http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 13, 7 pp., *27.06.2002*

Ein Vektorraumisomorphismus vom Summentyp

Hans-Heinrich Kairies und Peter Volkmann

Abstract. Let $D = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\varphi(2^k x)$ converges for every $x \in \mathbb{R}\}$. The set B of bounded real functions and the set C of bounded, continuous real functions are subspaces of D. Up to now, the operator given by

$$F[\varphi](x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\varphi(2^k x)$$

had been investigated on B, C and on related spaces of simple structure. In this note we discuss F on D, its maximal possible real domain. We give a characterization of D together with some applications, and we describe eigenvalues and eigenfunctions of the operator $F : D \to F[D]$.

Mathematics Subject Classification 2000. Primary 47B38 Operators on function spaces; Secondary 39B22 Functional equations for real functions.

1. Einleitung. Es ist seit langem bekannt [3], daß der durch

$$F[\varphi](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi(2^k x)$$

gegebene Operator stetige, nirgends differenzierbare (snd) Funktionen erzeugt. Für $\varphi(x) = \cos 2\pi x$ ergibt sich eine Funktion $F[\varphi]$ vom Weierstraßschen Typ, deren snd-Eigenschaft von Hardy [2] bewiesen wurde. Für $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$ ist $F[\varphi]$ die bekannte Funktion von Takagi [7], die auch von de Rham [5] untersucht wurde.

In [3] und [4] wurde gezeigt, daß F ein stetiger Automorphismus des Banachraumes B der beschränkten reellen Funktionen ist, und es wurden Spektraleigenschaften von F und seinen Restriktionen auf verschiedene Unterräume von B ermittelt.

Schließlich spielt F eine Rolle bei Untersuchungen zur Stabilität im Sinne von Pólya-Szegő-Hyers-Ulam. Man vergleiche dazu etwa das in [4] diskutierte Resultat von Gajda [1] sowie die neueren Ergebnisse von Tabor [6]; letztere sind in [8], [9] verallgemeinert worden.

In der vorliegenden Note wird der Definitionsbereich von F erweitert: Wir betrachten $F : D \to F[D]$ mit

$$D = \{\varphi : I\!R \to I\!R\,;\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi(2^k x) \text{ konvergiert für jedes } x \in I\!R\}.$$

Diese Menge ist ein maximaler sinnvoller Definitionsbereich innerhalb der Theorie der reellen Funktionen. Es ist klar, daß $B \subset D$ gilt und daß D sowie $F[D]$ reelle Vektorräume sind. Im Folgenden ist $I\!N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Satz 1. a) *Für $\varphi \in D$ erfüllt $\psi = F[\varphi]$ die nachstehende Funktionalgleichung vom de Rhamschen Typ:*

$$\psi(x) - \tfrac{1}{2}\psi(2x) = \varphi(x) \quad (x \in I\!R). \tag{1}$$

b) *Es sei $\varphi \in D$. Dann hat* (1) *höchstens eine für $|x| \to \infty$ beschränkte Lösung, und zwar $\psi = F[\varphi]$.*
c) *$F : D \to F[D]$ ist ein Vektorraumisomorphismus.*
d) *$D \subset F[D]$ und $D \neq F[D]$.*

Beweis. a) ergibt sich aus

$$\frac{1}{2}F[\varphi](2x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(2x) + \frac{1}{2}\varphi(2^2x) + \frac{1}{2^2}\varphi(2^3x) + \ldots\right] = F[\varphi](x) - \varphi(x).$$

b) Für eine Lösung ψ von (1) liefert Iteration

$$\psi(x) = \frac{1}{2^n}\psi(2^n x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\varphi(2^k x) \quad (n \in I\!N, x \in I\!R).$$

Ist ψ beschränkt für $|x| \to \infty$, so strebt der erste Summand gegen Null, der zweite gegen $F[\varphi](x)$.
c) Linearität und Surjektivität sind klar, die Injektivität ergibt sich aus a): Ist $\varphi \in D$ und $\psi(x) = F[\varphi](x) = 0$ für alle $x \in I\!R$, so folgt mit (1) auch $\varphi(x) \equiv 0$.
d) Es sei $\varphi \in D$. Für $g(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(2x)$ $(x \in I\!R)$ folgt dann

$$F[g](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left[\varphi(2^k x) - \frac{1}{2}\varphi(2^{k+1}x)\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi(2^k x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\varphi(2^{k+1}x) = \varphi(x),$$

also $\varphi = F[g]$ mit $g \in D$, d.h. $\varphi \in F[D]$. Die zweite Aussage ergibt sich durch Angabe eines $\widetilde{\psi} \in F[D] \setminus D$. Dazu sei $\widetilde{\varphi} : I\!R \to I\!R$ definiert durch

$\widetilde{\varphi}(1) = -1, \widetilde{\varphi}(2^n) = 2^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ für $n \in I\!N, \widetilde{\varphi}(x) = 0$ sonst. Man prüft leicht nach, daß $\widetilde{\psi} = F[\widetilde{\varphi}]$ auf ganz $I\!R$ erklärt ist, und zwar durch $\widetilde{\psi}(2^n) = 2^n/n$ für $n \in I\!N, \widetilde{\psi}(x) = 0$ sonst. Wegen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\widetilde{\psi}(2^k \cdot 1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ ist $\widetilde{\psi}$ kein Element von D. ■

Zu Satz 1 sei bemerkt: Läßt man in b) beliebige unbeschränkte Lösungen von (1) zu, so geht die Eindeutigkeit verloren: Für $\varphi(x) \equiv 0$ etwa liefert $\psi(x) = \alpha x$ für jedes reelle α eine Lösung.

Bisher wurden in der Literatur Fälle betrachtet, in denen F auf B oder einfach strukturierten Unterräumen (wie stetigen, absolutstetigen bzw. analytischen $\varphi : I\!R \to I\!R$) operiert. Im Gegensatz dazu ist eine einfache Beschreibung von D durch Standard-Regularitätsbedingungen nicht möglich: Einerseits existieren sehr reguläre $\varphi : I\!R \to I\!R$, die nicht in D liegen, wie etwa $\varphi(x) = \alpha x$ mit $\alpha \neq 0$. Andererseits existieren extrem irreguläre $\varphi \in D$; dazu geben wir nun zwei Teilmengen D_1, D_2 von D an, in welchen Funktionen liegen, die auf jeder Menge positiven Lebesgueschen Maßes unbeschränkt (und damit nicht meßbar) sind.

Es bestehe D_1 aus denjenigen $\varphi : I\!R \to I\!R$, für welche $\varphi(x) = a(\log|x|)$ $(x \neq 0)$ mit einer additiven Funktion $a : I\!R \to I\!R$ gilt. Für $x \neq 0$ folgt dann

$$\begin{aligned} F[\varphi](x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} a(\log|2^k x|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} a(\log 2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} a(\log|x|) \\ &= 2a(\log 2) + 2a(\log|x|) = 2a(\log|2x|) = 2\varphi(2x), \end{aligned}$$

also ist $\varphi \in D$. ($F[\varphi](0) = 2\varphi(2 \cdot 0)$ ist ebenfalls erfüllt.)

Es sei $\varphi \in D_2$ genau dann, wenn $\varphi(x) = \varphi(2x)$ $(x \in I\!R)$ gilt. Dann folgt

$$F[\varphi](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi(x) = 2\varphi(x);$$

jedes $\varphi \in D_2$ mit $\varphi(x) \not\equiv 0$ ist also Eigenfunktion von F zum Eigenwert 2. Die Elemente von D_2 lassen sich wie folgt erhalten: Man wähle $\varphi(t) \in I\!R$ für $t = 0$ und für $t \in J := (-2, 1] \cup [1, 2)$ beliebig, und man setze mit $\varphi(x) = \varphi(2x)$ (eindeutig) auf ganz $I\!R$ fort.

In Abschnitt 2 werden wir eine Charakterisierung von D nebst Anwendungen geben. Die Charakterisierung gestattet z. B. einen sehr übersichtlichen Vergleich von D_2 mit D: In der Tat ist D_2 eine sehr kleine Teilmenge von D.

In Abschnitt 3 werden Eigenwerte und Eigenräume von $F : D \to F[D]$ angegeben. Diese unterscheiden sich wesentlich von denen für den Fall $F : B \to B$, der in [4] behandelt wurde.

2. Charakterisierung von $\boldsymbol{D}$ mit Anwendungen. Wie oben sei $J = (-2,-1] \cup [1,2)$. Für jedes $x \neq 0$ existiert dann genau ein $z(x) \in \mathbb{Z}$, so daß $\tau(x) := 2^{-z(x)} \cdot x \in J$ gilt. Wir haben

(2) $\qquad \tau(2^k x) = \tau(x),\ z(2^k x) = z(x) + k \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0, k \in \mathbb{Z}),$

wobei die zweite Formel sich aus $2^{-z(2^k x)+k} \cdot x = 2^{-z(2^k x)} \cdot 2^k x \in J$ ergibt.

Satz 2. *Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\varphi \in D$ zu folgender Bedingung äquivalent:*
(A) *Jedem $t \in J$ ist eine Folge $(a_m^t)_{m\in\mathbb{Z}}$ mit konvergenter Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^t$ zugeordnet, und für $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ gilt $\varphi(x) = 2^{z(x)} \cdot a_{z(x)}^{\tau(x)}$.*

Beweis. Es sei $\varphi \in D$. Setzt man $a_m^t = (1/2^m)\varphi(2^m t)$ $(t \in J, m \in \mathbb{Z})$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi(2^k t)$ konvergent $(= F[\varphi](t))$, und für $x \neq 0$ gilt $\varphi(x) = \varphi(2^{z(x)} \cdot \tau(x)) = 2^{z(x)} \cdot a_{z(x)}^{\tau(x)}$; das beweist (A).

Nun werde (A) vorausgesetzt. Für $x \neq 0$ ist $t := \tau(x) \in J,\ m := z(x) \in \mathbb{Z}$ und $\varphi(x) = 2^m \cdot a_m^t$, also nach (2) $\varphi(2^k x) = 2^{m+k} a_{m+k}^t$. Somit wird

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi(2^k x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^{m+k} a_{m+k}^t = 2^m \sum_{k=m}^{\infty} a_k^t$$

eine nach Voraussetzung konvergente Reihe, also ist $\varphi \in D$. ■

Die unterschiedlichen Freiheitsgrade bei der Wahl von $\varphi(2^m t)$ $(t \in J, m \in \mathbb{Z})$ für $\varphi \in D$ bzw. für $\varphi \in D_2$ (bezüglich D_2 vgl. die Einleitung) treten nun klar in Erscheinung: Im ersten Falle wird t eine reelle Folge $(a_m^t)_{m\in\mathbb{Z}}$, im zweiten lediglich eine reelle Zahl zugeordnet.

Mit Hilfe des nachfolgenden Satzes läßt sich (die nach Satz 1d nichtleere Menge) $F[D] \setminus D$ charakterisieren.

Satz 3. *Es sei $\varphi \in D$ gemäß* (A) *gegeben. Es folgt $\psi := F[\varphi] \in D$ genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^t$ für jedes $t \in J$ konvergiert.*

Beweis. Es sei $t \in J$. Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^t$ konvergent, und $b_n^t := \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^t$ existiert für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ferner haben wir $\varphi(2^k t) = 2^k a_k^t$ und $\psi(2^n t) =$

$2^n \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^t = 2^n b_n^t$. Damit ist $F[\psi](t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\psi(2^n t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^t$ (falls Konvergenz vorliegt). $F[\psi](t) \in I\!R$ gilt also genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^t$ konvergiert. Schließlich gilt $F[\psi](x) \in I\!R$ für $x = 2^m t$ ($m \in \mathbb{Z}$) genau dann, wenn $F[\psi](t) \in I\!R$ ist: $F[\psi](x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\psi(2^{n+m}t) = 2^m \sum\limits_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k}\psi(2^k t)$. ■

Das in Satz 3 angegebene Kriterium kann in gewissen Situationen handlicher formuliert werden. Dazu sei $A_m^t = \sum\limits_{k=0}^{m}(k+1)a_k^t$ und $B_m^t = \sum\limits_{k=0}^{m-1}(k+1)a_k^t +$ $+(m+1)\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k^t$. Es folgt $B_m^t - A_m^t = (m+1)\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k^t$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^t = \lim\limits_{m\to\infty} B_m^t$. Damit ergibt sich die folgende Ergänzung zu Satz 3:

Es sei $\varphi \in D$ gemäß (A) *gegeben, und es gelte (zusätzlich) $\lim\limits_{m\to\infty} m \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k^t \in I\!R$ für alle $t \in J$. Es folgt $F[\varphi] \in D$ genau dann, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k^t$ für jedes $t \in J$ konvergiert.*

Wir beschließen den Abschnitt mit einem Beispiel: Es sei $a_m^1 = 0$ für $m < 0, a_0^1 = -1, a_m^1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$ für $m \geq 1$, sowie $a_m^t = 0$ für alle $t \in J \setminus \{1\}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^t$ für alle $t \in J$, also wird durch $\tilde{\varphi}(x) = 2^{z(x)} a_{z(x)}^{\tau(x)}$ ($x \neq 0$) und $\tilde{\varphi}(0) = 0$ ein $\tilde{\varphi} \in D$ definiert. Hier ist $\lim\limits_{m\to\infty} m \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k^t \in I\!R$ für jedes $t \in J$. Wegen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k^1 = \infty$ liefert unsere Ergänzung zu Satz 3, daß $\tilde{\psi} := F[\tilde{\varphi}] \notin D$ gilt. Die hier betrachteten Funktionen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ sind übrigens dieselben wie diejenigen im Beweise zu Satz 1d.

3. Eigenwerte und Eigenräume von *F*. Wir bezeichnen die Menge der Eigenwerte von $F : D \to F[D]$ mit $\sigma_p(F)$ und den zu $\lambda \in \sigma_p(F)$ gehörenden Eigenraum mit $E(F,\lambda)$. In [4] wurde gezeigt, daß $F : B \to B$ nur die Eigenwerte 2 und $\frac{2}{3}$ besitzt. Nun hat die Erweiterung des Definitionsbereiches von F eine erhebliche Vergrößerung des Punktspektrums zur Folge.

Satz 4. *Für $F : D \to F[D]$ ist $\sigma_p(F) = (\frac{1}{2}, \infty) \setminus \{1\}$, und für $\lambda \in \sigma_p(F)$ gilt*

$$E(F,\lambda) = \{\varphi : I\!R \to I\!R\,; \varphi(x) = \frac{\lambda}{2(\lambda-1)}\varphi(2x)\ (x \in I\!R)\}.$$

Beweis. Es sei φ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda, \varphi(x) \not\equiv 0$. Dann ist $\varphi \in D$ und $\psi = F[\varphi] = \lambda\varphi \in D$. Nach Satz 1a gilt $\psi(x) - \frac{1}{2}\psi(2x) = \varphi(x)$, also $\lambda\varphi(x) - \frac{1}{2}\lambda\varphi(2x) = \varphi(x)$, also $(\lambda-1)\varphi(x) = \frac{1}{2}\lambda\varphi(2x)$. Wegen $\varphi(x) \not\equiv 0$ ist $\lambda \neq 0, 1$, und es folgt

$$(3_\lambda) \qquad \varphi(x) = \frac{\lambda}{2(\lambda-1)}\varphi(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Andererseits sei nun $\varphi \in D, \varphi(x) \not\equiv 0$, eine Lösung der Schröderschen Funktionalgleichung (3_λ) für ein $\lambda \neq 1$. Mit $\gamma := \lambda/2(\lambda-1)$ liefert (3_λ) (durch Iteration) $\varphi(x) = \gamma^k\varphi(2^k x)$ $(x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N})$. Wegen $\varphi \in D$ konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\varphi(2^k x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\gamma)^k}\varphi(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, aber das ist genau dann der Fall, wenn $|2\gamma| > 1$, also $|\lambda| > |\lambda - 1|$, also $\lambda > \frac{1}{2}$ ist. Wir haben somit $\sigma_p(F) = (\frac{1}{2}, \infty) \setminus \{1\}$ und $E(F,\lambda) = \{\varphi \in D\,; (3_\lambda)\} = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; (3_\lambda)\}$ (denn eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von (3_λ) mit $\lambda \in \sigma_p(F)$ liegt notwendigerweise in D). ■

Die Eigenfunktionen können auf J (im Falle $\lambda \in \sigma_p(F)\setminus\{2\}$) bzw. auf $J \cup \{0\}$ (für $\lambda = 2$) beliebig vorgegeben werden und sind dann mit Hilfe von (3_λ) auf ganz $\mathbb{R}$ fortzusetzen.

Literatur

[1] Zbigniew Gajda: *On stability of additive mappings.* Internat. J. Math. Math. Sci. **14**, 431-434 (1991).

[2] Godfrey Harold Hardy: *Weierstrass's non-differentiable function.* Trans. Amer. Math. Soc. **17**, 301-325 (1916).

[3] Hans-Heinrich Kairies: *On a Banach space automorphism and its connections to functional equations and continuous nowhere differentiable functions.* Ann. Acad. Paedagog. Cracoviensis **4**, 39-48 (2001).

[4] —: *Properties of an operator acting on the space of bounded real functions and certain subspaces.* Functional Equations – Results and Advances, herausgegeben von Zoltán Daróczy and Zsolt Páles, Kluwer Dordrecht, 175-186 (2002).

[5] Georges de Rham: *Sur un exemple de fonction continue sans dérivée.* Enseignement Math., II. Sér. **3**, 71-72 (1957).

[6] Jacek Tabor: *Ideally convex sets and Hyers theorem.* Funkcialaj Ekvac. **43**, 121-125 (2000).

[7] Teiji Takagi: *A simple example of the continuous function without derivative.* Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, II. Ser. **1**, 176-177 (1903).

[8] Peter Volkmann: *Zur Rolle der ideal konvexen Mengen bei der Stabilität der Cauchyschen Funktionalgleichung.* Sem. LV, http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv, No. 6, 6pp. (1999).

[9] —: *O stabilności równań funkcyjnych o jednej zmiennej.* Ibid. No. 11, 6 pp. (2001).

Typoskript: Marion Ewald.

Adressen der Autoren:

H.-H. Kairies, Institut für Mathematik, TU Clausthal, Erzstr. 1, 38678 Clausthal-Zellerfeld, Deutschland.

P. Volkmann, Mathematisches Institut I, Universität, 76128 Karlsruhe, Deutschland.