

Eine Methode zur Einschließung von Eigenpaaren
nichtselbstadjungierter Eigenwertprobleme und
ihre Anwendung auf die Orr-Sommerfeld-Gleichung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Jan-Rainer Lahmann
aus Clausthal-Zellerfeld

Tag der mündlichen Prüfung:

28. April 1999

Referent:

Prof. Dr. M. Plum

Korreferenten:

Prof. Dr. J. Albrecht

Prof. Dr. G. Alefeld

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Existenz, Eindeutigkeit und Einschließung von Lösungen nichtselbstadjungierter Eigenwertprobleme	9
2.1	Existenz, Eindeutigkeit und Einschließung von Eigenpaaren	9
2.2	Lokale Eindeutigkeit von Eigenwerten	20
2.3	Eigenwertausschließungen	23
2.4	Einordnung der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil	25
3	Anwendung des zentralen Einschließungssatzes auf die Orr-Sommerfeld-Gleichung	29
3.1	Approximation von Eigenpaaren	29
3.2	Einschließung des Blasiusprofils	30
3.3	Eigenwertschranken zur Bestimmung der Konstanten K	37
3.3.1	Die Verfahren von Rayleigh-Ritz, Lehmann-Goerisch und Temple	41
3.3.2	Die Konstante K	44
3.3.3	Das erste Vergleichsproblem	48
3.3.4	Das zweite Vergleichsproblem	50
3.3.5	Homotopie vom zweiten zum ersten Vergleichsproblem	58
3.3.6	Das dritte Vergleichsproblem	62
3.3.7	Lösung zweier Eigenwertprobleme mit Mathematica	65
3.3.8	Homotopie vom dritten zum zweiten Vergleichsproblem	67

3.4	Ein neuer Algorithmus zur Durchführung der Homotopiemethode	69
4	Numerische Ergebnisse	73
4.1	Realisierung	73
4.2	Berechnete Ergebnisse	84
5	Anhang	91
A	Definition der Operatoren	92
B	Bestimmung der adjungierten Operatoren	93
C	Regularität von schwachen Lösungen	96
6	Literaturverzeichnis	99

Kapitel 1

Einleitung

Die Orr-Sommerfeld-Gleichung

$$(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 u + i\alpha R[V(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + V''u] = \lambda(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u \quad (1.1)$$

ist eine der zentralen Gleichungen aus der Stabilitätstheorie inkompressibler, reibungsbehafteter Strömungen.

Sie beschreibt die zeitliche (oder räumliche) Stabilität oder Instabilität einer gegebenen Grundströmung V gegenüber Störungen der Wellenzahl $\alpha > 0$. Weiter bezeichne $R > 0$ die Reynoldszahl des strömenden Mediums und $D = \frac{d}{dz}$. Betrachtet man Kanalströmungen, wie die Couette- oder Poiseuilleströmung, so ist das Gebiet, auf dem (1.1) zu erfüllen ist, ein kompaktes Intervall. In dieser Arbeit soll die Stabilität des Blasiusprofils als Grenzschichtströmung mathematisch untersucht werden. Das zu betrachtende Grundgebiet ist dann die Halbgerade $[0, \infty)$, und zu (1.1) kommen die Randbedingungen

$$u(0) = u'(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} u'(z) = 0 \quad (1.2)$$

hinzu. Das Blasiusprofil V ist definiert als Ableitung der Lösung der nichtlinearen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} W''' + WW'' &= 0 \quad \text{in } [0, \infty) , \\ W(0) = W'(0) &= 0 , \quad \lim_{z \rightarrow \infty} W'(z) = 1 . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Zur Herleitung dieser Gleichungen und zum physikalischen Hintergrund siehe etwa [9], [28]. Die Hauptaussage der Orr-Sommerfeld-Gleichung ist

folgende: Liegen (für festes α, R) alle Eigenwerte von (1.1), (1.2) in der rechten Halbebene (haben sie also positiven Realteil), so ist die betrachtete Grundströmung V stabil; gibt es jedoch mindestens einen Eigenwert mit negativem Realteil, so ist die Grundströmung instabil.

Numerische Untersuchungen [12], [14], [16] legen die Vermutung nahe, daß das Blasiusprofil für gewisse Parameter α, R (z. B. für $\alpha = \sqrt{2} \cdot 0.179$, $R = \sqrt{2} \cdot 580$; der Faktor $\sqrt{2}$ tritt in der Literatur durch eine andere Skalierung der Gleichung (1.3) häufig nicht auf) instabil ist. Die bestimmte Näherung für einen Eigenwert mit negativem Realteil liegt allerdings sehr nahe der imaginären Achse, so daß es sich möglicherweise nur um numerische Ungenauigkeiten handelt. Experimentelle Untersuchungen (siehe [28]) haben die Instabilität jedoch ebenfalls bestätigt, und der erste mathematische Beweis wird mit dieser Arbeit geliefert.

Eine naheliegende Hilbertraum-Realisierung von (1.1), (1.2) liefert ein nichtselbstadjungiertes Eigenwertproblem in der Form

$$A[u] = \lambda B[u] \quad (1.4)$$

mit linearen Operatoren A und B ,

$$\begin{aligned} A &: D(A) \rightarrow Y, \\ A[u] &:= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 u + i\alpha R[V(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + V''u] \\ B &: X \rightarrow Y, \\ B[u] &:= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u, \end{aligned} \quad (1.5)$$

wobei $Y := L_2(0, \infty)$, $X := H_2(0, \infty) \cap H_1^0(0, \infty)$ und $D(A) := H_4(0, \infty) \cap H_2^0(0, \infty)$ gesetzt wird. In $D(A)$ sind die in (1.2) geforderten Randbedingungen bereits berücksichtigt. Für den Beweis der Instabilität des Blasiusprofils muß die Existenz eines Eigenwertes von (1.4), (1.5) mit negativem Realteil nachgewiesen werden. Die bekannten Verfahren von Rayleigh-Ritz, Temple-Lehmann-Goerisch und auch Weinstein oder Kato zur Einschließung von Eigenwerten, die allesamt auf Variationscharakterisierungen der Eigenwerte beruhen, sind hier wegen der Nichtselbstadjungiertheit des Operators A nicht anwendbar.

Das Verfahren von Plum [27] zum Nachweis von Existenz, lokaler Eindeutigkeit und zur Einschließung von Lösungen nichtlinearer (parame-

terabhängiger) Zweipunkt-Randwertaufgaben in der Nähe von Umkehrpunkten wird in Kapitel 2 auf Eigenwertaufgaben der Form (1.4) mit abgeschlossenem Operator A und beschränktem B übertragen. Außer den Voraussetzungen der Abgeschlossenheit bzw. Beschränktheit sind A und B beliebig; der bewiesene Satz ist also völlig unabhängig vom Beispiel der Orr-Sommerfeld-Gleichung. Das resultierende Verfahren kann in 3 Schritte eingeteilt werden:

1. Bestimmung einer "guten" Näherungslösung (ω, μ) des gegebenen Problems; seine Güte wird am Defekt $\|A[\omega] - \mu B[\omega]\|_Y$ gemessen. Der Näherungseigenwert μ darf dabei nicht im Inneren des Restspektrums von (1.4) liegen.
2. Bestimmung einer positiven unteren Schranke für das Gesamtspektrum (d. h. für den kleinsten Eigenwert bzw. das wesentliche Spektrum) eines selbstadjungierten Eigenwertproblems in Bilinearformgestalt (siehe (2.4)): $\langle \mathcal{L}[f], \mathcal{L}[g] \rangle_Y = \lambda \langle f, g \rangle_{X \times X}$ für alle $g \in D(\mathcal{L})$ mit \mathcal{L} als einer Linearisierung des gegebenen Problems (1.4) (der Term $\lambda B[u]$ auf der rechten Seite von (1.4) wird dabei als Nichtlinearität aufgefaßt, (1.4) also als nichtlineares Randwertproblem).
3. Erfüllen die zuvor bestimmten Konstanten eine einfache Ungleichung, so ist die Existenz einer (eindeutigen) Lösung (U, λ) in einer kleinen, explizit angebbaren Umgebung der Näherung (ω, μ) bewiesen.

Für die Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil ist nun Instabilität nachgewiesen, falls für alle $(\tilde{U}, \tilde{\lambda})$ aus dieser Umgebung $\text{real}(\tilde{\lambda}) < 0$ gilt.

Ergänzend wird in Kapitel 2 ein Satz bewiesen, der Aussagen über die lokale Eindeutigkeit des *Eigenwertes* (anstelle des *Eigenpaares* (U, λ)) liefert sowie ein weiterer Satz, der Eigenwertausschließungen liefert, also Gebiete angibt, in denen keine Eigenwerte von Problemen der Form (1.4) liegen.

Bei der Durchführung des Verfahrens für die Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil erweist sich Schritt 2 – die Behandlung der Eigenwert-

aufgabe (2.4) bzw. (3.15) – als besonders aufwendig, denn für die Anwendung der bekannten Verfahren zur Bestimmung unterer Eigenwertschranken ist die Kenntnis einer (groben) unteren Schranke für einen höheren Eigenwert notwendig. Diese kann mit der Homotopiemethode von Plum [25] und Goerisch [13] bestimmt werden. Die Aufstellung geeigneter Vergleichsprobleme (auf denen die Homotopie beruht) für die konkrete Einordnung (1.5) der Orr-Sommerfeld-Gleichung ist der wesentliche Inhalt von Kapitel 3. Zunächst wird ein Vergleichsproblem angegeben, das statt des Operators \mathcal{L} im Banachraum $X \times \mathbb{C}$ einen Differentialoperator L vierter Ordnung in X benutzt. Danach wird hierzu ein Vergleichsproblem angegeben, das auf einem kompakten Intervall $[0, x_0]$ zu betrachten ist (statt auf dem unbeschränkten Intervall $[0, \infty)$ für L und \mathcal{L}). Dieses Problem wird durch eine weitere Homotopie auf ein Eigenwertproblem mit konstanten Koeffizienten im Intervall $[0, x_0]$ zurückgeführt. Die Eigenwerte dieses letzten Vergleichsproblems lassen sich als Nullstellen einer parameterabhängigen 8×8 Determinante mit Hilfe von Intervall-Bisektion oder des Intervall-Newton-Verfahrens bestimmen.

Die beiden Probleme auf dem Intervall $[0, x_0]$ (das mit konstanten bzw. das mit nichtkonstanten Koeffizienten) liegen in gewissem Sinne weit entfernt voneinander, d. h. die Homotopie zwischen ihnen erfordert viele (in der Größenordnung 100) Einzelschritte. Um den Rechenaufwand zu verringern, wird ein neuer Algorithmus zur Durchführung der Homotopiemethode vorgeschlagen.

Außerdem wird in Kapitel 3 ein Verfahren zur Bestimmung von Näherungseigenpaaren des Problems (1.4) angegeben und die Lösung der Blasiusgleichung (1.3), die nicht in geschlossener Form angebar ist, eingeschlossen. Hierzu werden das Galerkin-Verfahren und Monotoniemethoden verwendet.

Ein wichtiger Aspekt des vorgestellten Einschließungsverfahrens ist, daß sämtliche Voraussetzungen - nach erfolgter Einordnung der konkreten Aufgabe - weitgehend automatisch auf dem Computer überprüft werden können. Rundungsfehler werden dabei durch Intervallarithmetik (wie C-XSC [19] oder wie in Mathematica [33] vorhanden) kontrolliert, so daß man verifizierte Ergebnisse erhält. Für diese Arbeit wurde eine Kombi-

nation von C-XSC und Mathematica gewählt. Der größte Teil der Algorithmen - vor allem die Handhabung von Ansatzfunktionen und Skalarprodukten - ist in Mathematica-Programmen realisiert, während Matrix-Probleme per MathLink an C-XSC übergeben werden, um so die Rechenzeiten zu verkürzen. Programmierung und Rechnungen wurden hauptsächlich auf einer IBM RS/6000 Mod 43P-140, 332 MHz durchgeführt. Auf Einzelheiten der programmtechnischen Realisierung wird in Kapitel 4 eingegangen. Dort finden sich auch Ergebnisse der Beispielrechnungen (und damit der Beweis der Instabilität des Blasiusprofils) sowie ein Vergleich mit einer in [14] angegebenen "hochgenauen" Lösung, die in [12] als "exakte" Referenzlösung verwendet wird.

In [12] werden außerdem (für die dort gewählten Ansatzfunktionen) Aussagen über die Konvergenz des Galerkin-Verfahrens für die Orr-Sommerfeld-Gleichung gemacht; bisher sind jedoch keine Fehlerschranken bekannt. Bei dem in [12] beschriebenen Vorgehen kann das folgende Problem auftreten: Das Galerkin-Verfahren liefert bei Verwendung von $N \in \mathbb{N}$ Ansatzfunktionen N Näherungen für Eigenwerte; es ist jedoch nicht klar, ob tatsächlich entsprechend viele Eigenwerte des Problems (1.4) existieren. Für die Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil ist in [24] gezeigt, daß nur endlich viele Eigenwerte existieren. Das Galerkin-Verfahren kann also Scheinlösungen liefern, so daß zur Überprüfung ein Satz wie der in dieser Arbeit bewiesene Satz 2.1 herangezogen werden sollte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. M. Plum, der diese Arbeit gemeinsam mit Herrn Prof. Dr. F. Goerisch angeregt hat. Er gab mir stets hilfreiche Hinweise und gewährte mir eine vorzügliche Betreuung. Herrn Prof. Dr. J. Albrecht danke ich neben der Übernahme des Korreferats insbesondere für die Unterstützung, die ich durch ihn über viele Jahre erfahren habe.

Herrn Prof. Dr. G. Alefeld danke ich für die freundliche Aufnahme in Karlsruhe und die Übernahme des Korreferats.

Kapitel 2

Existenz, Eindeutigkeit und Einschließung von Lösungen nichtselbstadjungierter Eigenwertprobleme

Im ersten Abschnitt wird ein Satz von Plum über Existenz, lokale Eindeutigkeit und Einschließung von Eigenpaaren nichtselbstadjungierter Eigenwertprobleme vorgestellt. Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, wie man hieraus (mit gewissen zusätzlichen Informationen) auch lokale Eindeutigkeitsaussagen für die Eigenwerte dieser Probleme erhalten kann. Ergänzend hierzu beschäftigt sich der nächste Abschnitt mit der (lokalen) Ausschließung von Eigenwerten. Im letzten Abschnitt wird eine Einordnung der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil in diesen allgemeinen Rahmen angegeben.

2.1 Existenz, Eindeutigkeit und Einschließung von Eigenpaaren

Der folgende Satz liefert Aussagen zur Existenz, lokalen Eindeutigkeit und Einschließung von Eigenpaaren (U, λ) nichtselbstadjungierter Eigenwertprobleme der Form

$$\begin{aligned} \text{Suche } u \in D(A) \setminus \{0\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{C} \\ \text{mit } A[u] = \lambda B[u], \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei X, Y komplexe Banachräume seien und $A : D(A) \rightarrow Y$, $B : X \rightarrow Y$ lineare Operatoren mit einem Unterraum $D(A) \subset X$. A sei abgeschlossen und B beschränkt.

Zunächst werden einige Bezeichnungen eingeführt und Hilfsgrößen festgelegt. Auf die konkrete Bestimmung dieser Größen wird im weiteren Verlauf der Arbeit im Detail eingegangen.

- Berechne ein Näherungseigenpaar $(\omega, \mu) \in D(A) \times \mathbb{C}$ von (2.1), wobei μ kein innerer Punkt des Restspektrums $\sigma_{\text{Rest}}(A, B)$ von (2.1) sei ($\sigma_{\text{Rest}}(A, B) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist kein Eigenwert von (2.1) und der Wertebereich } W(A \Leftrightarrow \lambda B) = (A \Leftrightarrow \lambda B)[D(A)] \text{ ist nicht dicht in } Y\}$); in der Regel können bekannte numerische Verfahren zur Bestimmung von (ω, μ) verwendet werden;
- berechne $\delta > 0$ mit $\|A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega]\|_Y \leq \delta$, d. h. δ sei eine obere Schranke für den Defekt des Näherungseigenpaares;
- wähle einen Skalierungsparameter $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\varphi \in X'$ mit $\varphi(\omega) \neq 0$;
- setze

$$\begin{aligned} \widehat{Y} &:= Y \times \mathbb{C} \text{ mit der Norm } \left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{Y}} := \sqrt{\|u\|_Y^2 + |\sigma|^2}, \\ \widehat{X} &:= X \times \mathbb{C} \text{ mit der Norm } \left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} := \sqrt{\|u\|_X^2 + |\sigma|^2}, \\ \widehat{D(A)} &:= D(A) \times \mathbb{C}, \\ X_0 &:= \{u \in X : \varphi(u) = 0\}, \\ \widehat{X}_0 &:= X_0 \times \mathbb{C}, \\ D(\mathcal{L}) &:= \widehat{D(A)} \cap \widehat{X}_0, \\ \mathcal{L} &: D(\mathcal{L}) \rightarrow Y, \quad \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] := A[u] \Leftrightarrow \mu B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega]; \end{aligned}$$

- berechne $K > 0$ mit

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq K \left\| \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] \right\|_Y \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L}); \quad (2.2)$$

falls ein solches K nicht existiert (\mathcal{L} also keine stetige Inverse besitzt) oder nicht bestimmt werden kann, so sind die im folgenden dargestellten Verfahren nicht anwendbar;

- berechne $b > 0$ mit

$$\|B[u]\|_Y \leq b\|u\|_X \text{ für alle } u \in X_0 .$$

Der zentrale Einschließungssatz lautet nun:

Satz 2.1 [26] *Es gelte $\beta := 2b|\gamma|K^2\delta < 1$. Dann existiert ein Eigenpaar $(U, \lambda) \in \widehat{D}(A)$ von (2.1) mit $\varphi(U \Leftrightarrow \omega) = 0$ und*

$$\left\| \begin{pmatrix} \gamma(U \Leftrightarrow \omega) \\ \lambda \Leftrightarrow \mu \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq \alpha^* := \frac{2|\gamma|K\delta}{1 + \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}} .$$

Ist $(\widetilde{U}, \widetilde{\lambda}) \in \widehat{D}(A)$ ein weiteres Eigenpaar mit $\varphi(\widetilde{U} \Leftrightarrow \omega) = 0$ und

$$\left\| \begin{pmatrix} \gamma(\widetilde{U} \Leftrightarrow \omega) \\ \widetilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} < \alpha^* + \frac{2}{Kb} \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta} ,$$

so gilt $\widetilde{U} = U$, $\widetilde{\lambda} = \lambda$.

Schließlich ist λ ein einfacher Eigenwert, und es gilt $B[U] \notin \overline{W(A \Leftrightarrow \lambda B)}$.

Bemerkungen zu Satz 2.1:

- a) Die Konstanten aus Satz 2.1 lassen sich auch schreiben als

$$\alpha^* = \frac{1}{Kb} \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}} = \frac{1 \Leftrightarrow \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}}{Kb}$$

bzw.

$$\alpha^* + \frac{2}{Kb} \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta} = \frac{1 + \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}}{Kb} .$$

- b) Die Eindeutigkeitsaussage liefert lokale Eindeutigkeit bzw. Ausschließungen von Eigenpaaren, jedoch nicht für Eigenwerte. Siehe dazu Abschnitt 2.2.
- c) Die letzte Aussage des Satzes 2.1

$$B[U] \notin \overline{W(A \Leftrightarrow \lambda B)}$$

besagt, daß nicht nur die geometrische, sondern auch die (verallgemeinerte) algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ gleich eins ist.

- d) Die Bestimmung der Konstanten K , die (2.2) erfüllt, ist im Falle von Hilberträumen X, Y äquivalent zur Bestimmung einer positiven unteren Schranke für

$$\kappa_1 := \inf \left\{ \frac{\langle \mathcal{L} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}, \mathcal{L} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} \rangle_Y}{\langle \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} \rangle_{\widehat{X}}} : \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} \in D(\mathcal{L}) \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\}. \quad (2.3)$$

In Satz 3.3 und Folgerung 3.1 wird gezeigt werden, daß κ_1 gleich dem Infimum des Gesamtspektrums (siehe Definition 3.1) des folgenden *selbstadjungierten* Eigenwertproblems ist:

$$\begin{aligned} & \text{Suche } \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} \in D(\mathcal{L}) \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \\ & \text{mit } \langle \mathcal{L} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}, \mathcal{L} \begin{bmatrix} v \\ \rho \end{bmatrix} \rangle_Y = \lambda \langle \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ \rho \end{bmatrix} \rangle_{\widehat{X}} \quad (2.4) \\ & \text{für alle } \begin{bmatrix} v \\ \rho \end{bmatrix} \in D(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

- e) Voraussetzungen und Aussage von Satz 2.1 sind eng verwandt mit dem Satz von Newton-Kantorovich [31].

Für den Beweis von Satz 2.1 werden die folgenden zwei Lemmata benötigt.

Lemma 2.1 *Sind die obigen Voraussetzungen erfüllt und ist $\mu \notin \sigma_{Rest}$, so gilt*

entweder: μ ist ein einfacher Eigenwert von (2.1), und für jedes (es gibt nur ein linear unabhängiges) zugehörige Eigenelement \widehat{u} gilt $\varphi(\widehat{u}) \neq 0$; außerdem ist $B[\omega] \notin \overline{W(A \Leftrightarrow \mu B)}$

oder: μ ist kein Eigenwert von (2.1), $\mathcal{L}[D(\mathcal{L})] = Y$ und $\mathcal{L}^{-1} : Y \rightarrow \widehat{X}$ ist beschränkt (wegen (2.2) ist \mathcal{L} injektiv).

Beweis: Sei zunächst μ ein Eigenwert von (2.1). Für jedes zugehörige Eigenelement \widehat{u} gilt $\varphi(\widehat{u}) \neq 0$, denn sonst wäre $\begin{bmatrix} \widehat{u} \\ 0 \end{bmatrix} \in D(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L} \begin{bmatrix} \widehat{u} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ im Widerspruch zu (2.2). Daher kann es keine zwei linear unabhängigen Eigenelemente geben (sonst ließe sich ein weiteres Eigenelement \tilde{u} als Linearkombination angeben mit $\varphi(\tilde{u}) = 0$).

Wäre $B[\omega] \in \overline{W(A \Leftrightarrow \mu B)}$, so gäbe es eine Folge (v_n) in $D(A)$ mit $(A \Leftrightarrow \mu B)v_n \rightarrow B[\omega]$, und im Widerspruch zu (2.2) würde gelten

$$\mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u_n \\ \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \right] \rightarrow 0 \text{ für } u_n := v_n \Leftrightarrow [\varphi(v_n)/\varphi(\hat{u})]\hat{u}$$

(für die so gewählten u_n gilt $\begin{pmatrix} u_n \\ \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$).

Nun sei μ kein Eigenwert von (2.1). Da μ nicht zum Restspektrum gehört, gilt

$$\overline{W(A \Leftrightarrow \mu B)} = Y . \quad (2.5)$$

Mit A ist auch \mathcal{L} abgeschlossen, denn ist $\begin{pmatrix} u_n \\ \sigma_n \end{pmatrix}$ eine Folge in $D(\mathcal{L})$ mit

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \sigma_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in \hat{X} \text{ und } \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u_n \\ \sigma_n \end{pmatrix} \right] \rightarrow v \in Y ,$$

so folgt $B[u_n] \rightarrow B[u]$ (da B beschränkt) und somit

$$A[u_n] \rightarrow v + \mu B[u] + \gamma \sigma B[\omega] .$$

Da A abgeschlossen ist, folgt hieraus $u \in D(A)$ und $A[u] = v + \mu B[u] + \gamma \sigma B[\omega]$. Da φ stetig ist auf X , gilt $\varphi(u) = 0$. Insgesamt folgt $\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] = v$.

Nach (2.2) ist \mathcal{L} injektiv und $\mathcal{L}^{-1} : W(\mathcal{L}) \rightarrow Y$ beschränkt. Da außerdem mit \mathcal{L} auch \mathcal{L}^{-1} abgeschlossen ist, muß $W(\mathcal{L}) (= D(\mathcal{L}^{-1}))$ abgeschlossen sein.

Es bleibt zu zeigen, daß $W(\mathcal{L}) = Y$ gilt. Dazu sei $r \in Y$ beliebig vorgegeben. Wegen (2.5) existiert eine Folge $(u_n) \in D(A)$ mit

$$(A \Leftrightarrow \mu B)[u_n] \rightarrow r \quad (2.6)$$

und eine weitere Folge (v_n) in $D(A)$ mit $(A \Leftrightarrow \mu B)[v_n] \rightarrow \gamma B[\omega]$. Es gilt $\varphi(v_n) \neq 0$ (sonst würde für $w_n := v_n \Leftrightarrow [\varphi(v_n)/\varphi(\omega)]\omega$ gelten $\begin{pmatrix} w_n \\ 1 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} w_n \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (A \Leftrightarrow \mu B)[v_n] \Leftrightarrow \gamma B[\omega] \Leftrightarrow [\varphi(v_n)/\varphi(\omega)](A \Leftrightarrow \mu B)[\omega] \rightarrow 0$ im Widerspruch zu (2.2)).

Gegebenenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge der Folge (v_n) , wobei die Folge der (u_n) unverändert bleibt, kann erreicht werden, daß

$$\begin{aligned} |\varphi(v_n)| &\geq \varepsilon > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \varphi(u_n) \|(A \Leftrightarrow \mu B)[v_n] \Leftrightarrow \gamma B[\omega]\|_Y &\rightarrow 0 . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Mit $\sigma_n := \Leftrightarrow \varphi(u_n) / \varphi(v_n)$ und $z_n := u_n + \sigma_n v_n$ gilt $\begin{pmatrix} z_n \\ \sigma_n \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L} \begin{pmatrix} z_n \\ \sigma_n \end{pmatrix} = (A \Leftrightarrow \mu B)[u_n] + \sigma_n ((A \Leftrightarrow \mu B)[v_n] \Leftrightarrow \gamma B[\omega])$. Wegen (2.6), (2.7) gilt also $\mathcal{L} \begin{pmatrix} z_n \\ \sigma_n \end{pmatrix} \rightarrow r$ und somit $r \in \overline{W(\mathcal{L})} = W(\mathcal{L})$. \square

Lemma 2.2 Neben den allgemeinen Voraussetzungen dieses Abschnitts sei $\varepsilon > 0$ mit $Kb\varepsilon < 1$ und $(\omega_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \in \widehat{D(A)}$ mit $\varphi(\omega_\varepsilon \Leftrightarrow \omega) = 0$ und $\left\| \begin{pmatrix} \gamma(\omega_\varepsilon - \omega) \\ \mu_\varepsilon - \mu \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq \varepsilon$. Dann gilt für alle $\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$:

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq \frac{K}{1 \Leftrightarrow Kb\varepsilon} \|A[u] \Leftrightarrow \mu_\varepsilon B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega_\varepsilon]\|_Y .$$

Beweis: Für $\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in \widehat{D(A)}$ mit $\varphi(u) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} &\|A[u] \Leftrightarrow \mu B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega]\|_Y \\ = &\|A[u] \Leftrightarrow \mu_\varepsilon B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega_\varepsilon] + (\mu_\varepsilon \Leftrightarrow \mu)B[u] + \gamma \sigma B[\omega_\varepsilon \Leftrightarrow \omega]\|_Y \\ \leq &\|A[u] \Leftrightarrow \mu_\varepsilon B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega_\varepsilon]\|_Y \\ &+ b (|\mu_\varepsilon \Leftrightarrow \mu| \|u\|_X + \|\gamma(\omega_\varepsilon \Leftrightarrow \omega)\|_X |\sigma|) \\ \leq &\|A[u] \Leftrightarrow \mu_\varepsilon B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega_\varepsilon]\|_Y + b\varepsilon \left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} , \end{aligned}$$

nach (2.2) also

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq K \|A[u] \Leftrightarrow \mu_\varepsilon B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega_\varepsilon]\|_Y + Kb\varepsilon \left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} ,$$

woraus wegen $Kb\varepsilon < 1$ die Behauptung folgt. \square

Beweis von Satz 2.1:

Der Beweis wird in mehreren Teilschritten geführt. Zunächst werden unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mu \notin \sigma_{\text{Rest}}$

a) die Existenz- und Einschließungsaussage,

- b) die Eindeutigkeitsaussage und
- c) die Aussage zur Einfachheit von λ

aus Satz 2.1 bewiesen. Im Anschluß daran wird der Beweis für den Fall geführt, daß $\mu \in \sigma_{\text{Rest}}$ gilt (μ aber kein innerer Punkt von σ_{Rest} ist).

Sei also zunächst $\mu \notin \sigma_{\text{Rest}}$.

Zu a) (Existenz- und Einschließungsaussage)

Ist μ bereits ein Eigenwert von Problem (2.1), so gilt nach Lemma 2.1 $\varphi(\hat{u}) \neq 0$ für das einzige linear unabhängige Eigenelement \hat{u} . Setze $U := (\varphi(\omega)/\varphi(\hat{u}))\hat{u}$. Es gilt $(\gamma \binom{U-\omega}{\mu-\mu}) \in D(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L} \left[\binom{\gamma(U-\omega)}{\mu-\mu} \right] = \Leftrightarrow \gamma(A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega])$, nach (2.2) also

$$\left\| \binom{\gamma(U \Leftrightarrow \omega)}{\mu \Leftrightarrow \mu} \right\|_{\hat{X}} \leq K|\gamma| \|A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega]\|_Y \leq K|\gamma|\delta \leq \alpha^* .$$

Nun sei μ selbst kein Eigenwert von Problem (2.1). Nach Lemma 2.1 ist $W(\mathcal{L}) = Y$ und $\mathcal{L}^{-1} : Y \rightarrow \hat{X}$ beschränkt. Zur Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes sei

$$T : \hat{X}_0 \rightarrow \hat{X}_0, \quad T \binom{u}{\sigma} := \mathcal{L}^{-1}[\sigma B[u] \Leftrightarrow \gamma(A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega])] ,$$

$$\mathcal{D} := \left\{ \binom{u}{\sigma} \in \hat{X}_0 : \left\| \binom{u}{\sigma} \right\|_{\hat{X}} \leq \alpha^* \right\} .$$

Wie unten bewiesen werden wird, gilt

$$T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D} , \tag{2.8}$$

$$\left\| T \binom{u_1}{\sigma_1} \Leftrightarrow T \binom{u_2}{\sigma_2} \right\|_{\hat{X}} \leq (1 \Leftrightarrow \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}) \left\| \binom{u_1}{\sigma_1} \Leftrightarrow \binom{u_2}{\sigma_2} \right\|_{\hat{X}}$$

$$\text{für alle } \binom{u_1}{\sigma_1}, \binom{u_2}{\sigma_2} \in \mathcal{D} , \tag{2.9}$$

so daß der Banachsche Fixpunktsatz die Existenz eines Fixpunktes $\binom{u}{\sigma} \in \mathcal{D}$ von T liefert. Für diesen gilt dann also $\binom{u}{\sigma} \in D(\mathcal{L})$ und

$$A[u] \Leftrightarrow \mu B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega] = \sigma B[u] \Leftrightarrow \gamma(A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega]) ,$$

d. h.

$$A[u] \Leftrightarrow (\mu + \sigma)B[u] = \Leftrightarrow_{\gamma} \left(A[\omega] \Leftrightarrow (\mu + \sigma)B[\omega] \right) .$$

Für

$$U := \omega + \frac{1}{\gamma}u, \quad \lambda := \mu + \sigma$$

gilt daher $A[U] = \lambda B[U]$ und wegen $\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ ferner $\left\| \begin{pmatrix} \gamma(U-\omega) \\ \lambda-\mu \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \leq \alpha^*$ und $\varphi(U \Leftrightarrow \omega) = 0$, d. h. insbesondere $\varphi(U) = \varphi(\omega) \neq 0$, also $U \neq \omega$.

Nachweis von (2.8):

Für $\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ gilt $T\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$ und

$$\mathcal{L} \left[T \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] = \sigma B[u] \Leftrightarrow_{\gamma} (A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega]) ,$$

also

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L} \left[T \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] \right\|_Y &\leq |\sigma| \|B[u]\|_Y + |\gamma| \|A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega]\|_Y \\ &\leq |\sigma| b \|u\|_X + |\gamma| \delta \\ &\leq \frac{b}{2} \left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}}^2 + |\gamma| \delta \\ &\leq \frac{b}{2} (\alpha^*)^2 + |\gamma| \delta = \frac{\alpha^*}{K} , \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit direkt aus der Definition von α^* und β folgt. Mit (2.2) ergibt sich $\|T\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix}\|_{\hat{X}} \leq \alpha^*$, also $T\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$.

Nachweis von (2.9):

Für $\begin{pmatrix} u_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ gilt

$$\begin{aligned} &\sigma_1 B[u_1] \Leftrightarrow \sigma_2 B[u_2] \\ &= (\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2) B\left[\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right] + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) B[u_1 \Leftrightarrow u_2] , \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned}
& \|\sigma_1 B[u_1] \Leftrightarrow \sigma_2 B[u_2]\|_Y \\
& \leq b \left(|\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2| \left\| \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \right\|_X + \|u_1 \Leftrightarrow u_2\|_X \left| \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right| \right) \\
& \leq b \sqrt{|\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2|^2 + \|u_1 \Leftrightarrow u_2\|_X^2} \\
& \qquad \qquad \qquad \sqrt{\left\| \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \right\|_X^2 + \left| \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right|^2} \quad (2.10) \\
& = \frac{b}{2} \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \\
& \leq b\alpha^* \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} .
\end{aligned}$$

Wegen $\sigma_1 B[u_1] \Leftrightarrow \sigma_2 B[u_2] = \mathcal{L} \left[T \begin{pmatrix} u_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow T \begin{pmatrix} u_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \right]$ folgt mit (2.2)

$$\left\| T \begin{pmatrix} u_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow T \begin{pmatrix} u_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \leq Kb\alpha^* \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_2 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} ,$$

wobei $Kb\alpha^* = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta} < 1$.

Zu b) (Eindeutigkeitsaussage)

Es sei $(\tilde{U}, \tilde{\lambda})$ ein weiteres Eigenpaar mit den in Satz 2.1 geforderten Eigenschaften. Für $\hat{u} := \gamma(\tilde{U} \Leftrightarrow \omega)$, $\hat{\sigma} := \tilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu$ gilt $\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$ und

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \right] &= \gamma \left((A \Leftrightarrow \mu B)[\tilde{U} \Leftrightarrow \omega \Leftrightarrow \hat{\sigma} B[\omega]] \right) \\
&= \gamma \left((\tilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu) B[\tilde{U}] \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \mu B)[\omega \Leftrightarrow \hat{\sigma} B[\omega]] \right) \quad (2.11) \\
&= \hat{\sigma} B[\hat{u}] \Leftrightarrow \gamma(A \Leftrightarrow \mu B)[\omega] ,
\end{aligned}$$

also nach (2.2):

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} &\leq K (|\hat{\sigma}| \|B[\hat{u}]\|_Y + |\gamma| \|(A \Leftrightarrow \mu B)[\omega]\|_Y) \\
&\leq Kb \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}}^2 + K|\gamma|\delta .
\end{aligned}$$

Folglich gilt $\left\| \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \notin (x_1, x_2)$, wobei x_1, x_2 die beiden Nullstellen des Polynoms $\frac{1}{2}Kbx^2 \Leftrightarrow x + K|\gamma|\delta$ bezeichnen. Man rechnet leicht

nach, daß $x_1 = \alpha^*$, $x_2 = \alpha^* + \frac{2}{Kb}\sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}$. Da $\left\| \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} < x_2$ vorausgesetzt wurde, folgt

$$\left\| \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \leq \alpha^* .$$

Mit dem bereits nachgewiesenen Eigenpaar (U, λ) sei $u := \gamma(U \Leftrightarrow \omega)$, $\sigma := \lambda \Leftrightarrow \mu$. Analog zu (2.11) gilt $\mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] = \sigma B[u] \Leftrightarrow \gamma(A \Leftrightarrow \mu B)[\omega]$ und außerdem $\left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \leq \alpha^*$. Subtraktion der ersten Gleichung von (2.11) liefert $\mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] = \hat{\sigma} B[\hat{u}] \Leftrightarrow \sigma B[u]$. Zusammen mit (2.2) und (2.10) folgt

$$\left\| \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \leq K \|\hat{\sigma} B[\hat{u}] \Leftrightarrow \sigma B[u]\| \leq Kb\alpha^* \left\| \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} ,$$

wegen $Kb\alpha^* < 1$ also $\hat{u} = u$, $\hat{\sigma} = \sigma$ und schließlich $\tilde{U} = U$, $\tilde{\lambda} = \lambda$.

Zu c) (Einfachheit von λ)

Lemma 2.2 liefert mit $\varepsilon := \alpha^*$ und $\omega_\varepsilon = U$, $\mu_\varepsilon = \lambda$ (beachte $Kb\alpha^* = \beta/(1 + \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}$):

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \leq \frac{K}{\sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}} \|A[u] \Leftrightarrow \lambda B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[U]\|_Y$$

für alle $\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$.

Wenn man K modifiziert, gilt (2.2) also auch mit (U, λ) anstatt (ω, μ) . Ersetzt man (ω, μ) durch (U, λ) (auch in \mathcal{L}), so gilt eine zu Lemma 2.1 analoge Aussage. Da λ Eigenwert ist und damit insbesondere $\lambda \notin \sigma_{\text{Rest}}$, liegt die entsprechende erste Alternative vor und es folgt die Einfachheit von λ sowie $B[U] \notin \overline{W(A \Leftrightarrow \lambda B)}$.

Jetzt wird die zusätzliche Annahme $\mu \notin \sigma_{\text{Rest}}$ fallengelassen.

Nach Voraussetzung ist μ aber dennoch kein innerer Punkt von σ_{Rest} und es existiert eine Folge (μ_n) in \mathbf{C} mit $\mu_n \notin \sigma_{\text{Rest}}$ und

$$\varepsilon_n := |\mu_n \Leftrightarrow \mu| \rightarrow 0 .$$

OBdA gelte $Kb\varepsilon_n < 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Lemma 2.2 liefert mit $\mu_\varepsilon := \mu_n$ und $\omega_\varepsilon := \omega$ für alle $\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq K_n \|A[u] \Leftrightarrow \mu_n B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega]\|_Y$$

mit $K_n := K/(1 \Leftrightarrow Kb\varepsilon_n)$. Außerdem gilt

$$\|A[\omega] \Leftrightarrow \mu_n B[\omega]\|_Y \leq \delta_n := \delta + \varepsilon_n \|B[\omega]\|_Y .$$

Setzt man $\beta_n := 2b|\gamma|K_n^2\delta_n$, so gilt $\beta_n \rightarrow \beta < 1$ wegen $K_n \rightarrow K$ und $\delta_n \rightarrow \delta$. OBdA sei die ganze Folge (β_n) von 1 wegbeschränkt.

Mit $\alpha_n := \frac{2|\gamma|K_n\delta_n}{1+\sqrt{1-\beta_n}}$ ergibt sich wegen $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ und $\mu_n \rightarrow \mu$ die Existenz von $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha_N \Leftrightarrow \alpha_n + |\mu_N \Leftrightarrow \mu_n| < \frac{2}{K_nb} \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta_n} \quad (n \in N, n \geq N) . \quad (2.12)$$

Sämtliche Voraussetzungen von Satz 2.1 sind nun mit den n -abhängigen Größen $\mu_n, K_n, \delta_n, \beta_n, \alpha_n$ erfüllt und zusätzlich gilt $\mu_n \notin \sigma_{\text{Rest}}$. Aus dem bereits Bewiesenen folgt die Existenz einer Folge von Eigenpaaren (U_n, λ_n) mit $\varphi(U_n \Leftrightarrow \omega) = 0$ und

$$\left\| \begin{pmatrix} \gamma(U_n \Leftrightarrow \omega) \\ \lambda_n \Leftrightarrow \mu_n \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq \alpha_n , \quad (2.13)$$

und falls $(\tilde{U}, \tilde{\lambda})$ ein weiteres Eigenpaar ist mit $\varphi(\tilde{U} \Leftrightarrow \omega) = 0$ und

$$\left\| \begin{pmatrix} \gamma(\tilde{U} \Leftrightarrow \omega) \\ \tilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu_n \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} < \alpha_n + \frac{2}{K_nb} \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta_n} , \quad (2.14)$$

so gilt $\tilde{U} = U_n, \tilde{\lambda} = \lambda_n$. Desweiteren sind alle λ_n einfach und es gilt $B[U_n] \notin \overline{W(A \Leftrightarrow \lambda_n B)}$. Wendet man (2.13) mit $n := N$ an, so folgt aus (2.12) für $m \geq N$

$$\left\| \begin{pmatrix} \gamma(U_N \Leftrightarrow \omega) \\ \lambda_N \Leftrightarrow \mu_m \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq \alpha_N + |\mu_N \Leftrightarrow \mu_m| < \alpha_m + \frac{2}{K_nb} \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta_m} .$$

Für $n \geq N$ ist (2.14) mit $\tilde{U} := U_N, \tilde{\lambda} := \lambda_N$ erfüllt und es folgt $U_n = U_N =: U, \lambda_n = \lambda_N =: \lambda$. Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in (2.13) liefert für (U, λ) die behauptete Abschätzung.

Ist $(\tilde{U}, \tilde{\lambda})$ ein weiteres Eigenpaar mit den in Satz 2.1 geforderten Eigenschaften, so gilt für hinreichend großes $n \geq N$ auch (2.14) und es folgt $\tilde{U} = U_n = U$, $\tilde{\lambda} = \lambda_n = \lambda$, d. h. die behauptete Eindeutigkeitsaussage.

Die Behauptungen über die Vielfachheit von λ folgen direkt aus den entsprechenden n -abhängigen Aussagen und der Konstanz der Folge (U_n, λ_n) für $n \geq N$. □

2.2 Lokale Eindeutigkeit von Eigenwerten

Sei $(\tilde{U}, \tilde{\lambda})$ ein weiteres Eigenpaar des gegebenen Problems (2.1) mit $\varphi(\tilde{U} \Leftrightarrow \omega) = 0$ und $\tilde{\lambda}$ in der Nähe eines nach Satz 2.1 bereits nachgewiesenen Eigenwertes λ mit zugehörigem Eigenelement U . ω, μ seien wie in Satz 2.1 gewählt; ω sei normiert durch $\varphi(\omega) \in \mathbb{R}_+$, $\|\omega\|_X = 1$. Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis einer lokalen Eindeutigkeitsaussage, die (unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen) $\tilde{\lambda} = \lambda$ nachweist. Eine derartige Aussage folgt nicht direkt aus dem Eindeutigkeitsteil von Satz 2.1.

Man betrachtet das Problem (siehe auch (3.29) und die Bemerkung im folgenden Abschnitt 2.3)

$$\langle L_{\tilde{\lambda}}[u], L_{\tilde{\lambda}}[v] \rangle_Y + c_4 \langle u, v \rangle_X = \kappa \langle u, v \rangle_X \quad \text{für alle } v \in D(L_{\tilde{\lambda}}) \quad (2.15)$$

mit $D(L_{\tilde{\lambda}}) = D(A)$, $L_{\tilde{\lambda}}[u] := (A \Leftrightarrow \tilde{\lambda}B)[u]$ und $c_4 > 0$.

Das Spektrum von (2.15) ist durch c_4 nach unten beschränkt und \tilde{U} ist Eigenfunktion zum Eigenwert c_4 . Ist c_4 ein einfacher Eigenwert und setzt man

$$\Lambda_1 := \|L_{\tilde{\lambda}}[\omega]\|_Y^2 + c_4 \|\omega\|_X^2, \quad (2.16)$$

so gilt nach einem Satz von Mertins [23, S. 232]

$$\left| \omega \Leftrightarrow \langle \omega, \hat{U} \rangle_X \hat{U} \right|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1} (\Lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1), \quad (2.17)$$

wobei $c_4 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte von (2.15) bezeichnen und $\left| u \right| := (\|L_{\tilde{\lambda}}[u]\|_Y^2 + c_4 \|u\|_X^2)^{\frac{1}{2}}$ für $u \in D(L_{\tilde{\lambda}})$. Hierbei wird vorausgesetzt, daß mindestens zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 von (2.15) mit $\lambda_1 < \lambda_2 < \inf \sigma_e$ existieren (diese Voraussetzung ebenso wie die Einfachheit von $\lambda_1 = c_4$

wird im Laufe der später geschilderten Homotopien automatisch überprüft). \widehat{U} sei eine durch $\|\widehat{U}\|_X = 1$, $\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \geq 0$ normierte Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 ; also ein Vielfaches von \widetilde{U} , somit $\widetilde{U} = \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \widehat{U}$ (sofern $\varphi(\widehat{U}) \neq 0$).

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist, für $\widetilde{\lambda}$ nahe bei μ eine obere Schranke für $\|\omega \Leftrightarrow \widetilde{U}\|_X = \|\omega \Leftrightarrow \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \widehat{U}\|_X$ anzugeben, um mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 2.1 zu zeigen, daß $\widetilde{\lambda} = \lambda$ gilt.

Satz 2.2 *Ist $\varepsilon > 0$ mit*

$$\|\omega \Leftrightarrow \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \widehat{U}\|_X \leq \varepsilon < \frac{\varphi(\omega)}{\|\varphi\|_{X, \mathfrak{A}}}, \quad (2.18)$$

so ist $\varphi(\widehat{U}) \neq 0$ und

$$\|\omega \Leftrightarrow \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \widehat{U}\|_X \leq \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\varphi(\omega)}{\|\varphi\|_{X, \mathfrak{A}}} \Leftrightarrow \varepsilon\right)^2}} \varepsilon.$$

Beweis: Aus (2.18) folgt zunächst $\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \neq 0$, also $\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X > 0$ aufgrund der gewählten Normierung. Weiter gilt

$$\left| \frac{\varphi(\widehat{U})}{\varphi(\omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X} \right| = \frac{|\varphi(\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \widehat{U} \Leftrightarrow \omega)|}{\varphi(\omega) \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X} \leq \frac{\varepsilon \|\varphi\|_{X, \mathfrak{A}}}{\varphi(\omega) \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}. \quad (2.19)$$

Wegen (2.18) ist die rechte Seite von (2.19) kleiner als $\frac{1}{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}$; daher muß $\varphi(\widehat{U}) \neq 0$ gelten.

Für $0 < r < a$, $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z \Leftrightarrow a| \leq r \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 \Leftrightarrow r^2} \right| \leq \frac{r}{a^2 \Leftrightarrow r^2}.$$

Mit $\delta_1 := \frac{\|\varphi\|_{X, \mathfrak{A}}}{\varphi(\omega)} \varepsilon < 1$ folgt aus (2.19):

$$\left| \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}}{\frac{1}{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X^2} \Leftrightarrow \frac{\delta_1^2}{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X^2}} \right| \leq \frac{\frac{\delta_1}{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}}{\frac{1}{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X^2} \Leftrightarrow \frac{\delta_1^2}{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X^2}},$$

also

$$\left| \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \Leftrightarrow \frac{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}{1 \Leftrightarrow \delta_1^2} \right| \leq \frac{\delta_1 \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}{1 \Leftrightarrow \delta_1^2}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \Leftrightarrow \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \right| \\ &= \left| \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \Leftrightarrow \frac{\langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}{1 \Leftrightarrow \delta_1^2} + \frac{\delta_1^2}{1 \Leftrightarrow \delta_1^2} \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \right| \\ &\leq \frac{\delta_1 \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}{1 \Leftrightarrow \delta_1^2} + \frac{\delta_1^2 \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X}{1 \Leftrightarrow \delta_1^2} \\ &= \frac{\delta_1}{1 \Leftrightarrow \delta_1} \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \leq \frac{\delta_1}{1 \Leftrightarrow \delta_1} = \frac{\varepsilon}{\frac{\varphi(\omega)}{\|\varphi\|_{X,\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \varepsilon}}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left\| \omega \Leftrightarrow \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \widehat{U} \right\|_X^2 \\ &= \left\| \omega \Leftrightarrow \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \widehat{U} \Leftrightarrow \left(\frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \Leftrightarrow \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \right) \widehat{U} \right\|_X^2 \\ &= \left\| \omega \Leftrightarrow \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \widehat{U} \right\|_X^2 + \left| \frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \Leftrightarrow \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \right|^2 \\ &\quad \Leftrightarrow 2 \operatorname{real} \left(\left(\frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\widehat{U})} \Leftrightarrow \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \right) \underbrace{\langle \omega \Leftrightarrow \langle \omega, \widehat{U} \rangle_X \widehat{U}, \widehat{U} \rangle_X}_{=0} \right) \\ &\leq \varepsilon^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\frac{\varphi(\omega)}{\|\varphi\|_{X,\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \varepsilon}} \right)^2. \end{aligned} \quad \square$$

Satz 2.3 *Gilt*

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1)}} (|\tilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu| \|B[\omega]\|_Y + \delta) < \frac{\varphi(\omega)}{\|\varphi\|_{X,\mathfrak{d}}}$$

und

$$\left(|\gamma|^2 \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{\varphi(\omega)}{\|\varphi\|_{X,\mathfrak{d}}} \Leftrightarrow \varepsilon \right)^2} \right) \varepsilon^2 + |\tilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \alpha^* + \frac{2}{Kb} \sqrt{1 \Leftrightarrow \beta}$$

(mit $\delta, \alpha^*, K, b, \beta$ aus Satz 2.1), so folgt $\tilde{\lambda} = \lambda$.

Beweis. Mit $\|u\|_X \leq \frac{1}{\sqrt{c_4}} \|u\|$, $c_4 = \lambda_1$ und (2.17) folgt

$$\begin{aligned} \left\| \omega \Leftrightarrow \langle \omega, \hat{U} \rangle_X \hat{U} \right\|_X &\leq \frac{1}{\sqrt{c_4}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1}} (\Lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1)}} \|A[\omega] \Leftrightarrow \tilde{\lambda} B[\omega]\|_Y \\ &\leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1)}} (|\tilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu| \|B[\omega]\|_Y + \|A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega]\|_Y) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon < \frac{\varphi(\omega)}{\|\varphi\|_{X,\mathfrak{d}}}$, so folgt mit Satz 2.2 und der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 2.1 die Behauptung. \square

2.3 Eigenwertausschließungen

Zum Nachweis der Instabilität des Blasiusprofils muß die Existenz eines Eigenwertes in der linken Halbebene nachgewiesen werden. Für den Nachweis der Stabilität (für Reynoldszahlen unterhalb der kritischen Reynoldszahl) muß hingegen gezeigt werden, daß es keinen Eigenwert mit negativem Realteil gibt. In diesem Abschnitt wird ein Satz vorgestellt, der (zunächst lokale) Eigenwertausschließungen liefert. Hieraus läßt sich leicht ein Verfahren konstruieren, das für beliebige beschränkte Teilmengen von \mathbb{C} Eigenwertausschließungen liefern kann. Zusammen mit der im folgenden Abschnitt angegebenen Einschließung des Gesamtspektrums der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil ist so der Weg für einen Stabilitätsbeweis bereitet.

Satz 2.4 Ist B injektiv, $\mu \in \mathbb{C}$ und $\kappa > 0$ eine (positive!) untere Schranke für den kleinsten Eigenwert (bzw. das Gesamtspektrum) von

Suche $u \in D(A) \setminus \{0\}$ und $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$

mit $\langle (A \Leftrightarrow \mu B)[u], (A \Leftrightarrow \mu B)[v] \rangle_Y = \hat{\lambda} \langle B[u], B[v] \rangle_Y$ für alle $v \in D(A)$,

so besitzt das Problem (2.1) keinen Eigenwert λ mit $|\lambda \Leftrightarrow \mu| < \sqrt{\kappa}$.

Beweis: Ist $\tilde{\lambda}$ ein Eigenwert von (2.1) mit zugehörigem Eigenelement u , so folgt aus $A[u] = \tilde{\lambda}B[u]$ sofort, daß

$$\langle (A \Leftrightarrow \tilde{\lambda}B)[u], (A \Leftrightarrow \tilde{\lambda}B)[v] \rangle_Y = \lambda \langle B[u], B[v] \rangle_Y \text{ für alle } v \in D(A)$$

als kleinsten Eigenwert $\lambda_1 = 0$ besitzt. Aus der Variationscharakterisierung dieses Eigenwertes folgt weiter

$$\begin{aligned} 0 = \sqrt{\lambda_1} &= \inf_{\substack{v \in D(A) \\ v \neq 0}} \frac{\|(A \Leftrightarrow \tilde{\lambda}B)[v]\|_Y}{\|B[v]\|_Y} \\ &\geq \inf_{\substack{v \in D(A) \\ v \neq 0}} \frac{\|(A \Leftrightarrow \mu B)[v]\|_Y \Leftrightarrow \|(\mu \Leftrightarrow \tilde{\lambda})B[v]\|_Y}{\|B[v]\|_Y} \\ &= \Leftrightarrow |\mu \Leftrightarrow \tilde{\lambda}| + \inf_{\substack{v \in D(A) \\ v \neq 0}} \frac{\|(A \Leftrightarrow \mu B)[v]\|_Y}{\|B[v]\|_Y} \\ &\geq \sqrt{\kappa} \Leftrightarrow |\tilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu|. \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

- a) Ein ähnlicher Satz kann unter der Voraussetzung der Beschränktheit (statt Injektivität) von B bewiesen werden.
- b) Die Bestimmung der geforderten Konstanten κ (und der im vorhergehenden Abschnitt benötigten Eigenwertschranken für die ersten beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 von (2.15)) kann entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 3.3.3 (siehe (3.28) bzw. (3.29)) erfolgen. Der hier erweiterte Definitionsbereich ($D(A)$ statt $D(A) \cap X_0$) muß dabei durch einen weiteren Homotopieschritt (siehe Kapitel 3) berücksichtigt werden. Dies bereitet keine Schwierigkeiten, denn die Eigenwerte der beiden Probleme mit den verschiedenen Definitionsbereichen liegen "abwechselnd verzahnt".

- c) Wie auch bei anderen Problemstellungen ist der Aufwand für die *Ausschließung* von Lösungen – und damit für den Stabilitätsbeweis – wesentlich größer, als für eine (lokale) *Einschließung* von Lösungen, d. h. für den Instabilitätsbeweis. Für die in diesem Abschnitt geschilderte Methode zur Eigenwertausschließung durch die Überdeckung eines vorgegebenen kompakten Teils der komplexen Ebene mit Kreisscheiben gemäß Satz 2.4 bedeutet dies, daß für jede einzelne¹ Kreisscheibe (fast) derselbe Rechenaufwand notwendig ist, wie für eine Lösungseinschließung nach Satz 2.1.

Leider erwiesen sich die für eine verifizierte Behandlung erforderlichen Rechenzeiten als so groß, daß bislang keine verifizierten Ergebnisse vorliegen. Numerische Experimente (mit Eigenwertnäherungen anstatt unteren Schranken) liefern jedoch vielversprechende Ergebnisse. Man kann davon ausgehen, daß der Beweis der Stabilität des Blasiusprofils für gewisse Parameter α, R auf die in diesem Abschnitt dargestellte Art möglich ist, sobald entsprechende Rechenleistung zur Verfügung steht.

2.4 Einordnung der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil

Zur Einordnung der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil (siehe Kapitel 1) in den allgemeinen Rahmen aus Abschnitt 2.1 setzen wir (s. auch [21])

$$\begin{aligned} Y &:= L_2(0, \infty), \\ X &:= H_2(0, \infty) \cap H_1^0(0, \infty), \quad \langle u, v \rangle_X := \langle B[u], B[v] \rangle_Y, \\ B &: X \rightarrow Y, \quad B[u] := (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u, \\ D(A) &:= H_4(0, \infty) \cap H_2^0(0, \infty), \\ A[u] &:= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 u + i\alpha R [V(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + V''u]. \end{aligned}$$

Außerdem wählen wir $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(u) := \int_{x_0}^{\infty} u(z) e^{-\alpha z} dz$ mit einem festen $x_0 > 0$. Die Gründe für diese Wahl von φ werden in Abschnitt

¹Je nach Werten der Parameter α, R werden für einen vollständigen Stabilitätsbeweis einige hundert Kreisscheiben benötigt.

3.3.4 deutlich. Wegen $\|u\|_X = \|B[u]\|_Y$ kann $b = 1$ gewählt werden (siehe die Voraussetzungen von Satz 2.1).

Offensichtlich sind A, B linear, B beschränkt, und nach [21] ist A abgeschlossen. Die konkrete Wahl der weiteren zu Beginn des Abschnitts 2.1 eingeführten Größen wird in den folgenden Kapiteln beschrieben. Hier sei nur erwähnt, daß die Bedingung “ μ kein innerer Punkt von σ_{Rest} ” keinerlei Einschränkung für die Wahl von μ bedeutet, da σ_{Rest} Teilmenge des in [21] bestimmten wesentlichen Spektrums σ_e der Orr-Sommerfeld-Gleichung ist, also in einer Halbgeraden enthalten ist und somit leeres Inneres hat:

$$\sigma_{\text{Rest}} \subset \sigma_e = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \nu + \alpha^2 + i\alpha R, \nu \in [0, \infty)\} .$$

In [21] ist ebenfalls gezeigt, daß sämtliche Eigenwerte der Orr-Sommerfeld-Gleichung (im Fall $V'' \leq 0$, was für das Blasiusprofil erfüllt ist) in der Menge

$$M := [\alpha^2, \infty) + i\alpha R [V_{\min}, V_{\max}] + \frac{R}{2}|V'|_{\max} \cdot \Delta^-$$

enthalten sind. Dabei seien $V_{\min}, V_{\max}, |V'|_{\max}$ so gewählt, daß

$$V_{\min} \leq V(z) \leq V_{\max}, \quad |V'(z)| \leq |V'|_{\max} \quad \text{für alle } z \in [0, \infty) ,$$

und $\Delta^- := \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1, \text{ imag}(w) \leq 0\}$. Abbildung 2.1 illustriert die Lage von wesentlichem Spektrum und Eigenwerten.

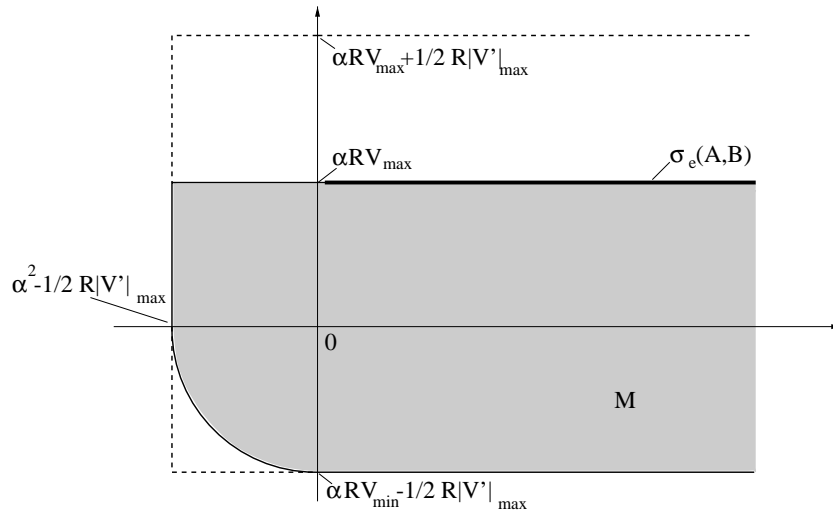


Abbildung 2.1: Spektrum der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil

Kapitel 3

Anwendung des zentralen Einschließungssatzes auf die Orr-Sommerfeld-Gleichung

In diesem Kapitel wird näher auf die Wahl bzw. die konkrete Bestimmung der im zentralen Satz 2.1 benötigten Größen eingegangen. Es werden Verfahren zur Bestimmung von Näherungseigenpaaren und zur Einschließung des Blasiusprofils (auf dem Intervall $[0, \infty)$!) vorgestellt. Als besonders aufwendig erweist sich die verifizierte Bestimmung der Konstanten K im dritten Abschnitt dieses Kapitels. Für die Durchführung der hierzu verwendeten Homotopiemethode wird im letzten Abschnitt ein neuer Algorithmus vorgeschlagen, der die erforderlichen Rechenzeiten erheblich verkürzt.

3.1 Approximation von Eigenpaaren

Zur Bestimmung eines Näherungseigenpaares wird in [12] eine exponentielle Transformation des Intervalls $[0, \infty)$ auf ein kompaktes Intervall und eine anschließende Galerkin-Approximation vorgeschlagen (siehe auch [14], [30]). Die Ansatzfunktionen werden dabei so gewählt, daß sie dasselbe asymptotische Verhalten haben, wie die Eigenfunktionen zu Eigenwerten mit negativem Realteil (nur diese sind für die Untersuchung der Instabilität von Interesse), nämlich $e^{-\alpha z}$ [12].

Für das weitere Vorgehen (s. Abschnitt 3.3.4) wird das Intervall $[0, \infty)$ in zwei Teilintervalle ($[0, x_0]$ und $[x_0, \infty)$ mit einem $x_0 \in (0, \infty)$) zerlegt. Aus Gründen der Programmstruktur (s. Abschnitt 4.1) werden schon hier

abschnittsweise definierte Ansatzfunktionen verwendet:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} z^2 P_i(z) & (z \in [0, x_0]) \\ e^{-\alpha z} Q_i(e^{-\alpha z}) & (z \in (x_0, \infty)) \end{cases}.$$

Dabei werden die Polynome P_i und Q_i so gewählt, daß die Ansatzfunktionen φ_i in $D(A) = H_4(0, \infty) \cap H_2^0(0, \infty)$ liegen.

Das Galerkin-Verfahren liefert nun Eigenwertnäherungen und zugehörige Näherungseigenfunktionen als Linearkombination der Ansatzfunktionen:

Der Ansatz

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(z)$$

führt mit den Bestimmungsgleichungen

$$\langle A[\omega], \varphi_i \rangle_Y = \lambda \langle B[\omega], \varphi_i \rangle_Y \quad (i = 1, \dots, N)$$

auf ein komplexes, nichthermitesches Matrixeigenwertproblem, das mit Standardmethoden der Numerischen Mathematik behandelt werden kann. Ist (x, λ) ein Näherungseigenpaar mit $x = (x_1, \dots, x_N)$ als (Näherungs-) Eigenvektor des Matrixproblems, so kann (ω, λ) mit $\omega = \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i$ als Näherung für ein Eigenpaar des gegebenen Problems (2.1) aufgefaßt werden.

3.2 Einschließung des Blasiusprofils

Ein Satz von Plum erlaubt, eine Einschließung des Blasiusprofils V , d. h. der Ableitung $V = W'$ der Lösung der Blasiusgleichung

$$\begin{aligned} W'''(x) + W(x)W''(x) &= 0 \quad (0 \leq x < \infty), \\ W(0) = W'(0) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} W'(x) &= 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

auf dem ganzen Intervall $[0, \infty)$ anzugeben, falls eine Einschließung der Lösung U des folgenden Anfangswertproblems auf einem Intervall¹ $[0, b]$

¹Die in diesem Abschnitt verwendete Konstante b ist nicht identisch mit derjenigen aus Satz 2.1.

mit hinreichend großem b bekannt ist

$$\begin{aligned} U'''(x) + U(x)U''(x) &= 0 \quad (0 \leq x < \infty), \\ U(0) = U'(0) &= 0, \\ U''(0) &= 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Satz 3.1 (Plum [4, S. 126])

a) Die Lösung U von (3.2) existiert auf $[0, \infty)$; $\sigma := \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x)$ existiert und ist positiv; U, U', U'' sind positiv auf $(0, \infty)$.

b) Die Randwertaufgabe (3.1) wird eindeutig gelöst durch

$$W(x) := \sqrt{\frac{1}{\sigma}} U\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x\right) \quad (0 \leq x < \infty). \tag{3.3}$$

c) Setzt man

$$\psi(s) := 2 \int_s^\infty e^{-(t^2-s^2)} dt = e^{s^2} \left(\sqrt{\pi} \Leftrightarrow 2 \int_0^s e^{-t^2} dt \right),$$

$$\bar{\sigma}(x) := U'(x) + \frac{U''(x)}{\sqrt{2U'(x)}} \psi\left(\frac{U(x)}{\sqrt{2U'(x)}}\right),$$

$$\underline{\sigma}(x) := U'(x) + \frac{U''(x)}{\sqrt{2\bar{\sigma}(x)}} \psi\left(\frac{U(x)}{\sqrt{2\bar{\sigma}(x)}}\right)$$

mit $0 < s, x < \infty$, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\sigma}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underline{\sigma}(x) = \sigma$ und für alle $x \in (0, \infty)$:

$$\underline{\sigma}(x) \leq \sigma \leq \bar{\sigma}(x). \tag{3.4}$$

Ferner gilt für $b \leq x < \infty$

$$\begin{aligned} \max\{U'(b)(x \Leftrightarrow b) + U(b), \sigma(x \Leftrightarrow b) + U(b) \Leftrightarrow \varepsilon(b)\} \\ \leq U(x) \leq \sigma(x \Leftrightarrow b) + U(b), \\ U'(b) \leq U'(x) \leq \sigma, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$0 \leq U''(x) \leq U''(b) \exp\left(\Leftrightarrow \frac{U'(b)}{2}(x \Leftrightarrow b)^2 \Leftrightarrow U(b)(x \Leftrightarrow b)\right)$$

mit

$$\varepsilon(b) := \frac{U''(b)}{U'(b)} \left(1 \Leftrightarrow \frac{U(b)}{\sqrt{2U'(b)}} \psi\left(\frac{U(b)}{\sqrt{2U'(b)}}\right) \right).$$

Einschließungen für U, U', U'' auf $[0, b]$ können mit dem Verfahren von Brunk [4], Lohner's AWA [22] oder Monotoniemethoden (siehe unten) bestimmt werden. Ist b groß genug, so liegen $\underline{\sigma}(b)$ und $\overline{\sigma}(b)$ nahe beieinander und man erhält mit (3.4) zunächst eine Einschließung für σ . (3.3) und (3.5) liefern dann Schranken für W, W', W'' auf $[\tilde{b}, \infty)$ mit $\tilde{b} := \sqrt{\sigma b}$. Für $W(x) = \sqrt{\frac{1}{\sigma}} U(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x)$ folgt aus der ersten Gleichung in (3.5)

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{1}{\sigma}U'(b)(x \Leftrightarrow \sqrt{\sigma b}) + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}U(b), (x \Leftrightarrow \sqrt{\sigma b}) + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}U(b) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\sigma}}\varepsilon(b)\right\} \\ \leq W(x) \leq (x \Leftrightarrow \sqrt{\sigma b}) + \sqrt{\frac{1}{\sigma}}U(b), \end{aligned} \quad (3.6)$$

analog folgt für $W'(x) = \frac{1}{\sigma} U'(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x)$

$$\frac{1}{\sigma} U'(b) \leq W'(x) \leq 1 \quad (3.7)$$

und für $W''(x) = (\sqrt{\frac{1}{\sigma}})^3 U''(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x)$

$$\begin{aligned} 0 \leq W''(x) \leq \\ \left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\right)^3 U''(b) \exp\left(\Leftrightarrow \frac{U'(b)}{2\sigma}(x \Leftrightarrow \sqrt{\sigma b})^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\sigma}}U(b)(x \Leftrightarrow \sqrt{\sigma b})\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

(jeweils für $x \in [\tilde{b}, \infty)$).

Setzt man

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{\sigma} U'(b), \\ B &:= \sqrt{\frac{1}{\sigma}} (\Leftrightarrow U'(b)b + U(b)), \\ C &:= \Leftrightarrow \sqrt{\sigma b} + \sqrt{\frac{1}{\sigma}} (U(b) \Leftrightarrow \varepsilon(b)), \\ D &:= \Leftrightarrow \sqrt{\sigma b} + \sqrt{\frac{1}{\sigma}} U(b), \\ E &:= \sqrt{\frac{U'(b)}{2\sigma}}, \\ F &:= \sqrt{\frac{1}{2U'(b)}} (U(b) \Leftrightarrow bU'(b)), \end{aligned}$$

$$G := \left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} \right)^3 U''(b) \exp \left(\frac{U^2(b)}{2U'(b)} \right),$$

so folgt

$$\begin{aligned} \max\{Ax + B, x + C\} \leq W(x) \leq x + D, \\ A \leq W'(x) \leq 1, \\ 0 \leq W''(x) \leq G \exp(\Leftrightarrow(Ex + F)^2) \leq G \exp(\Leftrightarrow(E\tilde{b} + F)^2) \end{aligned}$$

für $x \geq \tilde{b}$.

Außerdem folgt für $W'''(x) = \Leftrightarrow W(x)W''(x)$

$$\Leftrightarrow(x + D)G \exp(\Leftrightarrow(Ex + F)^2) \leq W'''(x) \leq 0.$$

Die Funktion auf der linken Seite ist (mit den Werten für A, \dots, G , die sich in den konkreten Rechnungen ergeben haben) monoton wachsend, d. h. es gilt

$$\Leftrightarrow(\tilde{b} + D)G \exp(\Leftrightarrow(E\tilde{b} + F)^2) \leq W'''(x) \leq 0$$

für $x \geq \tilde{b}$.

Damit sind hinreichende Informationen über W und seine Ableitungen auf dem Intervall $[\tilde{b}, \infty)$ bereitgestellt. Der Rest dieses Abschnitts behandelt die Einschließung von U bzw. W mitsamt Ableitungen im Intervall $[0, b]$ bzw. $[0, \tilde{b}]$.

Da das Blasiusprofil in dieser Arbeit als Eingangsgröße, nämlich als einer der Koeffizienten in dem Operator A , verwendet wird, ist neben der hohen Genauigkeit der Einschließung von $V = W'$ (und seinen Ableitungen) die Einfachheit der Darstellung im Hinblick auf eine programmtechnische Realisierung von besonderer Bedeutung. Lohner's AWA liefert stückweise polynomiale Einschließungen, jedoch aus zu vielen Teilstücken bestehend. Hier empfiehlt sich die Anwendung der klassischen Monotoniemethoden, wie z.B. in [32, I.4.VIII] beschrieben. Als Beispiel wird dort wie in (3.2) die Blasiusgleichung als Anfangswertaufgabe behandelt:

(3.2) ist äquivalent zu der Integralgleichung

$$u(t) = K(u)(t) := \exp \left(\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^t (t \Leftrightarrow \tau)^2 u(\tau) d\tau \right) \quad (3.9)$$

für $u = U''$ mit dem monoton fallenden Integraloperator K . Startet man die Iteration $v_{k+1} = K(v_k)$ mit $v_0 = 0$, so läßt sich leicht nachrechnen, daß

$$v_0 \leq v_1 = 1, \quad v_0 \leq v_2 = e^{-\frac{1}{6}},$$

wobei die Ungleichungen punktweise auf ganz \mathbb{R}_+ zu verstehen sind. Es folgt (mit $v_0 \leq u \leq v_1$):

$$v_0 \leq v_2 \leq v_4 \leq \dots \leq u \leq \dots \leq v_5 \leq v_3 \leq v_1;$$

außerdem konvergieren die v_i gegen die Lösung u von (3.9) [32].

Bei der praktischen Durchführung der Iteration stößt man jedoch bald auf Probleme, da sich bereits v_3 nicht mehr in geschlossener Form darstellen läßt. Führt man die Iteration im i -ten Schritt, d. h. bei der Bestimmung von v_{i+1} , mit \tilde{v}_i statt v_i fort, wobei $\tilde{v}_i \leq v_i$ falls i gerade und $\tilde{v}_i \geq v_i$ falls i ungerade, so bleibt die Ungleichung $v_{i+1} := K(\tilde{v}_i) \geq u$ bzw. $v_{i+1} := K(\tilde{v}_i) \leq u$ bestehen. Man darf die v_i also durch "einfachere" Funktionen nach unten bzw. oben (je nachdem, ob i gerade bzw. ungerade) abschätzen und die Iteration fortführen². Betrachtet man (3.2) bzw. (3.9) auf einem kompakten Intervall $[0, b]$ statt $[0, \infty)$ und wählt \tilde{v}_i als Polynom, so läßt sich $v_{i+1} := K(\tilde{v}_i)$ in geschlossener Form angeben; es ist $v_{i+1} = \exp(P)$ mit einem Polynom P . Ein derartiges Vorgehen wurde in einem Mathematica-Notebook realisiert. Nach 11 Iterationen bzw. Abschätzungen können Polynome $\underline{U}_2, \overline{U}_2$ vom Höchstgrad 35 angegeben werden mit $\underline{U}_2 \leq U'' \leq \overline{U}_2$ und $\|\underline{U}_2 \Leftrightarrow \overline{U}_2\|_{\infty, [0, b]} < 7 \cdot 10^{-10}$ für $b = 6$. Durch zweimalige Integration und Ausnutzen der Differentialgleichung können hieraus Einschließungen für U, U' und U''' gewonnen werden. In dem bereits angesprochenen Mathematica-Notebook werden Näherungen $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ für U, U', U'', U''' bestimmt mit

$$\begin{aligned} \|U \Leftrightarrow \tilde{U}_0\|_{\infty, [0, b]} &\leq 1 \cdot 10^{-8}, \\ \|U' \Leftrightarrow \tilde{U}_1\|_{\infty, [0, b]} &\leq 4 \cdot 10^{-9}, \\ \|U'' \Leftrightarrow \tilde{U}_2\|_{\infty, [0, b]} &\leq 7 \cdot 10^{-10}, \\ \|U''' \Leftrightarrow \tilde{U}_3\|_{\infty, [0, b]} &\leq 1 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

²In [1] ist angegeben, wie für diese modifizierte Iteration Monotonieaussagen erhalten werden können. Dazu sind zusätzliche Ungleichungen zu überprüfen und es ist abzuwägen, ob sich der zusätzliche Rechenaufwand rentiert.

Am Ende dieses Abschnitts werden mit Hilfe der soeben bestimmten Größen Einschließungen für W und seine Ableitungen ermittelt. Zuvor wird noch beschrieben, wie Ungleichungen der Form $\exp(P) \leq Q$ auf $[0, b]$ mit Polynomen P, Q nachgewiesen werden können. Dieser Nachweis ist wesentlicher Bestandteil der oben beschriebenen modifizierten Iteration. Offensichtlich ist die Bestimmung einer oberen Schranke für $\|\exp(P) \Leftrightarrow Q\|_{\infty, [0, b]}$ ausreichend. Ein Satz von Ehlich-Zeller besagt

Satz 3.2 [11] *Es sei P ein Polynom von Höchstgrad n und $m \in \mathbb{N}, m > n$. x_1, \dots, x_m seien die Nullstellen des m -ten Tschebyscheff-Polynoms, $x_\mu = \cos\left(\frac{2\mu-1}{2m}\pi\right)$ ($\mu = 1, \dots, m$). Dann gilt*

$$\|P\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \left(\cos \frac{\pi n}{2m}\right)^{-1} \max_{\mu=1, \dots, m} |P(x_\mu)|.$$

Ist $\exp(x) = S(x) + R(x)$ die Taylorentwicklung vom Grad s mit Restglied R der Exponentialfunktion, so folgt $\exp(P) \Leftrightarrow Q = S \circ P \Leftrightarrow Q + R \circ P$ und weiter

$$\begin{aligned} \|\exp(P) \Leftrightarrow Q\|_{\infty, [0, b]} &\leq \|S \circ P \Leftrightarrow Q\|_{\infty, [0, b]} + \|R \circ P\|_{\infty, [0, b]} \\ &\leq C \max_{\mu} |S \circ P(\tilde{x}_\mu) \Leftrightarrow Q(\tilde{x}_\mu)| + \|R \circ P\|_{\infty, [0, b]} \quad (3.11) \\ &\leq C \max_{\mu} |\exp(P(\tilde{x}_\mu)) \Leftrightarrow Q(\tilde{x}_\mu)| + (1 + C) \|R \circ P\|_{\infty, [0, b]} \end{aligned}$$

mit C gemäß Satz 3.2 und entsprechend gebildetem \max , wobei die Stützstellen \tilde{x}_μ auf das Intervall $[0, b]$ transformiert sind.

Falls Q eine gute Näherung (etwa mit Hilfe Gaußscher Approximation bestimmt) für $\exp(P)$ ist, wird der erste Summand auf der rechten Seite klein sein. Es ist noch zu klären, wie groß der Grad s des (Taylor-) Polynoms S gewählt werden muß, damit das Restglied $R \circ P$ auf $[0, b]$ hinreichend klein wird. Hierfür erweist es sich als günstig, das Intervall $[0, b]$ in mehrere Teilintervalle zu zerlegen und (3.11) in jedem der Teilintervalle anzuwenden. Es sei $[a, b]$ ein solches Teilintervall. Ist $y_1 \leq P(x) \leq y_0$ für $x \in [a, b]$ (was sich ebenfalls mit Satz 3.2 überprüfen läßt), so gilt für $y = P(x)$ mit $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \exp(P(x)) &= \exp(y) \\ &= \exp(y_0) \sum_{i=0}^s \frac{(y \Leftrightarrow y_0)^i}{i!} + e^\eta \frac{(y \Leftrightarrow y_0)^{s+1}}{(s+1)!} \text{ mit einem } \eta \in [y, y_0]. \end{aligned}$$

Der Betrag des Restglieds läßt sich also nach oben abschätzen ($y_1 \leq y \leq y_0$!) durch

$$\|R \circ P\|_{\infty, [a, b]} \leq e^{y_0} \frac{|y_1 \Leftrightarrow y_0|^{s+1}}{(s+1)!}. \quad (3.12)$$

Zu bemerken ist, daß das Taylorpolynom S wegen der letzten Zeile in (3.11) nur von beweistechnischem Interesse ist, bei der praktischen Umsetzung aber nicht konkret aufgestellt werden muß. Nur sein Grad s muß nach (3.12) bestimmt werden, da er zusammen mit der zu wählenden Anzahl n von Stützstellen \tilde{x}_μ die Konstante C bestimmt.

Um aus den Größen $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ mit zugehörigen Fehlerschranken wie in (3.10) Näherungen und Fehlerschranken für W, W', W'', W''' zu bestimmen, verwendet man selbstverständlich (3.3) und setzt zunächst Näherungen fest durch

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0(x) &:= \sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} \tilde{U}_0\left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} x\right), \\ \tilde{W}_1(x) &:= \frac{1}{\tilde{\sigma}} \tilde{U}_1\left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} x\right), \\ \tilde{W}_2(x) &:= \left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}}\right)^3 \tilde{U}_2\left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} x\right), \\ \tilde{W}_3(x) &:= \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \tilde{U}_3\left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} x\right) \end{aligned}$$

mit einer Näherung $\tilde{\sigma}$ für σ .

$\tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3$ sind genau wie $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ Polynome, und mit Hilfe des Satzes von Ehlich-Zeller erhält man Schranken für

$$\|W \Leftrightarrow \tilde{W}_0\|_{\infty, [0, \tilde{b}]},$$

denn

$$\begin{aligned} |W(x) \Leftrightarrow \tilde{W}_0(x)| &= \left| \sqrt{\frac{1}{\sigma}} U\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x\right) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} \tilde{U}_0\left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} x\right) \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\sigma}} \left| U\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x\right) \Leftrightarrow \tilde{U}_0\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x\right) \right| + \left| \sqrt{\frac{1}{\sigma}} \tilde{U}_0\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x\right) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} \tilde{U}_0\left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} x\right) \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\sigma}} \|U \Leftrightarrow \tilde{U}_0\|_{\infty, [0, b]} + \left| \sqrt{\frac{1}{\sigma}} \tilde{U}_0\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x\right) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} \tilde{U}_0\left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{\sigma}}} x\right) \right|. \end{aligned}$$

Der letzte Summand ist ein Polynom und kann an gegebenen Stützstellen ausgewertet werden, wenn man die bereits bekannten Einschließungen für σ verwendet. Analog erhält man auch Fehlerschranken für \tilde{W}_1, \tilde{W}_2 und \tilde{W}_3 :

$$\begin{aligned} \|W &\Leftrightarrow \tilde{W}_0\|_{\infty,[0,b]} \leq 3 \cdot 10^{-8} , \\ \|W' &\Leftrightarrow \tilde{W}_1\|_{\infty,[0,b]} \leq 4 \cdot 10^{-9} , \\ \|W'' &\Leftrightarrow \tilde{W}_2\|_{\infty,[0,b]} \leq 2 \cdot 10^{-9} , \\ \|W''' &\Leftrightarrow \tilde{W}_3\|_{\infty,[0,b]} \leq 5 \cdot 10^{-9} . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Mit dem größeren Wert $b = 8$ und höherem Polynomgrad (60) wurde mit (3.4) die (gegenüber [4] verbesserte) Einschließung für σ erhalten:

$$1.655190360230826 \leq \sigma \leq 1.655190360230839 .$$

3.3 Eigenwertschranken zur Bestimmung der Konstanten K

Wie in der Bemerkung im Anschluß an Satz 2.1 erwähnt, wird zunächst in Satz 3.3 und Folgerung 3.1 bewiesen, daß (falls X und Y Hilberträume sind) die Bestimmung der Konstanten $K > 0$ mit

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right\|_{\hat{X}} \leq K \left\| \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] \right\|_Y \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L}) \tag{3.14}$$

äquivalent ist zur Bestimmung des Infimums κ_1 (oder einer positiven unteren Schranke hierfür) des Gesamtspektrums des selbstadjungierten Eigenwertproblems (vgl. (2.4))

$$\begin{aligned} \text{Suche } &\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{mit } &\langle \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right], \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \right] \rangle_Y = \lambda \langle \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \rangle_{\hat{X}} \\ &\text{für alle } \begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L}) . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Zur Bestimmung einer unteren Schranke für κ_1 können verschiedene Verfahren angewandt werden, etwa die von Weinstein [6], Kato [17], Temple oder Lehmann-Goerisch [2], [34]. Im nächsten Abschnitt 3.3.1 sollen die

Verfahren von Rayleigh-Ritz zur Bestimmung oberer Eigenwertschranken und die von Temple bzw. Lehmann-Goerisch zur Bestimmung unterer Schranken beschrieben werden. In den folgenden Abschnitten wird eine Einordnung von (3.15) angegeben.

Es zeigt sich, daß die von Plum [25] und Goerisch [13] entwickelte Homotopiemethode in Zusammenhang mit der Bestimmung unterer Eigenwertschranken selbstadjungierter Probleme herangezogen werden muß. Diese Methode wird ebenfalls vorgestellt und angewandt. Ziel ist die Bestimmung einer unteren Schranke für den kleinsten Eigenwert von (3.15), eines Eigenwertproblems im Banachraum $L_2(0, \infty) \times \mathbb{C}$ mit dem Operator \mathcal{L} (Abschnitt 3.3.2). Hierzu wird in Abschnitt 3.3.3 ein erstes Vergleichsproblem angegeben, das statt \mathcal{L} einen Differentialoperator L in $L_2(0, \infty)$ benutzt. Da sich dieses Problem ebenfalls nicht in geschlossener Form lösen läßt, wird es im Abschnitt 3.3.4 auf ein weiteres Vergleichsproblem in $L_2(0, x_0)$ zurückgeführt. Zur "Verbindung" dieser beiden Aufgaben wird in Abschnitt 3.3.5 eine Einordnung in die Homotopiemethode angegeben. Auch das zweite Vergleichsproblem wird durch eine Homotopie (Abschnitt 3.3.8) auf ein weiteres Vergleichsproblem zurückgeführt (Abschnitt 3.3.6). Dieses Problem verwendet einen Differentialoperator achter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in $L_2(0, x_0)$, und seine Eigenwerte können als Nullstellen einer parameterabhängigen 8×8 Determinante bestimmt werden (Abschnitt 3.3.7).

Der folgende Satz 3.3 führt die Bestimmung der Konstanten K mit (3.14) auf das selbstadjungierte Eigenwertproblem (3.15) zurück. Dazu benötigen wir den Begriff des Spektrums selbstadjungierter Eigenwertprobleme in Operatorgestalt und in Bilinearformgestalt.

Definition 3.1 *Sind X, Y komplexe Banachräume und $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener linearer Operator, sowie $B : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator, so bezeichne*

$$\rho(A, B) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A \Leftrightarrow \lambda B : D(A) \rightarrow Y \text{ ist bijektiv}\}$$

die Resolventenmenge des Eigenwertproblems $A[u] = \lambda B[u]$, sowie

$$\sigma(A, B) := \mathbb{C} \setminus \rho(A, B)$$

das Gesamtspektrum,

$$\sigma_p(A, B) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A \Leftrightarrow \lambda B : D(A) \rightarrow Y \text{ ist nicht injektiv}\}$$

die Menge der Eigenwerte und

$$\begin{aligned} \sigma_e(A, B) := & \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Häufungspunkt von } \sigma(A, B)\} \\ & \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Eigenwert unendlicher (geometrischer) Vielfachheit}\} \end{aligned}$$

das wesentliche Spektrum.

Für Aufgaben in Bilinearformgestalt

$$\mathcal{M}(u, v) = \lambda \mathcal{N}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}), \quad (3.16)$$

wobei \mathcal{M} bzw. \mathcal{N} hermitesche Sesquilinearformen über dem komplexen Vektorraum $D(\mathcal{M})$ bzw. dem normierten Vektorraum $(D(\mathcal{N}), \|\cdot\|)$ seien, mit $D(\mathcal{M})$ dicht in $D(\mathcal{N})$ und $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ positiv definit, bezeichne $\rho((3.16))$ die Menge derjenigen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u, v) \Leftrightarrow \lambda \mathcal{N}(u, v) = \mathcal{N}(r, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}) \\ \text{ist eindeutig lösbar für jedes } r \in D(\mathcal{N}) \\ \text{und es gilt } \|u\| \leq C \|r\| \\ \text{(mit einer von } r \text{ unabhängigen Konstanten } C), \end{aligned}$$

sowie $\sigma_p((3.16))$ die Menge derjenigen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die

$$\mathcal{M}(u, v) = \lambda \mathcal{N}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M})$$

nichttriviale Lösungen u besitzt. $\sigma((3.16))$ und $\sigma_e((3.16))$ sind wie zuvor erklärt.

Satz 3.3 Es seien X, Y Hilberträume, $H := D(\mathcal{L})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u, v) &:= \langle \mathcal{L}[u], \mathcal{L}[v] \rangle_Y + \langle u, v \rangle_{\widehat{X}} \quad \text{für } u, v \in H, \\ \mathcal{N}(u, v) &:= \langle u, v \rangle_{\widehat{X}} \quad \text{für } u, v \in H, \end{aligned}$$

$D(\mathcal{M}) := D(\mathcal{N}) := H$ versehen mit der durch \mathcal{M} erzeugten Norm und

$$\mu_i := \inf_{\substack{V \subset H \text{ Unterraum} \\ \dim V = i}} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{\mathcal{M}(v, v)}{\mathcal{N}(v, v)}.$$

Dann gilt:

Ist das Spektrum von (3.15) anfangsdiskret,

$$\lambda_1((3.15)) \leq \lambda_2((3.15)) \leq \dots \leq \lambda_k((3.15)) < \inf \sigma_e((3.15)) ,$$

so gilt $\lambda_i((3.15)) = \mu_i \Leftrightarrow 1$ für $i = 1, \dots, k$.

Ist das Spektrum von (3.15) nicht anfangsdiskret, so gilt

$$\inf \sigma((3.15)) = \inf \sigma_e((3.15)) = \mu_1 \Leftrightarrow 1 .$$

Beweis:

Da \mathcal{L} abgeschlossen ist, wird $(H, \mathcal{M}(\cdot, \cdot))$ zum Hilbertraum. Man betrachte das zu (3.15) um 1 spektralverschobene Problem

$$\begin{aligned} \text{Suche } u \in H \setminus \{0\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{mit } \mathcal{M}(u, v) = \lambda \mathcal{N}(u, v) \text{ für alle } v \in H . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dann existiert ein beschränkter selbstadjungierter Operator $\widehat{B} : H \rightarrow H$ (siehe [18, V.2.1]) mit

$$\mathcal{M}(\widehat{B}u, v) = \mathcal{N}(u, v) \text{ für alle } u, v \in H .$$

Da $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ positiv definit ist, besitzt \widehat{B} eine selbstadjungierte Inverse $\widehat{A} = \widehat{B}^{-1}$ in H . (3.17) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \text{Suche } u \in H \setminus \{0\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{mit } \widehat{A}u = \lambda u \end{aligned} \tag{3.18}$$

und es gilt $0 < \inf \sigma(\widehat{A})$ (denn die Eigenwerte von \widehat{A} und (3.17) stimmen (einschließlich Vielfachheiten) überein, ebenso die Resolventenmengen, also auch die wesentlichen Spektren).

Hat \widehat{A} mindestens k Eigenwerte unterhalb des wesentlichen Spektrums, so gilt für $i = 1, \dots, k$ nach der bekannten Variationscharakterisierung [3], [10] dieser Eigenwerte

$$\lambda_i(\widehat{A}) = \Leftrightarrow (\lambda_i(\Leftrightarrow \widehat{B}))^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \Leftrightarrow \left(\inf_{\substack{V \subset H \\ \dim V=i}} \sup_{0 \neq u \in V} \frac{\mathcal{M}(\hat{\Leftrightarrow} B u, u)}{\mathcal{M}(u, u)} \right)^{-1} \\
&= \inf_{\substack{V \subset H \\ \dim V=i}} \sup_{0 \neq u \in V} \frac{\mathcal{M}(u, u)}{\mathcal{M}(\hat{B} u, u)} \\
&= \inf_{\substack{V \subset H \\ \dim V=i}} \sup_{0 \neq u \in V} \frac{\mathcal{M}(u, u)}{\mathcal{N}(u, u)} = \mu_i .
\end{aligned}$$

Ist das Spektrum von \hat{A} nicht anfangsdiskret, so liefern der Spektrale Abbildungssatz ([18, III.6.3]) und die Eigenschaften der Rayleigh-Extremalwerte [3], [10, XI.1]

$$\begin{aligned}
\inf \sigma_\varepsilon(\hat{A}) &= \Leftrightarrow (\inf \sigma_\varepsilon(\hat{\Leftrightarrow} B))^{-1} \\
&= \Leftrightarrow \left(\inf_{0 \neq u \in H} \frac{\mathcal{M}(\hat{\Leftrightarrow} B u, u)}{\mathcal{M}(u, u)} \right)^{-1} \\
&= \inf_{0 \neq u \in H} \frac{\mathcal{M}(u, u)}{\mathcal{N}(u, u)} = \mu_1 . \quad \square
\end{aligned}$$

Folgerung 3.1 Die Konstante κ_1 aus (2.3) ist gleich dem Infimum des Gesamtspektrums von (2.4) bzw. (3.15).

3.3.1 Die Verfahren von Rayleigh-Ritz, Lehmann-Goerisch und Temple

Betrachtet werden Eigenwertprobleme in Bilinearformgestalt

$$\mathcal{M}(u, v) = \lambda \mathcal{N}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}) , \quad (3.19)$$

wobei \mathcal{M} bzw. \mathcal{N} hermitesche Sesquilinearformen über den komplexen Vektorräumen $D(\mathcal{M})$ bzw. $D(\mathcal{N})$ seien. \mathcal{N} sei positiv definit und \mathcal{M} positiv semidefinit. Man bezeichnet

$$\mu_i := \inf_{\substack{U \subset D(\mathcal{M}) \text{ Unterraum} \\ \dim U=i}} \sup_{0 \neq f \in U} \frac{\mathcal{M}(f, f)}{\mathcal{N}(f, f)} \quad (3.20)$$

als i -ten Rayleigh-Extremalwert von (3.19).

Ist $(D(\mathcal{M}), \mathcal{M}(\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum und $D(\mathcal{N}) = D(\mathcal{M})^3$, so ist in [34] gezeigt⁴, daß das Eigenwertproblem (3.19) äquivalent ist zu dem eines selbstadjungierten Operators \widehat{A} ; siehe hierzu auch den Beweis von Satz 3.3. Die Charakterisierung der Eigenwerte von \widehat{A} durch Variationsprinzipien ([3], [10, XI.1]) (wie im Beweis von Satz 3.3) liefert:

- a) Ist $\mu_i < \inf \sigma_\varepsilon(\widehat{A}) = \inf \sigma_\varepsilon((3.19))$, so ist (3.19) anfangsdiskret, besitzt mindestens i Eigenwerte $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i)$, der Vielfachheit entsprechend oft aufgeführt) unterhalb des wesentlichen Spektrums, und es gilt $\lambda_i = \mu_i$.
- b) Ist $\mu_i = \inf \sigma_\varepsilon(\widehat{A}) = \inf \sigma_\varepsilon((3.19))$, so besitzt (3.19) höchstens $i \Leftrightarrow 1$ Eigenwerte unterhalb des wesentlichen Spektrums, und es gilt $\mu_j = \mu_i$ für alle $j \geq i$.

Im Verfahren von Rayleigh-Ritz wird in (3.20) $D(\mathcal{M})$ durch einen n -dimensionalen Teilraum $D_n(\mathcal{M}) \subset D(\mathcal{M})$ ersetzt und man erhält obere Schranken $\Lambda_i^{(n)}$ für μ_i . Sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig und spannen diese den Raum $D_n(\mathcal{M})$ auf, so sind die $\Lambda_i^{(n)}$ ($i = 1, \dots, n$) charakterisiert als Eigenwerte des Matrixeigenwertproblems

$$A_0 x = \Lambda A_1 x \quad (3.21)$$

mit den hermiteschen $n \times n$ -Matrizen

$$\begin{aligned} A_0 &:= (\mathcal{M}(v_i, v_k))_{i,k=1,\dots,n}, \\ A_1 &:= (\mathcal{N}(v_i, v_k))_{i,k=1,\dots,n}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Zur Bestimmung unterer Schranken für Eigenwerte unterhalb des wesentlichen Spektrums sollen die Verfahren von Lehmann-Goerisch und

³In der Literatur wird dieser Fall als "linksdefinit Fall" bezeichnet.

⁴In [34] wird auch gezeigt, daß eine analoge Aussage gilt, falls $(D(\mathcal{N}), \mathcal{N}(\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum ist und $D(\mathcal{M})$ dicht in $D(\mathcal{N})$. Dieser Fall wird als "rechtsdefinit Fall" bezeichnet. Die Voraussetzung der Semidefinitheit von $\mathcal{M}(\cdot, \cdot)$ läßt sich hier abschwächen zu: Es existiere ein $\eta > 0$, so daß $\mathcal{M}(\cdot, \cdot) + \eta \mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ positiv (semi-)definit ist.

Temple verwendet werden (die Bezeichnungen sind an die in [2] angelehnt; die Voraussetzungen der Verfahren entstammen [34], wo Aufgaben mit wesentlichem Spektrum eingeordnet werden können).

Zunächst wird die Methode von Lehmann-Goerisch für linksdefinite Aufgaben vorgestellt. Dazu sei $(D(\mathcal{M}), \mathcal{M}(\cdot, \cdot))$ ein separabler, komplexer Hilbertraum und es gelte

- (L0) $(X_G, \mathcal{B}(\cdot, \cdot))$ sei ein komplexer Hilbertraum und $T : D(\mathcal{M}) \rightarrow X_G$ eine Isometrie, d. h. $\mathcal{B}(Tf, Tg) = \mathcal{M}(f, g)$ für alle $f, g \in D(\mathcal{M})$.
- (L1) $v_1, \dots, v_n \in D(\mathcal{M})$ seien wie für das Verfahren von Rayleigh-Ritz linear unabhängig gewählt.
- (L2) Für $w_1^*, \dots, w_n^* \in X_G$ gelte $\mathcal{B}(Tf, w_i^*) = \mathcal{N}(f, v_i)$ für alle $f \in D(\mathcal{M})$.
- (L3) Für ein $m \in \mathbb{N}$ seien linear unabhängige $w_1^0, \dots, w_m^0 \in X_G$ so gewählt, daß gilt $\mathcal{B}(Tf, w_i^0) = 0$ für alle $f \in D(\mathcal{M})$.

Zusätzlich zu den in (3.22) definierten Matrizen werden drei weitere erklärt:

$$\begin{aligned} A_2 &:= (\mathcal{B}(w_i^*, w_k^*))_{i,k=1,\dots,n} , \\ B_G &:= (\mathcal{B}(w_i^0, w_k^0))_{i,k=1,\dots,m} , \\ F &:= (\mathcal{B}(w_i^*, w_k^0))_{i=1,\dots,n; k=1,\dots,m} . \end{aligned}$$

Außerdem wählt man einen Spektralparameter $\rho > 0$ und $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Ist die Matrix

$$A_0 \Leftrightarrow 2\rho A_1 + \rho^2(A_2 + C\overline{F}^T + F\overline{C}^T + CB_G\overline{C}^T)$$

positiv definit und bezeichnen μ_1, \dots, μ_n die (der Größe nach aufsteigend geordneten) Eigenwerte von

$$(A_0 \Leftrightarrow \rho A_1)x = \mu(A_0 \Leftrightarrow 2\rho A_1 + \rho^2(A_2 + C\overline{F}^T + F\overline{C}^T + CB_G\overline{C}^T))x ,$$

so besagt Satz 6 aus [2], daß das Intervall $[\rho \Leftrightarrow \frac{\rho}{1-\mu_j}, \rho)$ mindestens j Eigenwerte des Ausgangsproblems (3.19) enthält, falls $j \leq n$ und $\mu_j < 0$.

Hat ein Problem (3.19) wenigstens $N + 1$ Eigenwerte unterhalb $\sigma_\epsilon((3.19))$ und ist a priori bekannt, daß

$$\lambda_N < \rho < \lambda_{N+1} , \quad (3.23)$$

so läßt sich hieraus leicht (s. [2]) ein Algorithmus konstruieren, der untere Schranken für $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ liefert. [2, Satz 7], erklärt, warum für C eine Näherung für $\Leftrightarrow FB_G^{-1}$ verwendet werden sollte.

Das bekannte Verfahren von Temple für linksdefinite Aufgaben ist in obigen Ausführungen als Spezialfall enthalten. Zum Abschluß dieses Abschnitts wird die Methode vom Temple für rechtsdefinite Probleme vorgestellt⁵ [2], [34, Corollary 1.5, § 4]:

$(D(\mathcal{N}), \mathcal{N}(\cdot, \cdot))$ sei ein separabler, komplexer Hilbertraum. $v \in D(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$ wird zunächst beliebig gewählt (um gute Schranken für den N -ten Eigenwert λ_N von (3.19) zu erhalten, wählt man v als “gute” Näherung eines Eigenelementes zu λ_N).

$w \in D(\mathcal{N})$ wird so bestimmt, daß

$$\mathcal{M}(f, v) = \mathcal{N}(f, w) \quad \text{für alle } f \in D(\mathcal{M}) .$$

Gilt

$$\frac{\mathcal{M}(v, v)}{\mathcal{N}(v, v)} < \rho < \lambda_{N+1} ,$$

so folgt

$$\frac{\mathcal{N}(w, w) \Leftrightarrow \rho \mathcal{M}(v, v)}{\mathcal{M}(v, v) \Leftrightarrow \rho \mathcal{N}(v, v)} \leq \lambda_N .$$

3.3.2 Die Konstante K

Zur Bestimmung von Eigenwertschranken für das Problem (3.15) mit den im vorhergehenden Abschnitt dargestellten Methoden wird mit den bereits in Abschnitt 2.4 festgelegten Größen (siehe auch Anhang A) folgende

⁵Ebenso wie im linksdefiniten Fall gibt es auch im rechtsdefiniten Fall eine Verallgemeinerung des Temple-Verfahrens von Lehmann und Goerisch, die wir jedoch aus Gründen der einfacheren Darstellung hier nicht angeben.

Einordnung gewählt:

$$D(\mathcal{M}) := D(\mathcal{L}) ,$$

$$\mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) := \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\widehat{X}} ,$$

$$\mathcal{M} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) := \langle \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right], \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right] \rangle_Y + c \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\widehat{X}} ,$$

$$X_G := Y \times Y \times \mathbb{C} ,$$

$$\mathcal{B} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \right) := \langle f_1, g_1 \rangle_Y + c \left\langle \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\widehat{Y}} ,$$

$$T : D(\mathcal{L}) \rightarrow X_G , \quad T \left(\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] \\ B[u] \\ \sigma \end{pmatrix} .$$

Die Konstante $c > 0$ bewirkt eine Spektralverschiebung (alle Eigenwerte des Problems (3.19) sind um c größer als die von (3.15)) und sollte in derselben Größenordnung wie der kleinste Eigenwert von (3.15) gewählt werden. $D(\mathcal{M})$ wird mit $\mathcal{M}(\cdot, \cdot)$ zum Hilbertraum, wobei die Vollständigkeit aus der Abgeschlossenheit von \mathcal{L} folgt. Zur Behandlung als “linksdefinites” Problem setzt man $D(\mathcal{N}) := D(\mathcal{M})$ und für den “rechtsdefiniten” Fall $D(\mathcal{N}) := (X_0 \cap H_2^0(0, \infty)) \times \mathbb{C}$ mit dem bereits angegebenen inneren Produkt $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$. $(X_G, \mathcal{B}(\cdot, \cdot))$ ist wie $(D(\mathcal{M}), \mathcal{M}(\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum und $T : D(\mathcal{M}) \rightarrow X_G$ erfüllt die Bedingungen (L0).

Für Ansatzfunktionen w_i^* bzw. w_i^0 muß gemäß (L2), (L3) gelten

$$\mathcal{B} \left(T \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \quad (3.24)$$

für alle $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$

mit gegebenem $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$ für $w_i^* = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ bzw. $v_1 = v_2 = 0$ für

$$w_i^0 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} .$$

Zur Behandlung der Gleichung (3.24) und im weiteren Fortgang der Arbeit empfiehlt sich die Einführung weiterer Operatoren (siehe auch Anhang A)

$$\begin{aligned}
B_1 & : H_2^0(0, \infty) \rightarrow L_2(0, \infty) , \\
B_1^* & : H_2(0, \infty) \rightarrow L_2(0, \infty) , \\
\tilde{B}[u] & := (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u \quad (\tilde{B} \in \{B_1, B_1^*\}) .
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Die Bestimmung der verwendeten adjungierten Operatoren (mit * gekennzeichnet) ist in Anhang B dargestellt.

Für gegebenes $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \left(T \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right) &= \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \text{für alle } \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L}) \\
\Leftrightarrow \langle \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right], w_1 \rangle_Y + c \langle \begin{pmatrix} B_1[f_1] \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rangle_{\hat{Y}} &= \langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rangle_{\hat{X}} \\
&\quad \text{für alle } \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L}) \\
\Leftrightarrow \langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \mathcal{L}^*[w_1] \rangle_{\hat{Y}} + c \langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1^*[w_2] \\ w_3 \end{pmatrix} \rangle_{\hat{Y}} &= \\
\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1^* B_1[v_1] \\ v_2 \end{pmatrix} \rangle_{\hat{Y}} &\quad \text{für alle } \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L}) \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}^*[w_1] + c \begin{pmatrix} B_1^*[w_2] \\ w_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_1^* B_1[v_1] \\ v_2 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \kappa \in \mathbb{C} ,
\end{aligned}$$

falls $w_1 \in D(\mathcal{L}^*), w_2 \in D(B_1^*)$. Der Term $\kappa \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}$ in der letzten Zeile ergibt sich durch die Forderung der Orthogonalität auf ϕ in $D(\mathcal{L}) = \{u \in H_4(0, \infty) \cap H_2^0(0, \infty) : \langle u, \phi \rangle_{L_2(0, \infty)} = 0\}$.

Zu $v_i = \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \end{pmatrix}$ kann also

$$w_i^* = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c} B_1[v_{i,1}] \\ \frac{1}{c} v_{i,2} \end{pmatrix}$$

gewählt werden.

Für $w_i^0 = \begin{pmatrix} w_{i,1} \\ w_{i,2} \\ w_{i,3} \end{pmatrix}$ muß gelten

$$\mathcal{L}^*[w_{i,1}] + c \begin{pmatrix} B_1^*[w_{i,2}] \\ w_{i,3} \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

d. h. man setze $w_{1,1} = w_{1,3} = 0$ und bestimme $w_{1,2}$ aus $B_1^*[w_{1,2}] = \phi$; $w_{2,1} = w_{2,3} = 0$ und $w_{2,2}(z) = e^{-\alpha z}$ ($\Rightarrow B_1^*[w_{2,2}] = 0$); für $i \geq 3$ wähle man $w_{i,1} \in D(\mathcal{L}^*)$ und bestimme dazu $\begin{pmatrix} w_{i,2} \\ w_{i,3} \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} B_1^*[w_{i,2}] \\ w_{i,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \mathcal{L}^*[w_{i,1}];$$

der noch verbleibende freie Parameter in $w_{i,2}$ ist dabei geeignet festzulegen.

Da Größen ρ, N mit (3.23) nicht ohne weiteres angegeben werden können, wird zu deren Bestimmung die von Goerisch [13] und Plum [25] entwickelte Homotopiemethode verwendet. Sie basiert auf dem folgenden Vergleichssatz für Rayleigh-Extremalwerte (und damit für Eigenwerte unterhalb des wesentlichen Spektrums) und führt die Bestimmung von ρ, N auf ein Vergleichsproblem zurück. Ist dieses Vergleichsproblem seinerseits nicht lösbar (d. h. können keine "guten" Schranken für seine Eigenwerte angegeben werden), so ist ein weiterer Homotopieschritt, also der Übergang zu einem weiteren Vergleichsproblem notwendig. Es ergibt sich so eine Schar von Vergleichsproblemen, bis man zu einem geschlossenen⁶ lösbaeren Problem gelangt.

Satz 3.4 (Vergleichssatz) [2, Theorem 10] *Es seien die zu Beginn von Abschnitt 3.3.1 bzw. in der Fußnote auf Seite 42 aufgeführten Voraussetzungen für $\mathcal{M}, \mathcal{N}, D(\mathcal{M}), \mu_i$ und analog für $\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{N}}, D(\widetilde{\mathcal{M}}), \widetilde{\mu}_i$ mit $D(\mathcal{M}) \subset D(\widetilde{\mathcal{M}})$ erfüllt. Außerdem gelte*

$$\frac{\widetilde{\mathcal{M}}(f, f)}{\widetilde{\mathcal{N}}(f, f)} \leq \frac{\mathcal{M}(f, f)}{\mathcal{N}(f, f)}$$

für alle $f \in D(\mathcal{M})$ mit $f \neq 0$.

Dann gilt $\widetilde{\mu}_i \leq \mu_i$ ($i \in \mathbb{N}$).

⁶Es genügt, wenn hinreichend gute Schranken für die Eigenwerte dieses Problems angegeben werden können.

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Definition (3.20). \square

3.3.3 Das erste Vergleichsproblem

Es wird ein Vergleichsproblem zu (3.15) angegeben, mit dessen Hilfe ein geeigneter Wert des Spektralparameters ρ (siehe (3.23)) bestimmt werden kann. Dazu wird der Vergleichssatz 3.4 verwendet⁷.

Satz 3.5 $\mathcal{M}, \mathcal{N}, D(\mathcal{M})$ seien wie in Abschnitt 3.3.2 gewählt. Wählt man $c_1 > 0$ und setzt $D(\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}) := D(\mathcal{M})$, $\widetilde{\mathcal{N}}^{(1)}(f, g) := \mathcal{N}(f, g)$,

$$D(L_\mu) := D(A) \cap X_0, \quad L_\mu[u] := (A \Leftrightarrow \mu B)[u], \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}^{(1)} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) &:= (1 \Leftrightarrow c_1) \langle L_\mu[f_1], L_\mu[g_1] \rangle_Y \\ &+ (1 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1}) |\gamma|^2 \|B[\omega]\|_Y^2 f_2 \bar{g}_2 + c \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\widehat{X}}, \end{aligned}$$

so sind die Voraussetzungen von Satz 3.4 erfüllt (mit $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$, $\widetilde{\mathcal{N}}^{(1)}$, $D(\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)})$ statt $\widetilde{\mathcal{M}}$, $\widetilde{\mathcal{N}}$, $D(\widetilde{\mathcal{M}})$) und es gilt $\widetilde{\mu}_i^{(1)} \leq \mu_i$ ($i \in \mathbb{N}$).

Beweis: Für $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{M}) = D(\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)})$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) &= \left\| \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right] \right\|_Y^2 + c \left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}}^2 \\ &= \|A[f_1] \Leftrightarrow \mu B[f_1] \Leftrightarrow \gamma f_2 B[\omega]\|_Y^2 + c \left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}}^2 \\ &= \|L_\mu[f_1]\|_Y^2 + \|\gamma f_2 B[\omega]\|_Y^2 + c \left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}}^2 \\ &\quad \Leftrightarrow 2 \underbrace{\text{real}(\langle \gamma f_2 B[\omega], L_\mu[f_1] \rangle_Y)} \\ &\quad \leq \|\gamma f_2 B[\omega]\|_Y \|L_\mu[f_1]\|_Y \\ &\quad \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_1} \|\gamma f_2 B[\omega]\|_Y^2 + c_1 \|L_\mu[f_1]\|_Y^2 \right) \\ &\geq (1 \Leftrightarrow c_1) \|L_\mu[f_1]\|_Y^2 + (1 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1}) \|\gamma f_2 B[\omega]\|_Y^2 + c \left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}}^2 \end{aligned}$$

⁷Die Eigenwerte der beiden Probleme liegen "abwechselnd verzahnt", so daß das neue Problem direkt als Vergleichsproblem verwendet werden kann.

$$= \widetilde{\mathcal{M}}^{(1)} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right). \quad \square$$

Bemerkung:

a) Für einen Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$ von

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}^{(1)} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) &= \tilde{\lambda} \widetilde{\mathcal{N}}^{(1)} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) \\ &\text{für alle } \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in D(\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

gilt

$$\tilde{\lambda}_i = \left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1}\right) |\gamma|^2 \|B[\omega]\|_Y^2 + c$$

oder

$$\tilde{\lambda}_i = (1 \Leftrightarrow c_1) \lambda_j + c$$

mit einem Eigenwert λ_j von

$$\langle L_\mu[u], L_\mu[v] \rangle_Y = \lambda \langle u, v \rangle_X \quad \text{für alle } v \in D(L_\mu). \quad (3.28)$$

Zum Nachweis sei $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ Eigelement zum Eigenwert $\tilde{\lambda}$ von (3.27). Aus (3.27) folgt für $g_1 \in D(A) \cap X_0$, $g_2 = 0$

$$(1 \Leftrightarrow c_1) \langle L_\mu[f_1], L_\mu[g_1] \rangle_Y + c \langle f_1, g_1 \rangle_X = \tilde{\lambda} \langle f_1, g_1 \rangle_X,$$

also ist $(\tilde{\lambda} \Leftrightarrow c)/(1 \Leftrightarrow c_1)$ Eigenwert von (3.28), falls $f_1 \neq 0$. Ist dagegen $f_1 \equiv 0$, so folgt aus (3.27) sofort $\tilde{\lambda} = (1 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1}) |\gamma|^2 \|B[w]\|_Y^2 + c$. Diese Überlegungen gelten ebenso bei Berücksichtigung der Vielfachheiten der Eigenwerte.

b) Der Grenzübergang $c_1 \rightarrow 0+$ liefert die für die numerische Anwendung entscheidende Beziehung $\mu_{i+1}((3.15)) \geq \mu_i((3.28))$ für $i \in \mathbb{N}$.

3.3.4 Das zweite Vergleichsproblem

Gemäß der Bemerkung am Ende von Abschnitt 3.3.3 müssen die Eigenwerte von (3.28), nämlich

$$\mathcal{M}^{(1)}(u, v) = \lambda \mathcal{N}^{(1)}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}^{(1)}) \quad (3.29)$$

mit

$$\begin{aligned} D(\mathcal{M}^{(1)}) &:= D(A) \cap X_0, \\ \mathcal{M}^{(1)}(u, v) &:= \langle L_\mu[u], L_\mu[v] \rangle_Y, \\ D(\mathcal{N}^{(1)}) &:= X_0 \cap H_2^0(0, \infty), \\ \mathcal{N}^{(1)}(u, v) &:= \langle u, v \rangle_X \end{aligned}$$

bestimmt werden (oder “gute” Einschließungen hierfür). Dies geschieht mit Hilfe eines weiteren Vergleichsproblems, das es ermöglicht, das auf einem unbeschränkten Intervall betrachtete Problem (3.29) auf ein Problem in dem kompakten Intervall $[0, x_0]$ zurückzuführen. Hierzu wird die Idee des “Neumann Decoupling” von B. Davies [8] aufgegriffen, d. h. das unbeschränkte Intervall $[0, \infty)$ wird an einer Stelle $x_0 > 0$ aufgeteilt und der zugrunde liegende Funktionenraum vergrößert, indem bei x_0 kein glatter (H_4 -)Übergang gefordert wird, sondern Neumannsche Randbedingungen, die bei Formulierung in Bilinearformgestalt nicht explizit auftreten. Das zweite Vergleichsproblem lautet:

$$\mathcal{M}^{(2)}(u, v) = \lambda \mathcal{N}^{(2)}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}^{(2)}) \quad (3.30)$$

mit

$$\begin{aligned} D(\mathcal{M}^{(2)}) &:= \{f \in L_2(0, \infty) : f|_{(0, x_0)} \in H_4(0, x_0), f(0) = f'(0) = 0, \\ &\quad f|_{(x_0, \infty)} \in H_4(x_0, \infty), \varphi(f) = 0\}, \\ \mathcal{M}^{(2)}(u, v) &:= \langle L_\mu^{(l)}[u|_{(0, x_0)}], L_\mu^{(l)}[v|_{(0, x_0)}] \rangle_{L_2(0, x_0)} \\ &\quad + \langle L_\mu^{(r)}[u|_{(x_0, \infty)}], L_\mu^{(r)}[v|_{(x_0, \infty)}] \rangle_{L_2(x_0, \infty)}, \\ D(\mathcal{N}^{(2)}) &:= \{f : f|_{(0, x_0)} \in H_2(0, x_0), f(0) = f'(0) = 0, \\ &\quad f|_{(x_0, \infty)} \in H_2(x_0, \infty), \varphi(f) = 0\};, \\ \mathcal{N}^{(2)}(u, v) &:= \langle B^{(l)}[u|_{(0, x_0)}], B^{(l)}[v|_{(0, x_0)}] \rangle_{L_2(0, x_0)} \\ &\quad + \langle B^{(r)}[u|_{(x_0, \infty)}], B^{(r)}[v|_{(x_0, \infty)}] \rangle_{L_2(x_0, \infty)}. \end{aligned}$$

Die Operatoren B, L_μ mit hochgestelltem (l) oder (r) sind in offensichtlicher Weise durch Einschränkung des Definitionsbereiches ihrer Argumente (Teilmengen von $L_2(0, x_0)$ bzw. $L_2(x_0, \infty)$ statt $L_2(0, \infty)$) aus den Operatoren B, L_μ hervorgegangen. Für die exakten Definitionen siehe Anhang A. Das Funktional φ ist in Abschnitt 2.4 eingeführt worden. Wegen $D(\mathcal{M}^{(1)}) \subset D(\mathcal{M}^{(2)})$ ist nach Definition (3.20) klar, daß alle Rayleigh-Extremalwerte von (3.30) (und damit alle Eigenwerte unterhalb des wesentlichen Spektrums) kleiner oder gleich denjenigen von (3.29) sind. Das somit gefundene Vergleichsproblem (3.30) kann getrennt auf den Intervallen $[0, x_0]$ und $[x_0, \infty)$ betrachtet werden, denn es gilt mit

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{M}^{(2,l)}) &:= \{f \in H_4(0, x_0) : f(0) = f'(0) = 0\}, \\
D(\mathcal{M}^{(2,r)}) &:= \{f \in H_4(x_0, \infty) : \varphi(f) = 0\}, \\
D(\mathcal{N}^{(2,l)}) &:= \{f \in H_2(0, x_0) : f(0) = f'(0) = 0\}, \\
D(\mathcal{N}^{(2,r)}) &:= \{f \in H_2(x_0, \infty) : \varphi(f) = 0\}, \\
\mathcal{M}^{(2,l)}(u, v) &:= \langle L_\mu^{(l)}[u], L_\mu^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)}, \\
\mathcal{M}^{(2,r)}(u, v) &:= \langle L_\mu^{(r)}[u], L_\mu^{(r)}[v] \rangle_{L_2(x_0, \infty)}, \\
\mathcal{N}^{(2,l)}(u, v) &:= \langle B^{(l)}[u], B^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)}, \\
\mathcal{N}^{(2,r)}(u, v) &:= \langle B^{(r)}[u], B^{(r)}[v] \rangle_{L_2(x_0, \infty)}
\end{aligned}$$

und $\mu_i^{(2)}$ bzw. $\mu_i^{(2,l)}$ und $\mu_i^{(2,r)}$ als Rayleigh-Extremalwerten von (3.30) bzw.

$$\mathcal{M}^{(2,l)}(u, v) = \lambda \mathcal{N}^{(2,l)}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}^{(2,l)}) \quad (3.31)$$

und

$$\mathcal{M}^{(2,r)}(u, v) = \lambda \mathcal{N}^{(2,r)}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}^{(2,r)}) \quad (3.32)$$

Satz 3.6

$$\{\mu_i^{(2)} : i \in \mathbb{N}\} = \{\mu_i^{(2,l)} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{\mu_i^{(2,r)} : i \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis: Für $i = (2), (2, l), (2, r)$ ist $(D(\mathcal{N}^i), \mathcal{N}^i(\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum und $D(\mathcal{M}^i)$ liegt dicht in $D(\mathcal{N}^i)$. Es gilt $D(\mathcal{N}^{(2)}) = D(\mathcal{N}^{(2,l)}) \oplus D(\mathcal{N}^{(2,r)})$.

Für die analog zum Vorgehen im Beweis von Satz 3.3 erhaltenen zugehörigen Operatorformulierungen $\widehat{A}, \widehat{A}^{(l)}, \widehat{A}^{(r)}$ von (3.30) bzw. (3.31) und (3.32) folgt damit nach [10, IX.5] $\sigma_\varepsilon(\widehat{A}) = \sigma_\varepsilon(\widehat{A}^{(l)}) \cup \sigma_\varepsilon(\widehat{A}^{(r)})$, $\sigma_p(\widehat{A}) = \sigma_p(\widehat{A}^{(l)}) \cup \sigma_p(\widehat{A}^{(r)})$. Aufgrund der in Abschnitt 3.3.1 dargestellten Eigenschaften der Rayleigh-Extremalwerte folgt hieraus die Behauptung. Siehe auch [8, § 2]. \square

Bemerkung:

- a) Die Aussage von Satz 3.6 gilt auch bei Berücksichtigung der Vielfachheiten der Eigenwerte (der Beweis erfolgt analog): Es gibt zwei Teilfolgen $\mu_{i_k^{(1)}}^{(2)}, \mu_{i_k^{(2)}}^{(2)}$ von $\mu_i^{(2)}$ mit $\mu_{i_k^{(1)}}^{(2)} = \mu_k^{(2,l)}, \mu_{i_k^{(2)}}^{(2)} = \mu_k^{(2,r)}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\{i_k^{(1)} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{i_k^{(2)} : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, sowie $i_k^{(1)} \neq i_j^{(2)}$ für $k, j \in \mathbb{N}$.
- b) Der Beweis von Satz 3.6 beruht entscheidend auf der Wahl von φ . Anschaulich gesprochen darf φ nur Funktionswerte “rechts von x_0 ” verwenden, damit $D(\mathcal{N}^{(2)})$ wie angegeben in die direkte Summe zweier Teilräume zerlegt werden kann.

Problem (3.31) wird in Abschnitt 3.3.6 mit Hilfe der Homotopiemethode auf ein weiteres Vergleichsproblem zurückgeführt.

Die Rayleigh-Extremalwerte für das Problem (3.32) auf dem Intervall $[x_0, \infty)$ werden nicht exakt bestimmt, sondern im folgenden nach unten abgeschätzt.

Für $f \in D(\mathcal{M}^{(2,r)})$ gilt

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\mathcal{M}^{(2,r)}(f, f)}{\mathcal{N}^{(2,r)}(f, f)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\|L_\mu^{(r)}[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}}{\|B^{(r)}[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}} \\
&= \frac{\|(A^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}}{\|B^{(r)}[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}} \\
&\geq \frac{\|(A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}}{\|B^{(r)}[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}} \Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_1 \Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\|f\|_{L_2(x_0, \infty)}}{\|B^{(r)}[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

für

$$A^{(r)}[f](x) = A_0^{(r)}[f](x) + \varepsilon_1(x)B^{(r)}[f](x) + \varepsilon_2(x)f(x)$$

und

$$\|\varepsilon_1\|_{\infty, (x_0, \infty)} \leq \tilde{\varepsilon}_1, \quad \|\varepsilon_2\|_{\infty, (x_0, \infty)} \leq \tilde{\varepsilon}_2 .$$

Bezeichnet $A_0^{(r)}$ den Operator, in dem das Blasiusprofil V durch seinen asymptotischen Wert ($= 1$) und V'' durch 0 ersetzt werden, so gilt $\varepsilon_1(x) = i\alpha R(V(x) \Leftrightarrow 1)$, $\varepsilon_2(x) = i\alpha R V''(x)$ und $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2$ sind klein, falls x_0 hinreichend groß gewählt wird.

Lemma 3.1 Für $f \in D(B^{(r)})$ gilt

$$\frac{\|f\|_{L_2(x_0, \infty)}}{\|B^{(r)}[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}} \leq \frac{1}{\alpha^2} .$$

Beweis: Bezeichnet μ_1 den ersten Rayleigh-Extremalwert von

$$\begin{aligned} \langle B^{(r)}[f], B^{(r)}[g] \rangle_{L_2(x_0, \infty)} &= \lambda \langle f, g \rangle_{L_2(x_0, \infty)} \\ &\text{für alle } g \in D(B^{(r)}), \end{aligned} \tag{3.34}$$

so gilt

$$\frac{\|f\|_{L_2(x_0, \infty)}}{\|B^{(r)}[f]\|_{L_2(x_0, \infty)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} .$$

Ist (3.34) nicht anfangsdiskret, so gilt $\mu_1 = \inf \sigma_e = \alpha^4$, denn das wesentliche Spektrum von (3.34) ist gleich dem von B^*B [10, Theorem IX.9.6], da letzteres Problem eine endlichdimensionale Störung von (3.34) ist. Eine einfache Rechnung⁸ zeigt, daß es keine Eigenwerte unterhalb von α^4 gibt (man beachte die Bedingung $\varphi(f) = 0$ für $f \in D(B^{(r)})$). Es folgt

$$0 \leq \|f\|_{L_2(x_0, \infty)} / \|B^{(r)}[f]\|_{L_2(x_0, \infty)} \leq \frac{1}{\alpha^2} . \quad \square$$

⁸Siehe Anhang C für die Äquivalenz von starker und schwacher Formulierung der auftretenden Probleme.

Bezeichnen $\tilde{\mu}_i^{(2,r)}$ die Rayleigh-Extremalwerte von

$$\begin{aligned} \langle (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u], (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[v] \rangle_{L_2(x_0, \infty)} = \\ \lambda \mathcal{N}^{(2,r)}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}^{(2,r)}), \end{aligned} \quad (3.35)$$

so gilt nach (3.33) und Lemma 3.1 für $i \in \mathbb{N}$:

$$(\mu_i^{(2,r)})^{\frac{1}{2}} \geq (\tilde{\mu}_i^{(2,r)})^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \tilde{\varepsilon}_2. \quad (3.36)$$

Man bestimmt zunächst das wesentliche Spektrum von (3.35) und zeigt dann, daß es außer dem einfachen Eigenwert $\lambda = 0$ keine weiteren Eigenwerte von (3.35) gibt.

Satz 3.7 *Das wesentliche Spektrum von (3.35) ist enthalten in der Menge*

$$[(\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu))^2, \infty).$$

Beweis: In diesem Beweis bezeichne $\|\cdot\|$ die Norm $\|\cdot\|_{L_2(x_0, \infty)}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(x_0, \infty)}$. Man betrachtet zunächst die Resolventenmenge von (3.35):

$$\lambda \in \rho((3.35))$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \langle (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u], (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[v] \rangle &\Leftrightarrow \lambda \langle B^{(r)}[u], B^{(r)}[v] \rangle \\ &= \langle B^{(r)}[r], B^{(r)}[v] \rangle \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}^{(2,r)}) \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar für jedes $r \in D(\mathcal{N}^{(2,r)})$

$$\text{und es gilt } \|B^{(r)}[u]\| \leq C \|B^{(r)}[r]\|$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \langle (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u], (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[v] \rangle \\ = \langle B^{(r)}[r + \lambda u], B^{(r)}[v] \rangle \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}^{(2,r)}) \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar für jedes $r \in D(\mathcal{N}^{(2,r)})$

$$\text{und es gilt } \|B^{(r)}[u]\| \leq C \|B^{(r)}[r]\|$$

Setzt man $w := B^{(r)}[v]$ und $T := (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})(B^{(r)})^{-1}$, so ist dies wegen $D(T) = B^{(r)}(D(\mathcal{M}^{(2,r)}))$ (siehe Beweis von Lemma 3.2) äquivalent zu

$$\langle (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u], T[w] \rangle = \langle B^{(r)}[r + \lambda u], w \rangle$$

für alle $w \in D(T)$

ist eindeutig lösbar für jedes $r \in D(\mathcal{N}^{(2,r)})$

und es gilt $\|B^{(r)}[u]\| \leq C\|B^{(r)}[r]\|$

$$\Leftrightarrow (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u] \in D(T^*) \text{ und} \\ T^*(A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u] = B^{(r)}[r + \lambda u]$$

ist eindeutig lösbar für jedes $r \in D(\mathcal{N}^{(2,r)})$

und es gilt $\|B^{(r)}[u]\| \leq C\|B^{(r)}[r]\|$.

Mit $\tilde{u} := B^{(r)}[u]$ für $u \in D(B^{(r)})$ und wegen $D(\mathcal{M}^{(2,r)}) \subset D(B^{(r)})$ bzw. $D(T) = B^{(r)}(D(\mathcal{M}^{(2,r)}))$ folgt weiter Äquivalenz zu

$$\tilde{u} \in D(T^*T) \text{ und } T^*T[\tilde{u}] \Leftrightarrow \lambda \tilde{u} = B^{(r)}[r] \\ \text{ist eindeutig lösbar für jedes } r \in D(\mathcal{N}^{(2,r)}) \\ \text{und es gilt } \|\tilde{u}\| \leq C\|B^{(r)}[r]\|.$$

Wegen $B^{(r)}(D(\mathcal{N}^{(2,r)})) = L_2(x_0, \infty)$ ist dies äquivalent mit $\lambda \in \rho(T^*T)$, insgesamt gilt also $\rho((3.35)) = \rho(T^*T)$.

Mit Hilfe ähnlicher Umformungen (mit $r = 0$ und anderen Quantoren), folgt, daß die Eigenwerte von (3.35) gleich denen von T^*T sind (siehe auch Folgerung 5.1). Das wesentliche Spektrum von (3.35) ist folglich gleich dem wesentlichen Spektrum von T^*T . Bevor dieses bestimmt werden kann, werden noch einige Aussagen über den Operator T benötigt.

Wegen $D(T) = H_2(x_0, \infty)$ (siehe Lemma 3.2) und $T[u] = (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + (i\alpha R \Leftrightarrow \mu)u$ ist

$$D(T^*) = H_2^0(x_0, \infty) \text{ und } T^*[u] = (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + \overline{(i\alpha R \Leftrightarrow \mu)}u.$$

Nach [10, Theorem IX.9.6] ergibt sich

$$\sigma_e(T^*T) \\ = \{((\Leftrightarrow \xi^2 + \alpha^2) + \overline{(i\alpha R \Leftrightarrow \mu)})(\Leftrightarrow \xi^2 + \alpha^2) + (i\alpha R \Leftrightarrow \mu) : \xi \in \mathbb{R}\} \\ \subset [(\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu))^2, \infty).$$

In der letzten Zeile gilt Gleichheit, wenn nur Werte von μ mit $\text{real}(\mu) \leq \alpha^2$ betrachtet werden⁹. □

Lemma 3.2 Für den Operator T aus dem Beweis von Satz 3.7 mit

$$T[u] = (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})(B^{(r)})^{-1}[u] \text{ für } (B^{(r)})^{-1}[u] \in D(\mathcal{M}^{(2,r)})$$

gilt

$$D(T) = H_2(x_0, \infty).$$

Beweis: Wegen $D(B^{(r)}) \supset D(\mathcal{M}^{(2,r)})$ gilt $D(T) = B^{(r)}(D(\mathcal{M}^{(2,r)}))$. Ist nun $r \in D(T)$, so existiert also $u \in D(\mathcal{M}^{(2,r)})$ mit $B^{(r)}[u] = r$. Wegen $D(\mathcal{M}^{(2,r)}) \subset H_4(x_0, \infty)$ folgt $r \in H_2(x_0, \infty)$.

Ist umgekehrt $r \in H_2(x_0, \infty)$, so existiert ein $u \in H_2(x_0, \infty) \cap H_1^0(x_0, \infty)$ mit $(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u = r$ (da speziell $r \in L_2(x_0, \infty)$). Wegen $r \in H_2(x_0, \infty)$ folgt $u \in H_4(x_0, \infty) \cap H_1^0(x_0, \infty)$ und für

$$\tilde{u} := u \Leftrightarrow \frac{\langle u, \phi \rangle_{L_2(x_0, \infty)}}{\langle \phi, \phi \rangle_{L_2(x_0, \infty)}} \phi$$

(beachte $\varphi(u) = \langle u, \phi \rangle_{L_2(x_0, \infty)}$) gilt $\tilde{u} \in D(\mathcal{M}^{(2,r)})$, sowie $B^{(r)}[\tilde{u}] = r$. □

Nun müssen noch die Eigenwerte von (3.35) unterhalb des wesentlichen Spektrums bestimmt werden.

Satz 3.8 Im Intervall $[0, (\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu))^2)$ besitzt das Eigenwertproblem (3.35) nur den einfachen Eigenwert $\lambda = 0$.

Beweis: Man betrachtet die Formulierung des Problems in Operatorgestalt. Diese hat formal die Form¹⁰

$$(A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})^* (A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u] = \lambda B^{(r)*} B^{(r)}[u] + \kappa \phi, \quad (3.37)$$

⁹Für die Untersuchung von Stabilität bzw. Instabilität der Orr-Sommerfeld-Gleichung sind nur Werte von μ mit $\text{real}(\mu) < 0$ von Interesse. Im Fall $\text{real}(\mu) > \alpha^2$ ist die untere Schranke durch $|\alpha^2 + i\alpha R - \mu|^2$ zu ersetzen.

¹⁰Der Term $\kappa \phi$ entsteht wie bei der Bestimmung von w_1, w_2 in Abschnitt 3.3.2 wegen der Bedingung $\varphi(f) = 0$ für $f \in D(\mathcal{M}^{(2,r)})$.

d. h. es sind Lösungen $\lambda \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{C}$ und $u \in H_8(x_0, \infty)$ gesucht mit den Randbedingungen (wiederum durch partielle Integration mit Hilfe von Mathematica erhalten):

$$\begin{aligned}
(A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u](x_0) &= 0, \\
D(A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u](x_0) &= 0, \\
D^2(A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u](x_0) + \lambda B^{(r)}[u](x_0) &= 0, \\
D^3(A_0^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u](x_0) + \lambda DB^{(r)}[u](x_0) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$((\Leftrightarrow \xi^2 + \alpha^2) + \overline{i\alpha R \Leftrightarrow \mu})((\Leftrightarrow \xi^2 + \alpha^2) + i\alpha R \Leftrightarrow \mu) \Leftrightarrow \lambda (\Leftrightarrow \xi^2 + \alpha^2)^2$$

von (3.37) (mit $\kappa = 0$) erhält man $\pm\alpha$ als doppelte Nullstellen, sowie

$$\pm(\alpha^2 \Leftrightarrow \text{real}(\mu) \pm (\lambda \Leftrightarrow (\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu))^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

wobei für $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ mit $w^{\frac{1}{2}}$ die eindeutige Lösung v von $v^2 = w$, $\text{real}(v) > 0$ bezeichnet wird, und für $w \in \mathbb{R}_-$ mit $w^{\frac{1}{2}}$ diejenige Lösung v von $v^2 = w$ mit $\text{imag}(v) \geq 0$.

Für $0 \leq \lambda < (\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu))^2$ liegen nur $e^{-\alpha z}$, $ze^{-\alpha z}$, $e^{\rho_1 z}$, $e^{\rho_2 z}$ mit

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \Leftrightarrow(\alpha^2 \Leftrightarrow \text{real}(\mu) + (\lambda \Leftrightarrow (\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu))^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}, \\
\rho_2 &= \Leftrightarrow(\alpha^2 \Leftrightarrow \text{real}(\mu) \Leftrightarrow (\lambda \Leftrightarrow (\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu))^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

in $L_2(x_0, \infty)$. Die Bedingung $\varphi(u) = 0$ für $u \in D(\mathcal{M}^{(2,r)})$ wird als zusätzliche (Rand-)Bedingung eingeführt und eine Lösung $\tilde{\phi}$ der inhomogenen ($\kappa \neq 0$) Gleichung (3.37) zum Fundamentalsystem hinzugefügt. Wegen $(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)\phi = 0$ und damit $((\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 + i\alpha R(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2))\phi = 0$ muß $\tilde{\phi}$ (bis auf einen konstanten Faktor) der Gleichung $(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 \tilde{\phi} = \phi$ genügen.

Bildet man die Matrix $(R_i[y_j])_{i,j=1,\dots,5}$ mit R_i als obigen Randbedingungen (bzw. der Zusatzbedingung) und y_j als den Elementen des erweiterten Fundamentalsystems, so sind die gesuchten Eigenwerte λ gerade die Nullstellen der Determinante

$$d(\lambda) := \det((R_i[y_j])_{i,j=1,\dots,5}).$$

Ein kurzes, aber rechenintensives Mathematica-Notebook liefert

$$d(\lambda) = \frac{1}{2\alpha} \lambda (|\mu \Leftrightarrow i\alpha R|^2 \Leftrightarrow \lambda)^3 \exp(\Leftrightarrow x_0 (4\alpha \Leftrightarrow \rho_1 \Leftrightarrow \rho_2))$$

Im Intervall $[0, (\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu))^2]$ liegen also keine anderen Nullstellen von $d(\lambda)$ als $\lambda = 0$ und damit keine Eigenwerte von (3.35) außer dem einfachen Eigenwert $\lambda = 0$. \square

In Zusammenfassung der Resultate dieses Abschnitts erhält man:

Satz 3.9 Für die Rayleigh-Extremalwerte $\mu_i^{(2)}$ von (3.30) gilt:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(2)} &\geq 0 \\ \mu_{i+1}^{(2)} &\geq \mu_i^{(2,l)} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \text{ mit} \\ \mu_i^{(2,l)} &\leq \left(|\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu)| \Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \tilde{\varepsilon}_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Satz 3.6, (3.36) sowie den Sätzen 3.7 und 3.8. \square

3.3.5 Homotopie vom zweiten zum ersten Vergleichsproblem

Das zweite Vergleichsproblem (3.30) liefert untere Schranken für die Eigenwerte des Problem (3.29) (aus denen sich gemäß der Bemerkung aus Abschnitt 3.3.3 leicht untere Eigenwertschranken für das erste Vergleichsproblem angeben lassen). Die Eigenwerte der beiden Probleme liegen jedoch nicht geeignet abwechselnd verzahnt, so daß (3.30) nicht direkt als Vergleichsproblem verwendet werden kann, sondern die Verwendung der Homotopiemethode [13], [25] notwendig ist. Hierfür wird folgende Einordnung vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} D(\mathcal{M}_s^{(21)}) &:= D(\mathcal{M}^{(2)}), \\ \mathcal{M}_s^{(21)}(u, v) &:= \langle L_\mu^{(l)}[u|_{(0, x_0)}], L_\mu^{(l)}[v|_{(0, x_0)}] \rangle_{L_2(0, x_0)} \\ &\quad + \langle L_\mu^{(r)}[u|_{(x_0, \infty)}], L_\mu^{(r)}[v|_{(x_0, \infty)}] \rangle_{L_2(x_0, \infty)} \\ &\quad + s \sum_{i=0}^3 (u^{(i)}(x_0 \Leftrightarrow) \Leftrightarrow u^{(i)}(x_0 +)) \overline{(v^{(i)}(x_0 \Leftrightarrow) \Leftrightarrow v^{(i)}(x_0 +))} \\ &\quad + c_2 \mathcal{N}^{(2)}(u, v) \end{aligned}$$

mit $c_2 > 0$ als Spektralverschiebung, damit $\mathcal{M}_s^{(21)}$ positiv definit wird, $s \in [0, \infty)$ und $\mathcal{N}^{(2)}$ wie in (3.30) definiert. Betrachtet wird das vom Homotopieparameter s abhängige Problem

$$\mathcal{M}_s^{(21)}(u, v) = \lambda \mathcal{N}^{(2)}(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}_s^{(21)}) . \quad (3.39)$$

Für $s = 0$ ergibt sich das zweite Vergleichsproblem (3.30) und mit wachsendem s wachsen die Eigenwerte von (3.39) monoton, bleiben aber untere Schranken für die Eigenwerte des Zielproblems (3.29) dieser Homotopie, da $\mathcal{M}_s^{(21)}(u, v) = \mathcal{M}^{(1)}(u, v)$ für alle $u, v \in D(\mathcal{M}^{(1)}) \subset D(\mathcal{M}_s^{(21)})$. Zur konkreten Durchführung des Homotopieverfahrens wird im folgenden für beliebiges $s \in (0, \infty)$ eine Einordnung von (3.39) in das Lehmann-Goerisch Verfahren angegeben und somit die Bestimmung unterer Eigenwertschranken ermöglicht.

Man setzt

$$\begin{aligned} X_G &:= L_2(0, \infty) \times L_2(0, \infty) \times \mathbb{C}^4 , \\ \mathcal{B}_s \left(\left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{array} \right) \right) &:= \langle f_1|_{(0, x_0)}, g_1|_{(0, x_0)} \rangle_{L_2(0, x_0)} \\ &+ \langle f_1|_{(x_0, \infty)}, g_1|_{(x_0, \infty)} \rangle_{L_2(x_0, \infty)} + c_2 \langle f_2|_{(0, x_0)}, g_2|_{(0, x_0)} \rangle_{L_2(0, x_0)} \\ &\quad + c_2 \langle f_2|_{(x_0, \infty)}, g_2|_{(x_0, \infty)} \rangle_{L_2(x_0, \infty)} + s f_3^T \cdot \bar{g}_3 , \\ T : D(L_\mu^{(lr)}) &\rightarrow X_G , \quad T(u) := \begin{pmatrix} L_\mu^{(lr)}[u] \\ B^{(lr)}[u] \\ R[u] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{mit } R[u] := (u^{(i)}(x_0 \Leftrightarrow) \Leftrightarrow u^{(i)}(x_0 +))_{i=0, \dots, 3} ,$$

wobei die Operatoren $B^{(lr)}$ und $L_\mu^{(lr)}$ aus B und L_μ hervorgehen, indem in deren Argumenten keine Glattheit im Punkt x_0 gefordert wird. Für die exakten Definitionen siehe Anhang A.

Hat man linear unabhängige Ansatzfunktionen v_i ($i \in \mathbb{N}$) mit $v_i \in D(\mathcal{M}_s^{(21)})$ für das Verfahren von Rayleigh-Ritz gewählt, so muß für die Ansatzfunktionen w_i^*, w_i^0 gemäß (L2), (L3) gelten

$$\mathcal{B}_s \left(T(f), \left(\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \right) \right) = \mathcal{N}^{(2)}(f, v) \quad \text{für alle } f \in D(\mathcal{M}_s^{(21)})$$

mit

$$v = v_i \quad \text{für } w_i^* = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$v = 0 \quad \text{für } w_i^0 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} .$$

Für gegebenes $v \in D(\mathcal{M}_s^{(21)})$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_s \left(T(f), \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right) &= \mathcal{N}^{(2)}(f, v) \quad \text{für alle } f \in D(\mathcal{M}_s^{(21)}) \\ \Leftrightarrow \langle L_\mu^{(l)}[f|_{(0, x_0)}], w_1|_{(0, x_0)} \rangle_{L_2(0, x_0)} & \\ + \langle L_\mu^{(r)}[f|_{(x_0, \infty)}], w_1|_{(x_0, \infty)} \rangle_{L_2(x_0, \infty)} & \\ + c_2 \langle B^{(l)}[f|_{(0, x_0)}], w_2|_{(0, x_0)} \rangle_{L_2(0, x_0)} & \\ + c_2 \langle B^{(r)}[f|_{(x_0, \infty)}], w_2|_{(x_0, \infty)} \rangle_{L_2(x_0, \infty)} + sR(f)^T \cdot \overline{w_3} & \\ = \langle B^{(l)}[f|_{(0, x_0)}], B^{(l)}[v|_{(0, x_0)}] \rangle_{L_2(0, x_0)} & \\ + \langle B^{(r)}[f|_{(x_0, \infty)}], B^{(r)}[v|_{(x_0, \infty)}] \rangle_{L_2(x_0, \infty)} & \\ \text{für alle } f \in D(\mathcal{M}_s^{(21)}) . & \end{aligned}$$

Ist $v = v_i \in D(\mathcal{M}_s^{(21)})$ gegeben und $w_i^* = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in X_G$ gesucht, so setzt man

$$w_1 = 0, \quad w_3 = 0, \quad w_2 = \frac{1}{c_2} B^{(r)}[v] .$$

Im folgenden werden Funktionen $w_i^0 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ bestimmt, die obige Gleichung mit $v = 0$ erfüllen und auf $[0, x_0]$ bzw. $[x_0, \infty]$ hinreichend glatt sind. Dies erfordert eine sehr längliche Rechnung mit häufiger partieller Integration. Hierzu wurde ein Mathematica-Notebook entwickelt, mit dessen Hilfe sich der Schreib- und Rechenaufwand erheblich reduzieren läßt.

Man erhält die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
w_1(0) &= 0, \\
w_1'(0) &= 0, \\
w_1(x_0 \Leftrightarrow) &= w_1(x_0+) = \Leftrightarrow s w_{3,4}, \\
w_1'(x_0 \Leftrightarrow) &= w_1'(x_0+) = s w_{3,3}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
s w_{3,2} \Leftrightarrow 2\alpha^2 w_1(x_0 \Leftrightarrow) + \bar{\mu} w_1(x_0 \Leftrightarrow) \Leftrightarrow c_2 w_2(x_0 \Leftrightarrow) + w_1''(x_0 \Leftrightarrow) \\
+ i\alpha R w_1(x_0 \Leftrightarrow) V(x_0) &= 0, \\
\Leftrightarrow s w_{3,2} + 2\alpha^2 w_1(x_0+) \Leftrightarrow \bar{\mu} w_1(x_0+) + c_2 w_2(x_0+) \Leftrightarrow w_1''(x_0+) \\
\Leftrightarrow i\alpha R w_1(x_0+) V(x_0) &= 0, \\
s w_{3,1} + 2\alpha^2 w_1'(x_0 \Leftrightarrow) \Leftrightarrow \bar{\mu} w_1'(x_0 \Leftrightarrow) + c_2 w_2'(x_0 \Leftrightarrow) \Leftrightarrow w_1'''(x_0 \Leftrightarrow) \\
\Leftrightarrow i\alpha R w_1'(x_0 \Leftrightarrow) V(x_0) \Leftrightarrow i\alpha R w_1(x_0 \Leftrightarrow) V'(x_0) &= 0, \\
\Leftrightarrow s w_{3,1} \Leftrightarrow 2\alpha^2 w_1'(x_0+) + \bar{\mu} w_1'(x_0+) \Leftrightarrow c_2 w_2'(x_0+) + w_1'''(x_0+) \\
+ i\alpha R w_1'(x_0+) V(x_0) + i\alpha R w_1(x_0+) V'(x_0) &= 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

und folgende durch w_1, w_2 zu erfüllende Differentialgleichungen (mit formalen Differentialoperatoren dargestellt, d. h. ohne Beachten der Definitionsbereiche, sowie mit deren formalen Adjungierten):

$$\begin{aligned}
L_\mu^{(l)*} [w_1|_{(0, x_0)}] + c_2 B^{(l)*} [w_2|_{(0, x_0)}] &= 0, \\
L_\mu^{(r)*} [w_1|_{(x_0, \infty)}] + c_2 B^{(r)*} [w_2|_{(x_0, \infty)}] &= \kappa \phi|_{(x_0, \infty)},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

mit $\kappa \in \{0, 1\}$ (denn für $f \in D(\mathcal{M}_s^{(21)})$ gilt $\varphi(f) = \langle f, \phi \rangle_{L_2(0, \infty)} = 0$). Wählt man $w_1 \in D(L_\mu^{(r)})$ mit $w_1(x_0 \Leftrightarrow) = w_1(x_0+)$, $w_1'(x_0 \Leftrightarrow) = w_1'(x_0+)$ und bestimmt $w_2 \in L_2(0, \infty)$ mit

$$\begin{aligned}
L_\mu^{(l)*} [w_1|_{(0, x_0)}] + c_2 B^{(l)*} [w_2|_{(0, x_0)}] &= 0, \\
L_\mu^{(r)*} [w_1|_{(x_0, \infty)}] + c_2 B^{(r)*} [w_2|_{(x_0, \infty)}] &= 0,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

so kann man $w_3 = (w_{3,1}, w_{3,2}, w_{3,3}, w_{3,4})^T \in \mathbb{C}^4$ und die drei freien Integrationskonstanten aus der Lösung von (3.43) aus (3.40), (3.41) und

$\varphi(w_2) = 0$ bestimmen. (3.42) hat neben den so bestimmten Lösungen noch zwei weitere Lösungstypen, die man erhält, indem man $w_1 = 0$ setzt und $w_2|_{(x_0, \infty)}$ einmal aus $B^{(r)*}[w_2|_{(x_0, \infty)}] = \phi|_{(x_0, \infty)}$ bestimmt (eindeutige Lösbarkeit dieser Gleichung kann z.B. durch die zusätzliche Forderung $\varphi(w_2) = 0$ erzwungen werden) und einmal gleich $e^{-\alpha \cdot}$ setzt. w_3 und $w_2|_{(0, x_0)}$ bestimmt man wie zuvor aus (3.40), (3.41) und der ersten Gleichung in (3.42).

Bemerkung:

- a) Nach dem Übergang von (3.42) durch Festlegung von $\kappa = 0$ zu (3.43) wird zunächst die Forderung $\varphi(w_2) = 0$ gestellt, um (3.43) eindeutig lösen zu können. Mit Hilfe der beiden anschließend angegebenen speziellen Lösungen wird dann versucht, "möglichst viele" Lösungen von (3.42) zu erhalten. Bei numerischen Rechnungen zeigte sich, daß diese entscheidenden Einfluß auf die Qualität der erhaltenen Schranken haben.
- b) Für das erste Vergleichsproblem aus Abschnitt 3.3.3 ist keine Einordnung in Verfahren zur Bestimmung von Eigenwertschranken angegeben worden, da ein Problem aus der soeben beschriebenen Homotopie mit hinreichend großem Wert des Homotopieparameters s (zumindest in allen Beispielen aus Kapitel 4) direkt als Vergleichsproblem für das Ausgangsproblem aus Abschnitt 3.3.2 gewählt werden kann. Man beachte dabei die Transformation der Eigenwerte gemäß der Bemerkung im Anschluß an Satz 3.5.

3.3.6 Das dritte Vergleichsproblem

In den vorhergehenden Abschnitten wurde das Eigenwertproblem (3.15) zur Bestimmung der Konstanten K auf jeweils einfachere Eigenwertprobleme (3.29), (3.31), (3.32) zurückgeführt und entsprechende Einordnungen in die Homotopiemethode und das Verfahren von Lehmann-Goerisch bereitgestellt. Doch auch das verbliebene Eigenwertproblem (3.31) - ein Problem mit gewöhnlichen Differentialoperatoren auf einem kompakten Intervall - kann nicht explizit gelöst werden. In diesem Abschnitt wird daher ein weiteres (letztes) Vergleichsproblem entwickelt, das zwar auch

nicht in geschlossener Form gelöst werden kann, für das man aber hinreichend genaue Einschließungen der ersten n Eigenwerte (mit festem $n \in \mathbb{N}$) bestimmen kann. Dies ist hinreichend für ein Startproblem der Homotopiemethode.

Für die Eigenwerte des aus (3.31) bekannten Problems

$$\langle L_\mu^{(l)}[u], L_\mu^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)} = \lambda \langle B^{(l)}[u], B^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)} \quad \text{für alle } v \in D(L_\mu^{(l)})$$

sollen untere Schranken gefunden werden. Nach dem Vergleichssatz 3.4 kann man dies erreichen, indem die Sesquilinearform auf der linken Seite nach unten abgeschätzt wird:

Für $u \in D(L_\mu^{(l)}) = \{f \in H_4(0, x_0) : f(0) = f'(0) = 0\}$ gilt (in der folgenden Rechnung bezeichne $\|\cdot\|$ die übliche Norm in $L_2(0, x_0)$); für die Definitionen der Operatoren siehe Anhang A; für die Bestimmung deren Adjungierter siehe Anhang B):

$$\begin{aligned} \|L_\mu^{(l)}[u]\|^2 &= \|B_1^{(l)*} B^{(l)}[u] \Leftrightarrow \mu B^{(l)}[u] + i\alpha RV B^{(l)}[u] + i\alpha RV''u\|^2 \\ &\geq \|B_1^{(l)*} B^{(l)}[u] \Leftrightarrow \mu B^{(l)}[u]\|^2 + \|\alpha RV B^{(l)}[u]\|^2 + \|\alpha RV''u\|^2 \\ &\quad \Leftrightarrow 2 \|B_1^{(l)*} B^{(l)}[u] \Leftrightarrow \mu B^{(l)}[u]\| \|\alpha RV B^{(l)}[u]\| \\ &\quad \Leftrightarrow 2 \|B_1^{(l)*} B^{(l)}[u] \Leftrightarrow \mu B^{(l)}[u]\| \|\alpha RV''u\| \\ &\quad \Leftrightarrow 2 \|\alpha RV B^{(l)}[u]\| \|\alpha RV''u\| \\ &\geq \left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{12}} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{13}}\right) \|B_1^{(l)*} B^{(l)}[u] \Leftrightarrow \mu B^{(l)}[u]\|^2 \\ &\quad + \left(1 \Leftrightarrow \varepsilon_{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{23}}\right) \|\alpha RV B^{(l)}[u]\|^2 \\ &\quad + (1 \Leftrightarrow \varepsilon_{13} \Leftrightarrow \varepsilon_{23}) \|\alpha RV''u\|^2 \\ &\geq \left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{12}} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{13}}\right) \|B_1^{(l)*} B^{(l)}[u] \Leftrightarrow \mu B^{(l)}[u]\|^2 \\ &\quad + \left[\left(1 \Leftrightarrow \varepsilon_{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{23}}\right) (\alpha R)^2 \|V\|_\infty^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C_3} (1 \Leftrightarrow \varepsilon_{13} \Leftrightarrow \varepsilon_{23}) (\alpha R)^2 \|V''\|_\infty^2 \right] \|B^{(l)}[u]\|^2 \\ &\geq \left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{12}} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{13}}\right) \left[\left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \|B_1^{(l)*} B^{(l)}[u]\|^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\mu|^2 (1 \Leftrightarrow \varepsilon_4) \|B^{(l)}[u]\|^2 \Big] \\
& + \left[\left(1 \Leftrightarrow \varepsilon_{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{23}} \right) (\alpha R)^2 \|V\|_\infty^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{C_3} (1 \Leftrightarrow \varepsilon_{13} \Leftrightarrow \varepsilon_{23}) (\alpha R)^2 \|V''\|_\infty^2 \right] \|B^{(l)}[u]\|^2 .
\end{aligned}$$

Dabei wurde (der Reihenfolge der ersten Verwendung nach) benutzt:

- die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung,
- $ab \leq \frac{1}{2}(\varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ (mehrfach angewendet mit $\varepsilon = \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_4$),
- $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ seien so gewählt, daß $1 \Leftrightarrow \varepsilon_{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{23}} \leq 0$ und $1 \Leftrightarrow \varepsilon_{13} \Leftrightarrow \varepsilon_{23} \leq 0$,
- $\|B^{(l)}[u]\|^2 / \|u\|^2 \geq C_3$ für alle $u \in D(L_\mu^{(l)})$, (3.44)

(zur Bestimmung von C_3 siehe Abschnitt 3.3.7).

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
C_1 & := \left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{12}} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{13}} \right) \left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_4} \right) , \\
C_2 & := \left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{12}} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{13}} \right) |\mu|^2 (1 \Leftrightarrow \varepsilon_4) \\
& \quad + \left(1 \Leftrightarrow \varepsilon_{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{23}} \right) (\alpha R)^2 \|V\|_\infty^2 \\
& \quad + \frac{1}{C_3} (1 \Leftrightarrow \varepsilon_{13} \Leftrightarrow \varepsilon_{23}) (\alpha R)^2 \|V''\|_\infty^2
\end{aligned}$$

schreibt sich das letzte Glied der Ungleichungskette als

$$C_1 \|B_1^{(l)*} B^{(l)}[u]\|^2 + C_2 \|B^{(l)}[u]\|^2 .$$

Die Eigenwerte des Problems

$$\begin{aligned}
& C_1 \langle B_1^{(l)*} B^{(l)}[u], B_1^{(l)*} B^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)} + C_2 \langle B^{(l)}[u], B^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)} \\
& = \lambda \langle B^{(l)}[u], B^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)} \quad \text{für alle } v \in D(L_\mu^{(l)})
\end{aligned} \tag{3.45}$$

sind demnach jeweils untere Schranken für die Eigenwerte aus (3.31). Sind Schranken für Eigenwerte von (3.31) bis zur Größenordnung C gesucht, so kann die Anzahl der notwendigen Homotopieschritte (von (3.45) zu (3.31)) minimiert werden, indem die Größen $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ so gewählt werden, daß für einen Eigenwert λ_j von (3.45) mit möglichst kleinem(!) Index j gilt: $\lambda_j \geq C$. Bei den konkreten Rechnungen (siehe Kapitel 4) wurde hierfür eine heuristische Vorgehensweise verwendet.

Im nächsten Abschnitt werden eine Konstante C_3 mit der oben geforderten Eigenschaft und außerdem enge Einschließungen für die Eigenwerte von (3.45) mit Hilfe von Computeralgebra und Intervallarithmetik bestimmt. Im darauffolgenden Abschnitt wird eine Homotopie von (3.45) nach (3.31) konkret realisiert. Dabei werden andere Methoden als die bereits in Abschnitt 3.3.5 vorgestellten verwendet.

3.3.7 Lösung zweier Eigenwertprobleme mit Mathematica

Die im vorhergehenden Abschnitt eingeführte Konstante C_3 (3.44) kann als untere Schranke für den kleinsten Eigenwert des Problems

$$B^{(l)*} B^{(l)}[u] = \lambda u \quad \text{mit } u \in D(B^{(l)*} B^{(l)}) \quad (3.46)$$

bestimmt werden. Dabei ist¹¹

$$\begin{aligned} D(B^{(l)*} B^{(l)}) &= \{f \in H_4(0, x_0) : f(0) = f'(0) = 0, \\ &\quad (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)[f](x_0) = D(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)[f](x_0) = 0\} . \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Eigenwertaufgabe mit konstanten Koeffizienten auf einem kompakten Intervall und linearen, vom Eigenwertparameter unabhängigen Randbedingungen. Der Grad des Differentialoperators ist vier; man kann also wie folgt vorgehen:

- Bestimmung eines Fundamentalsystems y_1, \dots, y_4 der Differentialgleichung; dazu sind (λ -abhängig) die Nullstellen eines Polynoms vierten Grades zu bestimmen;
- Bilden der Matrix $M(\lambda) := (R_i(y_j))_{i,j=1,\dots,4}$, wobei die R_i die Randbedingungen repräsentieren;

¹¹Zur Äquivalenz von starker und schwacher Formulierung siehe Anhang C.

- Aufstellen der Funktion $d(\lambda) := \det(M(\lambda))$; die Nullstellen von d sind die Eigenwerte von (3.46).

Dies wird mit Hilfe eines Mathematica-Notebooks realisiert. Bis einschließlich des Aufstellens der Funktion $d(\lambda)$ ergeben sich keine Schwierigkeiten, die verifizierte Bestimmung bzw. Einschließung der kleinsten Nullstelle von d erfordert jedoch einigen Aufwand. Es werden analytische Methoden sowie Intervallrechnung (Intervall-Bisektion oder Intervall-Newton-Verfahren) angewendet, um die kleinste (positive) Nullstelle von d einzuschließen und zu zeigen, daß unterhalb dieser keine weiteren Nullstellen liegen. Letztendlich ergibt sich, daß $C_3 = 0.008125$ gewählt werden darf.

Das ebenfalls noch zu lösende Problem (3.45) läßt sich (nach Normierung $C_1 \rightarrow 1$, $C_2 \rightarrow 0$) in ähnlicher Form schreiben (beachte Anhang C):

$$B^{(l)*} B_1^{(l)} B_1^{(l)*} B^{(l)} [u] = \lambda B^{(l)*} B^{(l)} [u] , \quad (3.47)$$

wobei die Bestimmung der Randbedingungen mittels partieller Integration wie in Abschnitt 3.3.5 mit Hilfe vom Mathematica durchgeführt werden kann. Man erhält die z. T. von λ abhängigen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 , \\ u'(0) &= 0 , \\ D(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 [u](0) &= 0 , \\ D(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 [u](x_0) &= 0 , \\ (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 [u](0) &= 0 , \\ (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 [u](x_0) &= 0 , \\ D(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^3 [u](x_0) \Leftrightarrow \lambda D(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2) [u](x_0) &= 0 , \\ (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^3 [u](x_0) \Leftrightarrow \lambda (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2) [u](x_0) &= 0 . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die gesuchten Eigenwerte von (3.47), (3.48) lassen sich ebenfalls mit Hilfe eines Mathematica-Notebooks verifiziert bestimmen. Das Problem ist zwar achter Ordnung, es treten aber nur gerade Ableitungsordnungen auf, so daß ein Fundamentalsystem wie zuvor geschlossen angebbbar ist. Die Funktion $d(\lambda)$, deren Nullstellen die gesuchten Eigenwerte entsprechen,

ist problemlos aufstellbar. Die Ein- und Ausschließung der benötigten Nullstellen von $d(\lambda)$ erfolgt mit ähnlichen Methoden wie im vorhergehenden Notebook.

3.3.8 Homotopie vom dritten zum zweiten Vergleichsproblem

Bei der praktischen Durchführung der Homotopie vom dritten Vergleichsproblem (3.45) (des Problems mit konstanten Koeffizienten auf einem kompakten Intervall) zum zweiten Vergleichsproblem (3.31) (mit nicht-konstanten Koeffizienten auf demselben Intervall) zeigt es sich, daß die Eigenwerte von (3.45) weit unterhalb derer von (3.31) liegen. Dies macht eine enorm große Anzahl von Homotopieschritten - bis zu 100 - notwendig. In Abschnitt 3.4 wird beschrieben, wie der Rechenaufwand im Vergleich zum bisher üblichen Vorgehen bei der Durchführung der Homotopiemethode [4], [13], [25] erheblich reduziert werden kann. In diesem Abschnitt soll analog zu Abschnitt 3.3.5 eine Einordnung in die Homotopiemethode angegeben werden, d. h. es wird ein parameterabhängiges Eigenwertproblem aufgestellt, das (3.45) monoton wachsend in (3.31) überführt. Danach wird gezeigt, wie für jeden festen Wert des Homotopieparameters untere Eigenwertschranken für einzelne Eigenwerte mit Hilfe des Verfahrens von Temple für rechtsdefinite Probleme bestimmt werden können.

Mit $s \in [0, 1]$ als Homotopieparameter kann die Homotopie realisiert werden durch die Einordnung

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{M}_s^{(32)}) &:= D(L_\mu^{(l)}) = \{f \in H_4(0, x_0) : f(0) = f'(0) = 0\} , \\
\mathcal{M}_s^{(32)}(u, v) &:= (1 \Leftrightarrow s)[C_1 \langle B_1^{(l)*} B^{(l)}[u], B_1^{(l)*} B^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)} \\
&\quad + C_2 \langle B^{(l)}[u], B^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)} \\
&\quad + s \langle L_\mu^{(l)}[u], L_\mu^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)} , \\
D(\mathcal{N}^{(32)}) &:= D(B^{(l)}) = \{f \in H_2(0, x_0) : f(0) = f'(0) = 0\} , \\
\mathcal{N}^{(32)}(u, v) &:= \langle B^{(l)}[u], B^{(l)}[v] \rangle_{L_2(0, x_0)}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

und führt auf die Schar von Eigenwertaufgaben

$$\mathcal{M}_s^{(32)}(u, v) = \lambda \mathcal{N}^{(32)}(u, v) \text{ für alle } f \in D(\mathcal{M}_s^{(32)}) . \tag{3.50}$$

Sind linear unabhängige Ansatzfunktionen $v_i \in D(\mathcal{M}_s^{(32)})$ ($i \in \mathbb{N}$) für das Verfahren von Rayleigh-Ritz gewählt, so müssen zur Bestimmung unterer Eigenwertschranken gemäß der rechtsdefiniten Version des Temple-Verfahrens Funktionen $w_i \in D(\mathcal{N}^{(32)})$ gewählt werden mit

$$\mathcal{M}_s^{(32)}(f, v_i) = \mathcal{N}^{(32)}(f, w_i) \quad \text{für alle } f \in D(\mathcal{M}_s^{(32)}) . \quad (3.51)$$

Wie bereits mehrfach in der vorliegenden Arbeit wird auch hier partielle Integration mit Hilfe von Mathematica durchgeführt und man erhält (ohne Beachtung der Definitionsbereiche der Operatoren) neben der formalen Differentialgleichung

$$(1 \Leftrightarrow s)[C_1 B^{(l)*} B_1^{(l)} B_1^{(l)*} B^{(l)}[v] + C_2 B^{(l)*} B^{(l)}[v]] + s L_\mu^{(l)*} L_\mu^{(l)}[v] = B^{(l)*} B^{(l)}[w] \quad (3.52)$$

die Randbedingungen

$$\begin{aligned} C_1(1 \Leftrightarrow s)(B^2[v])'(0) + s(L_\mu[v])'(0) &= 0 , \\ \Leftrightarrow C_1(1 \Leftrightarrow s)(B^2[v])'(x_0) \Leftrightarrow s(L_\mu[v])'(x_0) &= 0 , \\ \Leftrightarrow C_1(1 \Leftrightarrow s)B^2[v](0) \Leftrightarrow sL_\mu[v](0) &= 0 , \\ C_1(1 \Leftrightarrow s)B^2[v](x_0) + sL_\mu[v](x_0) &= 0 , \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2C_1\alpha^2(1 \Leftrightarrow s)B^2[v](x_0) \Leftrightarrow C_2(1 \Leftrightarrow s)B[v](x_0) \\ + C_1(1 \Leftrightarrow s)(B^2[v])''(x_0) + s(\bar{\mu} \Leftrightarrow 2\alpha^2)L_\mu[v](x_0) \\ + s(L[v])''(x_0) + i\alpha R s L[v](x_0)V(x_0) &= \Leftrightarrow B[w](x_0) , \\ 2C_1\alpha^2(1 \Leftrightarrow s)(B^2[v])'(x_0) + C_2(1 \Leftrightarrow s)(B[v])'(x_0) \\ \Leftrightarrow C_1(1 \Leftrightarrow s)(B^2[v])'''(x_0) + s(2\alpha^2 \Leftrightarrow \bar{\mu})(L[v])'(x_0) \\ \Leftrightarrow s(L[v])'''(x_0) \Leftrightarrow i\alpha R s(L[v])'(x_0)V(x_0) \\ \Leftrightarrow i\alpha R s(L[v](x_0))V'(x_0) &= (B[w])'(x_0) . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Das bedeutet, daß die $v_i \in D(\mathcal{M}_s^{(32)})$ zusätzlich die Randbedingungen (3.53) erfüllen müssen, damit aus der Differentialgleichung (3.52) zusammen mit den Randbedingungen (3.54) und $w_i \in D(\mathcal{N}^{(32)})$, d. h. $w_i(0) = w_i'(0) = 0$, entsprechende Funktionen w_i konstruiert werden können. (3.52), (3.53), (3.54) sind hinreichend, jedoch nicht notwendig

für (3.51); daher sind die anschließend bestimmten Ansatzfunktionen v_i , w_i zulässig für das Verfahren von Temple. (3.51) könnte aber weitere Lösungen besitzen, bzw. andere v_i zulassen, die möglicherweise entscheidenden Einfluß auf die Qualität der erhaltenen Schranken haben. Ob dieser Effekt für die konkrete Aufgabe von Bedeutung ist, kann im Anschluß an (verifizierte) numerische Rechnungen festgestellt werden. Im konkreten Fall konnten mit den hier bestimmten Lösungen von (3.51) und den daraus resultierenden Ansatzfunktionen hinreichend gute Eigenwertschranken bestimmt werden (siehe Kapitel 4).

3.4 Ein neuer Algorithmus zur Durchführung der Homotopiemethode

Aufgrund der Lage der Eigenwerte sind bis zu 100 Einzelschritte bei der Durchführung der Homotopie von (3.45) zu (3.31) notwendig. Dies erfordert andere Algorithmen als bei kürzeren Homotopiewegen, da die Rechenzeiten sonst sehr lang werden und numerische Schwierigkeiten beim (verifizierten) Lösen von Matrixeigenwertproblemen der Dimension 100 auftreten.

Im folgenden wird versucht, die Menge der benötigten bzw. zu berechnenden Informationen für einen Homotopieschritt, d. h. zur Wahl des nächsten Wertes für den Homotopieparameter s , möglichst gering zu halten. In [4] mußten ebenfalls Homotopien mit großer Anzahl von Homotopieschritten durchgeführt werden. Der dort vorgeschlagene Algorithmus [4, S. 73ff] erfordert jedoch die verifizierte Behandlung von Matrixeigenwertproblemen "der vollen Dimension".

Für festen Parameter s_0 seien $\rho \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{IN}$ bekannt mit $\rho < \lambda_N^{(s_0)}$, wobei $\lambda_i^{(s)}$ die (der Größe nach geordneten) Eigenwerte von

$$\mathcal{M}_s(u, v) = \lambda \mathcal{N}_s(u, v) \quad \text{für alle } v \in D(\mathcal{M}_s) \quad (3.55)$$

bezeichnen. Außerdem gelte die allgemeine Voraussetzung

$$\lambda_i^{(s)} \leq \lambda_i^{(\tilde{s})} \quad \text{falls } s \leq \tilde{s}$$

für die Eigenwerte von (3.55). Gesucht ist ein möglichst¹² großes $s_1 > s_0$ mit

$$\lambda_{N-1}^{(s_1)} < \rho. \quad (3.56)$$

Dann kann ρ als Spektralparameter in (3.55) _{$s=s_1$} verwendet werden und mit Hilfe von Templeschen Quotienten (siehe Abschnitt 3.3.1) eine verifizierte untere Schranke für $\lambda_{N-1}^{(s_1)}$ bestimmt werden (denn es gilt $\lambda_{N-1}^{(s_1)} < \rho < \lambda_N^{(s_0)} \leq \lambda_N^{(s_1)}$). Ist s_1 bereits gleich 1, d. h. ist man bei dem Zielproblem der Homotopie angelangt, so hat man eine (garantierte!) untere Schranke für $\lambda_{N-1}^{(1)}$ erhalten und kann ebenfalls Schranken für alle kleineren Eigenwerte bestimmen.

Zur Bestimmung von s_1 mit (3.56) kann wie folgt vorgegangen werden¹³:

1. Wähle eine Anfangsschrittweite δ (etwa 1/Anzahl der erwarteten Homotopieschritte; oder eine aus vorangegangenen Homotopieschritten geeignet abgeleitete Schätzung für die zu erwartende neue Schrittweite); wähle $\delta_1 < \delta_2 < 1$ (etwa $\delta_1 = 0.9$, $\delta_2 = 0.95$); setze $s_1 := s_0$.
2. Wiederhole ($\tilde{s}_1 := s_1$; $s_1 := s_1 + \delta$; $\delta := 2\delta$) bis $\tilde{\Lambda}_{N-1}^{(s_1)} > \delta_1\rho$.
(Für $s \in [0, 1]$ bezeichne $\tilde{\Lambda}_i^{(s)}$ eine Näherung für $\Lambda_i^{(s)}$, den i -ten Eigenwert des nach Rayleigh-Ritz aus (3.55) _{s} erhaltenen Matrixeigenwertproblems $A^{(s)}x = \Lambda B^{(s)}x$. Dazu muß natürlich ein geeigneter Teilraum $D_p \subset D(\mathcal{M}_s)$ mit $p > N \Leftrightarrow 1$ gewählt werden. Zur (näherungsweise) Überprüfung der Ungleichung $\tilde{\Lambda}_{N-1}^{(s_1)} > \delta_1\rho$ kann Satz 3.10 und die daran anschließende Bemerkung verwendet werden.)
3. Falls ($\tilde{\Lambda}_{N-1}^{(s_1)} < \delta_2\rho$) weiter bei Schritt 6.
4. Setze $s_L := \tilde{s}_1$; $s_R := s_1$.
5. $s_1 := \frac{1}{2}(s_L + s_R)$;
falls ($\tilde{\Lambda}_{N-1}^{(s_1)} \geq \delta_2\rho$) setze $s_R := s_1$, weiter bei 5;

¹² $\lambda_{N-1}^{(s_1)}$ sollte dabei nicht allzu nahe bei ρ liegen, da die Methoden zur Bestimmung unterer Eigenwertschranken sonst schlechtere Schranken liefern können.

¹³Die Schritte 1 bis 5 können in Gleitpunktarithmetik durchgeführt werden. Nur die Ungleichung in Schritt 6 muß verifiziert überprüft werden.

sonst: falls $(\tilde{\Lambda}_{N-1}^{(s_1)} \leq \delta_1 \rho)$ setze $s_L := s_1$, weiter bei 5;

sonst: weiter bei 6.

6. Prüfe (verifiziert; siehe Satz 3.10 und die anschließende Bemerkung), ob

$$\Lambda_{N-1}^{(s_1)} < \rho .$$

Falls ja, so kann s_1 wegen $\lambda_{N-1}^{(s_1)} \leq \Lambda_{N-1}^{(s_1)}$ als neuer Wert des Homotopieparameters s verwendet werden. Falls nein, so waren die in 2, 3, 5 durchgeführten Näherungsrechnungen (s. u.) zu ungenau. Starte in diesem Fall den Algorithmus neu und wähle eine höhere Genauigkeit oder/und andere Ansatzräume D_p in 2.

Der Algorithmus in obiger Form geht von gut separierten Eigenwerten aus; er läßt sich jedoch ohne weiteres auf Probleme mit clustern von Eigenwerten erweitern (siehe [4], [25]).

Ziel des Algorithmus ist es, s_1 so zu bestimmen, daß $\delta_1 \rho < \lambda_{N-1}^{(s_1)} < \delta_2 \rho$ gilt. Die Einhaltung dieser Bedingung wird allerdings nicht garantiert. Mit Hilfe eines Bisektionsverfahrens wird s_1 zunächst so lange vergrößert bis $\delta_1 \rho < \tilde{\Lambda}_{N-1}^{(s_1)}$, wobei $\tilde{\Lambda}_{N-1}^{(s_1)}$ als gute Näherung für $\lambda_{N-1}^{(s_1)}$ angenommen wird. Danach wird s_1 wieder verkleinert, bis auch $\tilde{\Lambda}_{N-1}^{(s_1)} < \delta_2 \rho$ gilt. Im letzten Schritt wird schließlich verifiziert, ob ρ, s_1 und N die Bedingung (3.56) erfüllen¹⁴.

Die Effizienz des vorgeschlagenen Algorithmus hängt wesentlich von dem Aufwand für die näherungsweise oder verifizierte Überprüfung von Bedingungen der Art $\Lambda_i^{(s)} < \gamma$ ab. Zunächst müssen hierzu die Matrizen $A^{(s)}$ und $B^{(s)}$ aufgestellt werden. Oftmals können vom Parameter s unabhängige Basismatrizen bestimmt werden, aus denen sich $A^{(s)}$ und $B^{(s)}$ für gegebenes s leicht berechnen lassen. Diese Basismatrizen brauchen für die gesamte Homotopie nur einmal aufgestellt zu werden. Als nächstes muß für Matrixeigenwertprobleme der Art $Ax = \Lambda Bx$ (verifiziert) bestimmt werden, ob der i -te Eigenwert kleiner als ein vorgegebener Wert

¹⁴Auf die Verifikation von (3.56) kann auch verzichtet werden. Die Templeschen Quotienten liefern (bei geeigneter Wahl von v, w) in diesem Fall immer noch untere Schranken für $\lambda_{N-1}^{(s_1)}$. Es können dann jedoch Eigenwerte "übersprungen" werden. Dies führt dazu, daß (spätestens) die Bestimmung einer unteren Schranke für $\lambda_1^{(1)}$ scheitert.

γ ist, $\Lambda_i < \gamma$. Eine Möglichkeit, dies effizient zu überprüfen liefern der folgende Satz und die anschließende Bemerkung (siehe [2]).

Satz 3.10 [29] *Sind A, B hermitesche $q \times q$ -Matrizen, B positiv definit und $\gamma \in \mathbb{R}$, so ist die Anzahl der Eigenwerte von $Ax = \Lambda Bx$, die kleiner bzw. gleich bzw. größer γ sind gleich der Anzahl negativer bzw. verschwindender bzw. positiver Eigenwerte der Matrix $A \Leftrightarrow \gamma B$.*

Bemerkung:

- a) Sind die Matrizen \tilde{A} und \tilde{B} kongruent, d. h. gibt es eine Matrix C mit $\tilde{A} = C\tilde{B}C^H$, so haben \tilde{A} und \tilde{B} dieselbe Anzahl negativer bzw. verschwindender bzw. positiver Eigenwerte. \tilde{A}, \tilde{B} und C seien dabei quadratisch von derselben Größe.
- b) Der in [5] angegebene (exakte) LDL^T -Zerlegungsalgorithmus kann leicht auf hermitesche Matrizen (als LDL^H -Zerlegung) erweitert werden und läßt die Anzahl negativer bzw. verschwindender bzw. positiver Eigenwerte von $\tilde{A} = LDL^H$ einfach an den Elementen der Diagonalmatrix D ablesen.
- c) Zur Überprüfung von Bedingungen der Art $\Lambda_i^{(s)} < \gamma$ müssen also nicht sämtliche Eigenwerte bestimmt werden, es genügt, eine verifizierte LDL^H -Zerlegung durchzuführen. Dabei sollte die Parameterwahl im Homotopieverfahren so erfolgen, daß die Werte $\Lambda_i^{(s)}$ und γ nicht zu nahe beieinander liegen, um das Problem von Diagonalintervallen in der Matrix D , die die Null enthalten, zu vermeiden.
- d) Bedingungen der Art $\Lambda_i^{(s)} > \gamma$ können analog überprüft werden.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die verwendeten Konzepte zur konkreten Realisierung der bisher beschriebenen Verfahren dargestellt. Es werden auch weitere theoretische Überlegungen vorgestellt, die insbesondere einer einfacheren Realisierung und Verkürzung des Rechenaufwands dienen. Im zweiten Abschnitt werden die erhaltenen numerischen Ergebnisse aufgeführt und diskutiert.

4.1 Realisierung

Als Werkzeuge zur Realisierung der Verfahren auf dem Computer werden C-XSC [19] und Mathematica [33] verwendet. Das Computeralgebrasystem Mathematica erlaubt es, auf einfache Weise (Ansatz-)Funktionen zu definieren und die benötigten Operationen (Addition, Multiplikation, Differentiation, geschlossene Integration ...) anzuwenden. Eine Änderung des Typs der Ansatzfunktionen, wie es in der Testphase häufig vorkommt, erfordert keinen größeren Programmieraufwand, als die Anpassung der Definition der Ansatzfunktionen (sofern in Mathematica bekannte Standardfunktionen verwendet werden). Bei einer Realisierung in einer konventionellen Programmiersprache erfordert ein Wechsel des Typs der verwendeten Ansatzfunktionen erheblichen Programmieraufwand, da neue Funktionalität zum Umgang mit diesen bereitgestellt werden muß (etwa eine neue Funktionenklasse bei der Verwendung objektorientierter Sprachen, wie C++). Daher ist in den Programmteilen, in denen Ansatzfunktionen auftreten, Mathematica vor anderen Programmiersprachen

wie C/C++ bevorzugt worden. Es müssen jedoch Maßnahmen ergriffen werden, um die Rechenzeiten nicht zu stark anwachsen zu lassen. So wurde zur häufig auftretenden Berechnung der verschiedenen Skalarprodukte nicht die Standardfunktion `Integrate` verwendet, sondern eine neue Funktion `Integrat`, die zunächst die Linearität des Integrals ausnutzt

```
Integrat[b_Plus,c_] := Map[ Integrat[#, c] &, b];
Integrat[Times[a_,b_],c_] /; FreeQ[a,z] :=
  a Integrat[Times[b],c];
```

die Integrale wichtiger Basistypen gesondert behandelt

```
Integrat[z^n_?NumberQ], {z,0,c_] /; n>0 = c^(n+1)/(n+1);
Integrat[E^(b__ z), {z,c_,Infinity}] /;
  FreeQ[Times[b],z] := - (E^(b*c))/b;
```

und einmal berechnete Werte durch Regeln der Form

```
Integrat[E^(b__ z), {z,c_,Infinity}]/; FreeQ[Times[b],z] :=
  ( Integrat[E^(b z), {z,c,Infinity}] = - (E^(b*c))/b );
```

speichert und somit nicht mehrfach berechnen muß.

Mathematica beinhaltet außerdem eine Langzahl- und Intervallarithmetik. Dies erlaubt die verifizierte Bestimmung der auftretenden Größen mit vorgegebener Genauigkeit.

Da in Mathematica keine komplexen Intervalle vorhanden sind, wurden diese auf reelle Intervalle zurückgeführt und entsprechende Regeln für den Umgang mit den Größen des neuen Typs `ComplexInterval` definiert. Globale Regeln sind hierfür ungeeignet, da deren Anwendbarkeit zu häufig geprüft wird und damit die Rechenzeiten extrem anwachsen. Auch die Definition von explizit anzuwendenden Vereinfachungsregeln gestaltet sich schwierig, wie folgendes Beispiel zeigt:

```
$ math
Mathematica 3.0 for IBM RISC System/6000
Copyright 1988-97 Wolfram Research, Inc.
-- Motif graphics initialized --
```

```

In[1]:= t[n_]:=Sum[ComplexInterval[Random[]], {i,1,n}];

In[2]:= ComplexIntervalRules :=
  {c1_ComplexInterval+c2_ComplexInterval :>
   ComplexInterval[c1[[1]] + c2[[1]]] };

In[3]:= Timing[ t[12]//.ComplexIntervalRules; ]

Out[3]= {4.53 Second, Null}

In[4]:= Timing[ t[13]//.ComplexIntervalRules; ]

Out[4]= {14.01 Second, Null}

In[5]:= ComplexIntervalRules :=
  {ComplexInterval[c1_]+ComplexInterval[c2_] :>
   ComplexInterval[c1 + c2] };

In[6]:= Timing[ t[12]//.ComplexIntervalRules; ]

Out[6]= {0.01 Second, Null}

In[7]:= Timing[ t[13]//.ComplexIntervalRules; ]

Out[7]= {0. Second, Null}

In[8]:= Timing[ t[200]//.ComplexIntervalRules; ]

Out[8]= {0.21 Second, Null}

```

Trotz der Äquivalenz der soeben definierten Regeln sind die Rechenzeiten sehr unterschiedlich. Eine Erklärung dieses Effektes wurde leider von den Mathematica-Entwicklern mit dem Hinweis auf Interna abgelehnt. Letztendlich haben sich Regeln mit Patternmatching analog zum zweiten Beispiel bewährt, obwohl die Vereinfachung von Termen mit Da-

ten vom Typ **ComplexInterval** weiterhin einen Großteil der Rechenzeit beansprucht. Die Implementierung des Datentyps **ComplexInterval** im Kern von Mathematica würde zu einer erheblichen Verkürzung der Rechenzeiten führen.

Bei der Behandlung von Matrixeigenwertaufgaben in den Verfahren von Rayleigh-Ritz und Lehmann-Goerisch zeigt sich - wie zu erwarten - ein Nachteil in den Rechenzeiten der in Mathematica geschriebenen Programme im Vergleich zu C-XSC Programmen. Mit Hilfe der **MathLink** Schnittstelle, die die Einbindung von C/C++/C-XSC Routinen in Mathematica erlaubt, wird daher die Behandlung von Matrixeigenwertproblemen unter C-XSC realisiert. Da (noch) keine **MathLink** Routinen zum gesicherten Austausch von Intervalldaten mit C-XSC zur Verfügung stehen, wurde dies - um eventuelle Fehler zu vermeiden und Rigorosität der Ergebnisse zu gewährleisten - auf Näherungsrechnungen in (Langzahl-) Gleitkommaarithmetik beschränkt. Die verwendeten Verfahren sind so gewählt, daß aus bekannten (guten) Näherungen mit geringem zusätzlichem Aufwand Einschließungen bestimmt werden können. Hierzu werden die unter C-XSC bestimmten Näherungen per **MathLink** dem Mathematicaprogramm übergeben und dort die Rechnungen in Intervallararithmetik fortgeführt.

Im folgenden werden spezielle Aspekte einiger Teilprobleme erläutert.

Wie bereits in Abschnitt 3.1 dargestellt, werden Ansatzfunktionen in $[0, \infty)$ von der Form

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} z^2 P_i(z) & (z \in [0, x_0]) \\ e^{-\alpha z} Q_i(e^{-\alpha z}) & (z \in (x_0, \infty)) \end{cases}$$

gewählt, wobei die Polynome P_i und Q_i so bestimmt werden, daß die jeweiligen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllt sind. Die Ansatzfunktionen sind so gewählt, daß alle bei der Bestimmung von Normen und Skalarprodukten auftretenden Integrale in geschlossener Form von Mathematica (mit der zuvor beschriebenen Routine **Integrat**) gelöst werden können. Die Konstante $x_0 > 0$ wird identisch derjenigen (ebenfalls mit x_0 bezeichneten) aus Abschnitt 3.3.4 bzw. 2.4 gewählt.

Die Verfahren zur Bestimmung eines Näherungseigenpaares sind in Abschnitt 3.1 hinlänglich beschrieben. Die benötigten Dimensionen, um kleine Defekte zu erhalten, sind nicht allzu groß (siehe Abschnitt 4.2), so daß Standardverfahren zur Behandlung der hierbei auftretenden Matrix-Eigenwertprobleme verwendet werden können. Ist aus einer Rechnung mit kleinerer Dimension bereits eine Eigenwertnäherung bekannt, so bietet sich insbesondere Inverse Iteration an.

Für das dritte Vergleichsproblem bzw. die Homotopie vom dritten zum zweiten Vergleichsproblem (siehe Abschnitt 3.3.8) werden polynomiale Ansatzfunktionen in $[0, x_0]$ gewählt. Die Randbedingungen (3.53) hängen vom Homotopieparameter s ab. Um zu vermeiden, daß für jeden Wert von s alle Ansatzfunktionen und die Matrizen (d. h. die inneren Produkte) in den Verfahren von Rayleigh-Ritz und Temple neu bestimmt werden müssen, werden 8 neue Randbedingungen generiert, indem formal $s = 0$ und $s = 1$ in (3.53) gesetzt wird. Wählt man Ansatzfunktionen, die diese 8 Randbedingungen erfüllen und ebenso 8 zusätzliche Ansatzfunktionen $\tilde{\varphi}_j$ ($j = 1, \dots, 8$) mit $R_i(\tilde{\varphi}_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, 8$), wobei R_i die neuen Randbedingungen bezeichnen, so können aus diesen Ansatzfunktionen für jeden Wert von s auf einfache Weise Ansatzfunktionen erzeugt werden, die (3.53) erfüllen; ebenso können von s unabhängige Matrizen aufgestellt werden, aus denen sich die entsprechenden Matrizen für spezielle Werte von s einfach erzeugen lassen. Die Ansatzfunktionen $\tilde{\varphi}_j$ ($j = 1, \dots, 8$) werden als Linearkombination von Ansatzfunktionen bestimmt, die die geforderten Randbedingungen noch nicht erfüllen. Dazu muß die Inverse einer Matrix aus $\mathbf{C}^{8 \times 8}$ bestimmt bzw. eingeschlossen werden. Bezeichnet M eine Näherung für die Inverse von $A \in \mathbf{C}^{8 \times 8}$, so gilt mit einer Defektschranke $\delta \geq \|MA \Leftrightarrow I\|$ ($\|\cdot\|$ bezeichne die Norm $\|A\| := \max_{i,j} |a_{ij}|$):

$$\begin{aligned} \|M \Leftrightarrow A^{-1}\| &= \|(MA \Leftrightarrow I)A^{-1}\| \leq 8\delta \|A^{-1}\| \\ &\leq 8\delta(\|M\| + \|M \Leftrightarrow A^{-1}\|), \end{aligned}$$

also

$$\|M \Leftrightarrow A^{-1}\| < \frac{8\delta}{1 \Leftrightarrow 8\delta} \|M\|,$$

falls $8\delta < 1$.

Die zu lösenden Differentialgleichungen (3.52), (3.54) haben eine einfache Struktur (für gegebenes v) und können von Mathematica automatisch gelöst werden. Mit Hilfe geeigneter Regeln wird die Linearität bezüglich der linken Seite von (3.52) ausgenutzt, so daß die Differentialgleichung $(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 w = \psi$ nur für wenige verschiedene ψ gelöst werden muß. Auch hier werden einmal berechnete Ergebnisse in Regeln gespeichert, um die Rechenzeiten zu reduzieren.

Die Wahl der einzelnen Homotopieschritte wird nach dem in Abschnitt 3.4 vorgeschlagenen Algorithmus vorgenommen. Da bei Fortschreiten der Homotopie der Index des Eigenwertes, für den eine untere Schranke bestimmt werden muß, abnimmt, sind von Schritt zu Schritt weniger Ansatzfunktionen notwendig. Dies wird durch Verkleinern (abhängig von der Differenz der bestimmten oberen und unteren Schranken) der eingangs berechneten Matrizen bewerkstelligt und beschleunigt die Rechnungen erheblich.

Für die Homotopie vom zweiten zum ersten Vergleichsproblem (siehe Abschnitt 3.3.5) können die Ansatzfunktionen $v_i \in D(\mathcal{M}_s^{(21)})$ unabhängig vom Homotopieparameter s gewählt werden. Bei den zugehörigen w_i^* bzw. w_i^0 ist nur die dritte Komponente von s abhängig (3.40), (3.41). Auch hier werden allgemeine, von s unabhängige Funktionen \tilde{w}_i^* , \tilde{w}_i^0 und entsprechende innere Produkte einmal berechnet, aus denen sich die s -abhängigen Größen einfach bestimmen lassen. Da in jedem Homotopieschritt nur eine einzige untere Eigenwertschranke verifiziert bestimmt werden muß, wird der größte Teil der Rechnungen in Gleitpunktarithmetik durchgeführt und am Ende (unter Verwendung der bestimmten Näherungen) ein Lehmann-Goerisch-Schritt der Dimension eins in Intervallarithmetik.

Zuletzt ist noch das Ausgangsproblem zur Bestimmung der Konstanten K (Abschnitt 3.3.2) zu behandeln. Dieses Problem ist nicht parameterabhängig und kann direkt angegangen werden. Wie zuvor wird zunächst ein großer Teil der Rechnungen in Gleitpunktarithmetik durchgeführt und anschließend ein möglichst kleiner Teil in Intervallarithmetik.

In Abschnitt 3.2 ist dargestellt, wie Einschließungen für das Blasiusprofil in $[0, x_0]$ bzw. $[0, \infty)$ bestimmt werden können. Zu einer polynomialen

Approximation des Blasiusprofils (und seiner ersten beiden Ableitungen) konnten Fehlerschranken der Größenordnung 10^{-15} angegeben werden. Versucht man, eine hieraus erhaltene, intervallbehaftete Einschließung des Blasiusprofils im weiteren Verlauf der Rechnungen zu verwenden, so blähen sich die Intervalleinschließungen der zu berechnenden Größen schnell auf und man erhält keine brauchbaren Ergebnisse. Der folgende Satz ermöglicht es, sämtliche Rechnungen zur Bestimmung der Konstanten K mit einer festen Näherung für das Blasiusprofil (bzw. einer Punkteinschließung hierfür) durchzuführen und anschließend die bekannte Fehlerschranke der Näherung zu verwenden, um die Konstante K für das exakte Blasiusprofil zu erhalten. Er ermöglicht es auch, die Konstante K für geänderte (verbesserte) Werte von ω, μ direkt abzuschätzen.

Satz 4.1 *Es sei $\tilde{\mu} \in \mathbb{C}$, $\tilde{\omega} \in X$, $\tilde{V}, \tilde{V}' \in C[0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$ und*

$$D(\tilde{\mathcal{L}}) := D(\mathcal{L}), \quad \tilde{\mathcal{L}} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right] := \tilde{A}[u] \Leftrightarrow \tilde{\mu} B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\tilde{\omega}]$$

mit

$$D(\tilde{A}) := D(A), \quad \tilde{A}[u] := (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 u + i\alpha R[\tilde{V}(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + \tilde{V}'u].$$

Bezeichnen λ_i bzw. $\tilde{\lambda}_i$ die Rayleigh-Extremalwerte von

$$\langle \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right], \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \right] \rangle_Y = \lambda \langle \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \rangle_{\hat{X}} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$$

bzw.

$$\langle \tilde{\mathcal{L}} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right], \tilde{\mathcal{L}} \left[\begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \right] \rangle_Y = \tilde{\lambda} \langle \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \rangle_{\hat{X}} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix} \in D(\tilde{\mathcal{L}}),$$

so gilt für $i \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{\lambda_i} \geq \sqrt{\tilde{\lambda}_i} \Leftrightarrow \delta_1$$

mit

$$\delta_1 := \left(\left(\alpha R \|V \Leftrightarrow \tilde{V}\|_\infty + |\tilde{\mu} \Leftrightarrow \mu| + \frac{R}{\alpha} \|V'' \Leftrightarrow \tilde{V}'\|_\infty \right)^2 + |\gamma|^2 \|\omega \Leftrightarrow \tilde{\omega}\|_X^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Für $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_i} &= \inf_{\substack{U \subset D(\mathcal{L}) \\ \dim U = i}} \sup_{\substack{\binom{u}{\sigma} \in U \\ \binom{u}{\sigma} \neq \binom{0}{\sigma}}} \frac{\|\mathcal{L}[\binom{u}{\sigma}]\|_Y}{\|\binom{u}{\sigma}\|_{\hat{X}}} \\
&\geq \inf_{\substack{U \subset D(\mathcal{L}) \\ \dim U = i}} \sup_{\substack{\binom{u}{\sigma} \in U \\ \binom{u}{\sigma} \neq \binom{0}{\sigma}}} \frac{\|\tilde{\mathcal{L}}[\binom{u}{\sigma}]\|_Y \Leftrightarrow \|(\mathcal{L} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}})[\binom{u}{\sigma}]\|_Y}{\|\binom{u}{\sigma}\|_{\hat{X}}} \\
&\geq \inf_{\substack{U \subset D(\mathcal{L}) \\ \dim U = i}} \sup_{\substack{\binom{u}{\sigma} \in U \\ \binom{u}{\sigma} \neq \binom{0}{\sigma}}} \frac{\|\tilde{\mathcal{L}}[\binom{u}{\sigma}]\|_Y}{\|\binom{u}{\sigma}\|_{\hat{X}}} \Leftrightarrow \|\mathcal{L} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}\|_{\hat{X}, Y} \\
&= \sqrt{\tilde{\lambda}_i} \Leftrightarrow \|\mathcal{L} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}\|_{\hat{X}, Y}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für $\binom{u}{\sigma} \in D(\mathcal{L}) = D(\tilde{\mathcal{L}})$

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{L} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}})[\binom{u}{\sigma}]\|_Y \\
&= \|i\alpha R(V \Leftrightarrow \tilde{V})(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + i\alpha R(V'' \Leftrightarrow \tilde{V})u \\
&\quad \Leftrightarrow \mu B[u] \Leftrightarrow \gamma \sigma B[\omega] + \tilde{\mu} B[u] + \gamma \sigma B[\tilde{\omega}]\|_Y \\
&\leq (\alpha R \|V \Leftrightarrow \tilde{V}\|_\infty + |\mu \Leftrightarrow \tilde{\mu}|) \|u\|_X \\
&\quad + \alpha R \|V'' \Leftrightarrow \tilde{V}\|_\infty \|u\|_Y + |\gamma| |\sigma| \|\omega \Leftrightarrow \tilde{\omega}\|_X \\
&\leq (\alpha R \|V \Leftrightarrow \tilde{V}\|_\infty + |\mu \Leftrightarrow \tilde{\mu}| + \frac{R}{\alpha} \|V'' \Leftrightarrow \tilde{V}\|_\infty) \|u\|_X \\
&\quad + |\gamma| \|\omega \Leftrightarrow \tilde{\omega}\|_X |\sigma| \\
&\leq \delta_1 \|\binom{u}{\sigma}\|_{\hat{X}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Wie sich im zweiten Abschnitt dieses Kapitels zeigen wird, ist es zum Vergleich der Ergebnisse mit der Literatur notwendig, irrationale Werte für α und R zu wählen; speziell $\alpha = \sqrt{2}\alpha_r$, $R = \sqrt{2}R_r$ mit rationalen α_r, R_r . Um die Definition von weiteren Integrationsregeln mit allgemeineren Typen von Exponenten als “`Rational[_,_] z`” in Mathematica zu vermeiden, werden die Rechnungen zunächst mit rationalen Approximationen für α und R durchgeführt und mit dem folgenden Satz Schranken für die Ergebnisse mit exaktem α und R bestimmt. Der Beweis benutzt dieselben Methoden wie der von Satz 4.1.

Satz 4.2 *Es sei $\tilde{\mathcal{L}} : D(\tilde{\mathcal{L}}) = D(\mathcal{L}) \rightarrow Y$ definiert wie der Operator \mathcal{L} , jedoch mit α ersetzt durch $\tilde{\alpha}$ und R ersetzt durch \tilde{R} . Dann gilt für die analog Satz 4.1 definierten Rayleigh-Extremalwerte λ_i bzw. $\tilde{\lambda}_i$ (der zu \mathcal{L} bzw. $\tilde{\mathcal{L}}$ gehörigen Probleme)*

$$\sqrt{\lambda_i} \geq \sqrt{\tilde{\lambda}_i} \Leftrightarrow \delta_2$$

mit

$$\delta_2 := \left[\left(2\Delta_2 + \Delta_1 \|V\|_\infty + \frac{1}{\alpha^2} (\Delta_4 + |\mu| \Delta_2 + \Delta_1 \|V''\|_\infty + \Delta_3) \right)^2 + (|\gamma| \Delta_2 \|\omega\|_Y)^2 \right]^{1/2},$$

wobei $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 \in \mathbb{R}$ so gewählt seien, daß

$$\begin{aligned} |\alpha R \Leftrightarrow \tilde{\alpha} \tilde{R}| &\leq \Delta_1, & |\alpha^3 R \Leftrightarrow \tilde{\alpha}^3 \tilde{R}| &\leq \Delta_3, \\ |\alpha^2 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}^2| &\leq \Delta_2, & |\alpha^4 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}^4| &\leq \Delta_4. \end{aligned}$$

Eine zu Satz 4.1 analoge Aussage (mit demselben δ_1 , jedoch mit $\omega = \tilde{\omega} = 0$) gilt für den Operator L_μ und eine Störung \tilde{L}_μ hiervon (an Stelle von \mathcal{L} und $\tilde{\mathcal{L}}$). Dies erlaubt, sämtliche Homotopien (vom dritten bis zum ersten Vergleichsproblem) mit einem Näherungseigenwert μ der Orr-Sommerfeld-Gleichung und einer Näherung V für das Blasiusprofil durchzuführen und daraus Schranken für die Eigenwerte des ersten Vergleichsproblems mit anderem μ und V zu bestimmen. Dabei wird zunächst eine Näherung für V mit einfacherer Darstellung (Polynomgrad 10; später bis zu 60) gewählt, um den Rechenaufwand im zweiten und dritten Vergleichsproblem zu verringern. Danach können für das Problem zur Bestimmung der Konstanten K verbesserte Näherungen μ und V gewählt werden, und schließlich mit Satz 4.1 Schranken für K mit exaktem Blasiusprofil angegeben werden. Mit den so erhaltenen Ergebnissen muß geprüft werden, ob die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt sind, um entsprechende Existenz-, Eindeutigkeits- und Einschließungsaussagen für die Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil zu erhalten. Liegt der bestimmte Näherungseigenwert μ weit genug in der linken Halbebene und ist der Einschließungskreis nach Satz 2.1 klein genug, so ist die Existenz

eines Eigenwertes in der linken Halbebene - und damit die Instabilität der Grundströmung mit Blasiusprofil - bewiesen.

Analog zu den Abschätzungen der Eigenwerte für Störungen (durch geänderte Werte von $\alpha, R, \mu, \omega, V, V''$) der Operatoren \mathcal{L} bzw. L in den Sätzen 4.1 und 4.2 werden auch Abschätzungen für die Defektschranke δ mit $\delta \geq \|A[\omega] \Leftrightarrow \mu B[\omega]\|_Y = \|L_\mu[\omega]\|_Y$ benötigt¹. Für eine Störung \tilde{L}_μ von L_μ gilt

$$\|L_\mu[\omega]\|_Y \leq \|\tilde{L}_\mu[\omega]\|_Y + \|\tilde{L}_\mu \Leftrightarrow L_\mu\|_{X,Y} \|\omega\|_X . \quad (4.1)$$

Schranken für $\|\tilde{L}_\mu \Leftrightarrow L_\mu\|_{X,Y}$ sind den Beweisen der Sätze 4.1 und 4.2 zu entnehmen. Damit können sämtliche Rechnungen zunächst mit Näherungen für α, R, V, V'' durchgeführt werden und aus den so erhaltenen Ergebnissen Schranken für die gesuchten Größen (mit exakten Parameterwerten) gewonnen werden. Wie bereits erwähnt, können aufgrund der getroffenen Wahl von Ansatzfunktionen und Näherung für das Blasiusprofil sämtliche Integrale und Normen in geschlossener Form bestimmt werden. Daher ist insbesondere auch zur Bestimmung der Defektschranke δ nach (4.1) keine numerische Quadratur notwendig.

Auch bei der Realisierung von Abschnitt 2.2, der lokalen Eindeutigkeit von Eigenwerten, muß berücksichtigt werden, daß das exakte Blasiusprofil nicht zur Verfügung steht und ferner $\tilde{\lambda}$ nicht fest ist, sondern aus einer Umgebung von μ stammt. Es bezeichnen λ_1, λ_2 die ersten beiden Eigenwerte von (2.15). Nach Voraussetzung gilt $\lambda_1 = c_4$ und für λ_2 gilt

$$\left| \sqrt{\lambda_2} \Leftrightarrow \sqrt{\tilde{\lambda}_2} \right| \leq \|L_{\tilde{\lambda}} \Leftrightarrow \tilde{L}_\mu\|_{X,Y} ,$$

wobei (gemäß Satz 4.1)

$$\|L_{\tilde{\lambda}} \Leftrightarrow \tilde{L}_\mu\|_{X,Y} \leq \alpha R \|V \Leftrightarrow \tilde{V}\|_\infty + |\mu \Leftrightarrow \tilde{\lambda}| + \frac{R}{\alpha} \|V'' \Leftrightarrow \tilde{V}''\|_\infty .$$

Dabei bezeichne \tilde{L}_μ den aus (2.15) bekannten Operator, jedoch mit μ statt $\tilde{\lambda}$ und mit einer Näherung \tilde{V} für das exakte Blasiusprofil V , und

¹Der einfacheren Darstellung halber wird hier in der Bezeichnungsweise zwischen dem bereits eingeführten Operator L_μ und seiner Erweiterung \widehat{L}_μ mit $D(\widehat{L}_\mu) = D(A)$, $\widehat{L}_\mu[u] := A[u] - \mu B[u]$ nicht unterschieden.

$\tilde{\lambda}_2$ den zweiten Eigenwert von (2.15) mit $L_{\tilde{\lambda}}$ ersetzt durch \tilde{L}_μ . Damit ist eine obere Schranke für ε in Satz 2.3 bestimmbar und dieser Satz kann angewendet werden, um die lokale Eindeutigkeit von Eigenwerten zu beweisen.

Die Forderungen $\|\omega\|_X = 1$ und $\varphi(\omega) > 0$ werden bereits bei der Bestimmung der Näherungslösung (ω, μ) berücksichtigt. Außerdem wird zur Anwendung von Satz 2.3 eine obere Schranke für die Operatornorm $\|\varphi\|_{X, \mathfrak{F}}$ von φ benötigt:

$$\|\varphi\|_{X, \mathfrak{F}} = \sup \left\{ \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|_X} : u \in X \setminus \{0\} \right\} ;$$

wegen

$$\frac{|\varphi(u)|}{\|u\|_X} = \frac{1}{\|B[u]\|_Y} \int_{x_0}^{\infty} u(z) e^{-\alpha z} dz \leq \frac{\|u\|_Y \left(\int_{x_0}^{\infty} e^{-2\alpha z} dz \right)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2 \|u\|_Y}$$

ist

$$\|\varphi\|_{X, \mathfrak{F}} \leq \frac{1}{\alpha^2} \left(\int_{x_0}^{\infty} e^{-2\alpha z} dz \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha^{5/2}} e^{-\alpha x_0} . \quad (4.2)$$

In der Literatur finden sich viele Rechnungen zur Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil [12], [14], [15], [16]. Besonders interessant erscheint ein Vergleich mit einer in [14] auf 8 Nachkommastellen angegebenen Näherung für einen Eigenwert in der linken Halbebene für $\alpha = 0.179$, $R = 580$:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \cdot 0.179 \cdot 580 \cdot (\Leftrightarrow 0.00795972 + i 0.36412286) \\ &= \Leftrightarrow 1.6527562608 + i 75.6064706504 . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dieser Wert wird in [12] als exakte Vergleichslösung zur Validierung von Konvergenzresultaten verwendet.

Da im Vergleich zur hier verwendeten Skalierung der Blasiusgleichung

$$W''' + WW'' = 0, \quad W(0) = W'(0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} W'(z) = 1 \quad (4.4)$$

in der Literatur (so auch in [12], [14]) häufig

$$2W''' + WW'' = 0, \quad W(0) = W'(0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} W'(z) = 1 \quad (4.5)$$

verwendet wird, müssen die Blasiusgleichung (4.5) und damit auch die Orr-Sommerfeld-Gleichung transformiert werden (ist W Lösung von (4.4), so ist $\widetilde{W}(x) := \sqrt{2} W(\frac{x}{\sqrt{2}})$ Lösung von (4.5)). Damit ändern sich auch α, R und der Eigenwertparameter λ . Die Werte von α und R aus der Literatur sind mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren, derjenige von λ mit 2 (siehe auch [7]). In (4.3) ist λ bereits entsprechend transformiert.

4.2 Berechnete Ergebnisse

Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, bestimmt man Näherungen V des Blasiusprofils (Polynomgrad N_V) mit folgenden Fehlerschranken (bezüglich $\|\cdot\|_\infty$) für V, V' bzw. V'' , wobei V, V' und V'' rechts von x_0 konstant² (durch 1 bzw. 0) fortgesetzt werden:

N_V	Fehler in V	Fehler in V'	Fehler in V''	x_0
10	$2.04 \cdot 10^{-3}$	$6.69 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-3}$	6.43
20	$4.15 \cdot 10^{-6}$	$7.18 \cdot 10^{-7}$	$2.40 \cdot 10^{-6}$	6.43
40	$7.32 \cdot 10^{-11}$	$5.44 \cdot 10^{-11}$	$7.03 \cdot 10^{-10}$	10.29
60	$8.57 \cdot 10^{-15}$	$3.64 \cdot 10^{-15}$	$7.99 \cdot 10^{-15}$	10.29

Zu V mit $N_V = 20$ und $x_0 = 6.43$ ergeben sich für $\alpha = \sqrt{2} \cdot 0.179$ und $R = \sqrt{2} \cdot 580$ mit N_F Ansatzfunktionen folgende Näherungseigenpaare (ω, μ) und Defektschranken δ für die Orr-Sommerfeld-Gleichung:

N_F	μ	x_0	$\delta \leq$
54	$-1.652725394 + 75.60618402 \text{ I}$	6.43	0.7097023
74	$-1.652772126 + 75.60630560 \text{ I}$	6.43	0.0193871

²Auch diese Konstante x_0 wird identisch derjenigen aus der Definition der Ansatzfunktionen und derjenigen aus Abschnitt 3.3.4 gewählt. Dies ist jedoch nicht zwingend erforderlich, sondern dient der Vereinfachung der Datenstruktur der Ansatzfunktionen.

Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, wird für die Rechnungen vom dritten bis zum ersten Vergleichsproblem V zu $N_V = 10$ und μ zu $N_F = 74$ mit $x_0 = 6.43$ verwendet. Zunächst werden rationale Näherungen (mit Fehlerschranken kleiner 10^{-15}) für $\alpha = \sqrt{2} \cdot 0.179$ und $R = \sqrt{2} \cdot 580$ verwendet.

Die kleinsten positiven Eigenwerte des dritten Vergleichsproblems sind $\lambda_{84} \in [37126, 37128]$ und $\lambda_{85} \in [95942, 95943]$, so daß die Homotopie vom dritten zum zweiten Vergleichsproblem knapp 85 Homotopieschritte erfordert. Der beschriebene Algorithmus liefert folgende Werte s_i des Homotopieparameters als Stufen und zugehörige untere Schranken für $\lambda_j^{(s_i)}$:

i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$	i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$
0	0.0188	84	86580	10	0.2481	74	61159
1	0.0403	83	83363	11	0.2722	73	59132
2	0.0621	82	80221	12	0.2967	72	57714
3	0.0843	81	77188	13	0.3209	71	55463
4	0.1068	80	74310	14	0.3454	70	54024
5	0.1296	79	71643	15	0.3695	69	51990
6	0.1528	78	69198	16	0.3933	68	49489
7	0.1763	77	67067	17	0.4175	67	48006
8	0.2001	76	65239	18	0.4414	66	46239
9	0.2243	75	63779	19	0.4650	65	44287

i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$	i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$
20	0.4882	64	42211	30	0.7021	54	28519
21	0.5111	63	40110	31	0.7207	53	27431
22	0.5345	62	39258	32	0.7390	52	26834
23	0.5567	61	37349	33	0.7564	51	25984
24	0.5787	60	35609	34	0.7730	50	24903
25	0.6004	59	34095	35	0.7892	49	24338
26	0.6218	58	32845	36	0.8046	48	23629
27	0.6428	57	31898	37	0.8192	47	22789
28	0.6629	56	30358	38	0.8330	46	21830
29	0.6827	55	29221	39	0.8460	45	20752

i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$	i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$
40	0.8586	44	20090	50	0.9475	34	13682
41	0.8704	43	19345	51	0.9532	33	13224
42	0.8815	42	18510	52	0.9582	32	12591
43	0.8921	41	18008	53	0.9628	31	12110
44	0.9019	40	17438	54	0.9671	30	11763
45	0.9111	39	16772	55	0.9711	29	11501
46	0.9194	38	15992	56	0.9744	28	11057
47	0.9273	37	15398	57	0.9775	27	10829
48	0.9347	36	14962	58	0.9801	26	10382
49	0.9415	35	14401	59	0.9823	25	10086

i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$	i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$
60	0.9828	24	9579	70	0.9926	14	9020
61	0.9843	23	9487	71	0.9927	13	8973
62	0.9861	22	9424	72	0.9928	12	8907
63	0.9877	21	9360	73	0.9935	11	8808
64	0.9891	20	9309	74	0.9946	10	8722
65	0.9902	19	9262	75	0.9965	9	8648
66	0.9911	18	9221	76	0.9983	8	8592
67	0.9917	17	9170	77	1.0000	7	7781
68	0.9922	16	9123	78	1.0000	6	5473
69	0.9925	15	9070	79	1.0000	5	3169

Dabei wurden für $s_0 = 0$ zunächst 150 Ansatzfunktionen verwendet, für $s_{56} = 1$ dagegen nur noch 40.

Für die entscheidende Größe aus Satz 3.9 gilt:

$$\left(|\alpha R \Leftrightarrow \text{imag}(\mu)| \Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \tilde{\varepsilon}_2 \right)^2 \geq 17100.$$

Die Homotopie vom zweiten zum ersten Vergleichsproblem (bzw. zu Problem (3.29); siehe Abschnitt 3.3.5) startet bei $s_0 = 0$ mit $\lambda_6^{(s_0)} \geq 3100$

(man beachte die Verschiebung des Index um 1). Danach wählt man folgende s_i und erhält untere Schranken für $\lambda_j^{(s_i)}$:

i	s_i	j	$\lambda_j^{(s_i)} \geq$
0	0	6	3100
1	0.75	5	2850
2	80	4	2518
3	10^6	3	1823
3	10^6	2	595
3	10^6	1	21

Für das Verfahren von Rayleigh-Ritz wurden 60 Ansatzfunktionen verwendet, für das Lehmann-Goerisch-Verfahren 50 homogene Ansatzfunktionen w_i^0 . Die Anzahl der Ansatzfunktionen ist so gewählt, daß mit möglichst geringem Aufwand brauchbare Eigenwertschranken für das Problem zur Bestimmung der Konstanten K erhalten werden. Es ist nicht das Ziel, möglichst gute, d. h. enge Einschließungen für die Eigenwerte der Vergleichsprobleme zu erhalten. Daher erfolgt hier kein Vergleich von oberen und unteren Eigenwertschranken.

Nach der Bemerkung im Anschluß an Satz 3.5 ergibt sich durch Grenzübergang $c_1 \rightarrow 0+$ die grobe untere Eigenwertschranke für den dritten Eigenwert des Zielproblems aus Abschnitt 3.3.2:

$$\lambda_3 \geq 595 .$$

Diese Schranke gilt für die bisher verwendete Approximation V des Blasiusprofils zu $N_V = 10$. Wird stattdessen V zu $N_V = 20$ verwendet, so erhält man nach Satz 4.1 und der anschließenden Bemerkung

$$\lambda_3 \geq 352 .$$

Mit 50 Ansatzfunktionen für Rayleigh-Ritz und 40 für Lehmann-Goerisch erhält man als untere Schranke für den ersten Eigenwert des Zielproblems

$$\lambda_1 \geq 19.8450 .$$

Dabei wurde $\gamma = R/20$ und $c = c_2 = R^2/2000$ (Spektralverschiebungen aus den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.5) gewählt.

Nach Satz 4.1 erhält man für das entsprechende Problem mit exaktem Blasiusprofil und exakten Werten von $\alpha = \sqrt{2} \cdot 0.179$ und $R = \sqrt{2} \cdot 580$

$$\lambda_1 \geq 18.9218.$$

Gemäß (4.1) erhält man die Defektschranke $\delta \leq 0.021$ für den Defekt der Näherungslösung (ω, μ) bezüglich des exakten Blasiusprofils und der exakten Werte für α, R .

Der Zentrale Satz 2.1 (es gilt $\beta \leq 0.0904 < 1$) garantiert nun die Existenz eines Eigenpaares $(U, \lambda) \in \widehat{D(A)}$ der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasius-Strömungsprofil für Wellenzahl $\alpha = \sqrt{2} \cdot 0.179$ und Reynoldszahl $R = \sqrt{2} \cdot 580$ mit $\varphi(U) = \varphi(\omega)$ und

$$\left\| \begin{pmatrix} \gamma(U \Leftrightarrow \omega) \\ \lambda \Leftrightarrow \mu \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} \leq 0.202.$$

λ liegt folglich in der linken Halbebene, d. h. die Instabilität des Blasiusprofils ist (für diese Parameterkonstellation) bewiesen.

Außerdem kann es nach Satz 2.1 kein weiteres Eigenpaar $(\widetilde{U}, \widetilde{\lambda}) \in D(A)$ mit $\varphi(\widetilde{U}) = \varphi(\omega)$ und

$$\left\| \begin{pmatrix} \gamma(\widetilde{U} \Leftrightarrow \omega) \\ \widetilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu \end{pmatrix} \right\|_{\widehat{X}} < 8.498$$

geben; der oben nachgewiesene Eigenwert λ ist einfach.

Zum abschließenden Nachweis der lokalen Eindeutigkeit des Eigenwertes λ nach Abschnitt 2.2 kann für $|\widetilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu| \leq 0.03$ wegen $\varepsilon \leq 0.0034 \leq 0.022 \leq \frac{\varphi(\omega)}{\|\varphi\|_{X,4}}$ Satz 2.3 angewendet werden, d. h. es kann kein weiteres Eigenpaar $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{U})$ der Orr-Sommerfeld-Gleichung mit Blasiusprofil für die Wellenzahl $\alpha = \sqrt{2} \cdot 0.179$ und die Reynoldszahl $R = \sqrt{2} \cdot 580$ mit $\varphi(\widetilde{U}) = \varphi(\omega)$ und $|\widetilde{\lambda} \Leftrightarrow \mu| \leq 0.03$ geben.

Zur Demonstration der Leistungsfähigkeit des vorgestellten Verfahrens werden im folgenden deutlich engere Einschließungen für den “instabilen”

Eigenwert bei $\alpha = \sqrt{2} \cdot 0.179$ und $R = \sqrt{2} \cdot 580$ ermittelt. Dazu werden mit größerer Anzahl N_F von Ansatzfunktionen und V zu $N_V = 60$ mit $x_0 = 10.29$ bessere Näherungen (ω, μ) bestimmt³. Die Defektschranke δ ist bereits bezüglich exaktem Blasiusprofil und exakten α, R angegeben:

i	N_F	μ_i	x_0	$\delta \leq$
1	114	-1.652756336792 + 75.606472219516 I	10.29	$2.58 \cdot 10^{-3}$
2	134	-1.652756336777 + 75.606472219493 I	10.29	$5.62 \cdot 10^{-5}$
3	154	-1.652756336777 + 75.606472219493 I	10.29	$7.83 \cdot 10^{-7}$
4	174	-1.652756336777 + 75.606472219493 I	10.29	$7.65 \cdot 10^{-9}$
5	194	-1.652756336777 + 75.606472219493 I	10.29	$6.02 \cdot 10^{-11}$
6	214	-1.652756336777 + 75.606472219493 I	10.29	$4.24 \cdot 10^{-12}$

Mit Hilfe von Satz 4.1 kann ohne(!) nochmaliges Rechnen sämtlicher Homotopien gezeigt werden, daß $\lambda_1 \geq 17$, also $K \leq 0.242$ für diese verbesserten Näherungen gilt. Satz 2.1 liefert die Existenz eines Eigenwertes λ mit

i	$ \lambda \Leftrightarrow \mu_i \leq$
1	$2.6 \cdot 10^{-2}$
2	$5.6 \cdot 10^{-4}$
3	$7.8 \cdot 10^{-6}$
4	$7.7 \cdot 10^{-8}$
5	$6.0 \cdot 10^{-10}$
6	$4.3 \cdot 10^{-11}$

³Bei den durchgeführten Rechnungen zeigte sich, daß bei weiterer Erhöhung der Anzahl der Ansatzfunktionen keine wesentlich kleineren Defekte zu erreichen sind. Dies läßt sich durch Verwendung einer besseren Näherung bzw. Einschließung für das Blasiusprofil beheben.

Die in der ersten Zeile von (4.3) angegebene Näherung ist demnach in allen angegebenen Stellen korrekt, jedoch wäre

$$\lambda = 2 \cdot 0.179 \cdot 580 \cdot (\approx 0.00795972 + i 0.36412287)$$

der korrekt gerundete Wert.

Es folgen einige Ergebnisse für andere Parameter α, R . Wegen der großen Rechenzeiten für die Homotopie vom dritten bis zum ersten Vergleichsproblem konnten diese Rechnungen erst vom ersten Vergleichsproblem an verifiziert durchgeführt werden; aufgrund der erforderlichen heuristischen Wahl des Spektralparameters ρ besitzen sie also nicht dieselbe Rigorosität wie die bislang aufgeführten Ergebnisse.

α	R	μ	$\delta \leq$	$ \lambda \Leftrightarrow \mu \leq$
0.25	426.59	-0.000009327 +42.3111953177 I	$3.83 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-8}$
0.2	500	-0.0622471354 +37.1835973223 I	$2.23 \cdot 10^{-9}$	$2.3 \cdot 10^{-8}$
0.2	1500	-5.1130791417 +96.1250646277 I	$8.15 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$
0.2	3000	-7.2354492532 +175.407270321 I	$8.31 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
0.2	4000	-4.8863887472 +225.813011574 I	$4.13 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
0.1	5000	-10.202113420 +114.984407775 I	$8.11 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
0.1	10000	-23.666502784 +207.439464400 I	$3.95 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$
0.1	15000	-34.202444724 +293.760528163 I	$1.87 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$

Die erste Zeile liefert mit $R = 426.59$ eine obere Schranke für die kritische Reynoldszahl. In [7] ist hierfür die Näherung $R = 426.585$ angegeben worden.

Kapitel 5

Anhang

A Definition der Operatoren

In diesem Abschnitt werden die in der Arbeit verwendeten Operatoren definiert. Viele der Operatoren unterscheiden sich nicht im Differentialausdruck, sondern lediglich im Definitionsbereich. Dies ist bei der Wahl der Bezeichnungen berücksichtigt worden.

Definition 5.1

$$\begin{aligned}
D(B) &:= H_2(0, \infty) \cap H_1^0(0, \infty) , \\
D(B_1) &:= H_2^0(0, \infty) , \\
D(B^{(l)}) &:= \{u \in H_2(0, x_0) : u(0) = u'(0) = 0\} , \\
D(B_1^{(l)}) &:= H_2^0(0, x_0) , \\
D(B^{(r)}) &:= \{u \in H_2(x_0, \infty) : \varphi(u) = 0\} , \\
\tilde{B}[u] &:= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u \quad \text{für } \tilde{B} \in \{B, B_1, B^{(l)}, B_1^{(l)}, B^{(r)}\} , \\
D(B^{(lr)}) &:= \{u \in L_2(0, \infty) : u|_{(0, x_0)} \in D(B^{(l)}), u|_{(x_0, \infty)} \in D(B^{(r)})\} , \\
B^{(lr)}[u](z) &:= \begin{cases} B^{(l)}[u|_{(0, x_0)}](z) & \text{falls } z \in (0, x_0) \\ B^{(r)}[u|_{(x_0, \infty)}](z) & \text{falls } z \in (x_0, \infty) , \end{cases} \\
D(A) &:= H_4(0, \infty) \cap H_2^0(0, \infty) , \\
D(A^{(l)}) &:= \{u \in H_4(0, x_0) : u(0) = u'(0) = 0\} , \\
D(A^{(r)}) &:= \{u \in H_4(x_0, \infty) : \varphi(u) = 0\} , \\
\tilde{A}[u] &:= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 u + i\alpha R[V(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + V''u] \\
&\quad \text{für } \tilde{A} \in \{A, A^{(l)}, A^{(r)}\} , \\
D(A_0^{(r)}) &:= \{u \in H_4(x_0, \infty) : \varphi(u) = 0\} , \\
A_0^{(r)}[u] &:= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 u + i\alpha R(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u , \\
D(L_\mu) &:= \{u \in D(A) : \varphi(u) = 0\} , \quad L_\mu[u] := (A \Leftrightarrow \mu B)[u] , \\
D(L_\mu^{(l)}) &:= D(A^{(l)}) , \quad L_\mu^{(l)}[u] := (A^{(l)} \Leftrightarrow \mu B^{(l)})[u] , \\
D(L_\mu^{(r)}) &:= \{u \in D(A^{(r)}) : \varphi(u) = 0\} , \quad L_\mu^{(r)}[u] := (A^{(r)} \Leftrightarrow \mu B^{(r)})[u] , \\
D(L_\mu^{(lr)}) &:= \{u \in L_2(0, \infty) : u|_{(0, x_0)} \in D(L_\mu^{(l)}), u|_{(x_0, \infty)} \in D(L_\mu^{(r)})\} , \\
L_\mu^{(lr)}[u](z) &:= \begin{cases} L_\mu^{(l)}[u|_{(0, x_0)}](z) & \text{falls } z \in (0, x_0) \\ L_\mu^{(r)}[u|_{(x_0, \infty)}](z) & \text{falls } z \in (x_0, \infty) , \end{cases}
\end{aligned}$$

$$D(\varphi) := H_2(0, \infty) \cap H_1^0(0, \infty), \quad \varphi(u) := \int_{x_0}^{\infty} u(z) e^{-\alpha z} dz,$$

$$D(\tilde{\varphi}) := L_2(x_0, \infty), \quad \tilde{\varphi}(u) := \int_{x_0}^{\infty} u(z) e^{-\alpha z} dz,$$

$$\phi(z) := \begin{cases} 0 & \text{falls } z \in [0, x_0] \\ e^{-\alpha z} & \text{falls } z \in (x_0, \infty) \end{cases}, \quad \text{also } \varphi(u) = \langle u, \phi \rangle_{L_2(0, \infty)}$$

Gelegentlich wird mit φ auch die kanonische Fortsetzung von φ auf $L_2(0, \infty)$ bezeichnet und $\tilde{\varphi}$ mit φ identifiziert.

B Bestimmung der adjungierten Operatoren

In diesem Abschnitt werden, soweit benötigt, die Adjungierten der zuvor definierten Operatoren bestimmt.

Definition 5.2 *Es seien $(H_1, (\cdot, \cdot)_1)$, $(H_2, (\cdot, \cdot)_2)$ komplexe Hilberträume, $D(T)$ dichter Unterraum von H_1 und $T : D(T) \rightarrow H_2$ ein linearer Operator. Dann setzt man*

$$D(T^*) := \{g \in H_2 : \exists g^* \in H_1 : (T[f], g)_2 = (f, g^*)_1 \forall f \in D(T)\}$$

$$T^* : D(T^*) \rightarrow H_1, \quad T^*[g] := g^*,$$

und bezeichnet T^* als den zu T adjungierten Operator.

Für die konkreten Operatoren in dieser Arbeit setzt man $H_1 = H_2 = L_2(0, \infty)$ bzw. $L_2(0, x_0)$ oder $L_2(x_0, \infty)$ mit dem entsprechenden L_2 -inneren Produkt. Die Bestimmung der Adjungierten erfordert mehrfache partielle Integration, um den Differentialausdruck und die Randbedingungen bestimmen zu können. Um bei den zwar einfachen, aber teilweise sehr länglichen Rechnungen Fehler zu vermeiden, wurden Mathematica-Notebooks entwickelt, mit deren Hilfe solche partiellen Integrationen interaktiv durchgeführt werden können. Die entscheidende Prozedur ist

```
PartInt[Integrate[i_, {x, a_, b_}], fs_] :=
Module[{g=i/.fs->1,gs, f},
gs = D[g,x];
f = Integrate[fs,x];
If[fs g !=i, Print["Fehler in PartInt!"]];
```

```

- Integrate[f gs, {x,a,b}]
+ (f //.x->b) (g //. x->b) - (f //.x->a) (g //. x->a)
];

```

Daneben werden weitere Prozeduren zur Vereinfachung von Zwischenergebnissen benötigt.

Für die Operatoren B, B_1, \dots ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \text{Integrate}[B[f[x]] \text{Conjugate}[v[x]], \{x, a, b\}] = \\
& \Leftrightarrow (\text{Conjugate}[v'[a]] f[a] + \text{Conjugate}[v'[b]] f[b]) \\
& + \int_a^b (\text{alfa}^2 \text{Conjugate}[v[x]] \Leftrightarrow \text{Conjugate}[v''[x]]) f[x] dx \\
& + \text{Conjugate}[v[a]] f'[a] \Leftrightarrow \text{Conjugate}[v[b]] f'[b] .
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
D(B^*) &= D(B) , & B^*[u] &= B[u] , \\
D(B_1^*) &= H_2(0, \infty) , & B_1^*[u] &= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u , \\
D(B_1^{(l)*}) &= H_2(0, x_0) , & B_1^{(l)*}[u] &= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u , \\
D(B^{(l)*}) &= \{u \in H_2(0, x_0) : u(x_0) = u'(x_0) = 0\} , \\
& & B^{(l)*}[u] &= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u .
\end{aligned}$$

Für die Operatoren $A, A^{(l)}, \dots$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \text{Integrate}[A[f[x]] \text{Conjugate}[v[x]], \{x, a, b\}] = \\
& \int_a^b f[x] (\text{alfa}^4 \text{Conjugate}[v[x]] \Leftrightarrow 2 \text{alfa}^2 \text{Conjugate}[v''[x]] + \\
& \quad \text{Conjugate}[v^{(4)}[x]] + i \text{alfa}^3 \text{RE} \text{Conjugate}[v[x]] V[x] \Leftrightarrow \\
& \quad i \text{alfa} \text{RE} (\text{Conjugate}[v''[x]] V[x] + \\
& \quad 2 \text{Conjugate}[v'[x]] V'[x])) dx + \\
& (2 \text{alfa}^2 \text{Conjugate}[v[a]] \Leftrightarrow \\
& \quad \text{Conjugate}[v''[a]] + i \text{alfa} \text{RE} \text{Conjugate}[v[a]] V[a]) f'[a] + \\
& (\Leftrightarrow 2 \text{alfa}^2 \text{Conjugate}[v[b]] + \\
& \quad \text{Conjugate}[v''[b]] \Leftrightarrow i \text{alfa} \text{RE} \text{Conjugate}[v[b]] V[b]) f'[b] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f[a] \text{ (Conjugate}[v^{(3)}[a]) \Leftrightarrow \\
& \quad \text{alfa Conjugate}[v'[a]] (2 \text{ alfa} + i \text{ RE } V[a]) \Leftrightarrow \\
& \quad i \text{ alfa RE Conjugate}[v[a]] V'[a]) + \\
& f[b] (2 \text{ alfa}^2 \text{ Conjugate}[v'[b]] \Leftrightarrow \text{Conjugate}[v^{(3)}[b]) + \\
& \quad i \text{ alfa RE Conjugate}[v'[b]] V[b] + \\
& \quad i \text{ alfa RE Conjugate}[v[b]] V'[b]) + \\
& \text{Conjugate}[v'[a]] f''[a] \Leftrightarrow \text{Conjugate}[v'[b]] f''[b] \Leftrightarrow \\
& \text{Conjugate}[v[a]] f^{(3)}[a] + \text{Conjugate}[v[b]] f^{(3)}[b]
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
D(A^*) &= D(A) , \\
A^*[u] &= (\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)^2 u + i\alpha R[\Leftrightarrow V(\Leftrightarrow D^2 + \alpha^2)u + 2V'Du] .
\end{aligned}$$

Die Bestimmung von L_μ^* erfordert einen etwas allgemeineren Rahmen, da $D(L_\mu)$ nicht dicht in $L_2(0, \infty)$ ist:

Man setzt $H_1 := \{u \in L_2(0, \infty) : \varphi(u) = 0\}$ und $H_2 := L_2(0, \infty)$. Für beliebiges $u \in D(L_\mu) \subset H_1$ und v aus dem (noch unbekanntem) Definitionsbereich von L_μ^* gilt nach Lemma 5.1 (siehe Anhang C) zunächst $v \in H_4(0, \infty)$ und

$$\begin{aligned}
\langle L_\mu[u], v \rangle_{L_2(0, \infty)} &= \langle (A \Leftrightarrow \mu B)[u], v \rangle_{L_2(0, \infty)} \\
&= \langle u, (A \Leftrightarrow \mu B)^*[v] \Leftrightarrow \kappa \phi \rangle_{H_1} ,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei $(A \Leftrightarrow \mu B)^* = A^* \Leftrightarrow \bar{\mu} B^*$ und κ so gewählt werden muß, daß $\varphi((A \Leftrightarrow \mu B)^*[v] \Leftrightarrow \kappa \phi) = 0$ gilt, also

$$\kappa = \frac{\langle (A \Leftrightarrow \mu B)^*[v], \phi \rangle_{L_2(0, \infty)}}{\langle \phi, \phi \rangle_{L_2(0, \infty)}} ,$$

(man beachte $\langle u, \phi \rangle_{L_2(0, \infty)} = 0$ für $u \in H_1$). Die bei der partiellen Integration in (5.1) entstehenden Randterme müssen verschwinden, so daß $v \in D(A^*)$ gefordert wird.

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
D(L_\mu^*) &= D(A^*) = D(A) , \\
L_\mu^*[u] &= (A \Leftrightarrow \mu B)^*[u] \Leftrightarrow \langle (A \Leftrightarrow \mu B)^*[u], \phi \rangle_{L_2(0, \infty)} / \langle \phi, \phi \rangle_{L_2(0, \infty)} \cdot \phi .
\end{aligned}$$

Analog erfolgt die Bestimmung von \mathcal{L}^* :

Man setzt $H_1 := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in L_2(0, \infty) \times \mathbb{C} : \varphi(u) = 0 \right\}$ und $H_2 := L_2(0, \infty)$. Gilt $\langle \mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \right], v \rangle_{L_2(0, \infty)} = \langle \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix}, v^* \rangle_{H_1}$ für alle $\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L})$, so folgt insbesondere (für $\sigma = 0$), daß $v \in D(L_\mu^*)$ und $v_1^* = L_\mu^*[v]$ sowie (für $u = 0$), daß $v_2^* = \overleftrightarrow{\gamma} \langle B[\omega], v \rangle_{L_2(0, \infty)}$ gilt, und man erhält

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}^*) &= D(L_\mu^*) = H_4(0, \infty) \cap H_2^0(0, \infty), \\ \mathcal{L}^*[u] &= \left(\begin{array}{c} L_\mu^*[u] \\ \overleftrightarrow{\gamma} \langle B[\omega], u \rangle_{L_2(0, \infty)} \end{array} \right). \end{aligned}$$

C Regularität von schwachen Lösungen

In Anhang B wurden die Definitionsbereiche der benötigten adjungierten Operatoren mittels partieller Integration bestimmt. Dies setzt jedoch eine ausreichende Glattheit der entsprechenden Funktionen voraus, d. h. für einen Differentialoperator t -ter Ordnung in $L_2(a, b)$ muß zunächst gezeigt werden, daß der Definitionsbereich des adjungierten Operators im Sobolevraum $H_t(a, b)$ enthalten ist.

Lemma 5.1 *Ist T ein Differentialoperator t -ter Ordnung in $L_2(a, b)$ mit*

$$\begin{aligned} D(T) &\supset H_t^0(a, b), \quad 0 \leq a < b \leq \infty, \\ T[u](x) &= \sum_{j=0}^t a_j(x) u^{(j)}(x), \end{aligned}$$

und $a_j \in C_j(a, b)$ ($j = 0, \dots, t$), $a_t \neq 0$ auf (a, b) , $(a_t)^{-1} \in L_\infty(a, b)$, $a_j^{(k)} \in L_\infty(a, b)$ ($k = 0, \dots, j$; $j = 0, \dots, t$), so gilt

$$D(T^*) \subset H_t(a, b).$$

Beweis:

Ist $g \in D(T^*)$, so gilt

$$\langle T[f], g \rangle_{L_2(a, b)} = \langle f, T^*[g] \rangle_{L_2(a, b)} \quad (5.2)$$

für alle $f \in D(T)$, also insbesondere auch für alle $f \in H_t^0(a, b)$. Per Definition liegt g dann im Definitionsbereich von T_0^* , dem Adjungierten des sog. Minimaloperators T_0 mit $D(T_0) = H_t^0(a, b)$, $T_0[u] := T[u]$.

Nach [10, IX.9 Gleichung (9.6)] ist $D(T_0^*) = H_t(a, b)$, also $g \in H_t(a, b)$. \square

Regularitätsfragen spielen ebenfalls eine Rolle bei der mehrmals benutzten Äquivalenz von Eigenwertproblemen in Bilinearformgestalt

$$\begin{aligned} &\text{Suche } u \in D(T) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\text{mit } \langle T[u], T[v] \rangle_{L_2(a,b)} = \lambda \langle S[u], S[v] \rangle_{L_2(a,b)} \text{ für alle } v \in D(T) \end{aligned} \quad (5.3)$$

und der entsprechenden Operatorgestalt

$$T^*T[u] = \lambda S^*Su \quad (5.4)$$

(mit den gesondert bestimmten Randbedingungen). T^* und S^* sind als formal adjungierte Differentialoperatoren zu verstehen.

Dabei sei T Differentialoperator der Ordnung $t = 2m$ mit t -mal stetig differenzierbaren und - mitsamt ihren Ableitungen - beschränkten Koeffizienten. Der Differentialoperator S habe die Ordnung $s \leq m$; seine Koeffizienten mögen analogen Glattheitsbedingungen genügen. Die (meist mit Mathematica durchgeführte) partielle Integration - um die zu (5.4) gehörigen Randbedingungen zu ermitteln - beruht wiederum auf der Annahme, daß für Lösungen u von (5.3) gilt: $u \in H_{2t}(a, b)$.

Lemma 5.2 *Gilt $H_t(a, b) \supset D(T) \supset H_t^0(a, b)$ und ist $D(T) \subset D(S)$, so gilt für Lösungen u von (5.3) bereits $u \in H_{2t}(a, b)$.*

Beweis:

Für Lösungen u von (5.3) gilt insbesondere

$$\langle T[u], T[v] \rangle_{L_2(a,b)} = \lambda \langle S[u], S[v] \rangle_{L_2(a,b)} \text{ für alle } v \in H_t^0(a, b),$$

also

$$\langle T[u], T[v] \rangle_{L_2(a,b)} = \lambda \langle S_0^*S[u], v \rangle_{L_2(a,b)} \text{ für alle } v \in H_t^0(a, b)$$

mit S_0 als dem zu S gehörigen Minimaloperator (siehe Beweis von Lemma 5.1), da $D(S_0^*S) \supset D(T)$. Damit liegt $T[u]$ im Definitionsbereich von T_0^* , $Tu \in H_t(a, b)$. Es folgt $u \in H_{2t}(a, b)$. \square

Folgerung 5.1 (5.3) und (5.4) haben dieselben Eigenwerte mit jeweils derselben Vielfachheit.

Lemma 5.3 Ist S die Identität auf $L_2(a, b)$ und $D(T) \supset H_t^0(a, b)$, so sind die Resolventenmengen von (5.3) und (5.4) gleich.

Beweis:

Ist $S = \text{id}$, so steht in (5.4) tatsächlich der Operator T^*T mit $D(T^*T) = \{f \in D(T) : T[f] \in D(T^*)\}$. (Für $S \neq \text{id}$ ergibt sich beim Übergang von (5.3) zu (5.4) in der Regel ein anderer Definitionsbereich - evtl. mit λ -abhängigen Randbedingungen.) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda \in \rho((5.3))$$

$$\Leftrightarrow \langle T[u], T[v] \rangle_{L_2(a,b)} \Leftrightarrow \lambda \langle u, v \rangle_{L_2(a,b)} = \langle r, v \rangle_{L_2(a,b)} \text{ für alle } v \in D(T)$$

ist eindeutig lösbar in $D(T)$ für jedes $r \in L_2(a, b)$

$$\text{mit } \|u\|_{L_2(a,b)} \leq C \|r\|_{L_2(a,b)},$$

$$\Leftrightarrow \langle T[u], T[v] \rangle_{L_2(a,b)} = \langle r + \lambda u, v \rangle_{L_2(a,b)} \text{ für alle } v \in D(T)$$

ist eindeutig lösbar in $D(T)$ für jedes $r \in L_2(a, b)$

$$\text{mit } \|u\|_{L_2(a,b)} \leq C \|r\|_{L_2(a,b)},$$

$$\Leftrightarrow u \in D(T), T[u] \in D(T^*) \text{ und } T^*T[u] = r + \lambda u$$

ist eindeutig lösbar für jedes $r \in L_2(a, b)$

$$\text{mit } \|u\|_{L_2(a,b)} \leq C \|r\|_{L_2(a,b)},$$

$$\Leftrightarrow (T^*T \Leftrightarrow \lambda \text{id}) \text{ ist bijektiv mit beschränkter Inverser,}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \rho((5.4)).$$

\square

Folgerung 5.2 Unter den Voraussetzungen der Lemmata 5.2 und 5.3 haben (5.3) und (5.4) dieselben wesentlichen Spektren.

Literaturverzeichnis

- [1] Albrecht, J.: Monotone Iterationsfolgen und ihre Verwendung zur Lösung linearer Gleichungssysteme. *Numer. Math.* **3** 345-358 (1961).
- [2] Behnke, H.; Goerisch, F.: Inclusions for Eigenvalues of Selfadjoint Problems. In: *Topics in Validated Computations* (ed.: J. Herzberger), Amsterdam, Elsevier (North-Holland), 277-322 (1994).
- [3] Berkowitz, J.: On the Discreteness of Spectra of Singular Sturm-Liouville Problems. *Comm. Pure Appl. Math.* **12** 523-542 (1959).
- [4] Brunk, F.: *Existenz und Einschließung bei Systemen von Zweipunkt-Randwertaufgaben*, Dissertation, TU Clausthal, 1997.
- [5] Bunch, J. R.; Kaufmann, L.; Parlett, B. N.: Decomposition of a symmetric matrix. *Numer. Math.* **27** 95-109 (1976).
- [6] Chatelin, F.: *Spectral Approximations of Linear Operators*. Academic Press, New York 1983.
- [7] Davey, A.: A Difficult Numerical Calculation Concerning the Stability of the Blasius Boundary Layer. In: *Stability in the Mechanics of Continua*, 2nd Symposium, Nümbrecht, Germany (ed.: F. H. Schröder), Springer, Berlin 1982.

- [8] Davies, E. B.: A new method of obtaining eigenvalue enclosures for self-adjoint operators. Preprint.
- [9] Drazin, P. G.; Reid, W. H.: *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, Cambridge 1981.
- [10] Edmunds, D. E.; Evans, W. D.: *Spectral Theory and Differential Operators*. Oxford University Press, Oxford 1987.
- [11] Ehlich, H.; Zeller, K.: Schwankung von Polynomen zwischen Gitterpunkten. *Math. Zeitschr.* **86** 41-44 (1964).
- [12] Fischer, T. M.: A spectral Galerkin approximation of the Orr-Sommerfeld eigenvalue problem in a semi-infinite domain. *Numer. Math.* **66** 159-179 (1993).
- [13] Goerisch, F.: Ein Stufenverfahren zur Berechnung von Eigenwertschranken. In: *Numerical Treatment of Eigenvalue Problems*, Vol. 4, ISNM 83, 104-114, Birkhäuser, Basel 1987.
- [14] Grosch, C. E.; Orszag, S. A.: Numerical solution of Problems in unbounded regions: coordinate transforms. *J. Comp. Phys.* **25** 273-296 (1977).
- [15] Herron, I. H.: The Orr-Sommerfeld equation on infinite intervals. *SIAM-Rev.* **29** 597-620 (1987).
- [16] Jordinson, R.: The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical integration of the Orr-Sommerfeld equation. *J. Fluid. Mech.* **43** 801-811 (1970).
- [17] Kato, T.: On the upper and lower bounds of eigenvalues. *J. Phys. Soc. Japan* **4** 334-339 (1949).
- [18] Kato, T.: *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, New York 1966.

- [19] Klatte, R.; Kulisch, U.; Wiethoff, A.; Lawo, C.; Rauch, M.: *C-XSC - A C++ Class Library for Extended Scientific Computing*. Springer, Heidelberg (1993).
- [20] Klein, P.: Including eigenvalues of the plane Orr-Sommerfeld problem. *J. Appl. Math.* **6** 452-458 (1993).
- [21] Lahmann, J.; Plum, M.: *On the Spectrum of the Orr-Sommerfeld Equation on the Semiaxis*, erscheint in *Math. Nachr.*
- [22] Lohner, R. J.: *Einschließung der Lösung gewöhnlicher Anfangs- und Randwertaufgaben und Anwendungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe 1988.
- [23] Mertins, U.: Asymptotische Fehlerschranken für Rayleigh-Ritz- Approximationen selbstadjungierter Eigenwertaufgaben. *Numer. Math.* **63** 227-241 (1992).
- [24] Miklavčič, M.: Eigenvalues of the Orr-Sommerfeld Equation in an Unbounded Domain. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **83** 221-228 (1983).
- [25] Plum, M.: Eigenvalue inclusions for second-order ordinary differential operators by a numerical homotopy method. *ZAMP* **41** 205-226 (1990).
- [26] Plum, M.: Persönliche Mitteilung.
- [27] Plum, M.: An Existence and Inclusion Method for Two-Point Boundary Value Problems with Turning Points. *Z. angew. Math. Mech.* **74** 12, 615-623 (1994).
- [28] Schlichting, H.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer, 9. Aufl., Berlin 1997.
- [29] Schwarz, H. R.: *Methode der finiten Elemente*. Teubner, Stuttgart 1980.

- [30] Spalart, P. R.: A spectral method for external viscous flows. *Contemp. Math.* **28** 315-335 (1984).
- [31] Stoer, J.: *Numerische Mathematik I*. Springer, Berlin 1994.
- [32] Walter, W.: *Differential and Integral Inequalities*. Springer, Berlin 1970.
- [33] Wolfram, S.: *Das Mathematica-Buch*. Mathematica Version 3. Addison-Wesley-Longman, Bonn 1997.
- [34] Zimmermann, S.; Mertins, U.: Variational bounds to eigenvalues of self-adjoint eigenvalue problems with arbitrary spectrum. *Z. Anal. Anwendungen.* **14** 327-345 (1995).