



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5906

Biegeratcheting bei parabolischer Verteilung des Biegemoments längs der Balkenachse

S. Böhmer

Institut für Reaktorsicherheit
Projekt Kernfusion

Mai 1997

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5906

**Biegeratcheting bei parabolischer Verteilung
des Biegemoments längs der Balkenachse***

Stephan Böhmer

Institut für Reaktorsicherheit
Projekt Kernfusion

*Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1997

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

0947-8620(200001)22:1;1-0

Kurzfassung

Biegeratcheting bei parabolischer Verteilung des Biegemomentes entlang der Balkenachse

Thermal Ratcheting, als eines von hohen zyklischen thermischen Belastungen und gleichzeitig wirkenden mechanischen Lasten abhängendes Strukturverhalten, bedarf vor allem in der Ersten Wand der TOKAMAK-Fusions-Reaktoren einer genaueren Untersuchung.

In dieser Arbeit wird ausgehend von den gegebenen Belastungen und Geometrien ein dem Bree-Diagramm entsprechendes, einfaches Mittel zur Auslegung erstellt. Eine analytische Lösung wird vorgestellt, welche einen tieferen Einblick in den Ablauf dieses speziellen Ratcheting-Mechanismus erlaubt.

Zur Herleitung der geschlossenen Lösung sind zahlreiche Vereinfachungen notwendig, welche gleichzeitig Abweichungen vom realen Verhalten bedingen. Mit Hilfe von Finite-Elemente-Rechnungen wird gezeigt, daß der beschrittene Weg jedoch zu konservativen Auslegungen führt.

Abstract

Ratcheting of bending type with a parabolic distribution of the bending moment over the beam

Thermal Ratcheting, as a mechanism occurring in structures submitted to high cyclic thermal and simultaneously applied mechanical loads, has to be examined in the First Wall of the TOKAMAK-Fusion-reactors.

In this thesis, proceeding from the given geometry and the loadings, a Bree like diagram will be developed, yielding a simple design-tool. An analytical solution will be presented, allowing a detailed insight into this particular ratcheting mechanism.

Many of the simplifications, being made to make an analytical solution possible, lead to deviations from the actual behaviour. A comparison with Finit-Element-computations however shows, that this will lead to a conservative design.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Was ist Ratcheting ?	2
1.3	Die verschiedenen Ratcheting-Typen	2
1.3.1	Material-Ratcheting	2
1.3.2	Struktur-Ratcheting	3
1.3.2.1	Typ-I Ratcheting	4
1.3.2.2	Typ-II Ratcheting	4
1.3.2.3	Typ-III Ratcheting	6
1.3.2.4	Andere auf Ratcheting untersuchte Strukturen	7
1.3.3	Kriech-Ratcheting	7
1.4	Lösungsverfahren	8
2	Analytische Lösung	9
2.1	Vereinfachung der Geometrie	9
2.2	Problemstellung	11
2.3	Erläuterung des Ratcheting-Mechanismus	12
2.4	Beschreibung des Problems	17
2.4.1	Annahmen und Vereinbarungen	17
2.4.2	Allgemeine Gleichungen der Momenten- und Biegelinie	18
2.4.3	Erster Halbzyklus - Aufbau des Temperaturgradienten	20
2.4.3.1	Elastischer Balken	20
2.4.3.2	Teilplastischer Balken	23
2.4.3.3	Vollplastischer Balken	28
2.4.4	Zweiter Halbzyklus - Abbau des Temperaturgradienten	31
2.4.4.1	Zur Bildung der plastischen Gelenke	31
2.4.4.2	Herleitung der notwendigen Gleichungen	33
2.4.4.3	Shakedown nach dem ersten Zyklus	34
2.4.4.4	Die plastischen Zonen des Balkens sind durch einen elastischen Bereich getrennt	36

2.4.4.5	Die plastischen Zonen während der beiden Halbzyklen überlappen sich	39
2.4.4.6	Vollplastischer Balken	40
2.4.5	Dritter Halbzyklus - Aufheizen	41
2.4.6	Vierter Halbzyklus - Erneutes Abkühlen	42
2.4.7	Folgezyklen	43
2.4.8	Lösung für den plastisch zyklierenden Balken mit Hilfe des Shakedown-Theorems	45
2.4.9	Graphische Darstellung der Ergebnisse	48
3	FE-Rechnungen	51
3.1	Motivation	51
3.2	Modellierung des Problems	52
3.3	Ergebnisse	58
3.3.1	Biegelinie	58
3.3.2	Überprüfung der Vereinfachungen bei der Modellierung	63
3.3.2.1	Anpassung des Modells an analytische Lösung	63
3.3.2.2	Nicht-lineare Geometrie-Effekte und Verfestigung	63
3.3.2.3	Einfluß der Materialparameter	66
3.3.2.4	Das plastische Gelenk	69
3.4	Verhalten bei kleinen mechanischen Momenten	73
3.5	Vergleich mit der analytischen Lösung	76
3.6	Übertragung der FE-Ergebnisse in das Bree-Diagramm	81
4	Zusammenfassung und Ausblick	85
	Literaturverzeichnis	87
	ANHANG	99
A	Die Erste Wand	101
B	ASME-Code	105
B.1	Spannungs-Kategorien	105
B.1.1	Definition der Spannungskategorien	106
B.1.2	Lastfall des Bree-Diagramms/Druckführende zylindrische Strukturen	108
B.2	Spannungsanalyse und Spannungsbewertung	110
B.2.1	Spannungsintensitäten	110
B.3	Spannungsgrenzen	112
B.3.1	Elastische Analyse	112

B.3.1.1	Spannungsgrenzen für Entwurfslasten	112
B.3.1.2	Spannungsgrenzen für Betriebslasten (Level A)	114
B.3.1.3	Anwendung der elastischen Analyse für Spannungen oberhalb der Fließgrenze	117
B.3.2	Anwendung plastischer Analyse	117
B.3.2.1	Limit Analyse	117
B.3.2.2	Experimentelle Analyse	117
B.3.2.3	Plastische Analyse	117
B.3.2.4	Shakedown-Analyse	118
B.4	Vergleich der Auslegung nach ASME mit dem Balkenratcheting	118
C	Balkentheorie nach Bernoulli	121
C.1	Elastische Theorie	121
C.2	Erweiterung für plastisches Materialverhalten	126
C.2.1	Balken mit Rechteckquerschnitt	129
C.2.1.1	Bestimmung der Schubspannungen	130
D	Plastizität	131
D.1	Fließgesetze	131
D.1.1	Der Spannungszustand	132
D.1.2	Der Dehnungszustand	132
D.1.3	Fließbedingungen	133
D.1.4	Spannungsdeformationsbeziehung	134
D.1.5	Verfestigungsarten	135
D.1.6	Zyklische Plastizität	135
E	Materialratcheting	137
E.1	Auswirkung der Verfestigung	138
E.1.1	Isotrope Verfestigung	138
E.1.2	Kinematische Verfestigung	138
E.1.3	Überlagerte Verfestigungsmechanismen	138
E.2	Nicht übereinstimmende Fließ- und Belastungsfläche	138
E.3	Temperaturabhängige Materialdaten	139
E.3.1	Temperaturabhängige Fließgrenze	139
E.3.2	Temperaturabhängiger Plastizitätsmodul	140
E.4	Form der Fließfläche	140
E.4.1	Strength-Differential-Effects	140
E.4.2	Second-Order-Effects	140
E.5	Anisotropie	141
E.5.1	Orthogonales Ratcheting	141

F	Strukturratcheting	143
F.1	Ratcheting am Zwei-Stab-Modell	143
F.2	Ratcheting bei druckführenden Strukturen	150
F.2.1	Analyse des Typ-II Ratchetings	153
F.2.1.1	Elastische Analyse	153
F.2.1.2	Vereinfachung auf eindimensionale Betrachtung	154
F.2.1.3	Erster Halbzyklus	155
F.2.1.4	Zweiter Halbzyklus	155
F.2.1.5	Diskussion der Zyklen	155
G	Shakedown-Theoreme	167
G.1	Grundlage der Theoreme	167
G.2	Die Theoreme	168
G.3	Anwendung der Theoreme	171

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Erste Wand eines TOKAMAK-Fusions-Reaktors ist eine der am höchsten belasteten Komponenten des Reaktors, gleichzeitig aber auch für seine Funktionsfähigkeit von größter Bedeutung. Als Abschirmstruktur und als Wärmesenke werden hohe Anforderungen an ihre Integrität gestellt. Die Auslegung der Ersten Wand erfolgt anhand der üblichen Codes (z.B. ASME, Anhang B). Da die Belastungen durch den pulsierenden Plasmabetrieb zyklisch erfolgen, ist auch eine Auslegung gegen Versagen bei zyklischen Beanspruchungen notwendig. Dazu gehört auch die Beachtung von Ratcheting-Effekten.

Im ASME-Code ist für solche Fälle das Bree-Diagramm vorgesehen. Dieses Diagramm ist jedoch genau genommen nur für einen bestimmten Belastungsfall und die daraus resultierenden Spannungen anwendbar. Abgeleitet wurde es für einen Behälter unter Innendruck und einem zyklischem Temperaturgradienten in der Behälterwand (siehe dazu auch Anhang F.2). Dabei wurden einige Vereinfachungen angenommen, so daß die mechanische Spannung rein membranartigen Charakter besitzt, die thermische Spannung Biegecharakter. Zudem sind beide Spannungsarten längs der Behälterwand konstant.

In der Ersten Wand eines TOKAMAK-Reaktors mit den integrierten Kühlkanälen sind andere Bedingungen gegeben. Hier sind auch die mechanischen Spannungen Biegespannungen. Sie sind außerdem über der Kanalhöhe veränderlich. Das im ASME-Code für zyklische Belastungen mit daraus folgenden plastischen Verformungen vorgesehene Bree-Diagramm ist deshalb nur unter Vorbehalt zu verwenden. Es ist zu vermuten, daß der ASME-Code aufgrund des Biegespannungscharakters der mechanischen Spannung für diesen Fall eine konservative Auslegung liefert. Eine Einsparung an Material in der Ersten Wand erscheint möglich, sofern eine geeignetere Beurteilungsmöglichkeit vorliegt.

Es ist deshalb wünschenswert, ein dem Spannungs- und Belastungszustand in der Ersten Wand besser entsprechendes Hilfsmittel zur Hand zu haben. Ziel dieser Arbeit ist es, ein entsprechend modifiziertes Bree-Diagramm bereitzustellen.

1.2 Was ist Ratcheting ?

Nach dem ASME Code - ASME boiler and pressure vessel Code [1] - ist Ratcheting definiert wie folgt (siehe auch Anhang B):

Ratcheting ist eine fortschreitende inkrementelle inelastische Deformation oder Dehnung, welche in Komponenten auftreten kann, die Variationen mechanischer Spannungen, thermischer Spannungen oder beider Spannungsarten ausgesetzt sind.

Bei der Betrachtung des Ratcheting-Verhaltens einer Struktur ist auch immer der bekanntere Fall des Shakedown zu beachten, wobei es für dieses Verhalten der Komponenten bei zyklischen Belastungen unterschiedliche Definitionen gibt. Die Definition des ASME-Code lautet:

Shakedown einer Struktur entsteht dann, wenn Ratcheting nach einigen Lastzyklen aufhört. Die Antwort der Struktur auf die anschließenden Lastzyklen ist elastisch oder elastisch-plastisch, wobei keine fortschreitende inkrementelle inelastische Deformation entsteht. Elastischer Shakedown ist der Fall, in dem die nachfolgende Antwort rein elastisch ist.

1.3 Die verschiedenen Ratcheting-Typen

1.3.1 Material-Ratcheting

Material-Ratcheting kann unter homogenen Belastungen auftreten und ist ein reiner Werkstoffeffekt (siehe dazu auch Kapitel E). Material-Ratcheting ist nicht der Gegenstand dieser Arbeit, soll hier aber kurz angesprochen werden, da in den FE-Rechnungen verschiedene Stoffgesetze und temperaturabhängige Materialdaten benutzt wurden, die diesen Effekt hervorrufen können.

Eine Übersicht über Werkstoffverhalten, welche zu Ratcheting führen können, gibt u.a. Hübel [2, 3]. Vor allem in den letzten Jahren wurden viele Untersuchungen zu diesem Problem durchgeführt. Erstes Ziel dabei ist es, das in Experimenten beobachtete Ratcheting unter homogenen Belastungen in bestehende Stoffgesetze zu integrieren

oder verbesserte Stoffgesetze zu entwickeln [4]. Verschiedene Stoffgesetze bieten die Möglichkeit über die Variation mehrere Parameter das Materialverhalten an die experimentell erhaltene Daten anzupassen. So versucht z.B. Guionnet [5, 6] für zweiachsige Spannungszustände über eine Anpassung der Armstrong-Frederick Gleichung für die kinematische Variable des viskoplastischen Modells von Chaboche [7] eine Anpassung an experimentelle Ergebnisse zu erhalten. Diese Anpassung bezieht sich jedoch nur auf einen austenitischen Stahl bei $600^{\circ}C$.

Chaboche und Nouailhas diskutieren anhand von experimentellen Daten mehrerer Stähle die Fehlerquellen verschiedener Verfestigungsansätze bei der Beschreibung von Ratcheting-Effekten [8, 9]. Ein solcher Ansatz wird z.B. für einen $9Cr - 1Mo$ Stahl bei $550^{\circ}C$ in [10] untersucht. Auch in [11] wird dieser Weg beschritten.

Einen anderen Weg beschreitet Takahashi [12]. Er kommt zu dem Schluß, daß die größten Abweichungen vom beobachteten Ratcheting-Verhalten durch die kinematischen Verfestigungsterme induziert werden.

Verschiedene Stoffmodelle für einen Stahl bei $600^{\circ}C$ werden in [13, 14] mittels Benchmark-Tests und experimentell ermittelten Daten auf ihre Genauigkeit bezüglich der Simulation elastisch-plastischen Verhaltens bei zyklischen Zug-Torsions-Belastungen untersucht.

Für einen AISI Typ 304 Stahl wurden zyklische Zugversuche bei Raumtemperatur durchgeführt und es wurde versucht das zyklische Materialverhalten und insbesondere die Ratcheting-Effekte mittels eines viskoplastischen Stoffmodells nachzubilden [15, 16, 17].

Sasaki und Ishikawa entwickeln ein Stoffgesetz für einen SUS 304 Stahl bei $550^{\circ}C$, um u.a. ein- und mehrachsiges Ratcheting-Verhalten wiedergeben zu können [18].

Für eine ganze Reihe von Werkstoffen entwickelt White u.a. ein isotrop-kinematisches Verfestigungsmodell [19], welches sich jedoch auf zeitunabhängige und kleine Deformationen beschränkt.

1.3.2 Struktur-Ratcheting

Struktur-Ratcheting tritt nur bei inhomogenen Spannungszuständen auf. Es ist auch bei isotropem, ideal-plastischem Material und temperaturunabhängigen Stoffwerten zu beobachten.

Majumdar macht den Vorschlag, das thermische Struktur-Ratcheting in drei Klassen einzuteilen [20, 21]. Als Kriterium gilt dabei die Art der mechanischen Spannung (Primärspannung) und der thermischen Spannung (Sekundärspannung). Besitzen beide Spannungen einen Membran-Charakter, so spricht er von Typ-I Ratcheting. Besitzt dagegen die thermische Spannung Biegecharakter, so wird die Bezeichnung Typ-II Ratcheting eingeführt. Haben schließlich beide Spannungen Biegecharakter, so ist vom Typ-III Ratcheting zu sprechen. Das bekannte Bree-Diagramm beschreibt

somit Typ-II Ratcheting. Die hier durchgeführten Untersuchungen befassen sich dagegen mit Typ-III Ratcheting.

1.3.2.1 Typ-I Ratcheting

Das zuerst untersuchte thermische Ratcheting ist vom Typ-I, welcher im Anhang F.1 beschrieben wird. Die Bezeichnung Ratcheting tritt zuerst bei Miller im Jahre 1959 auf [22]. Zuvor wurde das Problem unter der allgemeinen Bezeichnung des zyklischen plastischen Verhaltens von Werkstoffen behandelt. Auch die Bezeichnung *inkrementeller Kollaps* ist in der Literatur zu finden, so z.B. bei Parkes [23] und Gill [24]. Beruhend auf der Berechnung der Shakedown-Lasten untersucht letzterer das Drei-Stab-Problem, allerdings unter rein mechanischen Belastungen. Ruiz untersucht das Drei-Stab-Problem unter konstanter mechanischer Last und Temperaturzyklen, wobei als eine weitere Variable das Flächenverhältnis der Stäbe eingeführt wurde [25]. In einem Experiment zum thermischen Ratcheting zeigt Uga [26] anhand des Drei-Stab-Modells den Einfluß der Materialdaten auf das Ratcheting-Verhalten, eine Überlagerung des Struktur- und des Material-Ratchetings. Eine ebenfalls experimentelle Arbeit zum Typ-I Ratcheting wurde von Ainsworth durchgeführt [27]. Megahed untersucht in zwei Arbeiten den Einfluß linearer Verfestigungsmechanismen und zyklischer Phänomene, einschließlich des Materialratchetings, analytisch und experimentell [28, 29]. Unter Typ-I Ratcheting, auch wenn es sich hier nicht um thermisches Ratcheting handelt, fallen auch die Untersuchungen an dünnen, rohrförmigen Körpern, welche unter konstanter axialer Zugbelastung zyklischen Verdrehungen in der Querschnittsebene ausgesetzt werden [30].

1.3.2.2 Typ-II Ratcheting

Typ-II Ratcheting führte zu der Entwicklung des Bree-Diagramms, welches z.B. im ASME-Code verwendet wird. Schon vor Bree wurden zu diesem Ratcheting-Typ zahlreiche Untersuchungen durchgeführt. Eine der ersten Quellen waren Untersuchungen an den Tragflächen von Flugzeugen [31]. In diesem Fall bestehen die Belastungen aus einer idealisiert konstanten Traglast und ihnen überlagerten Aufheizeffekten durch aerodynamische Vorgänge an der Tragflächenaußenseite. Weitere Untersuchungen zu diesen Strukturen stammen von Ayers [32].

An Reaktorkomponenten wurde das Phänomen zuerst von Miller [22], Burgreen [33, 34], Mulcahy [35, 36] und Bree [37] erkannt und diskutiert.

Miller [22] zieht Parallelen zwischen dem Zweistab-Modell des Typ-I Ratcheting (Ka-

pitel F.1) und dem Lastfall des Typ-II Ratcheting. Er untersucht für einen dünnwandigen Zylinder mit linearem Temperaturgradienten und parabolischer Temperaturverteilung die Grenzen, von denen an zyklisches Wachstum einsetzt. Burgreen gelangt zu diesem Ratcheting Typ über das oben beschriebenen Typ-I Ratcheting [33], indem er die Zweistabanordnung durch den Übergang über unendlich viele Stäbe unterschiedlicher Temperatur auf ein Kontinuum mit einem linearen Temperaturgradienten überführt [34]. Zusätzlich untersucht er den Effekt innerer Wärmequellen in der Zylinderwand auf das Ratcheting, die eine parabolische Temperaturverteilung erzeugen. Brees Ergebnisse führten zum Bree-Diagramm, in welchem nicht nur das Verhältnis der Primär- zur Sekundärspannung, sondern auch viskose Effekte wie der des Kriechens berücksichtigt werden [38]. In [39] und [40] wird gezeigt, daß eine Grenze für die Dehnungsakkumulation unter Einschluß des Kriechens auch auf dem Konzept des elastischen Kerns, also ohne Berücksichtigung plastischer Dehnungen, bestimmt werden kann. Anderson führte experimentelle Arbeiten hierzu durch [41]. Andere Untersuchungen konzentrierten sich auf die Bestimmung und Untersuchung von Residuen-Spannungen, welche zu einem Shakedown von Strukturen führen können [42, 43]. Einen dünnwandigen zylindrischen Körper untersuchen Wada u.a [44] und Igari u.a. [45]. Als einzige Belastung tritt hier aber nur eine axial wandernde Wärmequelle auf. Edmunds und Beer untersuchen die Wirkung kleiner konstanter mechanischer Belastungen bei hohen zyklierenden thermischen Belastungen. Einfache Strukturen werden analytisch und experimentell behandelt [46].

Der Einfluß des Materialmodells auf das Ratcheting-Verhalten wird von Hardy u.a diskutiert [47]. Ein Balken wird einer konstanten Zuglast und einem zyklierenden Biegemoment ausgesetzt. Diese Art der Belastung wird experimentell auf einen Balken aus einem Modell-Material aufgebracht und mit FE-Rechnungen mit verschiedenen linearisierten Material-Modellen verglichen.

Eine linearisierte Theorie für Ratcheting bei Belastungen oberhalb der Shakedown-Grenze für das Zweistabproblem, wie es Megahed schon besprochen hat, und für das Bree-Problem wird von Ponter und Cocks entwickelt [48, 49].

Die gesamte Theorie von Bree für Typ-II Ratcheting gilt nur für dünnwandige rohrförmige Strukturen. In dickwandigen Rohren dagegen ist schon die Entwicklung der plastischen Zonen sehr verschieden, wie z.B. in [50] gezeigt wird. Es kommt hinzu, daß sich bei den nur kurzen Haltezeiten der Temperaturbelastung ein nicht-linearer Temperaturgradient über der Wanddicke einstellt. Eine Untersuchung zu diesem Problem stammt von Breitbach u.a [51], in welcher allerdings der zyklischen Temperaturbelastung eine konstante axiale Zugkraft überlagert wird und dadurch eine axiale Elongation mit der Zyklenzahl stattfindet - im Gegensatz zum Bree-Lastfall, bei dem die Dehnungsinkremente in Umfangsrichtung entstehen.

Goodall und Cook [52] präsentieren Ergebnisse, die mit einem Balken erreicht wurden, welcher gelenkig gelagert ist und bei dem die Wärmespannungen durch zyklische

Änderungen der Krümmung ersetzt wurden. Sie zeigen, daß auch mit vereinfachten Materialmodellen in der analytischen Lösung gute Übereinstimmung mit den Experimenten erreicht werden kann.

Einige Vereinfachungen, welche der Betrachtungsweise von Bree zugrunde liegen, werden von Chern und Pai [53] zurückgenommen. Sie entwickeln ein Programm mit welchem eine zweidimensionale Lösung des Problems möglich ist. Zudem sind alle Materialdaten temperaturabhängig. Neben dem Innendruck und dem Temperaturgradienten sind auch andere axialsymmetrische Temperaturverteilungen möglich und ebenso axiale Spannungen und Oberflächenspannungen.

Eine Kopplung von Material- und Struktur-Ratcheting macht auch das Programm von Hsu und Too möglich [54]. Mit diesem wurden bei verfestigendem Material mit temperaturabhängigen Materialdaten Ratcheting-Untersuchungen an Reaktorkomponenten durchgeführt. So auch an einem Reaktordruckbehälter mit einem größeren Verhältnis von Wanddicke zu Durchmesser als es die analytische Lösung nach der Bree-Methode zuläßt.

1.3.2.3 Typ-III Ratcheting

Auch zum Ratcheting am Biegebalken wurde bereits eine Analyse durchgeführt [20, 21]. Es wurde jedoch für notwendig erachtet, das Problem unabhängig zu untersuchen, um einige noch offene Fragen zu klären und die vorhandene Lösung zu überprüfen. Zur Ermittlung einer analytischen Lösung wurden ähnliche Vereinfachungen getroffen. Die Ansätze wurden unabhängig voneinander eingeführt und nur die Notation wurde angeglichen um einen Vergleich der Ergebnisse zu vereinfachen. Es zeigt sich, daß sich auf zum Teil unterschiedlichen Lösungswegen ein gleiches Kriterium für die Belastungsgrenzen zum Ratcheting ergibt. Korrekturen ergaben sich für andere Bereiche des Diagramms. In der vorliegenden Arbeit wird die Materialverfestigung mittels FE-Rechnungen behandelt, ein Einfluß der in [20, 21] nicht berücksichtigt wird.

Mit einer identischen Struktur, die aber durch Temperaturschocks belastet wird, beschäftigen sich Wolters u.a. [55, 56]. In diesem Falle stellt sich durch die schnelle Aufbringung des Wärmestromes und dessen kurze Haltezeit ein nichtlinearer Temperaturgradient ein. Dieser führt selbst bei einem freigelagerten Balken zu einem Ratcheting-Verhalten.

1.3.2.4 Andere auf Ratcheting untersuchte Strukturen

Ratcheting-Untersuchungen an einer dicken kreisförmigen Platte, welche gelenkig gelagert ist und eine radiale lineare Temperaturverteilung besitzt, werden in [57] durchgeführt. Für verschiedene Kombinationen von Druckbelastung und thermischen Spannungen werden FE-Ergebnisse vorgelegt und mit analytischen Ergebnissen verglichen. Eine andere auf Ratcheting untersuchte Struktur sind Rohrwinkel. In [58] werden Experimente an Rohrwinkeln unter konstantem Innendruck und niedrig-frequenten Schwingungen in der Winkelebene durchgeführt. Die zyklischen Spannungen werden hier nicht durch thermische Dehnungen sondern durch freie Endverschiebungen verursacht. Die Ergebnisse wurden mit FE-Rechnungen extrapoliert und mit analytischen Ermüdungsgesetzen verglichen. Ratcheting führt hier zur Vergrößerung des Knickwinkels.

Das Ratchetingverhalten eines Rohrwinkels unter Innendruck und zyklischen Biegebelastungen wird in [59] behandelt. Bei längeren Haltezeiten und hohen Temperaturen kommt es dabei zum Kriech-Ratcheting, ein Effekt, der vor allem für die Schnelle-Brut-Reaktoren von Interesse ist. Die Tests wurden auch zur Validierung komplexer Finit-Elemente Modelle genutzt.

Komplexere, nicht mehr so einfach analytisch behandelbare Probleme sind nur durch dem Problem angepaßte FE-Codes zu berechnen. Ein Beispiel liefert Valanis [60] mit einer gekerbten Platte unter zyklischen Zugdehnungen. Akel und Nguyen untersuchen mit Hilfe numerischer Methoden elastisch-plastisches Verhalten am Beispiel einer gelochten Platte unter Zug-Druck Belastung (Shakedown, plastische Zonen), bzw. einer Platte mit Riss unter zyklischer Zugbelastung [61].

Eine wichtige Untersuchung für die Entwicklung plastischer Zonen in Schalen macht Orçan [62]. Er beschreibt die Entwicklung der Zonen in Abhängigkeit von den Lastparametern und den Radii-Verhältnissen bei einer sphärischen Schale aus isotrop verfestigendem Material. Bei thermischer Belastung der Innenwand liegt ein zweidimensionaler Spannungszustand vor.

1.3.3 Kriech-Ratcheting

Kriech-Ratcheting entsteht bei der Überlagerung von Kriechvorgängen bei hohen Temperaturen, welche zyklisch auf eine Struktur wirken und längere Standzeiten besitzen. Als Auslegungskriterium gelten dann weder das reine Kriechen, noch eine Auslegung gegen Shakedown, Kurzzeitermüdung oder Ratcheting, sondern eine Kombination aus den beiden Schadensprozessen. Es ist damit sowohl ein Werkstoff- als auch ein Struktureffekt. Zu erwähnen ist es in diesem Zusammenhang deshalb, weil die Untersuchungen dieses Strukturverhaltens eng mit den Ratcheting-Untersuchungen an den durch hohe Temperaturen belasteten Strukturen der Schnelle-Brut-Reaktoren ver-

bunden sind.

Es soll nur kurz auf entsprechende Literatur verwiesen werden. Es wurden sowohl vereinfachte Design-Methoden und Kriterien entwickelt [63, 64] als auch entsprechende Versuche durchgeführt [65, 66]. Die notwendigen Materialdaten für wichtige metallische Werkstoffe stammen aus Versuchen, wie sie z.B. in Cambridge durchgeführt wurden [67].

1.4 Lösungsverfahren

Im Grunde gibt es zwei Vorgehensweisen, um zu einer Aussage über das Ratcheting-Verhalten einer Struktur zu kommen: Eine Vereinfachung der Zusammenhänge, um eine analytische Behandlung und damit ein tieferes Verständnis des Problems zu ermöglichen, oder eine detaillierte numerische Betrachtung z.B. mittels Finite-Elemente-Rechnungen.

Eine wesentliche Schwierigkeit und auch der größte Nachteil der analytischen Lösung liegt in den zu treffenden Vereinfachungen und den daraus resultierenden Abweichungen von den realen Gegebenheiten. Von Vorteil ist, daß Zusammenhänge anschaulich beschrieben werden können, Wirkungsweisen erkennbar und die Aussagen nachvollziehbar sind. Meist ist zudem eine graphische Darstellung möglich und sinnvoll.

Die numerische Betrachtung dagegen liefert mitunter zwar sehr detaillierte Auskünfte über die Spannungszustände, benötigt aber enormen Diskretisierungsaufwand und große Rechenleistung. Weiterhin ist diese Art der Betrachtung immer nur auf den speziellen Belastungsfall anwendbar, was durch die Genauigkeit der gewünschten Aussage und damit verbunden genauen Diskretisierung impliziert wird.

Sinnvoll ist es in vielen Fällen beide Wege parallel zu beschreiten und die jeweiligen Ergebnisse zu vergleichen. Dadurch können die Fehler, welche durch Vereinfachungen auf analytischer Seite gemacht werden, klassifiziert und beurteilt werden, andererseits können die numerischen Berechnungen im Zusammenhang mit der analytischen Betrachtung besser bewertet und ihre Bedeutung für entsprechende Probleme abgeschätzt werden.

Auch in dieser Arbeit werden beide Wege beschritten. Zuerst wird das Problem des Typ-III Ratcheting analytisch behandelt, anschließend wird die Zuverlässigkeit dieser Lösung anhand von FE-Rechnungen diskutiert.

Kapitel 2

Analytische Lösung

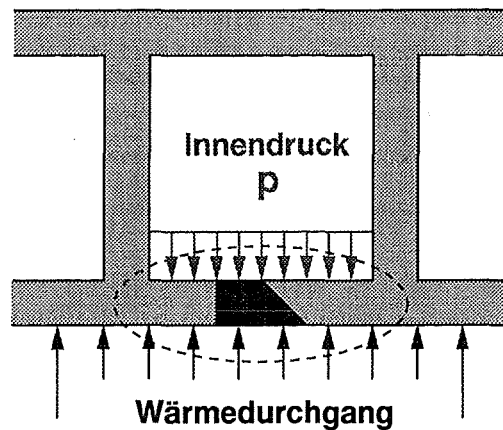
2.1 Vereinfachung der Geometrie der Ersten Wand

Die dem Plasma zugewandte Seite der Kühlkanalstruktur bildet eine sehr langgestreckte Platte, deren Einspannungen aus den Stegen zwischen den einzelnen Kanälen bestehen. Ihren Abschluß bilden die Krümmungen zu den Seitenflächen der Blanketmodule. Für einen zweidimensionalen Körper ist aber eine geschlossene Lösung des hier vorliegenden Ratchetings nicht möglich. Deshalb wird das Problem auf einen Biegebalken und damit auf ein eindimensionales Problem reduziert. Durch die langgestreckte Form der Platten erfaßt diese Näherung die Durchsenkung in einem weiten Plattenbereich sehr gut. Bild 2.1 illustriert die geometrischen Vereinfachungen. Ein radial-poloidaler Schnitt durch die Struktur der ersten Wand mit ihren Kühlkanälen (Anhang A) zeigt die Geometrie mit den angrenzenden Kanälen und den durch diese gegebenen Randbedingungen. Das Balkenproblem bezieht sich nun auf die dem Plasma zugewandte Seite der Ersten Wand. Durch den geführten Schnitt entsteht an dieser Stelle ein Plattenstreifen - der Kühlkanal läuft in die Bildebene hinein. In dem Plattenstreifen wird gegenüber einem Biegebalken die Querkontraktion behindert, wodurch eine scheinbare Vergrößerung des Elastizitätsmoduls auftritt (Anhang C). Unter Beachtung dieses Effekts kann man die Untersuchungen an einem festeingespannten Biegebalken durchführen.

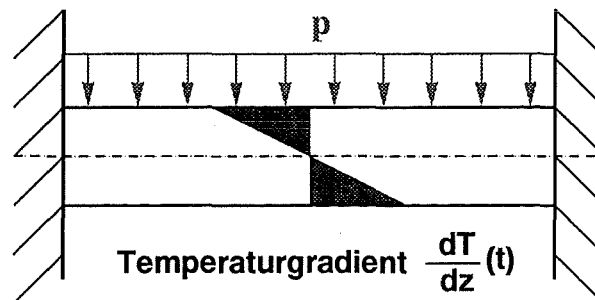
Die idealisierte feste Einspannung ist eine weitere Vereinfachung der realen Struktur. In dieser befindet sich der Balken zwischen zwei, die einzelnen Kühlkanäle trennenden Stegen, welche durch ihre Materialeigenschaften weder einer starren Einspannung, noch einer gelenkigen Lagerung entsprechen. Die Näherung durch eine feste Einspannung scheint aber durch die beidseitige Druckbelastung der Stege durch das Kühlmittel und die nur geringen möglichen axialen Verschiebungen an den Balkenenden

gerechtfertigt.

Desweiteren wird die mittlere Wärmedehnung der Gesamtstruktur vernachlässigt. Diese entsteht z.B. schon beim Einbau der Erste Wand-Struktur und das anschließende Erwärmen auf die Betriebstemperatur.



poloidal-radialer Schnitt durch die Erste Wand



Eindimensionales Balkenmodell:

- mittlere Wärmedehnung wird vernachlässigt
- feste Einspannung des Balkens

Abbildung 2.1: Eindimensionales Modell für die Erste Wand

2.2 Problemstellung

Ausgangspunkt der analytischen Betrachtung ist ein beidseitig fest eingespannter Balken mit einem Rechteck-Querschnitt aus einem homogenen, elastisch ideal-plastischen Material mit temperaturunabhängigen Materialdaten.

Da das gesamte System mit seinen Belastungen bezüglich der halben Balkenlänge symmetrisch ist, wird in allen folgenden Betrachtungen nur der halbe Balken herangezogen (Abbildung 2.2).

Die Geometriegrößen, Koordinaten, Belastungen und notwendigen Materialparameter sind wie folgt definiert:

- Balkenlänge l
- Balkenhöhe $2h$
- Balkentiefe b
- Balkenlängskoordinate x
- Richtung des wirkenden Biegemoments y
- Richtung der Balkendurchsenkung z
- Balkendurchsenkung $w(x)$

Die Belastungen bestehen aus:

- Linienlast p
- Über der Balkenhöhe auftretender Temperaturgradient ΔT

Die Stoffwerte des Balkens sind:

- Elastizitätsmodul E
- Temperaturunabhängige, isotrope Fließgrenze σ_y
- Temperatureausdehnungskoeffizient α

Der Balken steht von Anfang an unter der gleichmäßig über der Balkenlänge verteilten mechanischen Belastung p auf der Balkenseite $z=+h$. Es sei ohne Einschränkung des Mechanismus angenommen, daß die mechanische Belastung nur zu einer elastischen Antwort des Balkens führt, d.h. das Biegemoment in der Einspannung, dem Ort des maximalen Biegemoments, soll kleiner sein als das Eingangsfleißmoment.¹

¹Das Eingangsfleißmoment oder auch elastisches Grenzmoment ist definiert als jene Momentenbelastung, bei der im Balkenquerschnitt die äußeren Fasern die Fließgrenze erreichen.

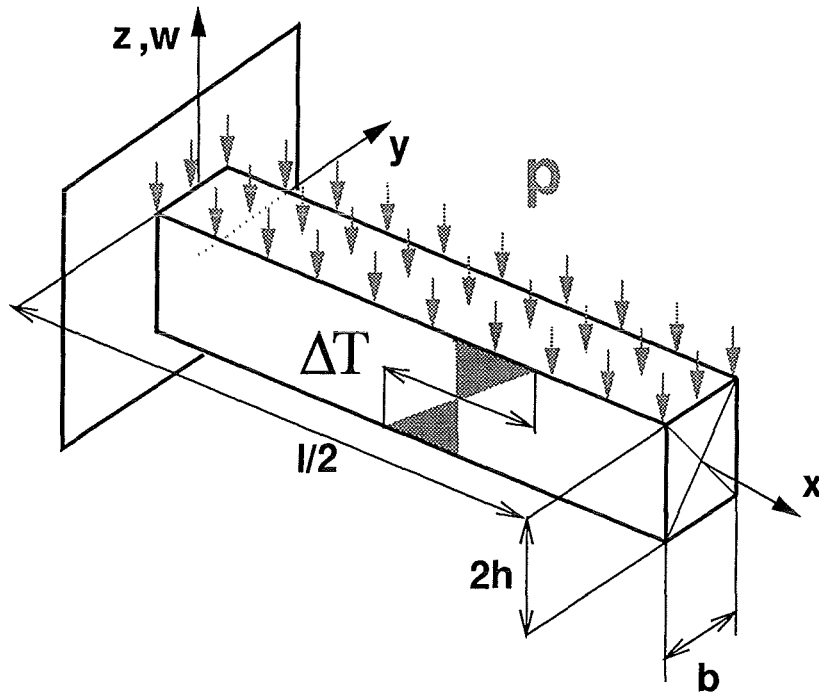


Abbildung 2.2: Abmessungen und Belastungsgrößen des Balkens

Zusätzlich zur mechanischen Belastung wird in zyklischer Folge ein Temperaturgradient der Größe $\frac{\Delta T}{2h}$ über der Balkenhöhe aufgebracht. Dabei ist zu beachten, daß keine Temperaturdehnungen in der Balkenachse auftreten sollen. Dies wird erreicht durch eine Abkühlung der Oberseite des Balkens ($z = +h$) und eine Aufheizung der Unterseite ($z = -h$) bei einer unveränderten Temperatur der neutralen Faser. Durch den anschließend aufbrachten Temperaturgradienten soll lokal die Fließgrenze überschritten werden.

Eine Verfestigung des Materials wird in der analytischen Lösung nicht berücksichtigt.

2.3 Erläuterung des Ratcheting-Mechanismus

Die anfänglich aufbrachte mechanische Belastung p erzeugt eine Biegemomenten-Verteilung (durchgezogene Linie) und eine Biegelinie, d.h. eine Durchsenkung der Balkenachse (gestrichelte Linie), nach Abbildung 2.3 a).

Dieser Biegemomenten-Verteilung wird durch den Temperaturgradienten ein über der Balkenlängskoordinate konstantes Biegemoment überlagert. Der Temperaturgradient soll in der folgenden Überlegung allmählich vergrößert werden, und damit auch das überlagerte Biegemoment. Auf die Biegelinie des Balkens hat dies jedoch keinen Ein-

fluß, solange in keinem der Querschnitte das Eingangsfleißmoment M_y erreicht wird, Abbildung 2.3 b).

Bei einer weiteren Erhöhung des Temperaturgradienten über der Balkenhöhe - im folgenden auch als *Aufheizen* des Balkens bezeichnet - erreichen die äußeren Fasern des Querschnittes in der festen Einspannung als erste die Fließgrenze und damit das Biegemoment den Wert M_y . Von nun an führt die Erhöhung des Temperaturgradienten auch zu einer Zunahme der Balkendurchsenkung. Diese ist auf die Abnahme der Balkensteifigkeit und der daraus resultierenden Zunahme der Krümmung in den sich lokal ausbildenden plastischen Bereichen zurückzuführen. Es gilt aber noch immer die Randbedingung einer horizontale Tangente in den Einspannungen, Abbildung 2.3 c).

Erreicht die plastische Zone die neutrale Faser - als erstes geschieht dies natürlich in den am höchsten belasteten Querschnitten in der Einspannung - so entspricht dies einem Biegemoment von $1,5 M_y$ ². Eine weitere Erhöhung des Biegemoments ist nicht mehr möglich, d.h. auch bei höheren Temperaturgradienten bleibt das Biegemoment in der Einspannung auf diesem kritischen Wert (siehe dazu auch Abschnitt 3.5). In der Einspannung hat sich ein plastisches Gelenk gebildet, das in der eindimensionalen Theorie einer punktförmigen gelenkigen Lagerung entspricht. Durch die weitere Erhöhung des Temperaturgradienten verformt sich der Biegebalken nun mit einer Zunahme des Neigungswinkels α in den Einspannstellen, Abbildung 2.3 d). Die dabei auftretenden Verformungen werden den zuvor entstandenen Verformungen des beidseitig fest eingespannten Balkens überlagert (Die gepunktete Linie zeigt die Verformung mit horizontaler Tangente als Randbedingung, die gestrichelte Linie die überlagerte Verformung). Ist der maximale Temperaturgradient erreicht, hat sich eine Neigung in der Einspannung eingestellt, welche von der Differenz des zur Gelenkbildung notwendigen thermischen Momentes und dem auf elastischer Basis berechneten maximalen thermischen Biegemoment bestimmt wird, Abbildung 2.3 d).

Sobald der Temperaturgradient abgebaut wird - im weiteren auch als *Abkühlen* bezeichnet - sinkt das Biegemoment in der Einspannung unter das Biegemoment von $1,5 M_y$ und es liegt wieder eine feste Einspannung vor. Die zuvor entstandene Neigung in der Einspannung bleibt also im folgenden erhalten. Die *Abkühlung* führt unter dieser Randbedingung zu einem konstanten Absenken des Biegemomentes über der Balkenlänge ohne eine Veränderung der Biegelinie. Erst wenn das minimale Biegemoment in der Balkenmitte zu plastischen Krümmungen führt, entsprechend einem Biegemoment kleiner als $-M_y$, verändert sich die Biegelinie. Aufgrund der zusätzlichen plastischen Krümmung in der Balkenmitte entstehen zusätzliche vertikale Verschie-

²Bei einem Balken mit Rechteckquerschnitt

bungen. Wie auch während des Aufheizvorganges besitzt das minimale Biegemoment einen Grenzwert von $-1,5M_y$. Findet daraufhin ein weiterer Abbau des Temperaturgradienten auf den Ausgangszustand von $\Delta T = 0$ statt, so hat dies keine Veränderung der Biegemomentenverteilung zur Folge, denn jetzt liegt der Modus eines Balkens mit beidseitig fester Einspannung und einem Gelenk in der Mitte vor. Ein Abkühlen auf den Ausgangszustand führt somit zu einem Knick der Größe 2β in der Balkenmitte und damit zur Überlagerung weiterer plastischer Verformungen³. Die Größe des Knicks 2β ist wieder definiert durch die Differenz zwischen dem maximalen, elastisch berechneten Moment und dem in der Balkenmitte zur Gelenkbildung notwendigen thermischen Moment, Abbildung 2.3 e)

Für jeden weiteren Temperaturzyklus akkumulieren die plastischen Durchsenkungen. Das unbegrenzte Wachsen dieser Verschiebungen wird Ratcheting des Biegebalkens genannt.

³Die spätere detaillierte Analyse wird jedoch zeigen, daß das negative kritische Biegemoment von $-1,5M_y$ nur asymptotisch erreicht wird und sich somit kein Knick, sondern nur eine lokal erhöhte Krümmung einstellt.

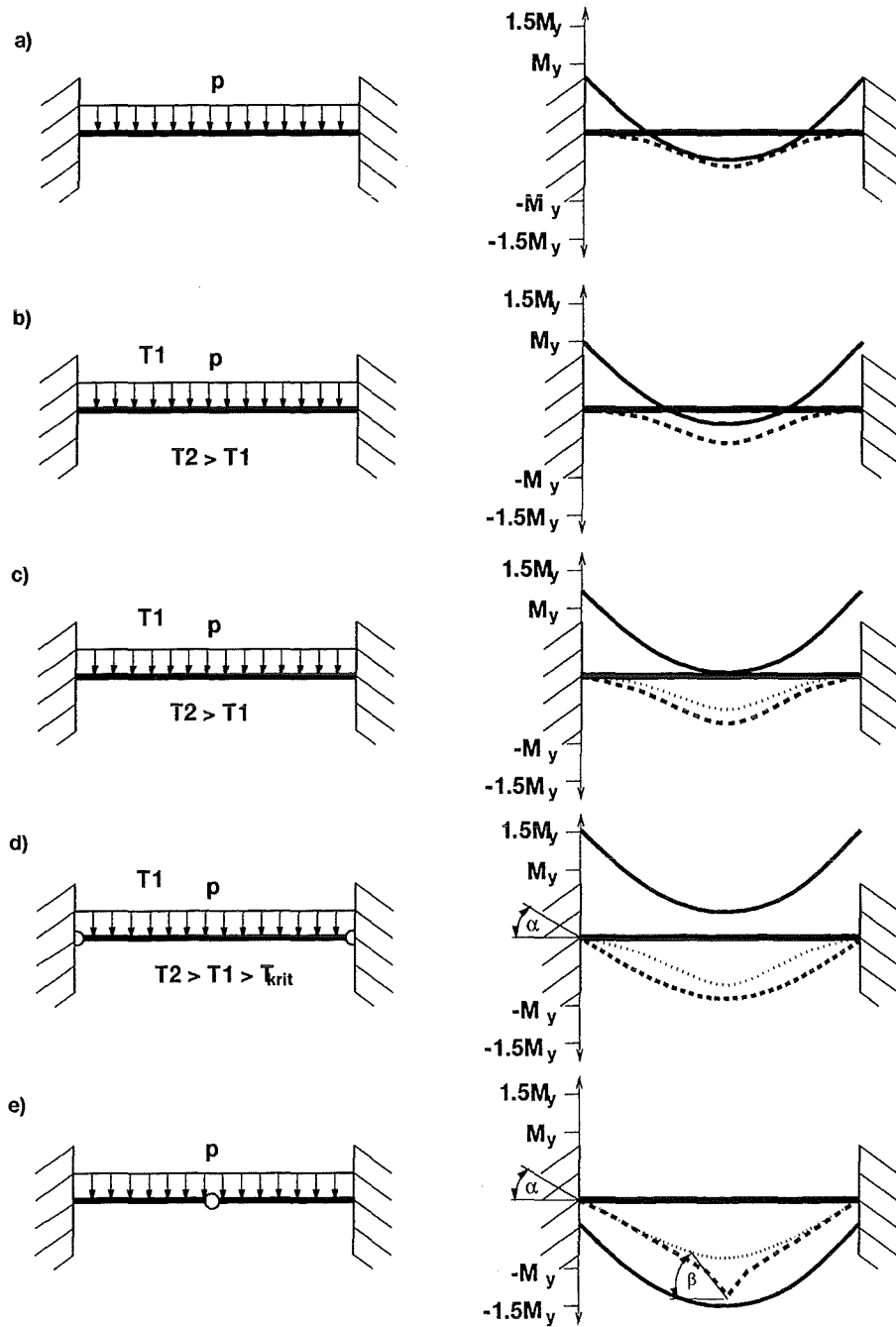


Abbildung 2.3: Phasen des Balkenratcheting

Gepunktete Linien zeigen die Biegelinie der vorangegangenen Phase

- (a) Rein mechanische Belastung (Ausgangszustand)
- (b) Zusätzliche thermische Belastung durch überlagerten Temperaturgradienten
- (c) Ausbildung plastischer Zonen und dadurch zusätzliche Krümmungen
- (d) Bildung plastischer Gelenke in den Einspannungen (max. Temperaturgradient)
- (e) Bildung eines plastischen Gelenks in der Balkenmitte durch Abkühlen auf Ausgangszustand

Dieser Ratcheting-Mechanismus ist also durch das Verhalten der Biegemomentenverteilung, der Biegelinie und der Randbedingungen, d.h feste oder gelenkige Lagerung oder Gelenk in der Balkenmitte, bedingt:

- Das Aufbringen eines thermischen Gradienten verschiebt bei einem beidseitig fest eingespanntem Balken die Momentenlinie nach "oben", der Abbau des Gradienten verschiebt sie nach "unten".
- Ist das Biegemoment an jeder Stelle des Balkens geringer als das elastische Grenzmoment ($|M| \leq M_y$), so hat die Verschiebung der Momentenlinie keinen Einfluß auf die Biegelinie.
- Überschreiten die Maxima des Biegemomentes dagegen das elastische Grenzmoment, $M_y \leq |M| \leq 1,5M_y$, so treten an diesen Stellen überproportionale plastische Krümmungen und damit eine zusätzliche Durchbiegung auf.
- Erreichen die Maxima den für den Rechteckquerschnitt kritischen Wert $|M| = 1,5M_y$, so führt dies an diesen Stellen zu einem Knick in der Biegelinie.
- Für den Balken mit gelenkigen Einspannungen, oder den Balken mit festen Einspannungen und einem Gelenk in der Balkenmitte, führt eine weitere Erhöhung des Temperaturgradienten, und damit eine über der Balkenlänge konstante Erhöhung des Biegemomentes, zu einer Änderung der Biegelinie.
- Sinkt das maximale Biegemoment unter den kritischen Wert $|M| = 1,5M_y$, so bleiben eventuelle Knicke in der Biegelinie erhalten.
- Sinkt das maximale Biegemoment unter das elastische Grenzmoment, so bleiben die überproportionalen plastischen Krümmungen erhalten.
- Durch den Wechsel der Einspannbedingungen des Balkens während eines vollen Lastzyklus addieren sich die plastischen Krümmungen. Der Vorgang wiederholt sich für jeden Lastzyklus. Die Durchsenkung nimmt schrittweise zu.

2.4 Beschreibung des Problems mit der klassischen Balkentheorie

2.4.1 Annahmen und Vereinbarungen

Wie in der klassischen Balkentheorie üblich, wurden folgende Annahmen und Vereinfachungen getroffen (siehe auch Anhang C):

- Der Balken ist in seinem Ursprungszustand gerade und unverformt.
- Alle Belastungen greifen in der neutralen Faser an. Bei einem Rechteckquerschnitt und homogenem Material ist diese gleich der Balkenachse.
- Die Deformation des Balkens wird durch die Verformung der neutralen Faser charakterisiert.
- Die Verformungen seien klein $\frac{\partial w}{\partial x} \ll 1$. Damit sind folgende Näherungen möglich:
 - Die Vereinfachung der Krümmungsgleichung von

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

auf

$$\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

- Das Gleichgewicht der Kräfte und Momente wird immer am unverformten Balken gebildet.
- Die Balkenquerschnitte, welche im unverformten Zustand eben sind und senkrecht auf der neutralen Faser stehen, erfüllen diese Bedingungen auch im verformten Zustand. Es findet keine Verwölbung statt.
- Es treten für reine Biegung keine Schubspannungen auf (Bernoulli-Hypothese). Damit herrscht im Balken ein eindimensionaler Spannungszustand, beschrieben durch die Balkenlängsspannung.

$$\sigma_{xx} \neq 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

2.4.2 Allgemeine Gleichungen der Momenten- und Biegelinie

Die folgenden Größen sollen bei der Herleitung der das Problem beschreibenden Gleichungen verwendet werden:

$M(x)$	Biegemoment an der Stelle x
$M_A = M(0)$	Moment in der Einspannstelle
$M_B = M\left(\frac{l}{2}\right)$	Moment in der Balkenmitte

Dabei sind als Größen gegeben:

$M_y = \frac{2}{3}\sigma_y b h^2$	Eingangsfleißmoment
$M_p = \frac{1}{12}p l^2$	mechanisches Biegemoment
$M_T = \frac{EI\alpha\Delta T}{2h}$	thermisches Biegemoment
$I = \frac{2}{3}b h^3$	Flächenträgheitsmoment

Ferner bedeuten die Bezeichnungen $w''(x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ die Krümmung der elastischen Linie $w(x)$ und $w'(x) = \frac{\partial w}{\partial x}$ die Neigung der elastischen Linie.

Das Gleichgewicht am Balkenelement liefert die Biegemomentenverteilung (dimensionslose Darstellung durch Normierung mit M_y):

$$\frac{M(x)}{M_y} = \frac{M_A}{M_y} - 6\frac{M_p}{M_y} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \quad (2.1)$$

Für elastische Bereiche des Balkens mit konstanter Linienlast und einem Temperaturgradienten über der Balkenhöhe lautet die Momenten-Krümmungs-Beziehung:

$$-\frac{EI}{M_y} w''(x) = \frac{M(x)}{M_y} - \frac{M_T}{M_y} \quad (2.2)$$

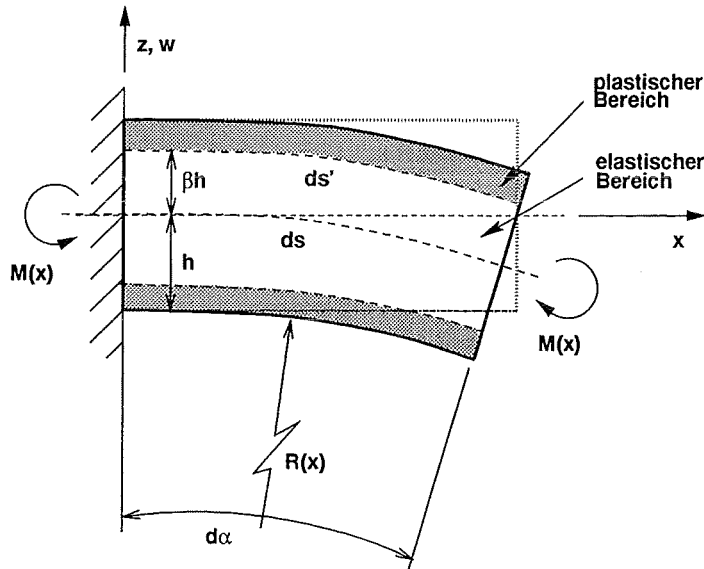


Abbildung 2.4: Plastische Zonen bei reiner Biegung

Im elastischen Fall des beidseitig fest eingespannten Balkens besitzt das Temperaturmoment einen Einfluß auf die Größe des Biegemomentes - in der Größe M_A -, die Krümmung ist jedoch davon unabhängig.

Für diejenigen Bereiche, in denen die Fließgrenze erreicht wird, gilt eine nicht-lineare Beziehung zwischen dem Biegemoment und der Krümmung. Diese Gleichung erhält man durch eine Erweiterung der elastischen Biegetheorie auf plastisches Verhalten (siehe Anhang C):

$$-\frac{EI}{M_y} w'' = \frac{1}{\beta(x)} - \frac{M_T}{M_y}, \quad (2.3)$$

wobei $\beta(x)$ der Anteil des elastischen Restquerschnittes, mit $0 \leq \beta(x) \leq 1$, ist - siehe dazu auch Abbildung 2.4. Dieser hängt mit dem Biegemoment in folgender Weise zusammen (ebenfalls Anhang C):

$$\frac{M(x)}{M_y} = \frac{3 - \beta^2(x)}{2} \quad (2.4)$$

Im speziellen bedeutet dies für die Einspannung:

$$\frac{M_A}{M_y} = \frac{3 - \beta_A^2}{2} \quad (2.5)$$

wobei mit $\beta_A = \beta(0)$ der elastische Restquerschnitt in der Einspannung eingeführt ist.

Im Bereich $-\beta h < z < \beta h$ liegen die Spannungen unterhalb der Fließspannung. Den Wert $\beta(x)$ erhält man aus den Gleichungen 2.1, 2.4 und 2.5 zu:

$$\beta(x) = \sqrt{\beta_A^2 + \frac{12M_p}{M_y} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]} \quad (2.6)$$

Der Übergang zwischen dem elastischen und dem teilplastischen Balkenbereich in Achsrichtung wird beschrieben durch die Ortskoordinate x_1 . Sie berechnet sich aus der Bedingung:

$$M(x_1) = M_y$$

Mit der Gleichung 2.1 ergibt sich:

$$x_1 = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2M_A - M_y}{3M_p}} \right)$$

Mit der Gleichungen 2.5 erhält man daraus:

$$x_1 = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_y}{3M_p} (1 - \beta_A^2)} \right) \quad (2.7)$$

Für $x_1 < \frac{l}{2}$ existiert immer ein elastischer Balkenbereich. Unter Beachtung von Gleichung 2.7 gilt dies für:

$$\frac{M_p}{M_y} > \frac{1 - \beta_A^2}{3} \quad (2.8)$$

Damit sind alle notwendigen Gleichungen und Bedingungen für die Diskussion des elastisch-plastischen Balkenverhaltens während des ersten Aufheizens gegeben. Die für das weitere zyklische Verhalten notwendigen Gleichungen werden an gegebener Stelle hergeleitet.

2.4.3 Erster Halbzyklus - Aufbau des Temperaturgradienten

2.4.3.1 Elastischer Balken

Der gesamte Balken wird nur elastisch beansprucht, wenn in jedem Bereich gilt:

$$M(x) \leq M_y$$

In diesem Falle gilt nur die Differentialgleichung 2.2. Als Randbedingungen werden eine feste Einspannung an der Stelle $x = 0$ und die Symmetrie der Biegelinie in der Balkenmitte bei $x = \frac{l}{2}$ angenommen:

$$\begin{aligned} w'(0) &= 0 \\ w'\left(\frac{l}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Die Integration der Differentialgleichung unter Beachtung dieser Bedingungen liefert als Grenze für das rein elastische Verhalten:

$$M_A = M_y = M_p + M_T \quad (2.9)$$

Das Maximum des Biegemoments tritt in der Einspannung auf und entsteht durch Superposition des thermischen Biegemomentes M_T und des mechanischen Biegemomentes M_p . Das minimale Biegemoment tritt in der Balkenmitte mit $M_B = M_A - \frac{3}{2}M_p$ auf. Die diesem Fall entsprechende Biegemomentenverteilung zeigt Abbildung 2.5.

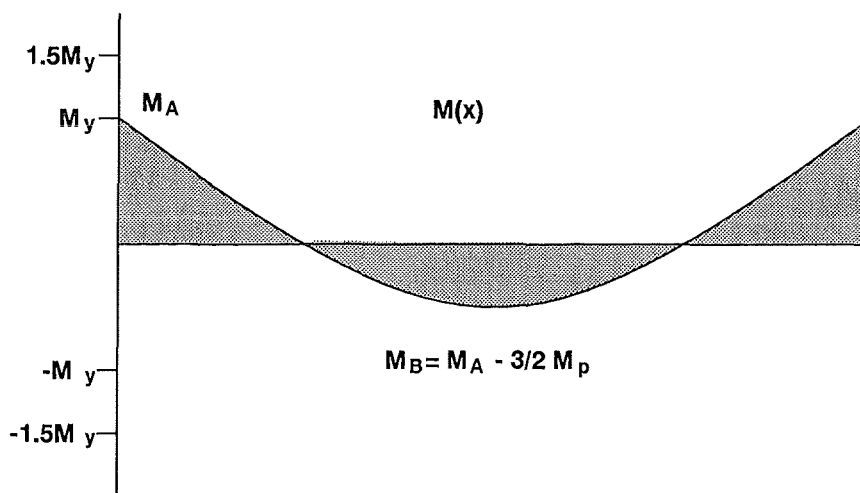


Abbildung 2.5: Grenze des Momentenverlaufs für elastisches Verhalten,
 $M_A = M_y, M_B > -M_y$

Es soll noch der Fall diskutiert werden, daß sowohl in den Einspannstellen als auch in der Balkenmitte gleichzeitig das elastische Grenzmoment erreicht wird, d.h. in der Einspannung ein Biegemoment von $M_A = M_y$, in der Balkenmitte ein Biegemoment von $M_B = -M_y$, Abbildung 2.6.

Aus einer Superposition der Momentenanteile in der Einspannung gemäß 2.9

$$M_A = M_p + M_T$$

und der aus Gleichung 2.1 stammenden Beziehung

$$M_B = M_A - \frac{3}{2}M_p$$

ergeben sich für diesen Grenzfall Werte von:

$$M_p = \frac{4}{3}M_y$$

$$M_T = -\frac{1}{3}M_y$$

Man sieht, daß für die Beschränkung auf ein positives thermisches Biegemoment, was für die Erste Wand sinnvoll ist, dieser Fall nicht auftreten kann.

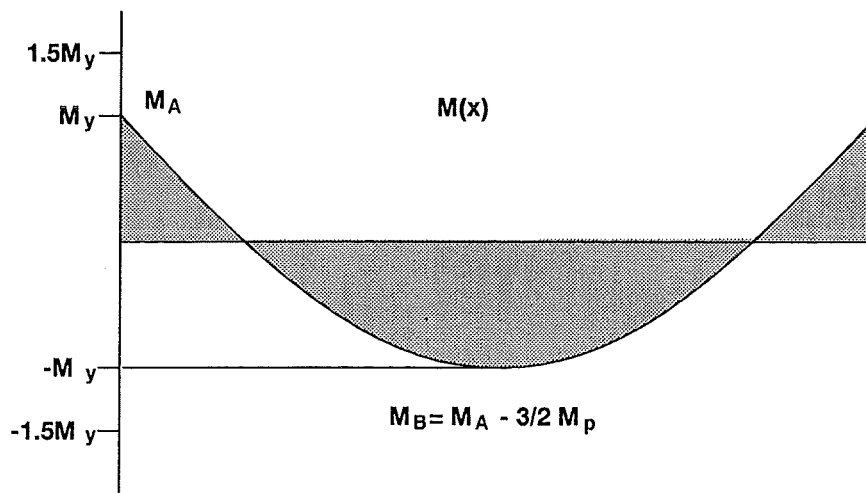


Abbildung 2.6: Grenze des Momentenverlaufs für elastisches Verhalten,
 $M_A = M_y$, $M_B = -M_y$

2.4.3.2 Teilplastischer Balken

Jetzt soll der Fall betrachtet werden, daß nur ein Teil des Balkens durch größere Momente als M_y belastet wird (Abbildung 2.7). Gleichung 2.8 zeigte:

$$\frac{M_p}{M_y} > \frac{(1 - \beta_A^2)}{3}$$

Damit diese Bedingung auch für die Ausbildung eines plastischen Gelenks in der Einspannung, d.h. $\beta_A = 0$ noch erfüllt wird, muß gelten:

$$\frac{M_p}{M_y} > \frac{1}{3}$$

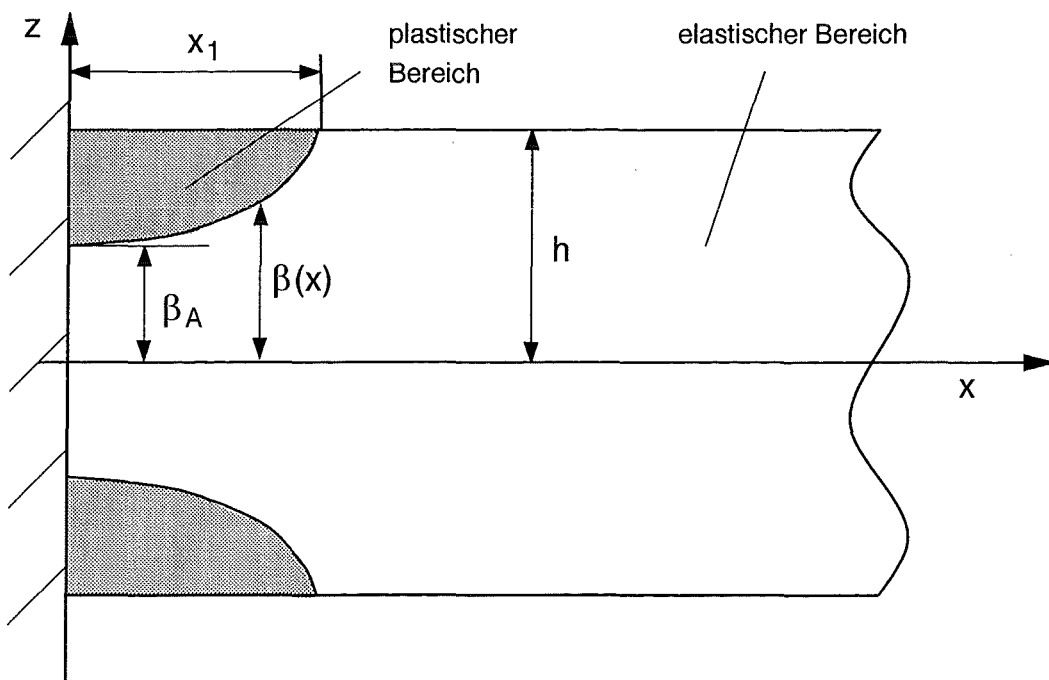


Abbildung 2.7: Ausdehnung der plastischen Zone in der Einspannung für den hier beschriebenen Lastfall.

Die Differentialgleichungen der Biegelinie sind gegeben durch 2.2 und 2.3. Als Randbedingungen stehen nochmals die feste Einspannung und die Symmetrie in der Balkenmitte zur Verfügung:

$$\begin{aligned} w'(0) &= 0 \\ w'\left(\frac{l}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Weiterhin wird verlangt, daß die Neigung an der Stelle x_1 für den elastischen und den plastischen Balkenteil identisch ist, d.h. kein Knick in der Balkenachse entsteht. Schreiben läßt sich dieser Sachverhalt als:

$$\lim_{x \rightarrow +x_1} w' = \lim_{x \rightarrow -x_1} w'$$

Die Integration der Differentialgleichung 2.2 unter Verwendung der Gleichung 2.1 ergibt für den Bereich $x_1 \leq x \leq \frac{l}{2}$:

$$-\frac{EI}{M_y} w'(x) = \frac{M_A}{M_y} x - 6 \frac{M_p}{M_y} \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^2} \right) - \frac{M_T}{M_y} x + const_1$$

Für den plastischen Balkenteil, $0 \leq x \leq x_1$, gilt die Differentialgleichung 2.3. Unter Verwendung der Gleichungen 2.1 und 2.4 ergibt die Integration:

$$-\frac{EI}{M_y} w'(x) = \sqrt{\frac{M_y l^2}{12 M_p}} \arcsin \left(\frac{2 \frac{x}{l} - 1}{\sqrt{\frac{M_y}{3 M_p} \beta_A^2 + 1}} \right) - \frac{M_T}{M_y} x + const_2$$

Die Konstanten lassen sich durch die Beachtung der Randbedingungen ermitteln. Die Übergangsbedingung führt zur Verknüpfung der beiden Differentialgleichungen und liefert folgende Gleichung:

$$\frac{M_T}{M_y} = \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \left[\arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{M_y}{3M_p} \beta_A^2 + 1}} \right) - \arcsin \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{M_y}{3M_p} (1 - \beta_A^2)}}{\sqrt{\frac{M_y}{3M_p} \beta_A^2 + 1}} \right) \right] + \left[1 - \frac{M_y}{3M_p} (1 - \beta_A^2) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{M_p}{M_y} \left[1 - \frac{M_y}{3M_p} (1 - \beta_A^2) \right]^{\frac{3}{2}} \quad (2.10)$$

In der so erhaltenen Gleichung 2.10 sind die drei unbekanntenen Größen M_p , M_T und β_A enthalten. Von Interesse für das elastisch-plastische Verhalten des Balkens ist die Größe β_A . Es ist jedoch nicht möglich nach dieser aufzulösen. Löst man hingegen nach dem thermischen Biegemoment auf, kann man für bestimmte Grenzfälle, definiert durch den elastischen Restquerschnitt in der Einspannung, das Balkenverhalten für bestimmte Kombinationen der Belastungsgrößen M_p und M_T diskutieren.

Es ist darauf zu achten, daß Gleichung 2.10 nur für ein Verhältnis des mechanischen Momentes M_p zum Eingangsfießmoment von $\frac{M_p}{M_y} \geq \frac{1}{3}$ gilt. Andernfalls werden alle Bereiche des Balkens plastisch beansprucht und anstelle der beiden oben abgeleiteten Differentialgleichungen ist nur noch die Differentialgleichung 2.3 gültig.

Diskussion der Grenzfälle

1. In der Einspannung wird das elastische Grenzmoment erreicht, d.h. $\beta_A \rightarrow 1$, bzw. $M_A \rightarrow M_y$. Der Balken bleibt rein elastisch. Einsetzen dieser Werte in Gleichung 2.10 ergibt:

$$\frac{M_T}{M_y} + \frac{M_p}{M_y} \leq 1 \quad (2.11)$$

Dieses Ergebnis bestätigt Gleichung 2.9 aus der rein elastischen Betrachtung des Balkens. Die dazugehörige Momentenverteilung zeigt Abbildung 2.5

2. In der Einspannung existiert ein plastischer Bereich $0 < \beta_A < 1$, bzw. $M_A > M_y$. Gleichzeitig wird in der Balkenmitte das elastische Grenzmoment erreicht, also $\beta_B \rightarrow 1$, $M_B \rightarrow -M_y$. Mit Gleichung 2.1:

$$M_B = M_A - \frac{3}{2}M_p$$

wobei

$$M_B = -M_y$$

und Gleichung 2.5 folgt für den elastischen Restquerschnitt:

$$\beta_A^2 = 5 - \frac{3M_p}{M_y} \quad (2.12)$$

Eingesetzt in Gleichung 2.10 erhält man damit:

$$\frac{M_T}{M_y} = \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \left[\arcsin \sqrt{\frac{3M_p}{5M_y}} - \arcsin \sqrt{\frac{4}{5}} \right] - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4M_y}{3M_p}} \quad (2.13)$$

Das gleichzeitige Erreichen des elastischen Grenzmoments in der Einspannung und in der Balkenmitte, also $M_A = M_y$ und $M_B = -M_y$, läßt sich wie auch schon für den elastischen Balken für den teilplastischen Balken untersuchen. Wie zuvor erhält man zunächst:

$$M_p = \frac{4}{3}M_y$$

Einsetzen diese Wertes liefert den aus dem vorhergehenden Abschnitt bekannten Wert des thermischen Momentes von

$$M_T = -\frac{1}{3}M_y$$

Das Maximum des thermischen Biegemomentes ergibt sich für ein mechanisches Biegemoment von $M_p = \frac{5}{3}M_y$. Aus Gleichung 2.12 wird ersichtlich, daß dies die Bildung eines plastischen Gelenks in der Einspannung bedeutet, also $\beta_A = 0$. Das thermische Biegemoment beträgt in diesem Falle $M_T \approx -0,091M_y$.

Bei Beschränkung auf positive termische Biegemomente kann dieser Fall nicht auftreten. Eine Biegemomentenlinie für diesen Fall ist in Abbildung 2.8 zu sehen.

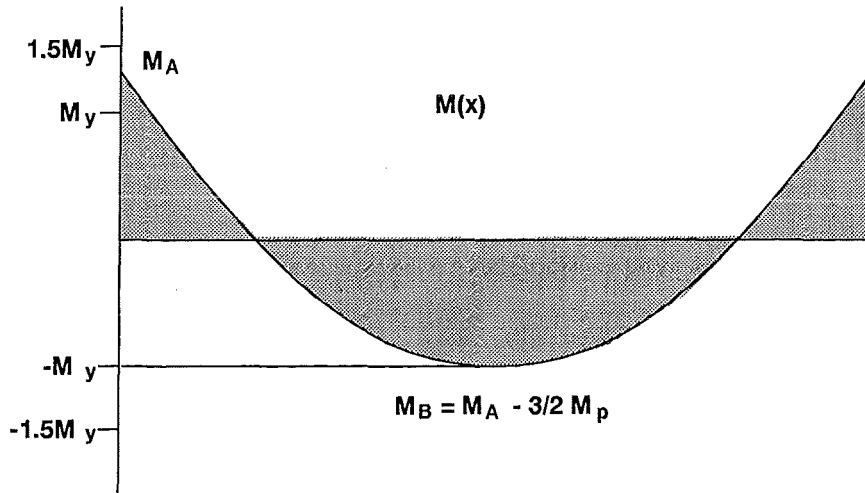


Abbildung 2.8: Grenze des Momentenverlaufs für die gleichzeitige Ausbildung eines plastischen Gelenks in der Einspannung und plastischer Zonen in der Balkenmitte

3. In der Einspannung wird der Querschnitt vollplastisch, also $\beta_A \rightarrow 0$, bzw. $M_A \rightarrow \frac{3}{2} M_y$. In der Umgebung der Balkenmitte existieren rein elastische Bereiche.

Setzt man in Gleichung 2.10 den Wert $\beta_A = 0$ ein, erhält man das sogenannte kritische Temperaturmoment:

$$\frac{M_T^*}{M_y} = \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - \frac{M_y}{3M_p}} \right) + \sqrt{1 - \frac{M_y}{3M_p}} \left(\frac{4}{3} - \frac{M_p}{M_y} \right) \quad (2.14)$$

Eine diesen Fall darstellende Momentenverteilung ist in Abbildung 2.9 zu sehen. Ist das kritische Temperaturmoment erreicht, führt eine weitere Erhöhung des Temperaturgradienten und damit des thermischen Biegemomentes zu keiner Änderung der Biegemomentenverteilung. Es kommt zu einer überlagerten freien Durchbiegung des Balkens, wie sie sich auch bei einem gelenkig eingespannten Balken unter diesem zusätzlichen Temperaturgradienten einstellen würde. In den Einspannstellen entstehen Neigungen mit einem Winkel $\alpha > 0$, abhängig von der Differenz des aufgebrauchten thermischen Biegemomentes und des oben berechneten kritischen Temperaturmomentes.

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{l}{EI} (M_T - M_T^*)$$

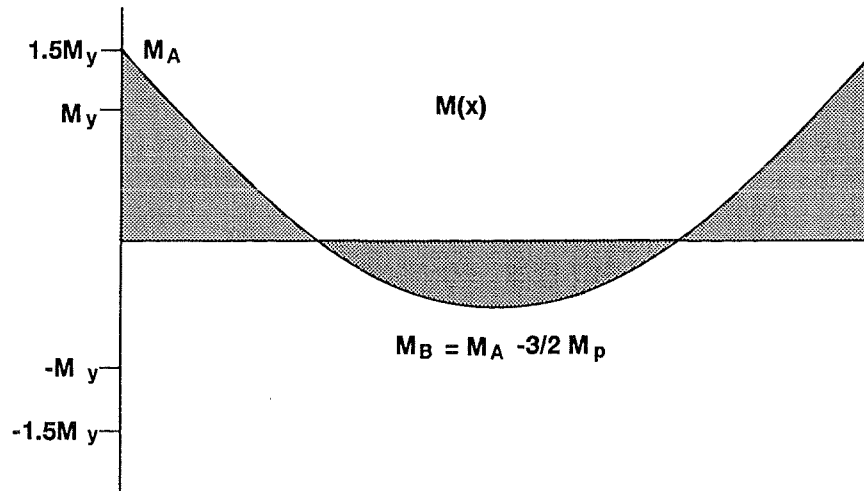


Abbildung 2.9: Grenze des Momentenverlaufs für Bildung eines plastischen Gelenks in der Einspannung

4. In der Einspannung wird der Querschnitt vollplastisch, also $\beta_A \rightarrow 0$, bzw. $M_A \rightarrow \frac{3}{2}M_y$. In der Balkenmitte wird gerade das elastische Grenzmoment erreicht, d.h. $\beta_B \rightarrow 1$, bzw. $M_B \rightarrow M_y$. Damit treten über der gesamten Balkenlänge bis auf den Querschnitt bei $x = \frac{l}{2}$ plastische Verformungen auf. Einsetzen der Größen in Gleichung 2.1 liefert:

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{1}{3}$$

und mit Gleichung 2.10 erhält man in diesen Spezialfall für das kritische Temperaturmoment:

$$\frac{M_T^*}{M_y} = \frac{\pi}{2}$$

2.4.3.3 Vollplastischer Balken

Unter Beachtung von Gleichung 2.12 ergibt sich, daß für

$$\frac{M_p}{M_y} \leq \frac{1 - \beta_A^2}{3}$$

der ganze Balken mit Momenten gleich oder größer als das Eingangsfießmoment M_y belastet wird, Abbildung 2.10.

Es gilt nun nur die Differentialgleichung 2.3. Zusammen mit den beiden Randbedingungen erhält man durch Integration erneut eine Beziehung, die bei gegebenen

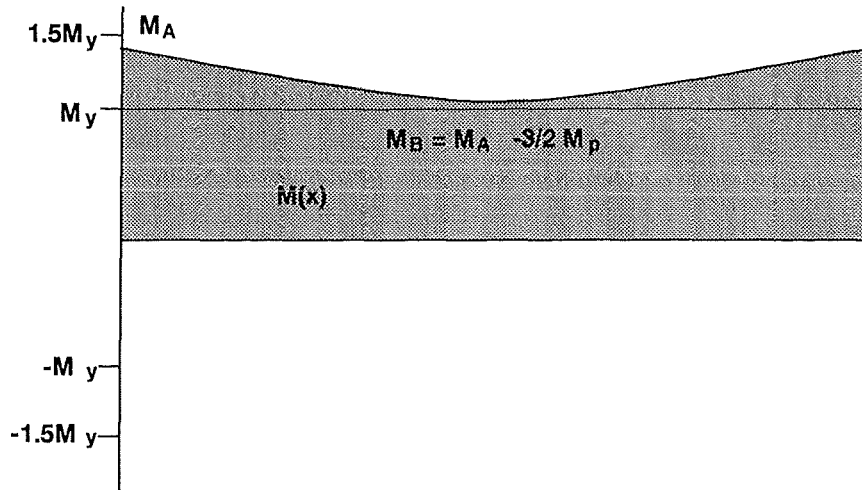


Abbildung 2.10: Der Balken wird über seiner ganzen Länge plastisch beansprucht

äußeren Belastungen den elastischen Restquerschnitt in der Einspannung β_A , bzw. das Biegemoment in der Einspannung M_A festlegt:

$$\frac{M_T}{M_y} = \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{\beta_A^2 \frac{M_y}{3M_p} + 1}} \quad (2.15)$$

Wie auch schon in Gleichung 2.10 ist der elastische Restquerschnitt β_A die, das Balkenverhalten charakterisierende Größe. Die Diskussion der Grenzfälle erfolgt wie zuvor:

1. In der Balkenmitte ist das Biegemoment gleich dem Eingangsfießmoment, d.h. $\beta_B = 1$, bzw. $M_B = M_y$. Mit der Gleichung 2.5 und mit

$$M_B = M_y = M_A - \frac{3}{2} M_p$$

folgt daraus für den elastischen Restquerschnitt in der Einspannung:

$$\beta_A^2 = 1 - \frac{3M_p}{M_y}$$

Eingesetzt in Gleichung 2.15 ergibt sich:

$$\frac{M_T}{M_y} = \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \arcsin \sqrt{\frac{3M_p}{M_y}} \quad (2.16)$$

Anmerkung:

Gleichung 2.16 wird für ein Verhältnis $\frac{M_p}{M_y} = 0$ unbestimmt. Streng genommen gilt die Differentialgleichung 2.3 nur für ein über der Balkenlänge variable Momentenverteilung und damit für ein $\beta(x)$, welches nicht konstant ist. Der Fall $\beta(x) = \text{const}$ bildet einen Grenzübergang, der durch den beschriebenen Weg nur durch eine Grenzwertbetrachtung erreicht werden kann:

$$\lim_{\frac{M_p}{M_y} \rightarrow 0} \frac{M_T}{M_y} = 1$$

Diese Lösung stimmt mit der rein elastischen Betrachtung zu Anfang dieses Kapitels überein. Bei rein thermischer Belastung ist die Momentenverteilung über dem ganzen Balken konstant, und somit wird die Fließgrenze in allen Balkenquerschnitten gleichzeitig erreicht. Für ein Verhältnis von $\frac{M_p}{M_y} = \frac{1}{3}$, d.h. bei der Ausbildung eines plastischen Gelenks in der Einspannung und gleichzeitigem Erreichen des Eingangsfießmomentes in der Balkenmitte ergibt sich die Lösung, welche für den teilplastischen Balken gegeben wird mit:

$$\frac{M_T}{M_y} = \frac{\pi}{2}$$

2. In der Einspannung wird der Querschnitt vollplastisch, d.h. $\beta_A \rightarrow 0$, bzw. $M_A \rightarrow \frac{3}{2}M_y$. Das kritische Temperaturmoment erhält man durch Einsetzen von $\beta_A = 0$ in Gleichung 2.15 zu:

$$\frac{M_T^*}{M_y} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \quad (2.17)$$

Man erkennt, daß sich ein plastisches Gelenk nur für ein über der Balkenlänge variierendes Biegemoment ausbilden kann.

3. In der Einspannung wird der Querschnitt vollplastisch, d.h. $\beta_A \rightarrow 0$, bzw. $M_A \rightarrow \frac{3}{2}M_y$. In der Balkenmitte wird gerade das Eingangsfießmoment erreicht, also

$\beta_B = 1$, bzw $M_B = -M_y$. Für diesen Spezialfall läßt sich aus Gleichung 2.15 durch Einsetzen des Wertes

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{1}{3}$$

der Übergang zu Fall 4 des teilplastischen Balkens erreichen mit dem thermischen Grenzmoment von:

$$\frac{M_T^*}{M_y} = \frac{\pi}{2} \quad (2.18)$$

2.4.4 Zweiter Halbzyklus - Abbau des Temperaturgradienten

2.4.4.1 Zur Bildung der plastischen Gelenke

Zur Bildung plastischer Gelenke in den Balkeneinspannungen

Das Hauptaugenmerk im ersten Halbzyklus galt dem plastischen Balkenverhalten in den Einspannstellen. Erreicht das thermische Biegemoment den kritischen Wert M_T^* , so ergibt sich dort das maximale Einspannmoment $\frac{M_A}{M_y} = \frac{3}{2}$. Dies bedeutet, daß an den Einspannstellen der elastische Restquerschnitt verschwindet, $\beta_A = 0$, und sich an diesen Stellen ein plastisches Gelenk ausbildet.

Überschreitet das thermische Biegemoment den kritischen Wert M_T^* , ergibt sich in diesem Gelenk ein Winkel $\alpha_A > 0$. In den Einspannstellen gilt jetzt nicht mehr die Randbedingung der horizontalen Tangente, sondern es ist $w'(x) \neq 0$. Dieses Problem läßt sich durch die Überlagerung zweier Lösungen, nämlich der Lösungen für den beidseitig fest eingespannten Biegebalken und den beidseitig gelenkig gelagerten Biegebalken behandeln. Für $\frac{M_A}{M_y} = \frac{3}{2}$ ergibt sich für den Knickwinkel

$$\alpha_A^K = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x w''(x) dx$$

und unter Beachtung von Gleichung 2.3

$$\alpha_A^K = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{M_y}{EI} \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{3 - 2 \left[\frac{M_A}{M_y} - 6 \frac{M_p}{M_y} \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right) \right]}} - \frac{M_T}{M_y} \right] dx$$

erhält man:

$$\alpha_A^K = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{M_y}{EI} \left[-\sqrt{\frac{M_y l^2}{12M_p}} \arcsin \frac{(1 - \frac{2x}{l})}{\sqrt{\frac{M_y}{M_p} + 1 - \frac{2}{3} \frac{M_A}{M_p}}} - \frac{M_T}{M_y} x \right]$$

Für $\frac{M_A}{M_y} = \frac{3}{2}$ und $x \rightarrow 0$ entsteht ein Knickwinkel, dieser bleibt aber beschränkt - es gelte auch weiterhin $M_p > 0$.

Zur Bildung eines plastischen Gelenks in der Balkenmitte

Das Hauptaugenmerk im zweiten Halbzyklus gilt dem plastischen Balkenverhalten in der Balkenmitte. Existiert dort ebenfalls ein kritisches thermisches Biegemoment M_T^* mit einem Biegemoment von $\frac{M_B}{M_y} = -\frac{3}{2}$, was auch dort zu einem plastischen Gelenk führen würde?

Die Antwort ist anders als in den Balkeneinspannungen, denn in der Balkenmitte tritt für den Grenzübergang $\frac{M_B}{M_y} \rightarrow -\frac{3}{2}$ ein nicht beschränkter Knickwinkel in der Biegelinie auf. Für den Knickwinkel gilt wieder:

$$\alpha_B^K = \lim_{x \rightarrow \frac{l}{2}} \int_x^{\frac{l}{2}} w''(x) dx$$

Vorausgreifend auf Gleichung 2.26 läßt sich schreiben:

$$\frac{1}{2} \alpha_B^K = \lim_{x \rightarrow \frac{l}{2}} -\frac{M_y}{EI} \int_x^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3 + 2\frac{M_B}{M_y} + 3\frac{M_p}{M_y} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2}}$$

Damit ergibt sich für $\frac{M_B}{M_y} = -\frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{2} \alpha_B^K = \lim_{x \rightarrow \frac{l}{2}} -\frac{M_y}{EI} \sqrt{\frac{M_y l^2}{12M_p}} \ln \left(\frac{24M_p}{M_y l^2} x - \frac{12M_p}{M_y l} \right)$$

Für $x \rightarrow \frac{l}{2}$ strebt der Knickwinkel $\frac{1}{2} \alpha_B^K$ gegen Unendlich. Da in dem hier behandelten Problem ein solcher Knick nicht auftreten kann, muß

$$\frac{M_B}{M_y} > -\frac{3}{2}$$

sein. Daraus folgt, daß in der Balkenmitte der elastische Restquerschnitt nicht verschwindet und somit dort kein plastisches Gelenk nach der strengen Definition auftreten kann. Bezüglich der Balkenmitte existiert demnach kein kritisches thermisches Biegemoment M_T^* . Die Biegelinie besitzt in der Balkenmitte stets eine horizontale Tangente.

Auch wenn keine volle Plastifizierung des Querschnittes in der Balkenmitte stattfindet, kann ein Ratcheting-Mechanismus auftreten, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden. Die Bildung eines plastischen Gelenks während des Abkühlens ist also nicht notwendig.

2.4.4.2 Herleitung der notwendigen Gleichungen

Für den Abkühlhalbzyklus wird bei der Beschreibung des Biegemomentenverlaufs das Biegemoment in der Balkenmitte, M_B , anstelle des Biegemoments in der Einspannung, M_A , verwendet. An die Stelle von Gleichung 2.1 tritt damit die Gleichung:

$$\frac{M(x)}{M_y} = \frac{M_B}{M_y} + \frac{3 M_p}{2 M_y} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 \quad (2.19)$$

Im plastischen Bereich gilt die zur Gleichung 2.4 analoge Gleichung:

$$\frac{M(x)}{M_y} = -\frac{3 - \beta(x)^2}{2} \quad (2.20)$$

Die Grenze zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich wird jetzt durch die Ortskoordinate x_2 beschrieben. Mit der Bedingung:

$$M(x_2) = -M_y$$

und der Definition

$$\beta_B = \beta\left(\frac{l}{2}\right)$$

ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen 2.19 und 2.20 für den Übergang vom elastischen zum plastischem Balkenteil ⁴:

$$x_2 = \frac{l}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{M_y}{3M_p} (1 - \beta_{B_2}^2)} \right] \quad (2.21)$$

⁴Der Index, hier 2, beschreibt von jetzt ab nun die Nummer des jeweiligen Halbzyklus

Für den elastischen Restquerschnitt in Abhängigkeit vom Plastifizierungsgrad in der Balkenmitte erhält man unter Verwendung der Gleichungen 2.19 und 2.20:

$$\beta_2(x) = \sqrt{\beta_{B_2}^2 + \frac{3M_p}{M_y} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2} \quad (2.22)$$

2.4.4.3 Shakedown nach dem ersten Zyklus

Interessant für das Ratcheting-Verhalten ist hier nur das Verhalten des Balkens wenn im vorausgegangenen ersten Halbzyklus plastische Gelenke in den beiden Einspannstellen entstanden sind. In diesem Fall beträgt das Biegemoment am Ende des ersten Halbzyklus in der Balkenmitte:

$$M_{B_1} = M_{A_1} - \frac{3}{2}M_p = \frac{3}{2}(M_y - M_p)$$

In diesem Bereich wird das Biegemoment bei der Entlastung als erstes in den Bereich des Fließens eintreten. Eine elastische Entlastung des Balkens erhält man, wenn nach dem Abkühlen gilt:

$$M_{B_2} \geq -M_y$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Momentendifferenz gleich dem zyklierenden thermischen Moment und es gilt:

$$|\Delta M| = M_T \leq \frac{5}{2}M_y - \frac{3}{2}M_p \quad (2.23)$$

In den Bereichen, in denen schon im ersten Halbzyklus die Fließgrenze erreicht wurde, können maximal Änderungen des Biegemomentes der Größe

$$|\Delta M| = M_T \leq 2M_y \quad (2.24)$$

elastisch aufgenommen werden, ohne erneut mit gegensinnigem plastischen Fließen zu reagieren.

Die Gleichungen 2.23 und 2.24 sind die Shakedown-Bedingungen des Balkens nach dem ersten Zyklus. Alle nachfolgenden Belastungs-Zyklen führen nur noch zu einem

elastischen Zyklieren. Es tritt keine Akkumulation plastischer Dehnungen auf. Für die Versagensuntersuchung ist in diesem Fall nur die Materialermüdung von Bedeutung, sofern die im ersten Halbzyklus erhaltene plastische Verformung tolerierbar ist.

Entstehen auch während des Abkühlvorganges plastische Verformungen, so sind verschiedene Fälle zu unterscheiden. Diese Fälle werden charakterisiert durch die Lage des Überganges zwischen elastischen und plastischen Bereichen des Balkens, x_1 im Aufheizhalbzyklus, respektive x_2 im Abkühlhalbzyklus:

1. Der gesamte Balken zyklert plastisch - Im ersten Halbzyklus ist die Biegemomentenbelastung über der gesamten Balkenlänge größer als M_y , im abgekühlten Zustand liegt sie über dem gesamten Balken unterhalb von $-M_y$. Es existieren keine elastischen Zonen. Das bedeutet für die Übergänge zwischen elastischen und plastischen Zonen, daß sie ihre Extremwerte erreichen:

$$x_1 = \frac{l}{2}$$

$$x_2 = 0$$

Möglich ist dies nur für den vollplastischen Balken. Unter der Voraussetzung eines plastischen Gelenks in der Einspannung im ersten Halbzyklus also nur für:

$$\frac{M_p}{M_y} \leq \frac{1}{3}$$

2. Ein Teil des Balkens wird in beiden Halbzyklen nur elastisch beansprucht, also:

$$x_1 \leq x_2$$

Dies ist nach den Gleichungen 2.7 und 2.21 immer dann erfüllt, wenn gilt:

$$\frac{M_p}{M_y} \geq \frac{2}{3}$$

3. Die Einspannung unterliegt plastischen Verformungen im Aufheizhalbzyklus, elastischen Verformungen während des Abkühlens. Umgekehrt verhält sich die Balkenmitte. Ein Teil des Balkens wird in beiden Halbzyklen plastisch beansprucht. Bedingung hierfür ist:

$$\frac{l}{2} > x_1 > x_2 > 0$$

Die beiden obigen Bedingungen für das mechanische Moment lassen sich zusammenfassen:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{M_p}{M_y} \leq \frac{2}{3}$$

Im folgenden werden diese drei verschiedenen Verhalten des Zyklierens getrennt untersucht. Die dazu notwendigen Differentialgleichungen lauten:

Für den elastischen Bereich:

$$-\frac{EI}{M_y} w''(x) = \frac{M_B}{M_y} + \frac{3 M_p}{2 M_y} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 \quad (2.25)$$

Für den plastischen Bereich:

$$-\frac{EI}{M_y} w''(x) = -\frac{1}{\beta(x)} \quad (2.26)$$

2.4.4.4 Die plastischen Zonen des Balkens sind durch einen elastischen Bereich getrennt

In diesem Fall gilt für die Übergänge von den plastischen zu den elastischen Balkenbereichen:

$$x_1 \leq x_2$$

Mit den Gleichungen 2.7 und 2.21 gilt, $\frac{M_p}{M_y} \geq \frac{2}{3}$. Ferner gilt das kritische thermische Biegemoment nach 2.14. Bei der Integration sind folgende Unterscheidungen zu treffen:

Für den in diesem Halbzyklus elastischen Bereich, welcher jedoch beim Aufheizen plastische Verformungen erfahren hat, $0 \leq x \leq x_1$, gilt die Differentialgleichung 2.25. Sie beschreibt den elastischen Anteil, um den die bleibenden plastischen Verformungen aus dem vorhergehenden Halbzyklus vermindert werden, siehe dazu auch Gleichung 2.3:

$$-\frac{EI}{M_y} w'' = \underbrace{\frac{M_B}{M_y} + \frac{3 M_p}{2 M_y} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2}_{\text{elastische Beanspruchung}} + \underbrace{\left[\frac{1}{\beta_1(x)} - \frac{3 - \beta_1^2(x)}{2} \right]}_{\text{plastische Vorverformung}} \quad (2.27)$$

Für den elastischen Bereich $x_1 \leq x \leq x_2$ gelten die Gleichungen 2.2 und 2.25 mit der elastischen Momenten-Krümmungsbeziehung:

$$-\frac{EI}{M_y} w'' = \frac{M_B}{M_y} + \frac{3 M_p}{2 M_y} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 \quad (2.28)$$

Für den in diesem Halbzyklus plastischen Bereich $x_2 \leq x \leq \frac{l}{2}$ gilt die Gleichung 2.26:

$$-\frac{EI}{M_y} w'' = -\frac{1}{\beta_2(x)} \quad (2.29)$$

Als Randbedingungen bei der Integration der drei Gleichungen sind einzusetzen:

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{M_y} w'(0) &= \frac{l}{2} \left(\frac{M_T - M_T^*}{M_y} \right) \\ -\frac{EI}{M_y} w'\left(\frac{l}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Randbedingung gibt an, daß es im ersten Halbzyklus in der Einspannung durch eine Belastung über das zur Bildung plastischer Gelenke notwendige Biegemoment M_T^* zu einem Knick in der Balkenachse kam.

Die zweite Randbedingung beschreibt die Symmetriebedingung in der Balkenmitte. Als Übergangsbedingungen zur Verknüpfung der Differentialgleichungen stehen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +x_1} w'(x) &= \lim_{x \rightarrow -x_1} w'(x) \\ \lim_{x \rightarrow +x_2} w'(x) &= \lim_{x \rightarrow -x_2} w'(x) \end{aligned}$$

Durch Integration der drei Differentialgleichungen und Einsetzen der entsprechenden Größen (Gleichungen 2.22, 2.21) erhält man analog der Gleichung 2.10 eine das Balkenverhalten charakterisierende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{M_T}{M_y} &= \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{1 - \beta_{B_2}^2}{\beta_{B_2}^2}} + \left(\frac{6 - \beta_{B_2}^2}{2} - \frac{3M_p}{2M_y} \right) \\ &+ \sqrt{\frac{M_y}{3M_p} (1 - \beta_{B_2}^2)} \left(\frac{\beta_{B_2}^2 - 4}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Damit ist erneut eine Beziehung zwischen dem elastischen Restquerschnitt, jetzt in der Balkenmitte, und den gegebenen Belastungen aufgestellt. Auch diese Gleichung läßt sich nicht explizit nach der Größe β_{B_2} auflösen.

Auch hier lassen sich wieder, abhängig vom elastischen Restquerschnitt in der Balkenmitte, verschiedene Fälle für das Verhalten des Balkens nach dem Abkühlen auf die Ausgangstemperatur unterscheiden:

1. In der Balkenmitte wird das elastische Grenzmoment erreicht, d.h. $\beta_B \rightarrow 1$, bzw. $M_B \rightarrow -M_y$. Einsetzen des Wertes $\beta_B = 1$ in Gleichung 2.30 liefert als Grenze für eine elastische Entlastung im Abkühlhalbzzyklus:

$$\frac{M_T}{M_y} \leq \frac{5}{2} - \frac{3 M_p}{2 M_T}$$

Diese Bedingung stimmt mit dem Grenzfall aus der elastischen Betrachtung, Gleichung 2.23, überein.

2. In der Balkenmitte geht der elastische Restquerschnitt gegen Null, $\beta_B \rightarrow 0$, bzw. $\frac{M_B}{M_y} \rightarrow -\frac{3}{2}$. Es bildet sich eine plastische Zone in der Balkenmitte. Für die Bildung eines plastischen Gelenks müßte der elastische Restquerschnitt in der Balkenmitte verschwinden, $\beta_{B_2} = 0$.

$$\lim_{\beta_{B_2} \rightarrow 0} \frac{M_T}{M_y} = \lim_{\beta_{B_2} \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \left[\operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{1 - \beta_{B_2}^2}{\beta_{B_2}^2} - \frac{4}{3}} \right] - \frac{3M_p}{2M_y} + 3 \right) = \infty$$

Dies ist für ein endliches Temperaturmoment nicht möglich. Es bedeutet, daß eine Gelenkbildung in der Balkenmitte nach dem ersten Abkühlhalbzzyklus nicht möglich ist, was schon gezeigt werden konnte.

2.4.4.5 Die plastischen Zonen während der beiden Halbzyklen überlappen sich

Führt man die gleichen Integrationen für ein Momentenverhältnis $\frac{1}{3} \leq \frac{M_p}{M_y} \leq \frac{2}{3}$ durch, so ändern sich die Differentialgleichung für den Bereich des Balkens, der in jedem Halbzyklus plastische Verformungen erfährt, also im Bereich $x_2 < x < x_1$. Es ist jedoch nicht mehr so einfach möglich, für diesen Bereich eine beschreibende Differentialgleichung aufzustellen, da das Fließen während des Abkühlens nicht mehr bei dem Eingangsfießmoment M_y einsetzt, sondern schon bei einem Biegemoment, welches betragsmäßig geringer ist, Abbildung 2.11.

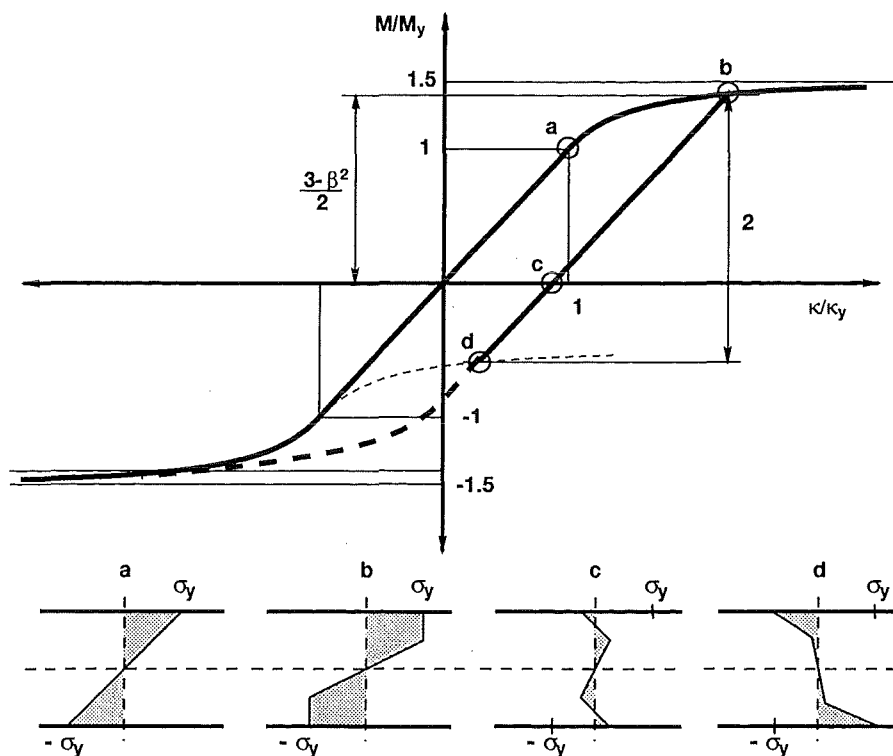


Abbildung 2.11: Momenten-Krümmungsbeziehung. Unbestimmte Beziehung im gestrichelten Bereich bei einer Momentenänderung größer als $-2M_y$. Darunter die zugehörigen Spannungsverteilungen

Grund für die Schwierigkeiten ist die Ausbildung von Residuenspannungen in den zuvor plastifizierten Querschnitten. In 2.11 sind von links nach rechts die Spannungsverteilungen zu bestimmten Zeitpunkten während des ersten Zyklus aufgetragen:

- a) Spannungsverteilung bei Erreichen des elastischen Grenzmoments
- b) Spannungsverteilung bei plastischer Beanspruchung
- c) Spannungsverteilung bei entlastetem Querschnitt
- d) Spannungsverteilung bei Erreichen des elastischen Grenzmoments in Gegenrichtung

Definiert ist aber die Differenz des Biegemoments, bei dem ausgehend von der im ersten Halbzyklus erreichten Größe des Moments ein Fließen in die entgegengesetzte Richtung einsetzt. Dieser Wert beträgt wie auch schon im Fall 1 (vergleiche Gleichung 2.23):

$$\frac{M_T}{M_y} = \frac{5}{2} - \frac{3 M_p}{2 M_y}$$

Zur Lösung bei plastischen Verformungen im Abkühlhalbzyklus unter dieser Belastungskonstellation wird auf die Shakedown-Theoreme verwiesen, siehe Abschnitt 2.4.8.

2.4.4.6 Vollplastischer Balken

Ein Sonderfall besteht für das Verhältnis $\frac{M_p}{M_y} \leq \frac{1}{3}$. In diesem Fall wird der gesamte Balken alternierend plastifiziert. Daraus folgt, daß eine rein elastische Entlastung des Balkens - der Shakedown - nur möglich ist, solange die Bedingung:

$$M_T \leq 2M_y$$

erfüllt ist (Siehe auch Gleichung 2.24).

Auch hier ist wieder nur die Momentendifferenz bestimmt, bis sich ein entgegengesetztes Fließen in den teilplastischen Querschnitten des Balkens einstellt. Das Biegemoment, bei welchem entgegengesetztes Fließen eintritt, ist wieder abhängig von der Größe der plastischen Zone im jeweiligen Balkenquerschnitt.

Dieses Problem wird am Ende dieses Kapitels durch eine Betrachtung der Momentenänderung mittels der Shakedown-Theoreme anstelle der Gleichgewichtsbetrachtung zum jeweiligen Zyklusende gelöst.

2.4.5 Dritter Halbzyklus - Aufheizen

Die Betrachtung der beiden folgenden Halbzyklen soll nur für Werte des mechanischen Biegemomentes $M_p \geq \frac{2}{3}M_y$ durchgeführt werden, d.h. ein Bereich des Balkens wird nur durch Biegemomente kleiner als das elastische Grenzmoment belastet, d.h.: $x_1 < x_2$. Nur für mechanische Momente oberhalb dieser Grenze ist eine inkrementelle Betrachtungsweise, d.h. eine Beschreibung der Gleichgewichtszustände am Ende der Halbzyklen, möglich. Für kleinere mechanische Belastungen wird wieder auf Abschnitt 2.4.8 verwiesen.

Ähnlich wie beim vorhergehenden Abkühlhalbzyklus gilt auch jetzt wieder, daß drei Balkenbereiche unterschieden werden müssen: Der Bereich der Einspannung, welcher beim Aufheizen bleibende Verformungen erfährt, der Mittelbereich des Balkens, welcher während des Abkühlens plastisch verformt wurde und im Falle von $\frac{M_p}{M_y} > \frac{2}{3}$ einen elastischen Bereich zwischen diesen beiden.

Beschrieben werden diese Bereiche durch die drei Differentialgleichungen:

Für den Bereich $x < x_1$ (plastischer Bereich):

$$-\frac{EI}{M_y}w' = \frac{1}{\beta_3(x)} - \frac{M_T}{M_y}$$

Für den Bereich $x_1 < x < x_2$ (elastischer Bereich):

$$-\frac{EI}{M_y}w' = \frac{M_A}{M_y} - \frac{6M_p}{M_y} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] - \frac{M_T}{M_y}$$

Für den Bereich $\frac{l}{2} > x > x_2$ (elastischer Bereich mit Vorverformung):

$$-\frac{EI}{M_y}w' = \frac{M_A}{M_y} - \frac{6M_p}{M_y} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] - \underbrace{\frac{1}{\beta_2(x)} + \frac{3 - \beta_2^2(x)}{2}}_{\text{plastische Vorverformung}} - \frac{M_T}{M_y}$$

Die Größe $\beta_3(x)$ wird jetzt über die Größe β_{A_3} definiert (vergleiche Gleichung 2.6). Soll sich in der Einspannung wieder ein plastisches Gelenk bilden, so muß β_{A_3} verschwinden. Tritt dieser Fall nicht ein, so kann es nicht zu einem Ratcheting-Verhalten

kommen.

Mit den neuen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{M_y} w'(0) &= \frac{l}{2} \left(\frac{M_T - M_{T_1}^*}{M_y} \right) \\ -\frac{EI}{M_y} w'\left(\frac{l}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

und den Übergangsbedingungen zwischen den beiden plastisch beanspruchten Bereichen und dem elastisch beanspruchten Bereich:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -x_1} w'(x) &= \lim_{x \rightarrow +x_1} w'(x) \\ \lim_{x \rightarrow -x_2} w'(x) &= \lim_{x \rightarrow +x_2} w'(x) \end{aligned}$$

ergibt sich als Bestimmungsgleichung für das thermische Biegemoment, unter welchem erneut eine plastische Gelenkbildung in der Einspannung stattfindet:

$$\frac{M_{T_3}^*}{M_y} = \frac{M_T}{M_y} - \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{1 - \beta_{B_2}^2}{\beta_{B_2}^2}} - \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} (1 - \beta_{B_2}^2) \left(\frac{\beta_{B_2}^2 - 4}{3} \right) \quad (2.31)$$

Diese Gleichung zeigt, daß das thermische Grenzmoment für weitere Aufheizzyklen sowohl von dem nominellen Temperaturmoment M_T als auch von dem elastischen Restquerschnitt in der Balkenmitte β_B abhängt. Bei einer vorgegebenen maximalen Temperaturbelastung hängt das Ratchetingverhalten des Balkens also nur vom Fortschreiten der plastischen Zone in der Balkenmitte während des wiederholten Abkühlens ab. Im Abkühlhalbzzyklus ergab sich, daß die Ausdehnung dieser Zone von der Randbedingung in der Einspannung, $x = 0$, bestimmt wird. Es besteht eine rekursive Beziehung zwischen den beiden Größen der Neigung in der Einspannung und dem elastischen Restquerschnitt in der Balkenmitte nach dem Abkühlen.

Betrachtet man die folgenden Halbzzyklen, so findet man, daß die Gleichungen identisch sind bis auf die Randbedingung in der Einspannung, da dort die Neigung mit zunehmender Zyklenzahl zunimmt. Mit dem Abnehmen des elastischen Restquerschnittes in der Balkenmitte nimmt auch der Wert x_2 kleinere Werte an, kann aber solange das Verhältnis $\frac{M_p}{M_y} \geq \frac{2}{3}$ eingehalten wird, nicht kleiner als x_1 werden.

2.4.6 Vierter Halbzzyklus - Erneutes Abkühlen

Für einen erneuten Abkühlhalbzzyklus gelten die selben Unterscheidungen wie für den ersten Abkühlhalbzzyklus. Es ist nur der Faktor β_{B_2} durch den Faktor β_{B_4} zu ersetzen, welcher das Fortschreiten der plastischen Zone mit zunehmender Zyklenzahl

beschreibt, wobei gilt ⁵:

$$\beta_{B_4} < \beta_{B_2}$$

Die Beziehung zwischen den äußeren Belastungen und dem elastischen Restquerschnitt in Balkenmitte nach dem Abkühlen lautet (siehe Gleichung 2.30):

$$\begin{aligned} \frac{M_T}{M_y} &= \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{1 - \beta_{B_n}^2}{\beta_{B_n}^2}} + \left(\frac{6 - \beta_{B_n}^2}{2} - \frac{3M_p}{2M_y} \right) \\ &+ \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} (1 - \beta_{B_n}^2) \left(\frac{\beta_{B_n}^2 - 4}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei dann wiederum gilt:

$$\beta_{B_{n+2}} < \beta_{B_n}$$

solange es nicht zum Shakedown oder Finiten Ratcheting kommt.

2.4.7 Folgezyklen

Die Neigungszunahme in der Einspannung im (n+1)-ten Halbzyklus berechnet sich zu (aus Gleichung 2.31):

$$\frac{M_{T_{n+1}}^* - M_T}{M_y} = -\sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{1 - \beta_{B_n}^2}{\beta_{B_n}^2}} - \sqrt{\frac{M_y}{3M_p}} (1 - \beta_{B_n}^2) \left(\frac{\beta_{B_n}^2 - 4}{3} \right) \quad (2.33)$$

mit

$$n \geq 2$$

⁵Ungerade Indizes bedeuten Aufheizhalbzyklen, gerade Indizes Abkühlhalbzyklen.

Ratcheting ist abhängig von einer Zunahme der Neigung in der Einspannung während des Aufheizens. Es muß deshalb gelten:

$$\frac{M_T - M_{T_{n+1}}^*}{M_y} > 0$$

Die Größe β_{B_n} ergibt sich aus Gleichung 2.32. Der Vergleich mit Gleichung 2.33 liefert:

$$\frac{M_{T_{n+1}}^*}{M_y} = \frac{6 - \beta_{B_n}^2}{2} - \frac{3 M_p}{2 M_y}$$

Die Bedingung für Ratcheting ist, daß diese Zunahme für jeden Aufheizzyklus stattfindet. Damit gilt (für $n \rightarrow \infty$):

$$\frac{M_T - M_{T_\infty}^*}{M_y} > 0$$

oder, da M_T^* maximal das nominelle thermische Biegemoment M_T erreichen kann:

$$\frac{M_T}{M_y} > \frac{6 - \beta_{B_\infty}^2}{2} - \frac{3 M_p}{2 M_y}$$

Wird diese Bedingung nicht mehr erfüllt, so sprechen verschiedene Quellen entweder von Shakedown (in dieser Arbeit: Shakedown für eine elastisches Entlasten schon im zweiten Halbzyklus) oder von *Finitem Ratcheting*.

Wie schon oben gezeigt wurde, muß für das Erreichen des Wertes $\beta_B = 0$ das durch den Temperaturgradienten induzierte Biegemoment gegen Unendlich streben. Nimmt man jetzt aber an, daß der Grenzwert des elastischen Restquerschnittes erreicht werden kann und soll danach noch eine Zunahme der Neigung in der Einspannung mit der Zyklenzahl stattfinden - eine Zunahme der Plastifizierung in der Balkenmitte ist ja nicht mehr möglich -, so erhält man ein Kriterium für *Infinites Ratcheting*:

$$\frac{M_T}{M_y} \geq 3 - \frac{3 M_p}{2 M_y} \quad (2.34)$$

2.4.8 Lösung für den plastisch zyklierenden Balken mit Hilfe des Shakedown-Theorems

Für ein Momentenverhältnis von $\frac{M_p}{M_y} < \frac{2}{3}$ kommt es zu plastischen Rückverformungen über dem Balken, da $x_2 < x_1$. Für $\frac{M_p}{M_y} < \frac{1}{3}$ wird der gesamte Balken in jedem Halbzyklus über seiner gesamten Länge plastisch verformt.

Eine Betrachtung Zyklus für Zyklus ist in diesem Fall wegen der geschilderten Problemen nicht mehr möglich. Erfolgreich ist eine Betrachtung der Momenten- und Krümmungsänderungen durch das Aufbringen und Entfernen des thermischen Momentes. Dadurch ist die Anwendung von Shakedown-Theoremen möglich, die ausgehend von einem zu findenden stationären Zustand Aussagen über das Verhalten des Balkens unter zyklischen Belastungen erlauben (Anhang G). Dieser stationäre Zustand ist definiert als ein Zyklus, in dem durch Aufbringen und Entfernen einer Belastung keine Nettospannungsänderung mehr stattfindet [68]. Man könnte auch von einem *eingeschwungenen Zustand* sprechen.

Als erstes soll die Grenze für Ratcheting im Falle des elastisch zyklierenden Balkenteils ($\frac{M_p}{M_y} > \frac{2}{3}$) anhand einer Betrachtung der Momentenänderung untersucht werden, im Gegensatz zur inkrementellen Berechnungen in Abschnitt 2.4.4.4. Betrachtet man den "eingeschwungenen" Zustand des Balkens, so kann die maximale Momentenänderung, welche durch die Momentenbildung sowohl in den Einspannungen, als auch in der Balkenmitte gegeben ist, von

$$\Delta M = 3M_y - \frac{3}{2}M_p$$

nur zu elastischen Krümmungen führen, wenn gilt daß

$$\frac{\Delta M}{M_y} = \frac{M_T}{M_y} \leq 2,$$

was zu der Bedingung führt:

$$\frac{M_p}{M_y} \geq \frac{2}{3}$$

Wird diese Bedingung erfüllt so folgt aus der Differentialgleichung für eine elastische Krümmungsänderung unter der gegebenen Momentendifferenz:

$$\frac{EI}{M_y} \Delta w'' = \left(3 - \frac{3}{2} \frac{M_p}{M_y} \right) - \frac{M_T}{M_y}$$

Eine elastische Änderung des Momentes hat keine Änderung der Krümmung über der Balkenlänge zur Folge und damit ergibt sich als Grenze zwischen Shakedown und Ratcheting für den elastisch zyklierenden Balken:

$$\frac{M_T}{M_y} = 3 - \frac{3 M_p}{2 M_y}$$

Dies ist das Ergebnis, welches sich auch aus den obigen inkrementellen Betrachtungen ergeben hat.

Für einen Balken mit plastisch zyklierendem Anteil und einen vollplastischen Balken, der obige Bedingung für die Größe der mechanischen Momentenbelastung verletzt, ist allein die Betrachtung über ein Shakedown-Theorem möglich.

Wird für Belastungen in diesem Bereich ebenfalls angenommen, daß die maximale Biegemomentenänderung zu einer Gelenkbildung während des Aufheizens und als Grenzwert auch in der Balkenmitte während des Abkühlens führt, so definiert der plastisch zyklierende Bereich des Balkens das Verhalten des gesamten Balkens. Nach dem Shakedown-Theorem von Frederick-Armstrong [68] stellt sich über dem Balken eine konstante Schwingbreite des elastischen Restquerschnittes β ein. Das heißt, überlagert man die einzelnen Halbzyklen, hat sich über dem Balken ein konstanter elastischer Restquerschnitt eingestellt. Jeder Querschnitt des Balkens zyklert mit dem gleichen elastischen Restquerschnitt. Es gilt deshalb:

$$3 - \frac{3 M_p}{2 M_y} = (3 - \beta^2)$$

wobei β eine konstante Größe und nicht wie bisher von der Balkenlängskoordinate abhängig ist. Aufgelöst nach β ergibt sich:

$$\beta = \sqrt{\frac{3 M_p}{2 M_y}} \quad (2.35)$$

Für ideal-plastisches Material ist der Bereich für elastisches Zyklieren unabhängig von der Verformungsvorgeschichte durch $2M_y$ begrenzt. Damit schreibt sich die Momenten-Krümmungs-Differentialgleichung für einen Aufheiz-Halbzyklus:

$$\frac{EI}{M_y} \Delta w'' = \frac{2}{\beta} - \frac{M_T}{M_y}$$

Die Integration mit der Randbedingung, daß bei der maximalen Momentenänderung keine Zunahme der Neigung in den Einspannungen stattfindet und in der Balkenmitte

die horizontale Tangente erhalten bleibt, ergibt unter Beachtung von Gleichung 2.35 die Grenze für infinites Ratcheting:

$$\frac{M_T}{M_y} = \sqrt{\frac{8 M_y}{3 M_p}} \quad (2.36)$$

2.4.9 Graphische Darstellung der Ergebnisse

Die Gleichungen 2.11, 2.14, 2.16, 2.17, 2.23, 2.24, 2.34 und 2.36 lassen sich in einem dem Bree-Diagramm ähnlichen Diagramm darstellen (Abbildung 2.12). Sie begrenzen in diesem Diagramm die verschiedenen Bereiche des Balkenverhaltens.

1. Der Bereich **E** kennzeichnet das Gebiet des elastischen Zyklierens, ohne daß jemals plastische Dehnungen auftreten.
2. Im Bereich $\mathbf{S}'=(\mathbf{S1}'+\mathbf{S2}')$ liegt ein Shakedown vor. Es kommt nur zu plastischen Verformungen im ersten Halbzyklus, dem Aufheizen, ohne daß sich jedoch ein plastisches Gelenk in den Einspannungen bildet, wobei
 - (a) im Bereich **S1'** sich die plastischen Zonen nur in einem beschränkten Abschnitt um die Einspannung herum ausdehnen, während
 - (b) im Bereich **S2'** der gesamte Balken plastisch beansprucht wird.
3. Die Bereiche $\mathbf{S}=(\mathbf{S1}+\mathbf{S2})$ liegt ein Shakedown nach dem ersten Zyklus vor, mit der Bildung plastischer Gelenke in den Einspannungen.
 - (a) Im Bereich **S1** ist der Balken dabei nur in Teilbereichen plastisch beansprucht worden, wogegen im
 - (b) im Bereich **S2** während des ersten Halbzyklus der gesamte Balken plastisch verformt wurde.
4. Die Bereiche $\mathbf{R}'=(\mathbf{R1}'+\mathbf{R2}')$ kennzeichnen *finite Ratcheting*, bei dem es nach einer undefinierten Anzahl von Zyklen zu einem Stillstand der Dehnungsakkumulation kommt. Unterteilt wird dieser Bereich durch die Gerade $\frac{M_P}{M_y} = \frac{1}{3}$.
 - (a) Im Bereich **R1'** ist der Balken nur teilweise plastisch beansprucht.
 - (b) Im Bereich **R2'** ist der Balken über seiner ganzen Länge plastisch beansprucht.
5. Im Bereich **P** zyklert der Balken über seiner gesamten Länge plastisch. Sowohl beim Aufheizen als auch beim Abkühlen wird er über seiner ganzen Länge oberhalb des Eingangsfießmomentes beansprucht.

6. Im Bereich $\mathbf{R}=(\mathbf{R1}+\mathbf{R2})$ liegt 'infinite Ratcheting' vor, bei welchem auch nach einer vollständigen Plastifizierung des Mittelquerschnittes eine weitere Akkumulation der plastischen Dehnungen mit der Zyklenzahl stattfindet. Unterteilt wird dieser Bereich wieder in
- (a) den Bereich $\mathbf{R1}$ als Ratcheting mit begrenzten plastischen Zonen und
 - (b) den Bereich $\mathbf{R2}$ als Ratcheting mit plastischen Zonen über der ganzen Balkenlänge.

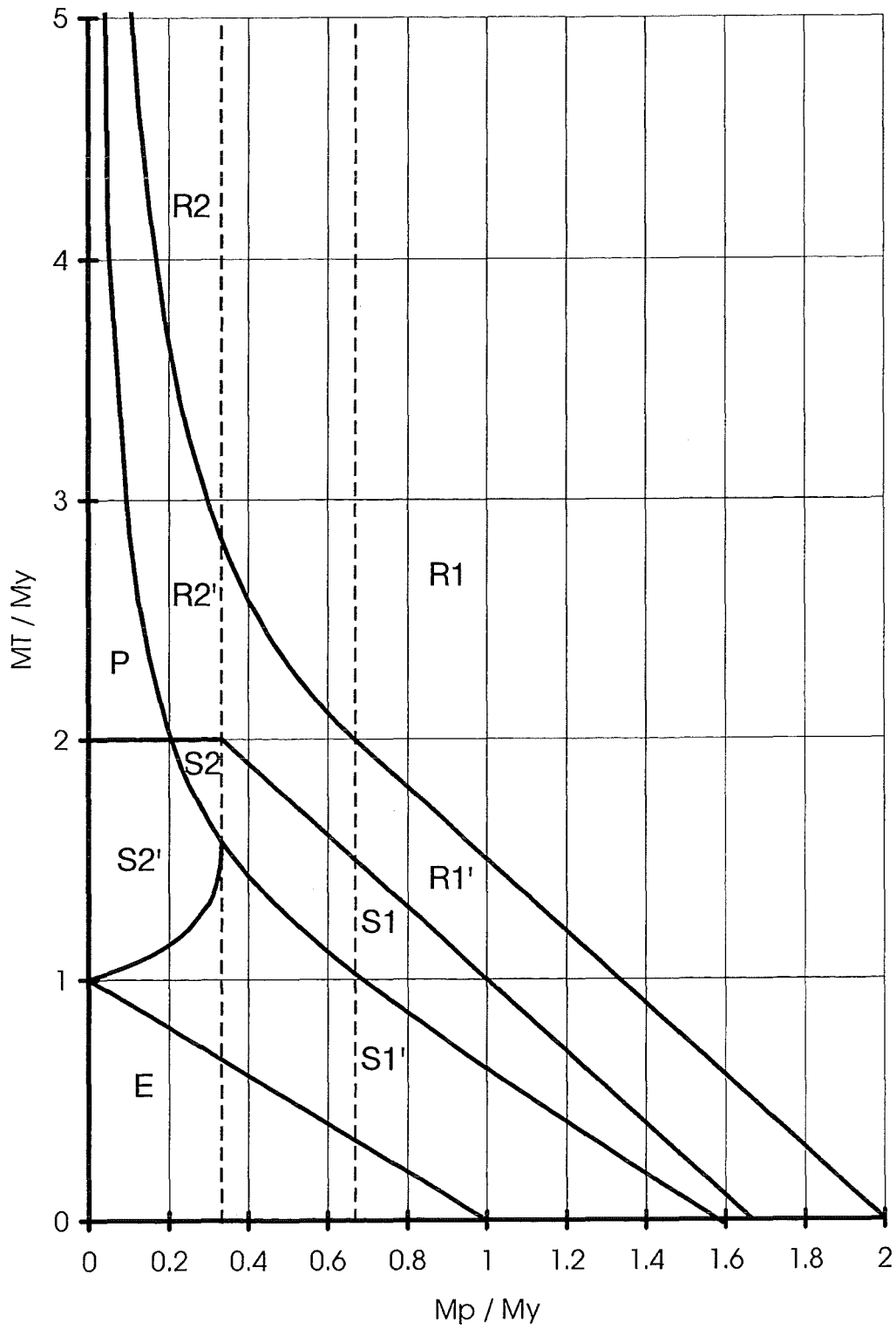


Abbildung 2.12: Breedendiagramm für den Biegebalken

Kapitel 3

FE-Rechnungen

3.1 Motivation

Um die analytischen Lösungen für das hier beschriebene Ratcheting-Problem auf ihre Zuverlässigkeit zu überprüfen, sind entweder Experimente oder detaillierte Finit-Element-Rechnungen durchzuführen.

Experimente werden dadurch problematisch, daß nur unter hohem Aufwand thermische Gradienten erzeugt werden können, die zum Effekt des Thermischen Ratcheting führen können. Dieses Problem kann man zum einen umgehen, indem man den Balken aus zwei Materialien mit einem möglichst großen Unterschied in den Temperaturexpansionskoeffizienten aufbaut. Dieses Bimetall zeigt das Ratcheting-Phänomen auch bei einer homogenen Temperaturbeanspruchung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde in einem einfachen Modell ein solcher Bimetall-Balken konstruiert. Die plastischen Gelenke wurden durch Reibgelenke ersetzt, welche bei einem kritischen Moment - analog dem thermischen Grenzmoment in der Biegetheorie - von Haftreibung zu Gleitreibung übergehen und so einen Knick in der Balkenachse zulassen. Durch dieses Vorgehen ist das Modell mehrmals verwendbar, was bei der Bildung wahrer plastischer Gelenke nicht der Fall wäre. Das Modell zeigte das Ratcheting-Phänomen, wie es in der vereinfachten Vorstellung mit je einem Gelenk in der Einspannung und einem weiteren in der Balkenmitte erwartet worden ist.

In [69] wird ein Balkenratcheting gezeigt, bei dem die thermischen Sekundärspannungen durch eine Endverschiebung ersetzt werden, indem einer konstanten mechanischen Belastung eine zyklierende vertikale Verschiebung eines der Balkenenden überlagert wird.

Bei Rechnungen mit der Finit-Element-Methode können selbst komplexeste Strukturen auf Ratcheting untersucht werden. Es stellt sich dann natürlich die Frage, warum

überhaupt analytische Modelle entwickelt werden müssen. Die Antwort auf diese Frage liefert das hier untersuchte Problem:

Trotz sehr einfacher Geometrie und genau definierter Belastungen benötigten die numerischen Rechnungen sehr hohe Rechenleistungen und Speicherkapazitäten. Zudem wurde erst durch die analytische Behandlung des Problems das notwendige Wissen für eine sinnvolle Modellierung mittels Finiter Elemente gelegt. Auch die Beurteilung der Ergebnisse ist ohne das Verständnis der Vorgänge und eine gewisse Erwartungshaltung nur unvollständig möglich. Ein weiterer Grund ist die einfache Handhabung eines Diagramms, wie es das Bree-Diagramm ist, was allerdings auch dazu führen kann, daß es auf Spannungsfälle angewandt wird, die bei seiner Erstellung eigentlich nicht Grundlage der Betrachtung waren. Die Aufgabe des Anwenders solcher einfacher Hilfsmittel in der Entwurfsphase besteht also auch darin, sich ein Bild über den zu erwartenden Belastungszustand und die Art der auftretenden Spannungen zu machen.

Je komplexer die zu behandelnden Strukturen, desto größer ist natürlich der Sprung zur eindimensionalen Lösung und um so größer deren Fehlerpotential. In solchen Fällen sollte man ausgehend von der Grobstruktur und den globalen Belastungen eine Vereinfachung anstreben, welche einem der drei Typen des thermischen Ratcheting entspricht, um erste Aussagen machen zu können. Treten lokale Spannungen auf, die zu lokalem Ratcheting führen können, so sind diese Detailstrukturen ebenso zu untersuchen. Dabei kann keine Aussage über die Überlagerung der Ratcheting-Vorgänge gemacht werden. Erschöpfende Aussagen erhält man in diesem Fall nur mit einer detaillierten FE-Rechnung, mit allen oben genannten Nachteilen. Eine parallele analytische Betrachtung sollte aber kritische Bereiche der Strukturen schon in der Entwurfsphase verdeutlichen und Hinweise für Änderungen aufzeigen, die ein Ratcheting der Struktur unterbinden.

3.2 Modellierung des Problems

Die FE-Berechnungen wurden mit dem FE-Paket ABAQUS durchgeführt [70]. Wie auch in der analytischen Lösung wurden die FE-Untersuchungen an einem Balkenmodell durchgeführt. Das Ziel ist dabei weniger eine genauere Untersuchung der Ratcheting-Vorgänge in der Ersten Wand, als ein Vergleich mit der analytischen Lösung. Es ist selbstverständlich möglich, einen Ausschnitt der Ersten Wand unter den realen Belastungen mittels der FE-Methode zu berechnen. Inhalt dieser Arbeit ist aber ein einfaches analytisches Mittel zur Beurteilung des Ratcheting-Verhaltens bereitzustellen. Dieses muß auf die Zuverlässigkeit seiner Annahmen überprüft werden.

Durch die hier durchgeführten Rechnungen wird nur ein Vergleich der analytischen

Balkenlösung und der FE-Berechnung des Balken-Ratchetings erreicht. Wie diese Lösung in Hinblick auf die reale Geometrie des Ersten Wand aussieht, vor allem im Hinblick mehrerer benachbarter Kühlkanäle und der Mehrdimensionalität der Spannungen, kann auf diese Art nicht gezeigt werden.

Eine Modellierung des Balkenproblems, welches der analytischen Lösung zugrundeliegt, wirft mehrere Fragen auf:

- Die Wahl der Elemente und deren Verschiebungsansatz schränken die Menge der möglichen Lösungen ein. Wird zum Beispiel ein Balkenelement verwendet, so sind in diesem implizit die Verschiebungs- und Spannungsbedingungen der Euler-Bernoulli- oder der Timoshenko-Balkenlösung vorgeschrieben [71].
- Die Art der Einspannung beeinflusst die Gelenkbildung. Die Ausbildung der Gelenke wiederum hängt von den Randbedingungen und den Materialeigenschaften ab.
 - Durch die Inkompressibilität des Materials entstehen in der Einspannung Spannungsanteile, welche in der eindimensionalen Theorie nicht berücksichtigt werden können. Da die Fließgrenze im allgemeinen dreidimensionalen Fall aus der Vergleichsspannung berechnet wird, ist eine Abweichung der Form des plastischen Gelenks von der vorhergesagten zu erwarten. Je näher dabei das Material die Bedingung der Inkompressibilität erfüllt, desto größer die Abweichung. In fast allen Stoffgesetzen ist die Plastizität mit vollkommener Inkompressibilität verbunden. Dadurch liefert auch eine Anpassung der Querkontraktionszahl an einen eindimensionalen Zustand im elastischen Bereich ($\nu = 0$) keinen befriedigenden Ansatz.
 - Die Theorie berücksichtigt bei der Bildung plastischer Bereiche nicht den Einfluß des Querkontraktionsunterschiedes zwischen elastischem und plastischem Material. In ihr wird angenommen, daß auch das elastische Material vollkommen inkompressibel ist ($\nu = 0,5$). Die durch den Unterschied erzeugten Schubspannungen werden so auch nicht berücksichtigt. Eine Gleichsetzung der Querkontraktionszahl im elastischen und im plastischen Bereich ist unmöglich, da in der Steifigkeitsmatrix nicht berechenbare Steifigkeiten entstehen.
 - Die von Bernoulli gemachten Annahmen der Verwölbungsfreiheit der Querschnitte wird bei Bildung eines Gelenks in Verbindung mit einer über den gesamten Balkenquerschnitt verschiebungslosen Einspannung stark verletzt. (Die in der Timoshenko-Lösung erlaubten Verwölbungen der Querschnitte erlauben keine großen Krümmungen, wie sie im plastischen Gelenk auftreten können.)

- Durch die thermische Belastung werden in der festen Einspannung zusätzliche Spannungen durch die behinderte thermische Ausdehnung erzeugt.
- Die Bernoulli-Lösung kann im strengen Sinne nur für einen sehr langen Balken gelten. Je geringer das Verhältnis der Länge zu den Querschnittsseiten ist, um so größer werden die Abweichungen. In der FE-Rechnung kann man dieser Einschränkung durch die Berücksichtigung einer Schubspannung im Querschnitt gerecht werden (Balkentheorie nach Timoshenko).

Um diese Abweichungen zu eliminieren oder zumindest abzuschwächen, wurden folgende Schritte unternommen:

- Um eine möglichst uneingeschränkte Aussage zu erhalten werden 3D-Elemente mit 8 Knoten benutzt. Sie besitzen einen trilinearen Verschiebungsansatz und einen trilinearen Ansatz für die Temperaturverteilung.¹
- In der analytischen Lösung wird die Fließgrenze nur durch die Balkenlängsspannung bestimmt, während im dreidimensionalen Spannungszustand des FE-Balkens die übrigen Spannungskomponenten durch die Verwendung der v. Mises'schen Vergleichsspannung berücksichtigt werden. Um auch hier einen Vergleich zur eindimensionalen analytischen Lösung zu ermöglichen, sollte ein anisotropes Fließgesetz - Hill Potential - verwendet werden. Eine dieses Ziel erreichende Anpassung der Parameter war aber aus numerischen Gründen nicht möglich. Deshalb wurde auf diese Annäherung in der FE-Rechnung verzichtet und das isotrope Fließgesetz nach v. Mises angewandt.
- Um die durch den Übergang vom kompressiblen elastischen zum inkompressiblen plastischen Bereich hervorgerufenen Schubspannungen zu minimieren, wurde in der Einspannung eine elastische "Pufferzone" eingefügt, welche eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,45$ besitzt. Dadurch sollte der Übergang vom plastischen auf den elastischen Bereich "verschmiert" werden. Auch Berechnungen mit einer elastischen Querkontraktionszahl von $\nu = 0,45$ im gesamten Balken wurden durchgeführt, die Abweichungen von den Ergebnissen für einen Wert von $\nu = 0,30$ waren aber nur sehr gering. Die Pufferzone wurde nur thermisch, nicht aber mechanisch belastet, wodurch sie nicht zum eigentlichen Balken gehört.

¹In einem groberen Elementnetz wurden auch 20-Knoten Elemente mit einem triquadratischen Verschiebungsansatz verwendet, welche aber zu fehlerhaften Ergebnissen bei den Spannungen führten (Elementtyp: C3D20HT, ABAQUS-Version 5.3)

- Es wurden Berechnungen für Material mit isotroper und anisotroper Temperaturdehnung (nur in Balkenlängsrichtung) durchgeführt. Dabei entspricht die anisotrope Berechnung der analytischen eindimensionalen Lösung.
- Der Balken wurde mit einem Längen-Tiefen-Höhen-Verhältnis von 25:5:1, wie es der Geometrie in den Kühlkanälen der Ersten Wand entspricht, und einem Verhältnis von 50:5:1, was einem 'schlankeren' Balken entspricht, modelliert.

Im übrigen wurden folgende Materialdaten [72] und Randbedingungen angesetzt:

- Um überlagerte Druckspannungen durch Wärmedehnung im Balken zu vermeiden, wurde eine homogene Ausgangstemperatur vorgeschrieben. Der Temperaturgradient entsteht durch Wärmeleitung, indem die Oberseite des Balkens, jene Seite, auf welche die mechanische Belastung wirkt, auf eine konstante niedrigere Temperatur gesetzt wird und die Balkenunterseite durch einen Wärmestrom belastet wird.
- Die mechanische Belastung wird durch einen über der Balkenlänge konstanten Druck simuliert.
- Es wurden nur stückweise lineare Stoffgesetze für einen Vergleich verwendet. Berücksichtigt wurden:
 - Ideal-plastisches Material (Abb. 3.1 a))
 - Verfestigendes Material mit Maximalspannung (Abb. 3.1 b))
 - * isotrop verfestigend
 - * kinematisch verfestigend
 - Verfestigendes Material ohne Maximalspannung (Abb. 3.1 c))
 - * isotrop verfestigend
 - * kinematisch verfestigend

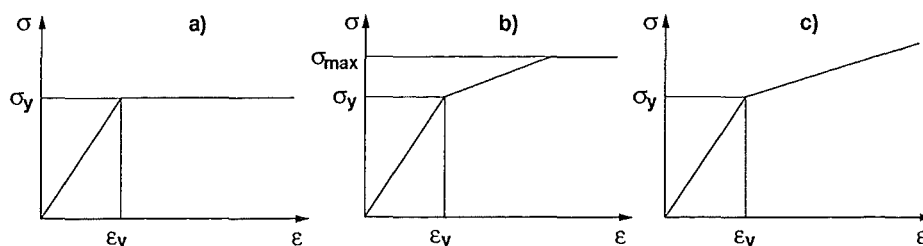


Abbildung 3.1: "bilineare" und "trilineare" Stoffmodelle

- Der Elastizitätsmodul von $1,85 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ entspricht dem des Stahles MANET bei einer Temperatur von 470°C (für die Rechnungen mit temperaturunabhängigen Materialdaten).
- Der Temperatureausdehnungskoeffizient wurde in den Rechnungen mit temperaturunabhängigen Materialdaten mit $\alpha = 12,0 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$ angesetzt.
- Der Wärmeleitfähigkeit beträgt entsprechend MANET, bei Temperaturen um 470° , $\lambda = 26,1 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$.

Die Größen der mechanischen und der thermischen Belastung können als Vielfache des Eingangsfleißmomentes eingegeben werden. Dieses wird über die Fließspannung ermittelt, welche im resultierenden Bree-Diagramm eine Variable, und somit frei wählbar ist.

Abbildung 3.2 zeigt das Balkenmodell, wie es in den FE-Berechnungen Verwendung gefunden hat.

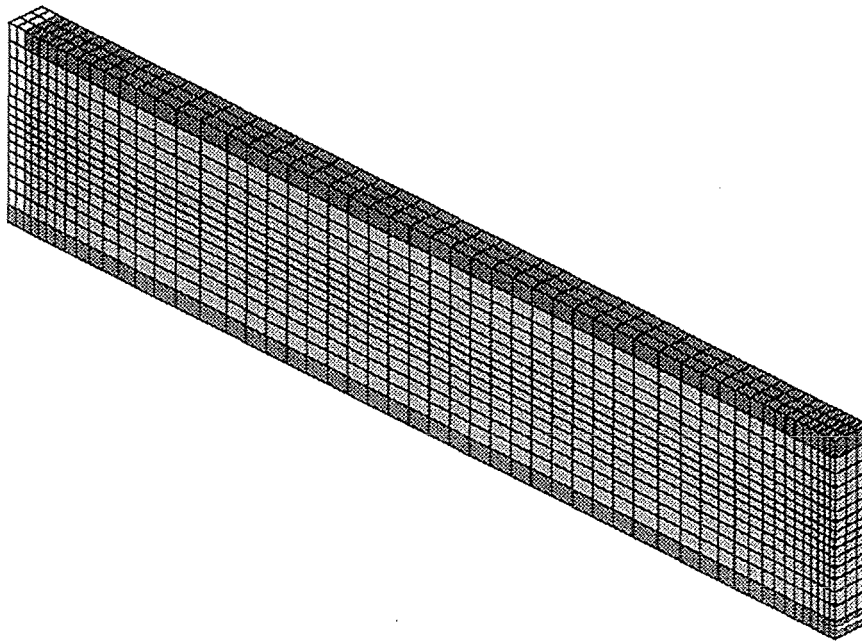


Abbildung 3.2: Balkenmodell: Balkenlänge = 50mm, Balkenhöhe = 5mm, Balkentiefe = 1mm, dargestellt ist nur der halbe Balken. Anzahl der Knoten: 3604, Anzahl der Elemente: 2496, Anzahl der freien Parameter (Freiheitsgrade): 14416. Die thermische Belastung wirkt auf die untere Seite des Balkens, die obere Seite wird einer Druckbelastung ausgesetzt. Die Pufferzone ist durch helle Elemente gekennzeichnet und wird nur thermisch beansprucht.

3.3 Ergebnisse

3.3.1 Biegelinie

Als deutlichstes Merkmal des Balkenverhaltens ist die Biegelinie anzusehen. In den folgenden Diagrammen wird die Durchsenkung der Balkenachse in der Balkenmitte über der Zyklenzahl aufgetragen, Abbildungen 3.3-3.8. Dabei bestehen die Zyklen aus mehreren Recheninkrementen, bedingt durch die numerische Analyse. Eine Aufteilung der einzelnen Belastungszyklen ist notwendig, um ein Gleichgewicht in der nicht-linearen Berechnung zu finden. Die Halbzyklen bestehen aus sieben Recheninkrementen während der plastischen Phase und aus fünf Recheninkrementen in der elastischen Entlastung zum Ende der Rechnung. Die nach dieser Entlastung bleibende Durchsenkung beschreibt die während der Temperaturzyklen akkumulierte plastische Verformung.

Man sieht, daß die Durchsenkung im ersten Aufheizzyklus am größten ist. Dies ist ein Einschwingeffekt. Die in den Folgezyklen auftretenden Residuen-Spannungen reduzieren die Verformung pro Halbzyklus.

Anhand der Abbildungen ist eine Unterscheidung der einzelnen Zonen des Bree-Diagramms möglich:

- Der Fall des **Shakedown** nach dem ersten Zyklus ist in Abbildung 3.3 zu erkennen.
Die plastische Durchsenkung findet im ersten Halbzyklus statt. Anschließend finden nur noch elastische Schwankungen um diese plastische Verformung statt.
- Shakedown nach mehreren Zyklen, oder auch **finite Ratcheting** zeigen die Abbildungen 3.4, 3.5 und 3.6.
Die erste Durchsenkung ist wiederum deutlich größer als die nachfolgenden. In den Folgezyklen findet aber weiterhin eine Akkumulation der Verformungen statt, wenn auch die Verformungsinkremente exponentiell abnehmen, bis der Zuwachs der Durchsenkung nach einer gewissen Zyklenzahl, abhängig von der Größe der Belastungen, vollständig zum Stillstand kommt. In Abbildung 3.6 ist zwar ein Shakedown-Zustand noch nicht erreicht, er ist aber anhand der berechneten Zyklen abzusehen.
- Bei **infinitem Ratcheting** tritt auch nach unendlicher Zyklenzahl keine Abnahme der Verformungsinkremente auf, Abbildung 3.7.
Der Mittelwert der Zunahme ist im idealen Fall vom zweiten Zyklus an konstant. Tatsächlich zeigt sich hier eine Abnahme der Verformungsinkremente. Es ist anhand der berechneten Zyklen nicht möglich eine eindeutige Aussage zu treffen, ob es zu einem Shakedown kommen kann. Im Falle eines Versagens ist wohl aber die Akkumulation der Dehnungen aus dem Ratcheting bestimmend.

- In Abbildung 3.8 ist der Fall des plastischen Zyklirens dargestellt. Liegt das mechanische Belastungsverhältnis $\frac{M_p}{M_y}$ unterhalb von $\frac{1}{3}$, kann es zum Shakedown mit anschließendem plastischen Zyklieren oder ein dem Ratcheting überlagerten plastischen Zyklieren kommen. In dieser Abbildung sind die durch das Ratcheting akkumulierenden Verformungsinckremente jedoch sehr viel geringer als jene, die durch das plastische Zyklieren entstehen. Damit ist die Kurzzeit-Ermüdung durch plastisches Zyklieren und nicht das Ratcheting der vorherrschende Versagensmechanismus.

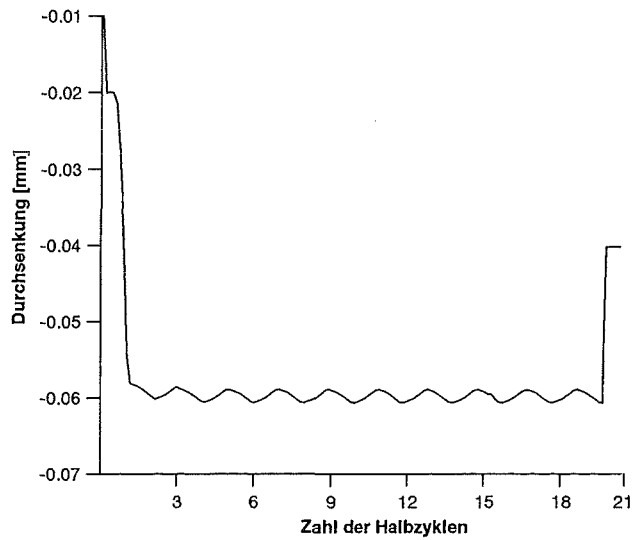


Abbildung 3.3: Shakedown nach dem ersten Zyklus, $\frac{M_p}{M_y} = 1,0$, $\frac{M_T}{M_y} = 1,3$, ideal-plastisches Materialverhalten

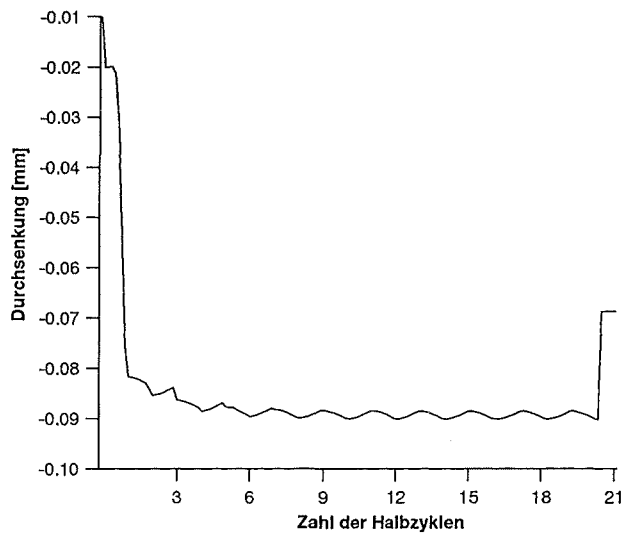


Abbildung 3.4: Shakedown nach zwei Zyklen, $\frac{M_p}{M_y} = 0,83$, $\frac{M_T}{M_y} = 1,67$, ideal-plastisches Materialverhalten

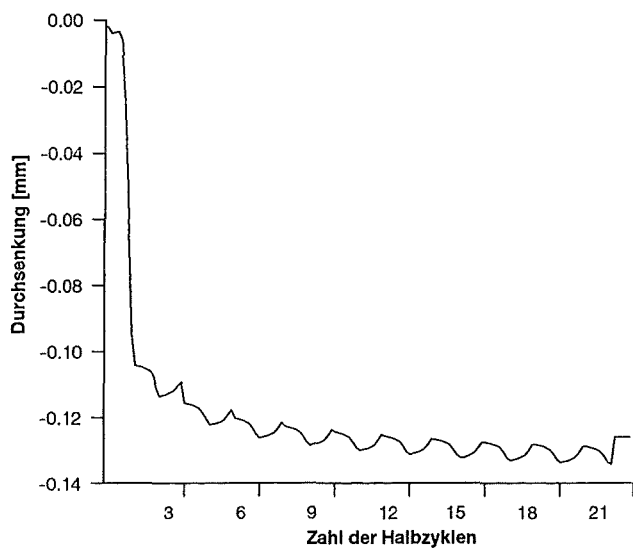


Abbildung 3.5: Shakedown nach etwa 10 Zyklen, $\frac{M_p}{M_y} = 0, 2$, $\frac{M_T}{M_y} = 3, 5$, ideal-plastisches Materialverhalten

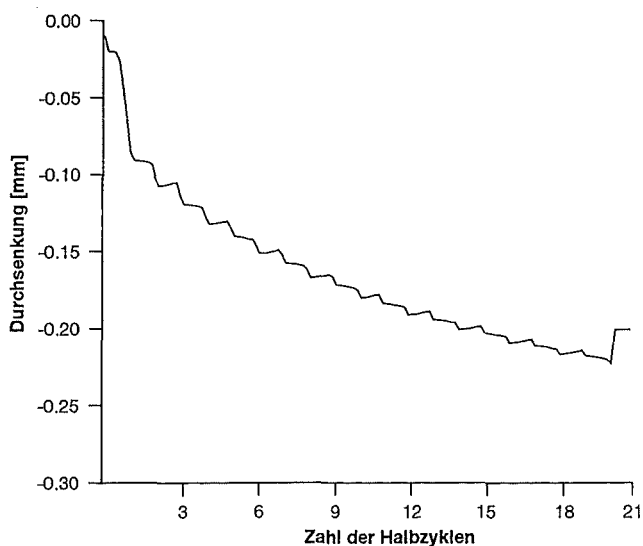


Abbildung 3.6: Shakedown nach mehreren Zyklen bei kin. Verfestigung, $\frac{M_p}{M_y} = 1, 0$, $\frac{M_T}{M_y} = 2, 0$

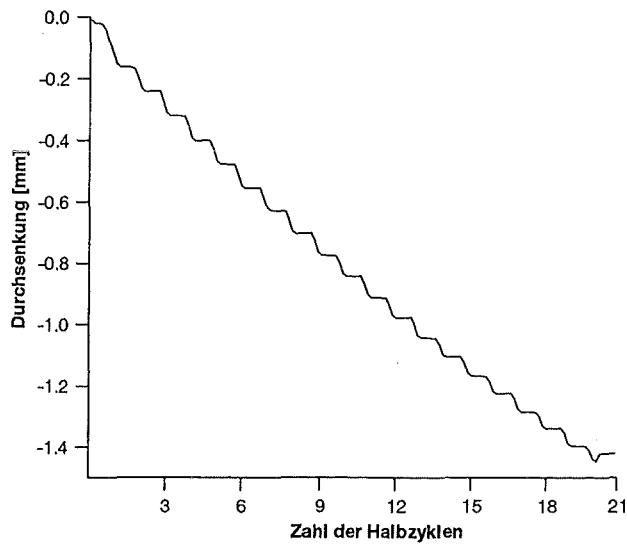


Abbildung 3.7: Ratchetingverhalten mit nahezu konstanter Zunahme des Verformungsinkrements $\frac{M_p}{M_y} = 1,0$, $\frac{M_T}{M_y} = 3,0$, ideal-plastisches Materialverhalten

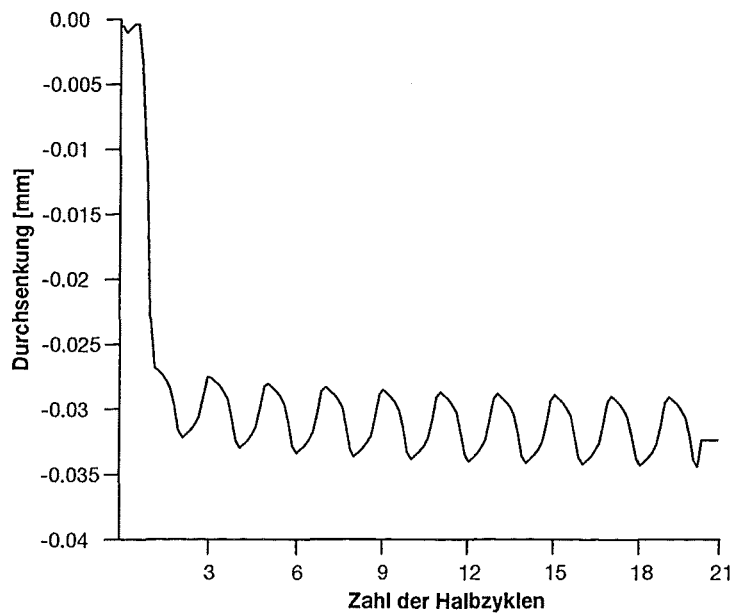


Abbildung 3.8: Zyklisches Plastifizieren bei finitem Ratcheting, $\frac{M_p}{M_y} = 0,05$, $\frac{M_T}{M_y} = 3,5$, ideal-plastisches Materialverhalten

3.3.2 Überprüfung der Vereinfachungen bei der Modellierung

3.3.2.1 Anpassung des Modells an analytische Lösung

Die Einführung der Pufferzone zur Minimierung der inkompressiblen Einflüsse des Materials und des Übergangs vom elastischen zum plastischen Material besitzt auch den Vorteil, daß dadurch eine realistischere Modellierung erreicht wird. Die Übergänge der Wände auf die Stege zwischen den einzelnen Kühlkanälen der ersten Wand werden im Balkenmodell des analytischen Ansatzes als ideal starr angesehen. In Wirklichkeit verhalten sich aber auch diese Stege ähnlich der Pufferzone unter der Temperaturbelastung, was bedeutet, daß sie eine gewisse Verformung zulassen (Siehe Anhang A). Der Einfluß der Querkontraktion und der Anisotropie in der Einspannung ist in Abbildung 3.9 aufgetragen. Die Anpassung der elastischen Querkontraktion wurde aus zuvor genannten Gründen unternommen. Es zeigt sich aber, daß dieser Einfluß von vernachlässigbarer Größe für das Ratchetingverhalten ist. Der Einfluß auf die Durchsenkung und die Gelenkbildung in der Einspannung ist vernachlässigbar. Weiterhin ist zu erkennen, daß die Querkontraktionszahl in der Einspannungen weniger stark auf die Durchsenkung wirkt als die Modellierung der Anisotropie. Die aus diesen beiden Vereinfachungen resultierenden Abweichungen sind aber für die Betrachtung des Balkenverhaltens von vernachlässigbarer Größe.

3.3.2.2 Nicht-lineare Geometrie-Effekte und Verfestigung

In der Bernoulli-Hypothese werden kleine Verformungen vorausgesetzt. In der analytischen Lösung des Balkenratchetings wird das Gleichgewicht immer am unverformten Balken gebildet. Eine Akkumulation der plastischen Dehnungen mit der Zyklenzahl führt so zu einer größeren Ungenauigkeit der Ergebnisse. Um eine Abschätzung der Größe dieser Abweichungen zu erzielen, wurden mit dem FE-Modell Berechnungen mit linearem und mit nicht-linearem Verschiebungsansatz durchgeführt. Damit sollte die Beschränkung auf kleine Verschiebungen in der Bernoulli-Hypothese quantifiziert werden. Ein Ergebnis für infinites Ratcheting ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Da die Abweichungen auch für größere Zyklenzahlen vernachlässigbar sind, wurden die Rechnungen im folgenden nur noch mit einem linearen Verschiebungsansatz durchgeführt, um Rechenzeit zu sparen.

Die geringen Unterschiede zwischen den beiden verfestigenden Materialien, ebenfalls in Abbildung 3.10, lassen sich durch die geringen akkumulierten Dehnungen erklären. Da bei der thermischen Entlastung keine Gelenkbildung in der Balkenmitte auftritt, können sich keine großen plastischen Verformungen in Gegenrichtung zu der aus dem Aufheizhalbzyklus bilden, wodurch der Unterschied zwischen den beiden Verfestigungsarten nicht zum Tragen kommt.

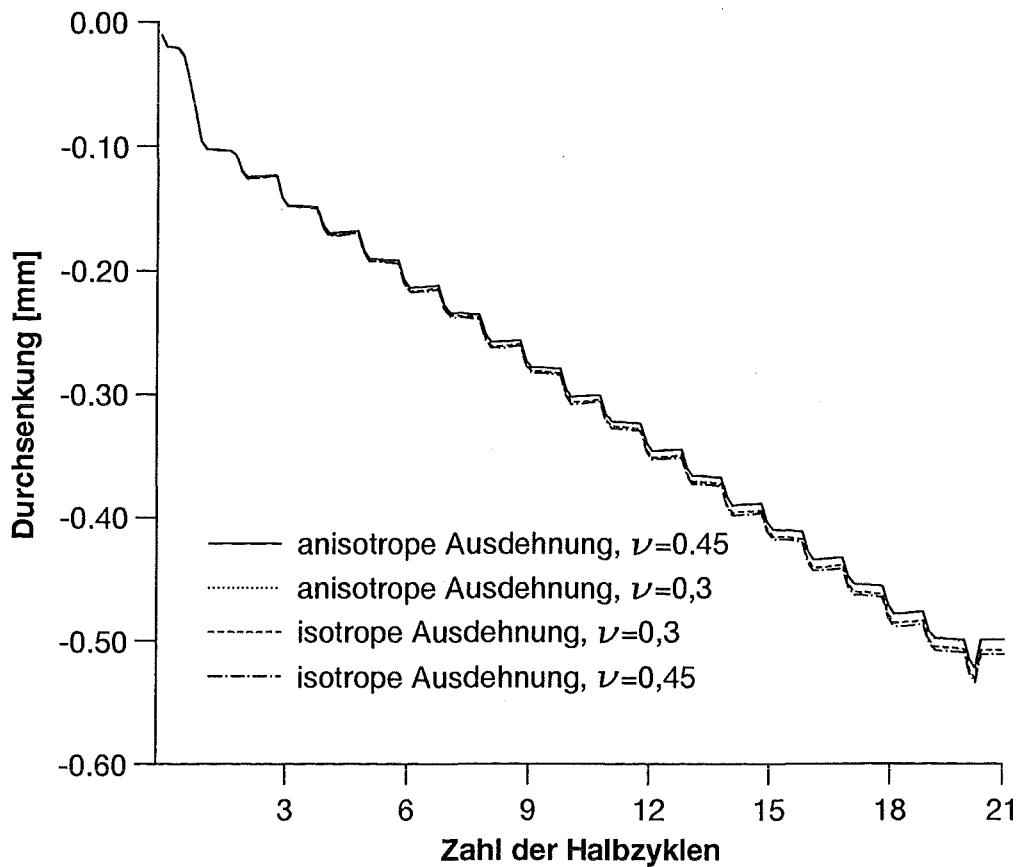


Abbildung 3.9: Abhängigkeit des Ratcheting-Verhaltens von der Querkontraktion und der Isotropie der Temperaturdehnung in der Pufferzone. $\frac{M_p}{M_y} = 1, 0$; $\frac{M_T}{M_y} = 2, 0$

1. Anisotrope Ausdehnung, $\nu = 0, 45$
2. Anisotrope Ausdehnung, $\nu = 0, 30$ (verdeckt von Kurve 1)
3. Isotrope Ausdehnung, $\nu = 0, 30$
4. Isotrope Ausdehnung, $\nu = 0, 45$

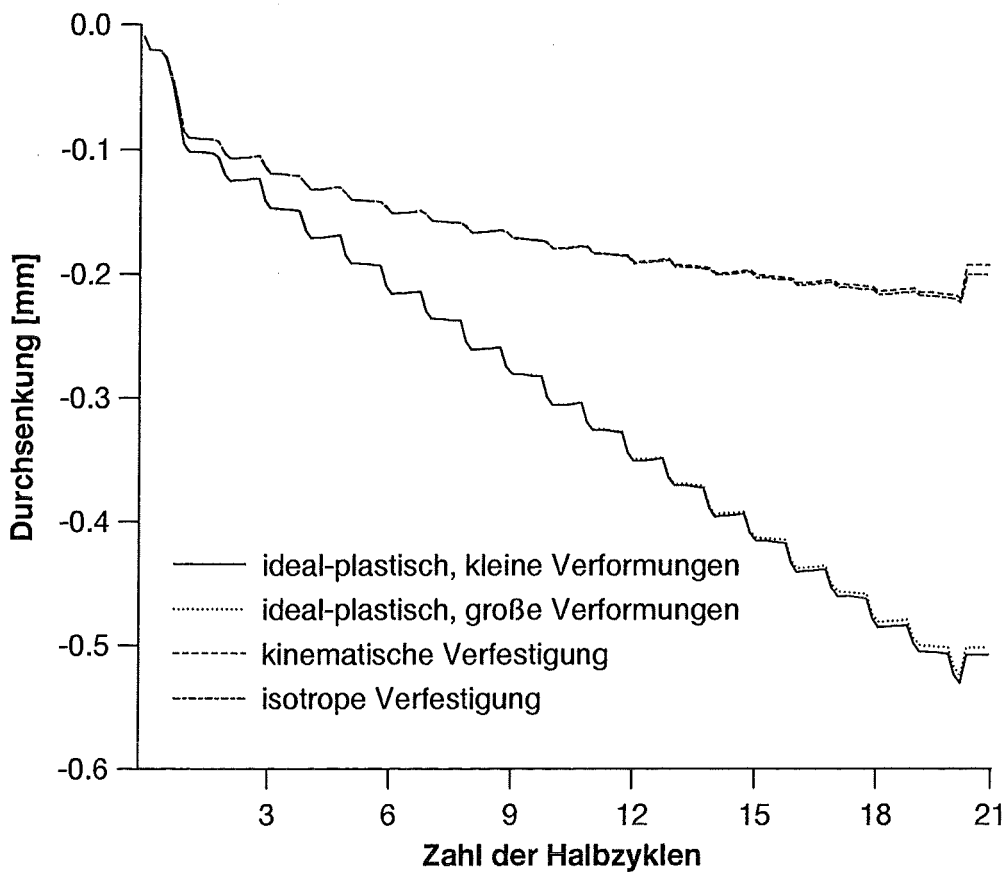


Abbildung 3.10: Einfluß der geometrischen Linearität und des Materialmodells auf das Ratcheting-Verhalten. $\frac{M_p}{M_y} = 1,0$; $\frac{M_T}{M_y} = 2,0$

1. Elastisch ideal-plastisches Material, linearer Verschiebungsansatz
2. Elastisch ideal-plastisches Material, nicht-linearer Verschiebungsansatz
3. Kinematisch verfestigendes Material, linearer Verschiebungsansatz
4. Isotrop verfestigendes Material, linearer Verschiebungsansatz

3.3.2.3 Einfluß der Materialparameter

Um den Einfluß der Materialparameter auf das Ratchetingverhalten des Balkens zu untersuchen, wurden Rechnungen mit ideal-plastischem, kinematisch verfestigendem und isotrop verfestigendem Material durchgeführt (Abbildung 3.10). Auch der Einfluß der inhomogenen Temperaturverteilung wurde durch die Abhängigkeit der Stoffwerte von der Temperatur berücksichtigt, Abbildung 3.11. Es zeigt sich, daß die Parameter sowohl qualitativ, als auch quantitativ verschiedene Einflüsse auf die Größe der Durchsenkung besitzen - das Ratcheting-Verhalten, d.h. ob Shakedown oder nicht, beeinflussen sie nicht.

Eine Verwendung von temperaturabhängigen Materialdaten, wie des Elastizitätsmoduls E und der Querkontraktion ν , führen zu einer Abnahme der Dehnungsinckremente, die Anpassung der Fließspannung σ_y , der Wärmeleitfähigkeit λ und des Temperatureausdehnungskoeffizienten α dagegen führen zu einer Zunahme der Dehnungsinckremente. Werden alle diese Größen als temperaturabhängig angesetzt, ergeben sich etwa 5-10% größere Durchsenkungen. Es ist deshalb bei einer genauen Berechnung von Ratcheting-Effekten auf den Einfluß des Materialratchetings zu achten. Da vor allem die Fließspannung einen sehr großen Einfluß besitzt, kann man in temperaturunabhängigen Rechnungen zu besseren Aussagen kommen, setzt man die Fließspannung für die maximal auftretende Temperatur an. Dies gilt ebenfalls für die Werte der Wärmeleitfähigkeit und des Temperatureausdehnungskoeffizienten. Rechnet man dagegen mit den Werten des Elastizitätsmoduls und der Querkontraktion für die niedrigste auftretende Temperatur, so führt die analytische Lösung zu einer konservativen Aussage unter Berücksichtigung der Temperatureffekte.

Da in dieser Arbeit aber vor allem der Vergleich mit der vereinfachten analytischen Lösung im Mittelpunkt steht, wird nur darauf verwiesen, bei detaillierten Rechnungen diese Effekte zu berücksichtigen. (Anhang E).

Der Balken wurde sowohl mit anisotroper als auch mit isotroper Wärmedehnung gerechnet, um den Vergleich der eindimensionalen mit der dreidimensionalen Lösung vergleichen zu können. Der Vergleich zeigt, daß auch diese Vereinfachung in der analytischen Lösung keinen großen Einfluß auf das Ergebnis besitzt, Abbildung 3.12.

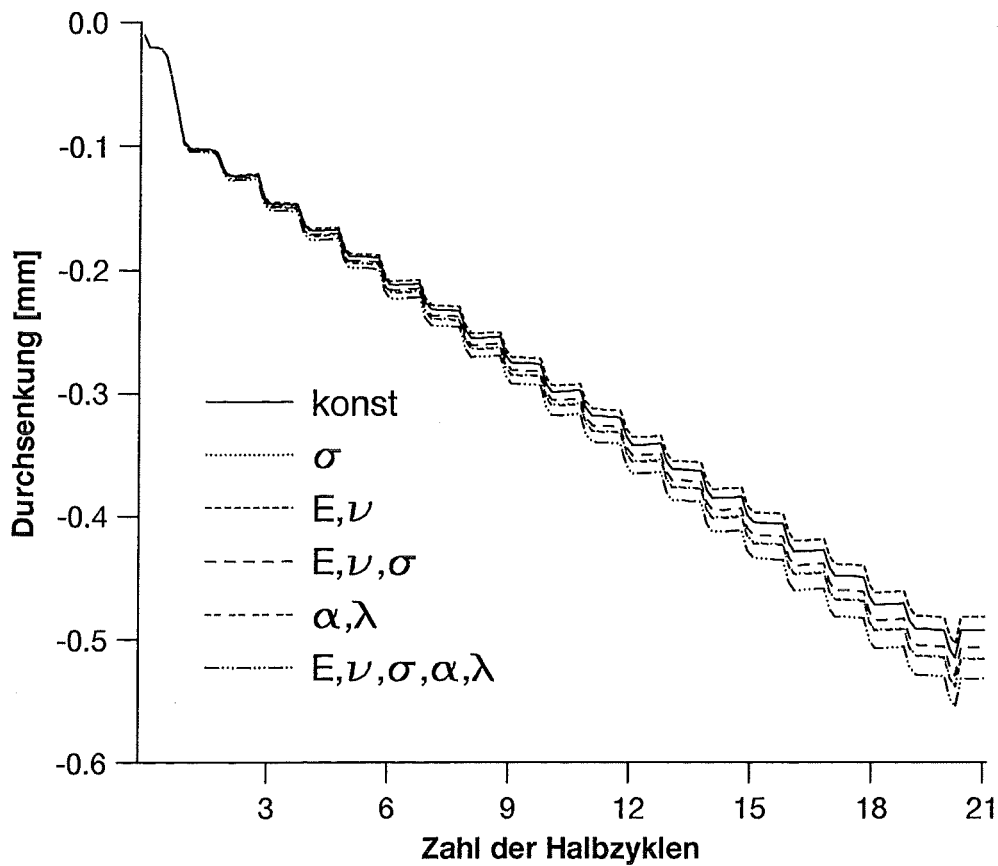


Abbildung 3.11: Einfluß der Temperaturabhängigkeiten auf das Ratcheting Verhalten bei ideal-plastischem Material, $\frac{M_p}{M_y} = 1, 0$; $\frac{M_T}{M_y} = 2, 0$.

1. konstante Stoffwerte
2. Fließspannung temperaturabhängig
3. Elastizitätsmodul und Querkontraktion temperaturabhängig
4. Fließspannung, Elastizitätsmodul und Querkontraktion temperaturabhängig
5. Wärmeleitfähigkeit und Temperaturexpansionskoeffizient temperaturabhängig
6. Alle Stoffwerte temperaturabhängig

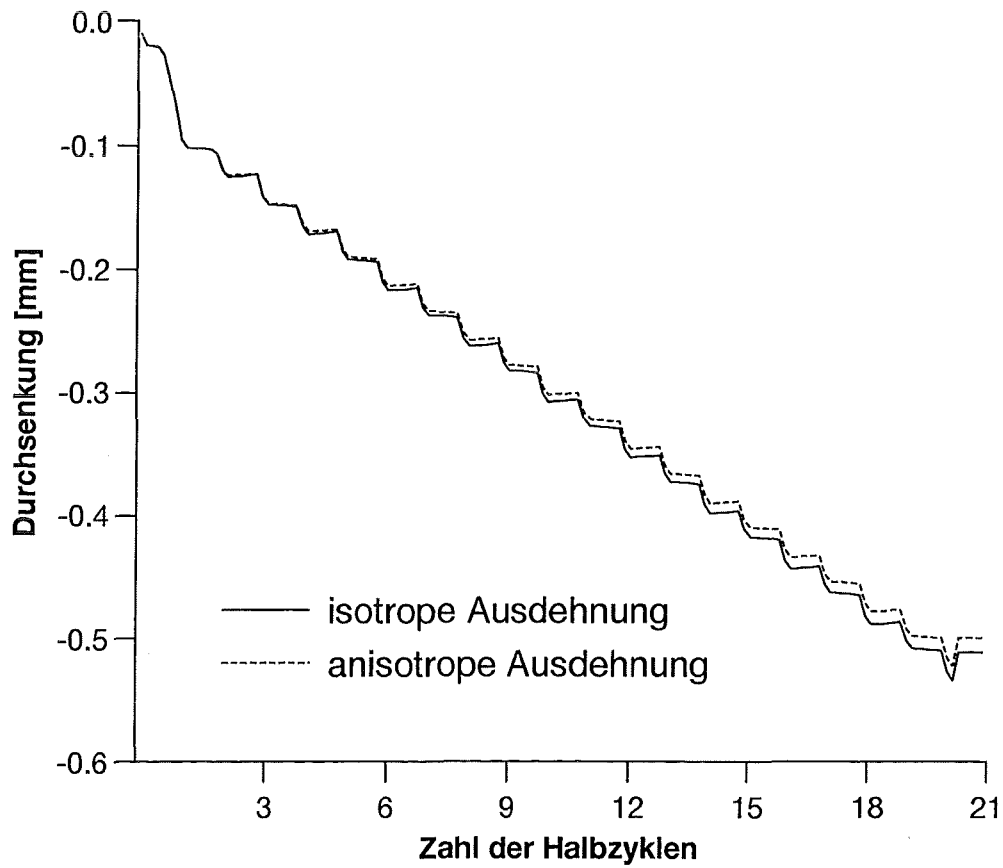


Abbildung 3.12: Abhängigkeit des Ratcheting-Verhaltens von der Isotropie des Temperaturausdehnungskoeffizienten, $\frac{M_p}{M_y} = 1, 0$; $\frac{M_T}{M_y} = 2, 0$.

3.3.2.4 Das plastische Gelenk

Im Unterschied zur eindimensionalen Theorie zeigen die FE-Berechnungen, daß sich das plastische Gelenk in der Einspannung keineswegs nur unmittelbar in der Einspannebene ausbildet, sondern über einen Teil der Balkenlänge reicht. Deren Größenordnung entspricht etwa der halben Balkenhöhe, Abbildung 3.13. Dieser Effekt ist auch als Endeffekt bekannt und wurde zuerst von Saint-Venant untersucht [73, 74].

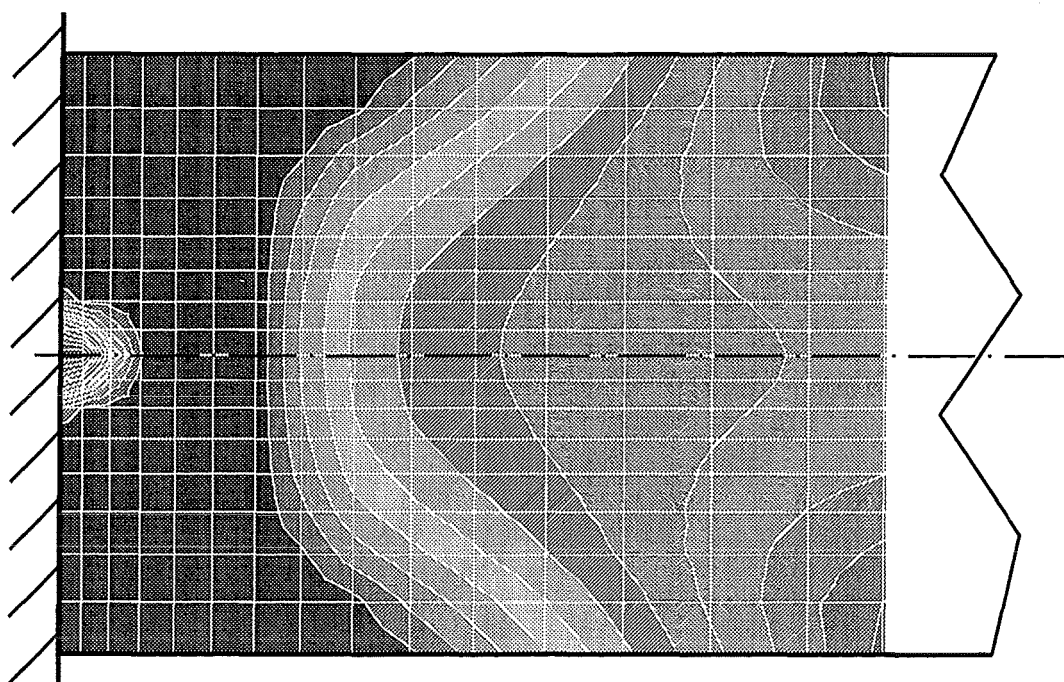


Abbildung 3.13: Plastisches Gelenk in der Balkeneinspannung. Die Ausdehnung des Gelenks in die Achsrichtung des Balkens entspricht etwa der halben Balkenhöhe - die dunkleren Bereiche sind die Bereiche, in denen die Fließgrenze erreicht wurde.

Das Verhalten der plastischen Zonen in der Balkenmitte ist in den Abbildungen 3.14 und 3.15 zu sehen. Für Ratcheting mit plastisch zyklierenden Bereichen, oder den vollplastischen Balken, sagt das Shakedown-Theorem, daß sich eine von der Balkenlängskoordinate unabhängige Änderung des elastischen Restquerschnitts β einstellt. Die Abbildungen zeigen die Entwicklung des elastischen Restquerschnitts für einen Belastungsfall von $\frac{M_P}{M_y} = 0,5$ und $\frac{M_T}{M_y} = 3,5$ (Shakedown mit plastisch zyklierendem Teilbereich) für die Aufheizhalbzuklen (Abbildung 3.14), bzw. für die Abkühlhalbzuklen (Abbildung 3.15). Man erkennt, daß sich über den größten Teil des Balkens ein solch konstanter Wert einstellt. In der Umgebung der Einspannung wird der Spannungszustand vom plastischen Gelenk bestimmt. Die dunkleren Bereiche sind Bereiche plastischer Verformungen. Man kann erkennen, daß sich mit zunehmender Zyklenzahl ein stationärer Zustand einstellt, ab dem keine Vergrößerung dieser Bereiche stattfindet. In den Abkühlhalbzuklen 3.15 zeigt sich, daß, wie es auch die Shakedown-Theoreme fordern, eine Angleichung des elastischen Restquerschnittes stattfindet. Ausnahme hier ist das Gebiet der plastischen Verformungen in der Balkenmitte. Eine Überlagerung der Spannungsverteilung aus zwei zueinander gehörenden Halbzuklen zeigt eine Angleichung des elastischen Restquerschnitts über der gesamten Balkenlänge, Ausnahme ist nur der unmittelbare Einspannbereich.

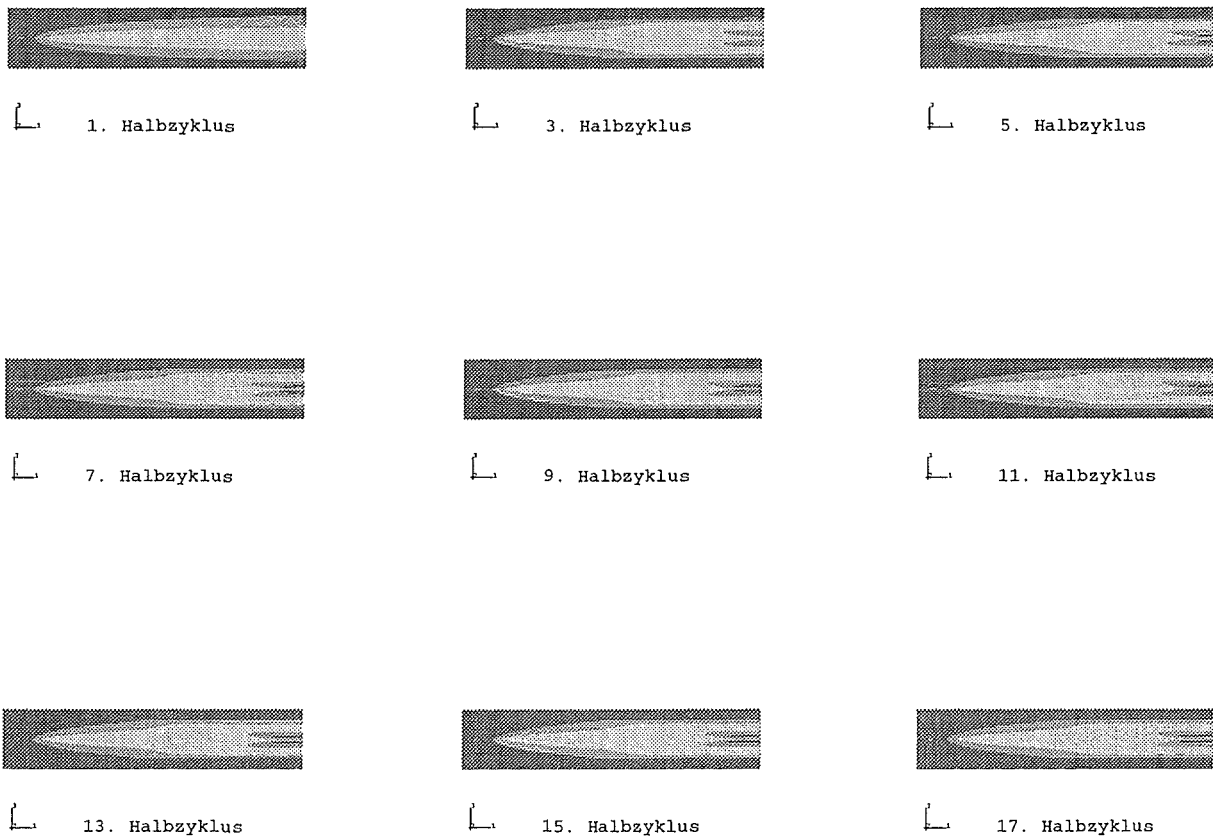


Abbildung 3.14: Belastungsfall $\frac{M_p}{M_y} = 0,5$; $\frac{M_T}{M_y} = 3,5$. Spannungsverteilung im Balken (Einspannung auf der linken Seite) zum Ende der Aufheizhalbzzyklen. Mit zunehmender Zahl stellt sich in den elastisch beanspruchten Bereichen des Balkens ein konstanter Wert des elastischen Restquerschnittes ein. Es kommt zum Shakedown.



Abbildung 3.15: Belastungsfall $\frac{M_P}{M_y} = 0,5$; $\frac{M_T}{M_y} = 3,5$. Spannungverteilung im Balken (Balkenmitte auf rechter Seite) zum Ende der Abkühlhalbzzyklen. Mit zunehmender Zahl der Abkühlhalbzzyklen stellt sich in der Einspannung des Balkens ein konstanter Wert des elastischen Restquerschnittes ein. Es kommt zum Shakedown.

3.4 Verhalten bei kleinen mechanischen Momenten

Bei kleinen mechanischen Biegemomenten kommt es im Überlappungsbereich der plastischen Zonen zum plastischen Zyklieren. Diese Schwankungen finden beim Shakedown nach dem ersten Zyklus um einen, sich im ersten Zyklus eingestellten Wert der plastischen Durchsenkung statt (Abbildung 3.16). (Kleine weitere Zunahmen der Netto-Dehnung nach dem ersten Zyklus sind in dieser Abbildung noch zu erkennen. Diese Belastungskombination liegt dicht an der Grenze zwischen Shakedown und *finitem Ratcheting*). Bei einem Shakedown nach einer endlichen Zyklenzahl, *finites Ratcheting*, ist der Wert des Inkrements der Durchsenkung während des Abkühlens größer, als der der Rückverformung während des Aufheizens (Abbildung 3.17).

Der hier auftretende Effekt der Rückverformung während des Aufheizens kann von der eindimensionalen Theorie nicht erklärt werden. Erwartet würde wie z.B. in Abbildung 3.16 ein Übergang der Durchsenkung in eine horizontale Gerade, in Abbildung 3.17 eine stufenweise weitere Durchsenkung mit einer Abnahme der Stufenhöhe und anschließendem Übergang in eine horizontale Gerade.

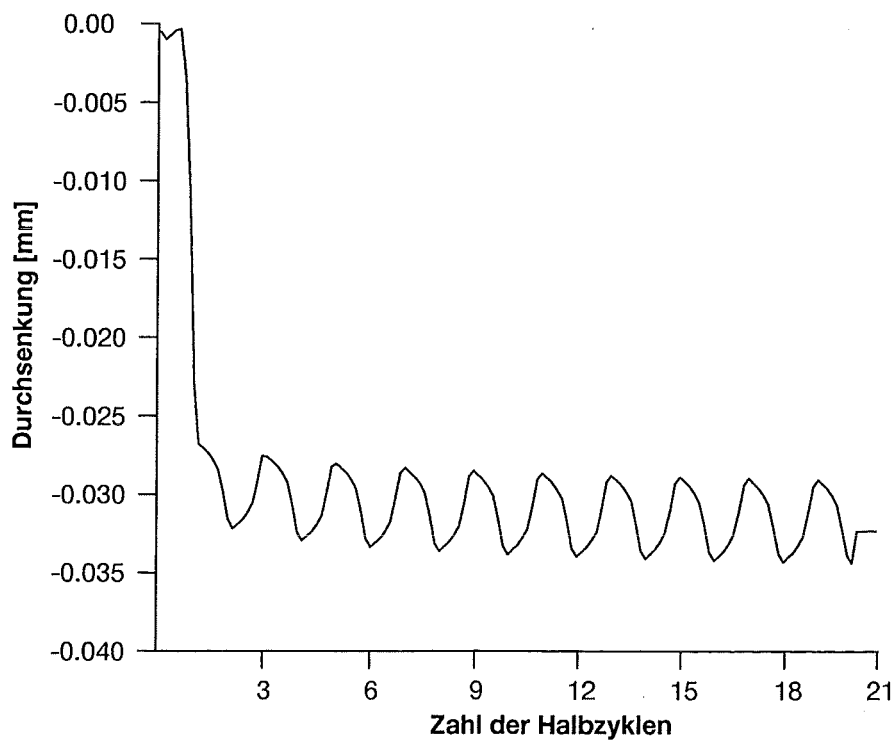


Abbildung 3.16: Belastungsfall $\frac{M_P}{M_y} = 0,05$; $\frac{M_T}{M_y} = 3,5$. Plastische Rückverformungen bei kleinen mechanischen Belastungen, nahe der Grenze des Shakedown nach dem ersten Zyklus. Plastisches Zyklieren.

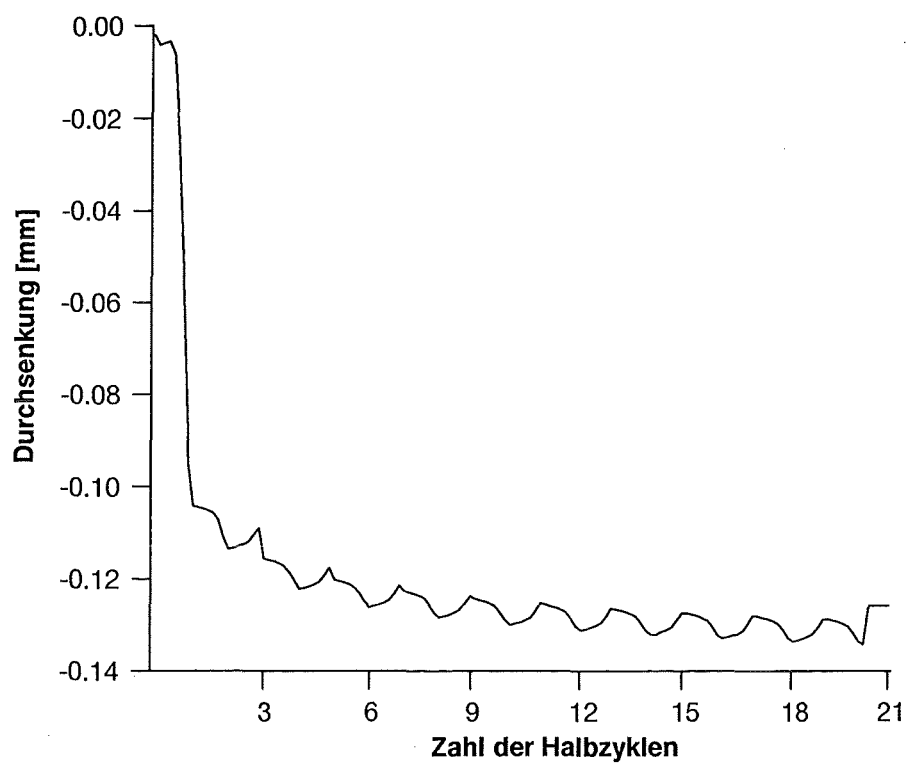


Abbildung 3.17: Belastungsfall $\frac{M_p}{M_y} = 0, 2$; $\frac{M_T}{M_y} = 3, 5$. Plastische Rückverformungen bei kleinen mechanischen Belastungen und *finitem Ratcheting* und überlagertem plastischen Zyklieren.

3.5 Vergleich mit der analytischen Lösung

In den Abbildungen 3.18, 3.19, 3.20, und 3.21 werden die auf analytischem und auf numerischem Wege erzielten Ergebnisse für die Balkenbiegeline verglichen. Dargestellt wird die Durchsenkung der Balkenachse in der Balkenmitte, $x = \frac{l}{2}$. Dieser Vergleich ist nur möglich, wenn für die analytische Lösung eine schrittweise Betrachtungsweise vorliegt, in der jeweils die Gleichgewichtszustände nach den einzelnen Halbzyklen ermittelt wurden, hier also nur für mechanische Biegemomente größer als $\frac{2}{3}M_y$.

Der Vergleich zeigt, daß die eindimensionale Balkenlösung des Ratcheting-Problems konservativ gegenüber der dreidimensionalen FE-Rechnung ist. Sie sagt nicht nur größere Verformungen pro Zyklus voraus (Abb. 3.18), sondern ermittelt für den Shakedown-Fall größere Zyklenzahlen, bei denen ein eingeschwungener Zustand erreicht wird (Abb. 3.19, 3.20, 3.21).

Es wurde schon gezeigt, daß die verschiedenen Vereinfachungen, welche für eine analytische Lösung notwendig sind, keinen großen Einfluß auf das Ratcheting-Verhalten des Balkens besitzen. Die einzige Erklärung für die unterschiedliche Größe der Durchsenkung ist die Größe des plastischen Gelenks in der Einspannung. In der dreidimensionalen Rechnung zeigt sich, daß der plastische Bereich größer ist, als es die Bernoulli-Hypothese erwarten läßt. Dadurch entstehen plastische Krümmungen in einem größeren Bereich der Einspannung, die insgesamt zu kleineren Durchsenkungen über dem gesamten Balken führen.

In Abbildung 3.18 handelt es sich um eine Belastung, die im Bereich des *infiniten Ratcheting* liegt. Es zeigt sich, daß die eindimensionale Betrachtungsweise für jeden einzelnen Zyklus eine zu große Verformung ergibt.

Abbildung 3.19 zeigt das Balkenverhalten bei gleicher mechanischer Belastung für ein geringeres thermisches Biegemoment. Es kommt in diesem Falle zum *finiten Ratcheting* nach der analytischen Lösung, zum *Shakedown* nach der FE-Lösung. In der FE-Berechnung ist schon nach dem zweiten Zyklus keine nennenswerte Zunahme der Durchsenkung in Balkenmitte zu erkennen, während eine Auswertung der analytischen Betrachtung einen Shakedown erst nach dem 25ten Zyklus ergibt, wobei nennenswerte Verformungen nur bis zum 5ten Zyklus auftreten.

Abbildung 3.20 und 3.21 zeigen zwei weitere Beispiele für *finites Ratcheting*.

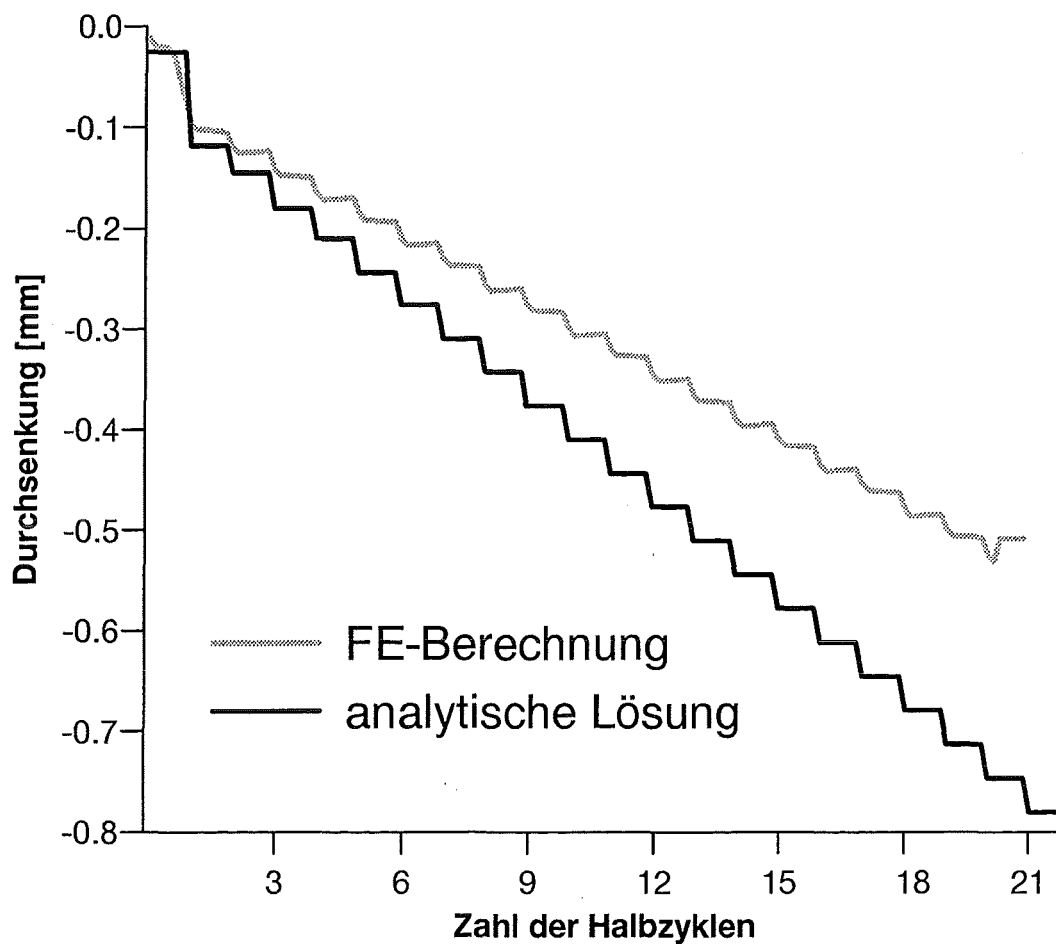


Abbildung 3.18: Belastungsfall $\frac{M_p}{M_y} = 1,0$; $\frac{M_T}{M_y} = 2,0$. Balkenlinie bei infiniter Ratcheting-Belastung

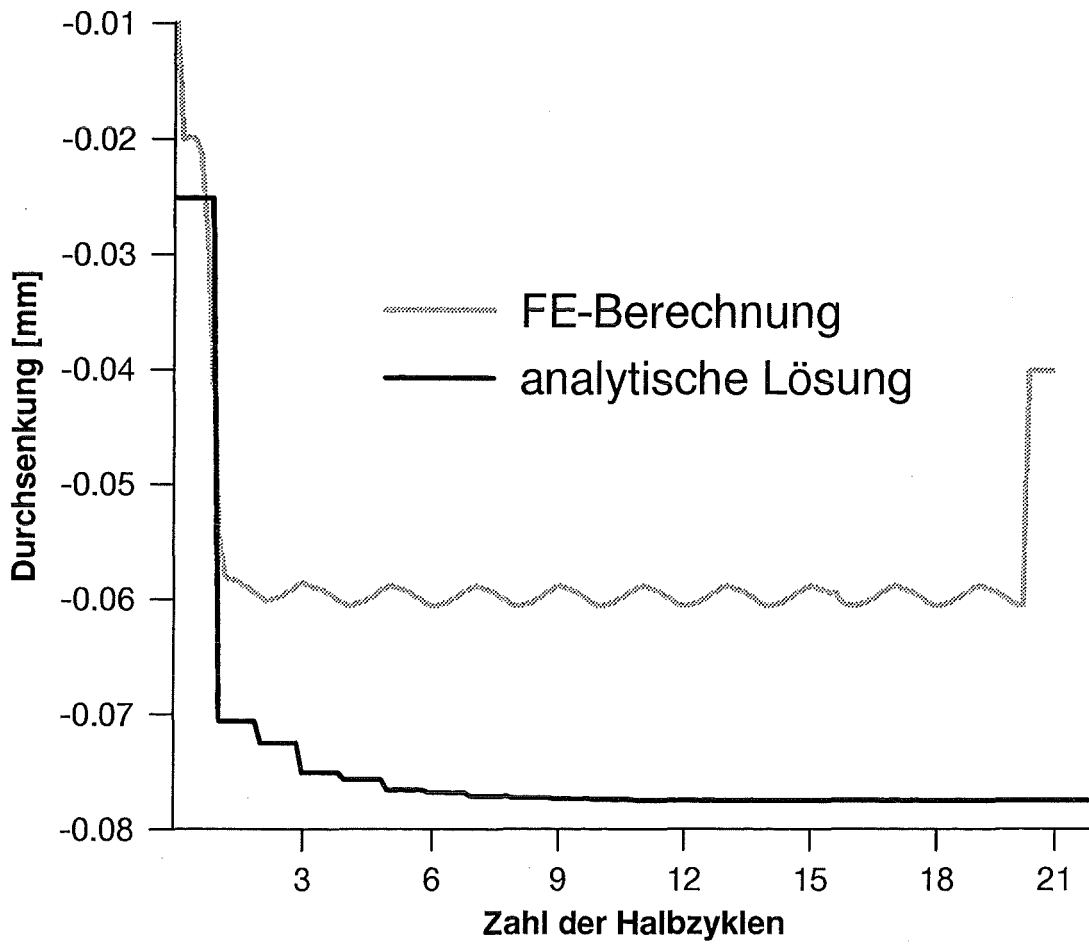


Abbildung 3.19: Belastungsfall $\frac{M_p}{M_y} = 1, 0$; $\frac{M_T}{M_y} = 1, 3$. Balkenlinie bei finiter Ratcheting-Belastung/Shakedwon

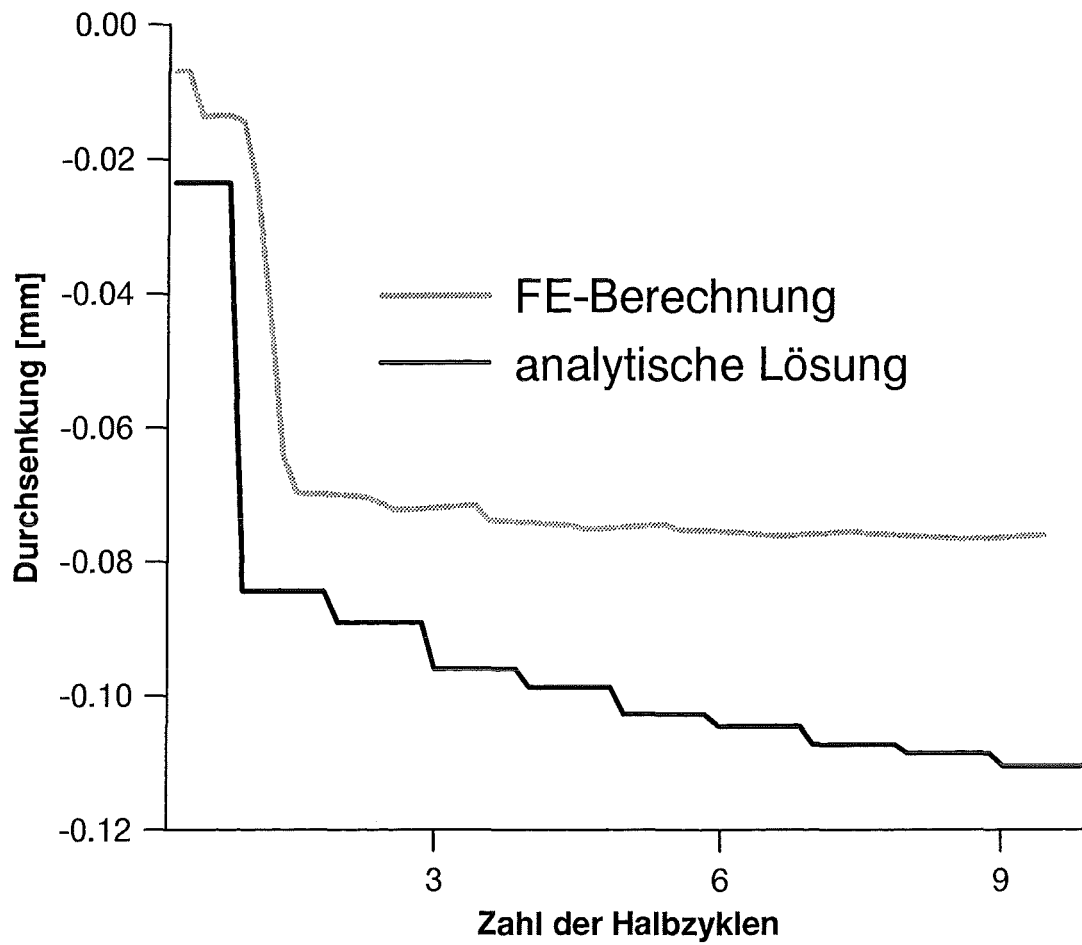


Abbildung 3.20: Belastungsfall $\frac{M_p}{M_y} = 0,7$; $\frac{M_T}{M_y} = 1,8$. Balkenlinie bei finiter Ratcheting-Belastung

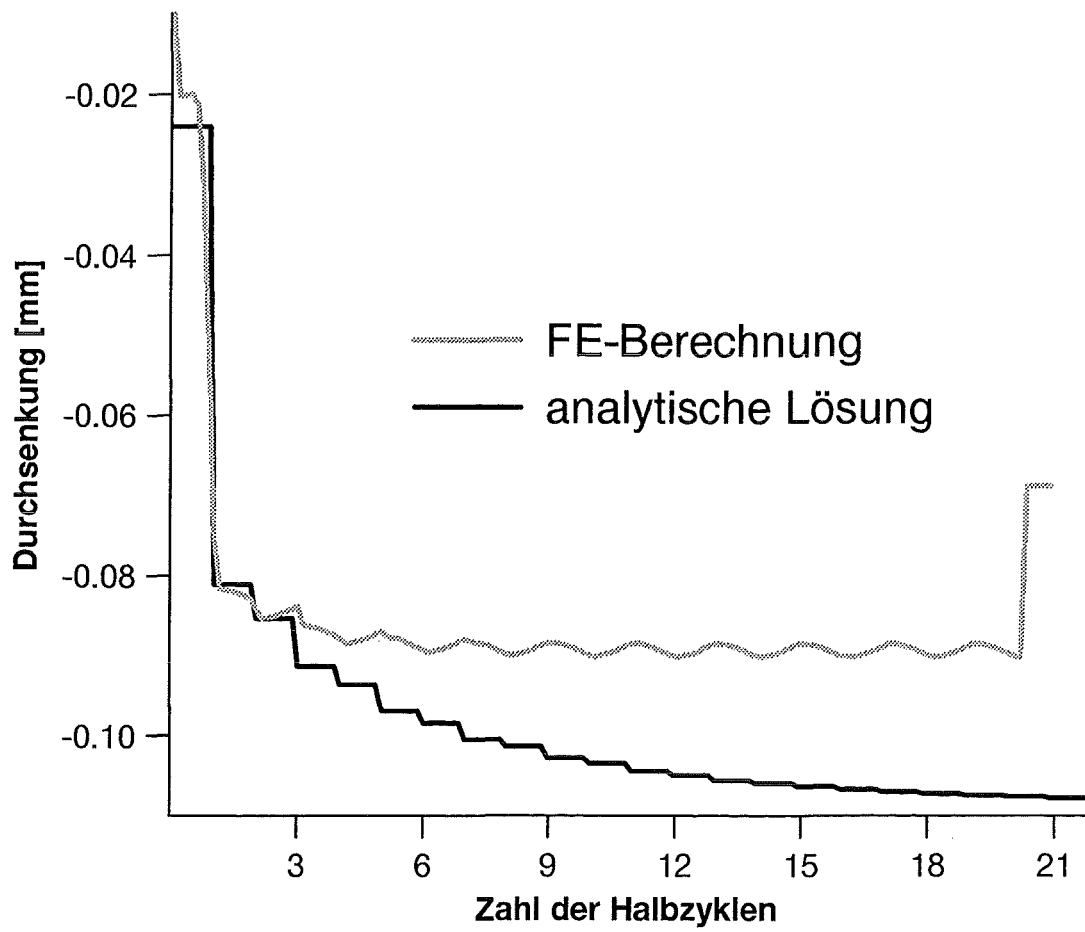


Abbildung 3.21: Belastungsfall $\frac{M_P}{M_y} = 0,8$; $\frac{M_T}{M_y} = 1,6$. Balkenlinie bei finiter Ratcheting-Belastung

3.6 Übertragung der FE-Ergebnisse in das Bree-Diagramm

Die Abbildungen 3.22 und 3.23 zeigen die mit ABAQUS berechneten Belastungskombinationen aus mechanischer und thermischer Belastung in dem Bree-Diagramm für Ratcheting nach Typ-III.

In den Abbildungen werden die verschiedenen Bereiche des Shakedown, des *finiten Ratchetings* und des *infiniten Ratchetings* mit denen ihn zugeordneten Ergebnissen aus der dreidimensionalen Berechnung dargestellt. Um eine konkrete Aussage über das Verhalten des Biegebalkens unter den Belastungen zu erhalten, müßten sehr viele Lastfälle berechnet werden. Aber selbst mit diesen ist es nicht möglich die einzelnen Bereiche sauber voneinander zu trennen. Hierin liegt der große Vorzug der analytischen Lösung.

Auch hier ist die Konservativität der analytischen Aussage zu sehen. Die Kurven zeigen die analytische Lösung, Punkte die FE-Ergebnisse. Lastkombinationen, welche nach der analytischen Aussage schon zu Ratcheting führen müssten, liegen z.B. noch im Bereich des Shakedown, Abbildung 3.22, Kombinationen aus dem Bereich des *infiniten Ratchetings* im Bereich des *finiten Ratchetings*, Abbildung 3.23. Die verschiedenen Bereiche verschieben sich für eine dreidimensionale Auswertung zu höheren Werten, d.h. die vereinfachte Annahme liefert für jede Belastungskombination eine gewisse Sicherheit gegen die Grenzwerte. So liegt in Abbildung 3.23 die Grenze für *infinites Ratcheting* deutlich oberhalb derer, welche die analytische Lösung liefert. es ist daran zu denken, daß die FE-Ergebnisse für idealplastisches Material gelten. Eine Verfestigung des Materials liefert ein zusätzliche Sicherheit.

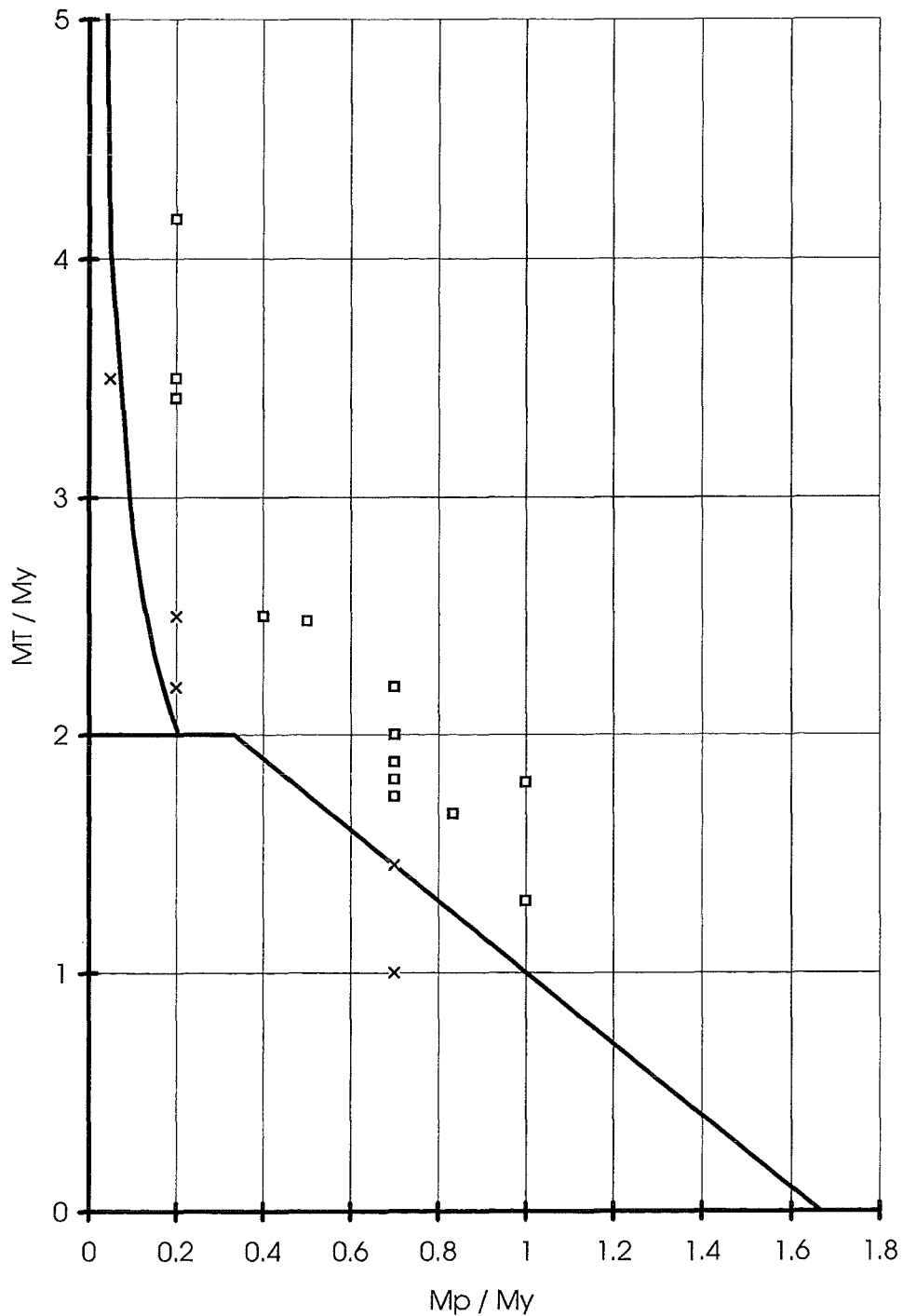


Abbildung 3.22: Grenze zwischen Shakedown-Bereich und Bereich des *finiten Ratchetings*

— Kurve als analytische Lösung der Grenze zwischen dem Bereich des Shakedown/plastischen Zyklierens und dem Bereich des *finiten Ratchetings*

x Belastungskombinationen, die zu Shakedown führen

□ Belastungskombinationen, die zu *finitem Ratcheting* führen

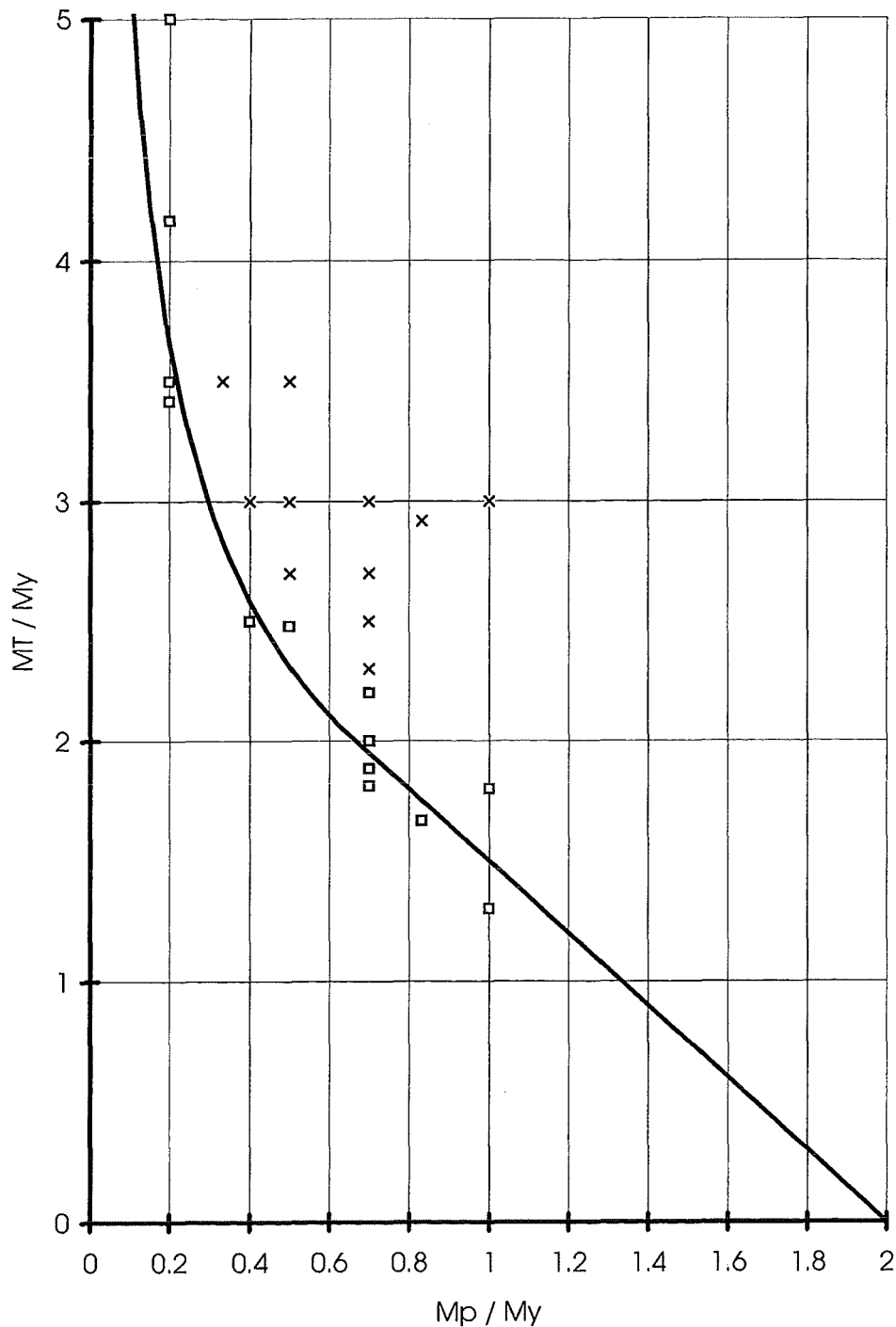


Abbildung 3.23: Grenze zwischen Bereichen des *finiten* und des *infiniten Ratchetings*

— Kurve als analytische Lösung der Grenze zwischen Bereich des *finiten Ratchetings* und dem Bereich des *infiniten Ratchetings*

□ Belastungskombinationen, die zu *finitem Ratcheting* oder plastischen Zyklieren führen

x Belastungskombinationen, die zu *infinitem Ratcheting* führen

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit ist es gelungen, einen neuartigen Typ des thermischen Struktur-Ratchetings mit einem elastisch-plastischem Balken-Modell zu beschreiben. Den beiden bisher bekannten Ratcheting-Typen ist der Membran-Charakter der zeitlich konstanten mechanischen Spannung gemeinsam. Beim Typ-I hat auch die zyklierende thermische Spannung Membran-Charakter, beim Typ-II dagegen besitzt sie Biege-Charakter.

Bei dem hier vorgestellten neuen Typ-III haben sowohl die zeitlich konstante mechanische Spannung als auch die zyklierende thermische Spannung Biege-Charakter. Darüberhinaus variieren die mechanischen Spannungen längs der Balkenachse.

Das Problem wird an einem beidseitig fest eingespannten Biegebalken untersucht. Die mechanische Spannung wird durch eine längs der Balkenachse konstante Linienlast verursacht; die thermische Spannung entsteht durch einen zeitlich veränderlichen Temperaturgradienten über der Balkenhöhe.

Zu Beginn der vorliegenden Arbeiten waren dem Autor weder eine Beschreibung dieses Ratcheting-Typs noch eine Lösung hierzu bekannt. Ende des Jahres 1993 wurde er dann auf die Veröffentlichung von Majumdar [20] aufmerksam, in der die Existenz dieses Ratcheting-Typs bereits Anfang 1992 nachgewiesen und eine analytische Lösung vorgelegt wurde. Veröffentlichungen anderer Art hierzu sind bisher nicht bekannt.

In der vorliegenden Arbeit wurde ebenfalls eine analytische Lösung des in Rede stehenden neuen Ratcheting-Typs hergeleitet. Ein bei Majumdar vorhandener Fehler wurde eliminiert und ein mathematisches Problem in Zusammenhang mit der Balkeneinspannung wurde genauer diskutiert. Für bestimmte Belastungsverhältnisse konnte außerdem eine inkrementelle Lösung erzielt werden, die bei der Diskussion des Problems von Vorteil ist. Vor allem aber wurde die analytische Lösung anhand von Finite-Element-Berechnungen überprüft.

Die Ergebnisse lassen sich in einem dem bekannten Bree-Diagramm entsprechenden Diagramm darstellen. Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt, daß die Verwendung des neuen Diagramms für Ratcheting vom Typ-III zu einer weniger konservativen realistischen Beurteilung führt.

Die ebenfalls durchgeführten FE-Berechnungen zeigen, daß die analytische Lösung aber immer noch konservativ im Hinblick auf die Gesamtdehnungen ist. Die Zyklenzahlen bis zum Erreichen eines eventuellen Shakedown werden überschätzt. Die Beschränkung auf ein elastisch ideal-plastisches Materialgesetz in der analytischen Lösung ist ebenfalls konservativ, wie vergleichende FE-Berechnungen mit linear verfestigendem Material zeigen.

Anlaß für die durchgeführten Arbeiten waren Untersuchungen zur Ersten Wand von TOKAMAK-Fusionsreaktoren. Die dort auftretenden Belastungen könnten zu Ratcheting vom Typ-III führen. Eine Aussage allein mit FE-Rechnungen zu treffen wird durch die Geometrie und die notwendigen zyklischen Rechnungen sehr problematisch. Die vorgestellte analytische Lösung an einem vereinfachten Modell ist hier leistungsfähiger. Sie zog zwar andere Unzulänglichkeiten nach sich, deren Einfluß aber durch ergänzende FE-Rechnungen bewertet werden konnte.

Bei der Übertragung der Ergebnisse vom vereinfachten Modell auf die allgemeinen Belastungen in den komplexeren Blanket-Strukturen wird es notwendig sein, genauere numerische Berechnungen durchzuführen, sobald detaillierte Kenntnisse über die Strukturen und deren Belastungen vorliegen. Vor allem ist der Aspekt der Überlagerung lokaler und globaler Belastungen auf das gesamte Blanket und der damit verbundenen Ersten Wand zu berücksichtigen. Diese haben mehrachsige Spannungszustände zur Folge, deren Einfluß auf das Ratcheting-Verhalten nicht vorausgesehen werden kann. Die hier für die Erste Wand durchgeführte Untersuchung hat das Ergebnis, daß bei den gegenwärtigen Geometrien, Belastungen und Materialien allein aus den lokalen Belastungen kein Ratcheting im Normalbetrieb auftreten kann. Dies ist für diverse Störfallszenarien, wie z.B. Plasmadisruptionen, noch nachzuweisen.

Für die analytische Lösung ist es von Interesse, sie um den Einfluß linearer Materialverfestigung zu erweitern. Es ist jedoch fraglich, ob dies in geschlossener Form erreichbar ist.

Die Auswirkungen des strahlungsinduzierten Kriechens auf das Ratcheting-Verhalten ist für die Auslegung zukünftiger Leistungsreaktoren ebenfalls zu diskutieren. Die dazu notwendige Datenbasis ist aber noch nicht verfügbar.

Literaturverzeichnis

- [1] The American Society of Mechanical Engineers. *ASME Boiler and Pressure Vessel Code, 1992 Code Cases - Nuclear Components*, Juli 1, 1992 edition, Juli 1992.
- [2] H. Hübel. Ratcheting phenomena. In *Transactions of the 12th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT-12)*, L., 183–196, 1993.
- [3] H. Hübel. Übersicht über Ratcheting-Phänomene. Tech. Report, Siemens, Bereich Energieerzeugung (KWU), Dezember 1991.
- [4] A. Haupt. *Untersuchungen zum Ratchetingverhalten eines austenitischen Stahl und seine Beschreibung mit einem Modell der Viskoplastizität*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 1995.
- [5] C. Guionnet. Modeling of Ratcheting in Biaxial Experiments. *Transactions of the ASME (Journal of Engineering Materials and Technology)*, **114**:56–62, Januar 1992.
- [6] G. Guionnet. Modelization of ratcheting in biaxial experiments. *Nuclear Engineering and Design*, **116**(3):223–230, September 1989.
- [7] J.L. Chaboche. Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, **5**:247–302, 1989.
- [8] J.L. Chaboche, D. Nouailhas. Constitutive Modeling of Ratcheting Effects - Part I: Experimental Facts and Properties of the Classical Models. *Transactions of the ASME (Journal of Engineering Materials and Technology)*, **111**:384–392, Oktober 1989.
- [9] J.L. Chaboche, D. Nouailhas. Constitutive Modeling of Ratcheting Effects - Part II: Possibilities of Some Additional Kinematic Rules. *Transactions of the ASME (Journal of Engineering Materials and Technology)*, **111**:409–416, Oktober 1989.

- [10] Nobutada Ohno, Jiangding Wang. On modelling of kinematic hardening for ratcheting behaviour. *Nuclear Engineering and Design*, **153**(2,3):245–256, Januar 1995.
- [11] G.Z. Voyiadjis, S.M. Sivakumar. A robust kinematic hardening rule for cyclic plasticity with ratcheting effects, Part II. Application to nonproportional loading cases. *Acta Mechanica*, **107**:117–136, 1994.
- [12] Yukio Takahashi. Application of a two-surface plasticity model for thermal ratcheting and failure life estimation in structural model tests. *Nuclear Engineering and Design*, **153**(2,3):245–256, Januar 1995.
- [13] Tatsuo Inoue, Fusahito Yoshida, Yasushi Niitsu, Nobutada Ohno, Tetsuro Uno, Akihiko Suzuki. Inelastic stress-strain response of $2\frac{1}{4}Cr - 1Mo$ steel under combined tension-torsion at $600^{\circ}C$. *Nuclear Engineering and Design*, **150**(1):107–118, September 1992.
- [14] Tatsuo Inoue, Fusahito Yoshida, Nobutada Ohno, Masamichi Kawai, Yasushi Niitsu, Shoji Imatani. Evaluation in inelastic constitutive models under plasticity-creep interaction in multiaxial stress state. *Nuclear Engineering and Design*, **126**(1):1–11, April 1991.
- [15] M.B. Ruggles, E. Krempl. The Interaction of Cyclic Hardening and Ratcheting for AISI Type 304 Stainless Steel at Room Temperature - I Experiments. *J. Mech. Phys. Solids*, **38**(4):575–585, 1990.
- [16] E. Krempl, M.B. Ruggles. The Interaction of Cyclic Hardening and Ratcheting for AISI Type 304 Stainless Steel at Room Temperature - II Modelling with the Viscoplasticity Theory Based on Overstress. *J. Mech. Phys. Solids*, **38**(4):587–597, 1990.
- [17] E. Krempl, S.H. Choi. Viscoplasticity theory based on overstress: the modelling of ratchetting and cyclic hardening of AISI type 304 stainless steel. *Nuclear Engineering and Design*, **133**(3):401–410, April 1992.
- [18] Katsuhiko Sasaki, Hiromasa Ishikawa. Experimental Observation on Viscoplastic Behaviour of SUS 304 (Creep and Ratchetting Behaviour). *JSME International Journal, Series A*, **38**(2):265–272, 1995.
- [19] C.S. White, C.A. Bronkhorst, L. Anand. An improved isotropic-kinematic hardening model for moderate deformation metal plasticity. *Mechanics of Materials*, **10**:126–147, 1990.

- [20] Saurin Majumdar. Ratcheting problems of the U.S. international thermonuclear experimental reactor. *Fusion Technology*, **21**:12–24, Januar 1992.
- [21] Saurin Majumdar. Ratcheting problems for ITER. Tech. Report, Argonne National Laboratory, Januar 1991. ANL/FPP/TM-253.
- [22] D.R. Miller. Thermal Stress Ratchet Mechanism in Pressure Vessels. *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)*, 190–196, Juni 1959.
- [23] E.W. Parkes. The Influence of the Variation of Strength with Temperature on Structural Behaviour. *Aircraft Engineering*, 222–229, August 1960.
- [24] S.S. Gill. A Simple Illustration of Incremental Collaps. *Bull. Mech. Engng Educ.*, **6**:3–8, 1967.
- [25] C. Ruiz. The Inclusion of the Incremental Collapse Problem in Undergraduate Courses. *Bull. Mech. Engng Educ.*, **6**:9–21, 1967.
- [26] Takeo Uga. An experimental study on thermal-stress ratcheting of austenitic stainless steel by a three bars specimen. *Nuclear Engineering and Design*, **26**:326–334, 1974.
- [27] R.A. Ainsworth. An Experimental Study of a Three-Bar Structure Subjected to Variable Temperature. *Int. J. mech. Sci.*, **19**:247–256, 1977.
- [28] M.M. Megahed. Influence of Hardening Rule on the Elasto-Plastic Behaviour of a Simple Structure under Cyclic Loading. *Int. J. Mech. Sci.*, **23**:169–182, 1981.
- [29] M.M. Megahed, Ponter A.R.S., C.J. Morrison. Experimental Investigations into the Influence of Cyclic Phenomena of Metals on Structural Ratchetting Behaviour. *Int. J. Mech. Sci.*, **26**(11/12):625–638, 1984.
- [30] P. Cousseran, J. Lebey, D. Moulin, R. Roche, G. Clement. Ratchetting - Experimental tests and practical method of analysis. In *I Mech E*, 143–151, 1980.
- [31] E.W. Parkes. Wings Under Repeated Thermal Stress, Permanent Elasticity, Shakedown, Alternate Plasticity and Incremental Collapse in Wings Subjected to a Number of Thermal Cycles. *Aircraft Engineering*, **26**:403–406, Dezember 1954.
- [32] K.B. Ayers. Behaviour Patterns in I Beams Carrying a Pure Bending Moment and Subjected to a Repeated Thermal Cycle. *Journal Mechanical Engineering Science*, **6**(4):343–352, 1964.

- [33] D. Burgreen. The Thermal Ratchet Mechanism. *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)*, 319–323, September 1968.
- [34] D. Burgreen. Structural Growth Induced by Thermal Cycling. *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)*, 469–475, Dezember 1968.
- [35] T.M. Mulcahy. An Assessment of Kinematic Hardening Thermal Ratcheting. *Transactions of the ASME (Journal of Engineering Materials and Technology)*, 214–221, Juli 1974.
- [36] T.M. Mulcahy. Thermal Ratcheting of a Beam Element Having an Idealized Bauschinger Effect. *Transactions of the ASME (Journal of Engineering Materials and Technology)*, 264–271, Juli 1976.
- [37] J. Bree. Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements. *Journal of Strain Analysis*, **2**(3):226–238, 1967.
- [38] J. Bree. Incremental Growth Due to Creep and Plastic Yielding of Thin Tubes Subjected to Internal Pressure and Cyclic Thermal Stresses. *Journal of Strain Analysis*, **3**(2):122–127, 1968.
- [39] W.J. O'Donnell, J. Porowski. Upper Bounds for Accumulated Strains Due to Creep Ratcheting. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, 150–154, August 1974.
- [40] J.S. Porowski, W.J. O'Donnell. Creep ratcheting bounds based on elastic core concept. In *Structural mechanics in reactor technology. SMIRT. 6th internat.conf. Transactions. Paris, France, 17-21 Aug. 1981.*, L. Materials modelling and inelastic behavior of materials and structures. Auflage, L10/3, 1981.
- [41] W.F. Anderson. Ratchetting Deformation as Affected by Relative Variations of the Loading Sequence. In *Second International Conference on Pressure Vessel Technology, Part I Design and Analysis*, 277–288, 1973.
- [42] A. Loghman, M.A. Wahab. Loading and Unloading of Thick-Walled Cylindrical Pressure Vessels of Strain-Hardening Material. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **116**:105–109, Mai 1994.
- [43] N.V. Lê. Method and Mechanism of Beneficial Residual Stresses in Tubes. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **116**:175–178, 1990.

- [44] Hiroshi Wada, Hitoshi Kaguchi, Masahiro Ueta, Masakazu Ichimiya, Kimitaka Kimura, Yoshio Fukuda, Michiaki Suzuki. Proposal of a new estimation method for the thermal ratchetting of a cylinder subjected to a moving temperature distribution. *Nuclear Engineering and Design*, **139**(3):261–267, März 1993.
- [45] Toshihide Igari, Shoji Kitade, Masahiro Ueta, Masazuka Ichimiya, Kimitaka Kimura, Yoshimi Satoh, Koji Take. Advanced evaluation of thermal ratchetting of FBR components. *Nuclear Engineering and Design*, **140**:341–348, 1993.
- [46] H.G. Edmunds, F.J. Beer. Notes on Incremental Collaps in Pressure Vessels. *Journal Mechanical Engineering Science*, **3**(3):187–199, 1961.
- [47] S.J. Hardy, J.J. Webster, T.H. Hyde. An Assessment of Simple Material Behaviour Models for Predicting the Mechanical Ratchetting of a Stepped Beam. *Journal of Strain Analysis*, **20**(2):63–78, 1985.
- [48] A.R.S. Ponter, A.C.F. Cocks. The Incremental Strain Growth of an Elastic-Plastic Body Loaded in Excess of the Shakedown Limit. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **51**(3):465–469, 1984.
- [49] A.R.S. Ponter, A.C.F. Cocks. The Incremental Strain Growth of Elastic-Plastic Bodies Subjected to High Levels of Cyclic Thermal Loading. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **51**(3):470–474, 1984.
- [50] F. Drabble, W. Johnson. The Development of the Zones of Yielding in Thick Walled Spherical Shells of Non-Work-Hardening Material Subjected to a Steady-State Radial Temperature Gradient and an Internal or External Pressure. *Proc Instn Mech Engrs*, **178**:267–278, 1963.
- [51] G. Breitbach, A. Schmidt-Plutka, F. Schubert, H. Nickel. Investigations of creep ratcheting on thick-walled tubes. *Nuclear Engineering and Design*, **151**:337–345, 1994.
- [52] I.W. Goodall, T. Cook. The Behaviour of Beams Subjected to Combined Direct Load and Cyclically Varying Curvature. *Int. J. mech. Sci.*, **14**:137–143, 1972.
- [53] J.M. Chern, D.H. Pai. A Simplified Tool for the Elevated Temperature Cyclic Analysis of Pressure Components. In *Second International Conference on Pressure Vessel Technology, Part I Design and Analysis*, 263–275, 1973.
- [54] T.R. Hsu, J.J.M. Too. Analysis of Residual Stresses/Strains in Pressure Vessels Due to Cyclic Thermomechanical Loads. In *Third International Conference on Pressure Vessel Technology, Part I Analysis, Design and Inspection*, 83–91, 1977.

- [55] J. Wolters, G. Breitbach, M. Roedig, H. Nickel. Investigations of the behaviour of component like first wall specimens under fusion relevant loading conditions. In K. Herschbach, W. Maurer, J.E. Vetter, Herausgeber, *Proceedings of the 18th Symposium on Fusion Technology, Karlsruhe, Germany, 22-26 August 1994*, 215–218, 1995.
- [56] J. Wolters, G. Breitbach, M. Rödiger. Mechanical Testing of First Wall Mock-Ups under Combined Cyclic Mechanical and Thermal Loading. Tech. Report, Institut für Reaktorwerkstoffe, Forschungszentrum Jülich, GmbH, August 1993.
- [57] J.J. Webster, B.B. Sahari, T.H. Hyde. Elastic-Plastic Behaviour of a Simply Supported Circular Plate Subjected to Steady Transverse Pressure and Cyclic Linear Radial Temperature Variation. *Int. J. Mech. Sci.*, **29**(8):533–544, 1987.
- [58] Dj. Boussa, K. Dang Van, P. Labbé, H.T. Tang. Fatigue Seismic Ratcheting Interactions in Pressurized Elbows. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **116**:396–402, November 1994.
- [59] Kevin Thomas. Creep Ratcheting Tests and Analysis of a Pressurized Elbow at 539°C. *Nuclear Engineering and Design*, **116**(3):199–213, September 1989.
- [60] K.C. Valanis, J. Fan. Endochronic Analysis of Cyclic Elastoplastic Strain Fields in a Notched Plate. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **50**(4A):789–794, Dezember 1983.
- [61] S. Akel, Q.S. Nguyen. Determination of the Limit Response in Cyclic Plasticity. In *Computational plasticity: proceedings of the international conference 2, Barcelona, 18.-22.9.1989*, 1. Auflage, 639–650, 1989.
- [62] Y. Orçan, U. Gamer. The elastic plastic spherical shell with nonlinear hardening subject to a radial temperature gradient. *Acta Mechanica*, **102**:183–198, 1994.
- [63] Masafumi Yamauchi, Hiroyuki Koto, Hitoshi Kaguchi, Yukio Takahashi. Evaluation of creep-fatigue design methods by structural failure tests under thermal loads. *Nuclear Engineering and Design*, **153**(2,3):265–273, Januar 1995.
- [64] Katsumi Watashi. A simplified method for creep-fatigue life prediction for structures subjected to thermal loadings. *Nuclear Engineering and Design*, **153**(2,3):275–285, Januar 1995.
- [65] D.W.A. Rees. Life prediction techniques for combined creep and fatigue. *Progress in Nuclear Energy*, **19**(3):211–239, 1986.

- [66] G. Breitbach, H.H. Over, F. Schubert. Experimentally Verified Creep Ratcheting Analysis. *Nuclear Engineering and Design*, **116**(3):231–238, September 1989.
- [67] F.H. Norton, C.R. Soderberg. Report on Tubular Creep Tests. In *Transactions of the A.S.M.E.*, 769–777, 1941.
- [68] C.O. Frederick, P.J. Armstrong. Convergent Internal Stresses and Steady Cyclic States of Stress. *J. of Strain Analysis*, **1**(2):154–159, 1966.
- [69] T. Yamashita, K. Tsukimori, M. Nakamura, K. Iwata, A. Imazu. A Simplified Method of Evaluating Ratcheting in Bellows and a Test of Its Validation. *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*, **42**:263–285, Mai 1990.
- [70] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS Users's Manual*, version 5.3 edition, 1993.
- [71] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. *ABAQUS Theory Manual*, version 5.3 edition, 1993.
- [72] M Küchle. Material Data Base for the NET Test Blanket Design Studies. Tech. Report, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Februar 1990.
- [73] S. Flügge, Herausgeber. *Encyclopedia of Physics*, VI. Auflage. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1958.
- [74] S. Flügge, Herausgeber. *Mechanics of Solids*, VIa/2. Auflage. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [75] G. Hofmann, E. Eggert. The First Wall Test Facility FIWATKA - Description of the facility and report on commissioning tests -. Tech. Report, Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik, Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe, September 1994.
- [76] D.A. Hills, A. Sackfield. Yield and Shakedown States in the Contact of Generally Curved Beames. *Journal of Strain Analysis*, **19**(1):9–14, 1984.
- [77] P. Norajitra. Thermohydraulic Design and Thermomechanics Analysis of Two European Breeder Blanket Concepts for DEMO. Tech. Report, Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, Juni 1995. FZKA 5580.
- [78] S. Malang, K. Schleisiek, u.a. Dual Coolant Blanket Concept. Tech. Report, Kernforschungszentrum Karlsruhe, November 1994. KfK 5424.

- [79] Mario Dalle Donne, u.a. European DEMO BOT Solid Breeder Blanket. Tech. Report, Kernforschungszentrum Karlsruhe, November 1994. KfK 5429.
- [80] M.R. Eslami, M. Shariyat. A Technique to Distinguish the Primary and Secondary Stresses. *Journal of Pressure Vessel Technology*, **117**:197–203, August 1995.
- [81] István Szabó. *Einführung in die Technische Mechanik*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 8 edition, 1984.
- [82] Ian N. Sneddon, R. Hill, Herausgeber. *Progress in solid mechanics*, 2. Auflage. Amsterdam: North-Holland, 1961.
- [83] Hilda Geiringer. *Mechanics of Solids*, 26–533. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [84] James N. Goodier, Philip G. Hodge. *Elasticity and plasticity*, 2. Auflage. New York u.a. : Wiley, 1958.
- [85] W. Prager, P.G. Hodge. *Theorie ideal plastischer Körper*. Wien Springer-Verlag, 1954.
- [86] István Szabó. *Höhere Technische Mechanik*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 5 edition, 1985.
- [87] W. Ramberg, W.R. Osgood. Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters. Tech. Report 902, NACA, Juli 1943.
- [88] W. Kosiński, T. Nashiro. Finite endochronic theory for ratcheting and cyclic plasticity. *Arch. Mech.*, **33**(4):483–500, 1981.
- [89] Hiromasa Ishikawa, Katsuhiko Sasaki, Takao Nakagawa. Constitutive Equation for Cyclic Plasticity Considering Memorization of Back Stress. *JSME International Journal, Series A*, **37**(4):347–354, 1994.
- [90] D.N. Moreton, D.G. Moffat, D.B. Parkinson. The Yield Surface Behaviour of Pressure Vessel Steels. *Journal of Strain Analysis*, **16**(2):127–136, 1981.
- [91] L.F. Coffin, Jr. A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal. *Transactions of the ASME*, 931–950, August 1954.
- [92] F. Yoshida. Ratcheting behaviour of 304 stainless steel at 650°C under multiaxial strain-controlled and uniaxially/multiaxially stress-controlled conditions. *European Journal of Mechanics*, **14**(1):97–117, 1995.

- [93] P. Delobelle, R. Lachat. Modeling of an austenitic stainless steel at high temperature under in- and out-of-phase cyclic tension-torsion loading. *European Journal of Mechanics*, **14**(3):397–412, 1995.
- [94] D.L. McDowell. Transient Nonproportional Cyclic Plasticity: Part I Development of Appropriate Equations. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **52**(2):298–302, Juni 1985.
- [95] D.L. McDowell. Transient Nonproportional Cyclic Plasticity: Part II Comparison of Theory with Experiments. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **52**(2):303–308, Juni 1985.
- [96] M Boucher, P. Cayla, J.P. Cordebois. Experimental Studies of yield surfaces of aluminium alloy and low carbon steel under complex biaxial loadings. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, **14**(1):1–17, 1995.
- [97] N.K. Gupta, Meyers. A., A. Wichtmann. A function for representing experimental yield surfaces. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, **14**(1):45–53, 1995.
- [98] H. Bergander. Finite plastic constitutive laws for finite deformations. *Acta Mechanica*, **109**:79–99, 1995.
- [99] H.W. Ng, C. Nadarajah. Biaxial Ratcheting and Cyclic Plasticity for Bree-Type Loading - Part I: Finite Element Analysis. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **118**:154–160, Mai 1996.
- [100] H.W. Ng, C. Nadarajah. Biaxial Ratcheting and Cyclic Plasticity for Bree-Type Loading - Part II: Comparison Between Finite Element Analysis and Theory. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **118**:161–166, Mai 1996.
- [101] W. Jiang. The Elastic-Plastic Analysis of Tubes - I :. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **114**:213–221, Mai 1992.
- [102] W. Jiang. The Elastic-Plastic Analysis of Tubes - II: Variable Loading. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **114**:222–228, Mai 1992.
- [103] W. Jiang. The Elastic-Plastic Analysis of Tubes - III: Shakedown Analysis. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **114**:229–235, Mai 1992.

- [104] W. Jiang. The Elastic-Plastic Analysis of Tubes - IV: Thermal Ratcheting. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **114**:236–245, Mai 1992.
- [105] D.N. Moreton, H.W. Ng. *Recent Advances in Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Kapitel4, The Bree Diagram - origin and literature : Some recent advances concerning experimental verification and strain-hardening materials, 185–230. Swansea : Pineridge, 1982.
- [106] D.N. Moreton, H.W. Ng. *Engineering approaches to high temperature design*, 2. Auflage, Kapitel6, Bree Diagrams for alternative loading sequences, 185–230. Swansea : Pineridge, 1983.
- [107] D.N. Moreton, H.W. Ng. The Extension and Verification of the Bree Diagram. In *Trans. Sixth Int. Conf. Struct. Mech. in Reactor Techn., Paris, 1981*, L. Auflage, L10/2, 1981.
- [108] S. Yamamoto, Kano T., A. Yoshitoshi. Thermal Ratchetting Experiment of Type 304 Stainless Steel Pipes under Alternating Cold and Hot Thermal Shocks with Varying Axial Loads. In *Elevated Temperature Design Symposium*, 25–33. ASME, New York, 1976.
- [109] M. Megahed, A.R.S. Ponter, Morrison C.J. A Theoretical and Experimental Investigation of Material Ratcheting Rates in a Bree Beam Element. *Int. J. Mech. Sci.*, **25**(12):917–933, 1983.
- [110] M.M. Megahed. Kinematic Hardening Analysis of Ratchet Strain in the "Pulley Test". *Int. J. Mech. Sci.*, **26**(11/12):649–659, 1984.
- [111] H.W. Ng, D.N. Moreton. Alternating Plasticity at the Surfaces of a Bree Cylinder Subjected to In-Phase and Out-of-Phase Loading. *Journal of Strain Analysis*, **22**(2):107–113, 1987.
- [112] A.M. Goodman. The Influence of Rapid Thermal Transients on Elastic-Plastic Ratcheting. Tech. Report, Central Electricity Generating Board, Research Division, Berkeley Nuclear Laboratories, Feb 1979.
- [113] Sándor Kaliszky. *Plastizitätslehre*. VDI-Verlag, 1984.
- [114] Ernst Melan. Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischem Baustoff. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien*, **145**:195–218, 1936.

- [115] P.S. Symonds, W. Prager. Elastic-Plastic Analysis of Structures Subjected to Loads Varying Arbitrarily Between Prescribed Limits. *Journal of Applied Mechanics*, 315–323, September 1950.
- [116] Jan A. König. *Shakedown of Elastic-Plastic Structures*. Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo - PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1987.
- [117] A.R.S. Ponter, S. Karadeniz. An Extended Shakedown Theory for Structures That Suffer Cyclic Thermal Loading, Part 1: Theory. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **52**:877–882, Dezember 1985.
- [118] A.R.S. Ponter, S. Karadeniz. An Extended Shakedown Theory for Structures That Suffer Cyclic Thermal Loading, Part 2: Applications. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **52**:883–889, Dezember 1985.
- [119] A. Ponter. On the Relationship between Plastic Shakedown and the Repeated Loading of Creeping Structures. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **38**(2):437–440, Juni 1971.
- [120] R.A. Ainsworth. Bounding Solutions for Creeping Structures Subjected to Load Variations above the Shakedown Limit. *Int. J. Solids Structures*, **13**(10):971–980, 1977.
- [121] R.A. Ainsworth. Application of Bounds for Creeping Structures Subjected to Load Variations Above The Shakedown Limit. *Int. J. Solids Structures*, **13**(10):981–993, 1977.
- [122] Castrenze Polizzotto. A Study on Plastic Shakedown of Structures: Part I - Basic Properties. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **60**:318–323, Juni 1993.
- [123] Castrenze Polizzotto. A Study on Plastic Shakedown of Structures: Part II - Theorems. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **60**:324–330, Juni 1993.
- [124] Castrenze Polizzotto. On the Conditions to Prevent Plastic Shakedown of Structures: Part I - Theory. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **60**:15–19, März 1993.
- [125] Castrenze Polizzotto. On the Conditions to Prevent Plastic Shakedown of Structures: Part II - The Plastic Shakedown Limit Load. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **60**:20–25, März 1993.

- [126] Castrenze Polizzotto. A Unified Approach to Quasi-Static Shakedown Problems for Elastic-Plastic Solids with Piecewise Linear Yield Surface. *Meccanica*, **13**(2):109–121, 1978.
- [127] Teotista Panzeca. On the Long-Term Response of Elastic-Perfectly Plastic Solids to Dynamic Cyclic Loads. *Meccanica*, **27**:139–142, 1992.
- [128] Ho Hwa-Shan. Shakedown in Elastic-Plastic Systems under Dynamic Loadings. *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **39**(2):416–421, 1972.
- [129] Leone Corradi, Osvaldo De Donato. Dynamic Shakedown Theory Allowing for Second Order Geometric Effects. *Meccanica*, **10**(2):93–99, Juni 1975.
- [130] J. Groß-Weege, D. Weichert. Elastic-Plastic Shells under Variable Mechanical and Thermal Loads. *Int. J. Mech. Sci.*, **34**(11):863–880, 1992.
- [131] A. Pellissier-Tanon, P. Rabbe, C. Amzallag. Defining a Proper Material Characteristic for the Shakedown Analysis. In *Third International Conference on Pressure Vessel Technology, Part I Analysis, Design and Inspection*, 223–232, 1977.
- [132] J.B. Tritsch, D. Weichert. Shakedown of Elastic-Plastic Structures at Finite Deformations - a Comparative Study of Static Shakedown Theorems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **73**(4–5):309–312, 1993.
- [133] R. Seshadri. Residual Stress Estimation and Shakedown Evaluation Using GLOSS Analysis. *Transactions of the ASME (Journal of Pressure Vessel Technology)*, **116**:290–294, August 1994.
- [134] M.Z. Cohn, M. Abdel-Rohman. Shakedown Analysis of Elastoplastic Arches. *J. Struct. Mech.*, **5**(3):313–331, 1977.
- [135] F. Tin Loi. Shakedown Analysis of Curved Beams. *J. Struct. Mech.*, **12**(3):319–333, 1984.
- [136] F. Tin Loi. Shakedown Analysis of Nonsandwich Structures. *J. Struct. Mech.*, **12**(3):303–317, 1984.
- [137] Taijiro Nonaka. Elastic-Perfectly Plastic Behaviour of a Portal Frame with Variation in Column Axial Forces. *J. Struct. Mech.*, **6**(1):61–84, 1978.
- [138] W.A.M. Alwis, P. Grundy. Shakedown Analysis of Plates. *Int. J. Mech. Sci.*, **27**(1/2):71–82, 1985.

- [139] Pham Duc Chinh. Shakedown of bars subjected to cycles of loads and temperature. *International Journal of Solids and Structures*, **30**(9):1173–1179, 1993.
- [140] D.E. Buckthorpe, P.S. White. Shakedown: A Design Tool for High Temperature. *GEC Journal of Research*, **11**(1):24–38, 1993.
- [141] D.N. Moreton, D.G. Moffat. Shakedown of Three Stainless Steel Pressure Vessel Components. In *Third International Conference on Pressure Vessel Technology, Tokio, Japan, Part I Analysis, Design and Inspection*, 233–245, 1977.

Anhang A

Die Erste Wand

Unabhängig von den verschiedenen Blanketkonzepten, die für einen TOKAMAK-Fusions-Reaktor verfolgt werden, liegen in der Ersten Wand, als die dem Plasma unmittelbar benachbarte Struktur, die höchsten Belastungen.

Abbildung A.1 zeigt die Geometrie der Kühlkanäle in der Ersten Wand für das Dual-Coolant Konzept und Abbildung A.2 das BOT-Konzept, zwei Blanketkonzepte für den DEMO-Reaktor.

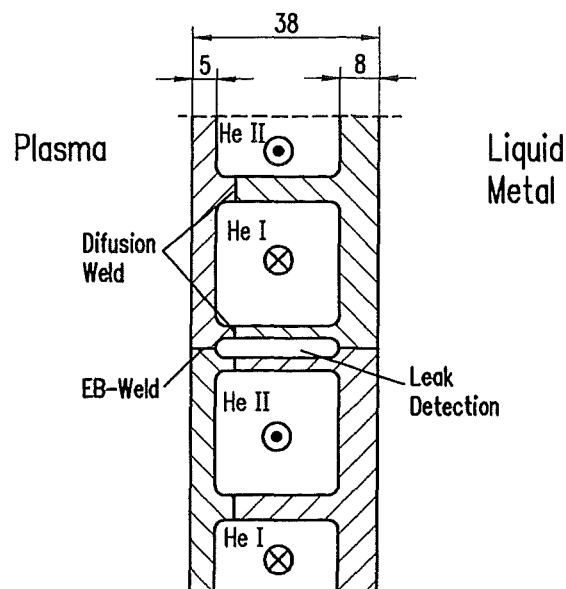


Abbildung A.1: Geometriedaten der Ersten Wand des Dual Coolant Konzepts

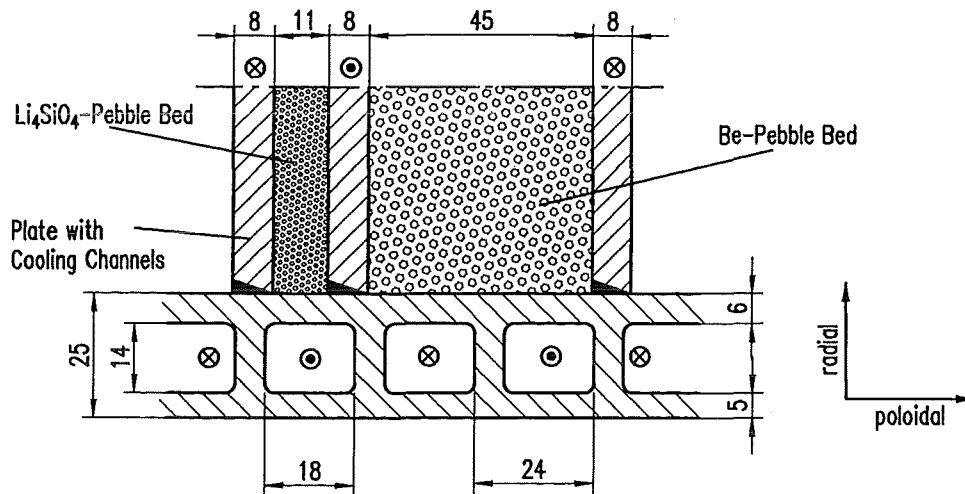


Abbildung A.2: Geometriedaten der Ersten Wand des BOT-Konzepts

Tabelle A gibt Auskunft über die Belastungen, denen die Erste Wand bei zwei Blanket-Konzepten des DEMO-Reaktors ausgesetzt ist. Die Werte stammen aus [77], [78], [79]:

Belastungen in den Kühlkanälen					
	DC-Konzept		BOT-Konzept		Einheit
	Outboard	Inboard	Outboard	Inboard	
Kühlmitteldruck	8	8	8	8	[MPa]
maximale Kühlmitteltemperatur im Auslaß	350	350	450	-	[° C]
minimale Kühlmitteltemperatur im Einlaß	250	250	250	-	[° C]
maximale Strukturtemperatur bei Normalleistung	490	-	520	-	[° C]
maximale Strukturtemperatur bei Maximalleistung	530	520	-	-	[° C]
mittlere Wärmestrombelastung	0.4	0.4	0.4	0.4	$[\frac{MW}{m^2}]$
maximale Wärmestrombelastung	0.5	0.5	0.5	0.5	$[\frac{MW}{m^2}]$
maximale Primärspannung bei Normalbetrieb ¹	120	-	56 ²	-	[MPa]
maximale Gesamtspannung bei Normalbetrieb ¹	441	-	311 ³	-	[MPa]

¹nur lokale thermische Spannungen

²bei 400° C

³bei 500° C

Anhang B

ASME-Code

Alle folgenden Angaben beziehen sich auf druckführende Komponenten in Spaltungsreaktoren nach dem **ASME Boiler and Pressure Vessel Code: Code Cases: Nuclear Components** [1].

Sie sind damit anwendbar auf die Auslegungen nach Bree, nicht jedoch auf den Biegebalken. Betrachtet werden Rohre und Leitungen, welche durch Innendruck, lokale Kräfte, Außendruck und Temperaturbelastungen beansprucht werden. Weitere Spannungen können dabei durch Einspannungen und Diskontinuitäten in der Struktur entstehen. Im folgenden beschränke ich mich hier auf die Belastungen, die auch im Bree-Diagramm berücksichtigt werden:

- Innendruck
- Temperaturgradient

B.1 Spannungs-Kategorien

Aus diesen beiden Belastungen können in den druckführenden Strukturen folgende Spannungskategorien induziert werden:

- Generelle primäre Membranspannung P_m
- Lokale primäre Membranspannung P_L
- Primäre Biegespannung P_b
- Expansionsspannung P_e
- Sekundärspannung Q

- Spannungsspitzen F

Von diesen Spannungskategorien sind durch die Vereinfachungen auf eindimensionales Dehnungsverhalten im Bree-Diagramm nur noch P_m und Q übriggeblieben. Die Intensitätsfaktoren P_b , P_L und P_e entfallen durch die Vernachlässigung der Endeffekte und die eindimensionale Betrachtung. Spannungsspitzen durch lokale Diskontinuitäten oder lokale Wärmespannungen werden nicht berücksichtigt.

B.1.1 Definition der Spannungskategorien

Primäre Membranspannung: Primärspannungen sind alle Normal- oder Scherspannungen, welche durch eine aufgeprägte Last hervorgerufen werden und notwendig sind für die Erfüllung des äußeren und inneren Gleichgewichts der Kräfte und Momente.

Primärspannungen sind nicht selbstbegrenzend: Ein Überschreiten der Fließspannung endet im Versagen oder wenigstens in großen Verzerrungen. Thermische Spannungen sind keine Primärspannungen.

Man unterscheidet generelle und lokale primäre Membranspannungen:

- **Generelle primäre Membranspannung:**

Die Spannung ist in der Struktur so verteilt, daß infolge des Fließens keine Belastungsverteilung auftritt.

- **Lokale primäre Membranspannung:**

Diese entstehen, wenn eine Membranspannung durch Druck oder eine andere mechanische Belastung in Zusammenhang mit einem Primär- oder Diskontinuitätseffekt bei der Verlagerung der Last auf andere Teile der Struktur übermäßige Verzerrungen hervorruft.

Obwohl sie gemeinsame Charakteristiken besitzen, werden diese Spannungen aus Gründen der Konservativität in der Beurteilung nicht als Sekundärspannungen betrachtet.

Die Spannung gilt dann als lokal, wenn die Ausdehnung der Zone, welche eine Größe von $1.1 S_m$ überschreitet, in meridionale Richtung nicht größer ist als $1.0 \sqrt{R} t$, wobei R der minimale Krümmungsradius und t die minimale Dicke der betrachteten Region bedeuten. Bei der Auslegung ist darauf zu achten, daß der Abstand zwischen solchen Regionen einen bestimmten Grenzwert nicht überschreitet. Dieser Mindestabstand ist abhängig von der Geometrie der Struktur.

Grobstruktur-Diskontinuität: Eine geometrische oder materialabhängige Diskontinuität, die die Spannungs- oder Verzerrungsverteilung über die gesamte Wand-

dicke der druckführenden Struktur beeinflusst. Spannungen durch solche Diskontinuitäten sind Anteile der wahren Spannungsverteilung, welche Biegung und Membrankraft-Resultierende ergeben, wenn sie über die Wanddicke integriert werden.

Primäre Biegespannung: Variabler Anteil der Normalspannung

Expansionsspannung: Spannungen, die durch die Behinderung von freien Endverschiebungen entstehen.

Freie Endverschiebungen: Relativverschiebung, welche entstehen würden, wenn zwei Strukturen sich unter der Einwirkung von Lasten frei gegeneinander verschieben könnten.

Sekundärspannung¹: Eine Normal- oder Scherspannung, die entweder aufgrund einer Behinderung durch benachbartes Material oder durch Selbstbehinderung in einer Struktur entsteht. Sekundärspannungen sind selbstbegrenzend. Lokales Fließen und kleinere Verzerrungen können die Randbedingungen erfüllen, durch welche sie hervorgerufen werden, ohne daß Versagen durch einmaliges Aufbringen der Spannung erwartet werden muß.
Generelle thermische Spannungen sind Sekundärspannungen.

Thermische Spannung: Eine Spannung im Selbstgleichgewicht, hervorgerufen durch eine ungleichförmige Temperaturverteilung oder unterschiedliche Wärmeausdehnungskoeffizienten. Thermische Spannungen entstehen immer dann, wenn ein Körper daran gehindert wird, die bei der gegenwärtigen Temperatur normale Größe oder Form einzunehmen. Man unterscheidet zwei Formen:

1. Die generelle thermische Spannung ist mit Verzerrungen in der Struktur verbunden. Wenn der Wert dieser Spannung das zweifache der Fließgrenze überschreitet - ohne lokale Konzentrationen zu beachten -, ist die elastische Analyse unzulässig und es können inkrementelle Verformungen unter zyklischer thermischer Belastung auftreten.
Beispiel: Spannung induziert durch radialen Temperaturgradienten.
2. Die lokale thermische Spannung ruft keine differentiellen Ausdehnung und damit keine Verformungen hervor. Diese Art der Spannungen sollte nur bei der Untersuchung des Ermüdungsverhalten berücksichtigt werden.

¹Zur Unterscheidung von Sekundärspannungen siehe auch [80]

Spannungsspitzen: Ein Spannungsinkrement, das zu den Primär- und Sekundärspannungen addiert wird und durch lokale Diskontinuitäten oder lokale Wärmespannungen, einschließlich Spannungskonzentrationen, entsteht. Spannungsspitzen rufen keine erkennbaren Verformungen hervor und sind nur im Zusammenhang mit Rißbildung zu untersuchen.

B.1.2 Lastfall des Bree-Diagramms/Druckführende zylindrische Strukturen

Die Belastungen in den Brennstoffhüllrohren oder auch dem Reaktordruckbehälter können aus folgender Tabellen entnommen werden, wobei diese Strukturen als ideale Zylinder angenommen werden und keine Anschlüsse besitzen.

Klassifikation der Spannungsintensität in Behältern			
Ort der Belastung	Belastungsart	Spannungsart	Klassifikation
Belastungen am Rohr ohne Endeffekte	Innendruck	generelle Membranspannung	P_m
		Spannungsgradient durch Wanddicke	Q
Verbindung mit Abschluß	Innendruck	Membran	P_L
		Biegung	Q
Beliebig	radiale Temperaturverteilung	äquivalente lineare Spannung	Q
		nicht-linearer Anteil	F
Beliebig	Beliebig	Spannungskonzentration	F

Klassifikation der Spannungsintensität in Rohren				
Ort der Belastung	Belastungsart	Klassifikation	Diskontinuitäten berücksichtigt?	
			global	lokal
Rohr ohne Gabelung oder Abzweigung	Innendruck	P_m	nein	nein
		P_L und Q	ja	nein
		F	ja	ja
	Dauernde mech. Lasten inkl. Eigengewicht	P_b	nein	nein
P_L und Q		ja	nein	
Expansion	F	ja	ja	
	P_e	ja	nein	
Beliebig	Nicht-linearer radialer therm. Gradient	Q	ja	nein
		F	ja	ja
	Linearer radialer therm. Gradient	F	ja	nein
	Bewegungen der Befestigung	Q	ja	nein

In den idealisierten Bedingungen des Bree-Diagramms werden nicht alle aufgeführten Spannungs-klassifikationen berücksichtigt:

- Die Spannungskategorie P_L entfällt, wenn eine eindimensionale Betrachtung erfolgt, wie es bei Bree geschieht. In ihr sind die Anteile enthalten, die durch den Abschluß der Zylinder entstehen, d.h. die Anteile, die durch eine Behinderung der freien Biegung entstehen.
- Die Spannungskategorie F wird vernachlässigt, da sie nur für elastisches Ermüdungsverhalten von Belang ist. Andererseits sind im Bree-Diagramm nur lineare Temperaturgradienten vorgesehen; Spannungskonzentrationen durch z.B. lokale Temperaturerhöhungen treten nicht auf.
- Die Expansionsspannungen P_e entfallen mit der Bedingung, daß die zylindrischen Strukturen endlos sind, d.h. sie besitzen kein Abschlüsse.

- Anteile der Sekundärspannungen, welche durch Befestigungen oder das Eigengewicht entstehen, werden bei Bree ebenfalls nicht berücksichtigt.

B.2 Spannungsanalyse und Spannungsbewertung

B.2.1 Spannungsintensitäten

Unter Spannungsintensitätsfaktoren versteht der ASME-Code die äquivalente Intensität der kombinierten Spannungen (eine Vergleichsspannung). In diesem Code ist es der zweifache Wert der maximalen Scherspannung (Tresca-Fließkriterium, Anhang D). Die Spannungsintensität ist somit die Differenz der algebraisch größten und der algebraisch kleinsten Hauptspannung. Diese Definition basiert auf der Theorie der maximalen Schubspannung, welche die Fließgrenze charakterisiert.

Die Spannungsbetrachtung ist für jeden Punkt durchzuführen, solange nicht in allen Punkten der gleiche Spannungszustand herrscht.

Die berechneten Spannungsintensitäten dürfen bestimmte Grenzwert nicht überschreiten. Diese Grenzwerte differieren abhängig von der Art der Spannungskategorie.

Das Vorgehen bei der Berechnung der Intensitäten ist wie folgt:

1. Man wähle ein orthogonales Koordinatensystem (z.b. radial, longitudinal, tangential).
2. Man bestimme die Spannungskomponenten für jede der auftretenden Belastungen und teile sie in die verschiedenen Klassifikationen ein:
 - (a) Generelle primäre Membranspannung P_m
 - (b) Lokale primäre Membranspannung P_L
 - (c) Primäre Biegespannung P_b
 - (d) Expansionsspannung P_e
 - (e) Sekundärspannung Q
 - (f) Spannungsspitzen F
3. Man berechne die algebraische Summe der Spannungskomponenten aus den verschiedenen Belastungen für **jede** Spannungskategorie **einzeln**. Kombinationen der Klassifikationen sind zu berücksichtigen.
4. Die Spannungskomponenten sind für **jede** Spannungskategorie in die Hauptspannungsrichtungen zu übertragen.

5. Man berechne die Spannungsdifferenzen S_{ij} aus den Hauptspannungen der einzelnen Kategorien:

$$S_{ij} = \sigma_i - \sigma_j \quad \text{mit } i, j = \{1, 3\}$$

$$S = \max\{S_{ij}\}$$

S ist dabei die Spannungsintensität für die jeweilige Spannungskategorie, wobei sich die Spannungsanteile aus den verschiedenen Belastungen zusammensetzen.

Für Spannungszyklen ist zu untersuchen, ob die Spannungsdifferenzen kleiner als ein gegebener Grenzwert sind. Dabei unterscheidet man zwei Fälle:

- Die Hauptspannungen besitzen eine konstante Richtung.
 1. Die Hauptspannungen sind über der Zeit aufzutragen, wobei sowohl globale und lokale Strukturdiskontinuitäten, als auch thermische Spannungen zu berücksichtigen sind.
 2. Man bilde für die gesamte Betrachtungszeit die Differenzen der Hauptspannungen und bezeichne diese mit: $S_{ij} = \sigma_i - \sigma_j$ mit $i, j = \{1, 3\}$
 3. Aus diesen Werten finde man für jedes S_{ij} den absoluten Maximalwert über der Zeit und bezeichne diesen mit S_{rij} . Der halbe Wert $S_{altij} = 0.5 S_{rij}$ ist die alternierende Intensität. Mit $S_{alt} = \max\{S_{altij}\}$ als größtem dieser Werte ist die Intensität gegeben.

- Die Richtungen der Hauptspannungen variieren (allgemeiner Fall).
 1. Anstelle der Hauptspannungen müssen nun die einzelnen Spannungskomponenten über ihrem Zeitverlauf aufgetragen werden.
 2. Man identifiziere das Extremum des Lastzyklus der jeweiligen Komponente.
 3. Man substrahiere dieses Extremum vom zeitlichen Verlauf der zugehörigen Spannungskomponente.
 4. Die Hauptspannungen zu jedem Zeitpunkt werden aus dieser Substraktion berechnet.
 5. Das folgende Vorgehen ist analog dem Vorgehen bei den Hauptspannungen konstanter Richtung.

B.3 Spannungsgrenzen

B.3.1 Elastische Analyse

Zu unterscheiden sind bei den Spannungsgrenzen zwischen Entwurfslasten, Betriebslasten und Testlasten und damit auch zwischen den zugehörigen Spannungsgrenzen. In diesem Abschnitt wird nur auf die Entwurfs- und die Betriebslasten eingegangen, wobei die Entwurfslasten zwar den höchsten Sicherheitsansprüchen genügen, die Betriebslasten aber zusätzlich noch gegen Spannungen aus zyklischen Belastungen ausgesetzt werden müssen. In allen Fällen liegt der Spannungsbewertung eine elastische Berechnung zugrunde. Untersucht man auch plastisches Verhalten, wie z.B. in der Limit-Analyse oder Shakedown-Betrachtungen, so können sich Abweichungen zu geringeren Anforderungen an die Spannungsgrenzen ergeben. Bemessen werden die Spannungsgrenzen an denen für das jeweilige Material zulässigen Werten. So bedeuten:

$$S_m = \text{Minimum} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \text{ Bruchfestigkeit} \\ \frac{2}{3} \text{ Streckgrenze} \\ \frac{1}{3} \text{ Zeitstandfestigkeit} \\ 1\% \text{ thermisches Kriechen} \\ 5\% \text{ bestrahlungsinduziertes Kriechen} \end{array} \right.$$

B.3.1.1 Spannungsgrenzen für Entwurfslasten

- Generelle primäre Membranspannungsintensität:
Abgeleitet aus der Spannungskomponente P_m , als durchschnittlicher Wert über der Wanddicke ohne die Berücksichtigung sekundärer Spannungen oder von Spannungsspitzen. Der erlaubte Wert von S_m ist der der Auslegungstemperatur.
- Lokale Membranspannungsintensität:
Abgeleitet aus der Spannungskomponente P_L ohne die Berücksichtigung sekundärer Spannungen oder Spannungsspitzen. Der erlaubte Wert beträgt $1.5 S_m$.
- Primäre (lokale oder generelle) Membran- plus primäre Biegespannungsintensität:
Abgeleitet von $P_L \pm P_b$ entsteht diese Intensität als Maximalwert der Membranspannung plus der Biegespannung, erzeugt durch mechanische Lasten ohne Sekundärspannungen oder Spannungsspitzen. Für Rechteckquerschnitte beträgt

der erlaubte Wert $1.5 S_m$. Für andere Querschnitte ist der Faktor α das Verhältnis der Belastungen, welche einen vollplastischen Querschnitt erzeugen, zu den Belastungen, die Fließen in den extremen Fasern des Querschnitts hervorrufen. Dabei darf α nicht den Wert für reine Biegung oder sogar 1.5 überschreiten.

In der folgenden Tabelle B.3.1.1 sind die Spannungskategorien, ihre Intensitätsbezeichnungen und die Grenzwerte gegeben.

Spannungsart	Primärspannung		
	generelle Membranspannung	lokale Membranspannung	Biegespannung
	Mittlere Primärsp. über Querschnitt. Ohne Diskontinuitäten und Konzentrationen. Nur durch mech. Lasten erzeugt.	Mittl. Spannung über jeden Querschnitt. Mit Diskontinuitäten aber ohne Konzentrationen. Nur durch mech. Lasten erzeugt.	Linearer Anteil der Primärspannung Ohne Diskontinuitäten und Konzentrationen Nur durch mech. Lasten erzeugt.
Symbol	P_m	P_L	P_b
Kombination der Komponenten und Spannungsgrenzen	<pre> graph TD Pm[Pm] --> S_m((Sm)) PL[PL] --> S_m PL --> PL_15Sm((1.5Sm)) Pb[Pb] --> PL_15Sm Pm --> PL_Pb_15Sm((1.5Sm)) PL --> PL_Pb_15Sm Pb --> PL_Pb_15Sm </pre>		

B.3.1.2 Spannungsgrenzen für Betriebslasten (Level A)

Die Level A Spannungsgrenzen stellen die höchsten Anforderungen an die Betriebslastenbewertung. Sie müssen für alle als Betriebslasten spezifizierten Größen erfüllt werden.

- Primäre Membran- und Biegespannungsintensität:
Hier ist kein einzelner Grenzwert gegeben. Allerdings müssen die Spannungen, die durch Primärlasten hervorgerufen werden, berechnet und mit den Auswirkungen anderer Lasten kombiniert werden. Sie müssen dann die obigen Grenzwerte der Entwurfskriterien erfüllen.
- Primäre plus sekundäre Spannungsintensität:
Diese Grenze ist abgeleitet vom Maximum der Membranspannung, plus der Biegespannung, plus der Sekundärspannungen, welche durch den Betriebsdruck, spezifizierte mechanische Lasten und generelle thermische Spannungen hervorgerufen werden. Die Grenze für diese Spannung beträgt $3 S_m$.
- Expansionsionsspannung (Nicht anwendbar auf Behälter):
Maximalwert der Spannung, der sich durch Behinderung freier Verschiebungen einstellt, wobei Diskontinuitäten unberücksichtigt bleiben. Die Grenze liegt für diese Intensität bei $3 S_m$.
- Analyse für zyklischen Betrieb:
Für verschiedene gegebene Lasten (Gasdruck, Druckschwankungen, Temperaturdifferenzen und nicht-konstante mechanische Lasten) sind die Intensitäten und Zyklenzahlen zu berechnen. Erfüllen diese gegebene Grenzwerte, so ist eine zyklische Analyse nicht notwendig. Spitzenspannungen müssen die Ermüdungskriterien erfüllen. Zusätzlich sind jedoch die Strukturen auf thermisches Ratcheting zu untersuchen.
Werden die aufgeführten Kriterien nicht erfüllt, wird ein Analyse für die zyklischen Belastungen notwendig. Zusätzlich müssen die Spannungsgrenzen für Level A Lasten erfüllt werden. Bei der Auslegung wird wie folgt vorgegangen:
 - Spannungsdifferenzen S_a bestimmen, wie vorgegeben.
 - Lokale Strukturdiskontinuitäten müssen anhand theoretischer, experimenteller oder numerisch ermittelter Spannungskonzentrationsfaktoren bestimmt werden.
 - Mit den gegebenen Ermüdungskurven sind die kritischen Werte zu ermitteln.

- Der Effekt des Elastizitätsmoduls wird berücksichtigt.
- Die Schadensakkumulation wird berechnet.
- Thermisches Ratcheting: Unter bestimmten Kombinationen von konstanten mechanischen und zyklierenden thermischen Belastungen können große Verzerrungen entstehen.
Der Grenzwert um ein Anwachsen des Durchmessers einer achsensymmetrischen Schale zu verhindern ist:

- Fall 1: Lineare Variation der Temperatur durch die Wand:
 - für $0 < x < 0.5$ $y' = 1/x$
 - für $0.5 < x < 1.0$ $y' = 4(1 - x)$
- Fall 2: Parabolische konstant ab- oder zunehmende Temperaturverteilung über der Wanddicke:
 - für $0.615 < x < 1.0$ $y' = 5.2(1 - x)$
 - für $x < 0.615$ genähert:
($x = 0.3, y' = 4.65$), ($x = 0.4, y' = 3.55$), ($x = 0.5, y' = 2.70$)

mit $x = \frac{\text{Maximale Membranspannung}}{S_y}$

und $y' = \frac{\text{Maximal erlaubte thermische Spannung auf elastischer Basis}}{S_y}$

Der Gebrauch der Fließspannung S_y anstelle der Proportionalitätsgrenze in den Formeln erlaubt einen geringen Durchmesserzuwachs in den ersten Zyklen. Ist $2S_a(N = 10^7) < S_y$ in den anwendbaren Ermüdungskurven, so ist dieser Wert zu verwenden.

Siehe dazu auch Abbildung B.1.

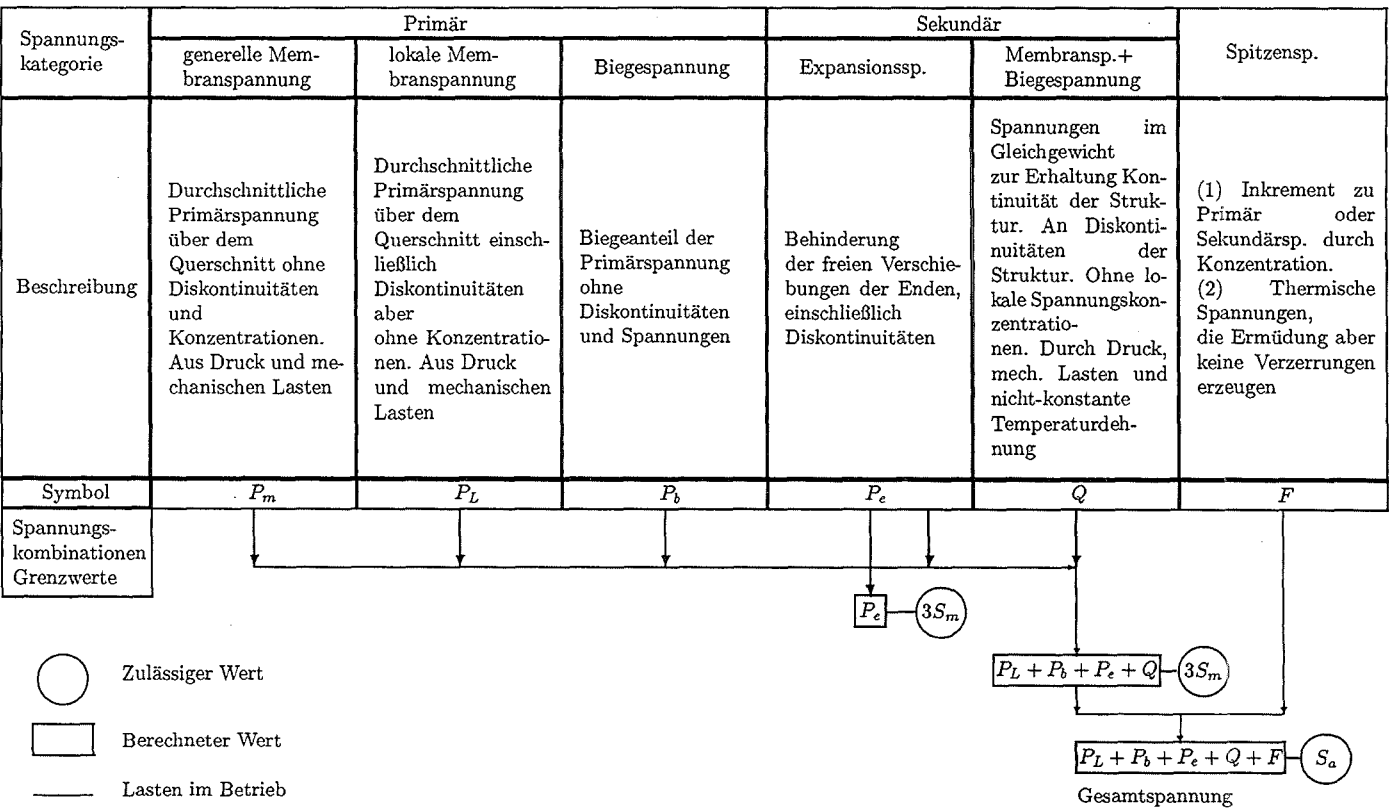


Abbildung B.1: Spannungskategorien und Spannungintensitätsgrenzen für Level-A Betriebslasten

B.3.1.3 Anwendung der elastischen Analyse für Spannungen oberhalb der Fließgrenze

Der mit elastischen Ansätzen berechnete zulässige Spannungswert kann die Fließgrenze des Materials überschreiten. Die Grenze von $3 S_m$ für die Summe aus Primär- und Sekundärspannung ist so gewählt, daß sie zu Shakedown nach wenigen Zyklen führt, solange keine lokalen Strukturdiskontinuitäten oder lokale thermische Spannungen vorliegen.

Diese beiden Faktoren werden aber nur in einer Ermüdungsuntersuchung betrachtet.

B.3.2 Anwendung plastischer Analyse

Wird eine plastische anstelle der elastischen Analyse herangezogen, so kann dies zur Entschärfung der Spannungs-Grenzwerte führen.

B.3.2.1 Limit Analyse

Wenn gezeigt werden kann, daß die Lasten nicht mehr als $2/3$ der unteren Kollapslast überschreiten, so müssen die Bedingungen der elastischen Grenzwerte aus den Entwurfslasten nicht erfüllt werden. Als Fließgrenze ist hier $1.5 S_m$ anzusetzen.

Bei der Verwendung der $2/3$ Kollapslast ist es notwendig Spannungskonzentrationen, die z.B. zur Bildung plastischer Gelenke führen, zusätzlich auf Ermüdung, Ratcheting und Beulen zu untersuchen.

B.3.2.2 Experimentelle Analyse

Wie bei der plastischen Analyse wird hier die Kollapslast als Bemessungsgrenze betrachtet. In diesem Fall ist der Grenzwert $2/3$ der Test-Kollapslast.

B.3.2.3 Plastische Analyse

Anstelle der linearen Dehnungs-Spannungskurve, wie in der elastischen Analyse, wird hier die wahre Dehnung-Spannungs-Kurve für die Berechnungen verwendet. Sie kann sowohl nichtlinear in der Geometrie, als auch in der Verfestigung sein. Es ist zu zeigen, daß die Lasten den Wert von $2/3$ der durch plastische Analyse ermittelten Kollapslast nicht überschreiten. Lokale Spannungskonzentration, z.B. an Stellen, an denen sich Gelenke ausbilden, müssen einbezogen werden. Ebenso die Effekte dieser Konzentrationen auf Ermüdung, Ratcheting und Beulen. Die minimale Wanddicke muß eingehalten werden.

B.3.2.4 Shakedown-Analyse

Die Bedingungen, die durch eine Ratcheting-Untersuchung (s.o.) gestellt werden, müssen nicht erfüllt werden, wenn folgende alternativen Bedingungen erfüllt werden:

- Die Spannungen werden auf elastischer Basis bestimmt.
- Die Konstruktion wird als akzeptabel angesehen, wenn anstelle der elastischen Bedingungen sich nach wenigen Zyklen ein Shakedown einstellt, basierend auf einer plastischen Spannungsanalyse.
- Bei der Berechnung der Spannungen für eine Ermüdungsgrenzenbestimmung sollte die maximale Dehnungsweite in Hauptspannungsrichtung, welche nach dem Shakedown eintritt, mit dem halben Elastizitätsmodulus der mittleren Zyklentemperatur multipliziert werden.

B.4 Vergleich der Auslegung nach ASME mit dem Balkenratcheting

Legt man die Balkenstruktur, wie sie in Abschnitt 2 beschrieben wird, nach den rein statischen Anforderungen des ASME-Code aus, so zeigt sich, daß ein plastisches Verhalten nicht ausgeschlossen werden kann. Das heißt, daß eine Auslegung nach den Vorgaben der Ratcheting-Auslegung (B.3.1.2) stattfinden muß.

Im folgenden Diagramm für das Ratcheting-Verhalten des Biegebalkens sind grob gestrichelt die Auslegung für Betriebslasten und fein gestrichelt die Ratcheting-Auslegung nach dem ASME-Code eingezeichnet. Man erkennt, daß bei Benutzung des Grenzwertes S_m durchaus plastische Verformungen auftreten können. Auch die Bildung eines plastischen Gelenks in der Einspannung nach dem ersten Halbzyklus ist möglich. Legt man dagegen gegen zyklische Belastungen aus, d.h. man nimmt als Spannungsintensität den halben Wert der Größe S_m , so läßt man keinerlei plastische Verformungen zu. Kann aber eine einmalige plastische Verformung toleriert werden, kommt man zu einem zu konservativem Design in bezug auf die Shakedownlasten.

Bei einer Auslegung gegen Ratcheting ist für kleine thermische Momente keine Sicherheit gegeben. In diesem Fall unterschätzt die Auslegung das Eintreten plastischer Verformungen, die zu diesem Versagenstyp führen können.

Für alle Auslegungen nach ASME, die Ratcheting nach dem Bree-Typ berücksichtigen, werden die Primärlasten zu konservativ beurteilt, was auf den Biegespannungscharakter der Primärspannung des Typ-III Ratchetings zurückzuführen ist. Es ist eine Erhöhung der mechanischen Lasten möglich, ohne daß Ratcheting oder selbst eine Gelenkbildung eintreten kann.

B.4. VERGLEICH DER AUSLEGUNG NACH ASME MIT DEM BALKENRATCHETING119

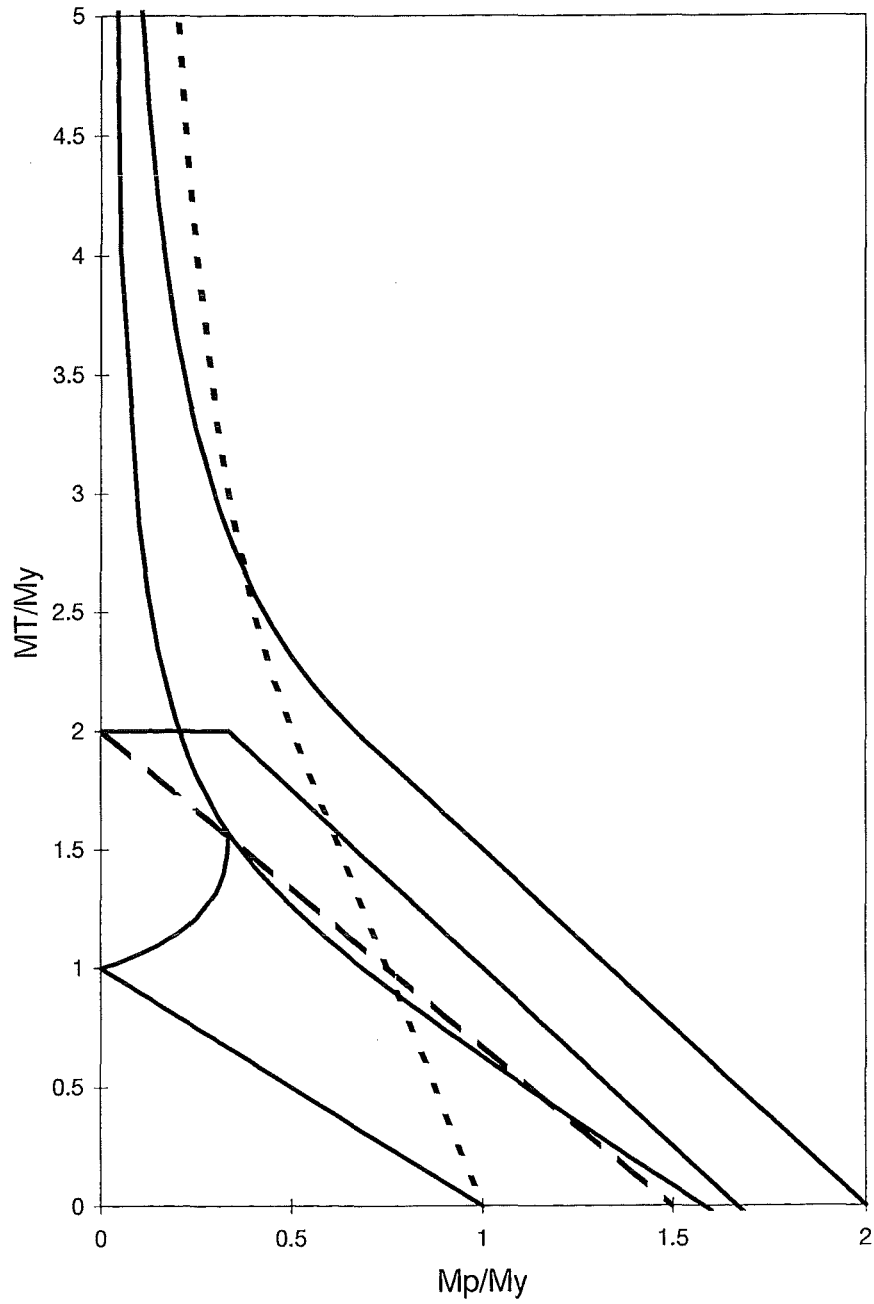
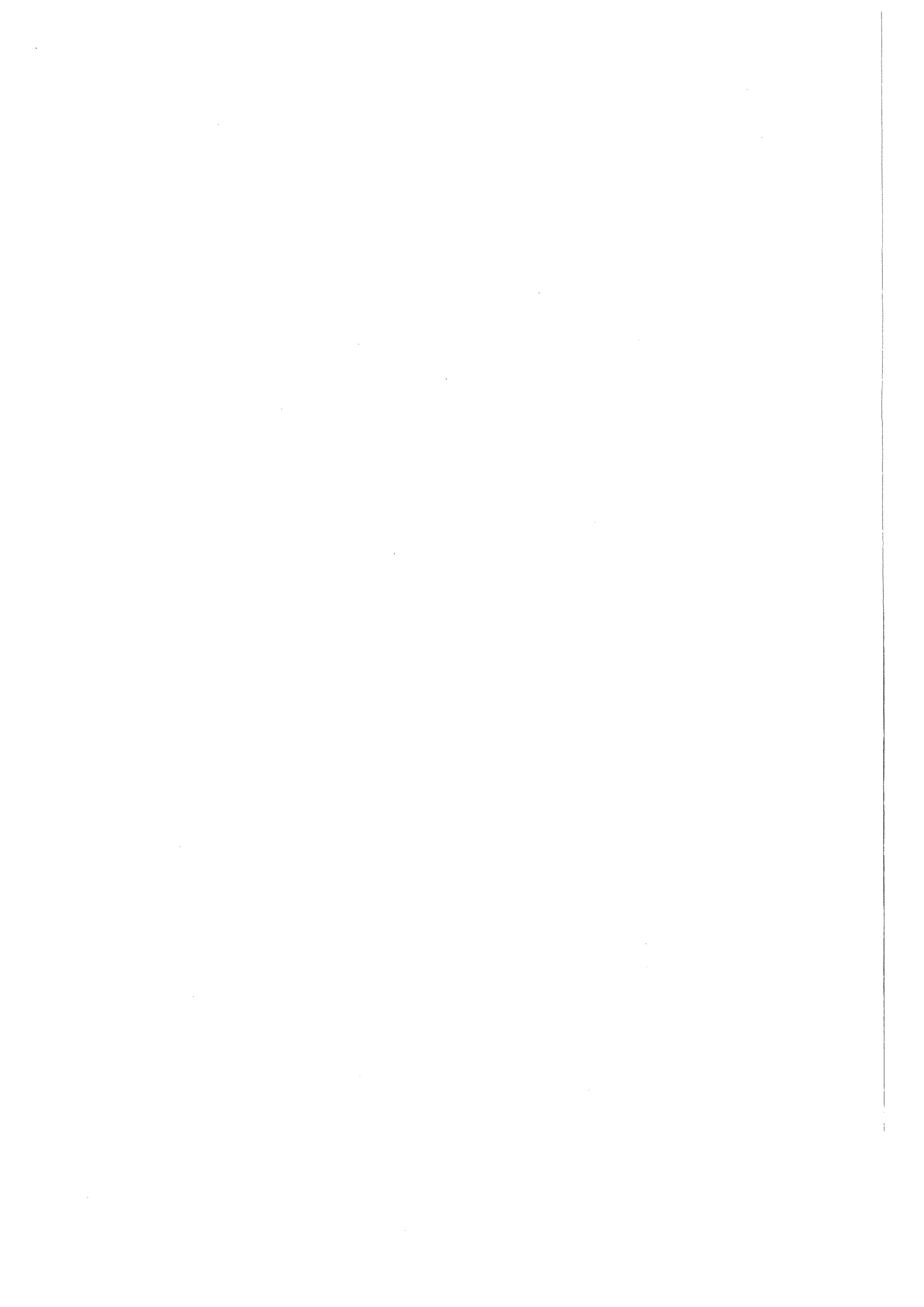


Abbildung B.2: Breediagramm für den Biegebalken mit zulässigen Werten für Auslegung nach ASME



Anhang C

Balkentheorie nach Bernoulli

C.1 Elastische Theorie

Ausgehend von der Untersuchung eines Balkens unter Biegung entdeckte Bernoulli, daß unter bestimmten Vereinfachungen und Annahmen die Krümmung der elastischen Linie proportional zur Biegebelastung ist:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{w''(x)}{[1 + w'^2(x)]^{\frac{3}{2}}} \propto M \quad (\text{C.1})$$

Die dafür notwendigen Voraussetzungen sind:

- Der Balken ist in seinem Ausgangszustand gerade.
- Die äußeren Kräfte greifen in der Symmetrieebene der Querschnitte an.
- Diese Kräfte werden immer am unverformten Balken betrachtet.
- Die Deformationen werden durch die elastische Linie $w(x)$ charakterisiert.
- Die vor der Verformung ebenen, auf der Balkenachse senkrecht stehenden Querschnitte sind auch nach der Verformung eben, d.h. sie erfahren keine Verwölbung, und stehen auch nach der Verformung senkrecht auf der elastischen Linie (**Bernoulli-Hypothese**)

Diese letzte Forderung ist wesentlich für die Balkenbiegung. Für die *reine Biegung*, d.h. einen Balken, auf den keine Querkräfte einwirken, bildet die elastische Linie, oder auch die Krümmungslinie, einen Kreisbogen, womit die Bedingung der senkrechten Querschnitte eindeutig erfüllbar ist. Treten jedoch Querkräfte auf, d.h. $\frac{dM}{dx} = Q \neq 0$, so müssen diese durch Schubspannungen übertragen werden. Dies bedingt aber zusammen mit der Feststellung, daß die Schubspannungen an freien Oberflächen identisch

0 sind, eine Verwölbung der Querschnitte. Die Annahme, die Bernoulli seiner Balkenhypothese zu grunde legt, vernachlässigt also den Einfluß der Schubspannungen.

Nun zur Herleitung der Differentialgleichung der neutralen Faser. Die Forderung, daß die Querschnitte, welche im unverformten Zustand senkrecht auf der Balkenachse stehen, auch nach der Verformung noch senkrecht auf ihr stehen, bedingt für zwei unmittelbar benachbarte Querschnitte, daß sich ihre Spuren im Krümmungsmittelpunkt der elastischen Linie $w(x)$ schneiden. Die einzelnen Fasern des Balkens bilden dabei konzentrische Kreisbögen. Die Fasern, welche in der neutralen Ebene der Krümmung liegen behalten ihr Länge, Fasern, welche auf der Zugseite liegen, erfahren eine Verlängerung, während jene auf der Druckseite eine Verkürzung erfahren (Abbildung C.1).

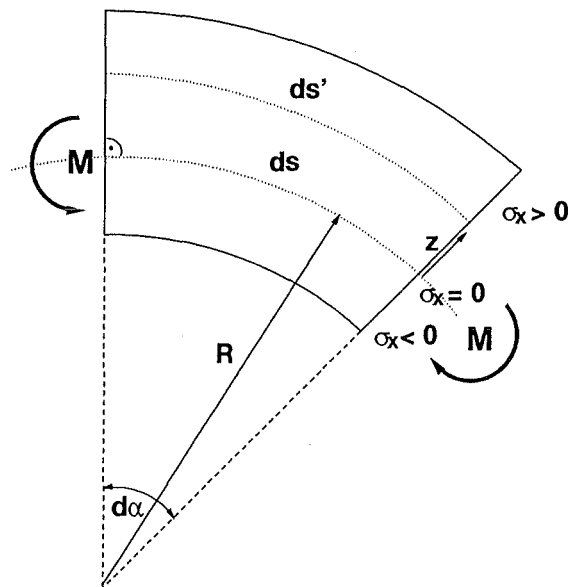


Abbildung C.1: Balkenbiegung mit ebenen Querschnitten

Mit den Bezeichnungen aus Abbildung C.1 läßt sich schreiben:

$$ds' = (R + z)d\alpha = ds + z d\alpha$$

$$\frac{ds' - ds}{ds} = z \frac{d\alpha}{ds} = \frac{z}{R}$$

Die linke Seite der obigen Gleichung ist aber nichts anderes als ε_x , und mit dem Hooke'schen Gesetz gilt:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{z}{R(x)} = \sigma_x(x, z)$$

Dieses Gesetz sagt nicht anderes, als daß die Normalspannungen in jedem Querschnitt eine lineare Verteilung über der Balkenhöhe besitzen. Die Spannungen sind also über das Hook'sche Gesetz mit den Krümmungen $\kappa(x) = \frac{1}{R(x)}$ verbunden.

Die Lage der elastischen Linie, oder neutralen Faser, ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen (im folgenden soll nur Biegung um eine der Koordinatenachsen, um die y-Achse berücksichtigt werden). Für die schiefe Biegung können analoge Betrachtungen durchgeführt werden, siehe auch [81]):

$$\int_A \sigma_x dA = \frac{E}{R} \int_A z dA = 0$$

Das statische Moment $\int_A z dA$ muß also bezüglich der y-Achse verschwinden. Die Balkenachse ist demnach die neutrale Faser. Ihre Lage wird beschrieben durch $w(x)$, ihre Krümmung durch $\kappa(x)$. Die Gleichgewichtsbedingung für das Biegemoment liefert:

$$M(x) = \frac{E}{R(x)} I(x)$$

mit dem Hauptträgheitsmoment (hier nur Biegung um einer der Hauptträgheitsachse)

$$I = \int_A z^2(x) dA$$

Mit der Krümmungsformel in C.1 erhält man so die Differentialgleichung für die neutrale Faser oder auch elastische Linie zu:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{w''(x)}{[1 + w'^2(x)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

Für die Normalspannungen gilt:

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I(x)} z$$

Die Formel zeigt, daß die Spannungen vom Material - dem Elastizitätsmodul E - unabhängig sind und nur von der Querschnittsform - die Flächenträgheitsmomente I -

bestimmt werden. Die maximalen Spannungen treten an den beiden äußeren Fasern des Balkens auf.

Die zweimalige Integration der Differentialgleichung, welche eine Beziehung zwischen der äußeren Belastung durch das Biegemoment und der Krümmung des Balkens darstellt, ergibt die Biegelinie $w(x)$:

$$w(x) = \int_x \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}} dx + C_2$$

mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \int_x M(x) dx + C_1$$

bei von x unabhängigem I .

Die Lösung der Gleichung ist nur für den Fall $M(x) = M = \text{const.}$ trivial. Für beliebige Momentenverläufe greift man deshalb auf folgende Überlegung zurück: Sind die Verformungen klein, so ist auch die Neigung, d.h. die erste Integration der Krümmung, klein. Man kann das Quadrat der Neigung gegenüber 1 vernachlässigen und für die Krümmungsgleichung C.1 schreiben:

$$w''(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (\text{C.2})$$

Diese Differentialgleichung läßt sich sehr einfach integrieren. Die Konstanten bestimmen sich aus den Lagerungsbedingungen des Balkens, z.B. $w(x) = 0$ in einer Lagerung und $\frac{dw}{dx} = 0$ in Symmetriepunkten oder festen Einspannungen.

Für den beidseitig fest eingespannten Balken unter konstanter verteilter Last, oder auch Linienlast der Größe p , ergibt sich z.B. als Biegelinie:

$$\begin{aligned} w''(x) &= -M_A - \frac{pl^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \\ w'(x) &= -M_A x - \frac{pl^2}{2} \left(\frac{x^2}{2l} - \frac{x^3}{3l^2} \right) + C_1 \\ w(x) &= -M_A \frac{x^2}{2} - \frac{pl^2}{2} \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^4}{12l^2} \right) + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen:

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, \text{ und } w'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

ergeben sich für das bisher unbekannte Randmoment M_A und die Integrationskonstanten:

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$M_A = -\frac{1}{12}pl^2$$

Die nach Bernoulli benannte Biegetheorie kann durch die Berücksichtigung einiger Erweiterungen an spezielle Gegebenheiten angepaßt werden, so u.a.:

- Einer Korrektur für Balken mit Querschnittsabmessungen $b \gg h$ (dünne Platten), welche auch auf Querdehnungsbehinderung in Einspannungen übertragbar ist.
- Das Prinzip von **Saint-Venant**, welches den Einfluß von Lokalspannungen durch Kraftereinleitungspunkte definiert [81]:

In hinreichender Entfernung vom Angriffspunkt eines Kräftesystems hängt dessen Wirkung nicht mehr merkbar von seiner Verteilung, sondern nur noch von seinen statischen Resultanten ab.

oder

Statisch äquivalente Kräftesysteme sind in hinreichender Entfernung vom Angriffsbezirk auch elastisch äquivalent.

- Berücksichtigung der Schubspannungen aus angreifenden Querkraften.

Diese Erweiterungen sind in verschieden starkem Umfang auch für das Ratcheting des Biegebalkens zu berücksichtigen (Kapitel 3).

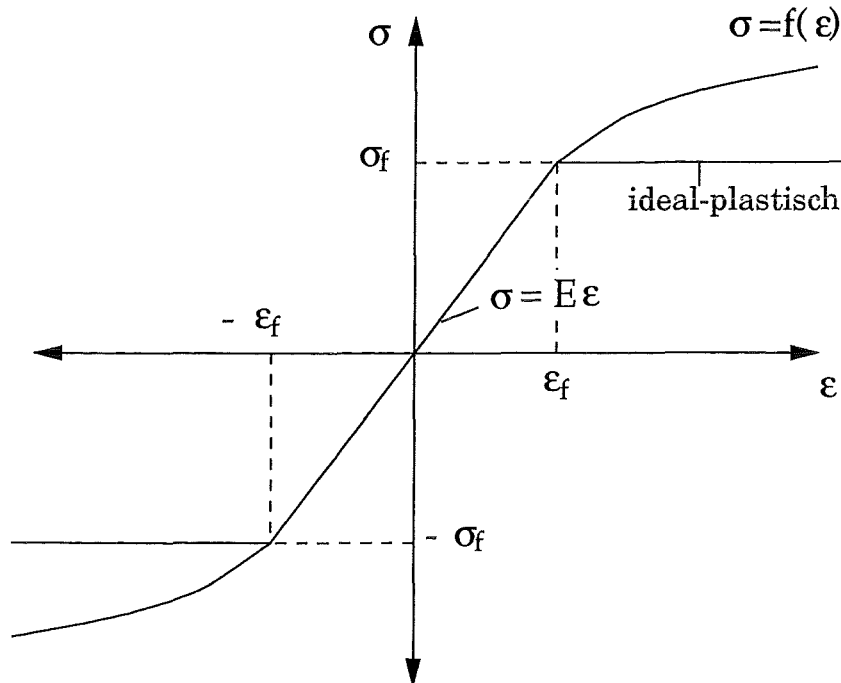


Abbildung C.2: Momenten-Krümmungs-Beziehung im elastischen und plastischen Bereich

C.2 Erweiterung für plastisches Materialverhalten

Für den elastischen Biegebalken gilt die lineare Momenten-Krümmungs-Beziehung. Sobald jedoch in den am höchsten belasteten Randfasern die Fließgrenze des Materials erreicht wird, gilt diese Beziehung nicht mehr. Unter Beibehaltung der Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte und des Lastangriffes in der Symmetrieebene, kommt man für immer noch **kleine Verformungen** einfach zu einem neuen Zusammenhang.

Bei einer Belastung, die höher ist als jene, welche die äußeren Fasern plastisch beansprucht, bilden sich plastische Bereiche aus. Diese Bereiche dehnen sich über die Balkenhöhe und in Balkenachsrichtung aus, bis sie die neutrale Faser erreicht haben. Für einen doppelsymmetrischen Querschnitt geschieht diese Ausbreitung im Zug- und im Druckbereich gleichzeitig. Die Momenten-Krümmungs-Beziehung ist in Abbildung C.2 für ein beliebiges Material und für ein ideal-plastisches Material qualitativ wiedergegeben. Fließen setzt bei Spannungen von σ_f bzw. $-\sigma_f$ und Dehnungen von ϵ_f bzw. $-\epsilon_f$ ein. Die plastische Beziehung ist die noch unbekannte Funktion $\sigma = f(\epsilon)$.

Zur Bestimmung dieser Beziehung stehen zur Verfügung:

- Die Gleichgewichtsbedingung (mit $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

- Die Spannungs-Dehnungsbeziehung für den elastischen Bereich:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu \varepsilon_x$$

und für den plastischen Bereich mit dem *Hencky'schen Gesetz*, Anhang D¹:

$$\varepsilon_{x_p} = \frac{1}{3G_p} \sigma_x, \quad \varepsilon_{y_p} = \varepsilon_{z_p} = -\frac{1}{6G_p} \sigma_x = -\frac{1}{2} \varepsilon_{x_p}$$

- Als Fließgesetz gelte das verallgemeinerte *v.Mises Gesetz*:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

Für eine Biegung nur um die y -Achse liegen die Trennflächen zwischen den elastischen und plastischen Bereichen im Abstand $z_f = \beta h$ von der xy -Ebene der neutralen Faser (Abbildung C.3). Die Kontinuität verlangt, daß am Übergang des elastischen zum plastischen Bereich die Spannungen gleich groß sind. Für die Schubspannungen bedeutet dies, daß auch im elastischen Bereich für die Querkontraktion eine Größe von $\nu = 0.5$ angenommen werden muß. Dies gilt im strengen Sinne nur für inkompressibles Material.

Da für ideal-plastisches Material die plastische Biegespannung σ_{x_p} konstant bleibt, und die Schubspannung $\tau_{xy_p} = 0$ vernachlässigt wird, folgt aus der Gleichgewichts-gleichung:

$$\frac{\partial \tau_{xz_p}}{\partial z} = 0 \tag{C.3}$$

Die Tatsache, daß an den freien Oberflächen keine Schubspannungen entstehen können, bedeutet, daß die Schubspannungen in den plastischen Bereichen verschwinden.

¹Die doppelte Indizierung mit p bezieht sich auf plastische Größen

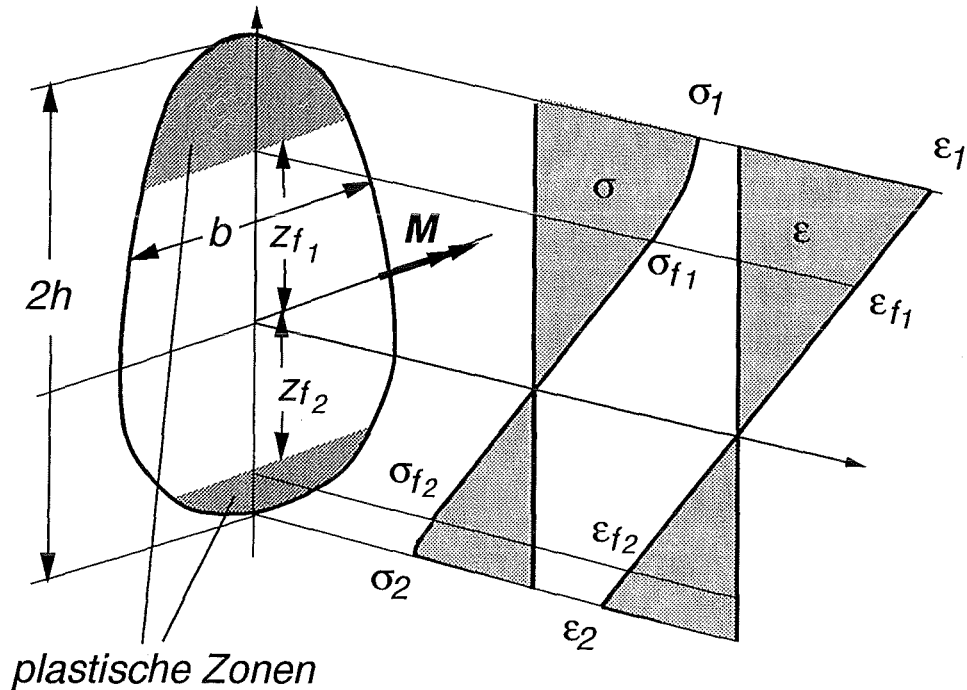


Abbildung C.3: Spannungs- und Dehnungsverteilung bei plastischer Biegung

Die Bernoulli-Hypothese fordert für den gesamten Balkenquerschnitt:

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{z}{R(x)}$$

In den elastisch-plastischen Grenzflächen gilt damit:

$$\varepsilon_f = \frac{z_f}{R(x)} = \frac{\sigma_f}{E}$$

Mit:

$$dA = b(z)dz = b(\varepsilon R)Rd\varepsilon$$

ergibt sich für das Kräftegleichgewicht

$$\int_A \sigma_x dA = R \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} f(\varepsilon) b(\varepsilon R) d\varepsilon = 0 \quad ,$$

wobei ε_1 und ε_2 die Dehnungen an der Ober- bzw Unterseite des Balkens sind. Die Gleichung zeigt auch, daß für nicht doppelsymmetrische Querschnitte das statische

Moment nicht mehr verschwindet, d.h. die neutrale Faser ändert ihre Position in Abhängigkeit von der Lage der plastischen Regionen. Für das Momentengleichgewicht gilt:

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dF = R^2 \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} f(\varepsilon) b(\varepsilon R) \varepsilon d\varepsilon \quad (\text{C.4})$$

Zudem läßt sich schreiben:

$$\varepsilon_1 = \frac{2h}{R} - \varepsilon_2$$

Damit läßt sich als dritte Gleichung zur Bestimmung der drei Unbekannten $R(x)$, $\varepsilon_1(x)$ und $\varepsilon_2(x)$ schreiben:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{1}{R(x)} = \frac{1}{2h} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{\varepsilon_{f1}}{z_{f1}} = \frac{\varepsilon_{f2}}{z_{f2}}$$

C.2.1 Balken mit Rechteckquerschnitt

Für einen Balken mit Rechteckquerschnitt, $z_{f1} = z_{f2} = z_f$, aus ideal-plastischem Material mit gleicher Zug- und Druck-Fließgrenze lautet die elastisch-plastische Fließfunktion:

$$\begin{aligned} \sigma = f(\varepsilon) &= -\sigma_f = -E\varepsilon_f && \text{für} && \varepsilon < -\varepsilon_f \\ &= E\varepsilon = E\varepsilon_f \frac{z}{z_f} && \text{für} && -\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f \\ &= \sigma_f = E\varepsilon_f && \text{für} && \varepsilon > \varepsilon_f \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Die Symmetrie bedingt weiterhin, daß für die Randfaserdehnung $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$ ist. Eingesetzt in die Gleichung für das Momentengleichgewicht C.4 ergibt sich mit $\varepsilon_0 = \frac{h}{R}$:

$$M(x) = \frac{3EI\varepsilon_f}{2h} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

Mit der Einführung des elastischen Grenzmomentes, oder auch Eingangsfießmomentes, bei welchem die Randfasern die Fließgrenze erreichen, $M_f h = EI\varepsilon_f$, und unter Beachtung von $\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_0} = \frac{z_f}{h}$, erhält man schließlich:

$$M(x) = \frac{3}{2} M_f \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{z_f(x)}{h} \right)^2 \right] \quad (\text{C.6})$$

oder für die Grenzflächen der plastischen Zone:

$$\frac{z_f(x)}{h} = \beta(x) = \sqrt{3 - 2 \frac{M(x)}{M_f}}$$

Damit lautet die Momenten-Krümmungs-Beziehung für die plastischen Bereiche:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon_f}{z_f(x)} = \frac{\varepsilon_f}{\beta(x)h} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\frac{M(x)}{M_f}}}$$

C.2.1.1 Bestimmung der Schubspannungen

Wie schon oben gezeigt, entstehen in den plastischen Bereichen keine Schubspannungen. In den elastischen Bereichen treten jedoch nach wie vor Schubspannungen auf. Mit der Gleichgewichtsbedingung unter Vernachlässigung der Schubspannungen τ_{xy} gilt:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Differenziert man das Stoffgesetz C.5 für den elastischen Anteil und ersetzt $\frac{\partial z_f}{\partial x}$ aus Gleichung C.6, so erhält man einen Ausdruck für $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, welcher eingesetzt in die Gleichgewichtsgleichung und durch Integration mit der Übergangsbedingung am elastisch-plastischen Grenzbereich $\tau_{xz} = 0$ für die Schubspannung ergibt:

$$\tau(x, z) = \frac{\sigma_y h^2}{2M_f z_f(x)} \frac{dM}{dx} \left[1 - \left(\frac{z}{z_f} \right)^2 \right]$$

Für $z_f = \frac{h}{2}$ geht diese Gleichung in die bekannte Beziehung für den vollelastischen Balken über.

Anhang D

Plastizität

D.1 Fließgesetze

Der folgende kurze Überblick über die Grundlagen der Plastizität ist ein Ausschnitt aus der Plastizitätstheorie, der hier Verwendung findet. Einen generellen Überblick findet man u.a. in [82, 83, 84, 85, 86].

Tresca erkannte daß metallische Werkstoffe zu fließen beginnen, wenn für die größte Schubspannung gilt:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_{V_0} \quad (\text{D.1})$$

falls, wie üblich, die Hauptspannungen nach ihre Größe indiziert werden: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Die Größe σ_{V_0} ist eine Materialkonstante und läßt sich aus dem einachsigen Zugversuch ermitteln. Die Größe σ_V ist dieser äquivalent, gilt aber für allgemeine Spannungszustände und wird *einachsige Vergleichsspannung* genannt.

Eine neue Fließbedingung stellte **v.Mises** auf:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{V_0}^2 \quad (\text{D.2})$$

Um eine Beziehung zwischen den plastischen Dehnungen und den Spannungen aufzustellen sind einige Betrachtungen notwendig. Experimente haben gezeigt, daß sich die Gesamtdehnung in ihren elastischen und ihren plastischen Anteil zerlegen läßt:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

Der hydrostatische Druck erzeugt in technischen Bereichen keine plastischen Dehnungen. Es gilt also:

$$\varepsilon_{p_{ii}} = 0$$

D.1.1 Der Spannungszustand

Zieht man vom Spannungstensor den hydrostatischen Spannungszustand ab, der ja keinen Einfluß auf die plastischen Dehnungen besitzt, erhält man den Spannungsdeviator:

$$S' = S - pI$$

mit $p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$, $I =$ Einheitstensor, $S =$ Spannungstensor und $S' =$ Spannungsdeviator. Der Spannungsdeviator läßt sich auch durch seine Hauptspannungen $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$, darstellen. Die Invarianten des Spannungstensors lauten:

$$\begin{aligned} J'_1 &= \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \\ J'_2 &= \sigma'_x\sigma'_y + \sigma'_y\sigma'_z + \sigma'_z\sigma'_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ J'_3 &= \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Die Spannungsinvariante J'_2 kann man in Beziehung zur *Oktaederschubspannung* setzen. In den Flächen eines Oktaeders, welche die Hauptspannungsachsen in gleicher Entfernung vom Ursprung schneiden, besitzen die Normalspannungen die Größe $\sigma_0 = p$ und damit die Schubspannung die Größe $\tau_0 = \sqrt{-\frac{2}{3}J'_2}$. Da, wie schon gesagt, der hydrostatische Spannungszustand keinen Einfluß auf die plastischen Verformungen hat, charakterisiert die zweite Invariante den allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustand.

Es bietet sich die Möglichkeit, den allgemeinen Spannungszustand in Relation zu den experimentellen Ergebnissen des einachsigen Zug- oder Druckversuchs zu setzen:

$$\sigma_V = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{-3J'_2}$$

D.1.2 Der Dehnungszustand

Auch den Verzerrungstensor kann man in einen Dehnungsdeviator und die mittlere Dehnung e aufspalten. Für kleine Verformungen gilt:

$$e = \frac{1}{3}\bar{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$$

mit $\bar{\varepsilon} =$ Volumendilatation.

Der Deformationstensor läßt sich weiterhin in seinen elastischen und seinen plastischen

Anteil aufspalten, so daß man schreiben kann:

$$D = D_e + D_p = D'_e + D'_p + \frac{1}{3}\bar{\varepsilon}_e I$$

Die Invarianten des Dehnungstensors lassen sich auf die gleiche Art und Weise bestimmen, wie für den Spannungstensor. Für die Oktaederfläche ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= e \\ \gamma_0 &= \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \sqrt{-\frac{8}{3}J'_{\varepsilon,2}}\end{aligned}$$

Als einachsige Vergleichsdehnung ergibt sich:

$$\varepsilon_V = \sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \sqrt{-\frac{4}{3}J'_{\varepsilon,2}}$$

D.1.3 Fließbedingungen

Zuerst soll nur eine Fließbedingung für ideal-plastisches Material gesucht werden. Ist das Material isotrop, so ist die Fließbedingung von der Lage der Hauptachsen des Spannungszustandes unabhängig, also eine Funktion der drei Hauptspannungen. Da nur der Spannungsdeviator plastische Verformungen hervorruft, muß das Fließgesetz allein durch die Invarianten dieses Tensors zu beschreiben sein. Mit $J'_1 = 0$ also:

$$f(J'_2, J'_3) = h(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) = g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{const.}$$

Die Unabhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand bedingt, daß die Fließfläche senkrecht zur Ebene $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$ offen sein muß, im Hauptspannungsraum also einen Zylinder bildet. Zu beachten sind deshalb nur noch die Spannungsanteile in dieser Ebene, die durch die Fließgrenzkurve begrenzt werden. Diese Kurve muß, da sie eine Funktion der Invarianten ist, symmetrisch zu den Achsen sein, und sie muß bei isotropem Material zudem unabhängig von der Spannungsrichtung sein. Erfüllt werden diese Bedingungen sowohl vom gleichseitigen Sechseck als auch vom Kreis.

Der Kreis ist die Fließgrenzekurve, welche v.Mises benutzt. Die Fließbedingung nimmt dann die Form an:

$$f(J'_2) = -J'_2 = \frac{1}{2}(\sigma'^2_1 + \sigma'^2_2 + \sigma'^2_3) = \frac{1}{3}\sigma^2_{V_0}$$

Dies sagt nichts anderes, als daß das Material bei einer Oktaederschubspannung von $\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{V_0}$ zu fließen beginnt.

Tresca entwickelt die Fließbedingung für das Sechseck:

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_{V_0}\right] \left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_{V_0}\right] \left[(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_{V_0}\right] = 0$$

Fließen setzt demnach ein, wenn die größte Hauptspannungsdifferenz, welche der doppelten maximalen Schubspannung entspricht, den Wert der einachsigen Vergleichsspannung erreicht. Neben diesen beiden Fließgesetzen existieren andere, zum Teil sehr viel komplexere Gesetze, die hier aber nicht weiter Verwendung finden.

D.1.4 Spannungsdeformationsbeziehung

Das Elastizitätsgesetz läßt sich durch nur 2 Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} S' &= 2GD'_e \\ p &= K\bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

Im plastischen Bereich gibt es zum einen das finite Spannungs-Deformationsgesetz nach **Hencky**, in welchem das Elastizitätsgesetz formal übertragen wird. Hierzu wird der Gleitmodul G durch den plastischen Gleitmodul G_p ersetzt, der mit der Oktaederschubspannung veränderlich angenommen wird. Hier sind der Spannungsdeviator und der plastische Deformationstensor koaxial. Superposition mit dem elastischen Gesetz ergibt:

$$D' = D'_e + D_p = \left(\frac{1}{2G_p} + \frac{1}{2G} \right) S', \quad p = K\bar{\varepsilon}$$

Ein differentielles Spannungs-Dehnungs-Gesetz stammt von **De Saint-Venant**, **Lévy-v.Mises** und **Prandtl-Reuss**. Es schreibt sich als:

$$dD_p = d\lambda S' \quad ,$$

wobei $d\lambda = f(I_2')df > 0$ eine skalare Größe ist, die von der Vergleichsspannung abhängt. In diesem Gesetz sind also die plastischen Deformationsänderungen mit dem Spannungsdeviator koaxial. Das Fließgesetz lautet dann:

$$dD' = \frac{1}{2G} dS' + S' d\lambda, \quad d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{K} dp$$

Der unbekannte Proportionalitätsfaktor $d\lambda$ läßt sich aus Betrachtungen zur Gestaltänderungsenergie herleiten, welche die Energie ist, die der Spannungsdeviator am Deformationstensor verrichtet. Aus dem Vergleich der Energieanteile für den allgemeinen Spannungszustand und den einachsigen Zugversuch errechnet man mit $\sigma_V = \varphi(\varepsilon_{V_p})$ als experimentell gewonnener Beziehung:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{V_p}}{\sigma_V} = \frac{3}{2\sigma_V \varphi'}$$

D.1.5 Verfestigungsarten

Bei verfestigenden Werkstoffen wird das Fließgesetz der ideal-plastischen Theorie, $f(\sigma_{ij}, k) = 0$, durch das Gesetz $g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, K) = 0$ ersetzt. Dabei bedeuten ε_{ij}^p die zuvor erreichten plastischen Dehnungen, womit die Belastungsgeschichte einen Einfluß auf den Spannungszustand hat, und K einen nicht konstanten Verfestigungsparameter. Ein einfacher exponentieller Ansatz mit nur drei Parametern zur Beschreibung solchen Materialverhaltens stammt z.B. von Ramberg und Osgood [87], der aber zyklische Effekte (s.u.) nicht berücksichtigen kann.

Die beiden einfachsten Verfestigungsmechanismen, die aber nie vollkommen getrennt auftreten, sind die kinematische und die isotrope Verfestigung.

Bei der isotropen Verfestigung führt eine Belastung oberhalb der Fließgrenze zu einer isotropen Aufweitung der Fließkurve, d.h. sie behält ihre Form und ihren Mittelpunkt bei. Beschreiben läßt sie sich durch die Gleichung: $g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, K) = \Phi(\sigma_{ij}) - K = 0$, mit K als monoton wachsender Funktion der plastischen Verzerrungsarbeit.

Bei der kinematischen Verfestigung führt eine plastische Belastung zu einer Verschiebung der Fließkurve innerhalb der Ebene $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$. Der Durchmesser der Kurve, gegeben durch die Vergleichsspannung σ_{V_0} bleibt dabei konstant. Die Fließgleichung lautet für diesen Fall: $g = f[(\sigma_{ij} - a_{ij}), k] = 0$.

D.1.6 Zyklische Plastizität

Für zyklisches Plastifizieren sind spezielle Stoffgesetze entwickelt worden, welche das Strukturverhalten wie Shakedown oder Ratcheting beschreiben können. Um diese beschreiben zu können, wurden zahlreiche Materialtests durchgeführt und die Parameter der Gesetze an das jeweilige Material angepaßt. Einen Überblick zu diesen Entwicklungen zeigt folgende Literatur: [88, 89, 90, 91, 92, 93, 5, 94, 95, 96, 97, 98]

Anhang E

Materialratcheting

Materialratcheting ist Ratcheting, welches bei homogener Beanspruchung auftritt und ist damit ein reiner Werkstoffeffekt. Materialratcheting läßt sich am einfachsten im Spannungsraum darstellen.

Für die vereinfachende Darstellung seien folgende Annahmen gemacht:

- Der Werkstoff sei isotrop.
- Die Fließfläche sei nach Mises oder Tresca gewählt.
- Das Werkstoffgesetz genüge den Stabilitätskriterien nach Drucker (bedingt eine konvexe Fließfläche).
- Der hydrostatische Spannungszustand besitze keinen Einfluß auf die Fließgrenze, so daß diese nur durch den deviatorischen Spannungstensor beeinflußt wird.

Für ein assoziiertes Fließgesetz wird die Richtung des plastischen Dehnungsinkrements durch die Normale im zugehörigen Spannungsbildpunkt auf der Fließfläche gegeben, Kapitel D. Ruft eine zyklische Belastung proportionale elastische Spannungsänderungen hervor, so führt der Belastungsweg durch den Koordinatenursprung des Spannungsraums.

Die Richtung der plastischen Dehnungsinkremente ist entgegengesetzt und bei einer wechselnden Belastung auch gleich groß. Es werden also in einem Zyklus keine Nettodehnungszunahmen hervorgerufen.

Für ein ideal-plastisches Material ist die Form und Lage der Fließfläche unveränderbar. Ein verfestigender Werkstoff variiert bei isotroper Verfestigung die Größe der Fließfläche, bei kinematischer Verfestigung die Lage der Fließfläche im Spannungsraum. Dazwischen können alle möglichen Kombinationen bestehen. Eine belastungsinduzierte Anisotropie führt zur Formänderung der Fließfläche. Die veränderte Fließfläche wird als Verfestigungs- oder Belastungsfläche bezeichnet.

E.1 Auswirkung der Verfestigung

E.1.1 Isotrope Verfestigung

Bei reiner isotroper Verfestigung liegt eine Zunahme der zyklischen Streckgrenze mit dem ersten Zyklus vor. Als Konsequenz nimmt das plastische Dehnungsinkrement nach dem ersten Zyklus auf Null ab. Es kommt zu einem Shakedown.

E.1.2 Kinematische Verfestigung

Bei reiner kinematischer Verfestigung wird nach dem ersten Zyklus ein Zustand des zyklischen Plastifizierens erreicht, bei dem die plastischen Dehnungsinkremente entgegengesetzt gleich groß sind. Eine Auslegung gegen Kurzzeit-Ermüdung ist notwendig.

E.1.3 Überlagerte Verfestigungsmechanismen

Werden die beiden vorherigen Verfestigungsmechanismen überlagert, wie es bei realen Metallen häufig der Fall ist, so stellt sich der Shakedownzustand oder der Zustand zyklischen Plastifizierens erst nach einer gewissen Zyklenzahl ein. Das plastische Dehnungsinkrement nimmt mit der Zyklenzahl ab - die maximale Inkrementgröße wird nach dem ersten Zyklus erreicht.

E.2 Nicht übereinstimmende Fließ- und Belastungsfläche

Es gibt experimentelle Ergebnisse, bei welchen nach einer anscheinend reversiblen Entlastung nicht wieder die zuvor erreichte Fließspannung als Fließgrenze gilt, sondern plastische Verformung schon bei einer niedrigeren Spannung einsetzt. Es liegt also eine Diskrepanz zwischen Fließfläche und Belastungsfläche vor, in deren Inneren ja jede Belastung reversibel sein sollte. Für die Modellierung dieses Phänomens, welches bei zyklisch schwellender Belastung zu einem Ratcheting-Effekt führt, gibt es verschiedene Ansätze:

- Trennung von Fließ- und Belastungsfläche.
- Einführung dynamischer Erholungsterme.
- Unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten abhängig von der Überspannungsrate.

E.3 Temperaturabhängige Materialdaten

Ein Material mit bilinearem Verfestigungsverhalten werde einer zyklischen mechanischen Belastung und phasenverschoben einer zyklischen Temperaturänderung unterworfen. Es handelt sich um ein Material mit kinematischer Verfestigung, welches bei isothermer mechanischer Beanspruchung kein Ratchetingverhalten aufzeigt. Die mechanische Belastung sei eindimensional auf Zug.

E.3.1 Temperaturabhängige Fließgrenze

Die Fließgrenze nehme bei zunehmender Temperatur ab. Zum Zeitpunkt t_0 besitze das Material eine Temperatur T_1 , welches die höhere Temperatur sei.

Wird jetzt die Struktur mechanisch über seiner Fließgrenze beansprucht, so verschiebt sich die Fließfläche entlang der zur Belastung proportionalen Spannungsachsrichtung (im eindimensionalen Zug entlang einer der Hauptachsen) im Spannungsraum. Dabei bleibt der Radius der (Mises-)Fließfläche unverändert.

Ist die maximale Spannung (Zeitpunkt t_1) erreicht, so wird die Temperatur bis zum Zeitpunkt t_2 auf den Wert T_2 gesenkt. Dabei vergrößert sich der Radius der Fließfläche, ihr Mittelpunkt bleibt unverändert. Der zugehörige Spannungspunkt wandert dadurch vom Rand der Fließfläche ins Innere der Fließfläche.

Bei jetzt konstant niedriger Temperatur wird die Struktur entlastet. Bis zum Erreichen der Fließfläche, d.h. bis zur Entlastung um $\Delta\sigma = -(\sigma_{y_k} + \sigma_{y_h})$ findet eine rein elastische Verformung statt.¹ Anschließend verschiebt sich die Fließfläche mit dem Spannungsbildpunkt, bis dieser wieder seine ursprüngliche Lage im Spannungsraum eingenommen hat. Er liegt jetzt aber auf dem Rand der Fließfläche. (Zeitpunkt t_3)

Als nächstes werde die Struktur bis zum Zeitpunkt t_4 auf die ursprüngliche Temperatur T_1 angehoben, ohne mechanisch belastet zu sein. Der Spannungspunkt hält seine Lage auf der Fließfläche bei, gleichzeitig verringert sich der Radius der Fließfläche. Der Spannungsbildpunkt behält seine Lage im Spannungsraum bei, während plastische Dehnungen durch die Relativbewegung des Fließkurvenmittelpunktes entstehen. Im Gegensatz zur kinematischen Verfestigung bei isothermer Belastung entsteht hier also im ersten Zyklus eine Nettodehnungszunahme. Das plastische Dehnungsinkrement bei thermischer Belastung wird gegeben durch:

$$\Delta\varepsilon_{t_3-t_4} = \frac{E - E_t}{EE_t} (\sigma_{y_k} - \sigma_{y_h})$$

¹Index h für höhere, Index k für tiefere Temperatur

E.3.2 Temperaturabhängiger Plastizitätsmodul

Wird der gleiche Belastungsablauf wie oben bei einer Struktur aus Material mit temperaturabhängigem Tangentenmodul aufgebracht, so stellt sich infinites Ratcheting ein.

Der Plastizitätsmodul sei bei höheren Temperaturen geringer. Daraus folgt, daß bei einer Entlastung bei niedriger Temperatur das plastische Dehnungsinkrement geringer ist, als jenes bei Belastung unter höherer Temperatur (Der elastische Anteil ist temperaturunabhängig).

Die Nettozunahme der Dehnung für jeden Zyklus außer den ersten ist:

$$\Delta\varepsilon_{plast} = \frac{E_{t_k} - E_{t_h}}{E_{t_k} E_{t_h}} (\sigma_{max} - 2\sigma_y)$$

E.4 Form der Fließfläche

Bei mehrachsigen Spannungszuständen können noch weitere Ratcheting-Arten unterschieden werden. Im folgenden wird angenommen, daß sich die Spannungen proportional ändern, d.h. im Spannungsraum liegen sie auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung. Hierbei spielt die Form der Fließfläche eine Rolle. Bei einer Mises-Fließfläche, wie sie den meisten Materialmodellen zugrunde liegt, zeigen sich die folgenden Effekte nicht.

E.4.1 Strength-Differential-Effects

Besitzt das Material für Druck und Zug unterschiedliche Fließgrenzen, so entfallen drei der Symmetrieachsen, welche die Tresca- oder auch die Mises- Fließfläche definieren. Aus der sechseckigen Tresca-Fließfläche kann so im Extremfall eine dreieckige Fließfläche werden, deren Eckpunkte auf den Spannungsachsen liegen. Da eine beliebige Gerade durch den Koordinatenursprung jetzt die Seiten der Fließfläche nicht mehr normal schneidet, führen plastische Dehnungsinkremente in jedem Zyklus zu einem Dehnungszuwachs normal zur Belastung. Das führt z.B. bei einem Rohr unter zyklischer Torsion zu einer Längung.

E.4.2 Second-Order-Effects

Diese Effekte beschreiben geringe Abweichungen von der Fließfläche ohne die sechs Symmetriebedingungen zu verletzen. Auch sie können, wie SDE-Effekte zur Verlängerung eines Rohres unter zyklischer Torsionsbelastung führen. Die Längsdehnungen liegen dabei aber nur in einer Größenordnung des Quadrats der Schubspannungen.

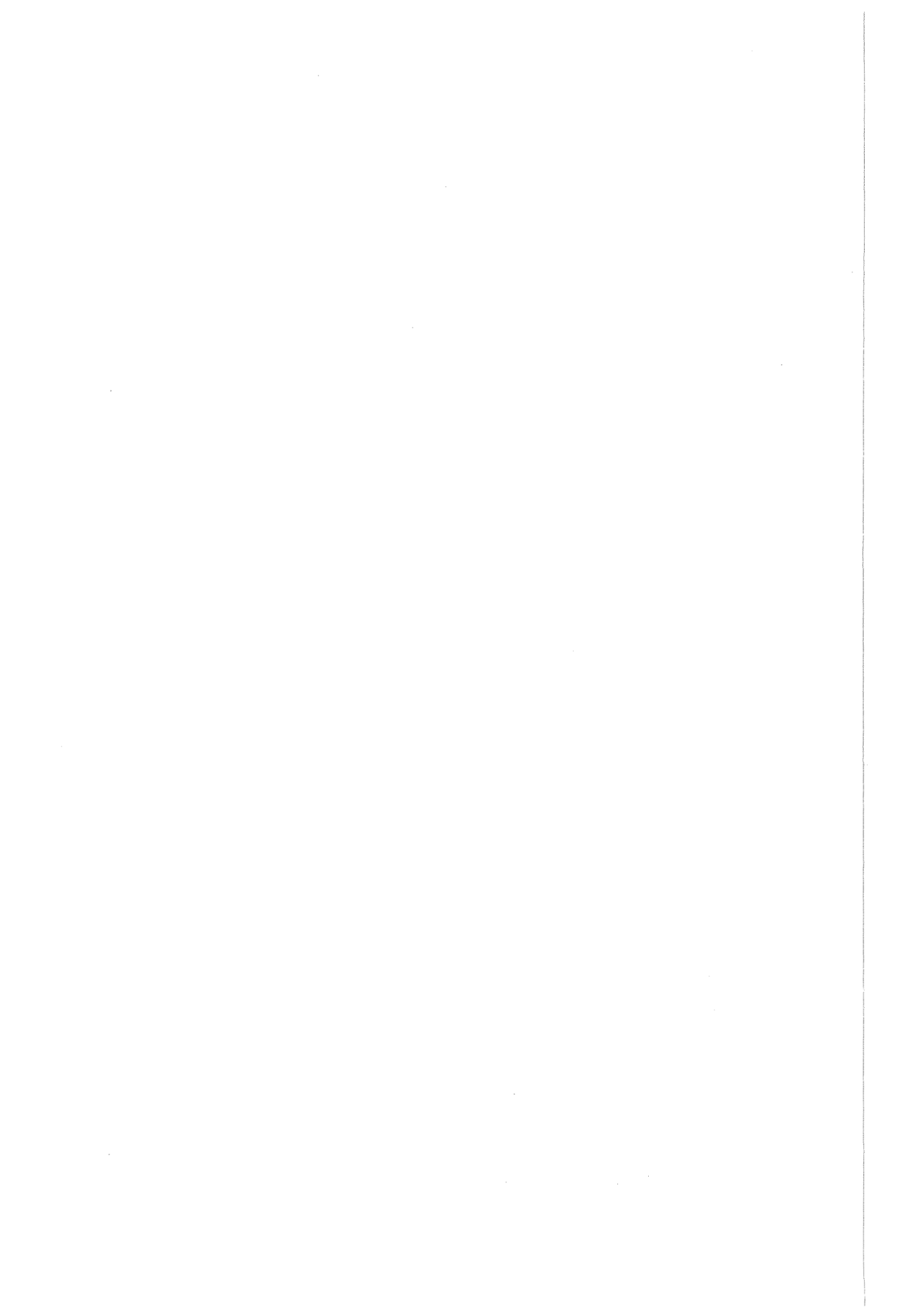
E.5 Anisotropie

Auch Anisotropie führt zur Verletzung der Symmetriebedingungen der Fließfläche, was bei mehrdimensionaler Belastung zu Ratcheting führen kann.

E.5.1 Orthogonales Ratcheting

Ein mehrachsiger Spannungszustand muß nicht proportionalen Änderungen der Spannungskomponenten unterliegen. Wird z.B. eine zyklische Belastung der einen Spannungskomponente einer zweiten konstanten Spannungskomponente überlagert, so führt dies selbst bei einer alle sechs Symmetriebedingungen erfüllenden Fließfläche zu Ratcheting.

Durch die Nichtproportionalität der Belastungen haben die plastischen Dehnungsinkremente einen Anteil normal zum Belastungsweg, der den Ratcheting-Effekt begründet. Bei ideal-plastischem Material wird dies zu einem infiniten Ratcheting führen, d.h die plastischen Dehnungsinkremente besitzen für jeden Zyklus eine konstant bleibende Größe. Im Falle kinematischer Verfestigung dagegen verschiebt sich der Mittelpunkt der Fließfläche auf die Belastungsgerade, so daß die Normalkomponente der plastischen Dehnungsinkremente fortfällt. In diesem Falle spricht man vom infiniten Ratcheting oder vom Shakedown.



Anhang F

Strukturratcheting

F.1 Ratcheting am Zwei-Stab-Modell

Ein Ratcheting-Mechanismus mit ausschließlich membran Spannungskomponenten läßt sich an einem Zwei-Stab-Modell darstellen. Es wird angenommen, daß die Stäbe aus ideal-plastischem Material bestehen und durch eine Traverse fest miteinander verbunden sind. Im einfachsten Zwei-Stab-Modell besitzen die beiden Stäbe den gleichen Querschnitt und bestehen aus dem gleichen Material. Teilt man einen der beiden Stäbe auf in zwei Stäbe gleicher Steifigkeit und ordnet diese außerhalb des zweiten Stabes an, erhält man ein analoges Modell, welches durch seine Symmetrie den Biegeeinfluß vermeidet, Abbildung F.1.

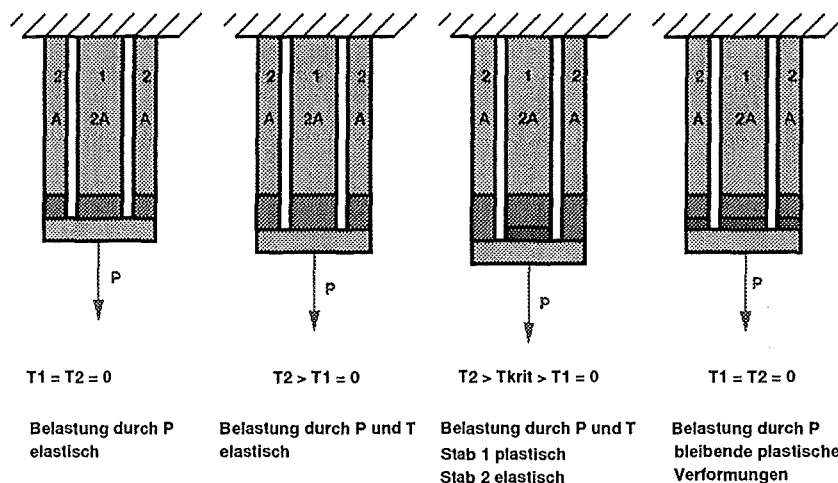


Abbildung F.1: Stabmodell für Strukturratcheting

Die an der Traverse wirkende Kraft P wirke konstant und bewirke kein Fließen in der

Struktur. Als nächstes werden die beiden äußeren Stäbe, Stab 2, um die Temperaturdifferenz ΔT über das Temperaturniveau T , des mittleren Stabes, Stab 1, aufgeheizt. Als Folge der Aufheizung dehnt sich Stab 2 und es kommt zu einer Spannungsumverteilung vom diesem zu dem kälteren Stab 1. Erreicht dabei Stab 1 die Fließgrenze, so erfährt er eine plastische Dehnung von gleicher Größe, wie die über diesen Grenzzustand hinausgehende Temperaturdehnung des Stabes 2.

Beim folgenden Abkühlen wird Stab 2 von Stab 1 daran gehindert, seine ursprüngliche Länge anzunehmen. Er erfährt bei der dabei ablaufenden Spannungsumverteilung eine zusätzliche Zugspannung, die so groß sein kann, daß auch er plastische (Zug-) Dehnungen erfährt. Sind diese Bedingungen erfüllt, so liegt für das ideal-plastische Material Ratcheting vor: Für jeden Aufheiz- und Abkühlhalbzyklus erfahren jeweils Stab 1 bzw. Stab 2 bleibende Längendehnungen, die sich über der Zyklenzahl addieren.

Abhängig von der Größe der mechanischen Zugbelastung und der Temperaturdifferenz der beiden Stäbe, lassen sich andere zyklischen Verhaltensmuster der Stäbe unterscheiden: ¹

- Liegt die Summe der elastischen Spannungen aus der mechanischen Belastung durch die Kraft P und der thermisch induzierten Spannung unterhalb der Fließgrenze, entstehen keine plastische Dehnungen - die Struktur liegt im elastischen Beanspruchungsbereich.

Es gilt immer:

$$\begin{aligned}(\sigma_1 + \sigma_2)A &= P \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_2\end{aligned}$$

Vereinbart wird:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \frac{P}{2A} \\ 2\sigma_t &= E\alpha\Delta T\end{aligned}$$

Für die Grenze des elastischen Bereiches gilt somit:

$$\varepsilon_2 + \alpha\Delta T = \varepsilon_1 = \varepsilon_y$$

¹Im folgenden bezeichnen die Indizes 1,2,y die Stäbe 1,2, bzw. die Fließgrenze

und damit

$$\sigma_p + \sigma_t \leq \sigma_y$$

- Erreicht beim Aufheizen der kältere Stab 1 seine Fließgrenze und wird noch einen gewissen Betrag durch die unbehinderte thermische Dehnung des Stabes 2 plastisch gedehnt, so kann diese plastische Dehnung nicht ausreichend sein, um während des Abkühlens eine plastische Dehnung im Stab 2 zu induzieren. Man spricht in diesem Falle vom Shakedown der Struktur.

Wird nach dem Erreichen der Fließgrenze des Stabes 2 die Temperaturdifferenz weiter erhöht, so wird die Größe, der in diesem Stab erreichten plastischen Dehnung gegeben durch:

$$\varepsilon_{1,pl} = \frac{P}{EA} - \frac{2\sigma_y}{E} + \alpha\Delta T$$

Shakedown wird erreicht, wenn gilt:

$$\sigma_p + \frac{1}{2}\sigma_t \leq \sigma_y$$

- Überschreitet die plastische Dehnung des Stabes 1 eine gewisse Grenze, so erreicht Stab 2 im Abkühlhalbzzyklus ebenfalls die Fließgrenze und wird plastisch gedehnt.

In allen folgenden Zyklen wird nun Stab 1 im Aufheizhalbzzyklus und Stab 2 im Abkühlhalbzzyklus um einen konstanten Wert $\Delta\varepsilon_{pl}$ gedehnt. Man spricht von inkrementellen Kollaps oder Ratcheting. Die in Stab 2 beim Abkühlen erreichte plastische Dehnung hat den Betrag:

$$\varepsilon_{2,pl} = \frac{2P}{EA} - \frac{4\sigma_y}{E} + \alpha\Delta T$$

Mit der Bedingung der gleichen Dehnung ergibt sich somit für ein erneutes Aufheizen/Abkühlen:

$$\Delta\varepsilon_{(1,2),pl} = \frac{P}{EA} - \frac{\sigma_y}{E}$$

Die bisher beschriebene Struktur ist die einfachste dieses Ratcheting-Typs, bei dem sowohl die Materialdaten, als auch die Querschnittsfläche der beiden Stäbe identisch sind. Man kann sich leicht vorstellen, daß bei unterschiedlichen Querschnittsflächen und/oder Materialdaten (Elastizitätsmodul, Fließgrenze unter Zug- und Druckbelastung, Wärmeausdehnungskoeffizient) ein von dieser Betrachtung abweichendes Ergebnis eintritt.

Ein Hauptunterschied bei einer solchen Struktur ist das Auftreten eines Bereiches des alternierenden Plastifizierens eines der beiden Stäbe. Dieser Effekt tritt dann auf, wenn ein Stab elastisch zyklert und dabei durch seine elastischen Dehnungen den zweiten, "schwächeren" Stab abwechselnd im Zug- und Druckbereich zu plastischen Verformungen zwingt. Am einfachsten vorstellbar ist dies bei zwei Stäben aus dem gleichen Material, jedoch mit einem großen Querschnittsflächenunterschied. Im folgenden sei mit Stab 2 der Stab mit der größeren Querschnittsfläche bezeichnet, welcher auch dem Temperaturzyklus ausgesetzt wird.

In Stab 2 sind die Spannungen wesentlich geringer als in Stab 1, wodurch dieser beim Aufheizen des Stabes 2 auf Fließen im Zug beansprucht wird. Ist die thermische Dehnung in Stab 2 groß genug, so tritt beim Abkühlen des Stabes 2 ein Fließen im Druckbereich in Stab 1 auf. Stab 1 wird in allen folgenden Zyklen abwechselnd plastisch gedehnt bzw. plastisch gestaucht, wobei die Nettozunahme der Dehnung nach dem ersten Halbzyklus identisch Null ist: Stab 2 zyklert elastisch, Stab 2 zyklert plastisch.

Der gleiche Effekt läßt sich erzielen durch unterschiedliche Materialeigenschaften bei gleicher Querschnittsfläche. Untersucht wurde dieses Strukturverhalten z.B. in [33].

Ein weiteres Verhalten solcher Zwei-Stab Strukturen wird durch kinematische Verfestigung des Materials beschrieben. Es können in diesem Fall noch weitere Verhaltensweisen des Systems unterschieden werden, die für ideal-plastisches Material nicht auftreten. Behandelt wird dieser Fall unter anderem von S. Majumdar [20], [21] und D.R. Miller [22]. D.R. Miller zeigt ein einfaches graphisches Lösungsverfahren [22] auf (Abbildung F.2), aus welchem die maximal auftretende Dehnung der Struktur nach der Grenzzyklenzahl abgelesen werden kann - Ratcheting ohne Begrenzung der Gesamtdehnung (*infinite Ratcheting*) tritt bei Verfestigung nicht auf.:

1. Als erstes wird die Spannungs-Dehnungs-Kurve aufgezeichnet.
2. Die Lastlinie für rein mechanische Belastung, bei der beide Stäbe gleich beansprucht werden, wird in das Diagramm eingetragen.
3. Die berechneten Punkte für den ersten Halbzyklus, das Aufheizen, werden auf der Spannungs-Dehnungs-Linie eingetragen (Punkte 0.5). Der horizontale (Dehnungs-) Abstand der beiden Punkte beträgt $\alpha\Delta T$.

4. Beim Abkühlen soll Stab 1 elastisch entlastet werden. Im Diagramm entspricht das einer Linie parallel zur Hooke'schen Geraden. Der Schnittpunkt dieser Linie mit der an der Lastlinie gespiegelten Verfestigungsgeraden ist die Lage des Stabes 1 im thermisch unbelasteten Zustand. (Die Spiegelung entsteht aus der Bedingung, daß die Summe der beiden Stabkräfte gleich der mechanischen Belastung der Struktur sein muß.)

In diesem Zustand besitzen beide Stäbe die gleiche Länge. Daraus läßt sich auch die Lage des Stabes 2 leicht bestimmen. (Punkte 1)

5. Im folgenden Aufheiz-Halbzyklus findet erneut eine Spannungsumverteilung statt, welche zu einer elastischen Entlastung des Stabes 2 führt und zu einer erneuten Plastifizierung des Stabes 1 bei einer jetzt höheren Fließgrenze. Der Dehnungsunterschied der beiden Stäbe wird wieder durch die thermische Dehnung bestimmt. Man zeichne eine Gerade parallel zu der gespiegelten Verfestigungskurve durch den Punkt 0.5 für Stab 2. Auf dieser Geraden liegen alle Spannungspunkte für den Stab 2 im aufgeheizten Zustand. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden, welche durch die elastische Entlastung entsteht, beschreibt die Lage des Stabes 1 für diesen Halbzyklus. Mit dem gegebenen Dehnungsunterschied läßt sich auch der entsprechende Punkt für Stab 1 konstruieren. (Punkte 1.5)

6. Würde die thermische Belastung von Stab 1 vollständig elastisch aufgenommen, so würde dessen Spannung den Wert des Punktes (A) betragen. Die Dehnung an dieser Stelle entspricht der Dehnung, welche Stab 1 nach dem Abkühlen besitzt. Dieses Vorgehen läßt sich für alle Folgezyklen wiederholen. Verbindet man nun die Schnittpunkte der Vertikalen durch die beiden Spannungspunkte des thermisch entlasteten Zustandes mit Parallelen zur Hooke'schen Gerade, die durch das Aufheizen des Stabes 1 entstehen, so erhält man eine neue Gerade, deren Schnittpunkt mit der Verfestigungskurve (B) wiederum die maximale Dehnung des Stabes 1 im abgekühlten Zustand beschreibt.

Ist dieser Zustand erreicht, zyklisiert Stab 1 in den folgenden Zyklen nur noch elastisch (zwischen den Punkten B und C), und damit auch Stab 2. Eine Parallele zur Hooke'schen Geraden durch den zur Maximaldehnung gehörenden Punkt des Stabes 1 (E) schneidet die Verfestigungskurve im Punkt D, welcher die maximale Dehnung des Stabes 1 beschreibt.

Miller zeigt, daß der Zustand des elastischen Zyklrierens durch eine Exponentialfunktion erreicht wird.

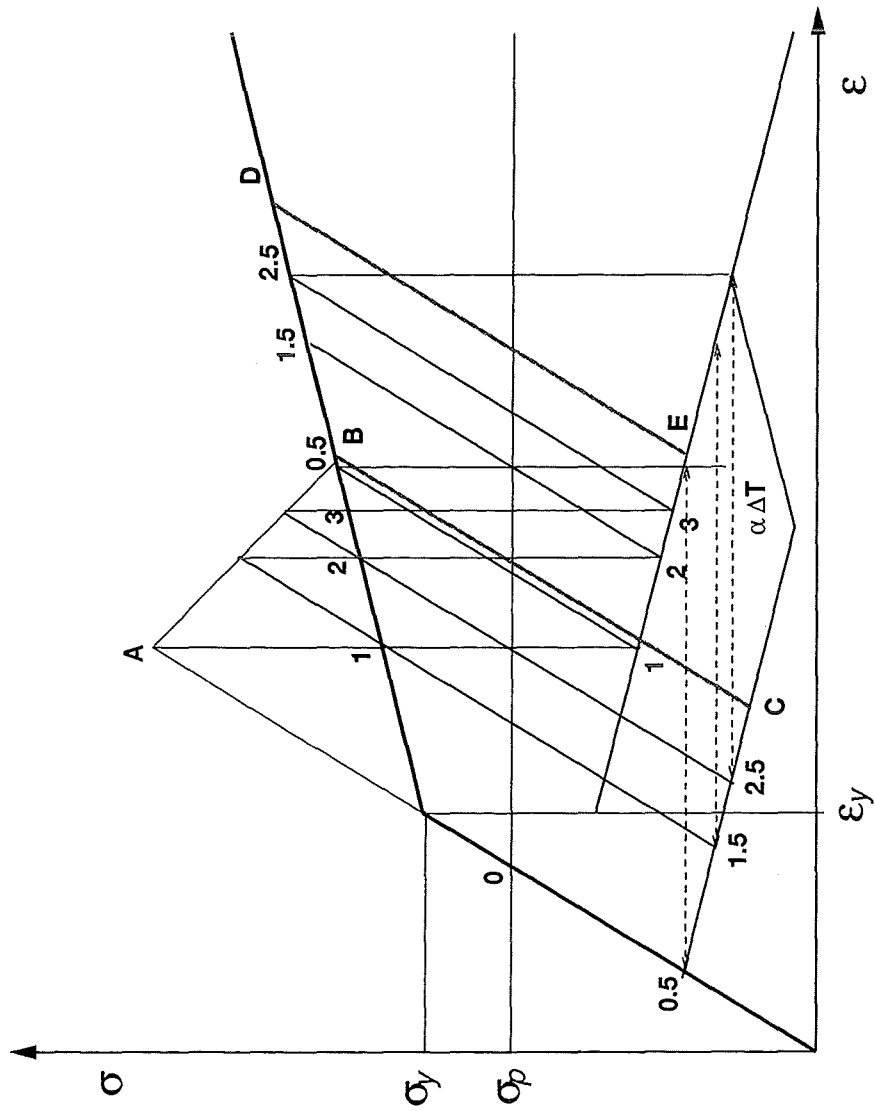


Abbildung F.2: Graphisches Lösungsverfahren für Ratcheting des Zwei-Stab-Modells

S. Majumdar [20, 21] behandelt zudem noch verschiedene Belastungszyklen:

- Konstante Primärspannung und zyklische thermische Spannungen.
- Konstante thermische Spannungen und zyklierende Primärspannungen.
- Zyklierende thermische und Primärspannungen in Phase.
- Zyklierende thermische und Primärspannungen phasenverschoben.

Es wird gezeigt, daß Ratcheting nur für den Fall konstanter mechanischer Spannung und zyklischer thermischer Spannungen existiert.

Dabei ist das plastische Dehnungsinkrement nach dem N-ten Halbzyklus gegeben durch:

$$\varepsilon_{pl} = \frac{1}{1 - m^2} \Delta\varepsilon_{pl,2}^2 \left[1 - e^{-1(1-m^2)N} \right]$$

mit

$$m = \frac{n}{n + 2}$$

$$n = \frac{E}{E_T} = \text{Verhältnis Elastizitätsmodulus/Tangentenmodulus}$$

$$\varepsilon_{pl,2}^2 = \text{plastische Dehnung des Stabes 2 in Halbzyklus 2}$$

$$N = \text{Zahl des Halbzyklus}$$

F.2 Ratcheting bei druckführenden Strukturen

Dieser Typ des Struktur-Ratcheting liegt dem Bree-Diagramm zu Grunde. Als Struktur betrachtet Bree einen zylindrischen Körper unter Innendruck und einem Temperaturgradienten in der Zylinderwand. Ausgangspunkt der Untersuchungen waren u.a. Spannungs- und Lebensdaueruntersuchungen der Brennstoffbehälter in den Schnelle-Brut-Reaktoren, welche unter vereinfachenden Annahmen den obigen Belastungen ausgesetzt sind. Dabei ist der Innendruck, welcher durch Volumenänderung des Brennstoffes und die Produktion von Gasen während des Betriebs entsteht, als konstant anzusehen. Er erzeugt einen dreiachsigen Spannungszustand in den dünnen Wänden der zylindrischen Behälter. Beim An- und Abschalten des Reaktors werden diesem konstanten Druck zyklierende thermische Belastungen in Form eines Temperaturgradienten in der Behälterwand überlagert. Diese können plastische Verformungen in Teilen der Wand hervorrufen.

Zu diesem Ratcheting-Typ wurden zahlreiche Untersuchungen durchgeführt, am bekanntesten jedoch sind die Arbeiten von Bree [37]. Bree stellte seine Ergebnisse in dem nach ihm benannten Bree-Diagramm dar, welches in einer einfachen Darstellung die Lastkombinationen aufzeigt, unter welchen Ratcheting oder auch anderes plastisches Verhalten der Strukturen auftreten kann. Im Gegensatz zu Burgreen [33, 34] geht Bree den umgekehrten Weg. Ausgehend von der Geometrie des zylindrischen Hüllrohres reduziert er die Spannungsverteilung auf einen eindimensionalen, analytisch behandelbaren Zustand. Um diesen Übergang machen zu können, sind einige Annahmen zu treffen:

- Die Länge des Zylinders ist sehr groß im Vergleich zu seinem Durchmesser, und dieser wiederum im Vergleich zur Wanddicke.
- Die Radialspannungen sind im Vergleich zu den Umfangs- und Axialspannungen vernachlässigbar klein.
- Krümmungseinflüsse bleiben unberücksichtigt.
- Die Axialspannung wird als vernachlässigbar angesehen. Dies entspricht einer vernachlässigbaren Membranspannung in Axialrichtung und einer unbehindert Biegung in Axialrichtung, wodurch nicht nur die mechanische, sondern auch die thermische Spannung zu Null wird ¹. Ng und Nadarajah untersuchen mittels FE-Berechnungen den Einfluß der Vernachlässigung der Axial-Spannung auf das Ratcheting-Verhalten und die Größe der Umfangsdehnungen [99, 100]. Sie kommen zu dem Schluß, daß die Betrachtung nach Bree zwar konservativ in bezug auf die Umfangszunahme ist, jedoch ein Ratcheting in Axial-Richtung nicht

darstellt.

Jiang findet für das Rohr-Problem unter statischer Belastung eine geschlossene Lösung ohne auf eine eindimensionale Betrachtung zurückgreifen zu müssen [101, 102, 103, 104]. Das Verhalten unter zyklischer Belastung kann aber auch er nur mit Hilfe numerischer Analysen bestimmen.

Bree zeigt auch den Einfluß einer höheren Fließgrenze, die beim Abkühlen des Zylinders eintritt:

Die Bereiche des Ratcheting und plastischen Zyklierens werden unter der Annahme, daß die minimale Fließgrenze als Ausgangsgröße gilt und der Temperaturgradient selbst keinen Einfluß auf diese Stoffgröße besitzt, zu höheren Belastungswerten verschoben.

Um Aussagen über den Einfluß eines linearen Verfestigungsmechanismus machen zu können, greift Bree zu weiteren Vereinfachungen:

- Es wird angenommen, daß nur Fließen auf Zug stattfindet, was dem Ratcheting Fall 1 entspricht (Fall 2: Fließen auf Zug in Bereichen niedriger Temperatur bei gleichzeitigem Fließen auf Druck in Bereichen hoher Temperatur).
- Der Einfluß der Druckspannung σ_p auf den Beginn zyklischen Plastifizierens und den Bereich der plastischen Dehnungen ist vernachlässigbar, wenn man annimmt, daß der Tangentenmodulus sehr klein ist gegenüber dem elastischen Modulus.

Als Ergebnis läßt sich sagen, daß selbst für niedrige Verfestigungen ein großer Sicherheitsfaktor gegen Ratcheting entsteht, wenn man als Grenze eine maximal zulässige Dehnung annimmt.

Weiter zu beachten war vor allem bei den Betrachtungen am Schnellen-Brut-Reaktor, daß es bei den sehr hohen Temperaturen zu Kriecheffekten kommen kann. Bree diskutiert den Einfluß des Kriechens während der Hochtemperaturphase auf das plastische Verhalten des Zylinders unter der Annahme konstanten Kriechens über der Wanddicke - eine konservative Annahme. Durch das Kriechen des Werkstoffes erhöhen sich die Residuen-Spannungen nach dem Aufheizen, so daß während des Abkühlens größere Abschnitte der Zylinderwand fließen. Es wird gezeigt, daß unter Berücksichtigung dieses Effekts Ratcheting selbst im Shakedown-Bereich des Bree-Diagramms auftritt, da als Grenzbedingung für Kriech-Ratcheting gilt:

¹Man kann diese doch sehr grobe Vereinfachung dadurch rechtfertigen, daß die Umfangsspannung allein den Zylinderumfang anwachsen läßt, während eine Axialspannung diesem entgegen wirkt. Man erhält auf diesem Wege also eine konservative Aussage über die Zunahme des Durchmessers bei Ratcheting-Verhalten

$$\sigma_p + \sigma_t > \sigma_y \quad (\text{F.1})$$

Zum Bestrahlungs-Einfluß schließt Bree aus Experimenten, daß durch die Erhöhung der Fließgrenze und die Abnahme der Duktilität der Werkstoffe, die Grenzen gegen Ratcheting durch obige Annahmen zwar konservativ sind, gleichzeitig aber der Zyklenzahl mehr Beachtung geschenkt werden muß um Kurzzeitermüdung zu verhindern (zyklische Plastizität).

Mulcahy [35] entwirft analog Bree ein Diagramm für den eindimensionalen Stab mit Temperaturgradient für linear kinematisch verfestigendes Material mit einem idealisierten Bauschinger-Effekt. Er baut in seiner Arbeit auf Brees auf. Er erhält so ein Bree-Diagramm für kinematisch verfestigendes Material. Detailliert werden hier die Einflüsse der Verfestigung auf die akkumulierte plastische Dehnung untersucht.

Weitere umfassende Arbeiten wurden durchgeführt von Moreton und Ng [105, 106, 107]. In diesen werden neben einer Übersicht über Bree-Diagramme für verschiedene Belastungsfälle (siehe unten) auch die analytischen Aussagen mit experimentellen Ergebnissen [105] verglichen. Weitere experimentelle Ergebnisse zeigt [108].

Diese Ergebnisse wurden auf rein mechanischer Basis erzielt, ohne Temperaturbelastungen aufbringen zu müssen. Als Test-Objekt wird ein Strang benutzt, welcher über eine angetriebene Rolle gezogen und an seinen beiden Enden durch Gewichte beschwert wird. Die Gewichte übernehmen dabei die Rolle der konstanten Druckbelastung. Durch zyklisches Drehen der Rolle wird der Strang um eine festgelegte Krümmung auf Biegung belastet, was der thermischen Belastung entspricht. Verschiedene Biegebelastungen werden durch unterschiedliche Durchmesser der Rollen erzielt. Als Material wurde ein AISI-316 Stahl (typischer Werkstoff für Reaktordruckbehälter) benutzt, der ein nicht-lineares Verfestigungsverhalten zeigt und keine ausgeprägte Fließgrenze besitzt. Ergebnisse, welche in der analytischen *statischen* Lösung nicht beschrieben werden konnten, sind:

- Der Einfluß der Zyklendauer (Kaltkriechen, Viskoplastische Effekte).
- Ratcheting bei kinematisch verfestigendem Material ohne obere Grenze. Ein konstantes, wenn auch geringes, plastisches Dehnungsinkrement wird selbst bei hohen Zyklenzahlen noch gemessen.
- Nicht-lineare Verfestigung und Festlegung der Fließgrenze als Abweichung vom linear-elastischen Teil der Spannungs-Dehnungskurve.

Um diese Probleme zu lösen wurden numerische Rechnungen durchgeführt, in welche aus experimentellen Ergebnissen abgeleitete Stoffgesetze implementiert wurden.

Weitere experimentelle Ergebnisse mit einem ähnlichen Versuchsaufbau wurden von Megahed u.a. [109, 110] erzielt. In einer weiteren Arbeit untersuchen Ng und Moreton den Einfluß der Schwingungsbreite der Dehnungen bei alternierender Plastizität [111].

Aufbauend auf den Betrachtungen von Bree untersucht Goodman [112] die Grenze für das Ratcheting-Verhalten in Abhängigkeit von der Transientengeschwindigkeit. Bei kleineren thermischen und höheren mechanischen Belastungen sinkt diese zu geringeren Werten der Lastkombination.

F.2.1 Analyse des Typ-II Ratchetings

F.2.1.1 Elastische Analyse

Druckspannungen in einem dünnwandigen zylindrischen Körper rufen Spannungen in Längsrichtung und in Umfangsrichtung hervor.

Die Spannung in Umfangsrichtung besitzt den Wert:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_p$$

Die Spannung in Längsrichtung hat den Wert:

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \sigma_p$$

wobei:

$$\sigma_p = \frac{pd}{2t}$$

mit

p = Innendruck

d = Durchmesser des Zylinders

t = Dicke der Zylinderwand

Die thermischen Spannungen in Achs- und Umfangsrichtung besitzen den Wert

$$\sigma_t = \frac{E\alpha\Delta T}{2(1-\nu)}$$

unter der Annahme, daß man den dünnwandigen Zylinder als dünne Platte betrachten kann und er sowohl in Umfangs- als auch in Axialrichtung biegebehindert wird. Der Maximalwert σ_t wird an der kälteren Außenseite des Zylinders, der Minimalwert $-\sigma_t$ an der wärmeren Innenseite erreicht. Dabei wird die Temperaturdifferenz auf die Temperatur in der Wandmitte bezogen.

Im Elastischen ergeben sich die Spannungskomponenten aus der Addition der jeweiligen thermischen und mechanischen Spannungskomponenten.

F.2.1.2 Vereinfachung auf eindimensionale Betrachtung

Eine Lösung für den zweidimensionalen Fall kann nur mittels numerischer Betrachtungen erzeugt werden. Um eine geschlossene Lösung zu ermöglichen, ist die Vereinfachung auf einen eindimensionalen Spannungszustand notwendig. Nimmt man an, daß die thermische Belastung durch freie Biegung keine Spannungen in Axialrichtung erzeugt (die Spannungen in Umfangsrichtung sind ohnehin dominant), so ergibt sich mit der Umformung:

$$\Delta T := \frac{\Delta T}{(1 - \nu)}$$

als Temperaturdifferenz im eindimensionalen Modell als einzige Spannung (Spannung in Umfangsrichtung):

$$\sigma = \sigma_p + \frac{2x}{t} \sigma_t$$

Dabei bezeichnet die Koordinate x die Koordinate in Radialrichtung durch die Wand, mit ihrem Ursprung in Wandmitte.

Wird der jetzt eindimensionale Körper in seiner Biegung infolge des thermischen Gradienten behindert, so gilt:

$$\varepsilon_T = \varepsilon + \varepsilon_p + \alpha T = \text{constant} \quad (\text{F.2})$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &= \text{totale Dehnung} \\ \varepsilon_p &= \text{plastische Dehnung} \\ \alpha T &= \text{thermische Dehnung} \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung liefert:

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma \, dx = \sigma_p t \quad (\text{F.3})$$

Die zu beachtende Fließbedingung für ideal-plastisches Material gibt vor:

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \sigma_y && \text{im plastischen Bereich} \\ |\sigma| &< \sigma_y && \text{im elastischen Bereich} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

F.2.1.3 Erster Halbzyklus

In diesem Halbzyklus ist der Behälter durch den Innendruck und die Temperaturgradienten belastet. Die Spannungs-Dehnungsbeziehung F.2 lautet also:

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p + \frac{2x\sigma_t}{Et} \quad (\text{F.5})$$

F.2.1.4 Zweiter Halbzyklus

In diesem Halbzyklus ist der Behälter nur durch den Innendruck belastet. Die Spannungs-Dehnungsbeziehung F.2 lautet jetzt:

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p \quad (\text{F.6})$$

Für alle Halbzyklen sind die Gleichungen F.5 und F.6 mit den Randbedingungen F.3, F.4 und F.2 zu lösen.

F.2.1.5 Diskussion der Zyklen

Abhängig von der Größe der thermischen Spannungen kann man zwei Fälle der zyklischen Plastifizierung unterscheiden. Zum einen kann es bei einem großen Verhältnis von thermischen zu mechanischen Spannungen in einem Halbzyklus zu gleichzeitigen Plastifizierungen an der Innen- und Außenseite des Zylinders kommen, also sowohl während des Aufheizens als auch während des Abkühlens (Fall 2). Bei einem kleinen Verhältnis dagegen, geschieht dies jeweils nur an einer Seite: Beim Aufheizen an der Außenseite, beim Abkühlen an der Innenseite des Zylinders (Fall 1). Definiert man nun die Steigung der elastisch berechneten Spannung als den Steigungsfaktor K , so

definiert dieser das Verhalten in den Belastungszyklen.

$$K = \frac{2\sigma_t}{t} = \frac{2\sigma_t}{(b-a)}$$

Dabei sind:

- a der Abstand der plastischen Zone unter Zug,
gesehen von der Mittellinie der Wand
- b der Abstand der plastischen Zone unter Druck,
gesehen von der Mittellinie der Wand

Unter der Annahme, daß ein konstanter Zyklus (*steady state*) existiert, gilt für den Spannungsverlauf:

Fall 1:

Für den Spannungsverlauf gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma_y - K(a-x) \quad \text{für} \quad -\frac{t}{2} < x < -a \\ \sigma(x) &= \sigma_y \quad \text{für} \quad -a < x < \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Einsetzen in F.3 liefert:

$$\sigma_p = -\frac{K}{2t} \left(a + \frac{t}{2} \right)^2 + \sigma_y \quad (\text{F.7})$$

Die in einem konstanten Zyklus anfallende plastische Dehnung läßt sich berechnen zu:

$$\delta = \frac{2aK}{E} = 2a \frac{2\sigma_t}{Et}$$

Mit der Gleichung F.7 ergibt sich die Koordinate a zu:

$$|a| = \frac{t}{2} \left[1 - 2\sqrt{\frac{\sigma_y - \sigma_p}{\sigma_t}} \right] \quad (\text{F.8})$$

und damit die plastische Dehnung pro Zyklus zu:

$$\delta = \frac{Kt}{E} \left[1 - 2\sqrt{\frac{\sigma_y - \sigma_p}{\sigma_t}} \right] \quad (\text{F.9})$$

Fall 2:

Für die Spannungsverteilung in der Zylinderwand gilt jetzt:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= -\sigma_y & \text{für } -\frac{t}{2} < x < -b \\ \sigma(x) &= -\sigma_y + K(b+x) & \text{für } -b < x < -a \\ \sigma(x) &= \sigma_y & \text{für } -a < x < \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Einsetzen in F.3 liefert:

$$\sigma_p = 2a\sigma_y + \frac{K}{2}(b-a)^2 \quad (\text{F.10})$$

Multiplikation mit $2K$ ergibt:

$$4\sigma_p\sigma_t = 4\sigma_yKa + K^2(b-a)^2 \quad (\text{F.11})$$

Analog dem Vorgehen für Fall 1 läßt sich die pro Zyklus akkumulierte plastische Dehnung für einen eingeschwungenen Zustand berechnen zu:

$$\delta = \frac{\sigma_t}{E} \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_y} - \frac{\sigma_y}{\sigma_t} \right) \quad (\text{F.12})$$

Die Grenze für das Ratcheting nach Fall 1 findet sich durch Setzen von $\delta = 0$ in F.9 zu:

$$\frac{\sigma_t}{4\sigma_y} + \frac{\sigma_p}{\sigma_y} = 1 \quad (\text{F.13})$$

Man erhält das gleiche Resultat, wenn man in Gleichung F.8 die Grenze des plastischen Bereiches $a = 0$ setzt. Diese Gleichung besagt nichts anderes als daß Ratcheting nur dann auftritt, wenn die Mittellinie der Zylinderwand in jedem Halbzyklus plastisch beansprucht wird.

Um die Ratcheting-Grenze für den Fall 2 zu erhalten, muß man nun in der Gleichgewichtsgleichung F.11 $a = 0$ setzen und erhält damit:

$$\sigma_p\sigma_t = \sigma_y^2 \quad (\text{F.14})$$

Die Grenze zwischen den beiden Ratchetingfälle erhält man, indem man in der Gleichgewichtsgleichung F.11 $b = \frac{t}{2}$ setzt:

$$\sigma_t (\sigma_y - \sigma_p) = \sigma_y^2 \quad (\text{F.15})$$

Die Grenze für rein elastisches Verhalten ergibt sich für den Wert $a = \frac{t}{2}$ eingesetzt in die Gleichgewichtsgleichung F.7 zu:

$$\sigma_p + \sigma_t = \sigma_y \quad (\text{F.16})$$

Der Fall der alternierenden Plastizität tritt dann auf, wenn die Spannungen auf der Außen- und auf der Innenseite die Fließgrenze überschritten haben, die Wandmitte aber noch elastisch ist. In diesem Falle fließen die Außenbereiche alternierend auf Zug und Druck, ohne daß eine Nettodehnung eintritt. Die auftretende Dehnung pro Zyklus wird von Bree [37] gegeben als:

$$z = (|z| - c) \frac{2\sigma_t}{Et} \quad (\text{F.17})$$

wobei

$$c = \frac{\sigma_y t}{\sigma_t} \quad (\text{F.18})$$

die Eindringtiefe der plastischen Bereiche in das Material beschreibt. Die Grenze für alternierende Plastizität ist zu finden, in dem man $z = 0$ und $c = \frac{t}{2}$ setzt:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} = 2 \quad (\text{F.19})$$

Dies ist die untere Grenze für alternierende Plastizität **nach** dem ersten Zyklus. Im ersten Zyklus werden plastische Verformungen schon für kleinere Temperaturspannungen erzeugt. Der Bereich zwischen den Grenzen für alternierende Plastizität und elastisches Verhalten ist der Bereich des Shakedown: Nur im ersten Zyklus treten plastische Verformungen auf.

Durch die Anwendung der Gleichgewichtsgleichungen erhält man so die zuerst von Bree beschriebenen verschiedenen Grenzen für das Verhalten des Zylinders unter konstantem Innendruck und einem zyklierenden Temperaturgradienten durch die Wand. Diese Belastung entspricht dem ursprünglichen Bree-Diagramm, dargestellt in Abbildung F.3.

Weitere Lastfälle sind in vielen Literaturstellen untersucht worden. Im folgenden werden für ideal-plastisches Material die möglichen Lastkombinationen anhand der sich daraus ergebenden Bree-Diagramme erläutert. Das Vorgehen ist dabei analog dem oben beschriebenen:

Konstante thermische Belastung und zyklrierender Innendruck

Der wesentliche Unterschied in diesem Belastungsfall ist, daß hier kein Ratcheting auftritt. Es sind nur drei Bereiche zu unterscheiden:

1. Grenze für rein elastisches Verhalten:

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_y} + \frac{\sigma_t}{\sigma_y} = 1 \quad (\text{F.20})$$

2. Grenze zwischen Fall 1 und Fall 2 Shakedown:

$$4 \frac{\sigma_t}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_y}\right) = \left(2 - \frac{\sigma_p}{\sigma_y}\right)^2 \quad (\text{F.21})$$

Dieser Lastfall ist dargestellt in Abbildung F.4

Phasenverschoben zyklrierende thermische und mechanische Belastungen

Zu beachten ist hierbei die Forderung, daß jeweils die im Zyklus zuvor wirkende Last vollständig zurückgenommen wurde, bevor die neue Belastung aufgebracht wird. Da es sich um eine rein statische Betrachtung handelt, kann zwischen den einzelnen Zyklen eine nicht näher zu spezifizierende endliche Zeitspanne liegen.

Die Grenzen für die verschiedenen Bereiche sind:

1. Grenze für elastischen Bereich:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} = 1 \quad (\text{F.22})$$

und

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_y} = 1 \quad (\text{F.23})$$

2. Grenze für Fall 2 Shakedown (da ein Fließen beider Außenseiten einsetzt, entsteht kein Fall 1 Shakedown):

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} = 2 - \frac{\sigma_p}{\sigma_y} \quad (\text{F.24})$$

3. Grenze für Fall 1 Ratcheting gegen Fall 1 Shakedown:

$$4 \frac{\sigma_t}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_y}\right) = \left(1 - \frac{\sigma_t}{\sigma_y}\right) \quad (\text{F.25})$$

4. Grenze zwischen Fall 1 und Fall 2 Verhalten:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} = \frac{4}{\left(2 - \frac{\sigma_p}{\sigma_y}\right)} \quad (\text{F.26})$$

5. Grenze zwischen Fall 2 Shakedown und Ratcheting-Verhalten:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} \frac{\sigma_p}{\sigma_y} = 2 \quad (\text{F.27})$$

Die Ergebnisse sind in Abbildung F.5 dargestellt. Es zeigt sich, daß ein Gebiet des zyklischen Plastifizierens existiert, in welchem aber im Unterschied zum Lastfall mit zyklischen thermischen und konstanten mechanischen Spannungen das Fließen nur auf der Innenseite des Zylinders stattfindet.

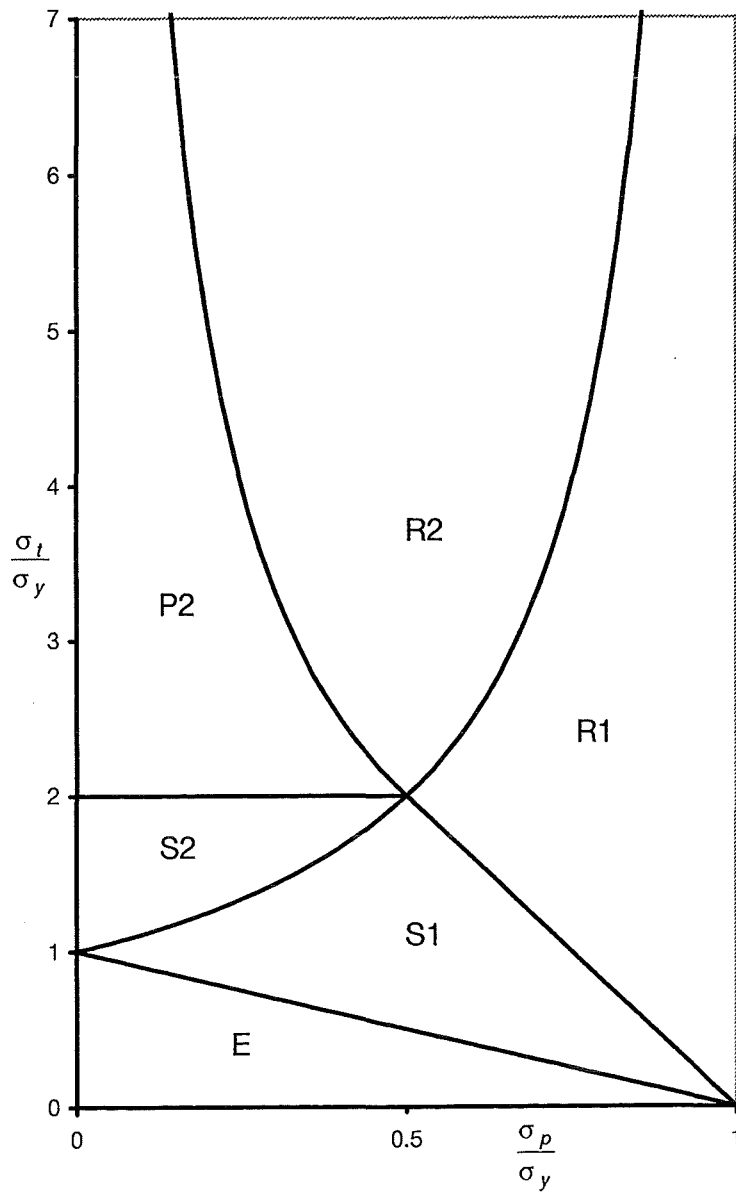


Abbildung F.3: Bree-Diagramm für konstante mechanische und zyklierende thermische Last

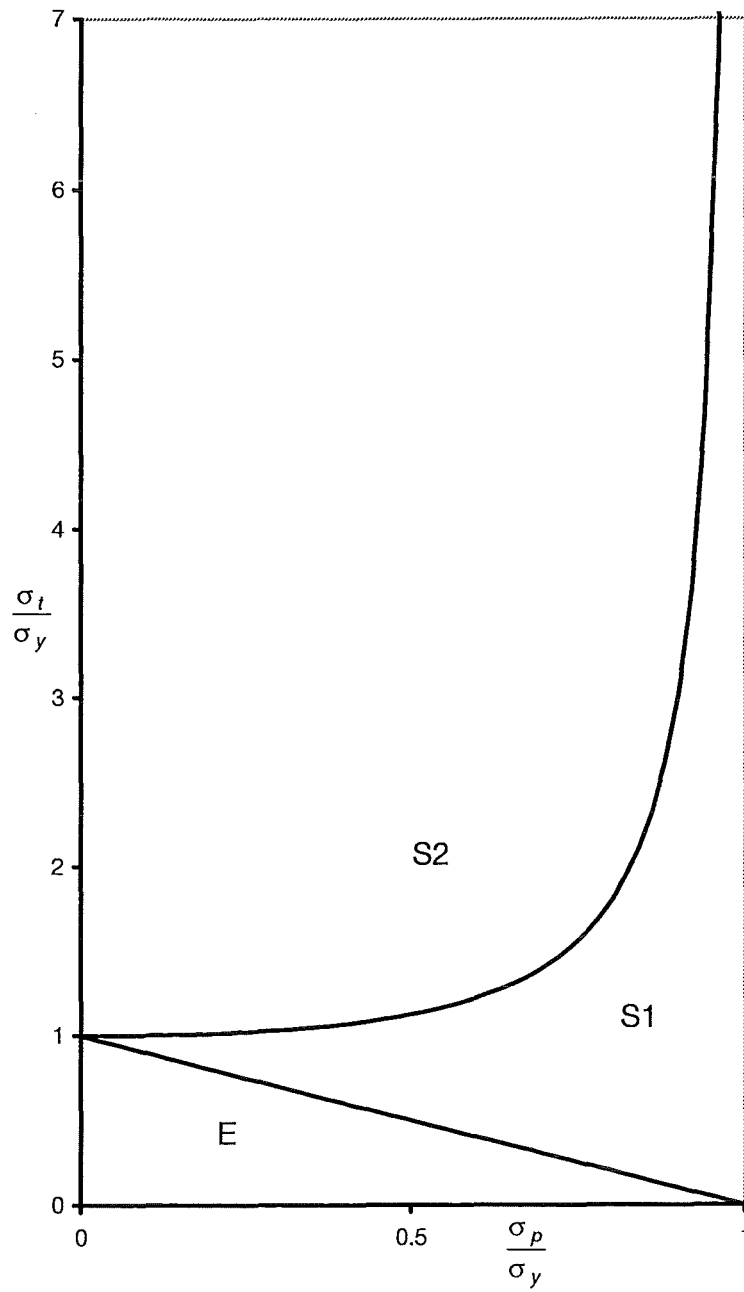


Abbildung F.4: Bree-Diagramm für konstante thermische und zyklierende mechanische Belastung

In Phase zyklierende thermische und mechanische Belastungen

Der folgende Belastungsablauf ist jener, der am ehesten den Betriebsbedingungen eines Reaktors entspricht, bei dem die Druckbelastungen mit den thermischen Belastungen in Phase liegen.

Die einzelnen Regionen des Bree-Diagramms werden getrennt durch die Grenzen:

1. Elastische Grenze:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} + \frac{\sigma_p}{\sigma_y} = 1 \quad (\text{F.28})$$

2. Untere Grenze für Fall 1 Ratcheting:

$$4 \frac{\sigma_t}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_y} \right) = \left(1 - \frac{\sigma_t}{\sigma_y} \right) \quad (\text{F.29})$$

3. Grenze für Fall 2 Ratcheting:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} \frac{\sigma_p}{\sigma_y} = 2 \quad (\text{F.30})$$

4. Begrenzung des Shakedown, sowohl für Fall 1 als auch für Fall 2 ist:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} = 2 - \frac{\sigma_p}{\sigma_y} \quad (\text{F.31})$$

Die Grenze zwischen den beiden Fällen wird gegeben durch:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_y} \right) = 1 \quad (\text{F.32})$$

In Abbildung F.6 sind die obigen Grenzen in einem Bree-Diagramm veranschaulicht.

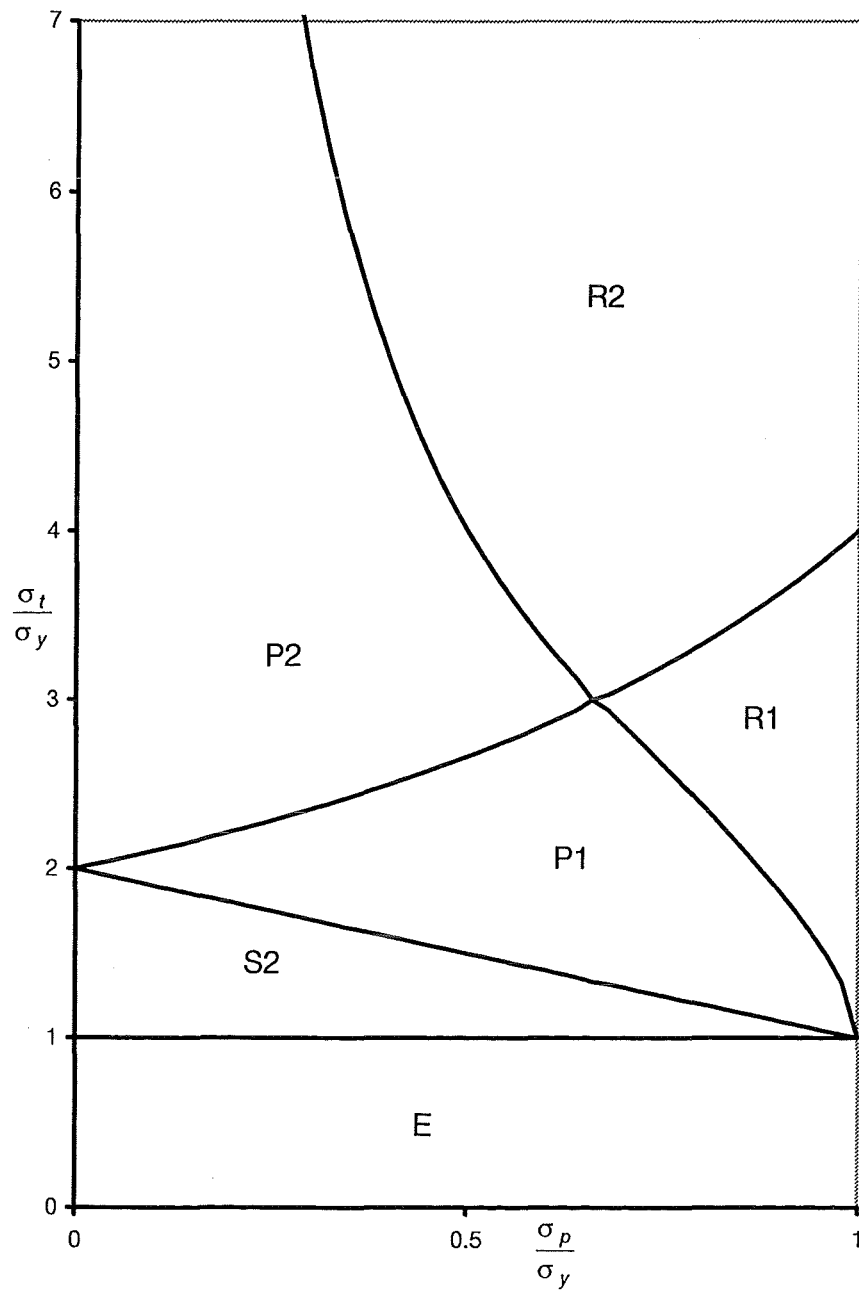


Abbildung F.5: Bree-Diagramm für phasenverschoben zyklierende mechanische und thermische Last

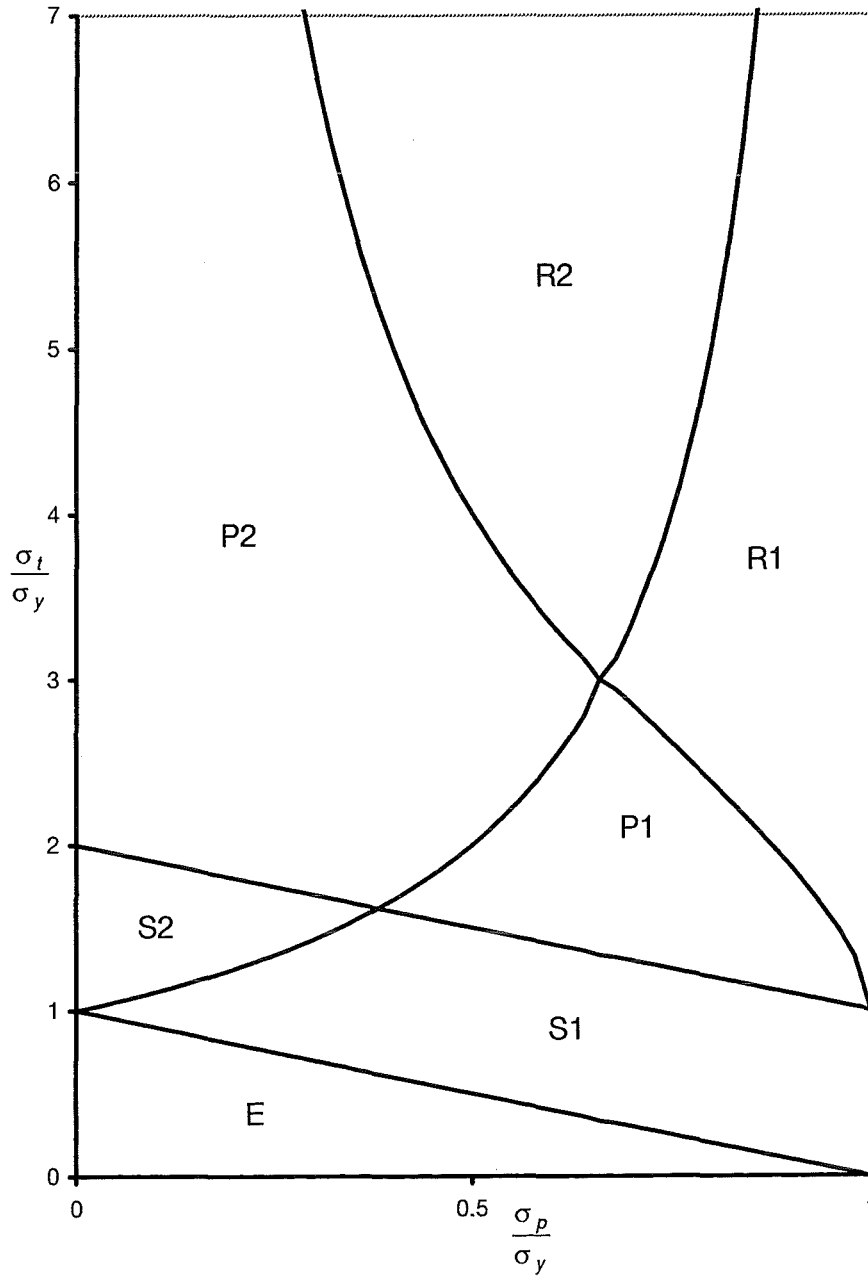
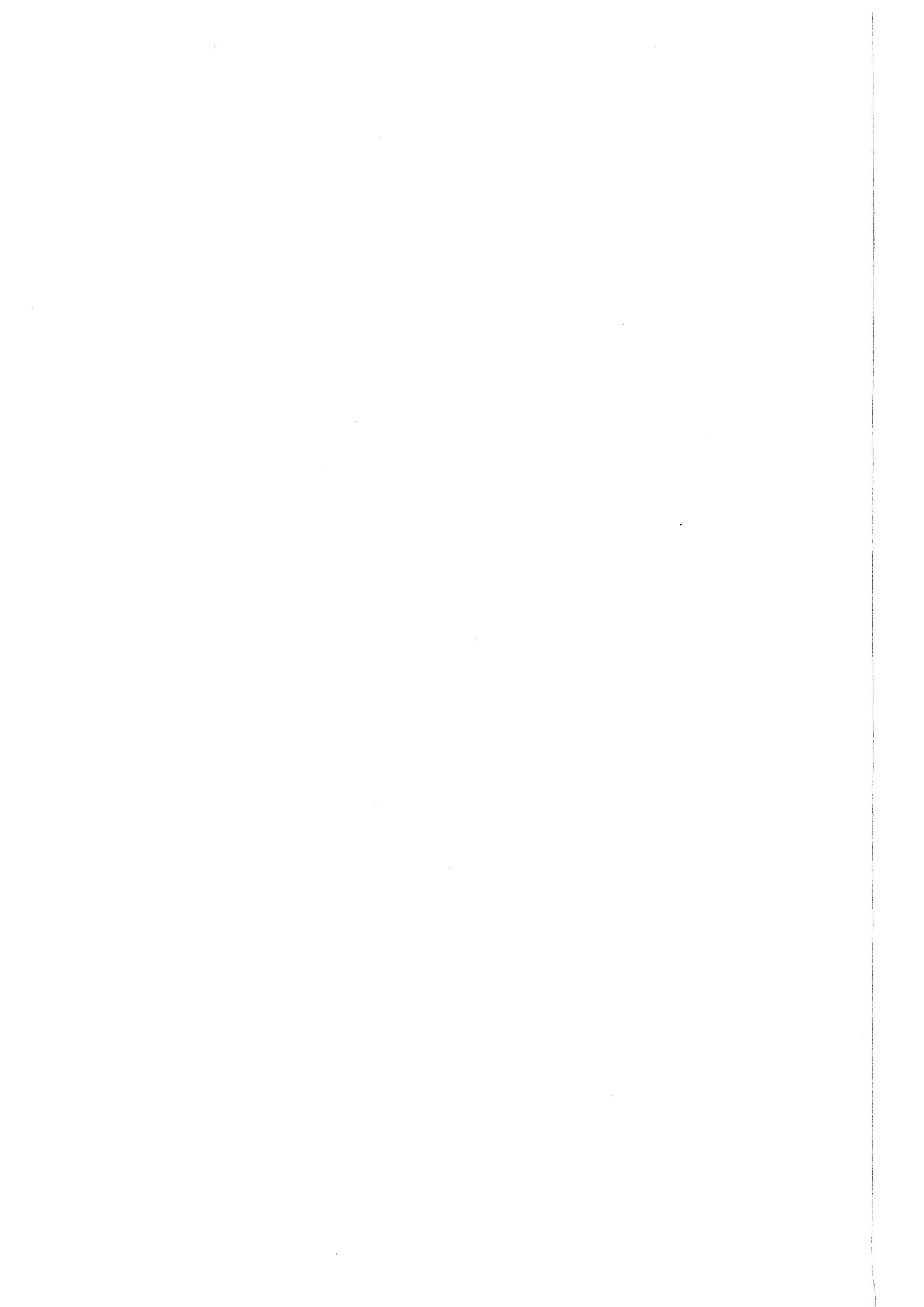


Abbildung F.6: Bree-Diagramm für in Phase zyklierende mechanische und thermische Belastung



Anhang G

Shakedown-Theoreme

G.1 Grundlage der Theoreme

Die Shakedown-Theoreme sind im eigentlichen Sinne eine Erweiterung der Kollaps- oder Tragfähigkeitsanalyse von Strukturen. Sie basieren daher im wesentlichen auf zwei Sätzen [113]:

- Der statische Satz:
Die Traglastintensität ist größer oder höchstens gleich einer beliebigen statisch zulässigen Lastintensität:

$$m_T \geq m_S$$

- Der kinematische Satz:
Die Traglastintensität ist kleiner oder höchstens gleich einer beliebigen kinematisch verträglichen Lastintensität:

$$m_T \leq m_K$$

Dabei sind m_T , m_K und m_S Parameter der Belastung, welche das Vielfache einer statisch und kinematisch zulässigen Belastung darstellen.

Ausgedrückt durch die Extremalprinzipien der Plastizitätstheorie lassen sich die beiden Sätze auch darstellen als:

- Der statische Satz:
Die Intensität der Last $p_i = mp_{i0}$ sei so gewählt, daß in jedem Punkt des Körpers die Bedingung gilt:

$$f(\sigma_{ij}^S, k) \leq 0$$

- Der kinematische Satz:

Kinematisch verträgliche Spannungszustände sind dadurch gekennzeichnet, daß die Arbeit, welche durch die Last $m_K p_{i0}$ während der Verschiebung du_i^k verrichtet wird, mindestens gleich groß oder größer ist als die innere Arbeit, die von den Spannungen σ_{ij}^k bei den Verzerrungsinkrementen ε_{ij}^k geleistet wird.

$$m_K \int_{S_p} p_{i0} du_i^k dS \geq \int_V \sigma_{ij}^k d\varepsilon_{ij}^k dV$$

Die beiden Sätze sind hier nur für ideal-(starr-)plastisches Material und eine einparametrische Lastschar dargestellt, sie gelten aber natürlich ebenso für verfestigendes Material und mehrparametrische und nicht-proportionale Belastungen.

G.2 Die Theoreme

Wie auch in den Sätzen der Tragfähigkeitsanalyse beruhen die Shakedown-Theoreme auf dem Satz der virtuellen Verrückungen und der Minimierung der plastischen Formänderungsenergie. Damit wird gezeigt, daß, wenn eine mögliche Lastkombination, ausgedrückt durch Lastvielfache, eine zu bestimmende Grenze nicht überschreitet, es zu einem Shakedown mit anschließendem elastischen - es gilt auch für plastisches - Zyklieren kommt. Anstelle der Betrachtung einzelner Lastfälle steht die integrale Betrachtung der Menge aller möglichen Belastungsvielfachen. Es muß dann nachgewiesen werden, daß für jeden Belastungspfad die plastische Dissipation begrenzt ist.

Bevor ein kurzer Einblick in die Entwicklung der Shakedown-Theoreme gegeben wird, sollen zuerst die wichtigsten Aussagen zusammengefaßt werden:

- Wird eine Struktur einer Variation von mechanischen und/oder thermischen Spannungen unterworfen, welche sich zwischen vorgeschriebenen Grenzen bewegen, so kann sich ein Zustand einstellen, in welchem keine plastischen Verformungen mehr auftreten. Man spricht dann von einem *Shakedown-Zustand*.
- Wenn ein solcher Shakedown-Zustand existiert, so stellt sich dieser in der Struktur ein, unabhängig vom Ausgangszustand der Struktur.

Einer der Ersten, die ein Shakedown-Theorem aufstellten, war Melan [114]:

Läßt sich ein zeitunabhängiger Eigenspannungszustand $\bar{\rho}_{ij}(x_i)$ finden, der außer den Gleichgewichtsbedingungen unter Berücksichtigung aller während des Belastungsvorganges möglichen Lastkombinationen

und Intensitäten in allen Punkten des Körpers auch die Fließbedingung $f[(\sigma_{ij}^e + \bar{\rho}_{ij}, k)] \leq 0$ erfüllt, dann bildet der Körper einen, mit dem Spannungszustand $\bar{\rho}_{ij}$ nicht unbedingt identischen Restspannungszustand, der das Einspielen (Shakedown) des Körpers zur Folge hat, so daß bei weiteren Belastungen nur noch elastische Verformungen auftreten.

Liegt kein solcher Spannungszustand vor, so ist das Einspielen des Körpers nicht möglich. Dabei ist σ_{ij}^e ein fiktiver, für einen linear-elastischen Körper berechneter Spannungszustand und $\bar{\rho}_{ij}$ die Abweichung dieses Spannungszustandes vom realen Spannungszustand.

Dieses Shakedown-Theorem wurde von Melan allerdings nur für ein Stabwerk bewiesen.

Melan's Theorem bildet die Grundlage für mehrere Untersuchungen für ähnliche Strukturen, wobei verschiedene Beweisführungen angebracht wurden, siehe z.B. [115]. Ein allgemeineres Shakedown-Theorem für Kontinua wurde von König in [116] formuliert:

Existiert ein zeitunabhängiges Residuen-Spannungsfeld $\bar{\rho}_{ij}$ und eine reale Zahl $\mu > 1$, so daß

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{ij,j} &= 0 \quad \text{in } V \\ \bar{\rho}_{ij}n_j &= 0 \quad \text{auf } S \\ \dot{\bar{\rho}}_{ij} &= 0 \quad \text{für } t \geq 0 \\ \int_V E_{ijkl}^{-1} \bar{\rho}_{ij} \bar{\rho}_{kl} dV &< \infty \\ \max_{x \in V} \max_{\beta_S \in \Omega} \frac{f(\sigma_{ij}^E + \bar{\rho}_{ij})}{k(x)} &\leq \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

so kommt es zum Shakedown der Struktur entlang jedes Belastungspfades β_S , der im Belastungsbereich Ω enthalten ist.

Der letzte Term beschreibt die Begrenztheit der Dissipation bei plastischen Verformungen. Das heißt, daß ein Endzustand mit einer Spannungsverteilung $\bar{\rho}_{ij}$ erreicht wird, unabhängig vom Ausgangszustand.

Mit diesem Theorem ist es möglich, für alle möglichen Belastungszustände eine elastische Analyse durchzuführen. Zum anderen ist mit

$$\max_{x \in V} \max_{\beta_S \in \Omega} \frac{f \sum_{s=1}^r [\beta_s \sigma_{ij}^{Es}(x) + \bar{\rho}_{ij}(x)]}{k(x)} \leq 1$$

¹Beweis siehe ebenfalls [116]

die Konstruktion eines Residuen-Spannungsfeldes zur Minimierung der linken Seite der obigen Gleichung möglich.

Ist das Residuenfeld bekannt, so kann man mit Hilfe dessen Grenzen für die Lastfälle berechnen, die zu einem Shakedown führen.

Ein speziell für zyklisch verfestigende Materialien geltendes Theorem stammt von Ponter [117]. Er trifft eine Unterscheidung zwischen Fällen, in denen selbst bei hohen thermischen Spannungen kein Ratcheting auftreten kann und solchen, bei denen selbst bei kleinen mechanischen Spannungen die thermischen Spannungen zu diesem Effekt führen können. Das Bree-Problem gehört zur ersten Kategorie, während bei der zweiten Kategorie Versagen durch lokales anstelle des globalen Ratcheting auftritt. Weiterhin zeigt er, daß selbst bei Annahme ideal-plastischen Materials die Auslegung nach Bree zu nicht-konservativen Ergebnissen führen kann. Auch führt die Beschränkung auf dünne Schalen zur Vernachlässigung der Scherspannungen, was vor allem bei FE-Berechnungen mit Schalenelementen zu falschen Ergebnissen führen kann, da gezeigt wird, daß diese zu einem lokalen Ratcheting führen können [118]. In einer weiteren Arbeit beschäftigte Ponter sich mit dem Problem des Shakedown, auch unter Berücksichtigung des Kriechens [119].

Ainsworth untersucht obere Schranken für kriechende Strukturen unter Ratcheting-Bedingungen, sowohl für ideal-plastisches als auch für kinematisch verfestigendes Material [120, 121].

Polizzotto unterscheidet zwischen *elastischem* und *plastischem Shakedown*, wobei der plastische Shakedown nach der Übergangsphase mit einer Akkumulation plastischer Verformungen in den Zustand alternierender Plastizität übergeht. Im Unterschied dazu ist der Endzustand beim elastischen Shakedown durch elastisches Zyklieren definiert. Polizzotto stellt statische und kinematische Shakedown-Theoreme auch für den Fall des plastischen Shakedowns auf und zeigt die Grenzen dieses Zustandes zum Ratcheting-Verhalten [122, 123, 124, 125, 126].

Für den hier diskutierten Fall des Balken-Ratcheting ist vor allem die Formulierung und Erweiterung von Frederick und Armstrong [68] wichtig. In dieser Arbeit wird ein generelleres Theorem aufgestellt, welches sich mit der Konvergenz der internen Spannungen beschäftigt:

- Unterscheiden sich zwei Körper nur durch die ursprüngliche Spannungsverteilung, so werden sie in Bereichen des Kriechens oder plastischer Verformungen eine identische Spannungsverteilung anstreben, wenn sie den gleichen Variationen

von Lasten und Temperaturen unterworfen werden.

Auch für den Spannungszustand innerhalb eines Körpers wird eine Aussage über einen Shakedown-Zustand gemacht:

- Das wiederholte Aufbringen eines Lastzyklus modifiziert die Spannungen in einem Körper so, daß sie zu einem konstanten zyklischen Spannungszustand, *steady state*, konvergieren.
- Ein konstanter zyklischer Spannungszustand ist definiert als ein Zustand in welchem die Spannungen vor und nach dem Aufbringen eines Lastzyklus die gleichen sind, d.h. es findet keine Änderung der Nettospannung statt.

In einer Arbeit von Panzeca [127] wird gezeigt, daß dynamische Belastungen als quasi-statisch betrachtet werden können, ohne etwas an der Aussage des Shakedown-Theorems zu ändern. Ho [128] zeigt, daß die Shakedown-Theoreme auch für dynamische Probleme unter Berücksichtigung der Trägheitseffekte gültig sind.

Corradi und De Donato berücksichtigen geometrische Effekte zweiter Ordnung [129].

Auch für zweidimensionale Probleme, wie z.B. für Schalen wurden spezielle Shakedown-Theoreme hergeleitet und numerisch überprüft [130].

Zum anderen müssen, wie auch für die Beschreibung des Ratcheting-Verhaltens, die Stoffgesetze so angepaßt werden, daß sie für zyklisches Plastifizieren das Shakedown-Verhalten richtig wiedergeben können, siehe z.B. [131].

Einen Vergleich von Shakedown-Theoremen durch Aufteilung der Deformationen gibt Referenz [132] wieder.

G.3 Anwendung der Theoreme

Bei der plastischen Analyse zur Auslegung von Bauteilen unter zyklischen Belastungen ist die Shakedown-Analyse ein bekanntes Instrument, (Anhang B). Die Verwendung dieser Analyse-Methode beruht auf den Shakedown-Theoremen, welche für unterschiedlichste Lastkombinationen hergeleitet wurden und zum Teil auch experimentell verifiziert wurden. Sie geben die Möglichkeit, eine Aussage über das zyklische Verhalten einer Struktur zu machen, ohne eine inkrementelle Betrachtung erstellen zu müssen. An deren Stelle tritt die Bestimmung eines Residuenspannungs-Feldes, welches nach einer zu bestimmenden Zyklenzahl zu einem Shakedown der Struktur führt. Eine Möglichkeit zur Bestimmung dieses Feldes mittels elastischer Analysen beschreibt [133].

Ist dieser Zustand erreicht spricht man von einem "steady state", einem Endzustand,

in dem keine Netto-Zunahme der plastischen Verformungsinckremente stattfindet. Diesem voraus geht der Übergangsbereich, in welchem sich die plastischen Verformungen akkumulieren. Sie liefern damit eine Aussage über jene Lasten, welche nicht zu Ratcheting bzw. einem alternierenden Plastifizieren und damit zu Kurzzeit-Ermüdung führen.

Die Shakedown-Theoreme finden vor allem in einfachen Geometrien Anwendung: Cohn und Abdel-Rohman [134] nutzen numerische Methoden um zu einer Shakedown-Aussage für elastisch-plastische Bögen unter proportionaler Belastung durch Biegemomente und Axialkräfte zu kommen. Dafür linearisieren sie sowohl die Geometrie, als auch die Fließfläche. Zur Bestimmung der Shakedown-Lastfaktoren benutzen sie das statische Theorem der Shakedown-Analyse. Mit dem gleichen Problem beschäftigt sich auch Loi [135]. In einem weiteren Bericht beschreibt er eine numerische Methode zur Anwendung der Theoreme durch eine Bestimmung der Fließflächen in Abhängigkeit von der Lastzyklenzahl [136]. Nonaka [137] untersucht eine Rahmenstruktur unter konstanter Vertikallast durch das Eigengewicht und überlagerter zyklischer Horizontalkräfte. Er beschränkt sich dabei auf ideal-plastisches Materialverhalten.

Für Platten untersuchen Alwis und Grundy [138] sowohl das Shakedown- als auch das Ratcheting-Verhalten mittels numerischer Methoden.

Shakedown in Stäben, wie sie auch im Typ-I Ratcheting auftreten untersucht P.D. Chinh [139]. Er berücksichtigt dabei auch die Temperaturabhängigkeit der Fließspannung, welche die für die Shakedown-Betrachtungen wichtigen Spannungs-Residuen beeinflusst.

Buckthorpe und White entwickeln auf der Grundlage der Shakedown-Theoreme eine numerische Methode, welche implementiert in FE-Programme, zu einer Recheneinsparnis führen kann, da schon mit wenigen Zyklen aus der Berechnung der Eigenspannungen Vorhersagen über das Strukturverhalten nach großen Zyklenzahlen gemacht werden können [140].

Moreton und Moffat [141] verifizierten ihre Spannungs-Verformungs-Berechnungen für drei Komponenten aus rostfreiem Stahl, welche einer zyklierenden Druckbeanspruchung ausgesetzt wurden, anhand von Experimenten. Sie benutzten dazu ein Fließflächenmodell, welches aus Material-Tests des entsprechenden Stahles abgeleitet wurde. Sie erzielten damit eine Abweichung von nur 9% von den experimentellen Ergebnissen bei einem Shakedown-Faktor - Verhältnis des Shakedown-Druckes zum Druck, der erstes Fließen veranlaßt - von 1,66 bei einer 0,1%igen Dehngrenze.