Positive Invarianz für gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

von der Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. oec. Abdirisak Mohamed
aus Iskushuban

Tag der mündlichen Prüfung:	23.06.1999
Referent:	Prof. Dr. Peter Volkmann
Korreferent:	Prof. Dr. Roland Lemmert

Herrn Professor Dr. Peter Volkmann danke ich für die Themenstellung und Betreuung dieser Arbeit und für sein Wohlwollen während meiner ganzen Studienzeit.
Ebenso danke ich Herrn Professor Dr. Roland Lemmert für seine Unterstützung durch wertvollen Hinweise und Diskussionen bei dieser Arbeit.

Mein Dank gilt auch Frau Dipl.-Geoökol. Marion Ewald, die das Manuskript in eine druckfertige Form brachte, und Herrn Dipl.-Math. Helge Keller für das Korrekturlesen.

Für Inspiration und Rückhalt danke ich meiner Familie:
Sohn Liban (4 Jahre), Tochter Ladan (2 Jahre) und Ehefrau Hamdi.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es seien E ein reeller Banachraum, $\mathbb{R}$ der Bereich der reellen Zahlen, $F \subseteq G \subseteq \mathbb{R} \times E$ und $f : G \to E$. Ferner sei die Differentialgleichung

$$u' = f(t, u) \tag{1}$$

gegeben. Wir interessieren uns für Bedingungen, unter denen gilt:
Ist $u : [\tau, T) \to E$ eine Lösung von (1) mit $(\tau, u(\tau)) \in F$, so ist
$(t, u(t)) \in F$ für $\tau < t < T$.
Solche F nennen wir positiv invariant.

Nagumo [16] gab 1942 hinreichende und notwendige Bedingungen für die positive Invarianz abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, wenn die rechte Seite f in (1) stetig ist. Es besteht der Eindruck, daß diese grundlegende Arbeit eine Zeit lang unbekannt blieb. Eine Reihe von Arbeiten (unabhängig von Nagumo) erschien in den 60er und 70er Jahren: Bony [5], Brezis [6] und Redheffer [19] (vgl. auch Crandall [7], Hartman [10] und Yorke [33]) behandelten den endlichdimensionalen Fall.

Bei der Übertragung dieser Resultate auf nicht notwendig endlichdimensionale E traten Komplikationen auf. Redheffer und Walter [20] (vgl. auch Volkmann [27],[26]) arbeiteten mit $F = \mathbb{R} \times M$, wobei $M \subseteq E$ eine Distanz-Menge ist, d.h. zu $x \in E$ existiert $\min_{y \in M} \|x - y\|$. Solche M sind stets abgeschlossen; die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht. Ergebnisse für abgeschlossene $M \subseteq E$ bzw. $F \subseteq \mathbb{R} \times E$ findet man bei Volkmann [28] bzw. bei Volkmann und Yiping Lin [30].

Für die Notwendigkeit der Bedingungen benötigt man die Existenz von Lösungen der Differentialgleichung (1).

Falls $\dim E < \infty$ ist, genügt die Stetigkeit der rechten Seite f. Für beliebige E sind weitere Voraussetzungen an f erforderlich, welche das Vorhandensein einer Lösung garantieren (vgl. das Beispiel von Dieudonné [9]).

In dieser Arbeit werden wir unter anderem die positive Invarianz von $F \subseteq G \subseteq \mathbb{R} \times E$ (G offen, F relativ abgeschlossen in G) charakterisieren, wenn E ein beliebiger Banachraum ist, und $f : G \to E$ stetig und α-Lipschitzsch ist, wobei α das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß ist.

In Kapitel 1 werden wir die Hilfsmittel bereitstellen, insbesondere die Eigenschaften des Nichtkompaktheitsmaßes.

Dann geben wir in Kapitel 2 die angekündigte Charakterisierung positiver Invarianz (Satz 2.2) an. Dabei werden wir von den Bedingungen von Nagumo ausgehen. Eine Konstruktion, die auf Okamura [17] zurückgeht, ist grundlegend für den Beweis. Die lokale Kompaktheit des $\mathbb{R}^n$ steht uns nicht zur Verfügung. Daher müssen wir mit geeigneten Mitteln und Überlegungen arbeiten. Wir benutzen das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß (es geht analog mit dem Hausdorffschen) und ein Ergebnis von Ambrosetti [1] (Lemma 1.4). Für Existenzzwecke ziehen wir einen Satz von Szufla [23] heran. Satz 2.6 stellt eine unmittelbare Erweiterung von Satz 2.2 dar.

In Kapitel 3 werden wir zunächst (im Bezug auf Nagumo) die hinreichende Bedingungen bei Redheffer und Walter [20], Volkmann [28], und Volkmann und Yiping Lin [30] erörtern. Dann dehnen wir das Ergebnis in [28] auf bestimmte Teilmengen von $\mathbb{R} \times E$ aus. Als Anwendung betrachten wir ein Beispiel für $E = \ell_\infty$.

Schließlich zeigen wir in Kapitel 4, daß die Invarianzaussage eines Satzes von Max Müller [15] für eine Klasse von Banach-Verbänden gilt, deren Eigenschaften von Shizuo Kakutani [11] untersucht wurden. Wir gehen wie bei Walter [32] vor; an entscheidender Stelle benutzen wir eine Folgerung aus dem Hahn-Banachschen Trennungssatz. Dann betrachten wir die Existenzaussage des Müllerschen Satzes.

Kapitel 1

Hilfsmittel und Bezeichnungen

Es bezeichne E einen reellen Banachraum, $\mathbb{R}$ den Bereich der reellen Zahlen, θ das Nullelement von E, τ, T reelle Zahlen mit $\tau < T$.
Für $f : \mathbb{R} \times E \to E$ und $C \subseteq \mathbb{R} \times E$ schreiben wir

$$f[C] = \{f(t,x) : (t,x) \in C\}.$$

Wir setzen

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{und} \quad \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$$

für $A, B \subseteq E, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$S(x;r) = \{y \in E \mid \|x-y\| \leq r\}, \quad \overset{\circ}{S}(x;r) = \{y \in E \mid \|x-y\| < r\}$$

für $r > 0$.
$\operatorname{diam}(B) = \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in B\}$, falls $B \neq \emptyset$ ist, $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.
$\overline{\operatorname{conv}} B$ bedeutet die abgeschlossene konvexe Hülle von B.

Bekanntlich ist eine Teilmenge B des Banachschen Raumes E relativ kompakt genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ endlich viele Kugeln mit Radius ϵ existieren, so daß deren Vereinigung B überdeckt. Falls B nur beschränkt ist, gibt es eine positive untere Schranke für solche ϵ.

Definition 1.1 *Es sei $\mathcal{B}$ die Familie der beschränkten Teilmengen von E. Dann ist das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß $\alpha : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ definiert für $B \in \mathcal{B}$ durch*

$$\alpha(B) = \inf\{\epsilon > 0 : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i,\ n \in \mathbb{N}, \operatorname{diam}(B_i) \leq \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß des Banachraumes $\mathbb{R} \times E$ mit der Norm $\|(t,x)\| = \max\{|t|, \|x\|\}$ bezeichnen wir auch mit α. Statt α kann auch das "Hausdorffsche" Nichtkompaktheitsmaß genommen werden. In manchen Fällen ist es sogar von Vorteil (vgl. [22]).

Lemma 1.2 *Es gelten:*

(i) $\alpha(B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{B}$ *kompakt* $(B \in \mathcal{B})$.

(ii) $\alpha(\lambda B) = |\lambda|\alpha(B)$ *und* $\alpha(A+B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$ $(A, B \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{R})$.

(iii) $A \subseteq B \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$; $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$ $(A, B \in \mathcal{B})$.

(iv) $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$; $\alpha(\mathrm{conv} B) = \alpha(B)$ $(A, B \in \mathcal{B})$.

(v) $\alpha(J \times B) = \alpha(B)$ *für nichtleere, beschränkte Intervalle* $J \subseteq \mathbb{R}$ *und* $B \in \mathcal{B}$.

(vi) $\alpha(\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda B) = h\alpha(B)$ $(B \in \mathcal{B};\ h, \lambda \in \mathbb{R})$

Für den Beweis verweisen wir auf [3], [8], [22].

Satz 1.3 *Es seien* $J = [\sigma - \ell_1, \sigma + \ell_2] \subseteq \mathbb{R},\ a \in E,\ r > 0$, $f : J \times S(a;r) \to E$ *stetig und* $\|f(t,x)\| \leq c$. *Ferner sei* $k \geq 0$, *so daß* $\alpha(f[J \times B]) \leq k\alpha(B)$ *für* $B \subseteq S(a;r)$ *gilt. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$u(\sigma) = a,\ u' = f(t,u)$$

eine Lösung auf $[\sigma - b_1, \sigma + b_2]$, *wobei* $b_1 \leq \min\{\ell_1, \frac{r}{c}\}$ *und* $b_2 \leq \min\{\ell_2, \frac{r}{c}\}$ *gilt.*

Den Beweis für eine Lösung nach rechts findet man in [23]. Für die Lösbarkeit nach links ist die Transformation $t \to -t$ anwendbar.

Wir werden folgendes Resultat von Ambrosseti [1] benötigen, welches eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Arzelà und Ascoli darstellt.

Lemma 1.4 *Es seien* $\mathcal{W}$ *eine gleichgradig stetige und beschränkte Funktionenfamilie auf dem kompakten Interval* $J \subseteq \mathbb{R}$ *mit Werten in* E, $\mathcal{W}(t) = \{w(t) \mid w \in \mathcal{W}\}$ *für* $t \in J$. *Dann gilt:*

$$\alpha(\mathcal{W}) = \alpha\left(\{w(t) \mid w \in \mathcal{W},\ t \in J\}\right) = \sup\{\alpha(\mathcal{W}(t)) \mid t \in J\}.$$

Kapitel 2

Charakterisierung von positiver Invarianz

Definition 2.1 *Es seien $F \subseteq G \subseteq \mathbb{R} \times E$ und $f : G \to E$. Dann heißt F positiv invariant bezüglich der Differentialgleichung $u' = f(t, u(t))$, falls für jede Lösung $u : [\tau, T) \to E$ mit $(\tau, u(\tau)) \in F$ gilt:*

$$(t, u(t)) \in F \ (\tau \leq t < T).$$

$f : G \to E$ heißt α-Lipschitzsch, wobei α das Kuratowskische Nichtkompaktheitsmaß ist, wenn es ein $k \geq 0$ gibt, so daß gilt:
$\alpha(f[B]) \leq k\alpha(B)$ für beschränkte $B \subseteq G$.

Wir geben nun die angekündigten hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die positive Invarianz an.

Satz 2.2 *Es seien $\emptyset \neq F \subseteq G \subseteq \mathbb{R} \times E$, G offen, F relativ abgeschlossen in G und $f : G \to E$ stetig und α-Lipschitzsch.*
Dann gilt: F ist genau dann positiv invariant, wenn es zu jedem $(\sigma, a) \in F$ eine offene Umgebung Ω in G und eine Funktion $V : \Omega \to [0, \infty)$ gibt, so daß gilt:

(1) V *ist stetig in* Ω.

(2) $|V(t, x) - V(t, y)| \leq \|x - y\| \ ((t, x), (t, y) \in \Omega)$.

(3) $V(t, x) = 0 \ ((t, x) \in \Omega \cap F)$.

(4) $V(t, x) > 0 \ ((t, x) \in \Omega \setminus F)$.

(5) $\overline{D^+}_{[f]} V(t, x) = \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{1}{h} \left(V(t + h, x + hf(t, x)) - V(t, x) \right) \leq 0$
$((t, x) \in \Omega)$.

Beweis: Für die Hinlänglichkeit der Bedingungen sei F nicht positiv invariant. Dann gibt es ein $(t_0, x_0) \in F$ und eine Lösung $u : [t_0, T) \to E$ von $u' = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = x_0$ und $(t_1, u(t_1)) \in G \setminus F$ für ein $t_1 \in (t_0, T)$. Wegen der Abgeschlossenheit von F in G und der Stetigkeit von u existiert

$$t_2 = \max\{t \mid t_0 \leq t < t_1 \ , (t, u(t)) \in F\}.$$

Zu $(t_2, u(t_2)) \in F$ existiert eine Umgebung Ω und eine Funktion V wie in der Voraussetzung. Es folgt $V(t_2, u(t_2)) = 0$ und $V(t, u(t)) > 0$ für $t \in (t_2, t_1]$, $(t, u(t)) \in \Omega$. Andererseits folgt aus (5) und (2), daß $V(t, u(t))$ in t monoton fallend ist. Das ist ein Widerspruch.

Für die Notwendigkeit sei $(\sigma, a) \in F$ und $k \geq 0$ die Konstante für die α-Lipschitzsche Voraussetzung. Dann gibt es $\ell, c > 0$, so daß $2\ell \leq \frac{1}{k+1}$ und $\|f(t,x)\| \leq c$ auf $\Pi = \{(t,x) : \ | \ t - \sigma| \leq \ell, \|x - a\| \leq 6c\ \ell\} \subseteq G$ ist.

Wir setzen $\Omega = \{(t,x) : \ | \ t - \sigma| < \ell, \|x - a\| < c\ \ell\}$.

Für zwei beliebige Punkte $P = (t_P, x_P)$ und $Q = (t_Q, x_Q)$ in $\overline{\Omega}$, so daß $t_P \leq t_Q$, definieren wir die Okamurasche Funktion $D(P, Q)$ wie folgt:
Wir teilen das Intervall $[t_P, t_Q]$ durch $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, so daß $t_{i-1} \leq t_i$, $t_0 = t_P$ und $t_n = t_Q$. $P_i = (t_i, x_i)$ und $Q_i = (t_i, \overline{x_i})$ seien Punkte von $\overline{\Omega}$ auf derselben Hyperebene $t = t_i$ derart, daß Q_{i-1} und P_i auf einer in $\overline{\Omega}$ laufenden Integralkurve liegen, $P_0 = P$ und $Q_n = Q$.

$$D(P,Q) := \inf\{\sum_{i=0}^{n} \|x_i - \overline{x_i}\|, \ n \in \mathbb{N}, \quad P_i = (t_i, x_i) \ \ \textit{und} \\ Q_i = (t_i, \overline{x_i}) \text{ wie oben}\}.$$

Wegen der Lösbarkeit nach beiden Seiten und der Konstruktion von $\overline{\Omega}$ existiert eine für $t \in [\sigma - \ell, \sigma + \ell]$ in $\overline{\Omega}$ laufende Integralkurve, die durch (σ, a) geht (Satz 1.3). Also wird das Infimum nicht über die leere Menge gebildet.

Eigenschaften von $D(P, Q)$ und deren Beweise findet man in Lemma 2.5.
Für $X = (t, x)$ mit $t < t_P$ erweitern wir $D(P, X)$ durch

$$D^*(P,X) = \left\{ \begin{array}{c} D(P,X) \text{ für } t \geq t_P, \\ \|x - x_P\| + c(t_P - t) \text{ für } t < t_P \end{array} \right\} .$$

$D^*(P,X)$ ist dann eine stetige Funktion von (P,X) für $P \in \overline{\Omega}, X \in \overline{\Omega}$. $D^*(P,X)$ erfüllt als Funktion von X (1), (2) und (5) (vgl. Lemma 2.5).

Nun definieren wir $V(t,x) = \inf_{P\in F_1} D^*(P,(t,x))$, wobei $F_1 = F \cap \overline{\Omega}$. Die letztere Menge ist nicht leer, da z. B. (σ, a) darin liegt. Wir werden nachweisen, daß $V(t,x)$ die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Zunächst zeigen wir für $(\overline{t},\overline{x}) \in \Omega$: $V(\overline{t},\overline{x}) = 0 \Longleftrightarrow (\overline{t},\overline{x}) \in F_1$. Damit werden (3) und (4) bewiesen.

($\Longleftarrow$): Einfach. Denn

$$0 \leq V(\overline{t},\overline{x}) = \inf_{P\in F_1} D^*(P,(\overline{t},\overline{x})) \leq D^*((\overline{t},\overline{x}),(\overline{t},\overline{x})) = 0.$$

Also gilt (3).

($\Longrightarrow$): $V(\overline{t},\overline{x}) = 0$. Wir werden nun zeigen, daß $(\overline{t},\overline{x}) \in F_1$ gilt.

Es sei $P_j = (t_{P_j}, x_{P_j}) \in F_1$ eine minimierende Folge, d. h. $D^*(P_j,(\overline{t},\overline{x})) \leq \frac{1}{2j}$ $(j \in \mathbb{N})$.

Fall 1. Es gibt eine Teilfolge $(t_{P_m}) \subseteq (t_{P_j})$ mit $t_{P_m} > \overline{t}$. Dann gilt nach Definition von D^*:

$$\|x_{P_m} - \overline{x}\| + c(t_{P_m} - \overline{t}) = D^*(P_m,(\overline{t},\overline{x})) \leq \frac{1}{2m}.$$

Also konvergieren P_m gegen $(\overline{t},\overline{x})$. Wegen der Abgeschlossenheit von F in G ist dann $(\overline{t},\overline{x}) \in F$. Da $(\overline{t},\overline{x}) \in \Omega$ ist, erhalten wir $(\overline{t},\overline{x}) \in F_1$.

Fall 2. Es sind fast alle $t_{P_j} \leq \overline{t}$. O.B.d.A. seien alle $t_{P_j} \leq \overline{t}$, da die endlichen Ausnahmen uninteressant für den Grenzübergang sind. Dann gilt für beliebiges, aber festes $j \in \mathbb{N}$:

$$D^*(P_j,(\overline{t},\overline{x})) = D(P_j,(\overline{t},\overline{x})) \leq \frac{1}{2j}.$$

Nach Definition von $D(P_j,(\overline{t},\overline{x}))$ existiert eine Zerlegung $Z = \{t_0,\ldots,t_n\}$ von $[t_{P_j},\overline{t}]$ mit zugehörigen $\{x_{P_j} = x_0, \overline{x}_0, x_1, \overline{x}_1, \ldots, x_n, \overline{x}_n = \overline{x}\}$, so daß gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \|x_i - \overline{x_i}\| \leq D(P_j,(\overline{t},\overline{x})) + \frac{1}{2j} \leq \frac{1}{2j} + \frac{1}{2j} \leq \frac{1}{j}.$$

Dabei gibt es Lösungen $u_i(t)$ auf $[t_{i-1}, t_i]$ mit $u_i(t_{i-1}) = \overline{x}_{i-1}$ und $u_i(t_i) = x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Wir setzen $u_0(t_0) = x_{P_j} = x_0$ und $u_{n+1}(t_n) = \overline{x} = \overline{x}_n$. Es sei $U_j(t)$ die Funktion, die auf $(t_i, t_{i+1}]$ mit $u_{i+1}(t)$ übereinstimmt, für $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Es sei $U_j(t_0) = x_{P_j}$. Dann hat $U_j(t)$ höchstens n Unstetigkeitsstellen.

Wir setzen

$$v_j(t) = \sum_{t \leq t_{i-1}} (u_i(t_{i-1}) - u_{i-1}(t_{i-1})) \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Dann ist $w_j(t) = U_j(t) + v_j(t)$ stetig und stückweise differenzierbar. $w_j(t_n) = w_j(\overline{t}) = \overline{x}$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(F_1, (t_{P_j}, w_j(t_{P_j}))) &\leq \|w_j(t_{P_j}) - x_{P_j}\| = \|w_j(t_0) - U_j(t_0)\| \\ &= \|v_j(t_0)\| \\ &\leq \|\sum_{i=1}^{n+1} (u_i(t_{i-1}) - u_{i-1}(t_{i-1}))\| \\ &\leq \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Also,

$$\operatorname{dist}(F_1, (t_{P_j}, w_j(t_{P_j})) \leq \frac{1}{j}.$$

Wir setzen $w_j(t)$ nach links bis $(\sigma - \ell)$ mit einer Lösungkurve fort, die bei $(t_{P_j}, (U_j + v_j)(t_{P_j}))$ beginnt. Diese Lösungskurve verläuft möglicherweise außerhalb $\overline{\Omega}$, bleibt aber in Π nach Konstruktion. Damit erhalten wir für beliebiges $j \in \mathbb{N}$:

$$w_j(t) = \left\{ \begin{array}{c} U_j(t) + v_j(t) = \overline{x} + \int_{\overline{t}}^{t} f(s, U_j(s))\, ds \\ \text{für } t \in [t_{P_j}, \overline{t}\,] \\ \overline{x} + \int_{\overline{t}}^{t_{P_j}} f(s, U_j(s))\, ds + \int_{t_{P_j}}^{t} f(s, w_j(s))\, ds \\ \text{für } t \in [\sigma - \ell, t_{P_j}] \end{array} \right\}. \tag{2.1}$$

Wegen $\alpha(\{w_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = 0$ (Lemma 2.3), existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge von w_j. Ohne Einschränkung seien $w_j \to_{glm} w$ $(j \to \infty)$. Außerdem gilt wegen $t_{P_j} \in [\sigma - \ell, \overline{t}\,]$ für alle $j \in \mathbb{N}$, daß o.B.d.A. $t_{P_j} \to t^\star \in [\sigma - \ell, \overline{t}\,]$ $(j \to \infty)$.

Aus $\mathrm{dist}(F_1,(t_{P_j},w_j(t_{P_j}))) \leq \frac{1}{j}$ und der gleichmäßigen Konvergenz von w_j folgt für $(j \to \infty)$, daß $\mathrm{dist}(F_1,(t^\star,w(t^\star))) = 0$ gilt.
Also ist $(t^\star, w(t^\star)) \in F_1$. Mit w_j konvergiert auch U_j gleichmäßig gegen w, da v_j gleichmäßig gegen Null konvergiert. Aus ($t_{P_j} \to t^\star$, $w_j \to_{glm} w$, $U_j \to_{glm} w$) und (2.1) folgt:

$$w(t) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{x} + \int_{\overline{t}}^{t} f(s,w(s))\,ds \ f\ddot{u}r\ t \in [t^\star, \overline{t}\,] \\ \overline{x} + \int_{\overline{t}}^{t^\star} f(s,w(s))\,ds + \int_{t^\star}^{t} f(s,w(s))\,ds \ f\ddot{u}r\ t \in [\sigma - \ell, t^\star] \end{array} \right\}.$$

Da die Lösungskurve $(t,w(t))$ die Punkte $(t^\star,w(t^\star)) \in F$ und $(\overline{t},\overline{x})$ verbindet, $t^\star \leq \overline{t}$ und F positiv invariant ist, gilt $(\overline{t},\overline{x}) \in F$. Da $(\overline{t},\overline{x}) \in \Omega$ ist, erhalten wir $(\overline{t},\overline{x}) \in F_1$.

$V(t,x)$ ist stetig in Ω. Dazu sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $\hat{P} \in F_1$ derart, daß

$$D^*(\widehat{P},(t,x)) \leq V(t,x) + \epsilon$$

ist. Außerdem gilt

$$V(s,y) \leq D^*(\widehat{P},(s,y))$$

für alle $(s,y) \in \Omega$. Also erhalten wir (vgl. Beweis von Lemma 2.5) :

$$V(s,y) - V(t,x) \leq D^*(\widehat{P},(s,y)) - D^*(\widehat{P},(t,x)) + \epsilon \leq \|x-y\| + c|t-s| + \epsilon,$$

wenn $s \in (t-h,t+h)$, wobei $0 < h < |t - t_{\widehat{P}}|$.

Analog existiert ein $P^* \in F_1$ mit

$$D^*(P^*,(s,y)) \leq V(s,y) + \epsilon$$

und wir erhalten

$$V(t,x) - V(s,y) \leq \|x-y\| + c|t-s| + \epsilon$$

für $s \in (t-h,t+h)$, wobei $0 < h < |t - t_{P^*}|$. Insgesamt ist

$$|V(t,x) - V(s,y)| \leq \|x-y\| + c|t-s| + \epsilon$$

für $s \in (t-h, t+h)$ mit $0 < h < \min\{|t - t_{P^*}|, |t - t_{\widehat{P}}|\}$. Daraus folgt die Stetigkeit von $V(t,x)$.

Für $s = t$ folgt aus dem Obigen:

$$|V(t,y) - V(t,x)| \leq \|x - y\| + \epsilon,$$

also (2).

Schließlich zeigen wir (5) $\overline{D^+}_{[f]} V(t,x) \leq 0$.
Zunächst gilt für beliebige $P \in \overline{\Omega}$ (vgl. Beweis von Lemma 2.5) :

$$D^*(P, (t+h, x + hf(t,x))) - D^*(P, (t,x)) \leq h\|r(h)\|$$
$$mit\; r(h) \to 0 \; (h \searrow 0).$$

Es sei nun $\epsilon > 0$. Dann gibt es wie vorher ein $P(\epsilon)$ mit $D^*(P(\epsilon), (t,x)) \leq V(t,x) + \epsilon$. Außerdem gilt immer $V(t+h, x + hf(t,x)) \leq D^*(P(\epsilon), (t+h, x + hf(t,x)))$. Es folgt

$$\begin{aligned} & V(t+h, x + hf(t,x))) - V(t,x) \\ & \quad \leq D^*(P(\epsilon), (t+h, x+hf(t,x)) - D^*(P(\epsilon), (t,x)) + \epsilon \\ & \quad \leq h\|r(h)\| + \epsilon \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir:

$$V(t+h, x + hf(t,x))) - V(t,x) \leq h\|r(h)\|$$

Daraus folgt (5).

Lemma 2.3 *Es gilt* $\alpha(\{w_n | n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

Beweis: Wir erinnern an (2.1):

$$w_n(t) = \left\{ \begin{array}{c} U_n(t) + v_n(t) = \overline{x} + \int_{\overline{t}}^{t} f(s, U_n(s))\, ds \\ \text{für } t \in [t_{P_n}, \overline{t}\,] \\ \overline{x} + \int_{\overline{t}}^{t_{P_n}} f(s, U_n(s))\, ds + \int_{t_{P_n}}^{t} f(s, w_n(s))\, ds \\ \text{für } t \in [\sigma - \ell, t_{P_n}] \end{array} \right\}. \qquad (2.1)$$

Wegen f beschränkt, ist die Familie $\mathcal{W} = \{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und gleichgradig stetig. Nach Lemma 1.4 ist dann :
$\alpha(\mathcal{W}) = \alpha(\{w_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\,, t \in [\sigma - \ell, \overline{t}]\}) = \alpha(\mathcal{W}(J))$, wobei
$J = [\sigma - \ell, \overline{t}\,]$.
Es seien

$$\begin{aligned}
B &= \{w_n(t) | \, n \in \mathbb{N},\ t \in [\sigma - \ell, t_{p_n}]\}, \\
C &= \{U_n(t) | \, n \in \mathbb{N}\,, t \in [t_{p_n}, \overline{t}\,]\}, \\
A &= \{v_n(t) | \, n \in \mathbb{N}\,, t \in [t_{p_n}, \overline{t}\,]\} \ \text{ und} \\
H &= \{U_n(t) + v_n(t) | \, n \in \mathbb{N}\,, t \in [t_{p_n}, \overline{t}\,]\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$H \subseteq C + A, \quad \text{also } \alpha(H) \leq \alpha(C) + \alpha(A) = \alpha(C),$$

da $\alpha(A) = 0$ ist (Lemma 2.4).

Es folgt $\alpha(\mathcal{W}(J)) = \alpha(B \cup H) = \max\{\alpha(B), \alpha(H)\} \leq \max\{\alpha(B), \alpha(C)\}$. Wir haben den Beweis beendet, wenn wir gezeigt haben: $\alpha(C) = 0$ und $\alpha(B) = 0$.

Es sei $c \in C$. Dann ist $c = U_n(t)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und für ein $t \in [t_{p_n}, \overline{t}\,]$. Nach der Riemann-Integral Darstellung in (2.1) gilt dann:

$$c = U_n(t) \in \overline{x} - (\,\overline{t} - t_{p_n})\overline{\text{conv}}(f[J \times C] \cup \{\theta\}) - A.$$

Also,

$$C \subseteq \overline{x} - \bigcup_{n=1}^{\infty} (\,\overline{t} - t_{p_n})\overline{\text{conv}}(f[J \times C] \cup \{\theta\}) - A.$$

Nach Lemma 1.2 folgt $\alpha(C) \leq 2\ell\alpha(f[J \times C]) \leq 2\ell k\alpha(J \times C) = 2\ell k\alpha(C) \leq \frac{k}{k+1}\alpha(C)$ (nach Wahl von 2ℓ am Anfang des Beweises von Satz 2.2). Also, $\alpha(C) = 0$.

Nun sei $b \in B$. Dann ist $b = w_n(t)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und für ein $t \in [\sigma - \ell, t_{p_n}]$. Wieder nach (2.1) gilt dann:

$$\begin{aligned}
b \quad = \quad & w_n(t) \in \overline{x} - (\,\overline{t} - t_{p_n})\overline{\text{conv}}(f[J \times C] \cup \{\theta\}) \\
& \quad - (t_{p_n} - (\sigma - \ell))\overline{\text{conv}}(f[J \times B] \cup \{\theta\}).
\end{aligned}$$

Also,

$$B \subseteq \overline{x} - \bigcup_{n=1}^{\infty} (\,\overline{t} - t_{p_n})\overline{\mathrm{conv}}(f[J \times C] \cup \{\theta\})$$
$$- \bigcup_{n=1}^{\infty} (t_{p_n} - (\sigma - \ell))\overline{\mathrm{conv}}(f[J \times B] \cup \{\theta\}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \alpha(B) &\leq 2\ell\alpha(f[J \times C]) + 2\ell\alpha(f[J \times B]) \\ &\leq 2\ell k\alpha(J \times C) + 2\ell k\alpha(J \times B) \\ &= 2\ell k\alpha(C) + 2\ell k\alpha(B) \\ &= 2\ell k\alpha(B) \quad (\text{da } \alpha(C) = 0). \end{aligned}$$

Wegen $2\ell \leq \frac{1}{k+1}$ folgt $\alpha(B) = 0$.

Lemma 2.4 *Es gilt* $\alpha(A) = 0$ *, wobei* $A = \{v_n(t) | n \in \mathbb{N},\, t \in [t_{p_n}, \overline{t}]\}$.

Beweis: Da (v_n) Treppenfunktionen sind, gilt für ein festes $n \in \mathbb{N}$:
$A_n = \{v_n(t) | t \in [t_{p_n}, \overline{t}]\}$ ist eine endliche Menge. Nun sei ϵ eine beliebige positive reelle Zahl. Da (v_n) gleichmäßig gegen Null konvergieren, gibt es ein $n_0(\epsilon)$, so daß für alle $n \geq n_0(\epsilon)$ gilt:

$$\|v_n(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (t \in [t_{p_n}, \overline{t}]).$$

Das bedeutet $A_n \subseteq S(\theta, \frac{\epsilon}{2})$ $(n \geq n_0(\epsilon))$.
Ferner ist $\cup_{n=1}^{n_0(\epsilon)} A_n$ als endliche Vereinigung von endlichen Mengen wieder endlich und jeder Punkt ist eine Kugel mit Radius kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt endlich viele Kugeln mit Durchmesser kleiner oder gleich ϵ überdecken A. Daraus folgt die Behauptung.

Lemma 2.5 *Für* $D(P, Q)$ *gelten folgende Eigenschaften:*

(i) $D(P, Q) \geq 0$.

(ii) $D(P, R) \leq D(P, Q) + D(Q, R)$, *wenn* $t_P \leq t_Q \leq t_R$.

(iii) $|D(P, Q) - D(\widehat{P}, \widehat{Q})| \leq$
$\|x_P - x_{\widehat{P}}\| + \|x_Q - x_{\widehat{Q}}\| + c\Big(|t_P - t_{\widehat{P}}| + |t_Q - t_{\widehat{Q}}|\Big).$

(iv) Ist $t_P = t_Q$, so ist $D(P,Q) = \|x_P - x_Q\|$.

(v) $D(P,Q) = 0$, wenn P und Q auf einer in $\overline{\Omega}$ laufenden Integralkurve liegen.

(vi) $D(P,X)$ erfüllt als eine Funktion von $X = (t,x)$ die Bedingungen (1), (2) und (5) in Satz 2.2.

(vii) Wir erweitern $D(P,(t,x))$ für $t < t_P$:

$$D^*(P,(t,x)) = \left\{ \begin{array}{cc} D(P,(t,x)) & \text{für } t \geq t_P, \\ \|x - x_P\| + c(t_P - t) & \text{für } t < t_P \end{array} \right\} .$$

Dann ist $D^*(P,(t,x))$ stetig in $(P,(t,x)) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ und erfüllt als Funktion von (t,x) auch (1), (2) und (5).

Beweis: Die Ungleichungen (i) - (iii) ergeben sich unmittelbar aus der Definition und der Dreiecksungleichung. Sie hängen nicht von Besonderheiten von f ab. (iv) und (v) sind einfach. Für (vi) gilt: Aus (iii) folgen (1) und (2). Wir zeigen (5) für $(t,x) \in \Omega$.

Es sei $(s,u(s))$ eine Lösungskurve durch (t,x). Es sei $\delta > 0$ derart, daß $(t+h, u(t+h)) \in \Omega$ und $(t+h, x+hf(t,x)) \in \Omega$ für $0 < h < \delta$ gilt. Bekanntlich ist $u(t+h) = x + hf(t,x) + hr(h)$ mit $r(h) \to 0$ $(h \searrow 0)$. Nach (ii) gilt:

$$D(P,(t+h,u(t+h))) \leq D(P,(t,u(t))) + D((t,u(t)),(t+h,u(t+h))).$$

Nach (v) ist der letzte Ausdruck gleich Null, da eine verbindende Lösungskurve existiert. Also,

$$D(P,(t+h,u(t+h))) - D(P,(t,u(t))) \leq 0.$$

Damit erhalten wir mit (2):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(D(P,(t+h,x+hf(t,x))) - D(P,(t,x))\right) \\ &\quad \leq \frac{1}{h}\left(D(P,(t+h,u(t+h))) - D(P,(t,x))\right) + \|r(h)\| \\ &\quad = \frac{1}{h}\left(D(P,(t+h,u(t+h))) - D(P,(t,u(t)))\right) + \|r(h)\| \\ &\quad \leq \|r(t,h)\| . \end{aligned}$$

Daraus folgt (5).

Für (vii) zeigen wir zunächst die Stetigkeit von $D^*(P,(t,x))$.

Fall 1. $t < t_P$.
Für $0 < h < \frac{t_P - t}{3}$ gilt: Es sei $s \in (t-h, t+h)$, $t_{\widehat{P}} \in (t_P - h, t_P + h)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&|D^*(\widehat{P},(s,y)) - D^*(P,(t,x))| \\
&\quad = |\ \|y - x_{\widehat{P}}\| + c(t_{\widehat{P}} - s) - \|x - x_P\| - c(t_P - t)\ | \\
&\quad \leq \|y - x\| + \|x_{\widehat{P}} - x_P\| + c|t_{\widehat{P}} - t_P| + c|t - s|.
\end{aligned}$$

Fall 2. $t_P < t$.
Für $0 < h < \frac{t - t_P}{3}$ gilt: Es sei $s \in (t-h, t+h)$, $t_{\widehat{P}} \in (t_P - h, t_P + h)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&|D^*(\widehat{P},(s,y)) - D^*(P,(t,x))| \\
&\quad = |D(\widehat{P},(s,y)) - D(P,(t,x))| \\
&\quad \leq \|x_P - x_{\widehat{P}}\| + \|x - y\| + c\left(|t_P - t_{\widehat{P}}| + |s - t|\right)
\end{aligned}$$

wegen (iii).

Fall 3. $t_P = t$.
Dann ist $D^*(P,(t,x)) = D(P,(t,x)) = \|x_P - x\|$. Ist $t_{\widehat{P}} \leq s$, so gilt:

$$\begin{aligned}
&|D^*(\widehat{P},(s,y)) - D^*(P,(t,x))| \\
&\quad = |D(\widehat{P},(s,y)) - D(P,(t,x))| \\
&\quad \leq \|x_P - x_{\widehat{P}}\| + \|x - y\| + c\left(|t_P - t_{\widehat{P}}| + |s - t|\right)
\end{aligned}$$

wegen (iii). Ist $t_{\widehat{P}} > s$, so gilt:

$$\begin{aligned}
&|D^*(\widehat{P},(s,y)) - D^*(P,(t,x))| \\
&\quad = |\ \|y - x_{\widehat{P}}\| + c(t_{\widehat{P}} - s) - \|x_P - x\|\ | \\
&\quad \leq \|x_P - x_{\widehat{P}}\| + \|x - y\| + c\left(|t_P - t_{\widehat{P}}| + |s - t|\right).
\end{aligned}$$

Damit ist $D^*(P,(t,x))$ stetig in beiden Variablen, erst recht in (t,x), also (1).

(2) folgt aus dem Obigen, wenn man $s = t$ setzt. Und zwar für alle $(t,x),(t,y) \in \overline{\Omega}$.

Für $t_P \le t$ folgt (5) aus der entsprechenden Eigenschaft von $D(P,(t,x))$.
Für $t < t_P$ und $0 < h < t_P - t$ gilt:
$D^*(P,(t+h,x+hf(t,x))) - D^*(P,(t,x)) =$
$\|x + hf(t,x) - x_P\| + c(t_P - (t+h)) - \|x - x_P\| - c(t_P - t) \le$
$h\|f(t,x)\| - ch$.
Wegen $\|f(t,x)\| \le c$ folgt (5).

Im folgenden ergänzen wir einen Satz von Yiping Lin und P. Volkmann [30]. Zunächst nennen wir eine Funktion $\phi : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [-\infty,\infty]$ eine Eindeutigkeitsfunktion, falls aus $\delta > 0$, $\eta : [0,\delta] \to [0,\infty)$ stetig, $\eta(0) = 0$, und $\overline{D^+}\eta(t) \le \phi(t,\eta(t))$ $(0 \le t < \delta)$ folgt: $\eta(t) = 0$ auf $[0,\delta]$. Dabei ist $\overline{D^+}$ die obere Dini Ableitung.

Satz 2.6 *Es seien $\emptyset \ne F \subseteq G \subseteq \mathbb{R} \times E$, G offen, F relativ abgeschlossen in G und $f : G \to E$ stetig und α-Lipschitzsch. Dann gilt: F ist genau dann positiv invariant, wenn es zu jedem $(\sigma,a) \in F$ eine offene Umgebung Ω in G , eine Funktion $V : \Omega \to [0,\infty)$ und eine Eindeutigkeitsfunktion ϕ gibt, so daß gilt:*

(1) V ist stetig in Ω.

(2) $|V(t,x) - V(t,y)| \le \|x - y\|$ $(\,(t,x)\,,(t,y) \in \Omega\,)$.

(3) $V(t,x) = 0$ $(\,(t,x) \in \Omega \cap F\,)$.

(4) $V(t,x) > 0$ $(\,(t,x) \in \Omega \setminus F\,)$.

*(5) $\overline{D^+}_{[f]}V(t,x) = \overline{lim}_{h\to 0+}\frac{1}{h}\,(V(t+h,x+hf(t,x)) - V(t,x)) \le$
$\phi(t-\sigma, V(t,x))(\,(t,x) \in \Omega$ mit $t \ge \sigma\,)$.*

Beweis: Die Hinlänglichkeit (die allgemeiner als in Satz 2.2 ist) ergibt sich aus [30] (vgl. dazu Satz 3.1 im nächsten Kapitel).
Für die Notwendigkeit liefert der Beweis von Satz 2.2 eine Eindeutigkeitsfunktion, nämlich $\phi \equiv 0$.

Kapitel 3

Hinreichende Bedingungen für positive Invarianz

Folgenden Satz findet man in [30]. Es geht um eine Verallgemeinerung der Hinlänglichkeit der Bedingungen von Nagumo.

Satz 3.1 *Es seien $\emptyset \neq F \subseteq G \subseteq \mathbb{R} \times E$, G offen, F relativ abgeschlossen in G und $f : G \to E$. Dann ist F positiv invariant, falls es zu jedem $(\sigma, a) \in F$ eine offene Umgebung Ω in G , eine Funktion $V : \Omega \to [0, \infty)$ und eine Eindeutigkeitfunktion ϕ gibt, so daß gilt:*

(1) V *ist stetig in* Ω.

(2) $|V(t,x) - V(t,y)| \leq \|x - y\|$ $(\,(t,x)\,,(t,y) \in \Omega\,)$.

(3) $V(t,x) = 0$ $(\,(t,x) \in \Omega \cap F\,)$.

(4) $V(t,x) > 0$ $(\,(t,x) \in \Omega \setminus F\,)$.

(5) $\overline{D^+}_{[f]}V(t,x) = \overline{lim}_{h \to 0+} \frac{1}{h}\,(V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)) \leq \phi(t-\sigma, V(t,x))(\,(t,x) \in \Omega$ *mit* $t \geq \sigma\,)$.

Einer Bemerkung aus [30] folgend, zeigen wir nun, wie Resultate von [20], [28] als Spezialfälle von Satz 3.1 aufgefaßt werden können, falls die vorkommenden Eindeutigkeitsfunktionen nicht von t abhängen.
Zunächst sei $M_\xi = \{x \in E \mid \mathrm{dist}(M,x) \leq \xi\}$ für $\xi > 0$ und $M \subseteq E$. Ferner sei $\varphi(t,s) = \varphi(s)$ eine von t unabhängige Eindeutigkeitsfunktion. Für $x \in E$ ist $\mathrm{dist}(M,x) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$.

Satz 3.2 *Es seien* $\emptyset \neq M \subseteq N \subseteq E$, N *offen,* M *abgeschlossen in* N, $f : (\tau, T) \times N \to E$. *Dann ist* $F = (\tau, T) \times M$ *positiv invariant , falls eine der folgenden Bedingungen (A), (B) erfüllt ist:*

(A) (Volkmann).

(A.1) $\lim\limits_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \mathrm{dist}(M, x + hf(t,x)) = 0 \ (x \in M,\ \tau < t < T)$.

(A.2) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \varphi(\|x - y\|) \ (x \in N \setminus M,\ y \in M,\ \tau < t < T)$.

(A.3) $\overline{\lim\limits_{h \searrow 0}}\, \varphi(s + h) \leq \varphi(s) \ (s > 0)$.

(B) (Redheffer und Walter).

M ist eine Distanz-Menge und es gelten (A.1) und (A.2).

Beweis. Es sei $G = (\tau, T) \times N$ und $(\sigma, a) \in F \subseteq G \subseteq \mathbb{R} \times E$.
Wir definieren $V : G \to [0, \infty)$ durch $V(t,x) = \mathrm{dist}(M, x)$. Dann erfüllt $V(t,x)$ die Bedingungen (1) bis (4) in Satz 2.6. Wir zeigen (5) $\overline{D}^{+}_{[f]} V(t,x) \leq \varphi(V(t,x))$ für $(t,x) \in G$, $t \geq \sigma$. Falls $(t,x) \in (\tau, T) \times M$ ist, gilt $V(t,x) = 0$. Dann ist für genügend kleines $h > 0$:

$$V(t + h,\ x + hf(t,x)) = \mathrm{dist}(M,\ x + hf(t,x)).$$

Wegen (A.1) folgt dann (5).

Es sei nun $(t,x) \notin (\tau, T) \times M$. Dann ist $V(t,x) = \mathrm{dist}(M, x) = \xi > 0$.
Also ist $x \in$ Rand M_ξ. Es sei $r > 0$ mit $S(a; 2r) \subseteq N$.
Dann gilt für den Fall (A) folgende Formel (vgl. [28]):

(C) $\overline{\lim\limits_{h \searrow 0}}\, \frac{1}{h} \mathrm{dist}(M_\xi,\ x + hf(t,x)) \leq \varphi(\xi)$

$(\tau < t < T,\ x \in \text{ Rand } M_\xi,\ \|x - a\| < r\ )$.

Ferner ist

$$\begin{aligned} V(t + h,\ x + hf(t,x)) &= \mathrm{dist}(M,\ x + hf(t,x)) \\ &\leq \mathrm{dist}(M_\xi,\ x + hf(t,x)) + V(t,x)\ . \end{aligned}$$

Mit (C) folgt dann (5) für $(t,x) \in \Omega = (\tau, T) \times \overset{\circ}{S}(a; r)$.

Für den Fall (B) existiert ein $y \in M$ mit

$$\|x-y\| = \operatorname{dist}(M,x) = V(t,x)\ .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} V(t+h,\ x+hf(t,x)) &= \operatorname{dist}(M,\ x+hf(t,x)) \\ &\leq \operatorname{dist}(M,\ y+hf(t,y)) + \|x-y\| \\ &\qquad + h\|f(t,x)-f(t,x)\| \\ &\underset{(A.2)}{\leq} \operatorname{dist}(M,\ y+hf(t,y)) + V(t,x) \\ &\qquad + h\varphi(\|x-y\|)\ . \end{aligned}$$

Mit (A.1) folgt dann (5).

Bemerkung 3.3 *Falls $\varphi(s) = Ls$ für ein $L \geq 0$ ist, setzen wir*

$$V(t,x) = e^{-Lt}\operatorname{dist}(M,x).$$

Dann sind die Bedingungen (1) *bis* (5) *in Satz 2.2 erfüllt, insbesondere gilt*

$$(5) \quad \overline{D^{+}_{[f]}}V(t,x) \leq 0.$$

Nun erweitern wir den Invarianzsatz in [28] auf bestimmte Teilmengen von $\mathbb{R} \times E$, die nicht notwendig der Form $J \times M$ sind ($J \subseteq \mathbb{R},\ M \subseteq E$).

Zunächst sei $\mathcal{A}$ die Familie der nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen von E. Für $A, B \in \mathcal{A}$ ist die Hausdorffmetrik

$$H(A,B) = \max\{\sup_{b\in B}\operatorname{dist}(A,b),\ \sup_{a\in A}\operatorname{dist}(B,a)\}\ .$$

Wir bemerken, daß $H(A,B) = \infty$ möglich ist.

Für $F \subseteq \mathbb{R}\times E$ setzen wir $F(t) = \{x \in E \mid (t,x) \in F \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\} \subseteq E$. Nun sei $F(t) \in \mathcal{A}$ für alle $t \in (\tau, T)$. Dann gilt $H(F(t)_\xi, F(t)) = \xi$. Wir nennen $F(t)$ stetig, wenn aus $t_n \to t_0 (n \to \infty)$ in (τ, T) folgt

$$H(F(t_n), F(t_0)) \to 0\ (n \to \infty).$$

In diesem Fall ist $H(F(t), F(t+h)) < \infty$ für hinreichend kleines $|h|$.

Wir werden folgende Ungleichung benötigen:

$$\operatorname{dist}(A,x) \leq \operatorname{dist}(B,x) + H(A,B) \quad (x \in E,\ A,B \in \mathcal{A})\ . \tag{3.1}$$

Dazu sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $\|b-x\| < \operatorname{dist}(B,x) + \epsilon$.
Zu diesem b existiert ein $a \in A$ mit

$$\|a-b\| < \operatorname{dist}(A,b) + \epsilon \leq H(A,B) + \epsilon\ .$$

Es folgt

$$\operatorname{dist}(A,x) \leq \|a-x\| \leq \|a-b\| + \|b-x\| \leq H(A,B) + \epsilon + \operatorname{dist}(B,x) + \epsilon.$$

Daraus ergibt sich (3.1).

Satz 3.4 *Es sei $F \subseteq G \subseteq (\tau, T) \times E$, $F(t) \in \mathcal{A}$, $F(t)$ stetig, $F(t_1) \subseteq F(t_2)$ für $t_1 \leq t_2$ $(t_1, t_2, t \in (\tau, T))$ und $f : G \to E$.*
Ferner seien folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $\overline{\lim\limits_{h \searrow 0}}\ \frac{1}{h} \operatorname{dist}(F(t), x + hf(t,x)) = 0 \quad ((t,x) \in F,\ \tau < t < T).$

(2) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \varphi(t, \|x-y\|)$ *mit einer Eindeutigkeitsfunktion φ, welche zusätzlich*

(3) $\overline{\lim\limits_{h \searrow 0}}\ \varphi(t, s+h) \leq \varphi(t,s) \quad (\tau < t < T,\ s > 0)$ *genügt.*

Dann ist F positiv invariant.

Beweis. Angenommen, F sei nicht positiv invariant. Dann gibt es eine Lösung $u : [\beta, \gamma) \to E$ mit $(\beta, u(\beta)) \in F$, aber $(t_0, u(t_0)) \in G \backslash F$ für ein $t_0 \in (\beta, \gamma)$. Wir setzen $\sigma = \max\{t \mid \beta \leq t < t_0,\ (t, u(t)) \in F\}$. Dann ist

$$(\sigma, u(\sigma)) \in F \quad \text{und} \quad (t, u(t)) \in G \backslash F \quad \text{für} \quad t \in (\sigma, t_0]\ . \tag{3.2}$$

Es sei $r > 0$ und o.B.d.A. (sonst wird t_0 verkleinert)

$$[\sigma, t_0) \times \overset{\circ}{S}\ (u(\sigma); 2r) \subseteq G \quad \text{und} \quad \|u(t) - u(\sigma)\| < r \quad (\sigma < t < t_0).$$

Dann erhalten wir mit der Methode in [28] (ein Lemma aus [4] wird benutzt), daß für $\xi > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{h\searrow 0}}\ \frac{1}{h}\ \mathrm{dist}(F(t)_\xi, q + hf(t,q)) \le \varphi(t,\xi) \\ &(\sigma < t < t_0,\ q \in F(t)_\xi,\ \|q - u(\sigma)\| < r)\ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nun setzen wir $\eta(t) = \mathrm{dist}(F(t), u(t))$ für $t \in [\sigma, t_0)$. Dann ist $\eta(\sigma) = 0$ und wegen (3.1) gilt für $|h|$ klein genug:

$$\begin{aligned} |\eta(t) - \eta(t+h)| &= |\mathrm{dist}(F(t), u(t)) - \mathrm{dist}(F(t+h), u(t+h))| \\ &\le \|u(t) - u(t+h)\| + H(F(t), F(t+h))\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von $\eta(t)$, da $u(t)$ und $F(t)$ stetig sind. Wir zeigen, daß $\overline{D^+}\eta(t) \le \varphi(t, \eta(t))$ für $t \in [\sigma, t_0)$ gilt. Für $t = \sigma$ und $h > 0$ ist

$$\begin{aligned} \eta(\sigma + h) &= \mathrm{dist}(F(\sigma + h), u(\sigma + h)) \\ &\le \mathrm{dist}(F(\sigma), u(\sigma + h))\ ,\ \text{da } F(\sigma) \subseteq F(\sigma + h) \\ &\le \mathrm{dist}(F(\sigma), u(\sigma) + hf(\sigma, u(\sigma)) + o(h)\ ,\quad (h \searrow 0)\ . \end{aligned}$$

Wegen (1) folgt dann $\overline{D^+}\eta(\sigma) \le \varphi(\sigma, \eta(\sigma))$.

Für $t \in (\sigma, t_0)$ ist nach (3.2) $\eta(t) = \xi > 0$, d.h. $u(t) \in F(t)_\xi$. Also

$$\begin{aligned} \eta(t+h) = {}& \mathrm{dist}(F(t+h), u(t+h)) \\ &\le \mathrm{dist}(F(t), u(t+h)) \\ &\underset{(3.1)}{\le} \mathrm{dist}(F(t)_\xi, u(t+h)) + H(F(t)_\xi, F(t)) \\ &= \mathrm{dist}(F(t)_\xi, u(t+h)) + \xi \\ &\le \mathrm{dist}(F(t)_\xi, u(t) + hf(t, u(t))) + o(h) + \xi\quad (h \searrow 0)\ . \end{aligned}$$

Mit (3.3) erhalten wir dann $\overline{D^+}\eta(t) \le \varphi(t, \eta(t))$, da $\|u(t) - u(\sigma)\| < r$ ist. Weil φ eine Eindeutigkeitsfunktion ist, ergibt sich dann $\eta(t) \equiv 0$, d.h. $(t, u(t)) \in F$ für $t \in [\sigma, t_0)$. Das ist ein Widerspruch zu (3.2).

Beispiel 3.5 *Es seien $E = l_\infty$ (der Raum der beschränkten reellen Folgen), geordnet durch* $K = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \mid x_n \ge 0,\ n \in \mathbb{N}\}$,

$v, w : (\tau, T) \to E$ stetige Funktionen mit $v(t)$ monoton fallend und $w(t)$ monoton wachsend. Ferner seien $v(t) \leq w(t)$ für $t \in (\tau, T)$ und $F = \{(t, x) : \tau < t < T,\ v(t) \leq x \leq w(t)\}$.
$f : G \to E$ genüge den Bedingungen in Satz 3.4 mit $G = (\tau, T) \times E$. Dann ist F positiv invariant.

Es ist klar, daß $F(t) \in \mathcal{A}$ und $F(t_1) \subseteq F(t_2)$ für $t_1 \leq t_2$ $(t, t_1, t_2 \in (\tau, T))$. Wir zeigen die Stetigkeit von $F(t)$.

Es sei $s, t \in (\tau, T)$ mit o.B.d.A. $s \leq t$. Dann ist $F(s) \subseteq F(t)$. Es folgt $\operatorname{dist}(F(t), x) = 0$ $(x \in F(s))$.

Also gilt

$$\begin{aligned} H(F(s), F(t)) &= \max\{\sup_{y \in F(t)} \operatorname{dist}(F(s), y),\ \sup_{x \in F(s)} \operatorname{dist}(F(t), x)\} \\ &= \sup_{y \in F(t)} \operatorname{dist}(F(s), y) . \end{aligned}$$

Nun sei $y \in F(t)$ beliebig, aber fest.
Dann ist $v_k(t) \leq y_k(t) \leq w_k(t)$ $(k \in \mathbb{N})$. Wir setzen

$$x_k = \begin{cases} v_k(s) & \text{falls} \quad v_k(t) \leq y_k \leq v_k(s) \\ y_k & \text{falls} \quad v_k(s) \leq y_k \leq w_k(s) \\ w_k(s) & \text{falls} \quad w_k(s) \leq y_k \leq w_k(t) . \end{cases}$$

Dann ist $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $F(s)$. Ferner gilt

$$|x_k - y_k| = \begin{cases} |v_k(s) - y_k| \leq |v_k(s) - v_k(t)|, \\ \qquad \text{falls } v_k(t) \leq y_k \leq v_k(s), \\ 0\ , \qquad \text{falls } v_k(s) \leq y_k \leq w_k(s), \\ |w_k(s) - y_k| \leq |w_k(t) - w_k(s)|, \\ \qquad \text{falls } w_k(s) \leq y_k \leq w_k(t) . \end{cases}$$

Es folgt:

$$\operatorname{dist}(F(s), y) \leq \|x - y\| \leq \max\{\|v(s) - v(t)\|,\ \|w(s) - w(t)\|\ \}.$$

Da $y \in F(t)$ beliebig ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} H(F(s), F(t)) &= \sup_{y \in F(t)} \operatorname{dist}(F(s), y) \\ &\leq \max\{\|v(s) - v(t)\|,\ \|w(s) - w(t)\|\} . \end{aligned}$$

Wegen v, w stetig folgt die Behauptung.

Kapitel 4

Ein Invarianz-Satz in Banach-Verbänden

Volkmann [29] dehnte einen Satz von Max Müller [15] (vgl. auch [18]) auf die Banachräume c_0 und l_p $(1 \leq p < \infty)$ aus und gab ein Beispiel dafür, daß der Satz nicht für beliebige geordnete Banachräume gilt. Walter [32] behandelte den Fall $E = l_\infty$.

Nun zeigen wir, daß die Invarianzaussage des Satzes für gewisse Banach-Verbände gilt. Dann gehen wir auf die Existenzaussage des Satzes ein.

Zunächst heißt eine Teilmenge K von E ein Kegel, wenn gilt:
K ist abgeschlossen, $K + K \subseteq K$, $\lambda K \subseteq K$ $(\lambda \geq 0)$ und $K \cap (-K) = \{\theta\}$.
E' bezeichnet den topologischen Dual von E. Wir setzen

$$K' = \{\varphi \in E' : \ \varphi(x) \geq 0 \ (x \in K)\}.$$

Wir versehen E mit der (reflexiven, antisymmetrischen, transitiven) Ordnung $\leq$, definiert durch

$$x \leq y \Longleftrightarrow (y - x) \in K.$$

E heißt ein Banach-Verband, wenn zusätzlich gilt :

(i) $x \vee y = \sup\{x, y\}$ und $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ existieren für alle $x, y \in E$,

(ii) $|x| = x \vee (-x) \leq y \vee (-y) = |y|$ impliziert $\|x\| \leq \|y\|$ (Monotonie der Norm).

Ist überdies $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ für alle $x, y \in K$, so nennt man E einen (AM-) Banach-Verband (vgl. [21]).

Im folgenden sei E stets ein (AM-) Banach-Verband mit Einheit, d.h. es existiert ein $p \in Int\ K$ mit $[-p, p] = S(\theta; 1)$.
Beispiele sind $L^\infty(\mu)$, $C[a,b]$, l_∞.

Wir setzen

$$H = \{\varphi \in E' : \varphi(p) = 1\} \text{ und } H_0 = H \cap K'.$$

Dann ist H_0 konvex und kompakt bezüglich der (schwach-*) Topologie $\sigma(E', E)$. Nach einem Satz von Krein-Milman ist die Menge X der Extremalpunkte von H_0 nicht leer und $H_0 = \overline{\text{conv}} X$, wobei der Abschluß bezüglich $\sigma(E', E)$ ist. Die Elemente von X sind Verbandshomomorphismen (vgl. [14], [11], [21]), d.h. für $x, y \in E$ gilt:

(iii) $\varphi(x \vee y) = \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ und $\varphi(x \wedge y) = \min\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ $(\varphi \in X)$.

Für C[a,b] können wir $X = [a, b]$ setzen, wenn wir $s \in [a, b]$ als Auswertungsfunktional betrachten, d.h. $\varphi_s(x) = x(s)$ $(x \in C[a, b])$ (vgl. Taylor [24], s. 186). Somit bedeutet (iii) für $x, y \in C[a, b]$:

$$(x \vee y)(s) = \max\{x(s), y(s)\} \text{ und } (x \wedge y)(s) = \min\{x(s), y(s)\} \quad (s \in [a, b]).$$

Folgendes Lemma ist wichtig für unsere Betrachtung.

Lemma 4.1 *Es sei $x_1 \in E \backslash K$. Dann existiert ein $\varphi_1 \in X$ mit $\varphi_1(x_1) <$ 0.*

Beweis: Nach einem Trennungssatz (Hahn-Banach) für konvexe Mengen (vgl. z.B. [21]) existiert ein $\varphi \in E'$ mit $\varphi(x_1) < c < \varphi(x)$ $(x \in K)$. Wegen $\theta \in K$ ist dann $\varphi(x_1) < c < \varphi(\theta) = 0$. Ferner gilt für $x \in K$: $\varphi(nx) \geq c$ $(n \in \mathbb{N})$. Daraus ergibt sich, daß $\varphi \in K'$ ist.

Da $\varphi(p) > 0$ ist, gilt $\varphi_0 = \frac{1}{\varphi(p)}\varphi \in H_0$ und $\varphi_0(x_1) < 0$.
Es sei nun $\epsilon > 0$ mit $\varphi_0(x_1) + \epsilon < 0$. Da $\varphi_0 \in \overline{\text{conv}} X$ bezüglich $\sigma(E', E)$ ist, existiert ein $\varphi_\epsilon \in \text{conv} X$ mit

$$|\varphi_\epsilon(x_1) - \varphi_0(x_1)| \leq \epsilon$$

Es folgt $\varphi_\epsilon(x_1) < 0$. Ferner gilt :

$$\varphi_\epsilon(x_1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x_1) \quad \text{mit} \quad \varphi_i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

O.B.d.A. $\varphi_1(x_1) < 0$.

Die Funktion $P(t,x) = \sup\{v(t), \inf\{w(t), x\}\}$ ist wohldefiniert für $t \in [\tau, T]$, $x \in E$, wobei v, w Funktionen von $[\tau, T]$ in E sind. Im folgenden sei $D \in \{D^+, D_+, D^-, D_-\}$ eine beliebige, aber feste Dini-Ableitung. Wir setzen $J = [\tau, T]$ und $C(J, E)$ bezeichnet den Raum der stetigen Funktionen von J in E.

Satz 4.2 *Es seien* $v, w \in C(J,E)$, $v(t) \leq w(t)$ $(t \in J)$, $F = \{(t,x) : t \in J,\ v(t) \leq x \leq w(t)\}$, $f : F \to E$. *Ferner gelte für* $t \in J$, $\varphi \in X$*:*

(1) $D\varphi(v(t)) \leq \varphi(f(t,z))$ *für* $v(t) \leq z \leq w(t)$, $\varphi(z) = \varphi(v(t))$,

(2) $D\varphi(w(t)) \geq \varphi(f(t,z))$ *für* $v(t) \leq z \leq w(t)$, $\varphi(z) = \varphi(w(t))$.

Dann ist F *positiv invariant bezüglich* $u' = f(t, P(t,u))$ $\quad (3)$.

Beweis: Angenommen, F sei nicht positiv invariant. Dann gibt es eine Lösung $u : [a,b) \to E$ von (3) mit $(a, u(a)) \in F$ und $(t_1, u(t_1)) \notin F$ für ein $t_1 \in (a,b)$. Es gilt dann $w(t_1) - u(t_1) \notin K$ bzw. $u(t_1) - v(t_1) \notin K$. Es sei etwa $w(t_1) - u(t_1) \notin K$. Dann gibt es nach Lemma 4.1 ein $\varphi \in X$ mit $\varphi(w(t_1) - u(t_1)) < 0 \qquad (4)$.

Da $w(a) - u(a) \in K$ gilt, also $\varphi(w(a) - u(a)) \geq 0$, existiert ein $t_0 \in [a, t_1)$ mit $\varphi(w(t_0) - u(t_0)) = 0$ und $\varphi(w(t) - u(t)) < 0$ $(t \in (t_0, t_1])$.
Für beliebiges aber festes $t \in (t_0, t_1)$ sei $z = P(t, u(t))$. Dann ist $v(t) \leq z \leq w(t)$ und $\varphi(z) = \varphi(w(t))$ (wegen (iii)). Damit genügt z den Bedingungen von (2). Es folgt $D\varphi(w(t)) \geq \varphi(f(t,z)) = D\varphi(u(t))$.

Für $h(t) = \varphi(w(t) - u(t))$ gilt dann:

$$h(t_0) = 0 \quad \text{und} \quad Dh(t) \geq 0 \quad \text{für} \quad t \in (t_0, t_1).$$

Also ist h wachsend und $h(t_1) \geq 0$ im Widerspruch zu (4).
Entsprechend verfährt man, wenn $u(t_1) - v(t_1) \notin K$ ist, und damit ist der Satz bewiesen.

Aus der Monotonie der Norm (ii) von E folgt :

$$\theta \leq x \leq y \quad \text{impliziert} \quad \|x\| \leq \|y\|$$

Somit ist der Ordnungskegel K normal im Sinne von Krein [12].

Nun ergänzen wir die Invarianz mit der Existenz einer Lösung wie ursprünglich in [15].

Satz 4.3 *Es seien* $v, w \in C(J, E),\ v(t) \leq w(t)\ (t \in J)$,
$F = \{(t,x) :\ t \in J,\ v(t) \leq x \leq w(t)\},\ (\tau, c) \in F,\ f : J \times E \to E$ *stetig mit*

$$\alpha(f[B]) \leq k\alpha(B) \text{ für ein } k \geq 0 \ (B \subseteq F). \tag{4.1}$$

Für $t \in J,\ \varphi \in X$ *gelte (1), (2) in Satz 4.2. Dann existiert eine Lösung* $u :\ J \to E$ *des Anfangswertproblems*

$$u' = f(t, u(t)),\ u(\tau) = c, \quad (t \in J) \tag{4.2}$$

mit

$$(t, u(t)) \in F \quad (t \in J). \tag{4.3}$$

Beweis: Aus der Verbandseigenschaft (i) folgt

$$|P(t,x) - P(s,y)| \leq |v(t) - v(s)| + |w(t) - w(s)| + |x - y|$$
$$\text{für } (s,y),\ (t,x) \in J \times E.$$

Mit der Monotonie der Norm (ii) ergibt sich die Stetigkeit von $P(t,x)$ und $\|P(t,x) - P(t,y)\| \leq \|x - y\|$, also $\alpha(P(B)) \leq l_1\alpha(B)$ für ein $l_1 \geq 0$ und für beschränkte $B \subseteq J \times E$.

Also ist $g(t,x) = f(t, P(t,x))$ stetig und $\alpha(g(B)) \leq l_2\alpha(B)$ für ein $l_2 \geq 0$. Damit ist $g(t,x)$ beschränkt, da F beschränkt ist, wegen der Normalität von K.
Nach Satz 1.3 existiert dann eine Lösung $u : J \to E$ von $u' = g(t,u)$, $u(\tau) = c$. Der Rest folgt aus Satz 4.2, d.h. es gelten (4.2) und (4.3).

Wir wenden uns nun einem Existenzsatz von Lemmert, Schmidt, Volkmann [13] zu, der die Normalität des Kegels K berücksichtigt.
Zunächst heißt $g(t,x)$ quasimonoton wachsend bezüglich x (im Sinne von [25], vgl. auch [31]), wenn gilt:

$$x, y \in E,\ x \leq y,\ \varphi \in K',\ \varphi(x) = \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(g(t,x)) \leq \varphi(g(t,y)).$$

Der Kegel K heißt regulär, wenn aus

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq y$$

in E die Konvergenz $\|x_n - x_0\| \to 0$ gegen ein Grenzelement $x_0 \in E$ folgt.

Satz 4.4 *Es seien die Voraussetzungen in Satz 4.3 erfüllt und anstatt (4.1) gelte:*
$f(t, P(t,x))$ ist quasimonoton wachsend bezüglich x und K ist regulär.
Dann existiert eine $u : J \to E$, die (4.2) und (4.3) genügt.

Beweis: Nach [13] hat $u' = f(t, P(t,u)),\ t \in J,\ u(\tau) = c$, eine Lösung, wenn $f(t, P(t,x))$ quasimonoton wachsend bezüglich x ist, und K regulär mit $Int\ K \neq \emptyset$ ist.

Reguläre Kegel sind stets normal; die Umkehrung muß nicht immer gelten. Nach Krein [12] ist eine monoton wachsende, schwach konvergente Folge $(x_n) \subseteq E$ (d.h. es existiert ein $z \in E$ mit $\varphi(x_n) \to \varphi(z)$ für alle $\varphi \in E'$) bereits Norm-konvergent, wenn K normal ist. Damit können wir folgende Charakterisierung angeben.

Bemerkung 4.5 *Ein normaler Kegel ist genau dann regulär, wenn gilt: Aus $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq y$ in E folgt die schwache Konvergenz einer Teilfolge von (x_n).*

Literaturverzeichnis

[1] A. Ambrosetti, Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **39** (1967), 349-361.

[2] S. Banach, Theórie des opeŕations linéaires, Warschau 1932.

[3] J. Banaś und K. Goebel, Measures of noncompactness in Banach spaces, Lecture notes in Pure and Applied Math. **60**, Marcel-Dekker, New York - Basel, 1980.

[4] E. Bishop, R. R. Phelps, The support functionals of a convex set, Proc. Sympos. pure Math. **7** (1963) (Convexity), 27-35.

[5] J.-M. Bony, Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier **19** (1969), Nr. 1, 277-304.

[6] H. Brezis, On a characterization of flow-invariant sets, Commun. pure appl. Math. **23** (1970), 261-263.

[7] M. G. Crandall, A generalization of Peano's existence theorem and flow-invariance, Proc. Amer. math. Soc **36** (1972), 151-155.

[8] K. Deimling, Ordinary differential equations in Banach spaces, Lecture Notes in Math. **596**, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.

[9] J. Dieudonné, Deux exemples singuliers d'équations différentielles, Acta Sci. Math **12B** (1950), 38-40.

[10] P. Hartman, On invariant sets and on a theorem of Ważewski, Proc. Amer. math. Soc. **32** (1972), 511-520.

[11] S. Kakutani, Concrete representation of abstract (M)-spaces, Ann. of Math., 42 (1941), 994-1024.

[12] M. G. Krein, Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach, Doklady Akad. Nauk. SSSR **28** (1940), 13-17.

[13] R. Lemmert, S. Schmidt und P. Volkmann, Ein Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgeichung mit quasimonoton wachsender rechter Seite, Math. Nachr. **153** (1991), 349-351.

[14] P. Meyer-Nieberg, Banach Lattices, Springer-Verlag 1991.

[15] M. Müller, Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math. Z. **26** (1926), 619-645.

[16] M. Nagumo, Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen, Proc. phys.- math. Soc. Japan, III. Ser. 24 (1942), 551-559.

[17] H. Okamura, Sur l'unicité des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires, Memoirs of the College of Sci. Kyoto Imp. Univ. Ser. A. 23 (1941), 225-231.

[18] O. Perron, Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, Math. Ann. **76** (1915), 471-484.

[19] R. M. Redheffer, The theorems of Bony and Brezis on flow-invariant sets, Amer. math. Monthly **79** (1972), 740-747.

[20] R. M. Redheffer und W. Walter, Flow-invariant sets and differential inequalities in normed spaces, Applicable Analysis **5** (1975), 149-161.

[21] H. H. Schaefer, Topological Vectorspaces, Springer, 1980.

[22] S. Schmidt, Existenzsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen, Universität Karlsruhe, Dissertation (1989).

[23] S. Szufla, Some remarks on ordinary differential equations in Banach spaces, Bull. Acad. Polon. Sci, Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **16** (1968), 795-800.

[24] A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, second edition, John Wiley & Sons, Inc., 1980.

[25] P. Volkmann, Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen, Math. Z. **127** (1972), 157-164.

[26] P. Volkmann, Über die Invarianz konvexer Mengen und Differentialungleichungen in einem normierten Raume, Math. Ann. **203** (1973), 201-210.

[27] P. Volkmann, Über die Invarianz-Sätze von Bony und Brezis in normierten Räumen, Arch. der Math. **26** (1975), 89-93.

[28] P. Volkmann, Über die positive Invarianz einer abgeschlossenen Teilmenge eines Banachschen Raumes bezüglich der Differentialgleichung $u' = f(t, u)$, J. reine angew. Math. **285** (1976), 59-65.

[29] P. Volkmann, Ausdehnung eines Satzes von Max Müller auf unendliche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, Funkcialaj Ekvacioj (Ser. Int.), Vol. 21, No. 2 (1978), 81-96.

[30] P. Volkmann und Yiping Lin, The positive invariant set of the differential equation on Banach space, Annals of Diff. Equat. **14** (1998), 267-270.

[31] W. Walter, Differential and Integral Inequalities, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Vol. 55, Springer-Verlag, 1970.

[32] W. Walter, On Max Müller's existence-comparison theorem for infinite systems of ordinary differential equations, Ann. Polon. Math. 42 (1983), 395-401.

[33] J. A. Yorke, Invariance for ordinary differential equations, Math. Systems Theory 1 (1967), 353-372. Correction: Ibid. 2 (1968), 381.