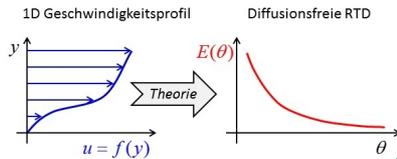


# Allgemeine Theorie zur Berechnung der diffusionsfreien Verweilzeitverteilung von laminaren Rohr- und Kanalströmungen

P 048

## Motivation

- Flüssigkeitsströmungen in Mikrokanälen sind häufig laminar und die Diffusivität gelöster Spezies ist gering
- Verweilzeitverteilung wird dominiert durch das laminare Geschwindigkeitsprofil und ist für  $D = 0$  deterministisch
- **Ziel:** Allg. Beziehung, um für gegebenes Geschwindigkeitsprofil die zugehörige RTD zu berechnen



## Theorie

- Dimensionslose Verweilzeit (voll entwickelte Strömung)

$$\theta = U_m / u = 1 / f(\hat{y}) \quad \hat{y} = \text{normierte Koordinate}$$

$$\rightarrow \hat{y} = f^{-1}(\theta^{-1}) \quad f^{-1} = \text{Umkehrfunktion}$$

- Monoton fallendes Geschwindigkeitsprofil

$$F(\theta) = \frac{Q(\theta)}{Q_{\text{total}}} = \frac{1}{A} \int_{\hat{y}_{\min}}^{f^{-1}(\theta^{-1})} f(\hat{y}) dA \quad \frac{dA}{A} = (2\hat{y})^\kappa d\hat{y}$$

$$E_\theta = \frac{dF}{d\theta} = -\frac{1}{\theta^3} \frac{(2f^{-1}(\theta^{-1}))^\kappa}{f'(f^{-1}(\theta^{-1}))}$$

Kanal  $\kappa = 0$   
Rohr  $\kappa = 1$   
 $f' = df / d\hat{y}$

- Geschwindigkeitsprofil mit Maximum im Kanal

$$F(\theta) = \int_{f^{-1}(\theta^{-1})}^{f_+^{-1}(\theta^{-1})} (2\hat{y})^\kappa f(\hat{y}) d\hat{y} \quad \hat{y}_\pm = f_\pm^{-1}(\theta^{-1})$$

$$E_\theta = -\frac{1}{\theta^3} \left( \frac{(2f_+^{-1}(\theta^{-1}))^\kappa}{f'(f_+^{-1}(\theta^{-1}))} - \frac{(2f_-^{-1}(\theta^{-1}))^\kappa}{f'(f_-^{-1}(\theta^{-1}))} \right)$$

## Beispiel

- Die Theorie beinhaltet alle diffusionsfreien RTDs, die in der Literatur bisher für Fall hergeleitet wurden
- Bsp. erstmalige RTD: Rohrström. Prandtl-Eyring Fluid

$$f(\hat{y}) = \frac{\cosh(p) - \cosh(p\hat{y})}{\theta_F [\cosh(p) - 1]} \quad \theta_F = \frac{\cosh(p)}{\cosh(p) - 1} \left[ 1 + \frac{2}{p^2} \left( 1 - \frac{1 + p \sinh(p)}{\cosh(p)} \right) \right]$$

$$E_\theta = \frac{2\theta_F}{\theta^3} \frac{\cosh(p) - 1}{p^2} \frac{\cosh^{-1} \left[ \cosh(p) - (\cosh(p) - 1) \frac{\theta_F}{\theta} \right]}{\sinh \left\{ \cosh^{-1} \left[ \cosh(p) - (\cosh(p) - 1) \frac{\theta_F}{\theta} \right] \right\}}$$

## Diskussion

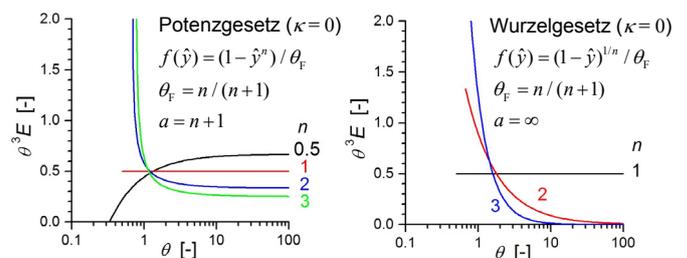
- **Asymptotisches Verhalten der RTD**

Nahe der Wand gibt es oft einen Bereich, in dem die Geschwindigkeit linear vom Wandabstand abhängt

$$f_{\hat{y} \rightarrow 1} = a(1 - \hat{y}) + 1 / \theta_{\max} \quad \left| \quad a = - \frac{df}{d\hat{y}} \right|_{\hat{y}=1} \quad \theta_{\max} = \frac{U_m}{U_{\min}}$$

$$f_{\hat{y} \rightarrow 1}^{-1}(\hat{y}) = 1 - (\hat{y} - 1 / \theta_{\max}) / a \quad f'_{\hat{y} \rightarrow 1} = -a$$

$$E_\theta = \frac{1}{a\theta^3} \left[ 2 - \frac{2}{a} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_{\max}} \right) \right]^\kappa \rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \theta_{\max}} E_\theta = \frac{2^\kappa}{a} \frac{1}{\theta^3}$$



- **Varianz der RTD** (hier:  $f$  monoton,  $\kappa = 0$ ,  $U_{\min} = 0$ )

$$\sigma_\theta^2 = -1 + \int_{\theta_F}^{\infty} \theta^2 E(\theta) d\theta = -1 - \int_{\theta_F}^{\infty} \frac{1}{\theta} \frac{1}{f'(f^{-1}(\theta^{-1}))} d\theta$$

$$= -1 - \int_{\theta_F}^{\theta_{\text{asymt.}}} \frac{1}{\theta} \frac{1}{f'(f^{-1}(\theta^{-1}))} d\theta + \underbrace{\int_{\theta_{\text{asymt.}}}^{\infty} \frac{1}{a\theta} d\theta}_{\text{Integral divergiert}} = \infty$$

## Schlussfolgerungen

- Vorstellung einer allgemeinen Beziehung, die es erlaubt, für ein gegebenes Geschwindigkeitsprofil direkt die Verweilzeitverteilung zu berechnen
- Ist anwendbar auf ebene und rotationssymmetrische gerade Kanäle (Plattenkanal, Rohr, Ringspalt)
- Beinhaltet alle bisher in der Literatur veröffentlichten rein konvektiven Verweilzeitverteilungen
- Asymptotisches Verhalten ist i.A. proportional zu  $\theta^{-3}$
- Varianz ist unendlich für alle Profile mit linearem Anstieg an einer ortsfesten Wand, und sonst endlich

## Referenz

M. Wörner, General pure convection residence time distribution theory of fully developed laminar flows in straight planar and axisymmetric channels, eingereicht bei Chemical Engineering Science