\mathrm{id}^n\colon z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ in jedem Hardyraum enthalten ist, eine notwendige Bedingung, dass $\varphi = C_\varphi \mathrm{id}$ und auch alle Potenzen $\varphi^n = C_\varphi \mathrm{id}^n$ von φ aus $\mathcal{H}^2_\wp$ sind. Diese Bedingung ist jedoch im Allgemeinen nicht hinreichend. Es ist einfach, Hardyräume zu konstruieren, auf denen C_φ zu $\varphi(z) = z^2$ unstetig ist, und ein Ergebnis von Kriete und MacCluer, das wir in Theorem 4.14 zitieren, zeigt, dass es sogar Bergmanräume – die ja mit $\mathcal{H}^\infty$ sämtliche Potenzen einer holomorphen Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ umfassen – gibt, auf denen nicht alle Kompositionsoperatoren stetig sind. Andererseits gilt

Satz 4.1 *Bildet C_φ den Hardyraum $\mathcal{H}^2_\wp$ in sich ab, so ist C_φ stetig auf $\mathcal{H}^2_\wp$.*

Beweis: Es gelte $f_n \longrightarrow f$ und $C_\varphi f_n \longrightarrow g$ in der Norm von $\mathcal{H}^2_\wp$. Da $\mathcal{H}^2_\wp$ nach Satz 1.10 ein Hilbertscher Funktionenraum ist, folgt aus der Normkonvergenz die punktweise Konvergenz und damit für $z \in \mathbb{D}$

$$C_\varphi f(z) = f(\varphi(z)) = \lim_{n\to\infty} f_n(\varphi(z)) = \lim_{n\to\infty} C_\varphi f_n(z) = g(z) \ ,$$

also $C_\varphi f = g$. Somit gilt nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, dass C_φ stetig auf $\mathcal{H}^2_\wp$ ist. □

4.1 Die essentielle Norm und Anzahlfunktionen

In diesem Abschnitt präsentieren wir einen Satz von Shapiro, der die essentielle Norm eines Operators auf einem Hilbertraum durch die Verkettung mit speziellen selbstadjungierten, normierten Operatoren berechnet. Analog zu Shapiros weiterem Vorgehen in [S1, Abschnitt 5] für den $\mathcal{H}^2$-Fall benutzen wir diesen Satz dann zunächst dazu, mittels Anzahlfunktionen eine obere Schranke für die essentielle Norm von Kompositionsoperatoren allgemein auf Dirichleträumen zu geben. Darüber hinaus geben wir eine allgemeine Methode, auch eine analoge Abschätzung der essentiellen Norm nach unten zu erhalten. Satz 4.12 zeigt, dass diese Methode beispielsweise auf alle Bergmanräume $\mathcal{A}^2_G$ zu einem regulär langsamen Gewicht G anwendbar ist. Eine derartige Abschätzung der essentiellen Norm nach unten war bisher nur für die Standardbergmanräume und $\mathcal{H}^2$ (s. [S1]) bekannt. Während Kriete und MacCluer im [KM] die Kompaktheit für Bergmanräume zu regulär schnellen Gewichten charakterisieren, können wir also nun die Kompaktheit für Bergmanräume zu regulär langsamen Gewichten charakterisieren. In diesem Abschnitt mittels Anzahlfunktionen, im folgenden Abschnitt (Korollar 4.18) verknüpfen wir das Kriterium mit den Winkelderivierten der zu C_φ gehörigen Abbildung φ.

Für den nächsten Satz definieren wir auf $H(\mathbb{D})$ die oben angekündigten Operatoren R_n ($n\in\mathbb{N}$) durch

$$R_n(z \mapsto \sum_{k=0}^\infty a_k z^k) := (z \mapsto \sum_{k=n}^\infty a_k z^k) \ .$$

Diese Operatoren sind offensichtlich auf jedem Hardyraum stetig mit Norm 1 sowie selbstadjungiert.

Satz 4.2 (vgl. [S1, Prop. 5.1]) *Ist φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ und $\mathcal{H}^2_\wp$ ein Hardyraum, der sämtliche Potenzen von φ enthält, so gilt*

$$\|C_\varphi\|_{\wp;e} = \lim_{n\to\infty} \|C_\varphi R_n\|_\wp \ .$$

Wir erinnern an die zu Beginn des Kapitels gegebene allgemeine Definition der essentiellen Norm eines Kompositionsoperators.

Beweis: Ist B ein kompakter Operator, so erhält man wegen $\|R_n\|_\wp=1$, daß

$$\|C_\varphi - B\|_\wp = \|C_\varphi - B\|_\wp \|R_n\|_\wp \geq \|(C_\varphi - B)R_n\|_\wp \geq \|C_\varphi R_n\|_\wp - \|BR_n\|_\wp \ .$$

Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig, fest. Dann gibt es nach Definition der Operatornorm zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein normiertes $f_n\in\mathcal{H}^2_\wp$, so dass $\|BR_n\|_\wp \leq \|BR_n f_n\|_\wp + \varepsilon$. Für ein beliebiges, festes $g\in\mathcal{H}^2_\wp$ gilt $|\langle R_n f_n, g\rangle_\wp| = |\langle f_n, R_n g\rangle_\wp| \leq \|R_n g\|_\wp \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$, d. h. $R_n f_n \xrightarrow{\text{w}} 0 \quad (n\to\infty)$. Da ein auf einem Banachraum kompakter Operator vollstetig ist, folgt daraus $\|BR_n f_n\|_\wp \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$, also $\limsup_{n\to\infty} \|BR_n\|_\wp \leq \limsup_{n\to\infty}(\|BR_n f_n\|_\wp + \varepsilon) \leq \varepsilon$. Da ε beliebig war, ist somit $\lim_{n\to\infty} \|BR_n\|_\wp = 0$, und damit $\|C_\varphi - B\|_\wp \geq \limsup_{n\to\infty} \|C_\varphi R_n\|_\wp$. Da B ein beliebiger kompakter Operator war, folgt

$$\|C_\varphi\|_{\wp;e} = \inf\{\|C_\varphi - B\|_\wp \colon B \text{ kompakt}\} \geq \limsup_{n\to\infty} \|C_\varphi R_n\|_\wp \ .$$

Bezeichnet andererseits I den Identitätsoperator auf $\mathrm{H}(\mathbb{D})$, so ist $I-R_n$ offensichtlich stetig auf $\mathcal{H}^2_\wp$ mit $(I-R_n)\mathcal{H}^2_\wp = <\mathrm{id}^0, \mathrm{id}^1, ..., \mathrm{id}^{n-1}>$, wobei $<...>$ die lineare Hülle bezeichnet. Als Operator mit endlichdimensionalem Definitionsbereich ist $C_\varphi\colon (<\mathrm{id}^0, \mathrm{id}^1, ..., \mathrm{id}^{n-1}>, \|\cdot\|_\wp) \longrightarrow (\mathcal{H}^2_\wp, \|\cdot\|_\wp)$ stetig (beachte $C_\varphi <\mathrm{id}^0, \mathrm{id}^1, ..., \mathrm{id}^{n-1}> = <\varphi^0, \varphi^1, ..., \varphi^{n-1}> \subseteq \mathcal{H}^2_\wp$ nach Voraussetzung). Damit ist $C_\varphi(I-R_n)$ als stetiger endlichdimensionaler Operator kompakt auf $\mathcal{H}^2_\wp$, so dass

$$\|C_\varphi\|_{\wp;e} \leq \|\, C_\varphi - C_\varphi(I-R_n)\, \|_\wp = \|C_\varphi R_n\|_\wp \ .$$

Damit existiert $\lim_{n\to\infty} \|C_\varphi R_n\|_\wp$ und ist gleich $\|C_\varphi\|_{\wp;e}$. □

Wir konnten die Stetigkeitsvoraussetzung an C_φ, die Shapiro in [S1] macht, durch die schwächere Forderung, dass $\mathcal{H}^2_\wp$ alle Potenzen von φ enthält, ersetzen. Dies ermöglicht es uns, auch in dem folgenden Theorem die Stetigkeit von C_φ nicht vorauszusetzen, wodurch wir die Stetigkeits- und Kompaktheitsuntersuchungen mittels Anzahlfunktionen zusammenfassen können. Wir fordern lediglich, dass φ in dem untersuchten Dirichletraum enthalten ist, eine notwendige (wie zu Beginn dieses Kapitels gesehen) aber bei weitem nicht hinreichende Bedingung für die Stetigkeit von C_φ.

Theorem 4.3 (vgl. [S1, 5.3.]) *Es seien φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ und $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum, der φ enthält. Bildet man zu G und φ die Anzahlfunktion K_φ gemäß* (3.2)*, so gilt*

$$\|C_\varphi\|^2_{q,G;e} \leq \limsup_{w\nearrow\mathbb{T}} \frac{K_\varphi(w)}{G(w)} \ .$$

Insbesondere ist C_φ stetig auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$, wenn der lim sup endlich ist, und kompakt auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$, wenn er gleich 0 ist.

Beweis: Ohne wesentliche Einschränkung sei der lim sup endlich, da sonst nichts zu zeigen ist. Dann wählen wir ein $C > \limsup_{w\nearrow\mathbb{T}} \frac{K_\varphi(w)}{G(w)}$ beliebig, aber fest und dazu nach Voraussetzung ein r mit $\frac{K_\varphi}{G} \leq C$ in $\mathbb{D}\backslash r\mathbb{D}$.
Wegen

$$\begin{aligned} \|\varphi^n\|^2_{q,G} &= q|\varphi(0)|^{2n} + \int_{\mathbb{D}} |n\varphi^{n-1}(z)\varphi'(z)|^2 G(z)\, dA(z) \\ &\leq q|\varphi(0)|^2 + n^2 \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 G(z)\, dA(z) \ \leq \ n^2\|\varphi\|^2_{q,G} \ < \ \infty \end{aligned}$$

($n\in\mathbb{N}$) können wir den vorangegangenen Satz anwenden [beachte $(\mathcal{D}^2_{q,G}, \|\cdot\|_{q,G}) = (\mathcal{H}^2_{(q_n)}, \|\cdot\|_{(q_n)})$ mit q_n gemäß (1.26)], d. h. wir werden

$$\|C_\varphi\|^2_{q,G;e} = \lim_{n\to\infty} \|C_\varphi R_n\|^2_{q,G} = \lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{D}^2_{q,G}:\ \|f\|_{q,G}\leq 1} \|C_\varphi R_n f\|^2_{q,G}$$

geeignet abschätzen. Nach (3.3) ist

$$\begin{aligned} \|C_\varphi R_n f\|^2_{q,G} &= q|R_n f(\varphi(0))|^2 + \int_{r\mathbb{D}} |(R_n f)'(w)|^2 K_\varphi(w)\, dA(w) \\ &\quad + \int_{\mathbb{D}\backslash r\mathbb{D}} |(R_n f)'(w)|^2 K_\varphi(w)\, dA(w) \ . \end{aligned}$$

Bezeichnet k_b die reproduzierenden Kerne von $\mathcal{D}^2_{q,G}$, so gilt bei $\|f\|_{q,G}\leq 1$

$$\begin{aligned} q|R_n f(\varphi(0))|^2 &= q|\langle R_n f, k_{\varphi(0)}\rangle_{q,G}|^2 \ = \ q|\langle f, R_n k_{\varphi(0)}\rangle_{q,G}|^2 \\ &\leq q\|R_n k_{\varphi(0)}\|^2_{q,G} \overset{(1.12)}{=} q \sum_{j=n}^{\infty} \frac{|\varphi(0)|^{2j}}{q_j} \end{aligned}$$

mit (q_n) gemäß (1.26) und analog für $|w|<r$ mit $\hat{k}_w$ gemäß (1.13)

$$|(R_nf)'(w)|^2 = |\langle R_nf, \hat{k}_w\rangle_{q,G}|^2 \le \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2|w|^{2(j-1)}}{q_j} < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2 r^{2(j-1)}}{q_j} \ ,$$

also

$$\begin{aligned}
\int_{r\mathbb{D}} |(R_nf)'(w)|^2 K_\varphi(w)\,dA(w) \quad &\le \quad \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2 r^{2(j-1)}}{q_j} \int_{\mathbb{D}} K_\varphi(w)\,dA(w) \\
&\overset{(3.1)}{=} \quad \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2 r^{2(j-1)}}{q_j} \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 G(z)\,dA(z) \\
&\le \quad \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2 r^{2(j-1)}}{q_j} \|\varphi\|_{q,G}^2 \ .
\end{aligned}$$

Weiterhin für $f{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D})$ mit $\|f\|_{q,G}{\le}1$ gilt nach Wahl von C und r

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |(R_nf)'(w)|^2 K_\varphi(w)\,dA(w) \quad &\le \quad C \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |(R_nf)'(w)|^2 G(w)\,dA(w) \\
&\le \quad C\|R_nf\|_{q,G}^2 \ \le \ C
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sup_{\|f\|_{q,G}\le 1} \|C_\varphi R_n f\|_{q,G}^2 \quad &\le \quad q \sum_{j=n}^{\infty} \frac{|\varphi(0)|^{2j}}{q_j} + \|\varphi\|_{q,G}^2 \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2 r^{2(j-1)}}{q_j} + C \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 + C \ ,
\end{aligned}$$

d. h. $\|C_\varphi\|_{q,G;e}^2 \le C$, was wegen der Wahlmöglichkeiten für C das Theorem beweist. $\square$

Handelt es sich bei dem Dirichletraum $\mathcal{D}_{q,G}^2$ um einen Bergmanraum, so ist zum einen wegen $\mathcal{H}^\infty{\subseteq}\mathcal{D}_{q,G}^2$ nach Satz 2.17 $\varphi{\in}\mathcal{D}_{q,G}^2$ für jede holomorphe Selbstabbildung erfüllt und zum anderen nach Satz 1.34 G monoton fallend in $(0,1)$. Damit ist $K_\varphi(w)$ umso kleiner, je weniger Urbilder w unter φ hat und je näher diese Urbilder an $\mathbb{T}$ liegen, d. h. $\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}} K_\varphi(w)$ ist umso kleiner, je langsamer sich $\varphi(z)$ der Einheitskreislinie nährt bei $z{\nearrow}\mathbb{T}$, und umso eher kann man mit Stetigkeit oder gar Kompaktheit rechnen.

Mit Hilfe des eben bewiesenen Theorems erhält man nun in Spezialfällen leicht handhabbare Stetigkeits- bzw. Kompaktheitskriterien. Dabei behandeln wir zunächst den Fall $\varphi(0)=0$, in dem nach dem Schwarzschen Lemma $|\varphi(z)|\leq|z|$ für $z\in\mathbb{D}$ gilt, so dass sich $\varphi(z)$ der Einheitskreislinie nicht schneller nähern kann als z selbst.

Korollar 4.4 *Ist $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum, für den das zu G gemäß* (1.33) *definierte E monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$, und φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ mit $\varphi(0)=0$, so ist C_φ stetig auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$.*

Im Fall der Bergmanräume, die ja spezielle Dirichleträume mit monotonem E sind, folgt obiger Satz auch aus dem Littlewoodschen Subordinationsprinzip. Genauer erhält man damit sogar, dass Kompositionsoperatoren mit $\varphi(0)=0$ auf sämtlichen Bergmanräumen Operatornorm 1 haben (vgl. [CM, S. 198]).

Beweis: Es gilt $\varphi\in\mathcal{D}^2_{q,G}$ wegen $\mathcal{H}^2\subseteq\mathcal{D}^2_{q,G}$ nach Satz 2.3 und $\mathcal{H}^\infty\subseteq\mathcal{H}^2$ nach Satz 2.17, so dass mit K_φ zu φ und G gemäß Definition 3.2 aus obigem Theorem und Satz 3.8

$$\|C_\varphi\|^2_{q,G;e} \leq \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{K_\varphi(w)}{G(w)} \leq \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{G(-w)}{G(w)} = 1$$

folgt. □

Es ist eine Standardmethode, aus der Stetigkeit der Kompositionsoperatoren C_φ mit $\varphi(0)=0$ mittels der in (2.1) definierten Selbstabbildungen S_a von $\mathbb{D}$ eine Aussage über C_φ mit $\varphi(0)\neq0$ zu gewinnen. Da wir in dem vorangegangenen Korollar diese Stetigkeit für eine größere (s. Satz 1.34) Klasse von Dirichleträumen zeigen konnten, als sie die Bergmanräume darstellen, ist auch der folgende Satz allgemeiner als in der Literatur:

Satz 4.5 *Es seien $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum, für den das zu G gemäß* (1.33) *definierte E monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$, φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ und $a=\varphi(0)$. Ist C_{S_a} stetig auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$, so auch C_φ.*

Sind insbesondere auf einem derartigen Dirichletraum sämtliche C_{S_a} stetig, so ist auf diesem Dirichletraum jeder Kompositionsoperator stetig.

Beweis: Wegen $S_a \circ S_a = \mathrm{id}$ ist $C_{S_a} \circ C_{S_a} = I$. Damit ist $C_\varphi = C_\varphi \circ C_{S_a} \circ C_{S_a} = C_{S_a \circ \varphi} \circ C_{S_a}$, wobei C_{S_a} nach Voraussetzung stetig ist und $C_{S_a \circ \varphi}$ wegen $S_a \circ \varphi(0) = S_a(a) = 0$ nach dem vorangegangenen Korollar. □

Mittels obigen Satzes beweist man beispielsweise die Stetigkeit aller Kompositionsoperatoren auf den Standardbergmanräumen und $\mathcal{H}^2$, indem man die Stetigkeit der C_{S_a} direkt nachrechnet (s. [CM, Th. 3.5]). Im Gegensatz zu diesen Räumen werden wir allerdings in Theorem 4.14 sehen, dass es Bergmanräume gibt, auf denen kein Kompositionsoperator C_{S_a} mit $a \neq 0$ stetig ist.
Wie im Anschluss an Theorem 4.3 bemerkt, kann man bei C_φ mit umso gutartigerem Verhalten rechnen, je langsamer sich $\varphi(z)$ der Einheitskreislinie nährt bei $z \nearrow \mathbb{T}$. Eine besonders schwache Annährung hat man im Fall $\|\varphi\|_\infty < 1$, und in diesem gilt

Korollar 4.6 *Ist φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ mit $\|\varphi\|_\infty < 1$, so ist C_φ kompakt auf jedem Dirichletraum, der φ enthält.*

Beweis: Wegen Satz 1.7 können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass der Dirichletraum zu einem stetigen Gewicht G gebildet ist. Definiert man zu G und φ die Anzahlfunktion K_φ gemäß (3.2), so gilt $K_\varphi(w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{D}$ mit $|w| > \|\varphi\|_\infty$, so dass das Korollar direkt aus Theorem 4.3 folgt. □

Dieses Korollar umfasst insbesondere C_φ mit konstantem φ. In diesem Fall folgt die Kompaktheit jedoch auch direkt aus der Eindimensionalität des Bildraums. Weiterhin sei bemerkt, dass die Forderung $\varphi \in \mathcal{D}^2_{q,G}$ im Fall von Bergmanräumen (wie bereits mehrfach erwähnt) stets erfüllt ist, jedoch generell bei Dirichleträumen auch im Fall $\|\varphi\|_\infty < 1$ eine echte Einschränkung darstellt. Betrachte dazu beispielsweise $\mathcal{D}^2_{1,A}$ und $\varphi(z) = \exp(-\frac{1}{z+1})$.

Nun wenden wir uns dem wesentlich schwierigeren Problem zu, die essentielle Norm der Kompositionsoperatoren auf Dirichleträumen mittels Anzahlfunktionen auch nach unten abzuschätzen und damit durch Anzahlfunktionen vollständig zu charakterisieren, wann ein Kompositionsoperator stetig bzw. kompakt ist. Das folgende Theorem, welches eine solche Schranke gibt, verwendet wieder die f_w aus Satz 2.9:

Theorem 4.7 *Es sei $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum zu einem in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ subharmonischen stetigen Gewicht G mit $\lim_{z\nearrow\mathrm{T}} G(z) = 0$. Existiert ein $f\in\mathrm{H}(\mathbb{D})$ mit $f'(0)\neq 0$, für das*

$$f_w := \frac{1}{\sqrt{G(w)}}\, f\circ(\overline{w}S_w) \qquad (w\in\mathbb{D})$$

schwach gegen 0 *konvergiert in $\mathcal{D}^2_{q,G}$ bei $w\nearrow\mathrm{T}$, so gibt es eine Konstante $c>0$, so dass Folgendes richtig ist: Für jede holomorphe Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ gilt mit der zu G und φ gemäß* (3.2) *gebildeten Anzahlfunktion K_φ*

$$c\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{K_\varphi(w)}{G(w)} \leq \|C_\varphi\|^2_{q,G;e} \leq \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{K_\varphi(w)}{G(w)}\ .$$

Dabei beachte man Folgendes: Wie bei Satz 2.9 bemerkt gilt $f_w\in\mathcal{D}^2_{q,G}$.
Bei den Dirichleträumen, die den Voraussetzungen des Satzes genügen, handelt es sich, wie vor Satz 3.11 erklärt, zumindest im mengentheoretischen Sinn um $\mathcal{H}^2$ oder einen Bergmanraum.
Andererseits ist, wenn man einen Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$ als Dirichletraum $\mathcal{D}^2_{p,H}$ darstellt, das Gewicht H subharmonisch in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ mit $\lim_{z\nearrow\mathrm{T}} H(z) = 0$.

Beweis: Die Funktion f genüge den Bedingungen des Theorems. Da aus der schwachen Konvergenz die Normbeschränktheit folgt, ist dann $C := \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \|f_w\|_{q,G} < \infty$, und für einen kompakten Operator B gilt

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi - B\|_{q,G} &\geq \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{\|(C_\varphi - B)f_w\|_{q,G}}{\|f_w\|_{q,G}} \\
&\geq \frac{1}{C}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} (\, \|C_\varphi f_w\|_{q,G} - \|Bf_w\|_{q,G}\,) \\
&= \frac{1}{C}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \|C_\varphi f_w\|_{q,G}
\end{aligned}$$

(beachte $f_w\neq 0$ wegen $f\neq 0$ sowie die Vollstetigkeit von B), d. h.

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi\|^2_{q,G;e} &\geq \frac{1}{C^2}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \|C_\varphi f_w\|^2_{q,G} \\
&\overset{(3.3)}{\geq} \frac{1}{C^2}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{1}{G(w)} \int_{\mathbb{D}} |f'(\overline{w}S_w(z))|^2 |\overline{w}S'_w(z)|^2 K_\varphi(z)\, dA(z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{C^2}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{|w|^2}{G(w)}\int_{\mathbb{D}}|f'(\overline{w}S_w(z))|^2K_\varphi\circ S_w(S_w(z))|S_w'(z)|^2\,dA(z)\\
&= \frac{1}{C^2}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{1}{G(w)}\int_{\mathbb{D}}|f'(\overline{w}z)|^2K_\varphi\circ S_w(z)\,dA(z)\;.
\end{aligned}
$$

Wegen der Voraussetzungen an G greift Satz 3.10, wonach $K_{\varphi,r}$ in $\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ subharmonisch ist. Damit ist $K_{\varphi,r}\circ S_w$ subharmonisch in $S_w^{-1}(\mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}) = \mathbb{D}\backslash\{S_w(\varphi(0))\}$. Wegen der Monotonie von $K_{\varphi,\cdot}(w)$ (ebenfalls nach Satz 3.10) erfüllt daher $K_\varphi\circ S_w$ als monotoner Grenzwert subharmonischer Funktionen die Mittelwertungleichung subharmonischer Funktionen in $\mathbb{D}\backslash\{S_w(\varphi(0))\}$.
Nun wählen wir nach Voraussetzung ein $r\in(0,1)$ und ein $\gamma>0$ mit $|f'|^2\geq\gamma$ in $r\mathbb{D}$. Wegen $\lim_{w\nearrow\mathrm{T}}|S_w(\varphi(0))| = 1$ erfüllt $K_\varphi\circ S_w$ nach Obigem die Mittelwertungleichung subharmonischer Funktionen in $r\mathbb{D}$ für w nahe T, so dass

$$
\begin{aligned}
\|C_\varphi\|_{q,G;e}^2 &\geq \frac{\gamma}{C^2}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{1}{G(w)}\int_{r\mathbb{D}}K_\varphi\circ S_w(z)\,dA(z)\\
&\geq \frac{\gamma r^2}{C^2}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{K_\varphi(S_w(0))}{G(w)} \;=\; c\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{K_\varphi(w)}{G(w)}
\end{aligned}
$$

mit $c{:=}\frac{\gamma r^2}{C^2}>0$.
Nach Satz 3.10 ist die zu G gemäß (1.33) gebildete Vergleichsfunktion E monoton fallend. Damit gilt nach den Sätzen 2.17 und 2.3 für jede holomorphe Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$, dass $\varphi\in\mathcal{H}^\infty\subseteq\mathcal{H}^2\subseteq\mathcal{D}_{q,G}^2$, so dass die zweite Ungleichung aus Theorem 4.3 folgt. □

Shapiros Vorgehen in [S1] für die Standardbergmanräume $\mathcal{A}_{G_\alpha}^2$ $(\alpha>-1)$ und $\mathcal{H}^2$ (im Folgenden der Fall $\alpha=-1$) ist in obigem Theorem enthalten. Er betrachtet als Funktionen f_w, die schwach gegen 0 konvergieren bei $w\nearrow$T, die normalisierten reproduzierenden Kerne des jeweiligen Raumes, nämlich

$$
f_w(z) = \left(\frac{\sqrt{1-|w|^2}}{1-\overline{w}z}\right)^{\alpha+2}
$$

[$1^{\alpha+2}{:=}1$, vgl. (1.19)], und leitet damit wie im Beweis des Theorems eine untere Schranke für die essentielle Norm der Kompositionsoperatoren auf diesen Räumen her. Im Fall des ungewichteten Hardyraums $\mathcal{H}^2{=}\mathcal{H}^2_{(1)}$ gelten die

Abschätzungen des Beweises dann sogar mit $C{=}\gamma{=}1$ und beliebigem $r{\in}(0,1)$, so dass

$$\|C_\varphi\|^2_{(1)} = \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{2N_\varphi(w)}{H_{-1}(w)} = \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{N_\varphi(w)}{\log\frac{1}{|w|}} \tag{4.8}$$

(s. [S1, S. 381]). Unsere allgemeine Konstruktion der f_w aus einer Funktion f mittels der S_a und damit auch die restlichen Sätze dieses Abschnitts sind neu. Die eben angesprochene Konstruktion liefert im Fall der Dirichleträume $\mathcal{D}^2_{1,G_{\alpha+2}}$ $(\alpha{\geq}{-1})$, die ja gerade eine Dirichletraumdarstellung der Standardbergmanräume und von $\mathcal{H}^2$ sind [s. (2.6) bzw. (2.1)], mittels

$$f(z) = (1{-}z)^{\alpha+2} = 2^{\alpha+2}\widehat{G_{\alpha+2}}(z) \tag{4.9}$$

gerade die obigen Funktionen f_w [für die Definition von $\hat{G}$ siehe (1.1)]. Dies legt nahe, allgemein für Bergmanräume $\mathcal{A}^2_G$ zu einem holomorphem Gewicht G, auf die man sich ja nach Satz 1.7 o.B.d.A. beschränken kann, $f{=}\hat{H}$ anzusetzen mit H gemäß (1.32) [beachte, dass H in diesem Fall nach Satz 1.34 ebenfalls ein holomorphes Gewicht ist]. Dies wird ggf. zum Erfolg führen, es lassen sich aber auch Bergmanräume $\mathcal{A}^2_G$ konstruieren, deren Gewicht G so stark oszilliert, dass für sie dieser Ansatz scheitert. [Zum Nachweis des Scheiterns zeigt man mit Satz 4.11, dass die zu f gebildeten f_w nicht schwach gegen 0 konvergieren bei $w\nearrow\mathrm{T}$. Dies zeigt auch, dass die derart konstruierten f_w im Allgemeinen nichts mit den normalisierten reproduzierenden Kernen zu tun haben, denn diese konvergieren in jedem Bergmanraum schwach gegen 0 (s. [CM, Th. 2.17])]. Fruchtbarer ist es, das gute Zusammenspiel der Funktionen aus Gleichung 4.9 mit den S_a auszunutzen (s. Satz 4.12).
Um allgemein ein einfacheres Kriterium zu erhalten, wann eine Funktion $f{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D})$ der Voraussetzung von Theorem 4.7 genügt, beweisen wir zunächst

Lemma 4.10 *Ist* $f{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D})$ *mit* $f(z){=}\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ *und* $g_w = f{\circ}(\overline{w}S_w)$ *, so gilt* $g_w(z){=}\sum_{k=0}^\infty b_{w,k}z^k$ *mit* $b_{w,0}{=}f(|w|^2)$ *und*

$$b_{w,k} = \overline{w}^k \sum_{j=1}^k \binom{k{-}1}{j{-}1} \frac{(|w|^2{-}1)^j}{j!} f^{(j)}(|w|^2) \qquad (k{\in}\mathbb{N}).$$

Beweis: Mit $f_N(z){:=}\sum_{n=0}^N a_n z^n$ $(N{\in}\mathbb{N})$ und $g_{N,w} := f_N{\circ}(\overline{w}S_w)$ gilt

$$
\begin{aligned}
& g_{N,w}(z) \\
= \quad & f_N(\overline{w}S_w(z)) \ = \ \sum_{n=0}^{N} a_n \left(1 + \frac{|w|^2-1}{1-\overline{w}z}\right)^n \\
= \quad & \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{|w|^2-1}{1-\overline{w}z}\right)^j \\
= \quad & \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (|w|^2-1)^j \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-j}{k} (-\overline{w}z)^k \\
= \quad & \sum_{k=0}^{\infty} (\overline{w}z)^k \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{j+k-1}{k} (|w|^2-1)^j \\
= \quad & \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (|w|^2-1)^j + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{w}z)^k \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \\
& \qquad\qquad \frac{n}{k!} \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} (j+k-1)(j+k-2)\cdots(j+1)\cdot(|w|^2-1)^j \\
= \quad & \sum_{n=0}^{N} a_n |w|^{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^k}{k!} \sum_{n=1}^{N} n a_n \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} \frac{d^{k-1}}{(d|w|^2)^{k-1}} (|w|^2-1)^{j+k-1} \\
= \quad & \sum_{n=0}^{N} a_n |w|^{2n} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{(d|w|^2)^{k-1}} \left((|w|^2-1)^k \sum_{n=1}^{N} n a_n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (|w|^2-1)^j \right) \\
= \quad & \sum_{n=0}^{N} a_n |w|^{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{(d|w|^2)^{k-1}} \left((|w|^2-1)^k \sum_{n=1}^{N} n a_n |w|^{2(n-1)} \right) \\
= \quad & \sum_{n=0}^{N} a_n |w|^{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{(d|w|^2)^{k-1}} [(|w|^2-1)^k f_N'(|w|^2)] \\
= \quad & \sum_{n=0}^{N} a_n |w|^{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{w}z)^k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} f_N^{(j+1)}(|w|^2) \frac{(|w|^2-1)^{j+1}}{(j+1)!} \ ,
\end{aligned}
$$

also $g_{N,w}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{N,w,k} z^k$ mit $b_{N,w,0}{=}f_N(|w|^2)$ und

$$b_{N,w,k} = \overline{w}^k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} f_N^{(j+1)}(|w|^2) \frac{(|w|^2-1)^{j+1}}{(j+1)!} \qquad (k{\in}\mathbb{N}).$$

Wegen $f_N \xrightarrow{\kappa} f$ gilt $g_{N,w} \xrightarrow{\kappa} g_w$, d. h. $b_{w,k} = \lim_{N\to\infty} b_{N,w,k}$, was die Behauptung beweist. $\square$

Nachdem wir nun wissen, wie die Taylor-Koeffizienten von f mit denjenigen der f_w zusammenhängen, können wir im folgenden Satz ein Kriterium dafür angeben, wann die zu einer Funktion f gebildeten f_w schwach gegen 0 konvergieren bei $w{\nearrow}\mathrm{T}$.

Satz 4.11 *Es sei $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum und $f{\in}\mathrm{H}(\mathbb{D})$.*
Es gilt $f_w := \frac{1}{\sqrt{G(w)}} f{\circ}(\overline{w}S_w) \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ in $\mathcal{D}^2_{q,G}$ bei $w{\nearrow}\mathrm{T}$ genau dann, wenn $\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \|f_w\|_{q,G} < \infty$ und

$$\forall n{\in}\mathbb{N}_0\colon \lim_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{1}{\sqrt{G(w)}}(|w|^2-1)^n f^{(n)}(|w|^2) = 0 \ .$$

Beweis: Da die Monome eine Orthogonalbasis des Hilbertraums $\mathcal{D}^2_{q,G}$ bilden, ist $f_w \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ bei $w{\nearrow}\mathrm{T}$ äquivalent zu $\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \|f_w\|_{q,G} < \infty$ und $\lim_{w\nearrow\mathrm{T}} \langle f_w, \mathrm{id}^k\rangle_{q,G} = 0$ für $k{\in}\mathbb{N}_0$. Mit den Bezeichnungen des vorangegangenen Lemmas ist $\lim_{w\nearrow\mathrm{T}} \langle f_w, \mathrm{id}^k\rangle_{q,G} = 0$ gleichbedeutend mit $\lim_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{1}{\sqrt{G(w)}} b_{w,k} = 0$ $(*_k)$. Bezeichnet man die Aussage $\lim_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{1}{\sqrt{G(w)}}(|w|^2-1)^n f^{(n)}(|w|^2) = 0$ mit $(\star_n)$, so hat das vorangegangene Lemma $(*_0) \Longleftrightarrow (\star_0)$ gezeigt sowie
$(\star_1) \Longrightarrow (*_1)$
$(\star_1) \wedge (\star_2) \Longrightarrow (*_2)$
$(\star_1) \wedge (\star_2) \wedge (\star_3) \Longrightarrow (*_3)$ ... ,
also

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\colon (\star_n) \Longrightarrow \forall k{\in}\mathbb{N}\colon (*_k) \ ,$$

und
$(*_1) \Longrightarrow (\star_1)$
$(*_2) \wedge (\star_1) \Longrightarrow (\star_2)$

$(*_3) \wedge (\star_1) \wedge (\star_2) \Longrightarrow (\star_3)$ ...
Aus Letzterem folgert man mittels vollständiger Induktion nach n:

$$\forall k{\in}\mathbb{N}\colon (*_k) \Longrightarrow \forall n{\in}\mathbb{N}\colon (\star_n) \qquad \square$$

Mit Hilfe dieses Satzes sind wir in der Lage, Theorem 4.7 auf eine große Klasse von Bergmanräumen anzuwenden und in diesem Fall auch die Endlichkeit des auftretenden lim sup zu zeigen. Auf derartigen Bergmanräumen sind also alle Kompositionsoperatoren stetig, und ein Kompositionsoperator genau dann kompakt ist, wenn der entsprechende lim sup gleich 0 ist.

Satz 4.12 *Zu einem Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$ seien p und H gemäß Satz 1.31 gebildet. Ist H regulär langsam, so gibt es eine Konstante $c{>}0$, so dass Folgendes richtig ist: Für jede holomorphe Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ gilt mit der zu H und φ gemäß* (3.2) *gebildeten Anzahlfunktion K_φ*

$$c \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{K_\varphi(w)}{H(w)} \leq \|C_\varphi\|^2_{\mu;e} \leq \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{K_\varphi(w)}{H(w)} < \infty \ .$$

Beachte, dass nach Satz 2.13 jedes zu einem regulär langsamen Gewicht G gebildete H ebenfalls regulär langsam ist, so dass obiger Satz für jeden Bergmanraum $\mathcal{A}^2_G$ mit regulär langsamem G greift. Für Beispiele derartiger Gewichte siehe (2.11).

Beweis: Wegen $\|\cdot\|_\mu = \|\cdot\|_{p,H}$ nach Satz 1.31 sowie $\lim_{z\nearrow\mathrm{T}} H(z) = 0$ und der Subharmonizität von H nach Satz 1.34 folgt der Satz mit Ausnahme der Endlichkeitsbehauptung aus Theorem 4.7, sobald wir nachgewiesen haben, dass es eine entsprechende Funktion f gibt. Dazu wählen wir nach Voraussetzung $m{\in}\mathbb{N}$ und $r{\in}(0,1)$, so dass $\frac{H}{G_{2m-1}}$ monoton wachsend in $[r,1)$ ist. Dann gilt für $f(z) := (1{-}z)^m$ und $f_w := \frac{1}{\sqrt{H(w)}}(1{-}\overline{w}S_w)^m$ nach Satz 2.14, dass $\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \|f_w\|_{p,H} < \infty$ (beachte die Monotonie von $H{=}\frac{H}{G_0}$ nach Satz 1.34), und weiterhin für $n{\in}\mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{\sqrt{H(w)}}(|w|^2{-}1)^n f^{(n)}(|w|^2) = n!\binom{m}{n}\frac{(1{-}|w|^2)^m}{\sqrt{H(w)}} \overset{w\nearrow\mathrm{T}}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Wie benötigt gilt damit $f_w \overset{\mathrm{w}}{\longrightarrow} 0$ bei $w{\nearrow}\mathrm{T}$ nach Satz 4.11.
Zum Nachweis der Endlichkeit bemerken wir, dass $\frac{H}{G_1^*}{=}\frac{H}{H_{-1}}$ monoton fallend

in $(0,1)$ ist nach Satz 1.34 und $\frac{H}{G^*_{2m-1}} = \frac{H}{G_{2m-1}} \frac{G_{2m-1}}{G^*_{2m-1}}$ monoton wachsend in $[r,1)$ nach Wahl von m und r. Bezeichnet $\tilde{K}_\varphi$ die Anzahlfunktion zu G^*_{2m-1}, so gilt somit für $w \in \mathbb{D} \backslash \varphi(r\mathbb{D})$:

$$\begin{aligned}
\frac{K_\varphi(w)}{H(w)} &= \sum_{n:\ |z_n(w)|<|w|} \frac{H(z_n(w))}{G^*_{2m-1}(z_n(w))} \frac{G^*_{2m-1}(w)}{H(w)} \frac{G^*_{2m-1}(z_n(w))}{G^*_{2m-1}(w)} \\
&\quad + \sum_{n:\ |z_n(w)|\geq|w|} \frac{H(z_n(w))}{H_{-1}(z_n(w))} \frac{H_{-1}(w)}{H(w)} \frac{H_{-1}(z_n(w))}{H_{-1}(w)} \\
&\leq \sum_{n:\ |z_n(w)|<|w|} \frac{G^*_{2m-1}(z_n(w))}{G^*_{2m-1}(w)} + \sum_{n:\ |z_n(w)|\geq|w|} \frac{H_{-1}(z_n(w))}{H_{-1}(w)} \\
&\leq \frac{\tilde{K}_\varphi(w)}{G^*_{2m-1}(w)} + \frac{2N_\varphi(w)}{H_{-1}(w)} \\
&\overset{[\text{S1, S. 397}]}{\leq} \left(\frac{\log \left| \frac{1-\overline{\varphi(0)}w}{\varphi(0)-w} \right|}{\log \frac{1}{|w|}} \right)^{2m-1} + \frac{\log \left| \frac{1-\overline{\varphi(0)}w}{\varphi(0)-w} \right|}{\log \frac{1}{|w|}}
\end{aligned}$$

Die behauptete Endlichkeit folgt nun aus

$$\limsup_{w \nearrow \mathrm{T}} \frac{\log \left| \frac{1-\overline{\varphi(0)}w}{\varphi(0)-w} \right|}{\log \frac{1}{|w|}} \overset{[\text{S2, S. 188}]}{\leq} \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \,. \qquad \square$$

4.2 Die essentielle Norm und Winkelderivierte

Wir wollen im Folgenden darauf verzichten, die Winkelderivierten (s. [CM, S. 50]) einer holomorphen Selbstabbildung mit der ganzen dahinterstehenden Theorie einzuführen, denn die für die Untersuchung von Kompositionsoperatoren auf Stetigkeit und Kompaktheit entscheidende Größe ist die folgende:

Definition 4.13 (s. [KM, S. 765]) *Zu einer holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ definieren wir*

$$\beta(\varphi) := \liminf_{z \nearrow \mathrm{T}} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} \,.$$

Es sei hier nur bemerkt, dass $\beta(\varphi)$ nach dem Julia-Carathéodory-Theorem das Minimum der Beträge der Winkelderivierten von φ ist (vgl. [CM, S.n 51 u. 55]). Insbesondere bedeutet $\beta(\varphi)=\infty$, dass φ in keinem Punkt aus T eine (endliche) Winkelderivierte besitzt.
Wie bereits im letzten Abschnitt erklärt, kann man bei C_φ umso eher mit Stetigkeit oder gar Kompaktheit auf Bergmanräumen rechnen, je langsamer sich $\varphi(z)$ der Einheitskreislinie nährt bei $z\nearrow$T, also – indem wir unsere neue Größe ins Spiel bringen – je größer $\beta(\varphi)$ ist, und es wurde von Anfang an versucht, Charakterisierungen für die Stetigkeit oder Kompaktheit von C_φ mittels $\beta(\varphi)$ zu geben. In dem Extremfall $\|\varphi\|_\infty<1$ beispielsweise ist $\beta(\varphi)=\infty$ und – wie in Satz 4.6 gesehen – C_φ kompakt auf jedem Bergmanraum. Wir fassen einen Teil der bisherigen, in den Bereich der Bergmanräume fallenden Ergebnisse in dem folgenden Theorem zusammen, das wir nicht beweisen werden:

Theorem 4.14
(s. [S2, Abschnitte 3.3, 3.5 u. 10.2]) *Notwendig, aber nur bei injektivem φ und nicht im Allgemeinen hinreichend für die Kompaktheit von C_φ auf dem ungewichteten Hardyraum $\mathcal{H}^2$ ist $\beta(\varphi)=\infty$.*
(s. [CM, Th. 3.22]) *Der Kompositionsoperator C_φ ist genau dann kompakt auf einem Standardbergmanraum, wenn $\beta(\varphi)=\infty$.*
(s. [CM, Th. 3.22]) *Der Kompositionsoperator C_φ ist genau dann kompakt auf einem Bergmanraum zu einem regulären schnellen Gewicht, wenn $\beta(\varphi)>1$.*
(s. [CM, S. 198]) *Ist C_φ stetig auf einem Hardyraum $\mathcal{H}^2_\wp$, bei dem $\lim_{n\to\infty}(n+1)^\gamma p_n = 0$ $[\wp=(p_n)]$ für alle $\gamma>0$, so gilt $\beta(\varphi)\geq 1$.*
(s. [CM, S. 211]) *Ist C_φ kompakt auf einem Hardyraum $\mathcal{H}^2_\wp$, bei dem $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{p_n} = \infty$ $[\wp=(p_n)]$, so gilt $\beta(\varphi)>1$.*

Außer dem ungewichteten Hardyraum $\mathcal{H}^2$ fallen nach Satz 1.14 auch sämtliche Bergmanräume unter die im letzten Teil des Theorems charakterisierte Klasse von Hardyräumen. Die im vorletzten Teil charakterisierte Klasse von Hardyräumen umfasst alle Bergmanräume zu schnellen Gewichten. Denn ist μ ein schnelles Gewicht und $\mathcal{H}^2_{(p_n)}=\mathcal{A}^2_\mu$, so gilt nach Definition der schnellen Gewichte, Satz 2.1 und (2.5) $\limsup_{n\to\infty}(n+1)^{\alpha+1}p_n = \limsup_{n\to\infty}\frac{p_n}{p^*_{\alpha,n}} < \infty$ für alle $\alpha\in(-1,\infty)$ und damit $\limsup_{n\to\infty}(n+1)^\gamma p_n = 0$ für alle $\gamma>0$.

Da bei einer über $\overline{\mathbb{D}}$ hinaus holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ die gewöhnliche Ableitung und die Winkelderivierte in allen Punkten $\eta\in\mathbb{T}$ mit $|\varphi(\eta)|=1$ übereinstimmen, ist nach (2.1) $\beta(S_a)=\frac{1-|a|}{1+|a|}$, so dass jedes C_{S_a} mit $a\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ auf jedem Bergmanraum zu einem schnellen Gewicht unstetig ist.

Um nun weitere Ergebnisse zu erhalten, müssen wir die im letzten Abschnitt als wichtig erkannte Größe $\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}}\frac{K_\varphi(w)}{G(w)}$ auf verschiedenen Räumen miteinander verknüpfen:

Lemma 4.15 *Zu zwei stetigen Gewichten G und $\tilde{G}$ sowie einer holomorphen Selbstabbildung φ von $\mathbb{D}$ mit $\|\varphi\|_\infty=1$ seien die Anzahlfunktionen K_φ bzw. $\tilde{K}_\varphi$ gemäß Definition 3.2 gebildet. Dann gilt mit $\hat{E}:=\frac{G}{\tilde{G}}$*

$$\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}}\frac{K_\varphi(w)}{G(w)}\leq\limsup_{w\nearrow\mathbb{T},\ 1\leq n\leq n(w)}\frac{\hat{E}(z_n(w))}{\hat{E}(w)}\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}}\frac{\tilde{K}_\varphi(w)}{\tilde{G}(w)}\ ,$$

falls das rechte Produkt definiert ist.

Bemerkungen: Wegen $\|\varphi\|_\infty=1$ gibt es $w_k\in\varphi(\mathbb{D})$ mit $w_k\nearrow\mathbb{T}$ bei $k\to\infty$, und für diese gilt $n(w_k)>0$. Damit ist der mittlere $\limsup$ definiert.

Für φ mit $\|\varphi\|_\infty<1$ ist ein Vergleich der Anzahlfunktionen wegen $K_\varphi(w)=\tilde{K}_\varphi(w)=0$ für $w\in\mathbb{D}$ mit $|w|>\|\varphi\|_\infty$ uninteressant.

Beweis: Ist $\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}}\frac{\hat{E}(z_n(w))}{\hat{E}(w)}=\infty$, so ist entweder das Produkt nicht definiert, oder es ist nichts zu zeigen. Sei also $C>\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}}\frac{\hat{E}(z_n(w))}{\hat{E}(w)}$ beliebig, aber fest und dazu $r\in(0,1)$ gewählt mit $\frac{\hat{E}(z_n(w))}{\hat{E}(w)}\leq C$ für $|w|\in(r,1)$ und $1\leq n\leq n(w)$. Dann gilt für diese w

$$\frac{K_\varphi(w)}{G(w)}=\sum_{n=1}^{n(w)}\frac{\hat{E}(z_n(w))\tilde{G}(z_n(w))}{\hat{E}(w)\tilde{G}(w)}\leq C\sum_{n=1}^{n(w)}\frac{\tilde{G}(z_n(w))}{\tilde{G}(w)}=C\frac{\tilde{K}_\varphi(w)}{\tilde{G}(w)}\ ,$$

was wegen der Wahlmöglichkeiten für C das Lemma beweist. □

Man kann nun sowohl mittels des ersten als auch des zweiten $\limsup$ auf der rechten Seite Kriterien für Stetigkeit und Kompaktheit von Kompositionsoperatoren herleiten. Wir gehen hier den zweiten Weg und verweisen für den ersten auf [KM]. Unser erster Satz auf diesem Weg stellt eine Verallgemeinerung von [CM, Cor. 5.7] dar:

Satz 4.16 *Es seien $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein Dirichletraum, für den das zu G gemäß* (1.33) *definierte E monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$, und φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$. Ist $\beta(\varphi)>1$, so ist C_φ stetig auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$.*

Beweis: Ist $\|\varphi\|_\infty<1$, so ist C_φ sogar kompakt auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$ nach Korollar 4.6 wegen $\varphi\in\mathcal{H}^\infty\subseteq\mathcal{H}^2\subseteq\mathcal{D}^2_{q,G}$ nach den Sätzen 2.17 und 2.3. Sei also im Folgenden $\|\varphi\|_\infty=1$. Angenommen, es gäbe $w_k\in\mathbb{D}$ mit $w_k\nearrow\mathrm{T}$ bei $k\to\infty$ und dazu n_k mit $1\le n_k\le n(w_k)$, so dass $|w_k|\ge|z_{n_k}(w_k)|$. Dann würde auch $z_{n_k}\nearrow\mathrm{T}$ gelten, so dass

$$\beta(\varphi)=\liminf_{z\nearrow\mathrm{T}}\frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|}\le\liminf_{k\to\infty}\frac{1-|w_k|}{1-|z_{n_k}(w_k)|}\le 1\ .$$

Daher gilt $|w|<|z_n(w)|$ für w nahe T und $1\le n\le n(w)$, also

$$\limsup_{w\nearrow\mathrm{T},\ 1\le n\le n(w)}\frac{\hat{E}(z_n(w))}{\hat{E}(w)}\le 1\ .$$

Wendet man Lemma 4.15 mit $\tilde{G}=H_{-1}$ an, so erhält man

$$\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{K_\varphi(w)}{G(w)}\le\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{2N_\varphi(w)}{H_{-1}(w)}=\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{N_\varphi(w)}{\log\frac{1}{|w|}}$$

und daraus mit Theorem 4.3 die Stetigkeit von C_φ auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$, da der rechte lim sup wegen

$$\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{N_\varphi(w)}{\log\frac{1}{|w|}}\overset{(3.6)}{\le}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{\log\left|\frac{1-\overline{\varphi(0)}w}{\varphi(0)-w}\right|}{\log\frac{1}{|w|}}\overset{\text{[S2, S. 188]}}{\le}\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\ .$$

endlich ist. □

Während obiger Satz ein sehr einfaches und universelles Stetigkeitskriterium darstellt, wenden wir uns nun der Frage nach Kompaktheit zu. Hier sind wir nunmehr in der Lage, den von Kriete und MacCluer in [KM] erwähnten Eindruck, dass Kompaktheit bei Bergmanräumen umso leichter zu erreichen sei, je größer der Raum ist, formal fassen zu können:

Satz 4.17 *Der Dirichletraum $(\mathcal{D}^2_{p,H},\|\cdot\|_{p,H})$ sei entweder gleich $(\mathcal{H}^2,\|\cdot\|_{(1)})$ oder als normierter Raum ein Bergmanraum, wobei H dann regulär langsam* *sei. Ist $\mathcal{D}^2_{q,G}$ ein weiterer Dirichletraum, für den es ein $r\in(0,1)$ gibt, so dass $\hat{E}:=\frac{G}{H}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist, so gilt: Ist C_φ kompakt auf $\mathcal{D}^2_{p,H}$, so auch auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$.*

Beachte, dass aus der Monotonie von $\frac{G}{H}$ nach Satz 2.3 insbesondere $\mathcal{D}^2_{p,H}\subseteq\mathcal{D}^2_{q,G}$ folgt.

Beweis: Ggf. mit Satz 1.14 gilt für (p_n) mit $\|\cdot\|_{(p_n)} = \|\cdot\|_{p,H}$, dass $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{p_n} = \infty$. Damit folgt nach dem letzten Teil von Theorem 4.14 aus der Kompaktheit von C_φ auf $\mathcal{D}^2_{p,H}$, dass $\beta(\varphi)>1$. Daraus folgert man wie im Beweis des vorangegangenen Satzes $\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}} \frac{K_\varphi(w)}{G(w)} \leq \limsup_{w\nearrow\mathbb{T}} \frac{\tilde{K}_\varphi(w)}{H(w)}$ (trivialerweise auch falls $\|\varphi\|_\infty<1$), wobei K_φ und $\tilde{K}_\varphi$ die Anzahlfunktionen zu G bzw. H bezeichnen. Weiterhin folgt mit Satz 4.12 bzw. (4.8) aus der Kompaktheit von C_φ auf $\mathcal{D}^2_{p,H}$, dass $\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}} \frac{\tilde{K}_\varphi(w)}{H(w)} = 0$, womit auch $\limsup_{w\nearrow\mathbb{T}} \frac{K_\varphi(w)}{G(w)} = 0$. Wegen $\varphi\in\mathcal{D}^2_{p,H}\subseteq\mathcal{D}^2_{q,G}$ erhält man daraus mit Theorem 4.3 die Kompaktheit von C_φ auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$. □

Für Standardbergmanräume hat man das sehr einfache Kriterium, dass C_φ genau dann kompakt ist, wenn $\beta(\varphi)=\infty$, d. h. wenn φ in keinem Punkt aus $\mathbb{T}$ eine (endliche) Winkelderivierte besitzt; und im $\mathcal{H}^2$-Fall weiß man, dass obiges Kriterium für injektive φ gilt (s. Theorem 4.14). Allgemein ist C_φ kompakt auf $\mathcal{H}^2$, wenn $\varphi(\mathbb{D})$ Teilmenge eines in $\mathbb{D}$ einbeschriebenen Polygons ist (s. [S2, S. 27]). Mittels des vorangegangenen Satzes erhält man daraus auch Kriterien für weitere Dirichleträume:

Korollar 4.18 *Ist C_φ kompakt auf $\mathcal{H}^2$, so ist C_φ kompakt auf jedem Dirichletraum $\mathcal{D}^2_{q,G}$, für den das zu G gemäß* (1.33) *definierte E monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$.*
Ist φ eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ mit $\beta(\varphi)=\infty$, so ist C_φ kompakt auf jedem Dirichletraum $\mathcal{D}^2_{q,G}$, für den es ein $\alpha\in(1,\infty)$ gibt, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$.
Ist C_φ kompakt auf einem Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$, für den das gemäß Satz 1.31 gebildete Gewicht H regulär langsamen ist, so gilt $\beta(\varphi)=\infty$.

Ist insbesondere das zu einem Bergmanraum $\mathcal{A}^2_\mu$ gemäß Satz 1.31 gebildete Gewicht H regulär langsam und gibt es ein $\alpha\in(1,\infty)$, so dass $\frac{H}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist für ein $r\in(0,1)$, so ist die Kompaktheit von C_φ auf $\mathcal{A}^2_\mu$ gleichbedeutend mit $\beta(\varphi)=\infty$. Beispiele derartiger Bergmanräume sind durch (2.11) gegeben.

Beweis: Die erste Aussage ist eine direkte Anwendung von Satz 4.17.
Gibt es ein $\alpha\in(1,\infty)$ und ein $r\in(0,1)$, so dass $\frac{G}{G_\alpha}$ monoton fallend in $[r,1)$ ist, so gibt es wegen Lemma 2.12 auch ein $\alpha'\in(-1,\alpha-2)$ und ein $r'\in[r,1)$, so dass $\frac{G}{H_{\alpha'}}=\frac{G}{G_\alpha}\frac{G_\alpha}{H_{\alpha'}}$ monoton fallend in $[r',1)$ ist. Da $\beta(\varphi)=\infty$ gleichbedeutend mit der Kompaktheit von C_φ auf $\mathcal{A}^2_{G_{\alpha'}}$ ist, folgt auch die zweite Aussage aus Satz 4.17.
Wählt man bei der dritten Aussage gemäß der Definition der regulären Langsamkeit ein $\alpha\in(1,\infty)$, so dass $\frac{H}{G_\alpha}$ monoton wachsend ist, so folgt nochmals mit Satz 4.17 aus der Kompaktheit von C_φ auf $\mathcal{A}^2_\mu$, dass C_φ auch kompakt auf dem Standardbergmanraum $\mathcal{D}^2_{1,G_\alpha}$ ist [s. (2.6)], woraus wiederum $\beta(\varphi)=\infty$ folgt. □

Dieses Korollar wirft selbstverständlich die Frage auf, ob aus $\beta(\varphi)=\infty$ nicht folgt, dass C_φ kompakt auf jedem Bergmanraum ist oder allgemeiner auf jedem Dirichletraum $\mathcal{D}^2_{q,G}$, für den $E(z)$ monoton fallend gegen Null geht bei $|z|\nearrow 1$. (Hat man $\lim_{z\nearrow\mathrm{T}} E(z)>0$, so ist $\mathcal{D}^2_{q,G}=\mathcal{H}^2$, und damit gibt es auf $\mathcal{D}^2_{q,G}$ nicht-kompakte C_φ mit $\beta(\varphi)=\infty$ nach Theorem 4.14.) Die Antwort auf diese Frage ist maximal negativ und wird gegeben von unserem

Satz 4.19 *Zu jedem auf $\mathcal{H}^2$ nicht-kompakten Kompositionsoperator C_φ gibt es einen Bergmanraum, auf dem C_φ ebenfalls nicht kompakt ist.*

Beweis: Aus der nicht-Kompaktheit von C_φ auf $\mathcal{H}^2$ folgt mit (4.8)
$\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{2N_\varphi(w)}{H_{-1}(w)}>0$. Daher und wegen der Endlichkeit des $\limsup$ [s. den Beweis von (4.16)] können wir $w_n\in\mathbb{D}$ wählen mit $|w_n|\nearrow 1$ und
$\frac{2N_\varphi(w_n)}{H_{-1}(w_n)}\geq \mathrm{e}^{-1/n}\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}}\frac{2N_\varphi(w)}{H_{-1}(w)}$. (1)
Nun setzen wir $r_0:=n_0:=0$ und bestimmen $r_k\in(0,1)$ und $n_k,m_k\in\mathbb{N}$ induktiv für $k=1,2,3,...$ wie folgt:
$n_k>n_{k-1}$ mit $|w_{n_k}|,|z_1(w_{n_k})|>r_{k-1}$ (2)
[z_1 wie in Kapitel 3, beachte $w_n\in\varphi(\mathbb{D})$ wg. $N_\varphi(w_n)>0$ sowie $\varphi(\mathbb{D})\ni w\nearrow\mathrm{T}\Rightarrow z_1(w)\nearrow\mathrm{T}$]
$m_k\in\mathbb{N}$ mit $m_k\leq n(w_{n_k})$ [beachte $n(w_{n_k})>0$ wg. $w_n\in\varphi(\mathbb{D})$] und

$\sum_{n=1}^{m_k} H_{-1}(z_n(w_{n_k})) \geq 2\mathrm{e}^{-1/k} N_\varphi(w_{n_k})$ (3)
$r_k > \sqrt{r_{k-1}}, |w_{n_k}|, |z_{m_k}(w_{n_k})|$ mit (4)

$$\forall n=1,...,m_k \ \forall t \in [r_k,1): \quad H_{-1}(w_{n_k})H_{-1}(z_n(w_{n_k})) - H_{-1}(w_{n_k})H_{-1}(t)$$
$$\geq \mathrm{e}^{-1/k} \left[H_{-1}(w_{n_k})H_{-1}(z_n(w_{n_k})) - H_{-1}(z_n(w_{n_k}))H_{-1}(t) \right] \quad (5)$$

[beachte $\lim_{r \nearrow 1} H_{-1}(r) = 0$]
Damit ist die induktive Definition abgeschlossen, und wegen (2) und (4) gilt
$|w_{n_k}|, |z_1(w_{n_k})|, ..., |z_{m_k}(w_{n_k})| \in (r_{k-1}, r_k)$ für $k \in \mathbb{N}$ (6)
sowie $r_k \geq \sqrt{r_{k-1}} \geq ... \geq r_1^{2^{1-k}} \longrightarrow 1$. Nun definieren wir das Gewichtsmaß μ durch $\hat{\mu} := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_{r_k}$. (7)
Bestimmt man dazu p und H gemäß Satz 1.31, so gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $n=1,...,m_k$

$$\begin{aligned}
&H(z_n(w_{n_k})) \\
&= \int_{[|z_n(w_{n_k})|,1)} \left[H_{-1}(z_n(w_{n_k})) - H_{-1}(t) \right] d\hat{\mu}(t) \\
&\overset{(6,7)}{=} \frac{1}{H_{-1}(w_{n_k})} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \left[H_{-1}(w_{n_k})H_{-1}(z_n(w_{n_k})) - H_{-1}(w_{n_k})H_{-1}(r_j) \right] \\
&\overset{(5)}{\geq} \frac{1}{H_{-1}(w_{n_k})} \mathrm{e}^{-1/k} \cdot \\
&\qquad \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \left[H_{-1}(w_{n_k})H_{-1}(z_n(w_{n_k})) - H_{-1}(z_n(w_{n_k}))H_{-1}(r_j) \right] \\
&\overset{(6,7)}{=} \frac{H_{-1}(z_n(w_{n_k}))}{H_{-1}(w_{n_k})} \mathrm{e}^{-1/k} \int_{[|w_{n_k}|,1)} \left[H_{-1}(w_{n_k}) - H_{-1}(t) \right] d\hat{\mu}(t) \\
&= \frac{H_{-1}(z_n(w_{n_k}))}{H_{-1}(w_{n_k})} \mathrm{e}^{-1/k} H(w_{n_k}) \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die zu H und φ gebildete Anzahlfunktion K_φ

$$\begin{aligned}
\frac{K_\varphi(w_{n_k})}{H(w_{n_k})} &\geq \sum_{n=1}^{m_k} \frac{H(z_n(w_{n_k}))}{H(w_{n_k})} \geq \mathrm{e}^{-1/k} \sum_{n=1}^{m_k} \frac{H_{-1}(z_n(w_{n_k}))}{H_{-1}(w_{n_k})} \\
&\overset{(3)}{\geq} \mathrm{e}^{-2/k} \frac{2N_\varphi(w_{n_k})}{H_{-1}(w_{n_k})} \overset{(1)}{\geq} \mathrm{e}^{-2/k-1/n_k} \limsup_{w \nearrow \mathrm{T}} \frac{2N_\varphi(w)}{H_{-1}(w)} \ ,
\end{aligned}$$

also wegen $\lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{-2/k-1/n_k} = 1$

$$\limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{K_\varphi(w)}{H(w)} \geq \limsup_{w\nearrow\mathrm{T}} \frac{2N_\varphi(w)}{H_{-1}(w)} > 0\ .$$

Um zu beweisen, dass C_φ nicht kompakt auf $\mathcal{A}^2_\mu$ ist, zeigen wir, dass wir Satz 4.12 auf $\mathcal{A}^2_\mu$ anwenden können, d. h. dass H regulär langsam ist: Wegen

$$H(r) = \int_{[r,1)} \int_r^t \frac{ds}{s}\, d\hat{\mu}(t) = \int_r^1 \hat{\mu}([s,1))\, \frac{ds}{s}$$

und (8) ist H in (r_{k-1}, r_k) stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dr}\frac{H(r)}{(1-r^2)^5} = \frac{-\frac{1-r^2}{r}\hat{\mu}([r,1)) + 10r\int_r^1 \hat{\mu}([s,1))\frac{ds}{s}}{(1-r^2)^6}\ .$$

Für $r\in(r_{k-1}, r_k)$ gilt wegen (6) und (7)

$$\begin{aligned}
\frac{1-r^2}{r}\hat{\mu}([r,1)) &= \frac{1-r^2}{r}2^{-k+1} \leq 2\frac{1-r^2}{r}\frac{1}{r_{k+1}-r}\int_r^{r_{k+1}} \hat{\mu}([s,1))\frac{ds}{s} \\
&\overset{(4)}{\leq} 2\frac{1-r^2}{r(\sqrt{r}-r)}\int_r^1 \hat{\mu}([s,1))\frac{ds}{s} \\
&= 2\frac{(1+r)(\sqrt{r}+r)}{r^3}\cdot r\int_r^1 \hat{\mu}([s,1))\frac{ds}{s}\ .
\end{aligned}$$

Wegen $2\lim_{r\nearrow 1}\frac{(1+r)(\sqrt{r}+r)}{r^3} = 8 < 10$ gibt es somit ein $k_0\in\mathbb{N}$, so dass der Quotient $\frac{H}{G_5}$ monoton wachsend ist in $[r_{k-1}, r_k]$ für $k>k_0$, d. h. $\frac{H}{G_5}$ ist monoton wachsend in $[r_{k_0}, 1) = \bigcup_{k=k_0+1}^{\infty}[r_{k-1}, r_k]$. □

Dass dieser Satz Gültigkeit besitzt, ist eine Folge davon, dass $\mathcal{H}^2$ zwar der Schnitt über alle Bergmanräume ist, jedoch nicht der Schnitt über alle Standardbergmanräume (s. Satz 2.17), denn dieses bedeutet ja gerade, dass es Bergmanräume gibt, die $\mathcal{H}^2$ näher kommen als die Standardbergmanräume, und damit auch eher die Eigenschaften von $\mathcal{H}^2$ übernehmen.

Anhang

A.1 Zum Beweis von Satz 1.34

In diesem Abschnitt schließen wir die Lücke im Beweis von Satz 1.34. Dieser fehlende Teil ist rein technisch und wurde hierhin ausgelagert, damit er vorne den Lesefluss nicht unterbricht.

Sei also H stetig, positiv, rotationsinvariant und subharmonisch in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ mit $\frac{H}{H_{-1}}\leq q$ und $\lim_{z\nearrow\mathrm{T}} \frac{H(z)}{H_{-1}(z)} = 0$. Zu zeigen ist, dass H als Funktion in $(0,1)$ linksseitige Ableitungen besitzt, die linksseitig stetig sind mit $\int_r^1 H'_-(t)\,dt = -H(r)$ $[r\in(0,1)]$ und für die $rH'_-(r)$ monoton wachsend in r ist mit $-2q \leq rH'_-(r) < 0$ $[r\in(0,1)]$ und $\lim_{r\nearrow 1} rH'_-(r) = 0$.

Beweis: Wegen der Subharmonizität von H ist das gemäß (1.8) definierte $m_H(r)$ konvex in $\log r$ für $r\in(0,1)$ [Du, Bem. zu 1.6.], und wegen der Rotationsinvarianz gilt $m_H{=}H$, d. h. $h{:=}H\circ\exp$ ist konvex in $(-\infty,0)$. Daraus folgt nach [Hö, Cor. 1.1.6. u. Th. 1.1.7.], dass h in kompakten Teilmengen von $(-\infty,0)$ Lipschitz-stetig ist sowie dass h'_- in $(-\infty,0)$ existiert und linksseitig stetig und monoton wachsend ist. Damit ist H als Funktion in $(0,1)$ in kompakten Teilmengen von $(0,1)$ Lipschitz-stetig, H'_- existiert in $(0,1)$ und ist linksseitig stetig und $rH'_-(r)$ ist monoton wachsend in r. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit existiert die Ableitung $H'(r)$ für fast alle $r\in(0,1)$, stimmt dann natürlich mit $H'_-(r)$ überein, und für $0<r<s<1$ gilt $\int_r^s H'_-(t)\,dt = H(s) - H(r)$. Läßt man s gegen 1 gehen, so folgt wegen $\lim_{s\nearrow 1} H(s) = 0$ (da $\lim_{s\nearrow 1} \frac{H(s)}{H_{-1}(s)} = 0$) $\int_r^1 H'_-(t)\,dt = -H(r)$.
Wäre $rH'_-(r) \geq 0$ für ein r, so wäre $H'_-{\geq}0$ in $[r,1)$ wegen der Monotonie von $rH'_-(r)$ und damit $H(s) = -\int_s^1 H'_-(t)\,dt \leq 0$ für $s\in[r,1)$ im Widerspruch zur Positivität von H. Wäre $rH'_-(r) \leq -\gamma < -2q$ für ein $r\in(0,1)$, so hätte man wegen der Monotonie $tH'_-(t) \leq -\gamma$ für $t\in(0,r]$ und damit

$$H(s) = -\int_s^1 H'_-(t)\,dt \geq \int_s^r \frac{\gamma}{t}\,dt = \gamma(\log\tfrac{1}{s} - \log\tfrac{1}{r})$$

für $s\in(0,r]$. Daraus würde im Widerspruch zur Voraussetzung

$$\limsup_{s\searrow 0}\frac{H(s)}{H_{-1}(s)}\geq\gamma\limsup_{s\searrow 0}\frac{\log\frac{1}{s}-\log\frac{1}{r}}{2\log\frac{1}{s}}\geq\frac{\gamma}{2}>q$$

folgen. Also gilt $rH'_-(r)\geq -2q$ für $r\in(0,1)$. Wegen der Monotonie und Negativität existiert $\lim_{r\nearrow 1} rH'_-(r)$ und ist nicht-positiv. Wäre er gleich $-\gamma<0$, so hätte man wie eben

$$H(r)=-\int_r^1 H'_-(t)\,dt\geq\int_r^1\frac{\gamma}{t}\,dt=\gamma\log\tfrac{1}{r}$$

für $r\in(0,1)$ und damit mit $\limsup_{r\nearrow 1}\frac{H(r)}{H_{-1}(r)}\geq\frac{\gamma}{2}>0$ wiederum einen Widerspruch zur Voraussetzung. Somit gilt $\lim_{r\nearrow 1} rH'_-(r)=0$. □

A.2 Unstetigkeit der Nevanlinnaschen Anzahlfunktion

Da es zwar eine Standardaussage der Literatur ist, dass die Nevanlinnasche Anzahlfunktion nicht stetig zu sein braucht, wir jedoch nirgendwo ein Beispiel dafür finden konnten, geben wir im Folgenden ein solches:

Mit $\varphi(z)=\exp(\frac{z+1}{z-1})$ gilt für $r\in(0,1)$

$$\varphi^{-1}(\{re^{\mathrm{i}\theta}\})=\{\tfrac{\log r+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)+1}{\log r+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)-1}\colon k\in\mathbb{Z}\}\ ,$$

wobei jedes Urbild einfach ist, also

$$\begin{aligned} N_\varphi(re^{\mathrm{i}\theta}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\log\left|\frac{\log r+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)-1}{\log r+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)+1}\right| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\log\frac{(1-\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2}{(1+\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2} \end{aligned}$$

für $re^{\mathrm{i}\theta}\neq\varphi(0)=e^{-1}$. Zu $\gamma\in(0,1)$ findet man ein $x_0>1$, so dass $\log x\geq\gamma(x-1)$ für $x\in[1,x_0]$, und dazu wegen

$$1\leq\frac{(1-\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2}{(1+\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2}\leq\frac{(1-\log r)^2}{(1+\log r)^2}\xrightarrow{r\searrow 0}1$$

ein $R\in(0,\mathrm{e}^{-1})$ mit

$$\begin{aligned}\log\frac{(1-\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2}{(1+\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2} &\geq \gamma\left(\frac{(1-\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2}{(1+\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2}-1\right)\\ &= \frac{4\gamma\log\frac{1}{r}}{(1+\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2}\end{aligned}$$

für $r\in(0,R)$. Beschränkt man sich auf diese r und normiert $\theta\in[0,2\pi)$, so erhält man

$$\begin{aligned}N_\varphi(re^{\mathrm{i}\theta}) &\geq 2\gamma\log\tfrac{1}{r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2}\\ &= \frac{2\gamma\log\frac{1}{r}}{(\log\frac{1}{r}-1)^2}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{1+(\frac{\theta+2k\pi}{1+\log r})^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+(\frac{\theta+2k\pi}{1+\log r})^2}\right)\\ &\geq \frac{4\gamma\log\frac{1}{r}}{(\log\frac{1}{r}-1)^2}\int_1^\infty\frac{1}{1+(\frac{2\pi x}{1+\log r})^2}\,dx\\ &\geq \frac{4\gamma\log\frac{1}{r}}{(\log\frac{1}{r}-1)^2}\left(-1+\frac{\log\frac{1}{r}-1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{1+(\frac{2\pi x}{1+\log r})^2}\frac{2\pi dx}{\log\frac{1}{r}-1}\right)\\ &= -4\gamma\frac{\log\frac{1}{r}}{(\log\frac{1}{r}-1)^2}+\gamma\frac{\log\frac{1}{r}}{\log\frac{1}{r}-1}\overset{r\searrow 0}{\longrightarrow} 0+\gamma\ .\end{aligned}$$

Wegen der Wahlmöglichkeiten für γ gilt somit

$$\liminf_{w\to 0} N_\varphi(w)\geq 1\ .$$

Andereseits liefert die Littlewoodsche Ungleichung 3.6

$$\limsup_{w\to 0} N_\varphi(w)\leq\limsup_{w\to 0}\log\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-1}w}{\mathrm{e}^{-1}-w}\right|=1$$

so dass $\lim_{w\to 0} N_\varphi(w)=1$, obwohl $N_\varphi(0)=0$.

Literaturverzeichnis

[CM] Carl C. Cowen & Barbara D. MacCluer: *Composition operators on spaces of anaytic functions,* CRC Press, Boca Raton 1994

[Du] Peter L. Duren: *Theory of H^p Spaces,* Academic Press, New York 1970

[Ga] Dieter Gaier: *Vorlesungen über Approximation im Komplexen,* Birkhäuser, Basel 1980

[HK] W. K. Hayman & P. B. Kennedy: *Subharmonic Functions, vol.* I, Academic Press, London 1976

[He] L. L. Helms: *Introduction to Potential Theory,* John Wiley & Sons, New York, 1969

[Hö] L. Hörmander: *Notions of Convexity,* Birkhäuser, Boston, 1994

[KM] Thomas L. Kriete III & Barbara D. MacCluer: *Composition operators on large weighted Bergman spaces,* Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 755-788

[Ku] Harald Kuhn: *Ein elementarer Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes,* Arch. Math. 15 (1964), 316-317

[MS] Barbara D. MacCluer & Joel H. Shapiro: *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces,* Canadian J. Math. 38 (1986), 878-906

[Mo] Frank Morgan: *Geometric Measure Theory,* Academic Press, New York 1988

[No] Eric Nordgren: *Composition operators,* Canadian J. Math. 20 (1968), 442-449

[Ru] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York 1987, 3. Auflage

[Ry] John V. Ryff: *Subordinate H^p-functions,* Duke Math. J. 33 (1966), 347-354

[Sa] G. Sansone, *Orthogonal Functions,* Interscience Publishers, Inc., New York 1959

[Sc] H. J. Schwartz, *Composition operators on H^p,* thesis, Univ. of Toledo 1969

[S1] Joel H. Shapiro: *The essential norm of a composition operator,* Ann. of Math. 125 (1987), 375-404

[S2] Joel H. Shapiro: *Composition Operators and Classical Function Theory,* Springer, New York 1993

[ST] Joel H. Shapiro & P. D. Taylor: *Compact, nuclear, and Hilbert-Schmidt composition operators on H^2,* Indiana Univ. Math. J. 23 (1973), 471-496

[Sd] Allen L. Shields: *Weighted shift operators, analytic function theory,* Mathematical surveys 13, AMS 1974

[Ts] M. Tsuji: *Potential Theory in Modern Function Theory,* Maruzen Co., Tokyo 1959

[Wa] Wolfgang Walter: *Analysis* I, Springer, Berlin 1990, 2. Auflage

[Zo] Nina Zorboska: *Composition Operators on weighted Dirichlet spaces,* preprint

Symbolverzeichnis

In der gesamten Arbeit bezeichnet bei Abbildungen der Exponent -1 die Umkehrabbildung, während nicht-negative Exponenten die entsprechende Potenz (und nicht die Verkettung) anzeigen. Weiterhin steht $z \nearrow \mathrm{T}$ für $z \in \mathbb{D}$, $z \to \mathrm{T}$. Bei normierten Räumen $(F_1, \|\cdot\|_1)$ und $(F_2, \|\cdot\|_2)$ steht streng nach Definition $F_1 = F_2$ für die Gleichheit als Mengen und $(F_1, \|\cdot\|_1) = (F_2, \|\cdot\|_2)$ für die Gleichheit als normierte Räume.

Mengen und Abbildungen

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen:	$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$
$\mathbb{N}_0$	die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen:	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen	
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen	
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen	
$\mathbb{D}$	die offene komplexe Einheitskreisscheibe:	$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon \|z\| < 1\}$
$B_r(a)$	die offene Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $a \in \mathbb{C}$:	$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \colon \|z - a\| < r\}$
T	die komplexe Einheitskreislinie:	$\mathrm{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon \|z\| = 1\}$
$\mathrm{H}(\mathbb{D})$	der Vektorraum der in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen	
1_B	eine Indikatorfunktion	
I	der Identitätsoperator auf $\mathrm{H}(\mathbb{D})$:	$I \colon \mathrm{H}(\mathbb{D}) \to \mathrm{H}(\mathbb{D}),\ f \mapsto f$
id	die Identität in $\mathbb{D}$:	$\mathrm{id} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ z \mapsto z$
φ	eine holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$	
φ_r	die reduzierte Abbildung zu φ und $r \in (0, 1]$:	$\varphi_r(z) = \varphi(rz)$
$\beta(\varphi)$	$\beta(\varphi) = \liminf_{z \nearrow \mathrm{T}} \frac{1 - \|\varphi(z)\|}{1 - \|z\|}$	72
$n_\varphi(w)$	die Anzahl der w-Stellen von φ	44
$n_{\varphi,j}(w)$	die Urbilder von w unter φ bei nicht-konstantem φ	44
S_a	die bijektive holomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{D}$ zu $a \in \mathbb{D}$ mit $S_a(a) = 0$ und $S_a(0) = a$	34
C_φ	der Kompositionsoperator zu φ:	$C_\varphi \colon \mathrm{H}(\mathbb{D}) \to \mathrm{H}(\mathbb{D}),\ f \mapsto f \circ \varphi$

Maße und Gewichte

$\wp=(p_n)$	eine Gewichtsfolge	13
δ_r	das Diracmaß auf $[0,1)$ zu $r\in[0,1)$	
A	das normalisierte Lebesguemaß auf $\mathbb{D}$:	$dA(z) = \frac{1}{\pi}dzd\overline{z}$
μ, ν	ein Gewichtsmaß	7
$\hat{\mu}, \hat{\nu}$	das mit μ bzw. ν assoziierte Maß	7
G	ein stetiges Gewicht	7
$\hat{G}$	die mit G assoziierte Funktion	7
G_α	das Standardgewicht zu $\alpha>-1$	10
G_α^*	Gewicht zu $\alpha>-1$ mit $\mathcal{A}^2_{G_\alpha}=\mathcal{A}^2_{G_\alpha^*}$	31
H	stetiges Gewicht, das die Darstellung eines Bergmanraums als Dirichletraum erlaubt	23
H_{-1}	das stetige Gewicht, das die Darstellung von $\mathcal{H}^2$ als Dirichletraum erlaubt	23
E	Vergleichsfunktion zwischen einem stetigen Gewicht und H_{-1}	24
K_φ	Anzahlfunktion zu φ und einem stetigen Gewicht	47
$K_{\varphi,r}$	reduzierte Anzahlfunktion zu φ, $r\in(0,1]$ und einem stetigen Gewicht	47
N_φ	die Nevanlinnasche Anzahlfunktion zu φ	48

normierte Räume

$\|\cdot\|_\infty$	die Supremumsnorm auf $\mathbb{D}$:	$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(z)\|: z\in\mathbb{D}\}$
$\mathcal{H}^\infty$	der Raum der in $\mathbb{D}$ beschränkten und holomorphen Funktionen:	$\mathcal{H}^\infty = \{f\in\mathrm{H}(\mathbb{D}): \|f\|_\infty<\infty\}$
$\mathcal{A}^2$	der ungewichtete Bergmanraum	10
$\mathcal{A}^2_\mu$	der Bergmanraum zu dem Gewichtsmaß μ	9
$\mathcal{A}^2_G$	der Bergmanraum zu dem stetigen Gewicht G	9
$\mathcal{D}^2_{q,\mu}$	der Dirichletraum zu $q>0$ und dem Gewichtsmaß μ	21
$\mathcal{D}^2_{q,G}$	der Dirichletraum zu $q>0$ und dem stetigen Gewicht G	21
$\mathcal{H}^2$	der ungewichtete Hardyraum	14
$\mathcal{H}^2_\wp$	der Hardyraum zu der Folge $\wp$	13
k_b	reproduzierender Kern zu $b\in\mathbb{D}$ und einem Hardyraum $\mathcal{H}^2_\wp$: $\langle f, k_b\rangle_\wp = f(b)$	14
$\hat{k}_b$	$\langle f, \hat{k}_b\rangle_\wp = f'(b)$	15

Stichwortverzeichnis

Lebenslauf

Persönliches	Name: Ulrich Böttger Geburtsdatum: 15. Februar 1969 Geburtsort: Ludwigshafen am Rhein Familienstand: ledig

Schulbildung

7/75 - 6/88	Grundschule und Gymnasium in Frankenthal, Abitur mit Durchschnittsnote 1,6
8/88 - 3/90	Zivildienst beim Deutschen Roten Kreuz in Frankenthal
4/90 - 9/90	Weiterarbeit beim DRK als Rettungsassistent, Praktikum bei der BASF im Rechenzentrum

Studium

10/90 - 12/95	Mathematik auf Diplom mit Nebenfach Physik an der Universität Karlsruhe (TH)
3/92	Vordiplom mit Gesamtnote „sehr gut“
10/91 - 9/93	Tutor für Lineare Algebra und Analytische Geometrie I und II sowie Analysis I und II
12/95	Diplom mit Gesamtnote „mit Auszeichnung bestanden“
seit 1/96	Promotionsstudium in Mathematik an der Universität Karlsruhe (TH)
seit 9/96	Assistent am Mathematischen Institut I, Lehrstuhl Prof. Schneider