

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Juli 1966

EXTERNER BERICHT

INR-4/66-1

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Die Analyse des Neutronenrauschens in Reaktoren

von

DIETER STEGEMANN

*Gesellschaft für Kernforschung m.b.H.
Zentralarchiv*

<i>Büro für Reaktortechnik Gesellschaft für Kernforschung m.b.H. Karlsruhe</i>	Nr. 2
--	-----------------

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG m.b.H. KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt.

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG m.b.H., KARLSRUHE

Dieser Bericht gibt den Inhalt einer zweisemestrigen einstündigen Vorlesung wieder, die im Sommersemester 1965 und im Wintersemester 1965/66 an der Technischen Hochschule in Karlsruhe gehalten wurde. Die Vorlesung befaßt sich mit einem speziellen Gebiet der Reaktorphysik, das die Analyse des Neutronenrauschens in Reaktoren zum Ziele hat. Als Neutronenrauschen werden die Schwankungserscheinungen in der Neutronenbevölkerung eines Reaktors bezeichnet. Eine genaue Untersuchung dieser Schwankungserscheinungen, ihrer Entstehung und ihres Nachweises durch Detektoren erlaubt die Bestimmung charakteristischer Reaktorparameter, wie der Abklingkonstanten des prompten Neutronenflusses, der Neutronenlebensdauer, der Reaktivität und der absoluten Reaktorleistung. Die Kenntnis dieser integralen Größen ist sowohl für den praktischen Reaktorbetrieb als auch für die Reaktorentwicklung von großem Interesse. So liefert beispielsweise bei der Entwicklung schneller Brutreaktoren die Abklingkonstante des prompten Neutronenflusses bei verzögert kritischem Reaktor als integrale Kenngröße eine gute Möglichkeit, reaktortheoretische Berechnungen zu überprüfen. Aus diesen Gründen ist die Analyse des Neutronenrauschens mit in das reaktorphysikalische Forschungs- und Entwicklungsprogramm des Kernforschungszentrums Karlsruhe aufgenommen worden. Die Vorlesung basiert in wesentlichen Teilen auf theoretischen und experimentellen Arbeiten und Ergebnissen, die im Rahmen dieses Programms gewonnen wurden und die im Kapitel II dieses Manuskripts abgehandelt sind. Kapitel I der Vorlesung gibt eine Einführung in die Grundbegriffe der Statistik und die Eigenschaften spezieller Korrelationsfunktionen, soweit sie zum Verständnis des zweiten Kapitels erforderlich sind.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Kapitel I - Einführung in die Statistik	
I.1 Einleitung	1
I.2 Zufallsveränderliche, Verteilungen und Mengen	12
I.3 Mittelwerte	19
I.4 Poisson-Verteilung und Normaldichte	28
I.5 Zeitmittelwerte und Mengenmittelwerte, Korrelationsfunktionen	43
 Kapitel II - Anwendung statistischer Methoden zur Analyse des Neutronenrauschens in Nulleistungsreaktoranordnungen	
II.1 Einleitung	68
II.2 Theoretische Grundlagen zur Beschreibung des Neu- tronenrauschens	69
II.3 Behandlung der Theorie von Korrelationsexperimenten im Punktreaktormodell	81
II.4 Behandlung von Kurzzeitkorrelationen im energie- und ortsabhängigen Modell	92
II.5 Rossi- α -Experiment	99
II.6 Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	110
II.7 Frequenzanalyse von Ionisationskammerströmen	132
II.8 Zusammenfassender Rückblick	147
 Literaturangaben	 149

Kapitel I - Einführung in die Statistik

I.1 Einleitung

In der Physik kann man zwischen zwei unterschiedlichen Beschreibungsarten von Vorgängen unterscheiden. Einerseits lassen sich Vorgänge durch genau bekannte Anfangsbedingungen und bestimmte Gleichungen beschreiben, wie beispielsweise die Bewegung von Gegenständen in Kraftfeldern in der Mechanik oder die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen unter Anwendung der Maxwell'schen Gesetze. Andererseits gibt es eine ganze Reihe von Erscheinungen, die sich nicht durch bestimmte Anfangsbedingungen und einfache Gesetzmäßigkeiten beschreiben lassen. In diese Kategorie fällt z.B. das sogenannte Rauschen einer Elektronenröhre. Wenn man versuchen wollte, die Schwankungen in der Ausgangsspannung einer solchen Elektronenröhre mit der Bewegung einzelner Elektronen in Beziehung zu setzen, so wird man sicherlich schnell die Ausweglosigkeit und Komplexität dieses Unternehmens einsehen. So sieht man schon an diesem Beispiel, daß es nötig ist, neue Begriffe zu schaffen, um derartige Vorgänge zu beschreiben. Diese Art von Vorgängen werden wir auch bei der Analyse des Reaktorrauschens wiederfinden, weswegen die Einführung dieser neuen Begriffe von ganz speziellem Interesse ist. Die Schaffung dieser neuen Begriffe wurde nun allerdings nicht durch das Rauschen in einer Elektronenröhre angeregt, sondern durch viel ältere Probleme, und zwar denen, die bei einem Würfelspiel auftreten. Man kann sich vorstellen, daß die genaue Vorhersage des Ausgangs eines Wurfs mit einem Würfel sehr viele genaue Detailinformationen erfordern würde, wie beispielsweise die physikalischen Eigenschaften des Würfels, seine Oberfläche, die Anfangsbedingungen der Bewegung, der Verlauf der Bewegung und die dabei auftretenden Kräfte usw. Selbst wenn diese Faktoren alle genau bekannt wären, so würde es noch eine ziemlich komplizierte Lösung dieses Problems geben. Nun ist diese exakte Vorhersage nicht das Problem des Würfelspiels, sondern sein Spezifikum liegt gerade in dem Auftreten von gewissen Zufällen oder Chancen. Was man infolgedessen im Endeffekt will, ist eine mathematische Beschreibung des Spiels, in dem der Zufall ein fundamentales Charakteristikum ist. Ein weiteres Beispiel dieser Art, an dem man sieht, daß die Schaffung spezieller Begriffe zur Beschreibung solcher Vorgänge notwendig ist, ist die Analyse des Verhaltens eines Gases in einem Behälter. Das Gas besteht bekanntlich aus einer

Vielzahl kleiner Teilchen, die sich entsprechend ihrer Wechselwirkung untereinander bewegen. Theoretisch wäre es nun möglich, den Verlauf eines jeden Gasteilchens genau zu bestimmen, wenn die Anfangsposition und die Geschwindigkeit jedes Teilchens bekannt sind. Aber schon solche Anfangsbedingungen zu erhalten, ist unmöglich. Infolgedessen führen die Begriffe, die eingeführt worden sind, um die Vorgänge zu beschreiben, auf die Theorie der Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeitstheorie hat eine lange Entwicklungsperiode hinter sich. Ihre Anfänge liegen in der Mitte des 17. Jahrhunderts. Obwohl sie am Anfang, vor allem im Zusammenhang mit Zufallsspielen, wie Würfeln usw., entwickelt worden war, hat die mathematische Theorie heute auf allen Gebieten ihren Eingang gefunden. Die ausgedehnte Anwendung auf Probleme der Reaktorphysik ist relativ neu.

Nach diesen mehr einleitenden Bemerkungen nun zu einigen grundlegenden Begriffen. Wenn in einem Zufallsexperiment sich überhaupt keine Art von Regelmäßigkeit zeigt, so läßt es sich auch nicht beschreiben und kann keiner Analyse unterzogen werden. Es ist jedoch eine Erfahrungstatsache, daß sich gewisse Werte einer Serie von Beobachtungen an wiederholten Zufallsexperimenten um einen Wert herumgruppieren, wenn diese Zufallsexperimente unter den genau gleichen Bedingungen durchgeführt werden. Diese Regelmäßigkeit jedoch offenbart sich in einer ganz unregelmäßigen Art und Weise. Dies äußert sich beispielsweise in einem bekannten Experiment, nämlich dem, Münzen zu werfen und darauf zu achten, in welchem Verhältnis die Anzahl der erhaltenen Zahlen oder die der Wappenseiten zueinander stehen. Das Verhältnis der Anzahl von Zahlen zur Gesamtzahl der Würfel nähert sich umso mehr dem Wert $\frac{1}{2}$, je größer die Anzahl der insgesamt durchgeführten Würfe ist. Die gleiche Art von Regelmäßigkeit kann in Kartenspielen, Würfelspielen und anderen Zufallsphänomenen gefunden werden. Es war genau diese Tatsache der Grund für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Diese grundlegende physikalische Eigenschaft von Zufallsexperimenten, die unter den genau gleichen Bedingungen durchgeführt werden, ist bekannt als statistische Regelmäßigkeit. Die wiederholten Durchführungen von Zufallsexperimenten werden Versuche und die Versuche, die in einem gewünschten Resultat enden, werden Erfolge genannt. Wenn die Gesamtzahl von Versuchen M ist und die Gesamtzahl der Erfolge N, so wird das Verhältnis $\frac{N}{M}$ als Häufigkeitsverhältnis oder relative Häufigkeit bezeichnet. Die Sammlung der Beobachtungen,

die in einer Serie von Versuchen gemacht werden, liefert den Satz der statistischen Daten für ein solches Zufallsexperiment. Zum Beispiel kann eine Serie von Versuchen beim Münzenwerfen folgende statistischen Daten liefern, wobei Z bedeutet, daß beim Wurf eine Zahl auftrat, und bei W ein Wappen:

Z, W, W, W, Z, W, Z, Z, W, W, Z,

oder, wenn die Zahl durch eine 1 und das Wappen durch eine 0 angezeigt wird, durch folgende Folge:

1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1,

Wichtig ist, daß in einem solchen Experiment und vielen anderen dieser Art, beispielsweise bei der Bestimmung des Gewichts und der Größe einer Gruppe von Personen, jede Beobachtung als Zahl ausgedrückt werden kann oder als eine Gruppe von Zahlen. Im Gegensatz zu dieser Klasse von Zufallsexperimenten gibt es eine Reihe, die zur Beschreibung der Beobachtung eines Versuchs eine kontinuierliche oder stetige Zeitfunktion benötigen. Dies ist z.B. notwendig, wenn man die Schwankungen in der Ausgangsspannung einer Elektronenröhre beschreiben will. Infolgedessen bestehen bei der Analyse von Rauschexperimenten gewöhnlicherweise die statistischen Daten aus einem Satz von Zeitfunktionen. Eine derartige Sammlung von statistischen Daten kann man erhalten, indem man ein Experiment an einem gegebenen System unter genau gleichen Bedingungen mehrere Male wiederholt. Für unser Beispiel der Rauschspannung heißt das, man zeichne die Rauschspannung nacheinander in genügend langen Zeitintervallen auf und beachte dabei gleiche Bedingungen. Jede Aufzeichnung wird als Ergebnis eines getrennten Versuchs angesehen, und die Gesamtheit der Aufzeichnungen repräsentiert die statistischen Daten. Unter idealen Bedingungen gibt es auch einen anderen Weg, zu diesem Satz statistischer Daten zu gelangen, nämlich die gleichzeitige Aufzeichnung der Ausgangsspannung einer Serie von Elektronenröhren, die sich genau gleichen und unter den identisch gleichen Bedingungen arbeiten.

Es wurde besonders betont, daß die Versuche alle unter den gleichen Bedingungen ausgeführt werden, so daß die statistische Regelmäßigkeit erhalten bleibt. Die Frage nun, welche Bedingungen in einem Zufallsexperiment immer gleich gehalten werden müssen, kommt auf die Art des Experiments an und ist

letzten Endes eine Frage der Erfahrung. Falls der Einfluß bestimmter Faktoren von vornherein nicht klar ist, muß er experimentell bestimmt werden, und diese experimentelle Bestimmung ist in den meisten Fällen auf der Basis der statistischen Regelmäßigkeit und ihrer Auswertung möglich.

In einem Zufallsexperiment werden die Resultate, die dabei herauskommen, Ereignisse genannt. Je nach Experiment werden die Ereignisse durch kennzeichnende Eigenschaften des Versuchsobjekts ausgedrückt oder aber durch Zahlenwerte der Größen, die beobachtet werden. Im Beispiel des Münzenwerfens sind es die Zahlen und die Wappen, und bei der Messung der augenblicklichen Rauschspannung sind es die numerischen Werte der Spannung. Ein Ereignis ist nicht notwendigerweise nur durch ein einzelnes Charakteristikum oder eine einzelne Zahl gekennzeichnet, sondern es kann auch die Form einer Kombination von Charakteristika oder Zahlen annehmen. Dies würde beispielsweise in unserem Rauschexperiment der Fall sein, wenn jede Messung aus zwei Werten der augenblicklichen Rauschspannung besteht, die durch ein bestimmtes Zeitintervall voneinander getrennt sind.

Wenn die Bedingungen für ein Zufallsexperiment festgelegt sind, sind wir in der Lage, alle möglichen Resultate zu nennen. Wenn wir beispielsweise beim Münzenwerfen zwei Münzen besitzen, eine mit der Markierung a und die andere mit der Markierung b, so sind folgende Resultate möglich:

Münze a : Z, W, Z, W ,

Münze b : W, Z, Z, W .

Dies sind alle möglichen Resultate, weil, nach den Bedingungen des Spiels, die zwei Münzen unterscheidbar sind, und es zwei mögliche Ergebnisse für jede Münze gibt. Dieser Satz von möglichen Ergebnissen ist vollständig. Das bedeutet, daß in einem Versuch des Experiments eines der Resultate stattfinden muß. Diese Resultate werden einfache Ereignisse des Experiments genannt. Da das Auftreten eines Ereignisses das Auftreten irgend eines anderen ausschließt, werden diese Ereignisse sich gegenseitig ausschließend oder unvereinbar genannt. Auf der Grundlage der festgelegten Bedingungen und der einfachen Ereignisse können nun auch andere Ereignisse in Betracht gezogen werden, die mit dem Experiment in Zusammenhang stehen. Das Ereignis, daß beim Werfen von zwei Münzen mindestens eine Zahl oben liegt, entspricht einem

der ersten drei einfachen Ereignisse. Das Ereignis, daß beide Münzen auf die gleiche Seite fallen, entspricht einem der letzten beiden Ereignisse. Das Ereignis, daß die Münze b auf die Zahlenseite fällt, entspricht dem 2. oder 3. einfachen Ereignis. Jedes dieser Ereignisse wird erfüllt durch zwei oder mehr der einfachen Ereignisse. Sie werden zusammengesetzte Ereignisse genannt. Ein einfaches Ereignis, das die Bedingungen eines zusammengesetzten Ereignisses erfüllt, wird ein günstiges genannt. Nun sei noch eine Variante des Münzenwerfens betrachtet, nämlich der Fall, daß die Münzen nicht markiert sind, so daß man also bei der Wiedergabe der Ergebnisse nicht länger zwischen ihnen unterscheiden kann. Die möglichen Resultate sind dann:

Z, Z, W

W, Z, W

im Hinblick auf die Bedingungen für dieses modifizierte Experiment. Diese Möglichkeiten bilden den vollständigen Satz von einfachen Ereignissen. Zusammengesetzte Ereignisse können entsprechend der Verfahrensweise des vorherigen Experiments gebildet werden.

Bei der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie sollte man stets im Auge behalten, daß dabei auf angenommene Zufallsexperimente Bezug genommen wird. Wir stellen uns dabei vor, daß ein solches Experiment unendlich oft unter den genau gleichen Bedingungen wiederholt werden kann. Wir nehmen weiterhin an, daß die Bedingungen so ausgelegt sind, daß ein vollständiger Satz der möglichen Resultate bekannt ist, weiterhin nehmen wir an, daß es eine statistische Regelmäßigkeit in diesen Resultaten gibt, und letztlich, daß wir uns mit dem Satz aller möglichen Resultate des Zufallsexperiments befassen. Bevor wir dazu übergehen, das Maß der Wahrscheinlichkeit zu definieren, ist es notwendig, noch einen Begriff zu erläutern, und zwar den Ausdruck, daß das Auftreten von zwei Ereignissen gleich wahrscheinlich ist. Man spricht von einem Zustand der gleichen Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von zwei Ereignissen, wenn die Bedingungen für ein angenommenes Zufallsexperiment so ausgelegt sind, daß keine der Bedingungen das Auftreten eines Ereignisses mehr beeinflussen kann als das eines anderen. Wird folglich in einem idealen Experiment ein vollkommener Würfel verwendet, so ist das Auftreten der Ereignisse, die durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 dargestellt werden,

gleich wahrscheinlich. Im Beispiel des Werfens von zwei markierten Münzen sind die vier einfachen Ereignisse $Z_a W_b$; $W_a Z_b$; $Z_a Z_b$; $W_a W_b$ alle gleich wahrscheinliche Ereignisse, denn es besteht für die vollkommenen Münzen in einem idealisierten Experiment keine Veranlassung, daß irgendeines dieser Ereignisse durch die Bedingungen mehr begünstigt ist als die anderen.

Bei der Untersuchung praktischer physikalischer Probleme müssen genügend Beweise vorliegen, bevor man für das Experiment Schlußfolgerungen ziehen kann, ob die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Ereignissen gleich oder ungleich sind. Mit den bisher eingeführten und erklärten Begriffen kann nun das zahlenmäßige Maß der mathematischen Wahrscheinlichkeit definiert werden, das als klassische Definition für die Wahrscheinlichkeit (I.1.1) gilt.

Die Definition lautet wie folgt: Wenn in einem angenommenen Zufallsexperiment unter festgesetzten Bedingungen n vollständige, unvereinbare und gleichwahrscheinliche Ereignisse existieren, und wenn m dieser Ereignisse günstig für das Ereignis A sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von A definiert durch das Verhältnis $\frac{m}{n}$. Im Zusammenhang mit dieser Definition sei angemerkt:

- a) Wahrscheinlichkeiten existieren nur im Zusammenhang mit den möglichen Ausgängen eines gegebenen Zufallsexperimentes.
- b) Die Bedingungen für das angenommene Zufallsexperiment sind von Anfang an gegeben.
- c) Der vollständige Satz aller möglichen Ausgänge oder Resultate ist aus den Anfangsbedingungen erhältlich. Das bedeutet beispielsweise bei einem Versuch, daß auch ein Ereignis auftreten muß.
- d) Die Ergebnisse schließen sich gegeneinander aus oder sind unvereinbar.
- e) Die Ausgänge des Experiments sind gleichwahrscheinlich.
- f) Das Ereignis A ist ein zusammengesetztes Ereignis für $m > 1$, das auf ein einfaches Ereignis reduziert wird, wenn $m = 1$ ist.

Dazu ein einfaches Beispiel. Wir überlegen uns ein Zufallsexperiment, bei dem von einem Kartenspiel von 52 Karten eine Karte herausgezogen wird, und wir merken uns von der gezogenen Karte die Farbe und die Bezeichnung. Aus den gegebenen Bedingungen für das Experiment folgt, daß es 52 vollständige einfache Ereignisse gibt. Diese Ereignisse schließen sich gegenseitig aus. Weiterhin können wir annehmen, daß diese Ereignisse gleichwahrscheinlich sind. Das Ereignis A spezifizieren wir insofern genauer, als wir annehmen, daß das Ereignis darin besteht, daß ein As gezogen wird. Da es unter den 52 Karten, d.h. 52 einfachen Ereignissen, 4 Asse, also 4 Ereignisse, gibt, die günstig für das Ereignis A sind, so folgt aus der Definition der Wahrscheinlichkeit, daß die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gleich $\frac{4}{52}$ oder $\frac{1}{13}$ ist.

Ogleich die Definition für das Maß der Wahrscheinlichkeit für diskrete Werte gegeben war, kann diese Wahrscheinlichkeit auch auf solche Fälle angewendet werden, in denen sich die Ereignisse als stetige Veränderliche ausdrücken lassen. Bei der Messung einer Rauschspannung z.B. sind die Ereignisse Werte des Rauschsignals zu diskreten Zeitpunkten, und diese Werte liegen in einem kontinuierlichen Bereich innerhalb eines unteren und eines oberen Grenzwertes. Die Ausdehnung der Definition der Wahrscheinlichkeit auf solche kontinuierlichen Ereignisse bietet keine größere Schwierigkeit, und wir werden darauf zurückkommen, wenn Mittelwerte in Zufallsexperimenten diskutiert werden.

Das Theorem der Gesamtwahrscheinlichkeit beinhaltet die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses in einem Zufallsexperiment. Das zusammengesetzte Ereignis hat Eigenschaften, wie sie von einer Gruppe von gegenseitig unvereinbaren Ereignissen geteilt werden. Diese gegenseitig unvereinbaren Ereignisse werden die Formen des zusammengesetzten Ereignisses genannt. Das Theorem liefert die Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses und den Wahrscheinlichkeiten seiner Formen.

Das Theorem der Gesamtwahrscheinlichkeit besagt folgendes: Wenn in einem angenommenen Zufallsexperiment ein Ereignis A in den unvereinbaren Formen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_K$ auftreten kann und sonst in keiner anderen Form, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \dots, A_K$, geschrieben

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_K) . \quad (I.1.2)$$

Beweis des Theorems

n sei die Anzahl der vollständigen, unvereinbaren, gleichwahrscheinlichen Ereignisse des Experiments. Sie seien die elementaren Ereignisse des gegebenen Experiments. Es sei $A_1, A_2, A_3 \dots A_K$ der vollständige Satz von unvereinbaren Formen von A. Ferner sei $m_1, m_2, m_3 \dots m_K$ die entsprechende Anzahl von elementaren Ereignissen, günstig für $A_1, A_2, A_3 \dots A_K$. Die Zahl der elementaren Ereignisse, die günstig für A ist, ist infolgedessen die Summe von $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_K$. In Übereinstimmung mit der Definition der Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, gegeben durch:

$$p(A) = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_K}{n} \quad (I.1.3)$$

Diese Gleichung läßt sich umformen zu:

$$p(A) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \frac{m_3}{n} + \dots + \frac{m_K}{n} \quad (I.1.4)$$

Per Definition liefern in dieser Gleichung die Verhältnisse direkt die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A_1, A_2, A_3 \dots A_K$, d.h. wir erhalten

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \dots + p(A_K) \quad (I.1.5)$$

womit das Theorem bewiesen ist.

Das Theorem der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit hat die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Auftretens von zwei Ereignissen in einem Zufallsexperiment zum Inhalt. Das Wesen des Theorems liegt in dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit. Wir wollen uns zunächst die Bedeutung dieses Begriffes an einem Beispiel klar machen. Wir greifen dabei wieder auf das Beispiel des Kartenspiels mit 52 Karten zurück. Unser Experiment besteht darin, aus den 52 Karten eine herauszuziehen, zu behalten, und danach aus dem restlichen Stock von 51 Karten eine weitere herauszuziehen. Die Frage, die dazu nun gestellt wird, ist folgende: Wenn bekannt ist, daß die erste Karte ein Kreuz war, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite Karte wieder ein Kreuz ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folglich eine bedingte Wahrscheinlichkeit, da sie von einem bekannten Ereignis abhängt.

Um die bedingte Wahrscheinlichkeit allgemein auszudrücken, sei n die Anzahl von vollständigen, unvereinbaren, gleichwahrscheinlichen Ereignissen in einem Zufallsexperiment. Hiervon seien m_A Ereignisse günstig für das Ereignis A , und m_{AB} Ereignisse seien günstig für beide Ereignisse A und B . Der Ausdruck $p(A,B)$ stehe für die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Auftretens von A und B . Weiterhin sei $p(A)$ die Wahrscheinlichkeit für A , $p(B)$ die Wahrscheinlichkeit für B . Der Ausdruck $p(B|A)$ sei die bedingte Wahrscheinlichkeit für B unter der Voraussetzung, daß A eingetreten ist, und $p(A|B)$ für die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Voraussetzung, daß B eingetreten ist.

Da das Eintreten von A vorausgesetzt war, folgt notwendigerweise, daß alle jene Ereignisse, die günstig für A sind, als vollständige unvereinbare und gleichwahrscheinliche Ereignisse für das neue Zufallsexperiment anzusehen sind. Von diesen Ereignissen sind nun wiederum m_{AB} Ereignisse günstig für B . Es folgt dann per Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$p(B|A) = \frac{m_{AB}}{m_A} . \quad (I.1.6)$$

Erweiterung von Zähler und Nenner mit $\frac{1}{n}$ ergibt:

$$p(B|A) = \frac{\frac{m_{AB}}{n}}{\frac{m_A}{n}} . \quad (I.1.7)$$

Auf Grund der Definition der Wahrscheinlichkeit ist aber:

$$p(A) = \frac{m_A}{n} , \quad (I.1.8)$$

$$p(A,B) = \frac{m_{AB}}{n} , \quad (I.1.9)$$

so daß mit diesen beiden Gleichungen für die bedingte Wahrscheinlichkeit folgt:

$$p(B|A) = \frac{p(A,B)}{p(A)} . \quad (I.1.10)$$

An dieser Stelle sei nun die quantitative Ausrechnung des Beispiels durchgeführt, mit dem wir die bedingte Wahrscheinlichkeit einführten. Da beim Ziehen der ersten Karte 52 Spielkarten vorhanden sind, beim Ziehen der zweiten 51, ergibt sich $n = 52 \times 51$. Da ein Kartenspiel aus 4 Kartenarten, Kreuz, Pik, Herz, Karo, mit je 13 Karten besteht, ergibt sich die Anzahl der Ereignisse m_A , die günstig für das Ereignis A sind, zu $m = 13 \times 51$. Entsprechend

ergibt sich $m_{AB} = 13 \times 12$. Somit folgt für $p(A) = \frac{13 \times 51}{52 \times 51} = \frac{1}{4}$,
für $p(A,B) = \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{1}{17}$ und für die bedingte Wahrscheinlichkeit
 $p(B|A) = \frac{\frac{1}{17}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{17}$. In entsprechender Weise wie vorher folgt nun für
die bedingte Wahrscheinlichkeit für A, unter der Voraussetzung, daß B auf-
getreten ist, die folgende Beziehung:

$$p(A|B) = \frac{p(A,B)}{p(B)}. \quad (I.1.11)$$

Die Ergebnisse der Gleichungen (I.1.10) und (I.1.11) sind gewöhnlicherweise als Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Auftretens von A und B geschrieben und beinhalten das Theorem der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, auch Verbundwahrscheinlichkeit genannt. Dieses Theorem besagt folgendes: In einem angenommenen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Auftreten der Ereignisse A und B gleich dem Produkt der nichtbedingten Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A und der bedingten Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B unter der Voraussetzung, daß A stattgefunden hat. Oder es ist das Produkt der nichtbedingten Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B und der bedingten Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Voraussetzung, daß das Ereignis B stattgefunden hat. Geschrieben

$$p(A,B) = p(A) p(B|A) \quad (I.1.12)$$

oder

$$p(A,B) = p(B) p(A|B). \quad (I.1.13)$$

Für die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Auftretens von drei Ereignissen (A, B, C) folgt aus der wiederholten Anwendung von Gleichung (I.1.12) folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} p(A,B,C) &= p(A,B) p(C|A,B) \\ &= p(A)p(B|A)p(C|A,B). \end{aligned} \quad (I.1.14)$$

Verknüpft mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit ist der wichtige Begriff der statistischen Unabhängigkeit. Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses B unabhängig davon ist, ob A aufgetreten ist oder nicht, so ist per Definition B statistisch unabhängig von A. In anderen Worten, wenn

$$p(B|A) = p(B), \quad (I.1.15)$$

dann wird gesagt, daß B unabhängig von A ist. Wenn in einem angenommenen Zufallsexperiment das Ereignis B unabhängig von A ist, so folgt aus dem Theorem der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit sofort:

$$p(A, B) = p(A) p(B). \quad (I.1.16)$$

Unter der Unabhängigkeitsbedingung folgt weiterhin aus Gleichung (I.1.13):

$$p(A) p(B) = p(B) p(A|B), \quad (I.1.17)$$

und hieraus folgt das Resultat:

$$p(A|B) = p(A). \quad (I.1.18)$$

Diese Gleichung bringt zum Ausdruck, daß das Ereignis A statistisch unabhängig vom Ereignis B ist. Die Schlußfolgerung daraus heißt, wenn B unabhängig von A ist, so folgt auch, daß A unabhängig von B ist. Im Hinblick auf diese Tatsache kann das Theorem der bedingten Wahrscheinlichkeit in Form der Gleichung (I.1.16) folgendermaßen formuliert werden: Wenn die Ereignisse A und B in einem angenommenen Zufallsexperiment statistisch unabhängig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit ihres gemeinsamen Auftretens das Produkt ihrer nichtbedingten Wahrscheinlichkeiten.

Eine einfache Erläuterung dieses Theorems kann wieder mit Hilfe des Kartenspiels, bestehend aus 52 Karten, gegeben werden. Das Experiment besteht darin, aus dem Stock von 52 Karten eine Karte herauszuziehen, sie wieder zurückzulegen, so daß es wiederum 52 Karten sind, und eine neue Karte aus einem vollen Stock zu ziehen, oder aus zwei gleichen Kartenspielen je eine Karte zu ziehen. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit, zwei Kreuzkarten zu ziehen. Das Ereignis A ist gekennzeichnet durch das Resultat: Die erste Karte, die gezogen wurde, ist ein Kreuz. Und das Ereignis B ist gekennzeichnet durch die Tatsache, die zweite Karte, die gezogen wurde, ist ein Kreuz. In diesem Experiment ist nun, da in einem Fall die erste Karte zurückgelegt wurde, das Ereignis B unabhängig von dem Ereignis A. Infolgedessen erhalten wir $p(A) = \frac{1}{4}$, $p(B) = \frac{1}{4}$ und $p(A, B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Wir erinnern uns daran, daß, wenn die erste Karte nicht zurückgelegt wird, B abhängig von A ist und daß dann die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{17}$ ist.

Zum Abschluß dieses einleitenden Kapitels sei auf die Beziehung zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit eingegangen und das Bernoulli'sche Theorem besprochen, das diesen Zusammenhang zum Inhalt hat. Anfangs war darauf hingewiesen worden, daß bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf physikalische Probleme grundsätzlich die statistische Regelmäßigkeit vorausgesetzt sein muß. Die Vorstellung war, daß die Experimente viele Male unter gleichbleibenden Bedingungen wiederholt wurden, und daß die relative Häufigkeit gewisser Beobachtungen sich einem bestimmten Wert mehr und mehr nähert, je größer die Anzahl der Wiederholungsversuche ist. Die relative Häufigkeit und die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sind also eng verknüpft, und das Bernoulli'sche Theorem bringt diese Verknüpfung zum Ausdruck. Es besagt folgendes: Wenn in einer Serie von M unabhängigen Versuchen eines angenommenen Zufallsexperimentes die Anzahl der Erfolge eines Ereignisses gleich N_M ist, und die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis gleich p ist, dann strebt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Häufigkeitsverhältnis N_M/M sich von p um weniger als eine vorgegebene kleine Größe ε unterscheidet gegen 1, wenn $M \rightarrow \infty$ strebt. Geschrieben in der Form:

$$\mathcal{P} \left(\left| \frac{N_M}{M} - p \right| < \varepsilon \right) \rightarrow 1, \quad \text{für } M \rightarrow \infty. \quad (\text{I.1.19})$$

In anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit für dieses Ereignis für unendlich viele Versuche.

I.2 Zufallsveränderliche, Verteilungen und Mengen

In diesem Kapitel soll auf den Begriff der diskreten und stetigen Zufallsveränderlichen eingegangen werden. Weiterhin wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion besprochen sowie eine Erläuterung des Begriffs der statistischen Menge gegeben.

Um einen vollständigen Ausdruck für den Ausgang eines Zufallsexperiments zu geben, müssen wir den vollständigen Satz von unvereinbaren Ereignissen und von den Wahrscheinlichkeiten des Auftretens kennen. Angenommen sei dabei, daß die Ereignisse zahlenmäßig ausgedrückt sind. Da das Resultat für irgendeinen der möglichen Werte eine Zufallssache ist, wird der Ausgang eine Zufallsveränderliche genannt. Sie ist auch unter dem Namen stochastische Variable oder stochastische Veränderliche bekannt. Wenn der Ausgang eines Zufallsexperiments durch die Zufallsveränderliche ξ dargestellt wird, dann drücken wir ihre vollständigen unvereinbaren Werte aus durch:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (I.2.1)$$

und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten durch:

$$P_{\xi}(x_1), P_{\xi}(x_2), \dots, P_{\xi}(x_n). \quad (I.2.2)$$

Diese Wahrscheinlichkeiten sind ausgedrückt durch Funktionen, die für jeden möglichen Wert von ξ definiert sind. Wir drücken die Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit von ξ die Werte x_i annehmen kann, durch folgende allgemeine symbolische Schreibweise aus:

$$P(\xi = x_i) = P_{\xi}(x_i), \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (I.2.3)$$

Diese Funktion $P_{\xi}(x_i)$ wird die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen ξ genannt. Sie wird öfters abgekürzt durch die Ausdrücke Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Verteilungsfunktion oder einfach Verteilung. Da der Schwankungsbereich der Zufallsveränderlichen aus einem Satz diskreter Werte besteht, ist die Variable eine diskrete Zufallsveränderliche, und die Verteilung ist infolgedessen auch eine diskrete Verteilungsfunktion. Diese Funktion ist definiert für jeden möglichen Wert der Bereichsvariablen x_i . Die Verteilung ist eine nichtnegative Funktion in Übereinstimmung mit der Definition der Wahrscheinlichkeit, und es ist:

$$\sum_i P_{\xi}(x_i) = 1, \quad (I.2.4)$$

da der Ereignissatz vollständig ist. Soweit die Diskussion der diskreten Zufallsveränderlichen und ihre Verteilungsfunktion.

Zufallsexperimente in physikalischen Experimenten, deren Ausgänge oder Ergebnisse in Form von Spannungen, Temperaturen, Geschwindigkeiten etc. vorliegen, sind oftmals nicht auf einen Bereich diskreter Werte beschränkt, sondern besitzen häufig einen stetigen Variationsbereich. Wenn in einem solchen Fall der Variationsbereich der Zufallsveränderlichen stetig ist, so spricht man von einer stetigen Zufallsvariablen. Dabei sei angemerkt, daß der Ausdruck "stetig" sich auf den Variationsbereich der Zufallsvariablen erstreckt und nicht auf die Werte der Variablen in einer Versuchsfolge.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung läßt sich zur Anwendung auf stetige Zufallsveränderliche entsprechend erweitern. Für diese Erweiterung nehmen wir an, daß die Zufallsveränderliche ξ Werte annehmen kann, die in einem stetigen Bereich im Intervall $(-a, b)$ liegen. Die Bereichsvariable

sei x und das Intervall sei in Abschnitte der Länge Δx aufgeteilt. Wir nehmen ferner an, daß wir im Intervall $(0, b)$ n Elemente finden, und im Intervall $(-a, 0)$ m Elemente. Wir nehmen weiterhin an, daß eine genügend große Anzahl von Versuchen M des Experiments durchgeführt wurde und daß folgendes herauskommt:

- N_1 Versuche, bei denen ξ in das Intervall $(0, \Delta x)$ fällt
- N_2 Versuche, bei denen ξ in das Intervall $(\Delta x, 2\Delta x)$ fällt
-
-
- N_n Versuche, bei denen ξ in das Intervall $([n-1]\Delta x, n\Delta x)$ fällt (I.2.5)
- N_{-1} Versuche, bei denen ξ in das Intervall $(0, -\Delta x)$ fällt
- N_{-2} Versuche, bei denen ξ in das Intervall $(-\Delta x, -2\Delta x)$ fällt
-
-
- N_{-m} Versuche, bei denen ξ in das Intervall $(-[m-1]\Delta x; -m\Delta x)$ fällt.

Wenn man diesen Sachverhalt graphisch aufzeichnet (Abb.I.2.1),

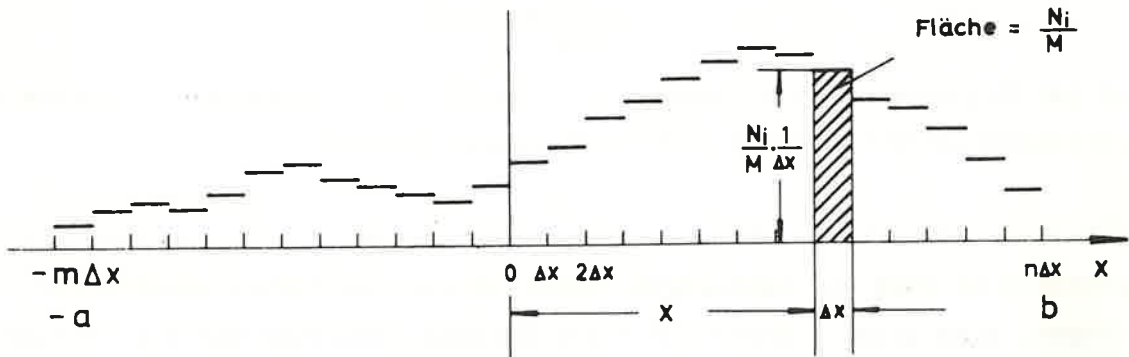


Abb.I.2.1

so stellt die Rechteckfläche über einem Element die relative Häufigkeit für das Ereignis dar, daß ξ in dieses Element hineinfällt. Zum Beispiel ist in dem Intervall $(x, x+\Delta x)$ die Fläche des schraffierten Rechtecks gegeben durch N_i/M oder anders ausgedrückt:

$$\left[\frac{N_i}{M} \right] \cdot \Delta x \quad (I.2.6)$$

Folglich ist die Höhe des Rechtecks gegeben durch:

$$h = \frac{N_i}{M \Delta x} \quad (I.2.7)$$

Um eine Zufallsveränderliche zu charakterisieren, deren Variationsbereich stetig ist, muß eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion (die in dem Bereich stetig ist) eingeführt werden. In einer solchen Funktion ist ein Bereichselement durch das Differential dx gegeben. Eine bequeme Darstellung der Wahrscheinlichkeit ist die Rechtecksfläche mit dx als Basis. Diese Überlegungen machen die notwendigen Schritte klar, die unternommen werden müssen, um eine solche Funktion zu interpretieren und zu erklären.

$P_\xi(x)$ sei nun eine solche Funktion. Wir nehmen an, daß sie in dem zu untersuchenden Bereich existiert. Genannt wird sie Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für ξ . Oft ist sie nur unter dem Namen Wahrscheinlichkeitsdichte oder Dichte bekannt. Da der Bereich aufgeteilt ist in Elemente der Länge dx , und das Element der Wahrscheinlichkeit $P_\xi(x) dx$ diejenige Wahrscheinlichkeit darstellt, daß ξ in eines dieser Elemente fällt, ist die Dichte $P_\xi(x)$ eigentlich eine Funktion, die die relativen Größen der Wahrscheinlichkeit aufzeigt.

Die Schwierigkeiten in der Beschreibung kontinuierlicher oder stetiger Zufallsgrößen ist damit beseitigt. Dieser Begriff der Dichte einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in Analogie zum Begriff der Massendichte in der Mechanik eingeführt worden.

Die Funktion $P_\xi(x)$ ist eine nichtnegative Funktion, und es gilt:

$$\int_{-a}^b P_\xi(x) dx = 1, \quad (I.2.8)$$

wobei das Intervall von $-a$ bis b geht, außerhalb dessen sie Null sein soll. Da die Funktion $P_\xi(x)$ auch im Intervall $-\infty$ bis $+\infty$ definiert ist, läßt sich unter obiger Voraussetzung schreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(x) dx = 1. \quad (I.2.9)$$

Dies, zusammen mit der Bedingung $P_\xi(x) \geq 0$, stellt die charakteristischen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dar.

Im folgenden sei auf die Erläuterung des Begriffs der Menge eingegangen. Aus der statistischen Mechanik kennen wir, daß beispielsweise zur Beschreibung der Eigenschaften des Verhaltens von Gasen der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anfangsbedingungen eingeführt worden ist. Eng verknüpft mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung ist der Begriff der Menge, der zuerst von J. Willard Gibbs eingeführt worden ist. Die Menge ist dabei ein angenommenes Aggregat von dynamischen Systemen identischer Struktur. Der Begriff der Menge und seine Modifikation war zur Beschreibung statistischer Probleme von großem Nutzen. In der Mechanik kann der Zustand eines Systems mit N Freiheitsgraden durch N Ortskoordinaten und N Impulskoordinaten festgelegt werden. Der Zustand dieses Systems, ausgedrückt durch diese Größen, ist als die Phase dieses Systems bekannt. Da die $2N$ Koordinaten einen $2N$ dimensionalen Raum bestimmen, wird dieser der Phasenraum des Systems genannt. Ein Punkt in dem Phasenraum beschreibt das System zu einer gegebenen Zeit. Für eine Menge, deren Mitgliedsysteme Zufallsanfangsbedingungen unterworfen sind, besitzen die Punkte im Phasenraum, die die Gesamtmenge bilden, zu einer gegebenen Zeit eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung. Für die Beschreibung der Anfangsbedingungen wurde der Begriff Phasenwahrscheinlichkeit eingeführt. Die Gibbs'sche Menge führte auch zu dem Begriff der Menge bei Untersuchungen von Rauschprozessen in der Informationstheorie. Während jedoch die Mitglieder einer Gibbs'schen Menge mechanische Systeme sind, deren Beschreibung auch mechanische Begriffe voraussetzt, sind dagegen die Mitglieder einer "Rauschmenge" Zufallszeitfunktionen, deren Beschreibung frei von mechanischen Begriffen ist.

Wir wollen eine Menge zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreiben. Nehmen wir an, wir hätten eine Serie stetiger Zeitfunktionen, die wir unter gleichbleibenden Bedingungen aus Rauschmessungen gewonnen hätten. Die eine Möglichkeit ist, daß wir nur eine Quelle besitzen und eine Serie von Versuchen mit fest vorgegebener Zeitdauer T unter den gleichen Bedingungen durchführen. Die Ergebnisse, die wir dabei gefunden haben, sollen beispielsweise der Art sein, wie sie in der Abbildung I.2.2 aufgezeichnet sind.

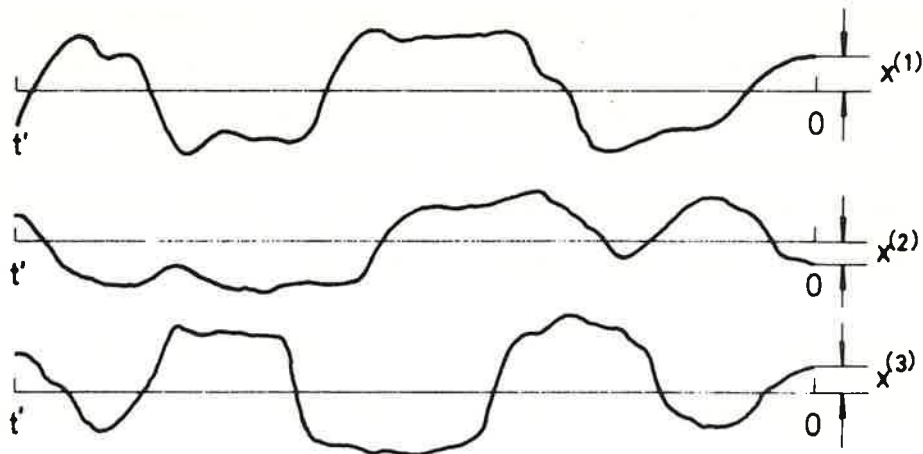


Abb. I.2.2

Der Anfang jedes Versuches liege z.Zt. $t = t'$ in der Vergangenheit, und die Beobachtung werde z.Zt. $t = 0$ durchgeführt. Wir erhalten dann einen Satz von Werten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ usw. Wir haben es hier mit einem angenehmen Zufallsexperiment zu tun, das unter gleichen Bedingungen öfters wiederholt wurde.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, nicht ein Experiment öfters zu wiederholen, sondern mit einer Reihe von gleichen Quellen mehrere Experimente gleichzeitig durchzuführen. Was wir dabei als Ergebnis erhalten, sieht ähnlich aus wie das in der Abbildung I.2.2, vorausgesetzt gleiche Bedingungen wie bei der ersten Beobachtungsart. Obgleich in einem physikalischen Experiment die Versuchsdauer notwendigerweise endlich ist, sei hier theoretisch angenommen, daß der Anfang der Versuche vor unendlich langer Zeit erfolgte. Da der Satz der beschriebenen Rauschquellen Zeitfunktionen erzeugt, die einerseits als Ergebnisse von wiederholten Versuchen eines einzelnen Experiments angesehen werden können, und andererseits gerade dieses Experiment mit irgendeiner der identischen Quellen in Beziehung gebracht werden kann, ist eine Beschreibung der Menge durch Wahrscheinlichkeitsgrößen möglich. So können wir die Wahrscheinlichkeit angeben, zu einer vorgegebenen Zeit die Amplitude irgendeiner zur Menge gehörigen Funktion zu finden, die in ein bestimmtes Intervall ihres stetigen Bereichs möglicher Werte hineinfällt. Wenn von der Amplitude einer der speziellen Funktionen zu einer gegebenen Zeit gesprochen wird, so ist das der Ausgang eines Experiments zu dieser Zeit, wobei vorherliegende Werte der Funktion nicht berücksichtigt werden. Dieser Punkt ist wichtig, da die besprochene Wahrscheinlichkeit nicht bedingt ist.

Da die Werte der Zeitfunktion in der Vergangenheit durch die Zufallsereignisse bestimmt waren, wird die Funktion in diesem Fall durch ihre wirklichen Werte beschrieben. Das Ereignis jedoch, das wir voraussagen wollen, liegt in der Zukunft. Wenn folglich die Zufallsamplitude von irgendeiner der zugehörigen Funktionen z.Zt. t_1 , die in der Zukunft liegt, ξ_1 genannt wird, und die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{\xi_1}(x_1, t_1)$ ist, so wird dies symbolisch durch folgende Schreibweise ausgedrückt:

$$P(x_1 < \xi_1 < x_1 + dx_1; t = t_1) = P_{\xi_1}(x_1, t_1) dx_1, \quad (I.2.10)$$

wobei x_1 die stetige Bereichsvariable für den endlichen oder unendlichen Bereich von ξ_1 ist.

Obgleich in Gleichung (I.2.10) angedeutet ist, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte eine zeitabhängige Funktion ist, gibt es auch Fälle, wo die Verteilungsdichte zeitunabhängig ist. In vielen praktischen Fällen, in denen es notwendig ist, die Zufallsfunktionen während einer endlichen Vergangenheit zu betrachten, sind diese Funktionen beispielsweise am Anfang zeitabhängig, jedoch hinterher nicht mehr. Zeitabhängigkeit liegt vor, wenn wir z.B. die Zufallsfunktionen des Rauschens einer Elektronenröhre ansehen, die gerade eingeschaltet worden ist und in der sich infolgedessen ein Temperaturgleichgewicht und ein Abklingen der Anfangstransienten noch nicht eingestellt hat. Warten wir jedoch eine genügend lange Zeit, so haben sich Gleichgewichtsbedingungen eingestellt und die Wahrscheinlichkeitsdichte ist zeitunabhängig. Wenn folglich die Wahrscheinlichkeitsdichte von Amplituden einer Menge, unabhängig von der Beobachtungszeit, immer die gleiche ist, so wird die Menge stationär genannt. Unter dieser Bedingung erhält die Gleichung (I.2.10) folgende Form:

$$P(x_1 < \xi_1 < x_1 + dx_1; t = t_1) = P_{\xi_1}(x_1) dx_1. \quad (I.2.11)$$

$P_{\xi_1}(x_1)$ ist jetzt die zeitunabhängige Dichte von ξ_1 , die ebenfalls unter dem Namen erste Wahrscheinlichkeitsdichte der Menge bekannt ist.

Als Erweiterung der Beschreibung einer stationären Menge zu einem einzigen bestimmten Zeitpunkt sei dazu übergegangen, eine entsprechende Beschreibung an zwei um τ_1 gegeneinander verschobenen Zeitpunkten zu erhalten. Angenommen es existiert eine Funktion $P_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2; \tau_1)$ derart, daß für irgendeine Mitgliedsfunktion der stationären Menge $P_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2; \tau_1)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, zu einer gegebenen zukünftigen Zeit $t = t_1$ die Größe ξ_1 im

Intervall $(x_1, x_1 + dx_1)$ zu finden und zu einer späteren Zeit $t = t_2 = t_1 + \tau_1$ die Größe ξ_2 im Intervall $(x_2, x_2 + dx_2)$. Auf der Grundlage der statistischen Regelmäßigkeit kann man sagen, daß bei hinreichend kleinen Δx_1 und Δx_2 und genügend großer Versuchszahl M die Häufigkeitsverhältnisse $\left(\frac{N_{i,j}}{M}\right)(\Delta x_1 \Delta x_2)$ für die stetige Zufallsvariable eine gute Schätzung für die Funktion $P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2; \tau_1)$ liefern. Diese Funktion ist als Verbundwahrscheinlichkeitsdichte bekannt. Im Hinblick auf die erste Wahrscheinlichkeitsdichte wird sie auch zweite Wahrscheinlichkeitsdichte der Menge genannt. Da hier nur stationäre Mengen betrachtet werden, ist die Dichte unabhängig von der Zeit t_1 . Die Schätzung der Dichte wird als empirische Verbundwahrscheinlichkeitsdichte oder empirische zweite Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnet. Die Dichte ist eine Funktion der stetigen Bereichsvariablen x_1 und x_2 und der stetigen Zeitvariablen $\tau_1 = t_2 - t_1$.

Das Wahrscheinlichkeitselement für zwei Zufallsvariable läßt sich symbolisch folgendermaßen schreiben:

$$P(x_1 < \xi_1 < x_1 + dx_1 ; x_2 < \xi_2 < x_2 + dx_2 ; t_2 - t_1 = \tau_1) = P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2; \tau_1) dx_1 dx_2 . \quad (I.2.12)$$

I.3 Mittelwerte

In diesem Kapitel wollen wir uns zunächst mit den Mittelwerten diskreter und stetiger Zufallsvariablen beschäftigen, dann zu den Momenten übergehen, die Varianz behandeln, und am Ende des Kapitels die charakteristischen Funktionen einführen.

Von Interesse ist der Mittelwert einer diskreten Zufallsvariablen. Eine nützliche Größe für einen Satz von n Werten a_1, a_2, a_3 usw. a_n ist der arithmetische Mittelwert. Wenn m diesen Mittelwert bezeichnet, so ist er bekanntermaßen definiert durch:

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} . \quad (I.3.1)$$

Der Begriff des Mittelwertes ist auch auf Zufallsveränderliche anwendbar. Wir betrachten eine diskrete Zufallsvariable ξ , die die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_\xi(x_i)$ besitzt. Da wir bei einer Zufallsveränderlichen zur Berechnung des Mittels keinen bestimmten Satz von Größen zur Verfügung haben, läßt sich die allgemeine, in Gleichung (I.3.1) angegebene Definition hierauf nicht anwenden. Die Definition des Mittelwertes kann jedoch

mit Hilfe der Verteilung gewonnen werden. Dazu betrachten wir zunächst wieder ein Gedankenexperiment. Wir nehmen an, daß der vollständige Satz von möglichen Werten für ξ durch $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ gegeben ist und daß eine hinreichend große Zahl von Versuchen M durchgeführt wurden. Wir finden dann:

$$\begin{array}{l} N_1 \text{ Erfolge für } \xi = x_1 \\ \vdots \\ N_i \text{ Erfolge für } \xi = x_i \\ \vdots \\ N_n \text{ Erfolge für } \xi = x_n, \end{array} \quad (1.3.2)$$

wobei $N_1, \dots, N_i, \dots, N_n$ nicht 0 sind. Bei M Versuchen ist dann die Summe der beobachteten Werte von ξ gegeben durch:

$$x_1 N_1 + \dots + x_i N_i + \dots + x_n N_n. \quad (1.3.3)$$

Diese Werte sind nun bestimmte experimentelle Werte, und die Definition der Gleichung (1.3.1) ist auf sie anwendbar. Der in M Versuchen gefundene empirische Mittelwert für ξ ergibt sich demnach zu:

$$\xi_{em} = \frac{x_1 N_1 + \dots + x_i N_i + \dots + x_n N_n}{M}. \quad (1.3.4)$$

Diese Größe läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\xi_{em} = x_1 \frac{N_1}{M} + \dots + x_i \frac{N_i}{M} + \dots + x_n \frac{N_n}{M}, \quad (1.3.5)$$

wobei in dieser Gleichung die bei x stehenden Faktoren die bekannten relativen Häufigkeiten sind. Auf Grund des Theorems von Bernoulli gilt:

$$P \left(\left| \frac{N_i}{M} - P_{\xi}(x_i) \right| < \varepsilon \right) \rightarrow 1, \quad \text{für } M \rightarrow \infty. \quad (1.3.6)$$

Der experimentelle Mittelwert, der durch die Gleichung (1.3.5) ausgedrückt wird, ist deshalb ein Maß für folgende Größe:

$$\bar{\xi} = x_1 P_{\xi}(x_1) + \dots + x_i P_{\xi}(x_i) + \dots + x_n P_{\xi}(x_n), \quad (1.3.7)$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^n x_i P_{\xi}(x_i). \quad (1.3.8)$$

Die Größe $\bar{\xi}$ ist bekannt als der mathematische Erwartungswert von ξ . Da der Bereich von ξ negativ und unendlich sein kann, ersetzen wir die Definitionsgleichung durch den allgemeineren Ausdruck:

$$\bar{\xi} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i P_{\xi}(x_i) . \quad (I.3.9)$$

Die Ausdrücke mathematischer Erwartungswert oder Mittel von ξ sind gleichbedeutend. Andere Symbole, die für den Erwartungswert verwendet werden, sind: $E(\xi)$ und $\langle \xi \rangle$.

Als nächstes werde der Mittelwert einer stetigen Zufallsvariablen behandelt. Wenn eine Zufallsvariable ξ in einem stetigen Bereich die möglichen Werte x annehmen kann und eine Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{\xi}(x)$ besitzt, so kann der empirische Mittelwert von ξ pro Versuch folgendermaßen erhalten werden: Angenommen sei ein Bereich $(0,A)$, der in Elemente mit der Länge Δx aufgeteilt sei. Die Gesamtzahl der Aufteilungen sei K , so daß die Serie von Punkten, die die Aufteilungen kennzeichnen, gegeben sind durch $0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, i\Delta x, \dots, K\Delta x$. Weiterhin sei angenommen, daß die Anzahl der durchgeführten Versuche M hinreichend groß sei. Wir finden dann:

$$\left. \begin{array}{l}
N_1 \text{ Erfolge für das Auftreten von } \xi \text{ in } (0, \Delta x) \\
N_2 \text{ Erfolge für das Auftreten von } \xi \text{ in } (\Delta x, 2\Delta x) \\
\vdots \\
N_i \text{ Erfolge für das Auftreten von } \xi \text{ in } ([i-1]\Delta x, i\Delta x) \\
\vdots \\
N_K \text{ Erfolge für das Auftreten von } \xi \text{ in } ([K-1]\Delta x, K\Delta x),
\end{array} \right\} (I.3.10)$$

wobei $N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_K$ alle nicht 0 sind. Bei der Gesamtzahl von M Versuchen kann die Summe der beobachteten Werte von ξ ungefähr angenähert werden durch die Annahme, daß die N_1 Beobachtungen im Ausdruck (I.3.10) jede den gleichen Wert Δx besitzt, und daß, ähnlich von den N_2 Beobachtungen, jede den Wert $2\Delta x$ besitzt usw. Diese Annahme kann gemacht werden, wenn Δx klein genug ist. Die Summe der beobachteten Werte von ξ bei insgesamt M Versuchen wird dann:

$$\Delta x N_1 + 2\Delta x N_2 + \dots + i\Delta x N_i + \dots + K\Delta x N_K , \quad (I.3.11)$$

und der experimentelle Mittelwert von ξ pro Versuch ist gegeben durch:

$$\xi_{em} = \Delta x \frac{N_1}{M} + 2\Delta x \frac{N_2}{M} + \dots + i\Delta x \frac{N_i}{M} + \dots + K\Delta x \frac{N_K}{M} . \quad (I.3.12)$$

Erweitern wir Zähler und Nenner mit Δx , so erhalten wir:

$$\xi_{em} = \sum_{i=1}^K i \Delta x \left[\frac{N_i}{M} \frac{1}{\Delta x} \right] \Delta x . \quad (I.3.13)$$

Wir hatten schon im Ausdruck (I.2.6) gesehen, daß der Ausdruck in Klammern ein Maß für die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{\xi}(x)$ ist. Infolgedessen gibt die Gleichung (I.3.13) den empirischen Wert für den exakten Mittelwert:

$$\bar{\xi} = \int_0^A x P_{\xi}(x) dx . \quad (I.3.14)$$

Per Definition ist dies der Mittelwert der Zustandsveränderlichen ξ , wenn sie einen stetigen Variationsbereich besitzt. Unter der Berücksichtigung der Möglichkeit, daß ξ einen unendlichen Bereich $(-\infty, \infty)$ besitzt, ergibt sich für den Mittelwert in seiner allgemeinen Form:

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_{\xi}(x) dx . \quad (I.3.15)$$

Dieser Ausdruck steht in Analogie zum Ausdruck (I.3.9).

Eine Größe, die noch häufiger auftreten wird, ist das mittlere Quadrat einer Zufallsveränderlichen. Der Ausdruck hierfür folgt leicht aus den vorherigen Betrachtungen. Führen wir ein Experiment durch, um einen empirischen Wert zu erhalten, so ist der einzige Unterschied, daß die Zufallsvariable in quadratischer und nicht in einfacher Form vorliegt. Wir hatten vorher gefunden, daß bei einer Gesamtzahl von M Versuchen es N_1 Erfolge für $\xi = x_1$ gibt. Wenn die Funktion nun in quadratischer Form vorliegt, folgt in logischer Weise, daß dann die gleiche Anzahl von Erfolgen, N_1 , für $\xi^2 = x_1^2$ vorliegt. Die Summe der beobachteten Werte von ξ^2 bei M Versuchen folgt demgemäß zu:

$$x_1^2 N_1 + \dots + x_i^2 N_i + \dots + x_n^2 N_n , \quad (I.3.16)$$

und der empirische Mittelwert für ξ^2 pro Versuch ist dann gegeben durch:

$$\xi_{em}^2 = x_1^2 \frac{N_1}{M} + \dots + x_i^2 \frac{N_i}{M} + \dots + x_n^2 \frac{N_n}{M} . \quad (I.3.17)$$

Da die relativen Häufigkeiten die gleichen bleiben, wie in Gleichung (I.3.5), läßt sich in Analogie zur Gleichung (I.3.8) für den Mittelwert von ξ^2 schreiben:

$$\bar{\xi}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 P_{\xi}(x_i) , \quad (I.3.18)$$

oder in der allgemeinen Form:

$$\overline{\xi^2} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i^2 P_{\xi}(x_i) . \quad (\text{I.3.19})$$

Dies ist die Definition des mittleren quadratischen Wertes einer diskreten Zufallsveränderlichen ξ .

Aus den bisherigen Ergebnissen folgt, daß für den Mittelwert der m-ten Potenz von ξ gilt:

$$\overline{\xi^m} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i^m P_{\xi}(x_i) . \quad (\text{I.3.20})$$

Der Mittelwert von ξ^m wird oft das m-te Moment von ξ genannt. Folglich ist der Mittelwert $\overline{\xi}$ das erste Moment und der mittlere quadratische Wert $\overline{\xi^2}$ das zweite Moment.

Für die stetige Zufallsvariable gelten entsprechend die beiden Ausdrücke:

$$\overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P_{\xi}(x) dx , \quad (\text{I.3.21})$$

$$\overline{\xi^m} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m P_{\xi}(x) dx . \quad (\text{I.3.22})$$

Verallgemeinerte Ausdrücke für Mittelwerte, die eine Zufallsveränderliche einschließen, können nach dem gleichen Verfahren erhalten werden. Anstatt die beobachteten Werte zu quadrieren oder potenzieren, können wir auch irgendwelche Funktionen dieser Werte betrachten. Beispielsweise, wenn x_1 beobachtet ist, können wir $\sin x_1$ oder $\log x_1$ oder e^{-x_1} bilden und können die Mittelwerte dieser Größen finden. Mit anderen Worten: Wir betrachten den Erwartungswert für $f(\xi)$. Die möglichen Werte von ξ seien wieder $x_1, \dots, x_1, \dots, x_n$ mit der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $P_{\xi}(x_i)$. Wenn M wieder eine genügend große Zahl von Versuchen ist, so findet man in Analogie zum Verfahren (I.3.10) den Mittelwert für $f(\xi)$ in der allgemeinen Form:

$$\overline{f(\xi)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(x_i) P_{\xi}(x_i) . \quad (\text{I.3.23})$$

Wir können weitere Möglichkeiten diskutieren und z.B. die Anwesenheit eines Parameters in $f(\xi)$ betrachten. Die Größe t sei nun ein reeller und stetiger Parameter. Bilden wollen wir den Mittelwert der Funktion $f(t, \xi)$ im Hinblick auf die Verteilung von ξ . Beispielsweise sei die interessierende Funktion gegeben durch:

$A \sin(\omega_1 t + \xi)$ oder durch $\xi \sin(\omega_1 t + \theta)$ oder durch $A \sin(\xi t + \theta)$.

Der erste Ausdruck stellt eine Sinuswelle mit bestimmter Amplitude und Frequenz, aber mit einem Zufallsphasenwinkel, dar. Der zweite Ausdruck beschreibt eine Sinuswelle mit bestimmter Frequenz und Phase, aber Zufallsamplitude, und der dritte schließlich eine Sinuswelle mit bestimmter Amplitude und Phasenwinkel, aber Zufallsfrequenz.

Bisher waren die betrachteten Mittelwerte einfache Werte, jetzt ist hingegen der Mittelwert von $f(t, \xi)$ eine Funktion von t . Das bedeutet, daß für jeden Wert von t ein einfacher Mittelwert im Hinblick auf die Verteilung von ξ existiert. In Analogie zum vorherigen Verfahren erhalten wir als empirischen Mittelwert von $f(t, \xi)$ pro Versuch:

$$\overline{f(t, \xi)} \Big|_{em} = f(t, x_1) \frac{N_1}{M} + \dots + f(t, x_i) \frac{N_i}{M} + \dots + f(t, x_n) \frac{N_n}{M}. \quad (I.3.24)$$

Ist die Verteilung von ξ gegeben durch $P_\xi(x_i)$, so definieren wir den Mittelwert von $f(t, \xi)$ im Hinblick auf die Verteilung von ξ durch den Ausdruck:

$$\overline{f(t, \xi)}^\xi = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t, x_i) P_\xi(x_i). \quad (I.3.25)$$

Der Querstrich mit dem Buchstaben ξ zeigt an, daß der Mittelwert für die Verteilung von ξ gebildet wurde und nicht für den Parameter t .

Wenn ξ in dem Bereich stetig ist und die Wahrscheinlichkeitsdichte von ξ durch $P_\xi(x)$ gegeben ist, so wird die Definitionsgleichung:

$$\overline{f(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P_\xi(x) dx \quad (I.3.26)$$

für den Fall einer Variablen. Für den Fall mit Parameter folgt als Definitionsgleichung:

$$\overline{f(t, \xi)}^\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x) P_\xi(x) dx. \quad (I.3.27)$$

Wir kehren zurück zu den quadratischen Mittelwerten, um einen wichtigen Mittelwert für die Zufallsvariable ξ kennenzulernen, nämlich die Varianz σ_ξ^2 . Die Varianz ist definiert durch die Gleichung:

$$\sigma_\xi^2 = \overline{(\xi - \bar{\xi})^2}. \quad (I.3.28)$$

Die Quadratwurzel aus der Varianz, σ_{ξ} , wird die Standardabweichung von ξ genannt. Eine anschauliche Deutung der Varianz wird in der Abbildung I.3.1 gezeigt:

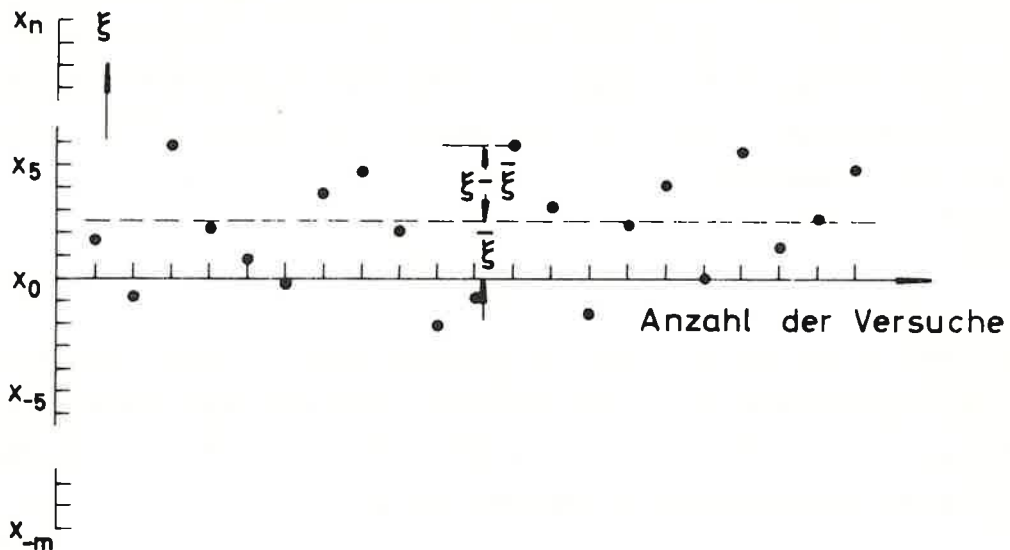


Abb. I.3.1

Wenn ξ folgende mögliche Werte besitzt: $x_{-m}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n$, dann resultiert aus einer Serie von Experimenten eine Zahlenfolge, beispielsweise $x_1, x_{-3}, x_9, x_2, x_3, x_6, \dots$, wie sie in der Abbildung I.3.1 graphisch dargestellt ist. Wenn wir annehmen, daß der Mittelwert von ξ nicht 0 ist, dann sehen wir, daß $\xi - \bar{\xi}$ die Zufallsvariable ist, die mit ihrem Bezugspunkt $\xi = 0$ nach $\xi = \bar{\xi}$ verschoben ist. Der mittlere quadratische Wert dieser Veränderlichen, nämlich $(\xi - \bar{\xi})^2$, ist infolgedessen das mittlere Quadrat von ξ mit seinem Mittelwert als Bezugspunkt. In anderen Worten, die Varianz von ξ ist der mittlere quadratische Wert von ξ um seinen Mittelwert. Wenn der Mittelwert von $\xi = 0$ ist, so wird die Varianz wieder einfach der mittlere quadratische Wert von ξ , und auch die Standardabweichung ist dann wieder die bekannte Größe, nämlich die Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat von ξ .

In der Statistik ist die Varianz ein Maß für die Streuung oder die Dispersion von Verteilungsfunktionen, bezogen auf ihren Mittelwert. Je größer die Streuung der statistischen Daten, desto größer ist auch die Varianz. Um die Varianz in einer bequemeren Form auszudrücken, wenden wir die Gleichung (I.3.23) an und setzen $f(\xi) = (\xi - \bar{\xi})^2$, so daß sich ergibt:

$$\sigma_{\xi}^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{\xi})^2 P_{\xi}(x_i) . \quad (I.3.29)$$

In diesem Ausdruck ist $\bar{\xi}$ eine Konstante. Wenn wir Gleichung (I.3.29) ausrechnen, erhalten wir:

$$\sigma_{\xi}^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i^2 P_{\xi}(x_i) - 2 \bar{\xi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i P_{\xi}(x_i) + \bar{\xi}^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x_i) . \quad (I.3.30)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist nach Gleichung (I.3.19) gleich $\bar{\xi}^2$. Auf Grund der Gleichung (I.3.9) ist der zweite Term gleich $-2 \bar{\xi} \cdot \bar{\xi}$. Der letzte Term ist offensichtlich $\bar{\xi}^2$, so daß

$$\sigma_{\xi}^2 = \bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2 . \quad (I.3.31)$$

Wenn die Größe ξ stetig ist, kann das gleiche Resultat durch Anwendung von (I.3.26) erhalten werden. Bei einem diskreten oder stetigen Bereich der Zufallsvariablen ist die Varianz von ξ gegeben durch das mittlere Quadrat von ξ minus dem quadratischen Mittelwert von ξ .

Mittelwerte lassen sich ebenfalls für Fälle bilden, in denen mehrere Zufallsvariable vorkommen oder Produkte und Summen von Zufallsvariablen. Hierauf sei nicht weiter eingegangen. Worauf hier noch eingegangen werden soll, ist ein spezieller Fall der Gleichung (I.3.27), der von besonderem Interesse ist.

Wir setzen dazu

$$f(t, \xi) = e^{it\xi} . \quad (I.3.22)$$

Wird diese Funktion in (I.3.27) eingesetzt, so folgt:

$$e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P_{\xi}(x) dx . \quad (I.3.33)$$

Dieser Mittelwert, der eine Funktion des reellen Parameters t ist, wird die charakteristische Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{\xi}(x)$ genannt.

Wenn wir diese Funktion mit $p_{\xi}(t)$ bezeichnen, so können wir (I.3.33) in folgender Form schreiben:

$$p_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) e^{itx} dx . \quad (I.3.34)$$

In der Terminologie der harmonischen Analyse ist die charakteristische Funktion (I.3.34) die Fourier-Transformierte der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Es ist eine spezielle Transformation, da die Funktion reell und nicht negativ ist und ein Integral besitzt, das von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt gerade gleich 1 ist. Wenn $P_{\xi}(x)$ gerade ist, so ist die charakteristische Funktion reell. Im allgemeinen ist $p_{\xi}(t)$ jedoch komplex.

Eine der Anwendungsmöglichkeiten der charakteristischen Funktion ist die Berechnung von Momenten. Um dies zu zeigen, werde $p_{\xi}(t)$ nach t differenziert. Die n -te Ableitung ist dann:

$$p_{\xi}^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\xi}(x) e^{itx} dx . \quad (\text{I.3.35})$$

Wenn wir $t = 0$ setzen und umformen, ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{i^n} p_{\xi}^{(n)}(0) . \quad (\text{I.3.36})$$

Nach Gleichung (I.3.22) ist die linke Seite das n -te Moment von ξ . Folglich ist:

$$\overline{\xi^n} = \frac{1}{i^n} p_{\xi}^{(n)}(0) . \quad (\text{I.3.37})$$

Dieses Resultat besagt: Die Momente von ξ können durch Differentiation der charakteristischen Funktion an der Stelle $t = 0$ gewonnen werden.

Dazu betrachten wir ein Rechenbeispiel. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{\xi}(x)$ sei gegeben durch den Ausdruck

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} . \quad (\text{I.3.38})$$

Die charakteristische Funktion dieser Dichte ist nach (I.3.34) gegeben durch:

$$\begin{aligned} p_{\xi}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} dx & (\text{I.3.39}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx dx \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} . & (\text{I.3.40}) \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
 p'_{\xi}(t) &= -t e^{-\frac{t^2}{2}} \\
 p''_{\xi}(t) &= (t^2 - 1) e^{-\frac{t^2}{2}} \\
 p'''_{\xi}(t) &= (-t^3 + 3t) e^{-\frac{t^2}{2}} \\
 p''''_{\xi}(t) &= (t^4 - 6t^2 + 3) e^{-\frac{t^2}{2}} \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{aligned}
 \tag{I.3.41}$$

Nach (I.3.37) ergeben sich die Momente demnach zu:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= 0 \\
 \mu_2 &= 1 \\
 \mu_3 &= 0 \\
 \mu_4 &= 3 \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{aligned}
 \tag{I.3.42}$$

I.4 Poisson-Verteilung und Normaldichte

Die Poisson-Verteilung

Eine Verteilungsfunktion von großer Wichtigkeit ist die Poisson-Verteilung. Aus diesem Grunde sei auf ihre Ableitung und Darstellung ausführlich eingegangen. Um ein besseres Verständnis ihrer Anwendung auf physikalische Problemstellungen zu erhalten, werden wir diese Funktion im Hinblick auf eine spezielle stationäre Menge ableiten. Eine solche Menge ist in der Abbildung I.4.1 angedeutet. Jede der zugehörigen Funktionen wechselt in Zufallszeitintervallen zwischen den Werten E_m und $-E_m$ und nimmt beim Sprung den Wert Null an. Derartige Funktionen ließen sich beispielsweise dadurch herstellen, daß die verstärkte Rauschspannung einer Elektronenröhre so geklippt wird, daß sie den Wert $+E_m$ für positive und den Wert $-E_m$ für negative Spannungswerte annimmt. Die Verteilungsfunktion, die in diesem Fall hier interessiert, ist die Verteilung der Anzahl von Nulldurchgängen im Intervall τ , so wie es in der Abbildung I.4.1 angedeutet ist.

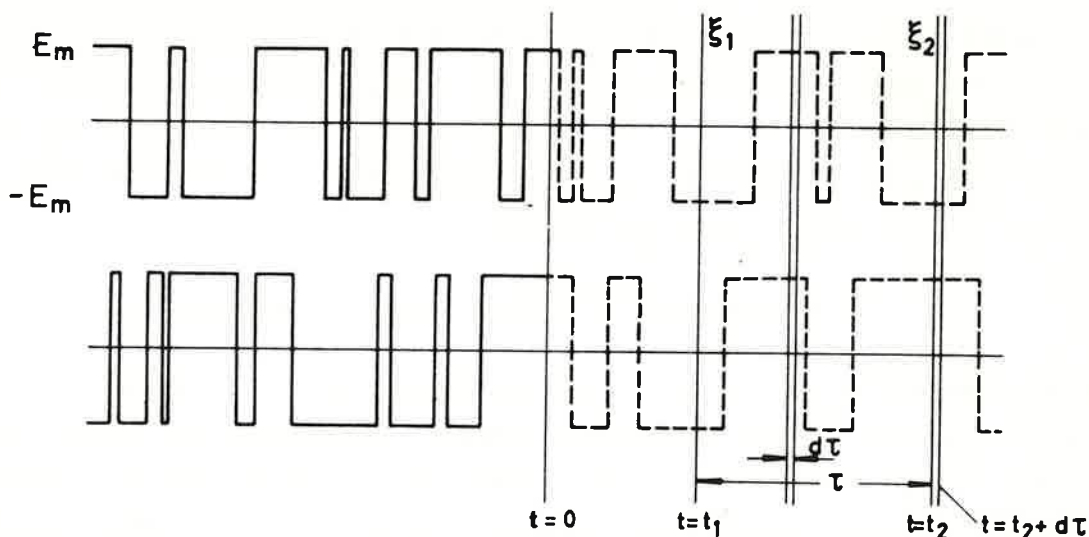


Abb. I.4.1

Bei der Spezifizierung der Bedingungen wird davon ausgegangen, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung existiert. Die Zufallsvariable ξ sei die Anzahl der Nulldurchgänge im Intervall τ eines jeden Mengenmitglieds. Der vollständige Satz der möglichen Werte von ξ ist $n = 0, 1, 2, \dots$. Die dazugehörige Verteilung, $P_{\xi}(n; \tau)$, liefert die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem einzelnen Versuch die Anzahl der Nulldurchgänge im gegebenen Intervall τ die gegebene Anzahl n ist. In symbolischer Schreibweise:

$$P(\xi = n; \tau) = P_{\xi}(n, \tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.4.1})$$

Es werde nun mit der Bestimmung von $P_{\xi}(n, \tau)$ fortgefahren.

Eine Größe, die bei der Untersuchung dieses Problems benötigt wird, ist die mittlere Anzahl von Nulldurchgängen pro Zeiteinheit. Diese mittlere Anzahl sei durch k gegeben, so daß

k = Mittlere Anzahl von Nulldurchgängen pro Zeiteinheit.

Entsprechend der Gleichung für den Mittelwert (I.3.8) erhalten wir für die mittlere Anzahl von Nulldurchgängen pro τ Zeiteinheiten den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \overline{\xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_{\xi}(n; \tau), \\ \overline{\xi} &= k\tau. \end{aligned} \quad (\text{I.4.2})$$

Da die weitere Herleitungsmethode auf der Formulierung des Problems in Form einer Differentialgleichung beruht, ist das wesentliche Wahrscheinlichkeitselement nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Nulldurchgang im infinitesimalen Zeitintervall $d\tau$ entweder auftritt oder nicht auftritt. Um diese Größe zu bestimmen, betrachten wir ein spezielles Element $d\tau$ innerhalb des Intervalls $\tau = t_2 - t_1$, so wie in der Abbildung I.4.1 angedeutet. Die Anzahl der Nulldurchgänge im Zeitelement $d\tau$ ist ja eine Zufallsvariable. Sie sei mit η bezeichnet. Also

$$\eta = \text{Zufallsvariable, Anzahl von Nulldurchgängen in } d\tau .$$

Diese Veränderliche hat nur zwei mögliche Werte, nämlich Null und 1. Das ist der Fall, wenn wir die Wahrscheinlichkeit vernachlässigen können, daß die Anzahl der Nulldurchgänge in $d\tau$ größer als 1 ist. Dieser Fall ergibt aber, wie hier nicht ausführlicher gezeigt werden soll, ein Infinitesimal höherer Ordnung als $d\tau$. Folglich haben wir es im weiteren Verlauf nur mit zwei Wahrscheinlichkeitselementen zu tun, nämlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\eta = 1, d\tau) &= \text{Wahrscheinlichkeit, daß } \eta = 1 \text{ in } d\tau, \\ \mathcal{P}(\eta = 0, d\tau) &= \text{Wahrscheinlichkeit, daß } \eta = 0 \text{ in } d\tau. \end{aligned}$$

Um diese Wahrscheinlichkeiten zu finden, setzen wir mit $d\tau$ das Intervall τ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung (I.4.1) in Beziehung. Wir teilen das Intervall τ in Elemente auf, von denen jedes die Länge $d\tau$ besitze. Auf diese Weise erhalten wir eine Gesamtzahl von $\frac{\tau}{d\tau}$ Elementen. Nun betrachten wir das Ereignis A. Es ist:

Ereignis A : Anzahl der Nulldurchgänge in τ ist irgendeine Zahl n ($n = 1, 2, 3, \dots$) und Zahl der Nulldurchgänge im speziellen $d\tau$ ist 1.

Im symbolischer Schreibweise:

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\xi = n; \tau, \eta = 1; d\tau), \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{I.4.3})$$

Es ist ersichtlich, daß diese Wahrscheinlichkeit die gleiche ist wie diejenige Wahrscheinlichkeit $\eta = 1$ in einem speziellen $d\tau$ unabhängig von der Zahl von Nulldurchgängen in τ zu finden, wenn die Anzahl der Nulldurchgänge in τ mindestens 1 ist. Somit ist:

$$\mathcal{P}(\xi = n; \tau, \eta = 1; d\tau) = \mathcal{P}(\eta = 1; d\tau), \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{I.4.4})$$

Folglich erhalten wir die gewünschte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(\eta = 1; d\tau)$, wenn wir (I.4.3) bestimmen.

Zur Bestimmung von (I.4.3) wenden wir nun das Theorem der Gesamtwahrscheinlichkeit und das Theorem der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit an. Das Ereignis A hat die unvereinbaren Formen

$$\left. \begin{aligned} A_1 &: \xi = 1 \text{ in } \tau, \text{ und } \eta = 1 \text{ in einem speziellen } d\tau \\ A_2 &: \xi = 2 \text{ in } \tau, \text{ und } \eta = 1 \text{ in einem speziellen } d\tau \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (1.4.5)$$

Jedes dieser Ereignisse ist ein zusammengesetztes Ereignis. Die Wahrscheinlichkeitsausdrücke für (I.4.5) sind:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}(A_1) &= \mathcal{P}(\xi = 1; \tau, \eta = 1; d\tau) \\ \mathcal{P}(A_2) &= \mathcal{P}(\xi = 2; \tau, \eta = 1; d\tau) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (1.4.6)$$

Auf Grund des Theorems der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten gilt für die Ausdrücke (I.4.6) folgendes:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}(A_1) &= \mathcal{P}(\xi = 1; \tau) \cdot \mathcal{P}(\eta = 1; d\tau \mid \xi = 1; \tau) \\ \mathcal{P}(A_2) &= \mathcal{P}(\xi = 2; \tau) \cdot \mathcal{P}(\eta = 1; d\tau \mid \xi = 2; \tau) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (1.4.7)$$

Wir betrachten nun $\mathcal{P}(A_1)$ aus (I.4.7). Die nichtbedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(\xi = 1; \tau)$ ist für das Ereignis, daß $\xi = 1$ in τ . Es ist ersichtlich, daß dies die Wahrscheinlichkeitsverteilung (I.4.1) ist für den Fall $n = 1$. Folglich gilt:

$$\mathcal{P}(\xi = 1; \tau) = P_{\xi}(1; \tau).$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(\eta = 1; d\tau \mid \xi = 1; \tau)$ gilt für das Ereignis, daß $\eta = 1$ in $d\tau$, wenn bekannt ist, daß $\xi = 1$ in τ . Da aber das Intervall τ in $\frac{\tau}{d\tau}$ Elemente aufgeteilt ist und da $\xi = 1$ in τ , folgt aus der Definition der Wahrscheinlichkeit, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses in $d\tau$ gegeben ist durch $\frac{1}{\left(\frac{\tau}{d\tau}\right)} = \frac{d\tau}{\tau}$.

Folgende Annahme haben wir allerdings dabei gemacht. 1. Annahme: Wenn ein Nulldurchgang in τ auftritt, hat er die gleiche Wahrscheinlichkeit für sein Auftreten in irgendeinem der infinitesimalen Elemente $d\tau$, in die τ aufgeteilt ist.

Unter dieser Annahme können wir schreiben:

$$P(\eta = 1, d\tau | \xi = 1; \tau) = \frac{d\tau}{\tau},$$

und damit folgt:

$$P(A_1) = P_{\xi}(1; \tau) \cdot \frac{d\tau}{\tau}. \quad (I.4.8)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(A_2)$ aus dem Ausdruck (I.4.7) wird in ähnlicher Weise bestimmt. Zuerst folgt, wie vorher, daß $P(\xi = 2; \tau) = P_{\xi}(2; \tau)$ ist. Für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\eta = 1; d\tau | \xi = 2; \tau)$ haben wir den Fall, daß $\xi = 2$ in τ . Wir machen nun wieder die gleiche Annahme für das Auftreten von Ereignissen in den Elementen $d\tau$, wie vorher. Die Wahrscheinlichkeit, daß einer der Nulldurchgänge in einem speziellen Zeitelement $d\tau$ auftritt, ist $\frac{1}{\left(\frac{\tau}{d\tau}\right)}$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der andere Nulldurchgang im gleichen Element auftritt, ist ebenfalls $\frac{1}{\left(\frac{\tau}{d\tau}\right)}$. Nach dem Theorem der Gesamtwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, daß einer der beiden Nulldurchgänge in $d\tau$ auftritt, gegeben durch $\frac{2}{\left(\frac{\tau}{d\tau}\right)}$. Folglich ist:

$$P(A_2) = P_{\xi}(2; \tau) \cdot \frac{2d\tau}{\tau}. \quad (I.4.9)$$

Hiernach ist es einfach, den allgemeinen Ausdruck zu finden.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die Reihenfolge der Nulldurchgänge keine Rolle spielt, so daß z.B. der erste Nulldurchgang nach $t = t_1$ andere Nulldurchgänge daran hindern würde, ebenfalls zwischen diesem und $t = t_1$ zu liegen. Dies ist nicht der Fall. Die mathematische Herleitung soll gerade so beschaffen sein, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Nulldurchgangs in $d\tau$ für alle Elemente in τ gleich ist. Die Verteilung der Nulldurchgänge in τ ist bestimmt ohne Bezugnahme auf die Richtung der Zeit, sondern nur bezüglich der Dauer. In einem wirklichen Experiment ist durch das Auftreten des Nulldurchgangs die Zeitrichtung naturgemäß durch die Bildung der Zeitfunktion mit eingeschlossen.

Nach dem Theorem der Gesamtwahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + \dots \\
 &= \left[P_{\xi}(1; \tau) + 2P_{\xi}(2; \tau) + \dots \right] \frac{d\tau}{\tau} \\
 &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} n P_{\xi}(n, \tau) \right] \frac{d\tau}{\tau} .
 \end{aligned} \tag{I.4.10}$$

Der Klammerausdruck ist gleich dem Mittelwert von ξ , so wie er durch (I.4.2) gegeben ist. Somit folgt:

$$P(A) = k\tau \cdot \frac{d\tau}{\tau} = k d\tau . \tag{I.4.11}$$

Auf Grund der Beziehungen (I.4.3) und (I.4.4) ergibt sich:

$$P(\eta = 1; d\tau) = k d\tau . \tag{I.4.12}$$

Wie vorher erwähnt, hat η nur die zwei möglichen Werte 0 und 1. Folglich gilt:

$$P(\eta = 1; d\tau) + P(\eta = 0; d\tau) = 1 , \tag{I.4.13}$$

so daß hieraus mit (I.4.12) folgt:

$$P(\eta = 0; d\tau) = 1 - k d\tau . \tag{I.4.14}$$

Da wir die Menge als stationär vorausgesetzt hatten, gelten die Beziehungen (I.4.12) und (I.4.13) für ein $d\tau$ zu jeder beliebigen Zeit t .

Nachdem wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl von nulldurchgängen in einem infinitesimalen Zeitelement $d\tau$ bestimmt haben, fahren wir fort, die Verteilung von nulldurchgängen in einer endlichen Zeit τ zu finden. Hierzu betrachten wir das Intervall τ zwischen $t = t_1$ und $t = t_2$ und das Element $d\tau$ im Anschluß an den Punkt $t = t_2$, so wie es in der Abbildung I.4.1 dargestellt ist. In diesem Fall liegt $d\tau$ außerhalb des Intervalls τ , wohingegen es vorher innerhalb dieses Intervalls lag. Wir betrachten nun das Ereignis B. Es ist folgendermaßen gekennzeichnet:

Ereignis B : Innerhalb des Intervalls $\tau + d\tau$ existiert kein nulldurchgang.
 In symbolischer Schreibweise läßt sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B ausdrücken durch:

$$P(B) = P(\xi + \eta = 0; \tau + d\tau) . \tag{I.4.15}$$

Im Hinblick auf diese Wahrscheinlichkeit machen wir die 2. Annahme: Die Anzahl der Nulldurchgänge in einem Intervall sei unabhängig von denen in einem anderen Intervall unter der Voraussetzung, daß sich die Intervalle nicht teilweise oder vollständig überdecken. Auf dieser Basis sind die Ereignisse, die das zusammengesetzte Ereignis B bilden, unabhängig voneinander. Die beiden Teilereignisse von B sind: (B_1) , daß $\xi = 0$ in τ und (B_2) , daß $\eta = 0$ in $d\tau$. Aus dem Theorem der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit folgt damit:

$$P(\xi + \eta = 0; \tau + d\tau) = P(\xi = 0; \tau) \cdot P(\eta = 0; d\tau). \quad (I.4.16)$$

In diesem Ausdruck ist $P(\eta = 0; d\tau)$ aus der Beziehung (I.4.14) bekannt. Somit folgt:

$$P(\xi + \eta = 0; \tau + d\tau) = P(\xi = 0; \tau) (1 - k d\tau). \quad (I.4.17)$$

Durch Umformung des Ausdrucks (I.4.17) erhalten wir:

$$\frac{P(\xi + \eta = 0; \tau + d\tau) - P(\xi = 0; \tau)}{d\tau} = -k P(\xi = 0; \tau). \quad (I.4.18)$$

Auf der linken Seite der Gleichung haben wir einen Ausdruck für die Änderung von $P(\xi = 0; \tau)$ - bedingt durch den Zuwachs $d\tau$ im Intervall τ , wobei die Anzahl der Nulldurchgänge im gesamten Intervall gleich Null bleibt - dividiert durch den Zuwachs $d\tau$. Die untersuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gegeben durch den Ausdruck (I.4.1) für den Fall $n = 0$. Somit ist der Ausdruck (I.4.18) gegeben durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{d\tau} P_{\xi}(0; \tau) = -k P_{\xi}(0; \tau). \quad (I.4.19)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$P_{\xi}(0; \tau) = A \cdot e^{-k\tau}. \quad (I.4.20)$$

Um diese Lösung zu vervollständigen, bestimmen wir die Konstante A, indem wir $\tau = 0$ setzen, so daß sich ergibt:

$$P_{\xi}(0; 0) = A. \quad (I.4.21)$$

Da $P_{\xi}(0; 0)$ diejenige Wahrscheinlichkeit ist, keine Nulldurchgänge in der Zeit Null zu finden, können wir mit Sicherheit sagen, daß diese Wahrscheinlichkeit gleich Eins ist, also:

$$P_{\xi}(0; 0) = 1,$$

womit wir bei dem Ergebnis anlangen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür keine Nulldurchgänge im Intervall τ zu finden gegeben ist durch:

$$P_{\xi}(0; \tau) = e^{-k\tau} . \quad (I.4.22)$$

Die Bestimmung der Verteilung (I.4.1) ist nun teilweise durchgeführt, nämlich für den Fall $n = 0$. Der Maximalwert der Funktion (I.4.22) ist 1 bei $\tau = 0$. Danach verläuft die Funktion so, daß die Wahrscheinlichkeit keine Nulldurchgänge zu finden mit wachsender Intervalllänge τ abnimmt. Theoretisch ist die Wahrscheinlichkeit, dafür keine Nulldurchgänge in τ zu finden, endlich, gleichgültig welche Länge das Intervall τ besitzt. Nur wenn $\tau \rightarrow \infty$ geht, strebt die Wahrscheinlichkeit gegen Null.

Nun werde die vollständige Bestimmung von $P_{\xi}(n; \tau)$ fortgesetzt. Dazu betrachten wir das

Ereignis C : Es gibt n Nulldurchgänge im Intervall $\tau + d\tau$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C können wir folgendermaßen schreiben:

$$P(C) = P(\xi + \eta = n; \tau + d\tau) . \quad (I.4.23)$$

Da η entweder 1 oder 0 sein muß, hat das Ereignis C zwei unvereinbare Formen:

$$C_1, \text{ daß } \xi = n - 1 \text{ in } \tau \text{ und } \eta = 1 \text{ in } d\tau \text{ und}$$

$$C_2, \text{ daß } \xi = n \text{ in } \tau \text{ und } \eta = 0 \text{ in } d\tau .$$

Mit Hilfe des Theorems der Gesamtwahrscheinlichkeit läßt sich der Ausdruck (I.4.23) wie folgt schreiben:

$$P(\xi + \eta = n; \tau + d\tau) = P(\xi = n-1; \tau, \eta = 1; d\tau) + P(\xi = n; \tau, \eta = 0; d\tau) . \quad (I.4.24)$$

Hierbei ist C_1 ein zusammengesetztes Ereignis. Es beinhaltet das gemeinsame Auftreten von (C_1') , daß $\xi = n-1$ in τ und (C_1'') , daß $\eta = 1$ in $d\tau$. Da nach unserer zweiten Annahme C_1' und C_1'' unabhängige Ereignisse sind, können wir schreiben:

$$P(C_1) = P(C_1') \cdot P(C_1'') \quad (I.4.25)$$

oder

$$P(\xi = n-1; \tau, \eta = 1; d\tau) = P(\xi = n-1; \tau) \cdot P(\eta = 1; d\tau) . \quad (I.4.26)$$

Entsprechend läßt sich der letzte Term von (I.4.24) ausdrücken durch:

$$p(\xi = n; \tau, \eta = 0; d\tau) = p(\xi = n; \tau) \cdot p(\eta = 0; d\tau) . \quad (\text{I.4.27})$$

Es ist $p(\eta = 1; d\tau)$ gegeben durch (I.4.12) und $p(\eta = 0; d\tau)$ durch die Beziehung (I.4.14). Den Ausdruck (I.4.24) können wir somit wie folgt ausdrücken:

$$p(\xi + \eta = n; \tau + d\tau) = p(\xi = n-1; \tau) k d\tau + p(\xi = n; \tau) (1 - k d\tau) . (\text{I.4.28})$$

Umformung ergibt:

$$\frac{p(\xi + \eta = n; \tau + d\tau) - p(\xi = n; \tau)}{d\tau} + k \cdot p(\xi = n; \tau) = k p(\xi = n-1; \tau) . (\text{I.4.29})$$

Auf der linken Seite der Gleichung ist der erste Term die Änderung von $p(\xi = n; \tau)$ - bedingt durch den Zuwachs $d\tau$ in τ , wobei die Zahl der Nulldurchgänge im gesamten Intervall $\tau + d\tau$ gleich n bleibt - dividiert durch den Zuwachs $d\tau$. Per Definition ist dieses Verhältnis die Ableitung der Funktion $P_\xi(n; \tau)$ nach τ , wobei der Parameter n konstant gehalten wird. Der zweite Term auf der linken Seite ist, wie man sieht, $k P_\xi(n; \tau)$. Der Term auf der rechten Seite ist $k P_\xi(n-1; \tau)$. Somit ergibt sich für (I.4.29) folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{d\tau} P_\xi(n; \tau) + k P_\xi(n; \tau) = k P_\xi(n-1; \tau) , \quad (\text{I.4.30})$$

aus der die gesuchte Verteilungsfunktion $P_\xi(n; \tau)$ bestimmt werden kann.

Die obige Differentialgleichung ist vom Typ

$$\frac{dy}{dx} + R(x)y = S(x) , \quad (\text{I.4.31})$$

deren Lösung gegeben ist durch:

$$y e^{\int R(x) dx} = \int S(x) \cdot e^{\int R(x) dx} dx . \quad (\text{I.4.32})$$

Wir nehmen nun folgende Substitutionen vor:

$$\begin{aligned} y &= P_\xi(n; \tau) \\ R(x) &= k \\ S(x) &= k \cdot P_\xi(n-1; \tau) \\ x &= \tau . \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\int R(x) dx = \int k d\tau = k\tau .$$

Nach Einsetzen der Substitutionen in (I.4.32) für die Lösung von (I.4.30) folgt folgender Ausdruck:

$$P_{\xi}(n; \tau) e^{k\tau} = \int k P_{\xi}(n-1; \tau) e^{k\tau} d\tau . \quad (I.4.33)$$

Wir werden nun $P_{\xi}(n; \tau)$ in fortlaufenden Schritten bestimmen. Für den Fall $n = 1$ sieht die allgemeine Lösung (I.4.33) folgendermaßen aus:

$$P_{\xi}(1; \tau) e^{k\tau} = \int k P_{\xi}(0; \tau) e^{k\tau} d\tau . \quad (I.4.34)$$

Wenn wir $P_{\xi}(0; \tau)$ aus Gleichung (I.4.22) einsetzen und integrieren, ergibt sich:

$$P_{\xi}(1; \tau) e^{k\tau} = k\tau + C . \quad (I.4.35)$$

Die Integrationskonstante C bestimmen wir, indem wir $\tau = 0$ setzen:

$$P_{\xi}(1; 0) = C . \quad (I.4.36)$$

$P_{\xi}(1; 0)$ ist die Wahrscheinlichkeit, einen Nulldurchgang während der Zeitdauer Null zu finden. Dies Ereignis hat offensichtlich die Wahrscheinlichkeit Null, womit auch $C = 0$ wird. Der Ausdruck (I.4.35) schreibt sich infolgedessen:

$$P_{\xi}(1; \tau) = k\tau e^{-k\tau} . \quad (I.4.37)$$

Der allgemeine Ausdruck ergibt sich, wenn dieses Verfahren für aufeinanderfolgende Werte von n wiederholt angewandt wird. Der Fall $n = 2$ sei hier noch kurz hergeleitet. Es folgt:

$$\begin{aligned} P_{\xi}(2; \tau) e^{k\tau} &= \int k P_{\xi}(1; \tau) e^{k\tau} d\tau \\ &= \int k \left[k\tau e^{-k\tau} \right] e^{k\tau} d\tau \\ &= \frac{(k\tau)^2}{2} + C . \end{aligned} \quad (I.4.38)$$

Da wieder gezeigt werden kann, daß $C = 0$ ist, folgt:

$$P_{\xi}(2; \tau) = \frac{(k\tau)^2}{2} e^{-k\tau} . \quad (I.4.39)$$

Der allgemeine Ausdruck ist gegeben durch:

$$P_{\xi}(n; \tau) = \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau}, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \quad (I.4.40)$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion für ξ , die Anzahl von Nulldurchgängen in einem gegebenen Intervall τ , wenn die mittlere Anzahl von Nulldurchgängen pro Einheit von τ gleich k ist. Diese Funktion ist bekannt als die POISSON-VERTEILUNG. Diese Funktion ist diskret im Hinblick auf n , aber stetig bezüglich τ . Die Verteilung ist in der Abbildung I.4.2 graphisch dargestellt.

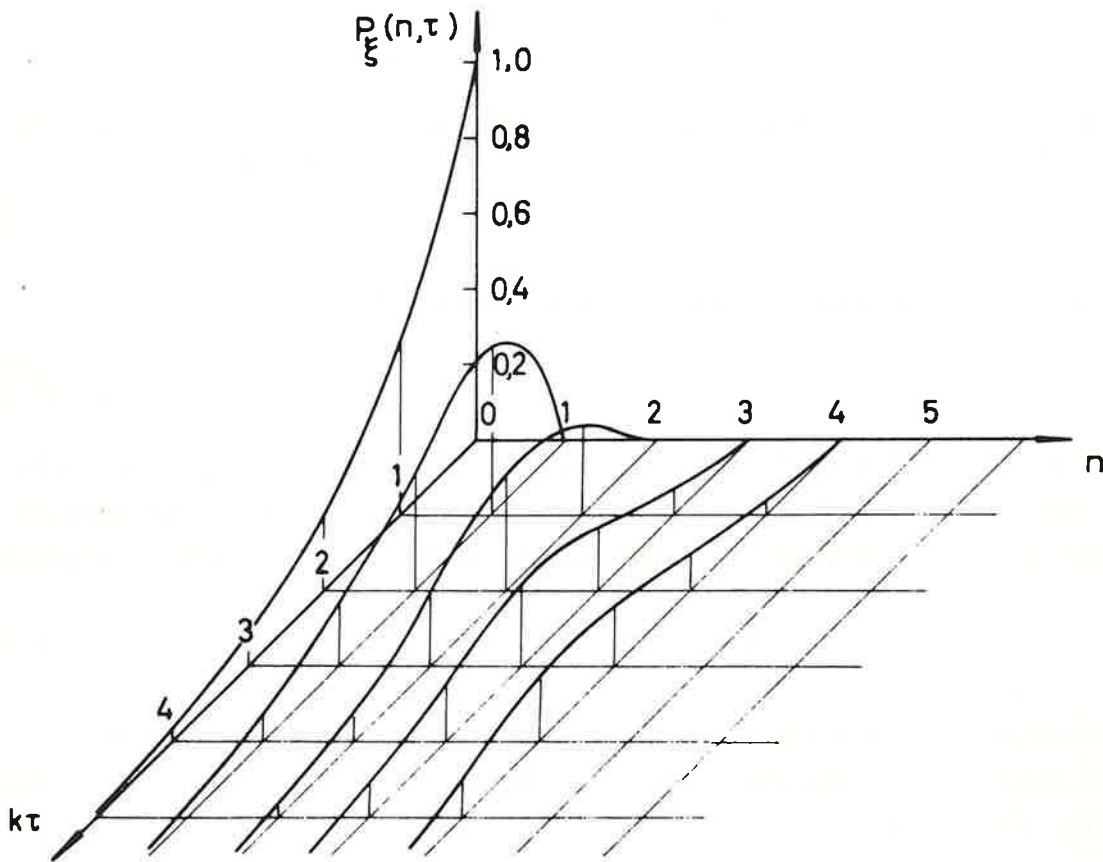


Abb. I.4.2

Zunächst wollen wir für die Poisson-Verteilung nachweisen, daß wir für den Mittelwert $\bar{\xi}$ die Größe $k\tau$ erhalten. Die mittlere Anzahl von Nulldurchgängen in einem gegebenen Intervall τ , ist entsprechend der Definition des Mittelwerts gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \overline{\xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_{\xi}(n; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau} \\
 &= k\tau e^{-k\tau} \left[1 + k\tau + \frac{(k\tau)^2}{2!} + \frac{(k\tau)^3}{3!} + \dots \right] \\
 &= k\tau e^{-k\tau} e^{k\tau} \\
 &= k\tau, \tag{I.4.41}
 \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, daß der Mittelwert von ξ pro Zeiteinheit gleich k ist.

Weiterhin sei untersucht, ob die Poisson-Verteilung der Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{\xi}(n; \tau) = 1 \tag{I.4.42}$$

genügt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} P_{\xi}(n; \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau} \\
 &= e^{-k\tau} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\tau)^n}{n!} \\
 &= e^{-k\tau} e^{k\tau} \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

womit die Bedingung (I.4.42) verifiziert ist.

Zum Abschluß der Behandlung der Poisson-Verteilung sei ihre Varianz berechnet. Bei der Behandlung der Varianz war gezeigt worden, daß nach der Beziehung (I.3.31) gilt:

$$\sigma_{\xi}^2 = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2.$$

Auf Grund von (I.4.41) folgt:

$$\overline{\xi}^2 = (k\tau)^2.$$

Wie bei der Behandlung der Momente gezeigt, folgt aus der Definitionsgleichung (I.3.20) die Beziehung

$$\begin{aligned}
 \overline{\xi^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau} \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau} + k\tau \\
 &= (k\tau)^2 + k\tau.
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte für $\overline{\xi^2}$ und $\overline{\xi}^2$ in die Varianzbeziehung ergibt:

$$\sigma_{\xi}^2 = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 = k\tau. \quad (I.4.43)$$

Im Falle der Poisson-Verteilung ist die Varianz gleich dem Mittelwert von ξ und beide gleich dem Mittelwert von Nulldurchgängen pro τ Zeiteinheiten.

Die Normaldichte

Eine weitere wichtige Funktion ist die Normaldichtefunktion, die auch unter dem Namen "Gauß-Dichte" bekannt ist. Sie ist definiert durch den Ausdruck:

$$P_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp. \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (I.4.44)$$

Hierin bezeichnet ξ die Zufallsvariable, x den stetigen Bereich $(-\infty, \infty)$, m den Mittelwert und σ^2 die Varianz. Eine graphische Darstellung der Funktion für verschiedene Werte von σ ist in der Abbildung I.4.3 gegeben.

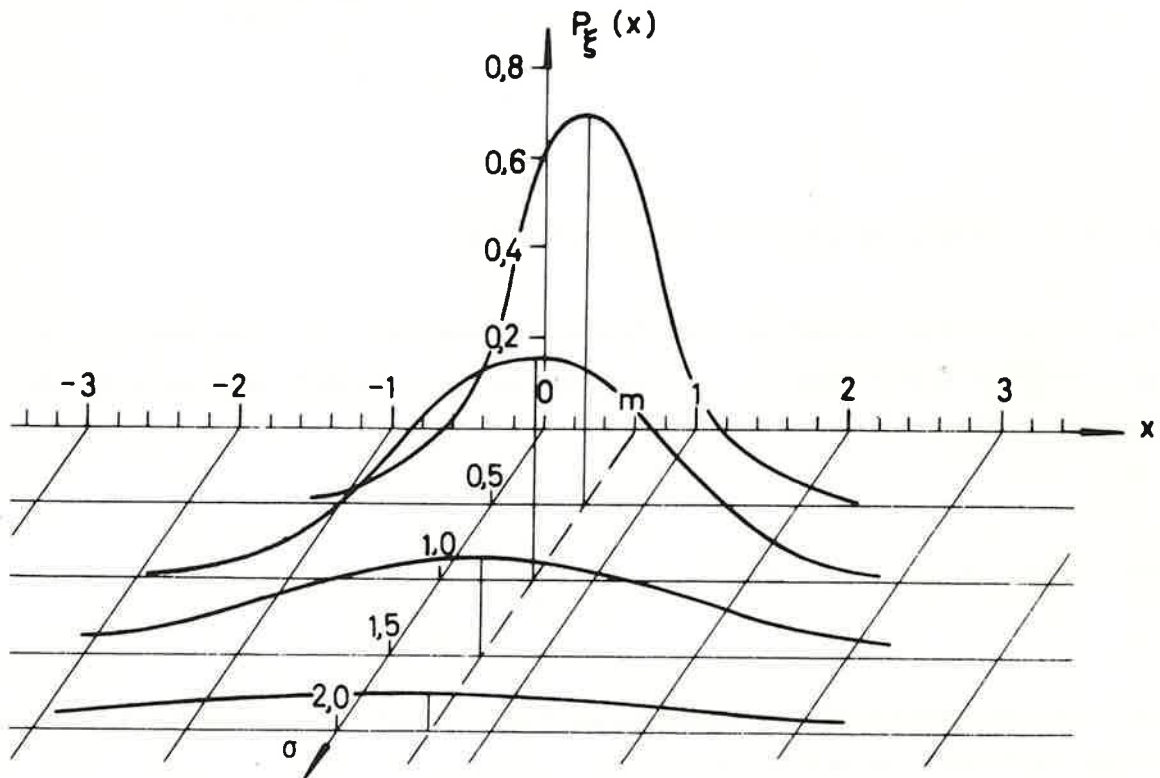


Abb. I.4.3

Die Funktion hat ihr Maximum bei $x = m$, und sie besitzt dort den Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$.
Sie ist eine gerade Funktion $x = m$.

Die Normaldichte spielt beispielsweise eine große Rolle in der Theorie des thermischen Rauschens und des Schrotrauschens. Es ist experimentell nachgewiesen worden, daß diese Rauscharten der Normaldichtefunktion gehorchen. Außerdem ist sie bekannt aus der Fehlerrechnung und der Analyse der Brownschen Bewegung. Die Normaldichte ist jedoch keineswegs eine universelle Dichtefunktion zur Beschreibung von Zufallsphänomenen. Viele Zufallserscheinungen, wie z.B. Sprach- und Musikwellen sind nicht normal verteilt.

Wir wollen uns etwas näher mit der Normaldichte befassen. Zunächst sei nachgewiesen, daß das Integral von $-\infty$ bis ∞ über den Ausdruck (I.4.44) gleich 1 ist, wie es sein müßte. Dazu ist es nur notwendig zu zeigen, daß im Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \exp. \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] dx = 1 \quad (\text{I.4.45})$$

der Faktor A gleich $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$ ist. Da der Wert des Integrals in (I.4.45) unabhängig von m ist, setzen wir der Einfachheit halber $m = 0$. In den meisten Fällen der Literatur wird nun folgendermaßen verfahren: Man quadriert beide Seiten von (I.4.45), wobei noch y eingeführt wird, da man in einem rechtwinkligen Koordinaten-System arbeitet. Somit folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \exp. \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] dx \int_{-\infty}^{\infty} A \exp. \left[-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right] dy = 1 \quad (\text{I.4.46})$$

Durch Übergang auf Polarkoordinaten folgt:

$$A^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp. \left[-\frac{r^2}{2\sigma^2} \right] r dr d\theta = 1 \quad (\text{I.4.47})$$

Das Integral läßt sich leicht ausrechnen, und es folgt:

$$2\pi A^2 \sigma^2 = 1 \quad (\text{I.4.48})$$

womit gezeigt wird, daß

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$$

Bei der Betrachtung der Normaldichte ist ihre charakteristische Funktion von Wichtigkeit. Entsprechend der Definitionsgleichung (I.3.34) war

$$p_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi}(x) e^{itx} dx$$

Mit der Definitionsgleich. (I.4.44) für die Normaldichte ergibt sich:

$$p_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp. \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] e^{itx} dx .$$

Setzen wir $y = x - m$, so ist:

$$\begin{aligned} p_{\xi}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp. \left[-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right] e^{it(y+m)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{imt} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp. \left[-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right] \cos ty \, dy \\ &= e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot (\cos mt + i \sin mt) . \end{aligned} \tag{I.4.49}$$

Um zu zeigen, daß bei der Normaldichte der Mittelwert von ξ gleich m und die Varianz gleich σ^2 ist, bilden wir die ersten beiden Ableitungen der charakteristischen Funktion:

$$p'_{\xi}(t) = (im - \sigma^2 t) e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} , \tag{I.4.50}$$

$$p''_{\xi}(t) = \left[(im - \sigma^2 t)^2 - \sigma^2 \right] e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} . \tag{I.4.51}$$

Gemäß der Gleichung (I.3.37) folgt für $\bar{\xi}$ und $\overline{\xi^2}$:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{i} p'_{\xi}(0) = m \tag{I.4.52}$$

$$\begin{aligned} \overline{\xi^2} &= \frac{1}{i^2} p''_{\xi}(0) = \frac{1}{i^2} \left[(im)^2 - \sigma^2 \right] \\ &= m^2 + \sigma^2 . \end{aligned} \tag{I.4.53}$$

Damit wird die Varianz

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = m^2 + \sigma^2 - m^2 \\ \sigma_{\xi}^2 &= \sigma^2 . \end{aligned} \tag{I.4.54}$$

Wenn wir die Definitionsgleichung der Normaldichte (I.4.44) betrachten, so sehen wir, daß die Normaldichte durch den Mittelwert und die Varianz vollständig bestimmt ist. Der Mittelwert bestimmt dabei nur die Verlagerung der Kurve vom Koordinatenursprung und läßt die Kurvenform ungeändert, während die Varianz die Kurvenform ändert, und zwar sowohl durch Änderung des horizontalen wie auch des vertikalen Maßstabs.

Zum Abschluß der Behandlung der Normaldichte sei gezeigt, daß der Abstand zwischen $x = m$ und den Wendepunkten der Normaldichte gleich der Standardabweichung σ ist. Um dies zu zeigen, setzen wir die zweite Ableitung der Funktion gleich Null, um die Wendepunkte zu erhalten. Da die zweite Ableitung gegeben ist durch

$$P''_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3} \left[\frac{(x-m)^2}{\sigma^2} - 1 \right] \exp. \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (I.4.55)$$

folgen die Wendepunkte aus $P''_{\xi}(x) = 0$ zu

$$x = m \pm \sigma. \quad (I.4.56)$$

I.5 Zeitmittelwerte und Mengemittelwerte, Korrelationsfunktionen

In der statistischen Theorie gibt es zwei Arten von Mittelwerten, nämlich Zeitmittelwerte und Mengemittelwerte (Scharmittel). Da ein Zufallsprozeß durch Wahrscheinlichkeitsdichten beschrieben wird, kann daraus der Mengemittelwert bestimmt werden, wenn die dazu erforderliche Wahrscheinlichkeitsdichte bekannt ist. Auf der anderen Seite kann ohne einen äquivalenten Mengemittelwert der Zeitmittelwert eines Zufallsprozesses nur aus dem Verhalten in der Vergangenheit bestimmt werden, da sich die Zukunft nicht exakt voraussagen läßt. Dieser Abschnitt behandelt nun die Ausdrückbarkeit eines Zeitmittelwertes durch einen Mengemittelwert unter besonderer Berücksichtigung der Korrelationsfunktion.

Zunächst wird die Gesamtheit oder das Aggregat von Elementen eines Mengemitglieds und die Gesamtheit von Elementen einer Menge zu einer gegebenen Zeit behandelt. Dazu betrachten wir die Abbildung I.5.1:

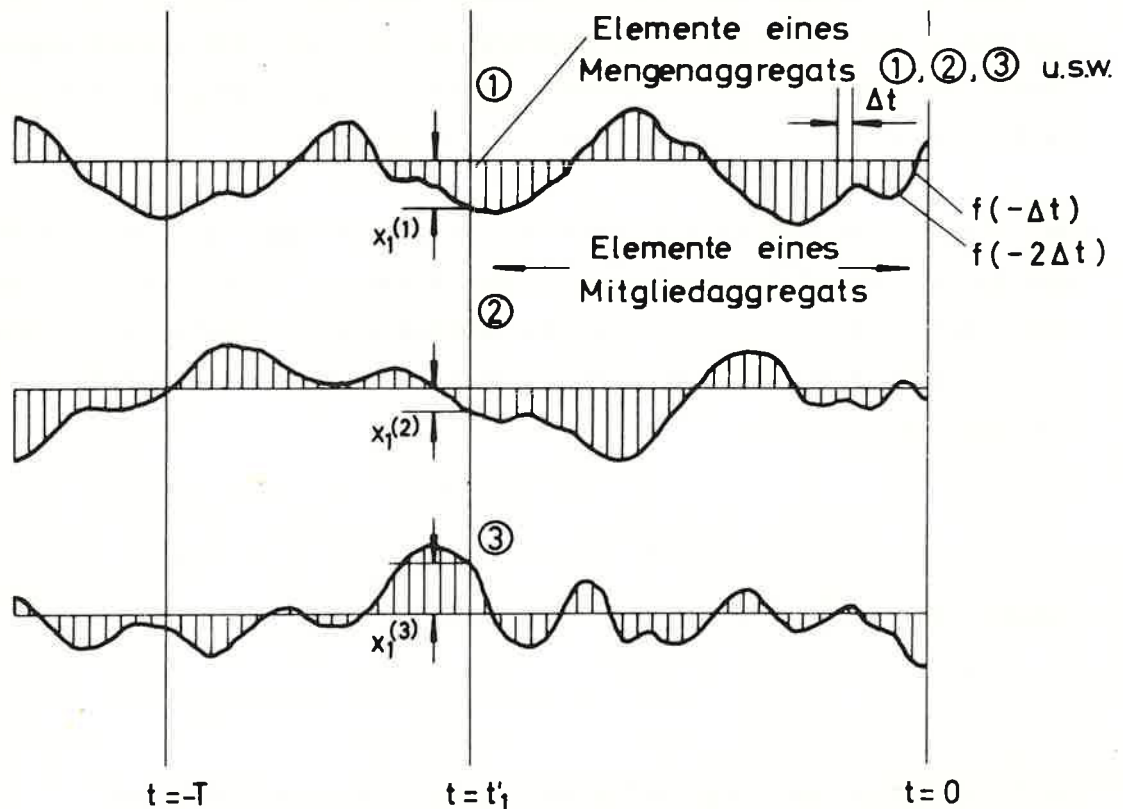


Abb. 1.5.1

Wir nehmen an, daß die Vergangenheit jedes Mitglieds der Menge $[f(t)]$ in eine unendlich große Anzahl von Zeitelementen der infinitesimalen Länge Δt aufgeteilt ist, so wie in der Abb. 1.5.1 dargestellt. Die Amplitude der Menge sei begrenzt. Wir bezeichnen dieses unendliche Aggregat von Elementen einer Mitgliedsfunktion als Mitglieds-Aggregat. Da alle Mengenmitglieder aus gleichartigen Quellen stammen sollen, machen wir die Annahme, daß alle Mitglieder einer Menge das gleiche Mitgliedsaggregat besitzen sollen, obwohl die Reihenfolge, mit der die Elemente ihre Amplitudenwerte annehmen, verschieden sein kann. Mit anderen Worten lautet unsere Annahme folgendermaßen: Wenn die Elemente eines Mitgliedsaggregats nach steigenden oder fallenden Amplitudenwerten geordnet und umgestellt würden, erhielten wir für alle Mitgliedsaggregate eine gleiche Form.

Auf der Grundlage dieser Annahme ist - wenn die unendliche Vergangenheit der Menge in Betracht gezogen wird - der Zeitmittelwert der Amplitude,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) dt, \quad (I.5.1)$$

für alle Mengenmitglieder gleich. Wir wollen diese Eigenschaft der Mengenmitglieder in einer allgemeineren Form ausdrücken. Dazu werde eine willkürliche Funktion $F(x)$ eingeführt. Die gemachte Annahme besagt dann, daß

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 F[f(t)] dt \quad (I.5.2)$$

für jedes Mengenmitglied gleich ist.

Beispiele dieses Zeitmittelwerts sind das mittlere Quadrat von $f(t)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f^2(t) dt \quad (I.5.3)$$

oder die mittlere n-te Potenz von $f(t)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f^n(t) dt. \quad (I.5.4)$$

Wir wollen die in infinitesimale Elemente aufgeteilten Mengenmitglieder noch von einer anderen Seite betrachten. Dazu greifen wir uns den Zeitpunkt $t = t_1'$ heraus. Wir erhalten von jedem Mengenmitglied zu diesem Zeitpunkt ein Element, beispielsweise aus dem ersten Mitgliedsaggregat das Element $x_1^{(1)}$, aus dem zweiten Mitgliedsaggregat das Element $x_1^{(2)}$ usw. Dieses Aggregat von Elementen nennen wir das Mengenaggregat. Wir nehmen eine Menge an, die so beschaffen ist, daß das Mengenaggregat invariant gegen eine Verschiebung des Beobachtungszeitpunktes ist, obgleich die Reihenfolge, in der die Elemente ihre Amplitudenwerte annehmen, verschieden ist. Aufgrund der Tatsache, daß die invarianten Mengenaggregate aus Funktionen gebildet sind, die untereinander gleiche Aggregate besitzen, muß notwendigerweise auch das Mengenaggregat dem Mitgliedsaggregat gleich sein, mit dem Hinweis, daß diese Gleichheit nicht für die Reihenfolge gilt, in der die Elemente auftreten.

Im folgenden werde die Äquivalenz zwischen dem Zeitmittelwert eines Mengenmitglieds und dem Mengenmittelwert diskutiert. Mit anderen Worten: Wir wollen versuchen, eine Beziehung herzustellen zwischen dem Mittelwert eines Mengenmitglieds hinsichtlich des Zeitverhaltens auf der einen Seite und dem Mittelwert der Amplitude der Menge zu irgendeiner Zeit t auf der anderen Seite. Das Mengenmitglied $f(t)$ sei im Intervall $(-T, 0)$ in n Elemente mit der Zeitdauer Δt aufgeteilt. Es ist dann $n = \frac{T}{\Delta t}$. Der Mittelwert von $f(t)$ bezüglich t im Intervall $(-\infty, 0)$ ist gegeben durch

$$\overline{f(t)} = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{f(-\Delta t) + f(-2\Delta t) + \dots + f(-i\Delta t) + \dots + f(-n\Delta t)}{\frac{T}{\Delta t}} \quad (I.5.5)$$

Diesen Ausdruck können wir auch umformen zu

$$\overline{f(t)} = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[\frac{f(-\Delta t) + f(-2\Delta t) + \dots + f(-i\Delta t) + \dots + f(-n\Delta t)}{T} \right] \Delta t \quad (I.5.6)$$

Dies ist gleich

$$\overline{f(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) dt \quad (I.5.7)$$

Dies ist das Zeitmittel eines Mitglieds der Menge über das Intervall $(-\infty, 0)$. Der Querstrich über $f(t)$ zeigt an, daß der Mittelwert über ein unendliches Intervall gebildet wurde.

In dem Ausdruck für den Mittelwert (I.5.5) stellt der Satz von den folgenden Werten

$$f(-\Delta t), f(-2\Delta t), \dots, f(-i\Delta t), \dots, f(-n\Delta t), \quad (I.5.8)$$

(für $T \rightarrow \infty$ und $\Delta t \rightarrow 0$), die Amplitudenwerte des "Mitgliedsaggregats" dar. Diese müssen aber dem Satz von folgenden Werten

$$x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(i)}, \dots, x_1^{(n)} \quad (I.5.9)$$

für die Amplituden des "Mengenaggregats" bei $t = t_1'$ entsprechen, ausgenommen wieder die Reihenfolge des Auftretens. Der am x in Klammern angebrachte Index bezeichnet die Nummer des Versuchs, bei dem der Wert $x_1^{(i)}$ zur Zeit $t = t_1'$ gefunden wurde (vgl. Abb. I.5.1). Daß sich die beiden Sätze von Werten entsprechen, folgt aus der Argumentation, daß das Mitgliedsaggregat dem Mengenaggregat gleich ist, wenn wir die Reihenfolge dabei ausschließen. Unter der

Annahme, daß die Mitglieder der Menge einen stetigen Amplitudenbereich x im Intervall $(-a, b)$ besitzen, können wir das Intervall in Elemente der Länge Δx aufteilen, mit dem Zweck, einen Mittelwert zu erhalten, der dem durch den Ausdruck (I.5.5) gegebenen gleich ist. Wir setzen eine genügend große Anzahl M von Elementen eines Mengenaggregats voraus und finden, daß aus dem Wertesatz

$$x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(i)}, \dots, x_1^{(n)} \quad (I.5.10)$$

für die Aufteilung der Amplituden folgendes gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{positiver} \\ \text{Bereich} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} N_1 \text{ Werte fallen in } (0, \Delta x) \\ N_2 \text{ Werte fallen in } (\Delta x, 2\Delta x) \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (I.5.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{negativer} \\ \text{Bereich} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} N_{-1} \text{ Werte fallen in } (0, -\Delta x) \\ N_{-2} \text{ Werte fallen in } (-\Delta x, -2\Delta x) \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (I.5.12)$$

Wie wir schon früher gezeigt hatten [vgl. Abschnitt 3, Ausdruck (I.3.12)], ergibt sich als empirischer Mittelwert der Ausdruck

$$\Delta x \frac{N_1}{M} + 2\Delta x \frac{N_2}{M} + \dots - \Delta x \frac{N_{-1}}{M} - 2\Delta x \frac{N_{-2}}{M} - \dots \quad (I.5.13)$$

Dieser empirische Mittelwert ist eine gute Approximation für den Mittelwert des Wertesatzes (I.5.8) und damit auch eine gute Approximation für den Mittelwert $\overline{f(t)}$, der durch (I.5.5) gegeben ist. Wir können den Ausdruck (I.5.13) zusammenfassen zu:

$$\sum_i i \Delta x \left[\frac{N_i}{M} \cdot \frac{1}{\Delta x} \right] \Delta x, \quad (I.5.14)$$

wobei i von $-\frac{a}{\Delta x}$ bis $\frac{b}{\Delta x}$ reicht. Wie früher schon im Abschnitt 3 gezeigt wurde, ist der in Klammern stehende Ausdruck ein Maß für die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_\xi(x)$ der Zufallsvariablen ξ . Die Zufallsvariable ist die Amplitude der Menge. Vermerkt sei hier nochmals, daß die früher gemachte Annahme über die Invarianz des Mengenaggregats gegen den Beobachtungszeitpunkt bedeutet, daß die Menge stationär ist. Mit anderen Worten, $P_\xi(x)$ ist unabhängig von der Beobachtungszeit. Für alle praktischen Zwecke wird der empirische Mittelwert (I.5.14) für ein hinreichend großes M und ein hinreichend kleines Δx gleich

$$\int_{-a}^b x P_{\xi}(x) dx \quad (I.5.15)$$

oder, in einer allgemeineren Form, gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} x P_{\xi}(x) dx . \quad (I.5.16)$$

Diesen Ausdruck kennen wir als die Definition für den Mittelwert der Amplitude der Menge zu irgendeiner Zeit. Somit haben wir heuristisch gezeigt, daß der Zeitmittelwert von $f(t)$, gegeben durch (I.5.7), für alle praktischen Fälle dem Mittelwert (I.5.16) äquivalent ist. Der Mittelwert (I.5.16) wird der Mengenmittelwert, das Mengenmittel oder auch das Scharmittel von $f(t)$ genannt.

Im Hinblick auf die vorangegangenen Überlegungen machen wir nun folgende Annahme: In einer stationären Menge, deren Mitglieder aus Quellen gleicher Art stammen, ist der Zeitmittelwert eines Mitglieds über das Intervall $(-\infty, 0)$ genau gleich dem Mengenmittelwert, d.h.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x P_{\xi}(x) dx . \quad (I.5.17)$$

Hinsichtlich der unendlichen Zukunft eines Mengenmitglieds kann man folgerichtig annehmen, daß der Mittelwert über dieses Zeitintervall, nämlich $(0, +\infty)$ der gleiche ist wie über das Zeitintervall $(-\infty, 0)$. Folglich

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt . \quad (I.5.18)$$

Der Ausdruck (I.5.17) wird somit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x P_{\xi}(x) dx . \quad (I.5.19)$$

Diese Gleichung drückt aus, daß der Zeitmittelwert eines Mengenmitglieds, erstreckt von $-\infty$ bis ∞ , gleich dem Mengenmittelwert ist.

Der Ausdruck (I.5.19) läßt sich auch in folgender einfacher Form schreiben:

$$\overline{f(t)} = \bar{\xi} . \quad (I.5.20)$$

Es folgt weiterhin aus der Äquivalenz von Mengenaggregat und Mitgliedsaggregat, daß wir den Ausdruck (I.5.19) noch allgemeiner fassen können, indem wir eine willkürliche Funktion von $f(t)$, nämlich $F[f(t)]$, einführen.

Wenn der Ausdruck

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F[f(t)] dt \quad (I.5.21)$$

existiert, folgt in Analogie zu (I.5.19):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F[f(t)] dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) P_{\xi}(x) dx \quad (I.5.22)$$

oder

$$\overline{F[f(t)]} = \overline{F(\xi)}. \quad (I.5.23)$$

Wenn der Zufallsprozeß diskrete Werte annimmt, erhalten wir zwei, den Gleichungen (I.5.19) und (I.5.22) entsprechende, Ausdrücke:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i P_{\xi}(x_i) \quad (I.5.24)$$

und

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F[f(t)] dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} F(x_i) P_{\xi}(x_i). \quad (I.5.25)$$

Die Äquivalenz von Zeit- und Mengenmittelwerten haben wir hier, wie gesagt, heuristisch gezeigt und die Äquivalenzbeziehungen (I.5.22) und (I.5.25) müßten eigentlich noch streng bewiesen werden. Das ist jedoch ein rein mathematisches Problem und ginge über den hier gesteckten Rahmen weit hinaus. Es sei jedoch dazu bemerkt, daß die strenge mathematische Beweisführung auf dem Beweis der sogenannten Ergodenhypothese aufbaut. Diese Ergodenhypothese stammt bekanntlich aus der statistischen Mechanik und besagt, daß ein System, das sich in seinem Bewegungszustand selbst überlassen bleibt, früher oder später jede Phase durchlaufen wird, die mit dem Energieerhaltungssatz in Übereinstimmung ist.

Auf unseren Fall einer Menge im Zusammenhang mit dem Rauschen angewandt, würde die Ergodenhypothese folgender Hypothese entsprechen: "In einer stationären Menge von Zufallsfunktionen, die aus Quellen gleicher Art stammen und einen stetigen Bereich von möglichen Werten besitzen, kommen die Amplituden des Aggregats aus Elementen eines Mengenmitglieds jedem Punkt des

stetigen Bereichs möglicher Werte, früher oder später, unendlich nahe, wenn es dem Mengenmitglied erlaubt ist, den natürlichen Verlauf der Schwankung auszuführen". Der Beweis dieser Hypothese ist Teil der sogenannten Ergodentheorie, in der auch die Äquivalenz von Zeit- und Mengenmitteln streng bewiesen wird. Für Interessenten seien hier die Literaturstellen angegeben, wozu auf [1] und [2] verwiesen sei.

Als nächstes wollen wir uns der Anwendung der Äquivalenz von Zeit- und Mengenmittelwerten widmen, und zwar bei der Betrachtung der Autokorrelationsfunktion. Da Korrelationsfunktionen bei zukünftigen Betrachtungen von zentraler Bedeutung sind, soll in diesem Zusammenhang genauer auf sie eingegangen werden. Wir werden so vorgehen, daß wir die Autokorrelationsfunktion zunächst einführen und spezielle Eigenschaften betrachten, unter anderem die Autokorrelationsfunktion als einen Zeitmittelwert und einen Mengenmittelwert untersuchen, Beispiele einfügen und abschließend die Kreuzkorrelationsfunktion kennenlernen.

Zuerst wollen wir die Autokorrelationsfunktion einführen. Bei der Analyse einer statistischen Menge hat man es, wie wir schon verschiedentlich sahen, mit einer unendlichen Vielfalt von Wellenformen zu tun. Infolgedessen ist die Charakterisierung einer Menge durch eine Wellenform besonders ungünstig und steht auch gewissermaßen im Widerspruch zu den spezifischen Eigenheiten einer Menge. Aus diesem Grunde wird angestrebt, Charakteristika auf der Grundlage des mittleren Verhaltens einzuführen, die für alle Mitgliedsfunktionen gemeinsam gelten. Ein besonders wichtiges Charakteristikum dieses Typs ist die Autokorrelationsfunktion, die folgendermaßen definiert ist: Ist $f_1(t)$ eine Mitgliedsfunktion der Menge, so ist ihre Autokorrelationsfunktion gegeben durch

$$\varphi_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \cdot f_1(t+\tau) dt, \quad (I.5.26)$$

wobei τ eine stetige Zeitverschiebung, unabhängig von t , im Bereich $(-\infty, \infty)$ ist. Es wird angenommen, daß diese Funktion für jeden Wert von τ existiert. Wir machen weiterhin die Annahme, daß die Autokorrelationsfunktion für jede Mitgliedsfunktion der Menge die gleiche ist und es sich deshalb bei ihr um ein Charakteristikum der Menge handelt.

Der physikalische Hintergrund der Einführung der Autokorrelationsfunktion ist folgender: Wenn man die Autokorrelationsfunktion von periodischen oder aperiodischen Funktionen bildet, sieht man, daß sie unabhängig von den Phasenspektren der korrelierten Funktionen ist. Eine unendliche Vielfalt von Wellenformen kann daher die gleiche Autokorrelation besitzen. Da aber gerade bei einer Menge von Zufallsfunktionen die Vielfalt der Wellenform eine spezifische Eigenschaft ist, ist es ersichtlich, daß sich die Autokorrelationsfunktion zur Analyse besonders gut eignet.

Wir wenden uns nun speziellen Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion zu. Zunächst sei gezeigt, daß es sich um eine gerade Funktion handelt. Ersetzen wir τ durch $-\tau$, so ergibt sich aus (I.5.26):

$$\varphi_{11}(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \cdot f_1(t-\tau) dt . \quad (\text{I.5.27})$$

Setzen wir $x = t-\tau$, so folgt:

$$\varphi_{11}(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau}^{+T-\tau} f_1(x) \cdot f_1(x+\tau) dx . \quad (\text{I.5.28})$$

Da in dem letzten Integral beide Integrationsgrenzen um τ in die gleiche Richtung verschoben wurden, hat sich die Intervalllänge $2T$ zwischen den beiden Grenzen nicht verändert, sondern nur die Lage des Intervalls. Der Bereich des Integrals $(-T-\tau, T-\tau)$ ist im Grenzfall $(-\infty, \infty)$, für $T \rightarrow \infty$. Infolgedessen folgt als äquivalente Form für (I.5.28):

$$\varphi_{11}(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(x) \cdot f_1(x+\tau) dx . \quad (\text{I.5.29})$$

Auf Grund der Definition ist die rechte Seite des Ausdrucks (I.5.29) aber gerade $\varphi_{11}(\tau)$, so daß wir als Ergebnis erhalten:

$$\varphi_{11}(-\tau) = \varphi_{11}(\tau) , \quad (\text{I.5.30})$$

womit wir gezeigt haben, daß die Autokorrelationsfunktion gerade ist.

Es sei ferner angegeben, wie sich $\varphi_{11}(\tau)$ für die Grenzfälle $\tau = 0$ und $\tau \rightarrow \infty$ verhält. Da die Definitionsgleichung (I.5.26) für alle Werte von τ im Bereich $(-\infty, \infty)$ gilt, erhalten wir als Ausdruck für $\tau = 0$:

$$\varphi_{11}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1^2(t) dt . \quad (\text{I.5.31})$$

Dies ist das mittlere Quadrat von $f_1(t)$ oder die mittlere Leistung, wenn $f_1(t)$ eine Spannung oder einen Strom bei 1 Ohm Belastung darstellt. Für den anderen Extremfall $T \rightarrow \infty$ kann gezeigt werden, was hier nicht explizit durchgeführt sei, daß

$$\varphi_{11}(\infty) = 0 . \quad (\text{I.5.32})$$

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, die Autokorrelation im Hinblick auf die Äquivalenz von Zeitmittelwert und Mengenmittelwert zu untersuchen. Unser Ziel ist es, die Autokorrelationsfunktion, die nach (I.5.26) als Zeitmittelwert definiert ist, als Mengenmittelwert auszudrücken. Dazu sei die Definition der Autokorrelationsfunktion nochmals wiederholt und folgendermaßen ausgedrückt:

$$\varphi_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot f(t+\tau) dt . \quad (\text{I.5.33})$$

Dieser Ausdruck kann abgekürzt werden durch:

$$\varphi_{ff}(\tau) = \overline{f(t) \cdot f(t+\tau)} .$$

Wir betrachten das Zeitintervall $(-\infty, 0)$, in dem $f(t)$ zur Untersuchung zur Verfügung steht. Wenn wir nur die Vergangenheit betrachten, d.h. $f(t) = 0$ für $t > 0$, dann ist die Autokorrelationsfunktion für $f(t)$ gegeben durch:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) \cdot f(t+\tau) dt . \quad (\text{I.5.35})$$

Wir teilen wieder jede Mitgliedsfunktion in infinitesimale Elemente der Dauer Δt . Wir können dann ein Aggregat von Elementpaaren bilden, wobei die Elemente eines jeden Paares um die Zeitdauer τ voneinander getrennt sind, wie in der Abbildung I.5.2 angedeutet.

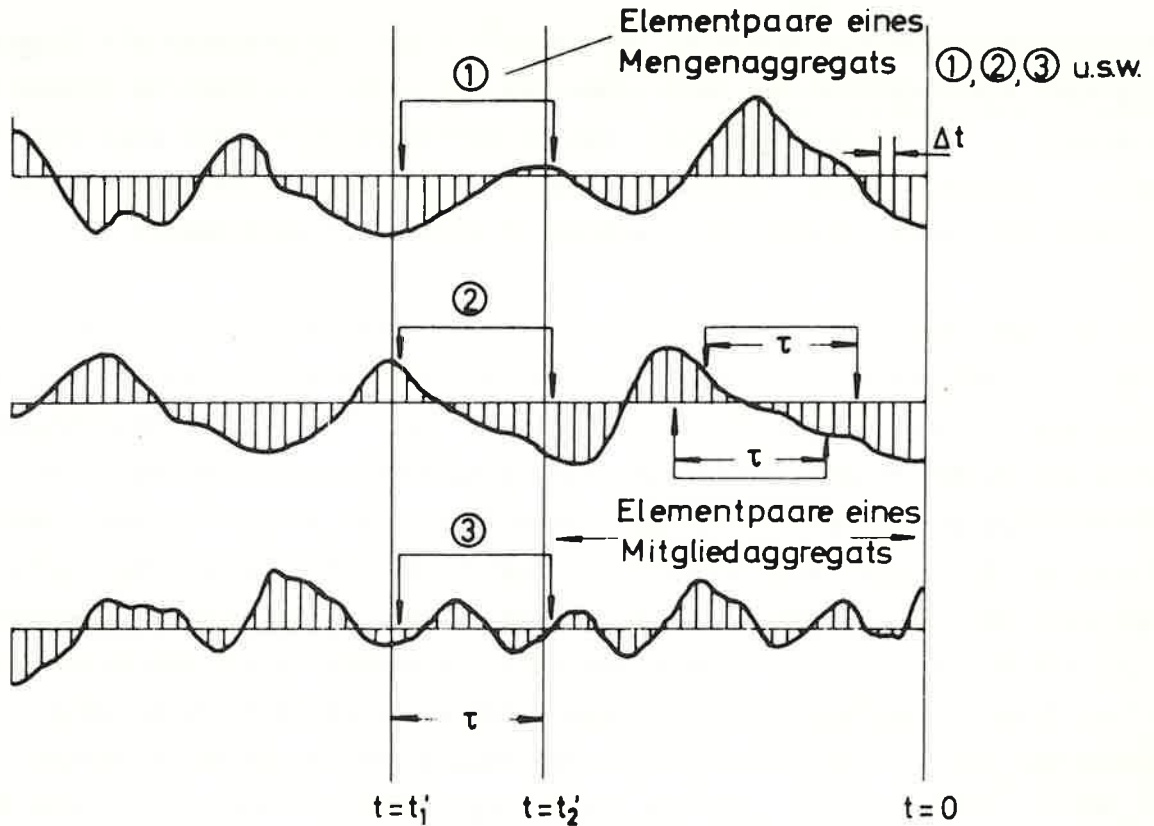


Abb. I.5.2

Folglich bilden diejenigen Elemente eines Mengenmitglieds bei $t = 0, -\Delta t, -2\Delta t, \dots$ und diejenigen bei $t = -\tau, -\tau-\Delta t, -\tau-2\Delta t, \dots$ ein Aggregat von Paaren. Wir wollen dieses Aggregat als ein Mitgliedsaggregat von Elementpaaren bezeichnen. Da die Menge aus Quellen gleicher Art gebildet wird, nehmen wir wieder an, daß alle Mitgliedsaggregate von Elementpaaren einander gleich sind, ausgenommen die Reihenfolge der Elementpaare.

Diese Annahme versetzt uns in die Lage auszusagen, daß der Ausdruck (I.5.35) für alle Mengenmitglieder gleich ist. Wenn wir weiterhin als integrierbare, willkürliche Funktion $F(x)$ einführen, so können wir auch sagen, daß der Ausdruck

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 F [f(t) \cdot f(t+\tau)] dt \quad (I.5.36)$$

für alle Mitgliedsfunktionen gleich ist.

Als nächstes betrachten wir nun Elementpaare aus der Gesamtmenge anstelle solcher aus den einzelnen Funktionen. Zu den Zeiten $t = t_1'$ und $t = t_2'$ in der Vergangenheit, die um die Zeit τ auseinander liegen (d.h. $t_2' = t_1' + \tau$, wie in der Abb. I.5.2 dargestellt), wollen wir ein Aggregat aus Elementpaaren bilden, in dem wir zu den beiden Zeiten je ein Element aus jeder

Mitgliedsfunktion herausgreifen. Wir werden solch ein Aggregat als Mengenaggregat aus Elementpaaren bezeichnen. Da wir es mit stationären Mengen zu tun haben, ist das Mengenaggregat aus Elementpaaren für einen gegebenen Wert von τ invariant gegen irgendeinen Wert von t_1' . Nur die Reihenfolge der Elementpaare wird verschieden, wenn der Wert von t_1' sich ändert.

Die weitere Argumentation geht in der gleichen Art wie früher. Da die invarianten Mengenaggregate aus Mitgliedsfunktionen gebildet werden, von denen jede das gleiche Aggregat aus Elementpaaren besitzt, muß das Mengenaggregat auch gleich dem Mitgliedsaggregat sein, ausgenommen der Unterschied in der Reihenfolge der Elementpaare. Aus diesem Grunde ist folgende Aussage möglich: Der Mittelwert des Produkts von zwei Elementen in einem Paar ist der gleiche, unbeschadet dessen, ob er als Mittelwert eines Mitgliedsaggregats oder als Mittelwert eines Mengenaggregats ausgedrückt wird. Der Mittelwert eines Mitgliedsaggregats ist aber durch den Ausdruck (I.5.35) gegeben, der einen Zeitmittelwert darstellt. Auf der anderen Seite ist der Mittelwert eines Produkts von zwei stetigen Zufallsvariablen ξ_1 und ξ_2 , die durch die Zeit τ getrennt sind, auf der Basis eines Mengenaggregats gegeben durch den Ausdruck:

$$\overline{\xi_1 \xi_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 . \quad (\text{I.5.37})$$

Dieser Ausdruck ist die Definitionsgleichung für das Produkt von stetigen Zufallsvariablen, die um τ gegeneinander verschoben sind. $P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2; \tau)$ ist die zweite Wahrscheinlichkeitsdichte (vgl. Ausdruck (I.2.12)). Sie beschreibt die stationäre Menge an zwei Zeitpunkten, hier bei $t = t_1'$ und $t = t_2'$, wobei $t_2' - t_1' = \tau$.

Die Äquivalenz des Zeitmittelwertes und des Mengenmittelwertes wird in diesem Falle durch folgende Beziehung ausgedrückt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) f(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 . \quad (\text{I.5.38})$$

Wenn wir annehmen, daß der Mittelwert von $f(t) \cdot f(t+\tau)$ erstreckt von $(-\infty, 0)$ gleich dem von $(0, \infty)$ ist, d.h. wenn

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) \cdot f(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t+\tau) dt , \quad (\text{I.5.39})$$

dann folgt für den Ausdruck (I.5.38):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot f(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2, \quad (I.5.40)$$

oder in abgekürzter Form:

$$\overline{f(t) \cdot f(t+\tau)} = \overline{\xi_1 \cdot \xi_2} \quad (I.5.41)$$

als ein Ausdruck für die Schlußfolgerung, daß der Zeitmittelwert von $f(t) \cdot f(t+\tau)$ dem Mengenmittelwert, ausgedrückt durch $\overline{\xi_1 \xi_2}$, äquivalent ist.

Da der Zeitmittelwert per Definition die Autokorrelationsfunktion darstellt, ergibt sich daher als alternative Schreibweise für die Autokorrelationsfunktion der Ausdruck:

$$\varphi_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2. \quad (I.5.42)$$

Dies ist die Autokorrelationsfunktion von $f(t)$ als Mengenmittelwert. Handelt es sich bei $f(t)$ um diskrete Prozesse, so ergibt sich für (I.5.42) die entsprechende Beziehung:

$$\varphi_{ff}(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{1i} x_{2j} P_{\xi_1 \xi_2}(x_{1i}, x_{2j}; \tau). \quad (I.5.43)$$

Nachdem wir die Autokorrelationsfunktion eingeführt und ihre wesentlichen Darstellungsformen kennengelernt haben, wollen wir uns einem konkreten Anwendungsbeispiel zuwenden, bevor wir weitere allgemeine Eigenschaften besprechen. Das Anwendungsbeispiel hat zum Ziel, die Autokorrelationsfunktion der uns schon bekannten Poisson-Verteilung zu berechnen. Wir betrachten dazu wieder die Menge von rechteckförmigen Wellenzügen, die zwischen den Werten $+E_m$ und $-E_m$ wechseln und deren Nulldurchgänge der Poisson-Verteilung gehorchen (vgl. Abb.I.4.1). Bezeichnen wir die Anzahl der Nulldurchgänge einer Mitgliedsfunktion während der Zeitdauer τ durch die Zufallsvariable η , die die möglichen Werte $n = 0, 1, 2, \dots$ besitzt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Auffinden von n Nulldurchgängen während der Zeitdauer τ nach Gl.(I.4.40) gegeben durch

$$P_{\eta}(n; \tau) = \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau}, \quad (I.5.44)$$

wobei k die mittlere Anzahl der Nulldurchgänge pro Zeiteinheit ist.

Da es sich um diskrete Prozesse handelt, wenden wir zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion die Beziehung (I.5.43) an. Wir schreiben den Ausdruck unter der Bedingung, daß ξ_1 und ξ_2 nur zwei Werte annehmen können, nämlich entweder $+E_m$ oder $-E_m$, und erhalten:

$$\varphi_{ff}(\tau) = \sum_{\substack{j=-1 \\ j \neq 0}}^1 \sum_{\substack{i=-1 \\ i \neq 0}}^1 x_{1i} x_{2j} P_{\xi_1 \xi_2}(x_{1i}, x_{2j}; \tau) \quad (I.5.45)$$

In der Abb. I.4.1 war angegeben, daß die Amplituden eines Mengenmitglieds, $f(t)$, bei $t = t_1$ und $t = t_2 = t_1 + \tau$ durch ξ_1 bzw. ξ_2 gegeben sind.

Für den Rechnungsgang ist es vorteilhafter, die zweite Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{\xi_1 \xi_2}(x_{1i}, x_{2j}; \tau)$ durch das Produkt einer nichtbedingten Verteilung mit einer bedingten Verteilung auszudrücken, so daß wir als äquivalenten Ausdruck anstelle von (I.5.45) folgendes erhalten:

$$\varphi_{ff}(\tau) = \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=-1}^1 x_{1i} x_{2j} P_{\xi_1}(x_{1i}) \cdot P_{\xi_2 | \xi_1}(x_{2j} | x_{1i}; \tau) \quad (I.5.46)$$

In diesem Ausdruck ist:

$$\left. \begin{aligned} x_{1,1} &= E_m \\ x_{1,-1} &= -E_m \\ x_{2,1} &= E_m \\ x_{2,-1} &= -E_m \end{aligned} \right\} \quad (I.5.47)$$

Auf der Grundlage der Annahmen, die wir bei der Ableitung der Poisson-Verteilung gemacht haben, gilt:

$$\begin{aligned} P_{\xi_1}(E_m) &= P_{\xi_1}(-E_m), \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (I.5.48)$$

Das bedeutet: Eine Mitgliedsfunktion besitzt bei $t = t_1$ die gleiche Wahrscheinlichkeit, den Wert E_m oder den Wert $-E_m$ anzunehmen.

Hinsichtlich der bedingten Verteilung $P_{\xi_2 | \xi_1}(x_{2j} | x_{1i}; \tau)$ aus dem Ausdruck (I.5.46) wollen wir zunächst ihre Größe für $i = 1$ und $j = 1$ feststellen, d.h. wir wollen folgenden Ausdruck untersuchen:

$$P_{\xi_2 | \xi_1}(E_m | E_m; \tau) \quad (I.5.49)$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ξ_2 bei $t=t_2 = t_1 + \tau$ den Wert E_m annimmt, wenn ξ_1 bei $t=t_1$ den Wert E_m angenommen hatte. Dieses Ereignis kann auf verschiedene Weisen eintreten. Die erste Möglichkeit ist die, daß während der Zeitdauer kein Nulldurchgang aufgetreten ist. Die zweite Möglichkeit ist die, daß im Intervall zwei Nulldurchgänge aufgetreten sind, so daß die Funktion, die bei $t=t_1$ den Wert E_m besaß, durch den zweimaligen Wechsel von E_m nach $-E_m$ und $-E_m$ nach E_m bei $t=t_2$ wieder den Wert E_m besitzt. Führt man diese Überlegungen weiter, so sieht man, daß jede geradzahlige Anzahl von Nulldurchgängen in τ die Bedingung erfüllt. Infolgedessen haben wir hier ein Ereignis, das in einer Reihe von unvereinbaren Formen auftreten kann. Auf Grund des Theorems der Gesamtwahrscheinlichkeit können wir schreiben:

$$P(\xi_2 = E_m \mid \xi_1 = E_m; \tau) = \sum_{n=0,2,4,\dots} P(\eta = n; \tau). \quad (I.5.50)$$

Damit folgt für den Ausdruck (I.5.49) folgendes:

$$P_{\xi_2} \mid \xi_1 (E_m \mid E_m; \tau) = \sum_{n=0,2,4,\dots} P_{\eta}(n; \tau), \quad (I.5.51)$$

wobei $P_{\eta}(n; \tau)$ die durch den Ausdruck (I.5.44) gegebene Poisson-Verteilung ist.

In entsprechender Weise kann gezeigt werden, daß die bedingte Wahrscheinlichkeit für $i=-1$ und $j=-1$ den gleichen Wert besitzt. Das bedeutet:

$$P_{\xi_2} \mid \xi_1 (-E_m \mid -E_m; \tau) = \sum_{n=0,2,4,\dots} P_{\eta}(n; \tau). \quad (I.5.52)$$

Wenn wir bei $t=t_1$ mit E_m anfangen und bei $t=t_2$ den Wert $-E_m$ haben wollen, ist es ersichtlich, daß die Anzahl von Nulldurchgängen in τ eine ungerade Zahl sein muß. Genauso muß es im umgekehrten Fall sein, wenn der Anfangswert $-E_m$ und der Endwert $+E_m$ ist. Dementsprechend erhalten wir für die bedingte Wahrscheinlichkeit, wenn $i=1$ und $j=-1$, die Beziehung:

$$P_{\xi_2} \mid \xi_1 (-E_m \mid E_m; \tau) = \sum_{n=1,3,5,\dots} P_{\eta}(n; \tau), \quad (I.5.53)$$

und für $i=-1$ und $j=1$ ist

$$P_{\xi_2} \mid \xi_1 (E_m \mid -E_m; \tau) = \sum_{n=1,3,5,\dots} P_{\eta}(n; \tau). \quad (I.5.54)$$

Wenn wir gemäß der Vorschrift im Ausdruck (I.5.46) aufsummieren, erhalten wir für die Autokorrelationsfunktion:

$$\varphi_{ff}(\tau) = 2 \times E_m \times E_m \times \frac{1}{2} \times \sum_{n=0,2,4,\dots} P_\eta(n;\tau) - 2 \times E_m \times E_m \times \frac{1}{2} \times \sum_{n=1,3,5,\dots} P_\eta(n;\tau). \quad (\text{I.5.55})$$

Da die Variable τ in der Poisson-Verteilung (I.5.44) immer positiv ist, die Zeitverschiebung τ sich bei der Autokorrelation jedoch über den Bereich $(-\infty, \infty)$ erstreckt, ist es erforderlich, bei der Verteilung $P_\eta(n;\tau)$ im Ausdruck (I.5.55) τ durch $|\tau|$ zu ersetzen. Setzen wir den Ausdruck (I.5.44) in (I.5.55) ein, so ergibt sich nach Vereinfachung:

$$\begin{aligned} \varphi_{ff}(\tau) &= E_m^2 \left[\sum_{n=0,2,4,\dots} \frac{(k|\tau|)^n}{n!} e^{-k|\tau|} - \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(k|\tau|)^n}{n!} e^{-k|\tau|} \right] \\ \varphi_{ff}(\tau) &= E_m^2 e^{-k|\tau|} \left[1 - \frac{k|\tau|}{1!} + \frac{(k|\tau|)^2}{2!} - \frac{(k|\tau|)^3}{3!} + \dots \right] \\ \varphi_{ff}(\tau) &= E_m^2 e^{-2k|\tau|} \quad . \quad (\text{I.5.56}) \end{aligned}$$

Dies ist die Autokorrelationsfunktion der Rechteckwelle, deren Nulldurchgänge der Poisson-Verteilung gehorchen. Die Funktion ist in der Abbildung I.5.3 für den Fall $E_m=1$ Volt und $k = 1000$ pro sec graphisch dargestellt.

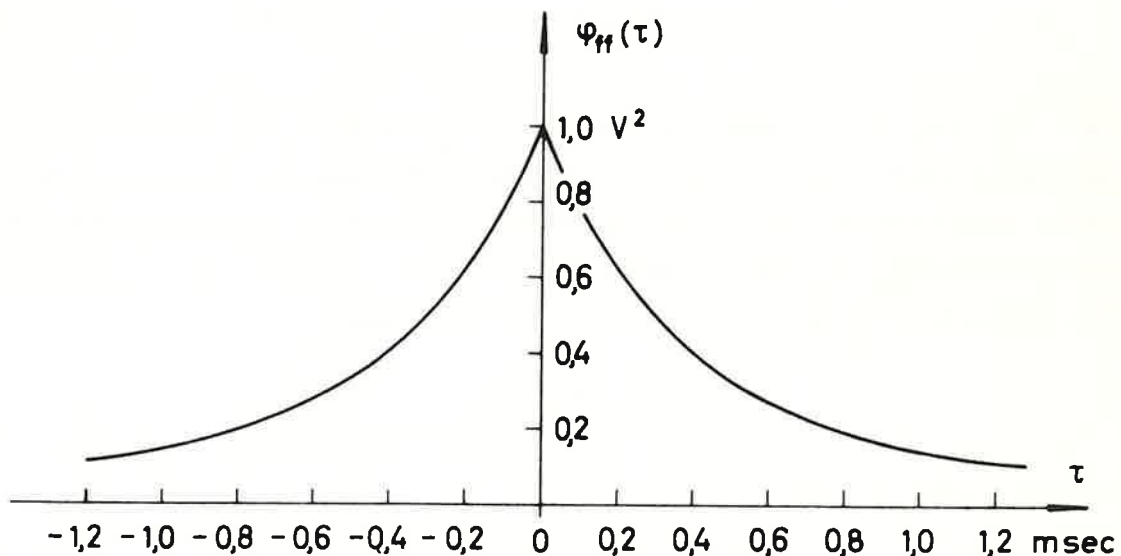


Abb. I.5.3

Die Funktion ist gerade. Sie strebt gegen Null für $\tau \rightarrow \infty$. Ihr Maximalwert ergibt sich aus

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt = E_m^2$$

$$\varphi_{ff}(0) = E_m^2. \quad (I.5.57)$$

Wir kehren zu allgemeineren Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion zurück und werden als nächstes ihre Fouriertransformation behandeln, die auf das sogenannte "Wienersche Theorem der Autokorrelation" hinführt.

$f_1(t)$ sei wieder eine Zufallsfunktion und die Autokorrelationsfunktion ist dann gegeben durch den Ausdruck

$$\varphi_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \cdot f_1(t+\tau) dt. \quad (I.5.58)$$

Entsprechend der Behandlung von Fourierintegralen definieren wir eine Funktion $\vartheta_{11}(\omega)$ derart, daß folgende zwei Beziehungen gelten:

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_{11}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (I.5.59)$$

und

$$\vartheta_{11}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{11}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (I.5.60)$$

Durch den Ausdruck (I.5.60) ist $\vartheta_{11}(\omega)$ definiert als die Fouriertransformierte von $\varphi_{11}(\tau)$. Manchmal ist es vorteilhaft, die Ausdrücke (I.5.59) und (I.5.60) als Kosinustransformationen zu schreiben. Diese Möglichkeit besteht, da $\varphi_{11}(\tau)$ eine reelle und gerade Funktion ist, so daß auch die transformierte $\vartheta_{11}(\omega)$ eine reelle und gerade Funktion sein sollte. Die Ausdrücke (I.5.59) und (I.5.60) lauten als Transformationen mit Kosinus folgendermaßen:

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_{11}(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (I.5.61)$$

$$\vartheta_{11}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{11}(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (I.5.62)$$

Es ist von Interesse, die physikalische Bedeutung der Funktion $\phi_{11}(\omega)$ zu untersuchen. Dazu setzen wir im Ausdruck (I.5.61) $\tau = 0$ und erhalten die einfache Beziehung

$$\phi_{11}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{11}(\omega) d\omega . \quad (\text{I.5.63})$$

Für die Autokorrelationsfunktion an der Stelle $\tau = 0$ gilt auf Grund des Ausdrucks (I.5.31):

$$\phi_{11}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1^2(t) dt ,$$

so daß wir damit folgendes erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{11}(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1^2(t) dt . \quad (\text{I.5.64})$$

Hiermit haben wir die Funktion $\phi_{11}(\omega)$ mit dem mittleren quadratischen Wert der Zufallsfunktion $f_1(t)$ in Beziehung gesetzt. Stellt $f_1(t)$ eine Spannung oder einen Strom bei einer Last von 1 Ohm dar, so ist das mittlere Quadrat von $f_1(t)$ die mittlere Leistung, die von der Last aufgenommen wird. Nun besagt aber die Gleichung (I.5.64) folgendes: Das Integral von $\phi_{11}(\omega)$, erstreckt über den gesamten Kreisfrequenzbereich von $-\infty$ bis $+\infty$ ergibt die mittlere Leistung von $f_1(t)$. Infolgedessen stellt die Funktion $\phi_{11}(\omega)$ selbst eine Leistungsdichte dar, die, da sie von der Frequenz abhängig ist, als spektrale Leistungsdichte bezeichnet wird. Sie ist auch unter dem Namen "Leistungsdichtespektrum" oder auch einfach "Spektrum" bekannt.

Die spektrale Leistungsdichte kann entweder ausgedrückt werden in der Dimension Watt pro Einheit der Kreisfrequenz, d.h. also Watt sec oder, wenn die Belastung unberücksichtigt bleibt, in Volt² (oder Amp²) pro Einheit der Kreisfrequenz, also in Volt² sec oder Amp² sec.

Nachdem die physikalische Bedeutung von $\phi_{11}(\omega)$ diskutiert worden ist, können wir folgende Aussage machen:

Die Autokorrelationsfunktion einer Zufallsfunktion und die spektrale Leistungsdichte einer Zufallsfunktion sind durch die Fouriertransformation miteinander in Beziehung gesetzt, so wie es durch die Ausdrücke (I.5.61) und (I.5.62) bzw. durch (I.5.59) und (I.5.60) dargestellt ist.

Dieses Theorem wurde von Norbert Wiener aufgestellt und trägt daher den Namen das Wienersche Theorem der Autokorrelation. Der strenge Beweis dieses Theorems ist in [3] enthalten.

Die fundamentale Annahme, die dem Wienerschen Theorem zugrunde liegt, ist einmal die Existenz der Autokorrelationsfunktion und daß sie für alle Mitgliedsfunktionen einer Menge gemeinsam gilt. Auf Grund der eindeutigen Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Fouriertransformierten ist es evident, daß das Wienersche Theorem die Tatsache nachweist, daß die gemachte Annahme gleichbedeutend mit der Forderung ist, daß jedes Mitglied einer Menge die gleiche spektrale Leistungsdichte besitzt, unabhängig von der Form des Wellenzuges.

Zur Anwendung des Wienerschen Theorems sei ein einfaches Beispiel gebracht. Dabei greifen wir zurück auf die rechteckförmige Welle mit den poisson-verteilten Nulldurchgängen der Abb.I.4.1. Als Autokorrelationsfunktion hatten wir gemäß (I.5.56) gefunden:

$$\varphi_{11}(\tau) = E_m^2 e^{-2k|\tau|} .$$

Unser Ziel ist, die spektrale Leistungsdichte zu bestimmen. Wird das Wienersche Theorem in Form des Ausdrucks (I.5.62) angewendet, so folgt:

$$\phi_{11}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_m^2 e^{-2k|\tau|} \cos \omega\tau d\tau . \quad (I.5.65)$$

Die Integration ergibt:

$$\phi_{11}(\omega) = \frac{E_m^2}{\pi} \cdot \frac{2k}{(2k)^2 + \omega^2} . \quad (I.5.66)$$

Setzen wir $E_m = 1$ Volt und $k = 1000$ pro sec, so erhalten wir den, in der Abbildung I.5.4 dargestellten, Verlauf der spektralen Leistungsdichte für dieses Beispiel.

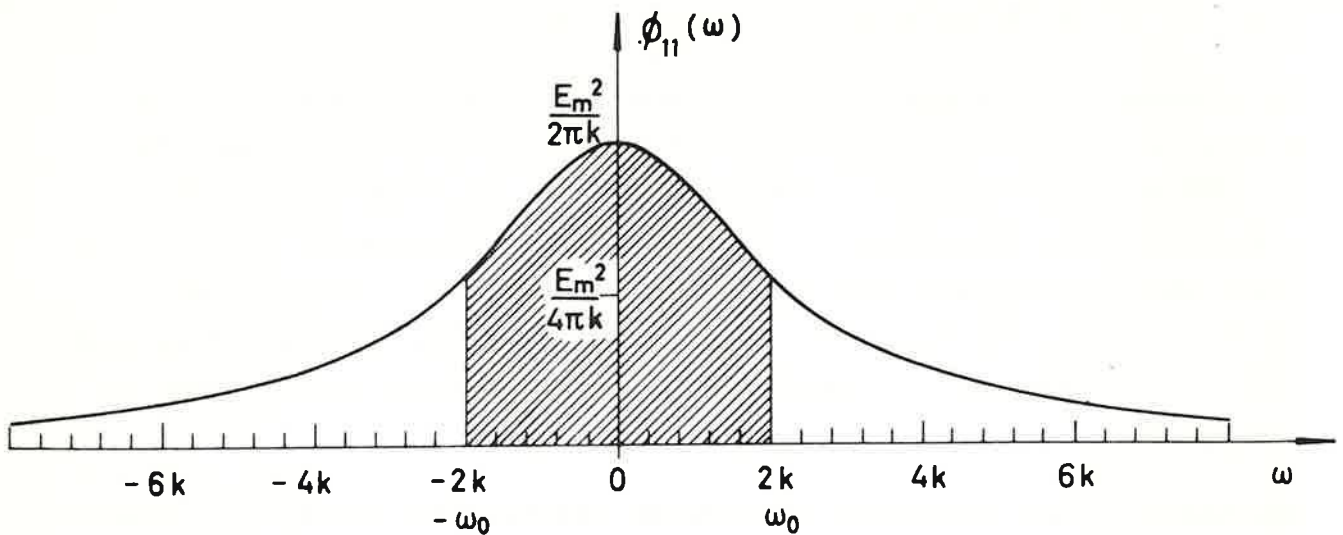


Abb. I.5.4

Allgemein ist noch anzumerken: Im Falle von Zufallsfunktionen, die nicht periodisch sind, erhält man eine stetige spektrale Leistungsdichte-Kurve. Die Fläche unter der Kurve stellt den Leistungsbeitrag eines kontinuierlichen Bandes von Frequenzen innerhalb der Bandgrenzen dar. Die Leistung $\phi_{11}(\omega) d\omega$ in einer infinitesimalen Bandbreite $d\omega$ von sinusförmigen Komponenten, in die man sich eine stetige Zufallsfunktion zerlegt denken kann, ist eine infinitesimale Größe. Ein endlicher Betrag an Leistung existiert nur in einem endlichen Frequenzband. Die Gesamtleistung von $f_1(t)$ wird von der Gesamtfläche unter der Kurve der spektralen Leistungsdichte dargestellt.

Zum Abschluß der allgemeinen Einführung der Autokorrelationsfunktion betrachten wir ihre Ableitungen. Die Definitionsgleichung (I.5.26) lautete:

$$\varphi_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \cdot f_1(t+\tau) dt .$$

Differentiation ergibt:

$$\varphi'_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \cdot f'_1(t+\tau) dt . \quad (\text{I.5.67})$$

Dabei bedeutet $\varphi'_{11}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \varphi_{11}(\tau)$, und wenn wir $x = t + \tau$ setzen, bedeutet $f'_1(x) = \frac{d}{dx} f_1(x)$. Nach Änderung der Variablen folgt für (I.5.67):

$$\varphi'_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\tau}^{T+\tau} f'_1(x) \cdot f_1(x-\tau) dx . \quad (\text{I.5.68})$$

Da beide Integrationsgrenzen im Integral (I.5.68) um τ in die gleiche Richtung verschoben sind, das Intervall $2T$ sich aber nicht geändert hat - ausgenommen seine Lage -, können wir schreiben:

$$\varphi'_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f'_1(x) \cdot f_1(x-\tau) dx . \quad (\text{I.5.69})$$

Eine zweite formale Differentiation ergibt folgendes Resultat:

$$\varphi''_{11}(\tau) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f'_1(x) \cdot f'_1(x-\tau) dx , \quad (\text{I.5.70})$$

oder, wenn wir die Variable wieder umändern durch die Beziehung $t = x - \tau$, ergibt sich:

$$\varphi''_{11}(\tau) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau}^{T-\tau} f'_1(t) \cdot f'_1(t+\tau) dt . \quad (\text{I.5.71})$$

Mit der gleichen Argumentation, die zum Ausdruck (I.5.69) führt, erhalten wir für (I.5.71) die reduzierte Form

$$\varphi''_{11}(\tau) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f'_1(t) \cdot f'_1(t+\tau) dt . \quad (\text{I.5.72})$$

Wir haben somit folgendes Resultat erhalten: Die erste Ableitung der Autokorrelationsfunktion von $f_1(t)$ ist die Korrelation von $f_1(t)$ mit der Ableitung. Die zweite Ableitung der Autokorrelationsfunktion ist wiederum eine Autokorrelationsfunktion, und zwar die Autokorrelation der Ableitung von $f_1(t)$ mit negativem Vorzeichen.

Entsprechende Ausdrücke für die erste und zweite Ableitung unter Zugrundelegung der spektralen Leistungsdichte findet man mit Hilfe des Wiener'schen Theorems, das lautet:

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{11}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega .$$

Für die erste Ableitung ergibt sich:

$$\varphi'_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \cdot \phi_{11}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (\text{I.5.73})$$

und für die zweite Ableitung

$$\varphi''_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 \phi_{11}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (\text{I.5.74})$$

Durch Rücktransformation erhalten wir für (I.5.73):

$$i\omega \phi_{11}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_{11}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{I.5.75})$$

und für (I.5.74):

$$(i\omega)^2 \phi_{11}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi''_{11}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{I.5.76})$$

Nach Einführung der Autokorrelationsfunktion wenden wir uns nun der Kreuzkorrelationsfunktion zu. Bei der Kreuzkorrelation von zwei Zufallsfunktionen betrachten wir zwei Mengen, denen sie als Mitglieder angehören. Wie bei der Diskussion der Autokorrelation seien die Mitglieder einer Menge aus gleichartigen Quellen hervorgegangen.

Zur Definition der Kreuzkorrelation sei $f_1(t)$ eine Mitgliedsfunktion der ersten Menge und $f_2(t)$ die entsprechende Mitgliedsfunktion der zweiten Menge. Die Kreuzkorrelationsfunktion der Zufallsfunktionen ist dann definiert durch:

$$\varphi_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \cdot f_2(t+\tau) dt = \overline{f_1(t) \cdot f_2(t+\tau)}. \quad (\text{I.5.77})$$

Es wird angenommen, daß diese Funktion für jeden Wert des Arguments existiert. Es wird weiterhin angenommen, daß die Kreuzkorrelation zwischen irgendeinem Funktionenpaar der Menge, die gleiche Funktion ist. Die Kreuzkorrelationsfunktion ist infolgedessen ein Charakteristikum der Mengen.

Bei der Kreuzkorrelation ist die Reihenfolge der Indizes am Funktionssymbol wichtig. Zum Beispiel ist $\varphi_{21}(\tau)$ folgendermaßen definiert:

$$\varphi_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_2(t) \cdot f_1(t+\tau) dt. \quad (\text{I.5.78})$$

Zwischen den Funktionen $\varphi_{12}(\tau)$ und $\varphi_{21}(\tau)$ besteht folgende einfache Beziehung:

$$\varphi_{12}(\tau) = \varphi_{21}(-\tau) . \quad (\text{I.5.79})$$

Dies bedeutet, daß aus der Spiegelung von φ_{12} die Funktion φ_{21} entsteht und umgekehrt. Diese Tatsache kann einfach gezeigt werden. Wir ändern das Vorzeichen von τ in der Definitionsgleichung (I.5.77) und erhalten:

$$\varphi_{12}(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \cdot f_2(t-\tau) dt . \quad (\text{I.5.80})$$

Ändern wir wieder die Variable in $x = t - \tau$, so erhalten wir:

$$\varphi_{12}(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau}^{T-\tau} f_2(x) \cdot f_1(x+\tau) dx . \quad (\text{I.5.81})$$

Mit der gleichen Argumentation hinsichtlich des Integrationsbereichs, wie bei dem Ausdruck (I.5.69), ergibt sich, daß der Gleichung (I.5.81) folgende äquivalent ist:

$$\varphi_{12}(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_2(x) \cdot f_1(x+\tau) dx , \quad (\text{I.5.82})$$

und wenn wir wieder $t = x - \tau$ einsetzen, folgt sofort:

$$\varphi_{12}(-\tau) = \varphi_{21}(\tau) . \quad (\text{I.5.83})$$

Im Gegensatz zur Autokorrelationsfunktion ist die Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{12}(\tau)$ nicht notwendigerweise eine gerade Funktion. Im allgemeinen ist sie weder gerade noch ungerade. Weiterhin braucht - ebenfalls im Gegensatz zur Autokorrelationsfunktion - der Wert von $\varphi_{12}(\tau)$ bei $\tau = 0$ nicht der Maximalwert zu sein. In Übereinstimmung mit der Autokorrelationsfunktion strebt die Kreuzkorrelationsfunktion gegen Null, wenn die Zeitverschiebung τ gegen unendlich strebt, d.h.:

$$\varphi_{12}(\pm \infty) = 0 . \quad (\text{I.5.84})$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion läßt sich folgendermaßen durch ein Fourier-Integral ausdrücken:

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{12}(u) e^{-i\omega u} du d\omega. \quad (\text{I.5.85})$$

Definieren wir eine Funktion $\phi_{12}(\omega)$ folgendermaßen:

$$\phi_{12}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (\text{I.5.86})$$

so können wir den Ausdruck (I.5.85) in folgender Form schreiben:

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{12}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (\text{I.5.87})$$

Die Funktion $\phi_{12}(\omega)$ wird spektrale Kreuzleistungsdichte der Zufallsfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ genannt. Dieser Ausdruck ist im allgemeinen auch zutreffend, da er in Analogie zur spektralen Leistungsdichte beim Vorhandensein nur einer Zufallsfunktion steht. Allerdings sei darauf hingewiesen, daß im Gegensatz zur Autokorrelation die physikalische Bedeutung der Kreuzkorrelation stark von der Problemstellung abhängt und vor allem auch davon, in welcher Weise Kreuzkorrelationen gebildet werden. Die beiden Beziehungen (I.5.86) und (I.5.87) sollen als Kreuzkorrelationstheorem für Zufallsfunktionen bezeichnet werden.

Zum Abschluß seien noch die äquivalenten Darstellungsformen der Kreuzkorrelationsfunktion als Zeitmittel und als Mengen- oder Scharmittel angegeben. Wir knüpfen dabei an die Autokorrelationsfunktion an, bei der wir die Äquivalenz durch den Ausdruck (I.5.41) folgendermaßen vereinfacht dargestellt hatten:

$$\overline{f(t) \cdot f(t+\tau)} = \overline{\xi_1 \cdot \xi_2}.$$

In Analogie dazu folgt für die Kreuzkorrelationsfunktion der Ausdruck

$$\overline{f_1(t) \cdot f_2(t+\tau)} = \overline{\xi_1 \cdot \xi_2}, \quad (\text{I.5.88})$$

der die Kreuzkorrelationsfunktion als einen Mengenmittelwert darstellt. Wir formen diesen Ausdruck etwas um. Wenn die Kreuzkorrelation zwischen den Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ aus den Mengen $[f(t)]$ und $[g(t)]$ stattfindet, dann ist $f_1(t) = f(t)$ und $f_2(t+\tau) = g(t+\tau)$ und $\xi_1 \xi_2$ kann als $\xi_1 \eta_2$ geschrieben werden. Damit erhalten wir für (I.5.88):

$$\overline{f(t) \cdot g(t+\tau)} = \overline{\xi_1 \eta_2} \quad (I.5.89)$$

Die linke Seite der Gleichung (I.5.89) ist die Definitionsgleichung der Kreuzkorrelationsfunktion, die als Zeitmittelwertgleichung eingeführt war:

$$\varphi_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) g(t+\tau) dt \quad (I.5.90)$$

Für die rechte Seite der Gleichung (I.5.89) erhalten wir einen äquivalenten Ausdruck zur Beziehung (I.5.37), die als Definitionsgleichung für das Produkt von stetigen Zufallsvariablen eingeführt war, die um τ gegeneinander verschoben sind, und die schon bei der Autokorrelationsfunktion Verwendung gefunden hatte. Verwenden wir diese Beziehung auch hier, so ergibt sich:

$$\varphi_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 P_{\xi_1 \eta_2}(x_1, y_2; \tau) dx_1 dy_2 \quad (I.5.91)$$

Dies ist die Kreuzkorrelationsfunktion von $f(t)$ und $g(t)$, dargestellt durch ein Mengenmittel, wenn der Bereich der Zufallsvariablen stetig ist. Der entsprechende Ausdruck für diskrete $f(t)$ und $g(t)$ ist gegeben durch:

$$\varphi_{fg}(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{1i} y_{2j} P_{\xi_1 \eta_2}(x_{1i}, y_{2j}, \tau) \quad (I.5.92)$$

Mit der Einführung der Korrelationsfunktionen sei dieses einleitende Kapitel abgeschlossen.

KAPITEL II - Anwendung statistischer Methoden zur Analyse des Neutronenrauschens in Nulleistungsreaktoranordnungen

II.1 Einleitung

Unter dem Begriff Reaktorrauschen werden allgemein die Schwankungserscheinungen in der Neutronenbevölkerung eines Reaktors zusammengefaßt. Die Gründe für das Auftreten derartiger Schwankungen hängen stark vom Betriebszustand und vom Typ des jeweiligen Reaktors ab. Befindet sich ein Reaktor auf sehr niedriger Leistung im sogenannten Nulleistungsbereich, und sind alle Störungen und Rückwirkungen innerer und äußerer Art ausgeschlossen, so rühren die Schwankungen in der Neutronenbevölkerung nur von den stochastisch ablaufenden Kernreaktionen im Reaktor her, und man kann diese Art als reines NEUTRONENRAUSCHEN bezeichnen. Die detaillierte Analyse des Neutronenrauschens erlaubt die Bestimmung charakteristischer reaktorphysikalischer Größen, wie die Abklingkonstante des prompten Neutronenflusses, die Neutronenlebensdauer und die Reaktivität, als auch die Bestimmung der absoluten Leistung des Reaktors. Diese Größen sind zur Kennzeichnung des neutronenphysikalischen Verhaltens eines Reaktors von Bedeutung, und ihre experimentelle Bestimmung bietet einen wichtigen Beitrag zur Prüfung reaktortheoretischer Berechnungsverfahren, insbesondere bei der Entwicklung neuer Reaktortypen.

In Reaktoren bewirkt der Übergang vom Nulleistungsbereich zu höheren Leistungen das Auftreten weiterer Quellen des Reaktorrauschens durch statistische oder quasistatistische Reaktivitätsmodulationen. Diese können hervorgerufen werden durch Vibrationen der Brennelemente, durch Turbulenzercheinungen im Kühlmittelfluß, durch Sieden des Kühlmittels und durch Rückwirkungen angeschlossener Aggregate, wie Turbinen, Generatoren, Ventile und dergleichen. Hierbei liefert das reine Neutronenrauschen zum Reaktorrauschen nur noch einen mehr oder weniger großen Beitrag, der meistens von den anderen Quellen überdeckt wird. In diesem Zustand kann man das Reaktorrauschen daher als LEISTUNGSRAUSCHEN bezeichnen. Die strenge Unterscheidung dieser beiden Beiträge zum Reaktorrauschen ist wichtig, da sie auf völlig verschiedenen Quellen beruhen. Das Leistungsrauschen läßt sich auf Grund seiner Ursachen zur Untersuchung des kinetischen und dynamischen

Reaktorverhaltens verwenden, und seine Analyse erlaubt vor allem, Stabilitätsaussagen über einen Reaktor bei verschiedenen Leistungspegeln bis zur Solleistung zu gewinnen. Ebenfalls können Detailinformationen über das Reaktorsystem gewonnen werden, wenn Korrelationsuntersuchungen zwischen spezifischen Größen, wie z.B. Neutronendichte, Kühlmittelfluß, Brennelementtemperatur etc. durchgeführt werden. Der jetzige Stand der Analysenmethoden des Leistungsrauschens muß jedoch wesentlich verbessert werden, um spezielle Informationen mit ausreichender Genauigkeit erfassen zu können. Aus diesem Grund wird auf das Leistungsrauschen in diesem Zusammenhang nicht weiter eingegangen.

Dieses Kapitel II beschäftigt sich ausschließlich mit der Analyse des reinen Neutronenrauschens zur Bestimmung neutronenphysikalischer Reaktorparameter. Den Ausgangspunkt bildet dabei die Behandlung und Aufstellung einer einheitlichen theoretischen Basis, die letztlich zu einem grundlegenden Theorem führt, von dem ausgehend ein großer Teil der experimentellen Methoden abgeleitet werden kann. Das Theorem wird zunächst allgemein unter Einschluß der Energie- und Ortsabhängigkeit betrachtet. Im Anschluß daran werden Einschränkungen und Näherungen vorgenommen, die einerseits zur Behandlung von Korrelationsexperimenten im Rahmen des Punktreaktormodells führen und andererseits die Untersuchung von Kurzzeitkorrelationen im orts- und energieabhängigen Modell erlauben. Eine Anzahl von Experimenten werden im Rahmen des Punktreaktormodells im Detail behandelt und abschließend verglichen.

II.2 Theoretische Grundlagen zur Beschreibung des Neutronenrauschens

Hinsichtlich der theoretischen Untersuchung des Neutronenrauschens und der Ableitung von Reaktorparametern aus seiner Analyse sind verschiedene Wege beschränkt worden. Zunächst beschränkten sich die theoretischen Verfahren darauf, ein spezielles Experiment zur Analyse des Reaktorrauschens zu interpretieren. Dabei haben sich im wesentlichen zwei unterschiedliche Klassen herausgebildet. Die eine Klasse geht davon aus, daß die charakteristischen Gleichungen zur Beschreibung des Rauschens mit Hilfe des gewöhnlichen Neutronendichtebegriffs unter Hinzufügung einer rauschäquivalenten Quelle aufgestellt werden können. Diese Theorie wurde von COHN [1] für die Frequenzanalyse des Reaktorrauschens entwickelt. Mit den gleichen Ansätzen wurden von MOORE [2] Bestimmungsgleichungen für die Reaktorübertragungsfunktion untersucht. Eine Verallgemeinerung dieser theoretischen Richtung wurde von SHEFF [3] sowie von OTSUKA und SAITO [4] vorgenommen.

Die zweite Klasse geht zur Beschreibung des Neutronenrauschens von Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus, wobei sie sich in der Art der Ausgangsgleichungen für die Verteilungen unterscheiden. COURANT und WALLACE [5] stellten für die Verteilungen Differentialgleichungen auf und behandelten davon ausgehend die orts- und energieunabhängige Theorie des Neutronenrauschens. Dieses Verfahren wurde von RAIEVSKI [6] und MATTHES [7] erweitert. In Anlehnung an die Quantenmechanik sind OSBORN und YIP [8] davon ausgegangen, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für ein Reaktor - Detektor - System axiomatisch durch die LIOUVILLE-Gleichung der Quantenmechanik beschrieben wird. Dieser Weg wurde zur Beschreibung orts- und energieabhängiger Effekte bei der Frequenzanalyse des Rauschens und der Varianzbestimmung in einer kürzlich erschienenen Arbeit von NATELSON [9] ausgebaut. Eine weitere Möglichkeit bei der Aufstellung der Ausgangsgleichungen für die Verteilungen besteht darin, die Ursache des korrelierten Neutronenrauschens, nämlich das Auftreten von Verzweigungsprozessen, durch Einschluß bedingter Wahrscheinlichkeiten direkt zu berücksichtigen. Diese Art fand zuerst bei FEYNMAN, DE HOFFMANN und SERBER [10, 11] Verwendung, um orts- und energieunabhängige Bestimmungsgleichungen zur Varianzbestimmung im sogenannten FEYNMAN- α -Experiment aufzustellen. Die Verallgemeinerung der theoretischen Grundlagen dieser Richtung wurden u.a. behandelt von PAL [12], BELL [13] und HARRIS [14]. Eine besondere Variante dieser Untersuchungen wurden von ZOLOTUKHIN und MOGILNER [15 - 18] vorgenommen, die unter Verwendung der Technik der erzeugenden Funktionen die experimentell bestimmbaren Wahrscheinlichkeitsverteilungen direkt zu berechnen versuchten.

Die Erweiterung der auf [10, 11] basierenden theoretischen Richtung zur Berechnung orts- und energieabhängiger Effekte wurden von BORGWALDT und SANITZ [19] und von BORGWALDT, MURLEY und SANITZ [20] für orts- und energieabhängige Korrelationsfunktionen unter besonderer Berücksichtigung des Rossi- α -Experiments vorgenommen. Auf der gleichen Basis gelang es BORGWALDT und STEGEMANN [21], ausgehend von einem allgemeinen Theorem, Berechnungsgleichungen für den orts- und energieabhängigen Fall aufzustellen und einfache Bestimmungsgleichungen in der orts- und energieunabhängigen Näherung für fast alle bisher bekannten und neue Experimente zur Analyse des Neutronenrauschens herzuleiten. Auf dieser Grundlage baut dieser und die nachfolgenden Abschnitte auf, mit dem Ziel einer möglichst geschlossenen Behandlung der Theorie und der Experimente.

Das Verhalten der Neutronenbevölkerung in einem Reaktorsystem ist bedingt durch eine Vielfalt stochastisch ablaufender Kernreaktionen. Um die Vorgänge systematisch zu beschreiben und um ihren Beitrag zum Neutronenrauschen erfassen zu können, empfiehlt es sich, drei Beobachtungsarten zu unterscheiden:

- (1) Die Beobachtung von Einzelreaktionen.
- (2) Die Beobachtung von Reaktionsketten.
- (3) Die Beobachtung von Teilchen, die in die Kernreaktionen verwickelt sind und sie weitertragen.

Betrachtet man entsprechend (1) Einzelreaktionen, so lassen sich zwei Arten von Reaktionstypen unterscheiden:

- (1a) Reaktionen, die Reaktionsketten auslösen. Sie seien als Primärreaktionen bezeichnet.
- (1b) Reaktionen, die innerhalb einer Reaktionskette auftreten.

Beispielsweise gehören Spontanspaltungen und (α, n) -Reaktionen in einer Neutronenquelle zum Typ der Primärreaktionen. Die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten in einem vorgegebenen Zeitintervall wird durch das POISSON'sche Wahrscheinlichkeitsverteilungsgesetz (vgl. I.4.40) beschrieben.

Bei der Beobachtungsweise (3) kann man wiederum in zweifacher Art unterscheiden:

- (3a) Betrachtung von Einzelteilchen, die bei Reaktionen auftreten.
- (3b) Betrachtung von Teilchenpaaren, die entstehen und die in der weiteren Behandlung von besonders großem Interesse sind.

Derartige Teilchenpaare werden hauptsächlich erzeugt bei Spaltprozessen, und zwar als Paare prompter Spaltneutronen, als Neutron- γ -Paare oder auch als Paare von prompten und verzögerten Neutronen. Weitere Entstehungsmöglichkeiten sind $(n, 2n)$ -, $(n, n'\gamma)$ - und andere Verzweigungsprozesse. Da bei der Betrachtungsart (3b) immer zwei Teilchen eingeschlossen sind, wird die Quellstärke dieser Teilchenpaare als binäre Quelle bezeichnet.

Zur Erfassung der Vorgänge in einem derartigen Reaktorsystem müssen sich in ihm Detektoren befinden, die darüber Aufschluß geben können. Diese Detektoren nehmen an den Ereignissen im System teil und müssen daher - soweit es das neutronenphysikalische Verhalten betrifft - als integraler Bestandteil des Reaktors behandelt werden. Ausgegangen wird von einem stationären unterkritischen Reaktorsystem mit Detektoren, in dem sich Teilchen verschiedener Art, wie prompte Neutronen, γ -Quanten und Ausgangskerne für verzögerte Neutronen befinden. Alle diese Teilchen nehmen an den im Reaktor ablaufenden Reaktionsketten teil. Entsprechend der vorher eingeführten Systematik wird zwischen Teilchen und Reaktionen unterschieden, wozu folgende Definitionen eingeführt werden:

Ein Teilchen sei vollständig spezifiziert durch einen Vektor y , der seinen Ort (x', y', z') , seine Geschwindigkeit (v) und seine Art (a_T) angibt, also:

$$y = y(x', y', z'; v; a_T) = \text{Vektor, der den Ort, die Geschwindigkeit und die Art des Teilchens angibt.} \quad (\text{II.2.1})$$

Eine Reaktion sei vollständig spezifiziert durch einen Vektor z , der ihren Ort $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, an dem sie auftritt, und ihre Art (a_R) angibt, also:

$$z = z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; a_R) = \text{Vektor, der den Ort und die Art der Reaktion angibt.} \quad (\text{II.2.2})$$

Die Bezeichnungen in den Klammern werden im folgenden der einfacheren Schreibweise wegen weggelassen.

Weiterhin sei:

$$c_o(z)dz = \text{Mittlere Rate der Poisson-verteilten primären } z\text{-Reaktion in } dz, \text{ von denen die Reaktionsketten ausgelöst werden,} \quad (\text{II.2.3})$$

$$c(z)dz = \text{Mittlere Rate der } z\text{-Reaktionen in } dz. \quad (\text{II.2.4})$$

Die mittlere Rate $c(z)dz$ soll alle z -Reaktionen umfassen, also sowohl die Primärreaktionen als auch die Folgereaktionen. Von einzelnen Typen von z -Reaktionen, wie z.B. von reinen Einfangprozessen, resultieren keine weiteren Teilchen. Dagegen erzeugt ein Streuprozeß mindestens ein Folgeteilchen und eine Spaltung mehrere Neutronen und γ -Quanten, von denen jedes die Reaktionskette fortführen kann.

Die Teilchen und die Reaktionen werden durch folgende Größen miteinander verknüpft:

$$w_1(y, z) = \text{Mittlere Anzahl von } y\text{-Teilchen, die bei einer } z\text{-Reaktion entstehen,} \quad (\text{II.2.5})$$

$$w_2(y_1, y_2, z) = \text{Mittlere Anzahl von Teilchenpaaren, } (y_1, y_2), \text{ die bei einer } z\text{-Reaktion entstehen.} \quad (\text{II.2.6})$$

Mit Hilfe der eingeführten Definitionen lassen sich weitere Größen berechnen. Die Quellstärke der primären y -Teilchen ergibt sich durch Multiplikation der mittleren Rate primärer z -Reaktionen, $c_0(z)$, mit der mittleren Anzahl von y -Teilchen pro z -Reaktion, $w_1(y, z)$, und nachfolgender Integration über alle Reaktionsorte und -arten zu:

$$s_0(y) = \int c_0(z) \cdot w_1(y, z) dz = \text{Quellstärke primärer } y\text{-Teilchen (Primärquelle).} \quad (\text{II.2.7})$$

Die Gesamtrate von y -Teilchen in dz , die in allen (primären und induzierten) Reaktionen vom Typ z in dz erzeugt wird, folgt zu:

$$s_1(y, z) dz = c(z) w_1(y, z) dz. \quad (\text{II.2.7a})$$

Die Quellstärke der erzeugten Teilchenpaare - die binäre Quelle - ergibt sich in Analogie zu (II.2.7)

$$s_2(y_1, y_2) = \int c(z) \cdot w_2(y_1, y_2) dz = \text{Quellstärke von Teilchenpaaren (binäre Quelle).} \quad (\text{II.2.8})$$

Die Vorgänge im Reaktorsystem, in dem sich zwei Detektoren mit angeschlossenen elektronischen Registriereinrichtungen befinden, seien im einzelnen verfolgt. Das System ist in Abb.II.2.1 schematisch dargestellt.

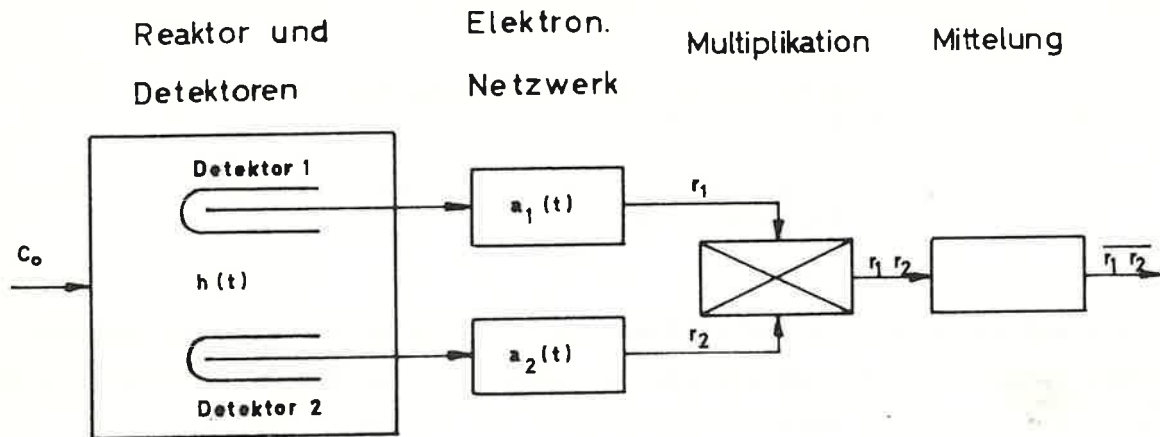


Abb.II.2.1 Schematische Darstellung eines Korrelationsexperiments mit zwei getrennten Detektoren (Kreuzkorrelation)

Die Detektoren registrieren in ihnen auftretende Reaktionen und liefern nach entsprechender elektronischer Verarbeitung die Ausgangssignale r_1 bzw. r_2 .
Somit ist:

$$r_n = r_n(t) = \text{Ausgangssignal des Detektorkanals } n(n=1,2) \text{ zur Zeit } t. \quad (\text{II.2.9})$$

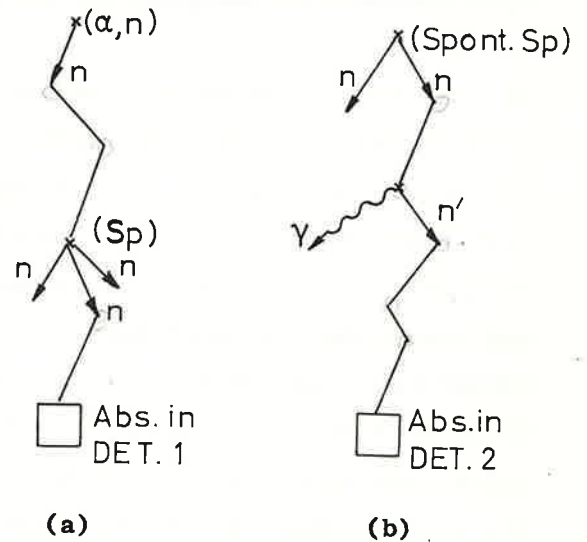
Die Art der Verarbeitung im angeschlossenen elektronischen Netzwerk wird durch die Netzwerkantwortfunktion $a(t)$ beschrieben, also

$$a_n(t) = \text{Antwortfunktion des elektronischen Netzwerkes } n(n=1,2) \quad (\text{II.2.10}) \\ \text{auf ein } \delta \text{-funktionsförmiges Eingangssignal.}$$

Bei der Verfolgung der Vorgänge ist die Erfassung verwandter, d.h. korrelierter Ereignisse, die auf Grund von Verzweigungsprozessen in den Reaktionsketten zustande kommen, von besonderem Interesse. Aus diesem Grunde ist es angebracht, die beiden Detektoren in Kreuzkorrelation zu betreiben und den Mittelwert des Produkts der Ausgangssignale, $\overline{r_1 r_2}$, zu betrachten. Untersucht werden soll nun, auf welche Art und Weise Beiträge zu $\overline{r_1 r_2}$ erfolgen können. Reaktionsketten werden von primären z-Reaktionen ausgelöst. Von diesen Primärreaktionen sind im BEISPIEL 1 zwei Fälle herausgegriffen:

(a) Ein aus einer (α, n) -Reaktion stammendes primäres Neutron führt nach zwei elastischen Stößen zu einer Spaltung, bei der drei Neutronen freigesetzt werden. Eins der drei Neutronen vollführt einen elastischen Stoß, bevor es im Detektor 1 absorbiert wird, der das Geschehen durch eine Reaktion anzeigt. Zur Beschreibung der Antwort von r_1 auf den Einschuss eines y -Teilchens (hier Neutron) dient die Funktion $g_1(y, t)$.

(b) Ein aus einer Spontanspaltung stammendes Neutron vollführt einen inelastischen und drei elastische Stöße, bevor es im Detektor 2 absorbiert wird. In Analogie zu (a) wird die Antwort von r_2 auf den Einschuss durch $g_2(y, t)$ beschrieben. Somit ist:

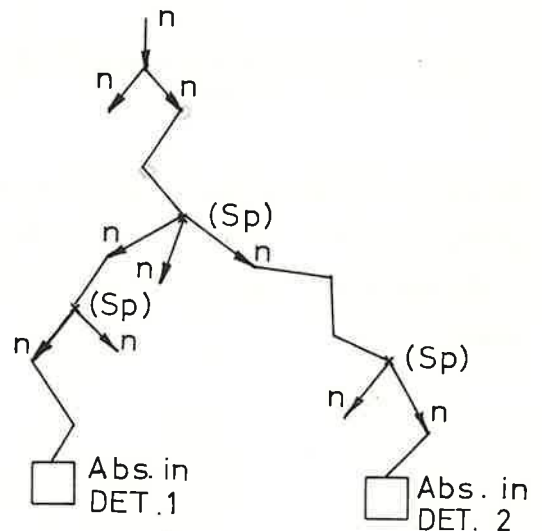


BEISPIEL 1

$$g_n(y, t) = \text{Antwort von } r_n \text{ (n=1,2) zur Zeit t auf den Einschuss eines } y\text{-Teilchens in den Reaktor zur Zeit } t = 0. \quad (\text{II.2.11})$$

Die Antwort $g_n(y, t)$ auf den Einschuss eines y -Teilchens in den Reaktor enthält erstens die Antwortfunktion des Reaktors auf einen derartigen Einschuss, da das mittlere Verhalten der Reaktionsketten durch den Aufbau des Reaktors bestimmt ist. Zweitens enthält sie die Antwortfunktion des Detektors und drittens die des elektronischen Netzwerkes. Die Funktion $g_n(y, t)$ ist deshalb eine Faltung aus diesen drei Antwortfunktionen.

Im obigen Beispiel 1 ist es evident, daß eine Korrelation zwischen den beiden Reaktionsketten nicht besteht. Auf korrelierte Ereignisse wird im BEISPIEL 2 eingegangen. Ein aus einer $(n, 2n)$ -Reaktion stammendes Neutron vollführt zwei elastische Stöße, bevor es zu einer Spaltung führt. Zwei der bei der Spaltung freiwerdenden Neutronen rufen nach einigen Streuprozessen abermals eine Spaltung hervor.

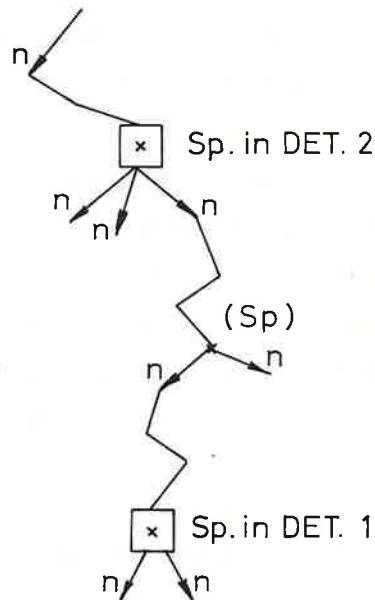


BEISPIEL 2

Je eins der aus diesen letzten Spaltungen hervorgehenden Neutronen wird im Detektor 1 und 2 absorbiert. Der die Korrelation der Detektorreaktionen verursachende Verzweigungsprozeß ist hier die erste Spaltung.

Bei den bisherigen Beispielen wurden nur Absorptionsreaktionen in den Detektoren betrachtet, die die Reaktionskette beenden, da keine Folgeteilchen mehr auftreten. Dies ist bei reinen Absorptionsdetektoren, wie z.B. ^{10}B -Zählrohren auch immer der Fall. Werden jedoch Detektoren verwendet, bei denen Folgeteilchen auftreten, wie z.B. in Spaltkammern und Rückstoßprotonendetektoren, so können Fälle auftreten, wie sie im BEISPIEL 3 skizziert sind. Die beiden Detektoren sind hier Spaltkammern.

Ein eingeschossenes Neutron führt nach zwei Stoßprozessen zu einer Spaltung im Detektor 2, bei der drei Neutronen freigesetzt werden. Eins der Neutronen bewirkt wiederum eine Spaltung, und von deren Folgeneutronen wird schließlich eins durch Spaltung im Detektor 1 nachgewiesen. In diesem Beispiel ist das Mitwirken der



BEISPIEL 3

Detektoren besonders deutlich. Die Antwort von r_1 auf das Ausgangsteilchen wird durch $g_1(y,t)$ wiedergegeben. Um in derartigen Fällen ebenfalls den Beitrag des zweiten Detektors zu $\overline{r_1 r_2}$ berücksichtigen zu können, ist es erforderlich, die Antwortfunktion $\varphi_n(z,t)$ einzuführen, d.h.

$$\varphi_n(z,t) = \text{Antwort von } r_n (n=1,2) \text{ auf eine einzelne } z\text{-Reaktion zur Zeit } t. \quad (\text{II.2.12})$$

Da nachgewiesene Reaktionen nur aus dem empfindlichen Volumen des Detektors stammen können, enthält die Antwortfunktion $\varphi_n(z)$ sowohl die Detektorantwortfunktion als auch die Antwortfunktion des angeschlossenen elektronischen Netzwerks.

Bevor auf die Zusammensetzung der Beiträge zu $\overline{r_1 r_2}$ eingegangen wird, sei zunächst der zeitliche Mittelwert der Ausgangssignale $r_n(t)$ berechnet. Die Berechnung kann über zwei äquivalente Ausdrücke erfolgen. Im ersten Ausdruck wird die Funktion $\varphi_n(z, t)$ und die mittlere Rate von z-Reaktionen, $c(z)dz$, verwendet. Damit ergibt sich für das zeitlich gemittelte Ausgangssignal:

$$\overline{r_n} = \int dz [c(z) \int dt \varphi_n(z, t)] , \quad n = 1, 2 . \quad (\text{II.2.13})$$

Im zweiten Ausdruck werden die Funktionen $g_n(y, t)$ und die Primärquelle $s_o(y)$ (vgl. II.2.7) herangezogen, um den zeitlich gemittelten Beitrag aller y-Teilchen zu $r_n(t)$ zu erfassen. Unberücksichtigt bleiben dabei direkt registrierte Primärreaktionen. Der dadurch bedingte Beitrag ergibt sich in Analogie zu (II.2.13), wenn anstelle von $c(z)dz$, die mittlere Rate Poisson-verteilter Primärreaktionen $c_o(z)dz$ eingesetzt wird. Aus diesen beiden Beiträgen folgt als zweiter äquivalenter Ausdruck:

$$\overline{r_n} = \int dy [s_o(y) \int dt g_n(y, t)] + \int dz [c_o(z) \int dt \varphi_n(z, t)] , \quad n = 1, 2 . \quad (\text{II.2.14})$$

Durch die Einführung der Funktionen und Gleichungen (II.2.9) bis (II.2.14) lassen sich die Beiträge zum zeitlichen Mittelwert des Produkts der Ausgangssignale, $\overline{r_1 r_2}$, in übersichtlicher Form aufstellen und zusammenfassen. Die Definitionsgleichung für das Produkt lautet:

$$\overline{r_1 r_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt r_1(t) r_2(t) . \quad (\text{II.2.15})$$

Die mittleren Einzelbeiträge auf Grund unkorrelierter und korrelierter Ereignisse lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \overline{r_1 r_2} &= \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} \\ &+ 2 \iint dy_1 dy_2 [s_2(y_1, y_2) \int dt g_1(y_1, t) g_2(y_2, t)] \\ &+ \iint dy dz [s_1(y, z) \int dt g_1(y, t) \cdot \varphi_2(z, t)] \\ &+ \iint dy dz [s_1(y, z) \int dt g_2(y, t) \cdot \varphi_1(z, t)] . \end{aligned} \quad (\text{II.2.16})$$

Die erste Zeile ($\overline{r_1 \cdot r_2}$) ist der Beitrag unkorrelierter Ereignisse, wie sie durch das BEISPIEL 1 gekennzeichnet sind. Der Ausdruck der zweiten Zeile enthält den Beitrag korrelierter Ereignisse in der Art, wie sie durch das BEISPIEL 2 dargestellt sind. Charakteristisch für dieses Beispiel ist der Verzweigungsprozeß der Spaltung, bei dem ein Teilchenpaar erzeugt wird, dessen Nachkommen zu Reaktionen in den Detektoren 1 und 2 führen. Infolgedessen ist es plausibel, daß die binäre Quelle $s_2(y_1, y_2)$ als Quellstärke von Teilchenpaaren in diesem Beitrag ausschlaggebend ist. Die Funktionen $g_1(y_1, t)$ und $g_2(y_2, t)$ enthalten die Antworten von r_1 und r_2 auf je ein Teilchen des Paares, durch die der Anfang der Reaktionsketten nach dem Verzweigungspunkt gebildet wird. Die Ausdrücke der Zeilen 3 und 4 enthalten die Beiträge, in denen Detektoren direkt involviert sind und die durch das BEISPIEL 3 erläutert wurden. Das Beispiel 3 selbst wird durch den Ausdruck in Zeile 3 erfaßt, da $g_1(y, t)$ die Antwort von r_1 auf das eingeschossene Neutron und die daraus resultierende Reaktionskette enthält, während der Anteil, den der Detektor 2 zum Geschehen liefert, durch die Funktion $\varphi_2(z, t)$ beschrieben wird. Der Ausdruck in Zeile 4 gilt für im Beispiel vertauschte Detektoren.

Der für die folgenden Ableitungen grundlegende Ausdruck (II.2.16), der hier nur phänomenologisch gedeutet wurde, ist in [21] streng bewiesen. Bei dem Beweis wurden folgende Grundvoraussetzungen gemacht:

- (1) Die Gültigkeit der Ergodenhypothese, also die Äquivalenz von Zeit- und Mengenmittelwerten, die in Abschnitt I.5 diskutiert wurde.
- (2) Vollständige Unabhängigkeit der Detektorkanäle, d.h. Ausschluß jeglicher gegenseitiger Beeinflussung durch die elektronische Anordnung.
- (3) Linearität der elektronischen Netzwerkbaueteile, wobei in den Antwortsignalen durch das Nachweissystem bedingte statistische Schwankungen enthalten sein dürfen, jedoch keine Totzeit-, Sättigungs- oder Rückkopplungseffekte.

Im Ausdruck (II.2.16) sind in den meisten Fällen die ersten beiden Terme am wichtigsten. Der Beitrag der letzten beiden richtet sich nach dem Typ und nach der Empfindlichkeit des Detektors. Bei Verwendung von Absorptionsdetektoren, bei denen keine Folgeteilchen auftreten, die die Reaktionskette fortführen können, sind die Terme Null. Bei anderen Detektortypen hängt ihre Größe vom Verhältnis der in den Detektoren stattfindenden Reaktionen zur Gesamtzahl der im Reaktorsystem auftretenden Reaktionen ab, durch das die Detektor-

empfindlichkeit bestimmt wird. Wenn bei experimentellen Untersuchungen ausschließlich Absorptionsdetektoren verwendet werden, können die beiden letzten Terme in (II.2.16) gestrichen werden, und die dadurch vereinfachte Ausgangsgleichung lautet:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} + 2 \iint dy_1 dy_2 [s_2(y_1, y_2) \int dt g_1(y_1, t) g_2(y_2, t)] \quad (\text{II.2.17})$$

Unter der Voraussetzung der Verwendung von Absorptionsdetektoren vereinfacht sich ebenfalls der Ausdruck (II.2.14), da Absorptionsdetektoren unempfindlich gegen Primärreaktionen sind. Primärreaktionen waren als Poisson-verteilte Reaktionen bezeichnet, die den Anfang von Reaktionsketten bilden. Da aber im Detektor nur Absorptionsprozesse zugelassen sind, die keine Folgeteilchen und somit keine Kettenanfänge bilden können, folgt die Unempfindlichkeit gegen Primärreaktionen zwangsläufig. Infolgedessen fällt der zweite Term in (II.2.14) fort, und es ergibt sich:

$$\overline{r_n} = \int dy [s_o(y) \int dt g_n(y, t)] \quad n = 1, 2 \quad (\text{II.2.18})$$

Zur Vereinfachung späterer Rechenoperationen ist es vorteilhaft, die Antwortfunktionen $g_n(y, t)$ durch ihre Fouriertransformierten $G_n(y, \omega)$ darzustellen, wofür die folgenden Beziehungen gelten:

$$g_n(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega G_n(y, \omega) e^{i\omega t} \quad n = 1, 2 \quad (\text{II.2.19})$$

$$G_n(y, \omega) = \int dt g_n(y, t) e^{-i\omega t} \quad n = 1, 2 \quad (\text{II.2.20})$$

Für $\omega = 0$ folgt:

$$G_n(y, 0) = \int dt g_n(y, t) \quad n = 1, 2 \quad (\text{II.2.21})$$

Anwendung der Transformationsausdrücke (II.2.19) und (II.2.21) auf die Gleichungen (II.2.17) und (II.2.18) ergibt die dazu äquivalenten Beziehungen:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} + 2 \iint dy_1 dy_2 [s_2(y_1, y_2) \int \frac{d\omega}{2\pi} G_1(y_1, \omega) \cdot G_2(y_2, -\omega)] \quad (\text{II.2.17a})$$

$$\overline{r_n} = \int dy s_o(y) G_n(y, 0) \quad n = 1, 2 \quad (\text{II.2.18a})$$

Die Ausdrücke (II.2.17), (II.2.18) bzw. (II.2.17a), (II.2.18a) sind die allgemeinen Gleichungen zur Berechnung von zeitlich gemittelten kreuzkorrelierten Ausgangssignalen zweier Absorptionsdetektorkanäle, so wie es in Abb.II.2.1 dargestellt ist.

Angemerkt sei an dieser Stelle, daß auf den Beitrag der in (II.2.16) weglassenen Terme bei der Behandlung des ROSSI- α -Experiments im Abschnitt II.5 zurückgekommen wird und dabei der Einfluß der Verwendung verschiedener Detektoren diskutiert wird.

Der allgemeine Formalismus, der zur Aufstellung von den Berechnungsgleichungen für Kreuzkorrelationsexperimente führte, kann in analoger Weise auf das Ausgangssignal eines einzelnen Detektorkanals übertragen werden. Ein solches Ein-Detektor-Autokorrelationsexperiment ist in der Abb.II.2.2 schematisch dargestellt.

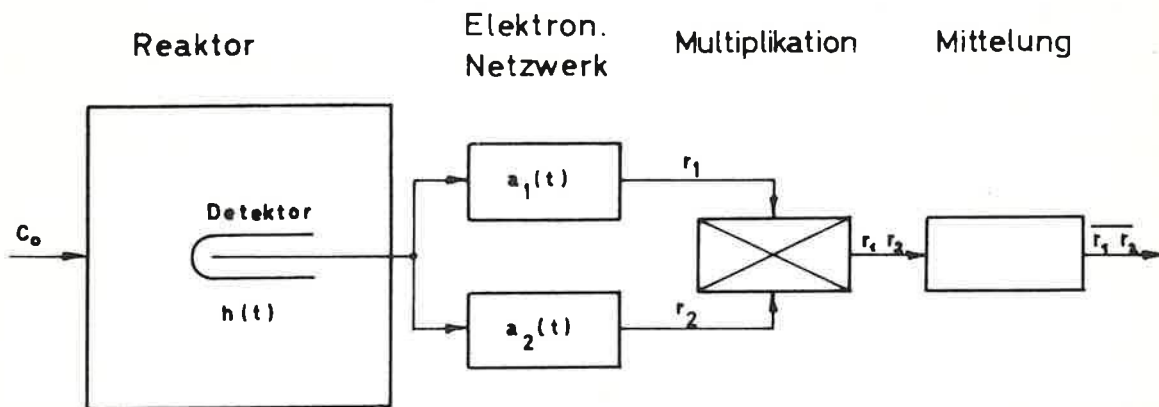


Abb.II.2.2 Schematische Darstellung eines Korrelationsexperiments mit einem Detektor (Autokorrelation)

Das Detektorausgangssignal ist hierbei mit sich selbst korreliert, d.h. "autokorreliert". In diesem Fall ist infolgedessen die Tatsache zu berücksichtigen, daß bei der Betrachtungsweise, die der Ausgangsgleichung (II.2.16) zugrunde liegt, jede im Detektor registrierte Reaktion zwei mit sich selbst korrelierte Antworten zu den Signalen $r_1(t)$ und $r_2(t)$ liefert. Diesem Vorgang muß durch einen weiteren Zusatzterm in (II.2.16) Rechnung getragen werden. Dazu wird das zeitlich gemittelte Produkt von $r_1(t)$ und $r_2(t)$ betrachtet, das durch diese Antworten auf Grund einer einzelnen z-Reaktion zur Zeit $t = 0$ hervorgerufen wird. Es ist definiert durch:

$$\varphi_{12}(z, t) = \text{Mittleres Produkt von } r_1(t) \text{ und } r_2(t) \text{ auf Grund (II.2.22) der Antworten auf eine einzelne } z\text{-Reaktion zur Zeit } t = 0.$$

Integration von $\varphi_{12}(z,t)$ über t und Bildung des Integrals über die gesamte Rate $c(z)dz$ von z -Reaktionen ergibt den gesuchten Zusatzterm:

$$\pi_{12} = \int dz [c(z) \int dt \varphi_{12}(z,t)]. \quad (\text{II.2.23})$$

Unter der Voraussetzung der Verwendung eines Absorptionsdetektors ergibt sich die Gleichung (II.2.17) mit Zusatzterm (II.2.23). Obwohl es sich in diesem Fall um ein Experiment mit nur einem Detektor handelt, werden die Indizes 1 und 2 belassen, um den Ausdruck für die Autokorrelation als Spezialfall der Kreuzkorrelation zu betonen. Somit ergibt sich für das Autokorrelationsexperiment mit Absorptionsdetektor:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} + \pi_{12} + 2 \iint dy_1 dy_2 [s_2(y_1, y_2) \int dt g_1(y_1, t) g_2(y_2, t)]. \quad (\text{II.2.24})$$

Für π_{12} kann keine allgemein anwendbare Berechnungsgleichung angegeben werden. Es ist infolgedessen für jeden Anwendungsfall gesondert zu bestimmen. Die bisher aufgestellten und diskutierten Gleichungen besitzen für den allgemeinen Fall Gültigkeit. Um auf überschaubare Berechnungsgleichungen zu kommen, werden in den folgenden Abschnitten spezielle Grenzfälle diskutiert, bei denen durch die Vernachlässigungen sich eine wesentliche Vereinfachung der Theorie ergibt.

II.3 Behandlung der Theorie von Korrelationsexperimenten im Punktreaktormodell

Behandelt werden Korrelationsexperimente, die dem Schema der Abbildungen II.2.1 und II.2.2 entsprechen. Die Ausgangssignale der Detektoren werden verstärkt, in elektronischen Netzwerken umgeformt, und die Signale $r_1(t)$ und $r_2(t)$ werden multipliziert und das Produkt zeitlich gemittelt. Zur Behandlung werden in diesem Fall folgende Voraussetzungen gemacht:

- (1) Der betrachtete Reaktor sei stationär und unterkritisch, und alle seine Parameter seien zeitlich konstant. Die Beschränkung auf unterkritische Systeme resultiert aus der Tatsache, daß die Berechnungsgleichungen für exakt kritische Systeme singular werden.
- (2) Bei den Detektoren handelt es sich um Neutronenabsorptionsdetektoren, sofern es nicht ausdrücklich anders vermerkt wird. Durch diese Voraussetzung kann die einfachere Ausgangsgleichung (II.2.17) verwendet werden.

- (3) Vernachlässigung der Energie- und Ortsabhängigkeit.
- (4) Beschränkung auf Neutronen als Teilchen und Vernachlässigung von relativ seltenen Verzweigungsprozessen, wie $(n,2n)$ - und $(n,n'\gamma)$ -Reaktionen, so daß nur Neutronenpaare aus spontanen oder induzierten Spaltprozessen die binäre Quelle bilden.
- (5) Beschränkung auf den realistischen Fall, daß bei irgendeinem Spaltprozeß nicht mehr als ein Vorläuferkern für verzögerte Neutronen entsteht.

Zur Herleitung von Berechnungsgleichungen aus den Ausgangsgleichungen sind zunächst Beziehungen für die einzelnen Antwortfunktionen und die binäre Quelle aufzustellen, wozu folgende Bezeichnungen (II.3.1) eingeführt werden:

- $h(t)$ = Antwort der Neutronenbevölkerung des Reaktors auf den Einschluß eines prompten Neutrons zur Zeit $t = 0$ (Antwortfunktion des Reaktors)
- $h_m(t)$ = Antwort der Neutronenbevölkerung des Reaktors auf die Bildung eines Vorläuferkerns der Gruppe m
- $H(\omega), H_m(\omega)$ = Fouriertransformierte von $h(t), h_m(t)$
- k = Effektive Multiplikationskonstante (unter Einschluß der verzögerten Neutronen)
- β_m = Bruchteil verzögerter Neutronen der Gruppe m
- β = $\sum_{m=1}^6 \beta_m$
- λ_m = Zerfallskonstante der Vorläuferkerne in Gruppe m
- $C_m(t)$ = Anzahl der Vorläuferkerne der Gruppe m zur Zeit t
- $\delta(t)$ = Quellterm
- ν = Mittlere Anzahl von Neutronen pro Spaltung (unter Einschluß der verzögerten Neutronen)
- $\frac{1}{2} \overline{\nu(\nu-1)}_p$ = Mittlere Anzahl von Paaren prompter Neutronen pro Spaltung
- ν_m = Mittlere Anzahl von prompten Neutronen, die mit der Gruppe m von Vorläuferkernen bei der Spaltung auftreten
- l = Mittlere Lebensdauer der prompten Neutronen
- W_n = Empfindlichkeit (Registrierungen pro Spaltung im System) des Detektors n ($n = 1, 2$)
- F = Spaltrate im System
- α = Abklingkonstante des prompten Neutronenflusses.

Die Antwortfunktion $h(t)$ ergibt sich aus den kinetischen Gleichungen, die für einen stationären unterkritischen Reaktor mit Quelle, unter den oben gemachten Voraussetzungen, wie folgt lauten:

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{k(1-\beta)-1}{l} h(t) + \sum_m \lambda_m C_m(t) + \delta(t) \quad (\text{II.3.2})$$

$$\frac{d}{dt} C_m(t) = -\lambda_m C_m(t) + \frac{k\beta_m}{l} h(t), \quad m = 1, \dots, 6 \quad (\text{II.3.2a})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$h(t) = C_1(t) = \dots = C_6(t) \quad (\text{II.3.2b})$$

und

$$\alpha = \frac{1 - k(1 - \beta)}{l}. \quad (\text{II.3.2c})$$

Zur Bestimmung der Antwortfunktion wird für die Gleichungen (II.3.2) und (II.3.2a) gewöhnlicherweise [22] eine Fouriertransformation durchgeführt. Die Fouriertransformierte von $h(t)$, $H(\omega)$, folgt zu

$$H(\omega) = \frac{l}{1 - k + i\omega \left(l + k \sum_{m=1}^6 \frac{\beta_m}{i\omega + \lambda_m} \right)}. \quad (\text{II.3.3})$$

Das Zeitverhalten der prompten Neutronen spielt sich in kurzen Zeitbereichen oder anders ausgedrückt bei hohen Frequenzen ab. Für hinreichend hohe Frequenzen,

$$\omega \gg \lambda_m, \quad m = 1, \dots, 6, \quad (\text{II.3.4})$$

wird das Verhalten von $H(\omega)$ nur noch von den prompten Neutronen bestimmt und aus (II.3.3) folgt:

$$H(\omega) = \frac{l}{1 - k(1 - \beta) + i\omega l} = \frac{1}{\alpha + i\omega}. \quad (\text{II.3.5})$$

Weiterhin ist:

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega) H(-\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (\text{II.3.6})$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich aus (II.3.5) unter Vernachlässigung der verzögerten Neutronen:

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-\alpha t} & t > 0 \\ h(t) &= 0 & t \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3.7})$$

In entsprechender Weise muß ebenfalls die Antwort der Neutronenbevölkerung auf die Bildung eines Vorläuferkerns für verzögerte Neutronen der Gruppe m in Rechnung gestellt werden. Diese Antwort wird durch $h_m(t)$ charakterisiert. Die Betrachtung der Einwirkung eines Vorläuferkerns auf die Neutronenbevölkerung entspricht im Teilchenbild der Bildung eines latenten Neutrons, das beim Zerfall des Kerns frei wird. Ist t_1 die Zeit seit der Bildung des latenten Neutrons bis zur Freisetzung, so beschreibt die Funktion $h(t - t_1)$ die Antwort der Neutronenbevölkerung auf die Freisetzung des latenten Neutrons. Die Freisetzung selbst erfolgt nach den Gesetzmäßigkeiten für den radioaktiven Zerfall des Vorläuferkerns. Infolgedessen ergibt sich die Antwortfunktion $h_m(t)$ aus der Faltung des Zerfallsgesetzes, der Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und der Antwortfunktion $h(t-t_1)$ zu:

$$h_m(t) = \int_0^{\infty} dt_1 e^{-\lambda_m t_1} \lambda_m h(t-t_1) . \quad (\text{II.3.8})$$

Zur Vereinfachung späterer Rechenoperationen wird die Antwortfunktion $h_m(t)$ wieder durch ihre Fouriertransformierte $H_m(\omega)$ dargestellt. Es gelten folgende Beziehungen:

$$H_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt h_m(t) e^{-i\omega t} , \quad (\text{II.3.9})$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt h(t) e^{-i\omega t} . \quad (\text{II.3.10})$$

Da auf diese Art der Transformation häufiger zurückgegriffen wird, soll sie anhand dieses Beispiels einmal explizit durchgeführt werden. Sind im allgemeinen Falle drei Funktionen, $x(t)$, $y(\hat{\nu})$ und $z(t)$, gegeben, so gelten für ihre Fouriertransformierten $X(\omega)$, $Y(\omega)$ und $Z(\omega)$ die Beziehungen:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-i\omega t} , \quad (\text{II.3.11})$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta y(\vartheta) e^{-i\omega\vartheta} , \quad (\text{II.3.12})$$

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt z(t) e^{-i\omega t} . \quad (\text{II.3.13})$$

Ferner sei:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta x(t-\vartheta) \cdot y(\vartheta) . \quad (\text{II.3.14})$$

Einsetzen von (II.3.14) in (II.3.13) ergibt:

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta x(t-\vartheta) \cdot y(\vartheta) e^{-i\omega(t+\vartheta-\vartheta)} \quad (\text{II.3.15})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta e^{-i\omega\vartheta} y(\vartheta) \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t-\vartheta) e^{-i\omega(t-\vartheta)} . \quad (\text{II.3.16})$$

Im zweiten Integral bedeutet $t-\vartheta$ eine Verschiebung innerhalb des Integrationsbereichs ohne Änderung der Bereichsgröße, weswegen eine alleinige Integration über t ausgeführt werden darf. Somit folgt:

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta e^{-i\omega\vartheta} y(\vartheta) \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-i\omega t} . \quad (\text{II.3.17})$$

Mit (II.3.11) und (II.3.12) folgt daraus:

$$Z(\omega) = Y(\omega) \cdot X(\omega) . \quad (\text{II.3.18})$$

Anwendung auf den speziellen Fall (II.3.8) kann durch Gleichsetzen folgender Größen geschehen:

$$z(t) = h_m(t) , \quad (\text{II.3.19})$$

$$x(t-\vartheta) = h(t-t_1) , \quad \vartheta = t_1 , \quad (\text{II.3.20})$$

$$y(\vartheta) = y(t_1) = \lambda_m e^{-\lambda_m t_1} . \quad (\text{II.3.21})$$

Entsprechend (II.3.12) folgt:

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} y(t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 = \lambda_m \int_0^{\infty} dt_1 e^{-(\lambda_m + i\omega)t_1} = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + i\omega} \quad (\text{II.3.22})$$

Die Fouriertransformierte von $h_m(t)$ ergibt sich nach (II.3.18) zu:

$$H_m(\omega) = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + i\omega} \cdot H(\omega) \quad (\text{II.3.23})$$

Nachdem $h(t)$ und $h_m(t)$ untersucht wurden, ist der nächste Schritt die Aufstellung der Antworten der Detektorkanäle, beschrieben durch die Funktionen g_n (vgl. II.2.11), die, wie erwähnt, die Reaktor-, Detektor- und Netzwerkantwortfunktion enthalten.

Da l die mittlere Lebensdauer von prompten Neutronen im System ist, ist $\frac{k}{l}$ die Wahrscheinlichkeit für das Verschwinden eines Neutrons pro Zeiteinheit unter Berücksichtigung der Multiplikation. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Spaltung pro Zeiteinheit ist dann gegeben durch $\frac{k}{v l}$. Die Detektorempfindlichkeit W_n ist definiert als die Wahrscheinlichkeit für einen Registrationsprozeß im Detektor n pro im System auftretender Spaltung. Die Antwort des Detektors n auf das Auftreten eines prompten Neutrons ist infolgedessen $\frac{W_n \cdot k}{v l}$. Ist $h(t_1)$ die Reaktorantwort auf ein promptes Neutron und $a_1(t-t_1)$ die Antwort des elektronischen Netzwerkes von Kanal 1 zur Zeit t auf das Auftreten eines δ -funktionsförmigen Signals bei t_1 , so ist:

$$g_1(t) = \frac{W_1 k}{v l} \int dt_1 h(t_1) a_1(t-t_1) \quad (\text{II.3.24})$$

und entsprechend

$$g_2(t) = \frac{W_2 k}{v l} \int dt_2 h(t_2) a_2(t-t_2) \quad (\text{II.3.25})$$

Wird die Fouriertransformierte $G_n(\omega)$ von $g_n(t)$ und $A_n(\omega)$ von $a_n(t)$ eingeführt, so folgt in Analogie zu (II.3.14) bis (II.3.18) die zu (II.3.24) und (II.3.25) äquivalente Gleichung:

$$G_1(\omega) = \frac{W_1 k}{v l} H(\omega) A_1(\omega) \quad (\text{II.3.26})$$

und, wenn im Hinblick auf (II.2.17a) ω durch $(-\omega)$ ersetzt wird:

$$G_2(-\omega) = \frac{W_2 k}{v l} H(-\omega) A_2(-\omega) \quad (\text{II.3.27})$$

Neben den prompten Neutronen sind ebenfalls wieder die verzögerten Neutronen mit zu berücksichtigen. Die Antwort von r_n auf die Bildung eines latenten Neutrons sei $g_{nm}(t)$. In Analogie zu (II.3.8) folgt:

$$g_{1m}(t) = \int dt_1 e^{-\lambda_m t_1} \lambda_m g_1(t - t_1) \quad (\text{II.3.28})$$

und

$$g_{2m}(t) = \int dt_2 e^{-\lambda_m t_2} \lambda_m g_2(t - t_2) . \quad (\text{II.3.29})$$

Die Durchführung der Fouriertransformation ergibt:

$$G_{1m}(\omega) = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + i\omega} G_1(\omega) , \quad (\text{II.3.30})$$

$$G_{2m}(\omega) = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + i\omega} G_2(\omega) . \quad (\text{II.3.31})$$

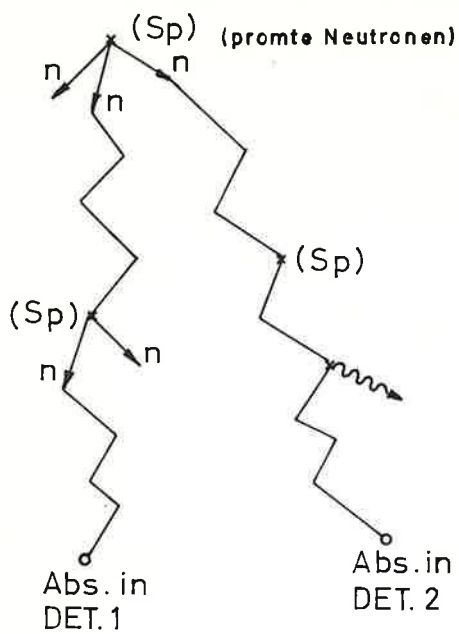
Zur Berechnung des zeitlich gemittelten Produkts der Ausgangssignale, $\overline{r_1 r_2}$, nach (II.2.17a) wird weiterhin die binäre Quelle s_2 benötigt. Die Erzeugung von Neutronenpaaren kann unter den gemachten Voraussetzungen auf zwei Arten erfolgen: (a) Entstehung von Paaren prompter Neutronen, deren Anzahl pro Spaltung durch $\frac{\nu(\nu-1)p}{2}$ gegeben ist. Multiplikation mit der Spaltrate F ergibt den Beitrag der prompten Neutronenpaare zur binären Quelle

$$s_{2p} = F \cdot \frac{\overline{\nu(\nu-1)p}}{2} . \quad (\text{II.3.32})$$

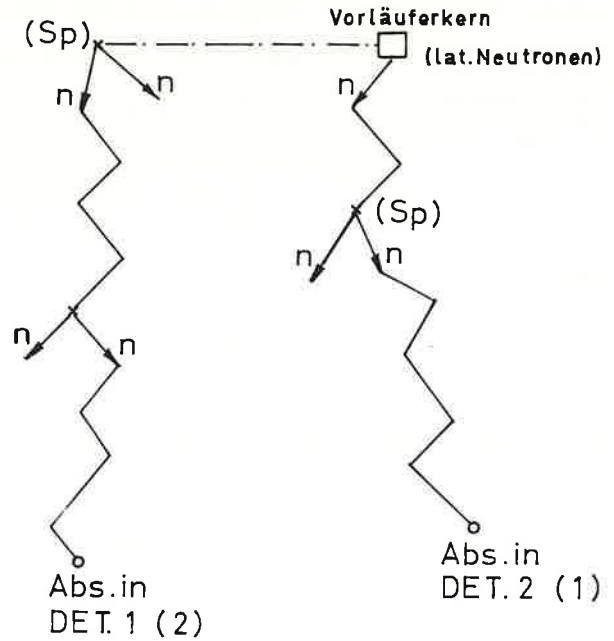
(b) Entstehung von Paaren des Typs promptes Neutron - Vorläuferkern (latentes Neutron der Gruppe m). Der Erwartungswert für die Bildung eines Vorläuferkerns der Gruppe m ist pro Spaltung gegeben durch $\beta_m \nu$. Da ferner die Anzahl der prompten Neutronen ν_m , die mit der Gruppe m von Vorläuferkernen bei der Spaltung auftreten, bei der Paarbildung mitwirkt, ergibt sich als zweiter Beitrag zur binären Quelle:

$$s_{2m} = F \cdot \frac{\beta_m \nu_m \nu}{2} . \quad (\text{II.3.33})$$

Vor Anwendung der Gleichung (II.2.17a) sei zunächst untersucht, wie Beiträge zu $\overline{r_1 r_2}$ auf Grund von Teilchenpaaren zustande kommen können. Dabei sind drei mögliche Fälle zu unterscheiden, die durch die folgenden Skizzen verdeutlicht werden sollen:



FALL 1



FALL 2 bzw. 3

FALL 1 ist dadurch gekennzeichnet, daß die Nachweise im Detektor 1 und 2 durch ein Paar prompter Neutronen ausgelöst werden. Die Antworten von r_1 und r_2 werden durch $g_1(t)$ bzw. $G_1(\omega)$ und $g_2(t)$ bzw. $G_2(\omega)$ beschrieben.

FALL 2 ist dadurch gekennzeichnet, daß die Nachweise in den Detektoren durch ein Teilchenpaar promptes Neutron - verzögertes Neutron verursacht werden. Dabei soll der Detektor 1 auf die durch das prompte Neutron ausgelöste Kette ansprechen und der Detektor 2 auf die des verzögerten. Infolgedessen wird die Antwort von r_1 durch $g_1(t)$ bzw. $G_1(\omega)$ beschrieben, die von r_2 dagegen durch $g_{2m}(t)$ bzw. $G_{2m}(\omega)$.

FALL 3 entsteht durch Vertauschen der Detektoren 1 und 2, so daß für r_1 die Funktionen $g_{1m}(t)$ bzw. $G_{1m}(\omega)$ und für r_2 die Funktionen $g_2(t)$ bzw. $G_2(\omega)$ maßgebend sind.

Werden unter Berücksichtigung dieser Fälle die Ausdrücke für die binäre Quelle (II.3.32) und (II.3.33) mit den entsprechenden Antwortfunktionen in die Gleichung (II.2.17a) eingesetzt, so folgt:

$$\begin{aligned} \overline{r_1 r_2} &= \overline{r_1 \cdot r_2} + F \cdot \overline{\sqrt{(\nu-1)_p}} \int \frac{d\omega}{2\pi} G_1(\omega) \cdot G_2(-\omega) \\ &+ F \sum_{m=1}^6 (\beta_m \nu_m \nu) \int \frac{d\omega}{2\pi} G_1(\omega) \cdot G_{2m}(-\omega) \\ &+ F \sum_{m=1}^6 (\beta_m \nu_m \nu) \int \frac{d\omega}{2\pi} G_{1m}(\omega) \cdot G_2(-\omega) . \end{aligned} \quad (\text{II.3.34})$$

Einsetzen der Beziehungen (II.3.30) und (II.3.31) für die Funktionen $G_{1m}(\omega)$ und $G_{2m}(-\omega)$ und Zusammenfassung der beiden letzten Terme ergibt:

$$\begin{aligned} \overline{r_1 r_2} &= \overline{r_1 \cdot r_2} + F \cdot \overline{\sqrt{(\nu-1)_p}} \int \frac{d\omega}{2\pi} G_1(\omega) \cdot G_2(-\omega) \\ &+ F \sum_{m=1}^6 (\beta_m \nu_m \nu) \int \frac{d\omega}{2\pi} G_1(\omega) \cdot G_2(-\omega) \cdot \frac{2\lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \omega^2} . \end{aligned} \quad (\text{II.3.35})$$

Die für die Antwortfunktionen $G_1(\omega)$ und $G_2(-\omega)$ aufgestellten Beziehungen (II.3.26) und (II.3.27) werden verwendet unter Berücksichtigung der Tatsache, daß nur reelle ω -Werte in Betracht gezogen werden, wodurch folgt:

$$H(\omega) \cdot H(-\omega) = |H(\omega)|^2 . \quad (\text{II.3.36})$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \overline{r_1 r_2} &= \overline{r_1 \cdot r_2} + F \frac{\overline{W_1 W_2 k^2}}{\overline{\nu^2 l^2}} \int \frac{d\omega}{2\pi} A_1(\omega) A_2(-\omega) |H(\omega)|^2 \\ &+ F \sum_{m=1}^6 (\beta_m \nu_m \nu) \frac{\overline{W_1 W_2 k^2}}{\overline{\nu^2 l^2}} \int \frac{d\omega}{2\pi} A_1(\omega) A_2(-\omega) |H(\omega)|^2 \frac{2\lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \omega^2} , \end{aligned} \quad (\text{II.3.37})$$

und nach Umformung:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1 \cdot r_2} + F \frac{\overline{W_1 W_2 k^2}}{l^2} \frac{\overline{\sqrt{(\nu-1)_p}}}{\overline{\nu^2}} \int \frac{d\omega}{2\pi} A_1(\omega) A_2(-\omega) |H(\omega)|^2 + \left\{ 1 + \sum_{m=1}^6 \frac{2\beta_m \nu_m \nu}{\overline{\nu^2}} \frac{\lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \omega^2} \right\} . \quad (\text{II.3.38})$$

Dieser Ausdruck gilt unter den gemachten Voraussetzungen bei voller Berücksichtigung der verzögerten Neutronen. Die verzögerten Neutronen sind erstens in $H(\omega)$, gegeben durch (II.3.3), enthalten, dessen Lösung aus den kinetischen Gleichungen (II.3.2) folgte und zweitens in dem Klammerausdruck von (II.3.38), dessen Größe betrachtet sei. Für den Klammerausdruck gilt die Ungleichung:

$$1 < 1 + \sum_{m=1}^6 \frac{2\beta_m v_m v}{v(v-1)_p} \cdot \frac{\lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \omega^2} \quad (\text{II.3.39})$$

Für Zeitbereiche, in denen die verzögerten Neutronen abgeklungen sind, d.h. bei sehr niedrigen Frequenzen ($\omega^2 \ll \lambda_m^2$) folgt, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Größen $v_m v$ und $\frac{v(v-1)_p}{p}$ ungefähr gleich groß sind, als Maximalwert für (II.3.39):

$$1 < 1 + 2\beta \quad (\text{II.3.40})$$

Da aber β immer kleiner als 10^{-2} ist, kann der zweite Summand im Klammersausdruck von (II.3.38) gewöhnlicherweise vernachlässigt werden. Durch Einführung der Abkürzung

$$\chi_2 = \frac{v(v-1)_p}{v^2} \quad (\text{II.3.41})$$

ergibt sich für (II.3.38) folgende Näherungsformel:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} + F \frac{W_1 W_2 k^2 \chi_2}{l^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} A_1(\omega) A_2(-\omega) |H(\omega)|^2 \quad (\text{II.3.42})$$

Die Abschätzung des Klammersausdrucks wurde durchgeführt, um zu verdeutlichen, inwieweit die verzögerten Neutronen, außer durch die Funktion $H(\omega)$, Einfluß auf das zeitlich gemittelte Produkt der Ausgangssignale haben. Aus diesem Ergebnis folgt, daß Beiträge zur binären Quelle aus Paaren promptes Neutron - Vorläuferkern praktisch keine Bedeutung haben und der Ausdruck (II.3.33) vernachlässigt werden kann. Weiterhin ist ersichtlich, daß die Annahme (5) keine Einschränkung bedeutet, denn auch bei der Bildung von mehr als einem Vorläuferkern pro Spaltung würde der Beitrag nicht wesentlich.

Sollen die verzögerten Neutronen bei der Berechnung des zeitlich gemittelten Produkts der Ausgangssignale mitberücksichtigt werden, so ist in (II.3.42) für $H(\omega)$ der Ausdruck (II.3.3) einzusetzen. Besteht dagegen nur Interesse an dem Beitrag der prompten Neutronen, wie es meistens der Fall ist, so findet der Ausdruck (II.3.5) bzw. (II.3.6) Verwendung, und die Gleichung (II.3.42) lautet dann:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} + F \frac{W_1 W_2 k^2}{v^2 l^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} A_1(\omega) A_2(-\omega) \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{II.3.43})$$

Die Beziehungen für die Ausdrücke $\overline{r_n}$ ($n = 1, 2$) lassen sich aus (II.2.13) gewinnen. Die Funktion φ_n enthält die Netzwerkantwortfunktion $a_n(t)$ und die Detektorantwortfunktion, die hier durch die Detektorempfindlichkeit W gegeben ist. W ist aber so definiert, daß es die Antwort des Detektors auf eine im System stattfindende Spaltung wiedergibt. Infolgedessen sind hier die Spaltungen im Reaktor zu betrachten, deren Rate durch F gegeben ist. Somit folgt:

$$\overline{r_n} = W_n F \int dt a_n(t), \quad n = 1, 2. \quad (\text{II.3.44})$$

Soll im Hinblick auf (II.3.43) die Fouriertransformierte $A(\omega)$ verwendet werden, so folgt in Analogie zu (II.2.21) für das zeitlich gemittelte Signal:

$$\overline{r_n} = W_n F A_n(0), \quad n = 1, 2. \quad (\text{II.3.45})$$

Für die Darstellung des zeitlich gemittelten Produkts $\overline{r_1 r_2}$ im Zeitbereich läßt sich die der Beziehung (II.3.42) äquivalente Form aus der Gleichung (II.2.17) gewinnen. Sie ergibt sich zu:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} + F \frac{W_1 W_2 \chi_2 k^2}{l^2} \iiint dt dt_1 dt_2 h(t_1) h(t_2) a_1(t - t_1) a_2(t - t_2). \quad (\text{II.3.46})$$

Die zeitlichen Mittelwerte $\overline{r_n}$ ($n = 1, 2$) sind dabei durch (II.3.44) gegeben.

Die Netzwerkantwortfunktion $a_n(t)$ bzw. $A_n(\omega)$ in den Gleichungen (II.3.46) und (II.3.43) sind zur Beschreibung der elektronischen Netzwerke eingeführt worden. Sie beinhalten infolgedessen die Art der Verarbeitung der Detektorausgangssignale, und mit ihrer Kenntnis ist es möglich, die spezifischen Eigenheiten experimenteller Meßanordnungen zu erfassen und zu analysieren. In der Näherung des Punkt-Reaktor-Modells und unter den zusätzlich gemachten Voraussetzungen zu Beginn dieses Abschnitts bilden die Gleichungen (II.3.43) und (II.3.46) die Ausgangsbasis zur Entwicklung und Untersuchung von verschiedenen Meßmethoden, auf die in den Abschnitten II.5 bis II.7 eingegangen wird.

II.4 Behandlung von Kurzzeitkorrelationen im energie- und ortsabhängigen Modell

Die Behandlung im energie- und ortsabhängigen Modell wird auf Kurzzeitkorrelationen beschränkt, um überschaubare Berechnungsgleichungen zu erhalten. Bei dieser Beschränkung werden die verzögerten Neutronen nicht explizit berücksichtigt, sondern als zusätzliche Pseudo-Zufalls-Quelle mit Poisson-verteiltern Quellereignissen behandelt. Die Berechtigung zu diesem Verfahren liegt in der Tatsache, daß das Zeitverhalten der verzögerten Neutronen durch die Zerfallskonstanten der Vorläuferkerne bestimmt ist und in den meisten Reaktoranordnungen wesentlich langsamer abläuft als das Zeitverhalten der prompten Neutronen. Die Behandlung der Kurzzeitkorrelationen folgt den Methoden, wie sie in [19,20,21,23] beschrieben sind, wobei sich die Darstellung hier besonders eng an [23] anlehnt. Vorausgesetzt wird ein Kreuzkorrelationsexperiment mit Absorptionsdetektoren, so daß die Ausgangsgleichung (II.2.17) zutrifft, die lautet:

$$\overline{r_1 r_2} - \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} = 2 \iint dy_1 dy_2 [s_2(y_1, y_2) \int dt g_1(y_1, t) g_2(y_2, t)] \quad (\text{II.2.17})$$

Im folgenden werden als Teilchen nur Neutronen betrachtet und Verzweigungsprozesse ($n, 2n$; $n, n'\gamma$) vernachlässigt, die relativ selten sind, so daß nur Neutronenpaare aus spontanen oder induzierten Spaltungen die binäre Quelle bilden. Weiterhin werden Energie- und Winkelkorrelationen zwischen Paaren von Spaltneutronen vernachlässigt, d.h. es wird isotrope Aussendung angenommen. Unter den gemachten Annahmen folgt in Analogie zur Herleitung der Beziehung (II.3.32) für die lokale Erzeugungsratendichte von Paaren prompter Spaltneutronen, $s_2(x)$,

$$s_2(x) = \frac{\overline{\nu(\nu-1)}_p(x)}{2} F(x) \quad , \quad (\text{II.4.1})$$

wobei $F(x)$ = Spaltratendichte (induzierte und spontane) [$\text{cm}^{-3} \text{sec}^{-1}$]

x = Abkürzung für die drei Ortskoordinaten.

Die Größe $\overline{\nu(\nu-1)}_p$ ist im allgemeinen schwach ortsabhängig. Unter Berücksichtigung der Annahmen und des Ausdrucks (II.4.1) geht (II.2.17) über in:

$$\overline{r_1 r_2} - \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} = \int dx F(x) \overline{\nu(\nu-1)}_p(x) \int dt g_1(x, t) g_2(x, t) \quad , \quad (\text{II.4.2})$$

wobei in diesem Falle $g_n(x,t)$ entsprechend der Definition (II.2.11) anzusehen ist als

$$g_n(x,t) = \text{Erwarteter Beitrag zum Signal } r_n(t) \text{ (n = 1,2) von einem (II.4.3)} \\ \text{zur Zeit } t = 0 \text{ in } x \text{ eingeschossenen mittleren prompten} \\ \text{Spaltneutron.}$$

Die Funktion $g_n(x,t)$ ist eine Faltung aus den Antwortfunktionen des Reaktors, des Detektors und der nachfolgenden elektronischen Anordnung. Für die Reaktorantwortfunktion $h(t)$ gelte folgende verallgemeinerte Definition:

$$h(x,x',E',t) = \text{Antwort des Neutronenflusses } \phi(x',E',t) \text{ auf ein (II.4.4)} \\ \text{zur Zeit } t = 0 \text{ in } x \text{ startendes promptes Spaltneu-} \\ \text{tron. } x' = \text{Ort, } E' = \text{Energie. Für } t < 0 \text{ ist } h = 0.$$

Mit den Größen

$$V_n = \text{Volumen des Detektors n (n = 1, 2),} \\ \Sigma_n(E') = \text{Querschnitt des Detektors n,} \\ q_n = \text{Ladung pro Nachweisreaktion im Detektor n,} \\ a_n(t) = \text{Gewichtsfunktion des elektronischen Netzwerkes in Kanal n}$$

und der Definition (II.4.4) ergibt sich für die Funktion $g_n(x,t)$ der Ausdruck:

$$g_n(x,t) = q_n \int ds a_n(s) \int dE' \Sigma_n(E') \int_{V_n} dx' h(x, x', E', t - s) . \quad (\text{II.4.5})$$

Diese Beziehung verknüpft (II.4.2) mit der orts- und energieabhängigen Reaktorkinetik. Die Gleichungen (II.4.2) und (II.4.4) können formal weiter behandelt werden, indem definiert wird:

$$h_{12}(x, x', E', x'', E'', T) = \int h(x, x', E', t-T) h(x, x'', E'', t) dt , \quad (\text{II.4.6})$$

und hinsichtlich einer Vereinfachung der Netzwerkantwortfunktionen:

$$b(T) = q_1 q_2 \int a_1(t+T) a_2(t) dt , \quad (\text{II.4.7})$$

und wenn folgende Definitionsgleichung für die Korrelationsfunktion des Neutronenflusses benutzt wird:

$$\phi_{12}(x', E', x'', E'', T) = \int F(x) \overline{v(v-1)}_p(x) h_{12}(x, x', E', x'', E'', T) dx . \quad (\text{II.4.8})$$

Unter Verwendung der Beziehungen (II.4.5) bis (II.4.8) folgt für (II.4.2) der allgemeine Ausdruck:

$$\overline{r_1 r_2} - \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} = \int dt [b(T) \iint dE' dE'' \Sigma_1(E') \Sigma_2(E'') \iint_{V_1 V_2} dx' dx'' \phi_{12}(x', E', x'', E'', T)] . \quad (\text{II.4.9})$$

An dieser Stelle wird von der eingangs erwähnten Voraussetzung der Vernachlässigung verzögerter Neutronen Gebrauch gemacht, da die Anwendung der obigen Gleichungen unter Berücksichtigung der verzögerten Neutronen zu sehr unübersichtlichen Formeln führen würde, die darüber hinaus keine große praktische Bedeutung hätten. Es war im Abschnitt II.3 schon darauf hingewiesen worden, daß für Experimente das Zeitverhalten der prompten Neutronen das Hauptinteresse besitzt. Infolgedessen werde das betrachtete Korrelationsexperiment durchgeführt, um die Parameter der prompten Reaktorkinetik zu bestimmen. Um dies zu erreichen, können entsprechend (II.4.7) geeignete Wichtungsfunktionen $b(T)$ Verwendung finden, die nur das Kurzzeit-Verhalten berücksichtigen. Mit diesen Annahmen kann vorausgesetzt werden, daß ein zur Zeit $t = 0$ am Ort x' im Reaktor startendes promptes Spaltneutron einen Neutronenfluß verursacht, welcher der folgenden zeitabhängigen Boltzmann-Gleichung genügt:

$$\underline{B}_0 \phi(x, E, \Omega, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, E, \Omega, t) , \quad (\text{II.4.10})$$

wobei

$$v = \text{const} \sqrt{E} = \text{Geschwindigkeit der Neutronen},$$

$$\Omega = \text{Flugrichtung der Neutronen}.$$

Die Gleichung besitzt zusätzliche Rand- und Anfangsbedingungen. Der lineare Operator \underline{B}_0 hängt von der Geometrie und Zusammensetzung ab und hat nach [34] die Darstellung

$$\begin{aligned} \underline{B}_0 f(x, E, \Omega) = & - \vec{\Omega} \text{ grad } f(x, E, \Omega) - \Sigma_t(x, E) f(x, E, \Omega) \\ & + \iint dE' d\Omega' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) f(x, E', \Omega') \quad (\text{II.4.11}) \\ & + \frac{1}{4\pi} \chi(E) \iint dE' d\Omega' \nu_p(x, E') \Sigma_f(x, E') f(x, E', \Omega'), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= \text{Totaler Querschnitt} \\ \Sigma_s &= \text{Streuquerschnitt} \\ \Sigma_f &= \text{Spaltquerschnitt} \\ \chi(E) &= \text{Spaltspektrum} \\ \nu_p &= \text{Zahl der prompten Neutronen pro Spaltung.} \end{aligned}$$

Vereinfachend soll angenommen werden, daß für den über Ω integrierten Neutronenfluß $\phi(x, E, t) = h(x', x, E, t)$ näherungsweise die folgenden Gleichungen mit einem einfacheren Operator B gelten:

$$\underline{B} \phi(x, E, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, E, t) \quad (\text{II.4.12})$$

mit den Bedingungen

$$\phi(x, E, t) = 0, \quad \text{für } x = \text{Randpunkt}, \quad (\text{II.4.12a})$$

$$\phi(x, E, 0) = \delta(x-x') \chi(E) v(E), \quad (\text{II.4.12b})$$

wobei

$$\delta = \text{Dirac'sche Deltafunktion.}$$

Ohne explizite Ausführung des Beweises sei angenommen, daß die Lösungen der Beziehungen (II.4.12) und (II.4.12a) die Form $\phi_m(x, E) \exp(-\alpha_m t)$ besitzen, woraus folgt:

$$\underline{B} \phi_m(x, E) + \frac{\alpha_m}{v} \phi_m(x, E) = 0. \quad (\text{II.4.13})$$

Ferner mögen diese Eigenfunktionen $\phi_m(x, E)$ ein vollständiges System bilden und gemeinsam mit einem ebenfalls vollständigen System von adjungierten Eigenfunktionen $\phi_n^+(x, E)$ zu den zu (II.4.13), (II.4.12a) adjungierten Gleichungen

$$B^+ \phi_n^+(x, E) + \frac{\alpha_n}{v} \phi_n^+(x, E) = 0 \quad (\text{II.4.14})$$

mit der Bedingung

$$\phi_n^+(x, E) = 0, \quad \text{für } x = \text{Randpunkt}, \quad (\text{II.4.14a})$$

normiert sein durch

$$\iint dx \, dE \frac{1}{v} \phi_m(x, E) \phi_n^+(x, E) = \delta_{mn}, \quad (\text{II.4.14b})$$

wobei

$$\delta_{mn} = \text{Kronecker Symbol.}$$

Die Beziehungen (II.4.13) bis (II.4.14b) sind für einfache Fälle leicht zu beweisen [34]. Dies gilt speziell für die Eingruppen-Diffusionstheorie und bei der Ersetzung der kontinuierlichen Variablen x, E, Ω durch diskrete Koordinaten.

Da der Hauptzweck der aufgestellten Gleichungen in möglichen Anwendungen und Interpretationen von Korrelationsexperimenten liegt, sollen diese Beziehungen als heuristische Annahmen gelten und infolgedessen wird auch bei den folgenden Ausführungen auf den Charakter einer strengen mathematischen Beweisführung bewußt verzichtet. Als Literaturstellen für die in diesem Zusammenhang stehenden schwierigen Fragen der Existenz diskreter Eigenwerte in den Gleichungen (II.4.12), (II.4.12a) und der Vollständigkeit von Eigenfunktionen sei auf [35, 36] verwiesen.

Mit den gemachten Annahmen kann $\phi(x, E, t) = h(x', x, E, t)$ in der folgenden Form als Summe von Eigenlösungen dargestellt werden:

$$\phi(x, E, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^+ \phi_m(x, E) \exp(-\alpha_m t) . \quad (\text{II.4.15})$$

Mit der Anfangsbedingung (II.4.12b) wird

$$\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^+ \phi_m(x, E) = \delta(x-x') \chi(E) v(E) . \quad (\text{II.4.15a})$$

Die Anwendung der Orthogonalitätsrelation (II.4.14b), Multiplikation der Beziehung (II.4.15a) mit $\phi_m(x, E)/v$ und nachfolgende Integration über das Reaktortervolumen und die Energie E, liefert:

$$\psi_m^+(x') = \int dE \chi(E) \phi_m^+(x', E) . \quad (\text{II.4.16})$$

Dies ist der mittlere Einfluß eines prompten Spaltneutrons in x' für den m-ten Mode.

Wird jetzt die Beziehung

$$h(x, x', E', t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^+(x) \phi_m(x', E') \exp(-\alpha_m t) \quad (\text{II.4.17})$$

für $t > 0$ in die Definitionsgleichung (II.4.6) ein, so ergibt sich zunächst für $T \geq 0$

$$h_{12}(x, x', E', x'', E'', T) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \psi_m^+(x) \psi_n^+(x) \phi_m(x', E') \phi_n(x'', E'') \int_T^{\infty} \exp[-\alpha_m(t-T) - \alpha_n t] dt \right\} \quad (\text{II.4.18})$$

und nach Integration:

$$h_{12}(x, x', E', x'', E'', T) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_m^+(x) \varphi_n^+(x) \phi_m(x'', E'') \frac{\exp(-\alpha_n T)}{\alpha_m + \alpha_n} \right] . \quad (\text{II.4.18a})$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für $T \leq 0$ mit $\exp(\alpha_m T)$ statt $\exp(-\alpha_n T)$ in der Summe. Zur Vereinheitlichung der Schreibweise wird folgende Funktion definiert:

$$\begin{aligned} \text{Ex}(a, b, T) &= \exp(aT) \text{ für } T \leq 0, \\ \text{Ex}(a, b, T) &= \exp(-bT) \text{ für } T \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.4.19})$$

Speziell wird:

$$\text{Ex}(a, a, T) = \exp(-a |T|) . \quad (\text{II.4.19a})$$

Mit dieser Schreibweise und nach Einsetzen des Ausdrucks (II.4.18a) für h_{12} in die Definitionsgleichung (II.4.8) folgt für die Korrelationsfunktion des Neutronenflusses:

$$\begin{aligned} \phi_{12}(x', E', x'', E'', T) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\text{Ex}(\alpha_m, \alpha_n, T) \int F(x) \overline{v(v-1)}_p(x) \varphi_m^+(x) \varphi_n^+(x) dx \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\phi_m(x', E') \cdot \phi_n(x'', E'')}{\alpha_m + \alpha_n} \right] . \end{aligned} \quad (\text{II.4.20})$$

Dieser Ausdruck soll in die Gleichung (II.4.9) für das zeitlich gemittelte Produkt der Ausgangssignale, $\overline{r_1 r_2}$, eingesetzt werden. Hierzu sei der, vom Detektor 1 (und in entsprechender Weise vom Detektor 2) erfaßte Anteil des m -ten Modes, ψ_{m1} , definiert durch:

$$\psi_{m1} = \int dE' \Sigma_1(E') \int_{V_1} dx' \phi_m(x', E') . \quad (\text{II.4.21})$$

Unter Verwendung der Wichtungsfunktion $b(T)$ nach Gleichung (II.4.7) und der über das Spaltspektrum $\chi(E)$ gemittelten Einflußfunktionen $\varphi_m^+(x)$ nach Gleichung (II.4.16) geht die Beziehung (II.4.9) über in:

$$\begin{aligned} \overline{r_1 r_2} - \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} &= \int dt \left[b(T) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{m1} \psi_{n2}}{\alpha_m + \alpha_n} \right. \\ &\quad \left. \times \int F(x) \overline{v(v-1)}_p(x) \varphi_m^+(x) \varphi_n^+(x) dx \cdot \text{Ex}(\alpha_m, \alpha_n, T) \right] . \end{aligned} \quad (\text{II.4.22})$$

Die Gleichung (II.4.22) enthält Beiträge von allen Kombinationen (m,n) von Modes. Dabei besitzt die Kombination mit $m = n = 0$, die also nur den Grundmode enthält, aus folgenden Gründen eine besondere Bedeutung:

- (1) Der Betrag von $(\alpha_m + \alpha_n)$ im Nenner hat mit $2\alpha_0$ den kleinsten Wert.
- (2) Das Integral $\int F(x) \overline{v(v-1)}_p(x) \varphi_m^+(x) \varphi_n^+(x) dx$ hat für $m = n = 0$ einen überall positiven Integranden.
- (3) Wenn durch günstige Auswahl der Detektorpositionen der Grundmode bevorzugt gemessen wird, erhält das Produkt $\psi_{o1} \psi_{o2}$ einen besonders hohen Wert.

Das Zusammenwirken dieser Faktoren führt dazu, daß die folgende, aus (II.4.22) sich ergebende, Gleichung eine zumindest für kleine, kompakte und wenig unterkritische Reaktoren gute Näherung darstellt:

$$\overline{r_1 r_2} - \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} = \int b(T) \exp(-\alpha_0 |T|) \alpha_0 dT \frac{\psi_{o1} \psi_{o2}}{2\alpha_0^2} \int F(x) \overline{v(v-1)}_p(x) \varphi_0^+(x) dx. \quad (\text{II.4.23})$$

Die Verwandtschaft der Gleichung (II.4.23) zu der Gleichung (II.3.46), die im Abschnitt II.3 für die Punkt-Reaktor-Modell-Näherung hergeleitet war, wird besonders deutlich, wenn einerseits in (II.4.23) für die Funktion $b(T)$ der Ausdruck (II.4.7) und andererseits in (II.3.46) die Reaktorantwortfunktion $h(t)$ in der Form der Gleichung (II.3.7) eingesetzt wird. Die Gleichung (II.4.23) bildet das Hauptargument für die Zulässigkeit, das Punkt-Reaktor-Modell bei der Analyse des Neutronenrauschens in Reaktoren zu verwenden. Dabei ist die Übereinstimmung zwischen dem Punkt-Reaktor-Modell und Gleichung (II.4.23) exakt hinsichtlich der Beschreibung der Zeitabhängigkeit. Bei den Normierungsintegralen hinter dem Zeitintegral in (II.4.23) ist dagegen die Übereinstimmung nur qualitativ.

Hiermit sind die beiden wesentlichen Gesichtspunkte, auf die es in diesem Abschnitt ankam, erreicht, nämlich einerseits den Gültigkeitsbereich des Punkt-Reaktor-Modells zu umreißen und andererseits aufzuzeigen, welche Wege zu beschreiten sind, wenn Experimente in Reaktor-Anordnungen durchgeführt werden, in denen dieses einfache Modell keine vernünftige Interpretation der Ergebnisse mehr erlaubt. In diesen komplizierteren Fällen sind umfangreichere Berechnungen mit numerischen Verfahren, die durch Anwendung verschiedener

Reaktorcodes möglich sind, unerlässlich. Auf Einzelheiten dieser Probleme soll hier nicht eingegangen werden. Als typisches Beispiel, wie Ergebnisse von Rossi- α -Messungen (vgl. den folgenden Abschnitt II.5) an reflektierten schnellen Reaktorordnungen von Gleichung (II.4.22) ausgehend mit numerischen Verfahren berechnet werden können, sei auf die Behandlung in [20] verwiesen.

II.5 Rossi- α -Experiment

Diese Methode, die ursprünglich von Bruno ROSSI vorgeschlagen wurde, beruht auf der Bestimmung von verzögert koinzidenten Detektorimpulsen. Eine experimentelle Anordnung, die für derartige Messungen von ORNDOFF [24] verwendet wurde, zeigt Abb.II.5.1.

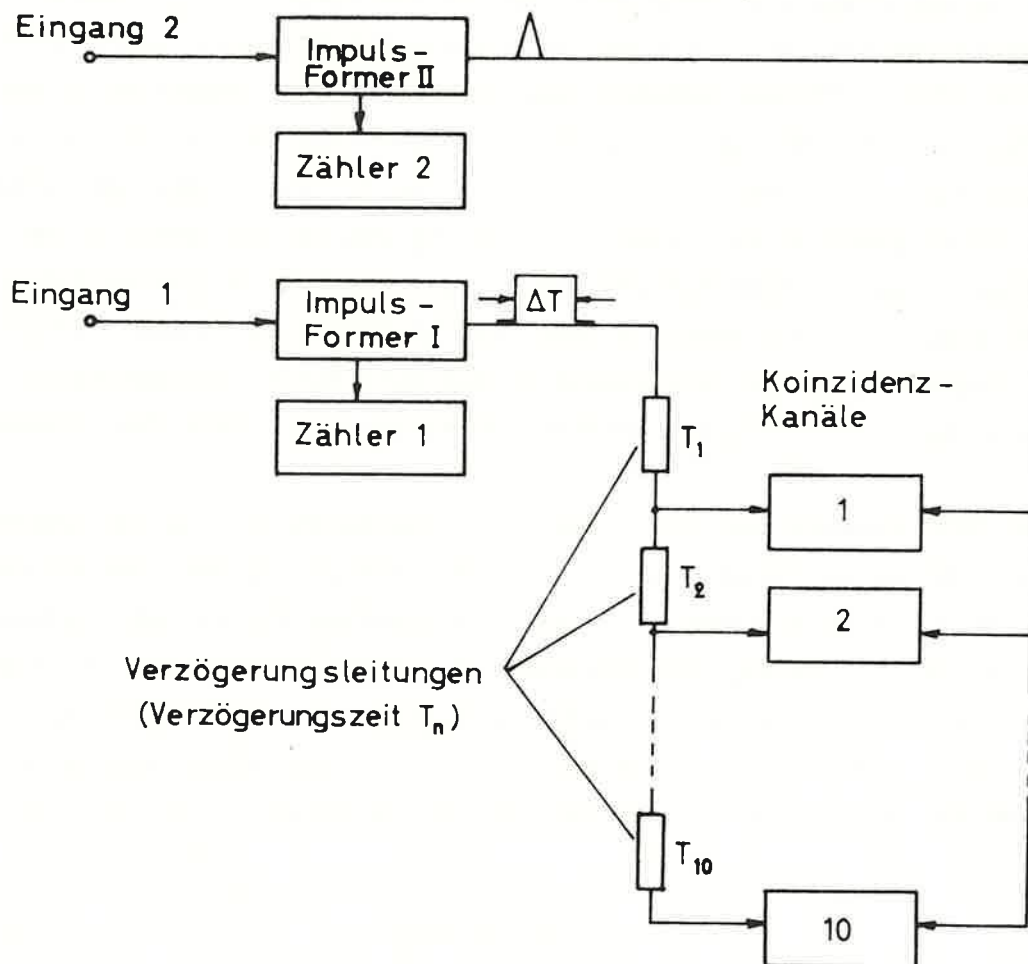


Abb.II.5.1 Rossi- α -Meßanordnung nach ORNDOFF [24]

Es handelt sich um einen Analysator mit 10 Koinzidenzkanälen. Die Kanalbreite ΔT hat Werte von 0,25 μ s und 0,5 μ s, die durch die Verzögerungsleitungen und den Impulsformer I eingestellt werden können. Die Verwendung von Verzögerungsleitungen ist besonders einfach, wenn nur wenige Kanäle mit ein oder zwei Werten für ΔT erforderlich sind und wenn die gesamte Zeitspanne nicht mehr als einige μ s beträgt. Praktisch undurchführbar wird dieses Verfahren für Kanalzahlen $n > 20$ und mit mehreren Werten für die Kanalbreite. Die am Eingang 1 erscheinenden Impulse werden im Impulsformer I in Rechteckimpulse der Länge ΔT umgeformt und gelangen dann zu den Verzögerungsleitungen, in denen sie ebenfalls um ΔT verzögert werden können. Hinter den Verzögerungsleitungen ist jeweils die eine Seite des entsprechenden Koinzidenzkanals angeschlossen. Der Kanal besteht aus einer Koinzidenzstufe und einem nachgeschalteten Impulszähler. Die am Eingang 2 ankommenden Impulse gelangen nach Formung direkt auf die zweite Seite des Koinzidenzkanals. Auf diese Weise wird erreicht, daß alle an den Eingängen ankommende Impulse innerhalb der Zeitspanne $n \cdot \Delta T$ auf Koinzidenzen hin analysiert werden können. Das bedeutet insbesondere, daß am Eingang 1 keine "Triggerimpulse" unterdrückt werden, abgesehen innerhalb der Totzeit, die bei dieser Anordnung gleich der Kanalbreite ist. Es wird auf diesen Punkt hier besonders hingewiesen, da er eine notwendige Voraussetzung für optimale Rossi- α -Messungen ist. An den Impulsformern I und II sind weiterhin zwei Zähler angeschlossen, mit denen die mittleren Zählraten beider Eingänge bestimmt werden können. Die Anordnung ist sowohl für Zwei-Detektor-Experimente in Kreuzkorrelation als auch durch Zusammenlegen der Eingänge 1 und 2 für Ein-Detektor-Experimente in Autokorrelation verwendbar.

In diesem Fall besteht das Experiment in der direkten Messung der Kreuzkorrelationsfunktion der Detektorzählraten. Zur Aufstellung der Berechnungsgleichungen setzen wir voraus, daß das Punkt-Reaktor-Modell und die Annahmen des Abschnitts II.3 Gültigkeit besitzen, so daß die Gleichungen (II.3.46) und (II.3.44) direkt für das Zwei-Detektor-Experiment und unter Hinzufügen des Zusatzterms π mit (II.2.23) auch für das Ein-Detektor-Experiment verwendet werden können. Die zu bestimmende Kreuzkorrelationsfunktion $r_{12}(\tau)$ ist gegeben durch

$$r_{12}(\tau) = \overline{r_1(t - \tau) \cdot r_2(t)}, \quad (\text{II.5.1})$$

wobei

$r_n(t)$ = Zählraten im Eingangskanal n ($n = 1, 2$) zur Zeit t .

τ = Verzögerungszeit zwischen zwei Impulsen (Bedingung $\tau \geq 0$).

Zur Berechnung des zeitlich gemittelten Produkts der Ausgangssignale wird von der Gleichung (II.3.46) ausgegangen, die lautete:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} + F \frac{W_1 W_2 \chi_2 k^2}{l^2} \iiint dt dt_1 dt_2 h(t_1) h(t_2) a_1(t-t_1) a_2(t-t_2). \quad (\text{II.3.46})$$

Zunächst werden die Netzwerkantwortfunktionen oder Gewichtsfunktionen $a(t)$ durch folgende Beziehungen eingeführt:

$$a_1(t) = \delta(t - \tau), \quad (\text{II.5.2a})$$

$$a_2(t) = \delta(t). \quad (\text{II.5.2b})$$

Die Deltafunktion $\delta(t - \tau)$ bringt dabei zum Ausdruck, daß die Impulse im Eingangskanal 1 gegenüber denen des Eingangs 2 um die Zeit τ verzögert sind. Für die Mittelwerte der Einzelsignale $\overline{r_1}$ und $\overline{r_2}$, d.h. für die mittleren Zählraten, wie sie durch die Zähler 1 und 2 registriert werden, folgt damit unter Verwendung der Gleichung (II.3.44):

$$\overline{r_n} = W_n F, \quad (n = 1, 2). \quad (\text{II.5.3})$$

Die Reaktorantwortfunktion $h(t)$ war für das Punkt-Reaktor-Modell unter Vernachlässigung der verzögerten Neutronen gegeben durch Gleichung (II.3.7), die lautete:

$$h(t) = e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (\text{II.3.7})$$

Hiermit sind zur Ausrechnung von (II.3.46) alle erforderlichen Funktionen gegeben. Einsetzen der Ausdrücke (II.5.2a), (II.5.2b), (II.5.3) und (II.3.7) in (II.3.46) ergibt:

$$\overline{r_1 r_2}(\tau) = W_1 W_2 F^2 + F \frac{W_1 W_2 \chi_2 k^2}{l^2} \iiint dt dt_1 dt_2 h(t_1) h(t_2) \delta(t-t_1-\tau) \delta(t-t_2). \quad (\text{II.5.4})$$

Anwendung der Regeln für die Integration von Deltafunktionen und Ausführung der Integrationen von $-\infty$ bis $+\infty$ in der Reihenfolge t_1, t_2, t ergibt:

$$\overline{r_1 r_2}(\tau) = W_1 W_2 F^2 + F \frac{W_1 W_2 \chi_2 k^2}{l^2} \iint dt dt_2 h(t-\tau) h(t_2) \delta(t - t_2) \quad (\text{II.5.5})$$

$$= W_1 W_2 F^2 + F \frac{W_1 W_2 \chi_2 k^2}{l^2} \int dt h(t - \tau) h(t) \quad (\text{II.5.6})$$

$$= W_1 W_2 F^2 + F \frac{W_1 W_2 \chi_2 k^2}{l^2} \int dt e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\alpha t} \quad (\text{II.5.7})$$

$$= W_1 W_2 F^2 + F \frac{W_1 W_2 \chi_2 k^2}{l^2} e^{-\alpha \tau} \int dt' e^{-2\alpha t'} \quad (\text{II.5.8})$$

und schließlich:

$$\overline{r_1 r_2}(\tau) = W_1 W_2 F^2 + W_1 W_2 F \frac{\chi_2 k^2}{2\alpha l^2} e^{-\alpha \tau} \quad (\text{II.5.9})$$

In der Meßanordnung der Abb.II.5.1 war die Kanalbreite mit ΔT und die Verzögerungszeit im Kanal n mit T_n bezeichnet worden. Aus Gleichung (II.5.9) folgt damit für die mittlere Koinzidenzzählrate im Koinzidenzkanal n sofort:

$$\overline{r_1 r_2}(T_n) \Delta T = W_1 W_2 F^2 \Delta T + W_1 W_2 F \frac{\chi_2 k^2}{2\alpha l^2} e^{-\alpha T_n} \Delta T \quad (\text{II.5.10})$$

Gleichung (II.5.10) gilt für das Zwei-Detektor-Kreuzkorrelationsexperiment unter den gemachten Voraussetzungen.

Eingeschoben sei an dieser Stelle das Ein-Detektor-Experiment, bei dem die beiden Eingänge 1 und 2 der Anordnung in Abb.II.5.1 verbunden sind und von einem einzigen Detektor gespeist werden. Bei diesem Experiment wird die Autokorrelationsfunktion der Detektor-Zählrate bestimmt. Hierbei tritt eine triviale Koinzidenz für jeden Impuls bei der Verzögerungszeit $\tau = 0$ auf, der im Koinzidenzkanal 1 der Anordnung registriert würde, wenn die Verzögerungsleitung T_1 weggelassen wäre. Der Zusatzterm π - vgl. (II.2.23) - bestimmt sich infolgedessen in diesem Falle zu

$$\pi = W F \delta(\tau) \quad (\text{II.5.11})$$

wobei

$$W = \text{Empfindlichkeit des Detektors.}$$

Die Autokorrelationsfunktion für das Ein-Detektor-Experiment lautet demnach:

$$r_{11}(\tau) = \overline{r(t-\tau) \cdot r(t)} = W F \left[\delta(\tau) + W F + \frac{W \chi_2 k^2}{2\alpha l^2} e^{-\alpha \tau} \right] \quad (\text{II.5.12})$$

Nach diesem Einschub des Autokorrelationsexperiments sei wieder zurückgekehrt zur Diskussion des Zwei-Detektor-Kreuzkorrelationsexperiments. Die Gleichungen (II.5.9) bzw. (II.5.10) setzen sich aus zwei Termen zusammen. Wird die Entstehung dieser Terme bis zu ihrer ursprünglichen Ausgangsgleichung (II.2.16) zurückverfolgt, so läßt sich der erste Term eindeutig dem Beitrag der unkorrelierten Detektorereignisse zum zeitlich gemittelten Produkt der Ausgangssignale zuordnen, während der zweite Term den Beitrag der korrelierten Detektorereignisse beinhaltet, so wie sie bei der Aufstellung von (II.2.16) durch das Beispiel 2 gekennzeichnet waren. Wird von Gleichung (II.5.9) ausgegangen, so ist der Beitrag unkorrelierter Ereignisse gegeben durch:

$$U = W_1 W_2 F^2 \quad (II.5.13)$$

Der Beitrag steigt quadratisch mit der Reaktorleistung, gegeben durch F , und linear sowohl mit der Empfindlichkeit des ersten Detektors W_1 als auch des zweiten, W_2 . Er ist unabhängig von der Verzögerungszeit τ . Dies ist plausibel, da unkorrelierte Ereignisse das Zeitverhalten der Neutronenketten nicht widerspiegeln. Dieser Term beschreibt infolgedessen im Experiment den zeitunabhängigen Untergrund. Der zweite Beitrag auf Grund korrelierter Detektorereignisse ist gegeben durch:

$$K = W_1 W_2 F \frac{\chi_2 k^2}{2\alpha l^2} e^{-\alpha \tau} \quad (II.5.14)$$

Dieser Beitrag besitzt bei der Verzögerungszeit $\tau = 0$ sein Maximum und fällt danach exponentiell ab. Der Maximalwert

$$K_{\max} = W_1 W_2 F \frac{\chi_2 k^2}{2\alpha l^2} \quad (II.5.15)$$

ist bei vorgegebenem Reaktivitätszustand (k , α und l konstant) sowohl linear von den Detektorempfindlichkeiten W_1 und W_2 abhängig als auch linear von der Reaktorleistung; letzteres im Gegensatz zum Beitrag U .

Das Verhältnis Q von korrelierten zu nichtkorrelierten Detektorereignissen oder, mit anderen Worten, das Signal-zu-Untergrundverhältnis ergibt sich aus den Gleichungen (II.5.14) und (II.5.13) zu

$$Q = \frac{K}{U} = \frac{1}{F} \cdot \frac{\chi_2 k^2}{2\alpha l^2} e^{-\alpha \tau} \quad (II.5.16)$$

mit dem Maximalwert

$$Q_{\max} = \frac{1}{F} \frac{\chi_2 k^2}{2\alpha l^2} \quad (\text{II.5.17})$$

Bei einem kritischen Reaktor ($k=1$, $\alpha_c = \frac{\beta}{l}$) geht (II.5.17) über in:

$$Q_{\max o} = \frac{1}{F} \frac{\chi_2}{2\beta l} = \frac{\alpha_c}{F} \frac{\chi_2}{2\beta^2} \quad (\text{II.5.18})$$

Aus den Gleichungen (II.5.16) bis (II.5.18) ist ersichtlich, daß das Verhältnis korrelierter zu nichtkorrelierter Detektorereignisse umgekehrt proportional zur Reaktorleistung ist. Hieraus folgt sofort, daß Rossi- α -Messungen am günstigsten bei niedriger Reaktorleistung durchzuführen sind, wozu allerdings die innere Neutronenquelle (Spontanspaltungen, α, n -Reaktionen etc.) genügend klein sein muß. Weiterhin kann aus (II.5.18) entnommen werden, daß das Verhältnis Q in schnellen Reaktorsystemen auf Grund der kürzeren Neutronenlebensdauern ($l \approx 10^{-8}$ bis 10^{-5} sec) günstiger ist als in thermischen Systemen ($l \approx 10^{-5}$ bis 10^{-2} sec).

Zur experimentellen Bestimmung der Abklingkonstanten des prompten Neutronenflusses α kann die Beziehung (II.5.10) herangezogen werden. Werden die bei der Messung gewonnenen Koinzidenzzählraten als Funktion der Verzögerungszeit linear aufgetragen, so ergibt sich eine Exponentialkurve, die in einen zeitunabhängigen konstanten Untergrund ausläuft.

Der unkorrelierte Untergrund war durch (II.5.13) gegeben und kann abgezogen werden, so daß nur der Beitrag entsprechend (II.5.14) übrigbleibt. Die Koin-

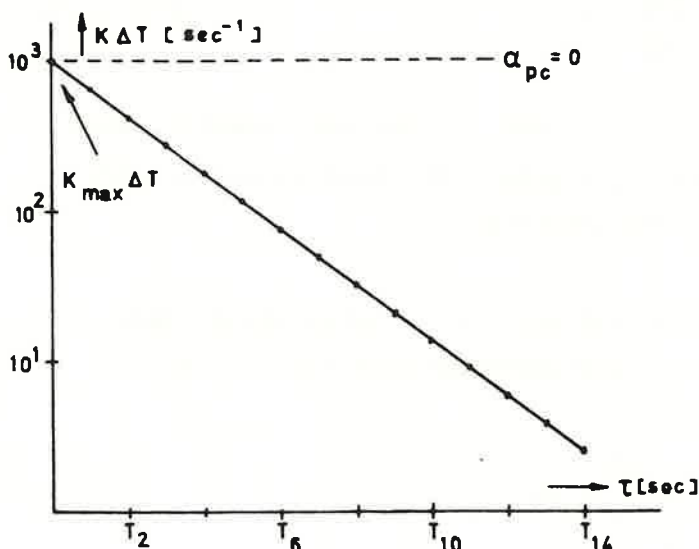


Abb.II.5.2

zidenzzählrate $K\Delta T$ auf Grund korrelierter Ereignisse wird geeigneterweise halblogarithmisch über den Verzögerungszeiten T_n der Analysatorkanäle aufgetragen, so wie es in Abb.II.5.2 dargestellt ist. Aus der Neigung der Geraden läßt sich dann der Wert für α bestimmen, dessen Definitionsgleichung lautete:

$$\alpha = \frac{1 - k(1 - \beta)}{l} \quad (\text{II.3.2c})$$

In einem verzögert kritischen Reaktor, in dem $k = 1$, folgt daraus:

$$\alpha_c = \frac{\beta}{l} \quad (II.5.19)$$

Bei prompt kritischem Zustand eines Reaktors, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die prompte Multiplikationskonstante $k_p = k(1-\beta) = 1$, ergibt sich in diesem Modell

$$\alpha_{pc} = 0, \quad (II.5.20)$$

so daß sich in diesem Grenzfall eine horizontal verlaufende Kurve ergäbe, die in Abb.II.5.2 gestrichelt miteingetragen ist. Für einen vorgegebenen Reaktor steigt demnach der Wert für die Abklingkonstante des prompten Neutronenflusses von $\alpha_{pc} = 0$ über $\alpha_c = \frac{\beta}{l}$ zu weiter unterkritischen Reaktorzuständen.

Bei Kenntnis von α und α_c läßt sich ebenfalls der Reaktivitätszustand des Reaktorsystems bestimmen. Für nicht zu stark unterkritische Reaktoren ($k \approx 1$) folgt aus (II.3.2c) und (II.5.19) in guter Näherung die Beziehung für die Reaktivität ρ^+ (in Dollareinheiten):

$$-\rho^+ [\$] = -\frac{\rho}{\beta} = \frac{\Delta k}{k\beta} \approx \frac{\alpha}{\alpha_c} - 1 \quad (II.5.21)$$

Wird diese Beziehung graphisch dargestellt, so ergibt sich ein Verlauf, wie er in Abb.II.5.3 angedeutet ist. Aufgetragen ist α als Funktion der Reaktivität ρ^+ .

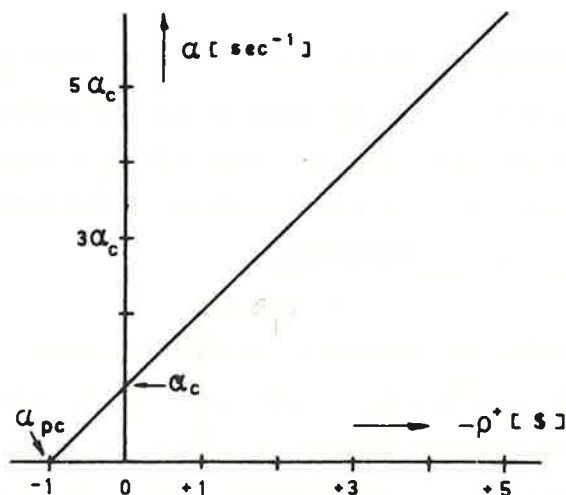


Abb.II.5.3

Es ergibt sich eine Gerade, die die Ordinate im Punkt $\alpha = \alpha_c$ schneiden muß (verzögert kritischer Reaktor) und die Abszisse im Punkt $\rho^+ = 1 [\$]$ (prompt kritischer Reaktor). Oftmals ist es bei Rossi- α -Experimenten so, daß α_c nicht direkt gemessen werden kann, da dann die Reaktorleistung bereits zu hoch und das Verhältnis Q für eine brauchbare Auswertung zu niedrig ist. In diesem Fall wird so vorgegangen, daß die gemessenen Werte von α als Funktion einer reaktivitäts-

proportionalen Größe aufgetragen werden. Hierzu kann beispielsweise eine der beiden Zählraten \bar{r}_1 oder \bar{r}_2 dienen, die mit den parallel laufenden Zählern (vgl. Abb.II.5.1) bestimmt werden und durch die Gleichung (II.5.3) gegeben sind. Es gilt:

$$\bar{r}_1 = W_1 F \quad \text{und} \quad \bar{r}_2 = W_2 F \quad (II.5.3)$$

Die Proportionalität zwischen den reziproken Zählraten $\frac{1}{\bar{r}_1}$ bzw. $\frac{1}{\bar{r}_2}$ und der Reaktivität, ausgedrückt durch Δk , ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

Die Spaltrate F ist im unterkritischen System gegeben durch die Beziehung

$$F = \frac{S_0}{(1 - k) \nu} \quad , \quad (II.5.22)$$

wobei

$$S_0 = \text{Neutronenquellstärke im Reaktor (Neutronen pro sec),}$$

$$k_p = k(1 - \beta) = \text{Prompte Multiplikationskonstante,}$$

und k , β und ν in (II.3.1) definiert sind. Der im Nenner stehende Klammerausdruck ist verantwortlich für die unterkritische Quellmultiplikation. Wird k_p in (II.5.22) eingesetzt, so gilt unter der Voraussetzung, daß das System nicht zu stark unterkritisch ist:

$$F = \frac{1}{\Delta k} \cdot \frac{S_0}{\nu} \quad . \quad (II.5.23)$$

Die Zählrate \bar{r}_1 bzw. \bar{r}_2 ist aber nach (II.5.3) proportional zur Spaltrate F . Da S_0 und ν konstante Größen sind, folgt somit:

$$\frac{1}{\bar{r}_n} \approx \Delta k \quad , \quad (n = 1, 2) \quad . \quad (II.5.24)$$

Bei unbekanntem α_c werden folglich die gemessenen Werte von α über $\frac{1}{\bar{r}_1}$ oder $\frac{1}{\bar{r}_2}$ aufgetragen anstelle von ρ^+ , wie in Abb.II.5.3. Die Extrapolation der gefundenen Geraden liefert im Schnittpunkt mit der Ordinate den Wert für α_c . Dieser kann dann in der üblichen Weise verwendet werden, um die Abszisse in Dollareinheiten der Reaktivität (oder anderen Einheiten) auszudrücken.

Nachdem die Bestimmung der Abklingkonstanten des prompten Neutronenflusses, α , und ihres Wertes bei verzögert kritischem Reaktor, α_c , diskutiert wurde, soll die Ermittlung einer weiteren Reaktorgröße erwähnt werden, nämlich der Reaktorleistung, die aus der Messung ebenfalls einfach gewonnen werden kann. Dazu werden die beiden, schon diskutierten, Ausdrücke für K_{\max} - vgl.(II.5.15) - und für U - vgl.(II.5.13) - verwendet. Der Maximalbeitrag der korrelierten Detektorereignisse ergab sich bei der Verzögerungszeit $\tau = 0$ und seine Bestimmungsmöglichkeit aus der experimentell gewonnenen Abklingkurve ist in Abb.II.5.2 angedeutet. Die Beziehung (II.5.15) wird etwas umgeformt. Durch Erweiterung mit β^2 und Einsetzen von α_c folgt für einen nicht zu stark unterkritischen Reaktor ($k \approx 1$):

$$K_{\max} = W_1 W_2 F \frac{\chi_2}{2\beta^2} \frac{\alpha_c^2}{\alpha} \quad (\text{II.5.25})$$

Die Größe von U folgt aus (II.5.3) und (II.5.13) direkt als Produkt der mittleren Einzelzählraten $\overline{r_1 \cdot r_2}$:

$$\overline{r_1 \cdot r_2} = U = W_1 W_2 F^2 \quad (\text{II.5.26})$$

Division von (II.5.26) durch (II.5.25) und Auflösen nach F ergibt:

$$F = \frac{U}{K_{\max}} \frac{\chi_2}{2\beta^2} \frac{\alpha_c^2}{\alpha} \quad (\text{II.5.27})$$

Mit Hilfe der Umrechnung

$$1 \text{ Watt} \hat{=} 3,2 \cdot 10^{10} \text{ Spaltungen pro sec} \quad (\text{II.5.28})$$

läßt sich die Reaktorleistung N in Watt gewinnen:

$$N = 3,1 \cdot 10^{-11} \frac{U}{K_{\max}} \frac{\chi_2}{2\beta^2} \frac{\alpha_c^2}{\alpha} [\text{W}] \quad (\text{II.5.29})$$

(U [sec⁻²], K_{max} [sec⁻²], α_c [sec⁻¹], α [sec⁻¹], β als absolute Zahl).

Die Größen U, K_{max}, α_c und α können dem Experiment direkt entnommen werden. Für die Kernkonstante χ₂ wird gewöhnlicherweise der Wert 0,8 [25] verwendet. Der effektive Anteil verzögerter Neutronen, β, ist aus entsprechenden theoretischen Berechnungen des untersuchten Reaktors zu entnehmen.

Angemerkt sei an dieser Stelle, daß bei bekannter Reaktorleistung ebenfalls die Neutronenquellstärke S₀ nach der Beziehung (II.5.22) berechenbar ist. Im Auge zu behalten ist allerdings, daß die abgeleiteten Beziehungen nur für das Punkt-Reaktor-Modell streng gültig sind.

Als nächster Punkt wird die Frage behandelt, welche Zusatzterme und quantitative Änderungen sich an den bisherigen Berechnungsgleichungen ergeben, wenn keine Absorptionsdetektoren vorausgesetzt werden, wie das bisher der Fall war, sondern wenn auch Spaltkammern, Rückstoßprotonendetektoren und dergleichen zugelassen werden. Dazu muß zum grundlegenden Ausdruck (II.2.16) zurückgekehrt werden, der folgendermaßen lautete:

$$\begin{aligned} \overline{r_1 r_2} &= \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} \\ &+ 2 \iint dy_1 dy_2 [s_2(y_1, y_2) \int dt g_1(y_1, t) g_2(y_2, t)] \\ &+ \iint dy dz [s_1(y, z) \int dt g_1(y, t) \varphi_2(z, t)] \quad (\text{II.2.16}) \\ &+ \iint dy dz [s_1(y, z) \int dt g_2(y, t) \varphi_1(z, t)] \quad . \end{aligned}$$

Die beiden letzten Terme in (II.2.16) berücksichtigen gerade Beiträge zum zeitlich gemittelten Produkt der Ausgangssignale, die durch Reaktionen in den Detektoren zustande kommen, bei denen Folgeteilchen auftreten, die die Reaktionskette fortsetzen können. Derartige Fälle waren durch das Beispiel 3 im Abschnitt II.2 verdeutlicht worden. Im vorliegenden Rossi- α -Experiment kann, da die Verzögerungszeiten positiv ($\tau > 0$) sind, nur derjenige Detektor mit seinen Folgeteilchen einen Beitrag leisten, der das Torsignal auslöst. In unserem Fall ist das der Detektor am Eingang 1 (vgl. Abb. II.5.1), und infolgedessen ist der letzte Term in (II.2.16) zu betrachten. Unter den zu Beginn des Abschnitts II.3 gemachten Voraussetzungen folgt in der orts- und energieunabhängigen Näherung:

$$\iint dy dz [s_1(y, z) \int dt g_2(y, t) \varphi_1(z, t)] = \int dt g_2(t) \int dz s_1(z) \varphi_1(z, t). \quad (\text{II.5.30})$$

Die Funktion $\varphi_1(z, t)$ war durch (II.2.12) definiert als Antwort von r_1 auf eine einzelne z-Reaktion. Da die z-Reaktion im empfindlichen Volumen des Detektors auftreten muß, schließt $\varphi_1(z, t)$ die Antwortfunktion des Detektors 1 und der angeschlossenen elektronischen Anordnung, gekennzeichnet durch $a_1(t)$, ein. Die Funktion $a_1(t)$ ist für das Rossi- α -Experiment durch (II.5.2a) gegeben. Um die Eigenheiten verschiedenartiger Detektoren erfassen zu können, wird folgende Größe eingeführt:

$$\Delta_n = \text{Anzahl der im Detektor } n \text{ (} n = 1, 2 \text{) pro registriertem Neutron (II.5.31) \text{ freigesetzten Neutronen.}$$

Es ist somit $\Delta = 0$ für Absorptionsdetektoren, $\Delta = 1$ für Rückstoßprotonendetektoren und $\Delta = \nu$ für Spaltkammern. Entsprechend der Beziehung (II.2.7a) ist $s_1(z)dz$ die mittlere Rate von Neutronen aus z-Reaktionen in dz , da gemäß der Voraussetzung als Teilchen nur Neutronen in Betracht gezogen werden. Einsetzen der Detektorantwortfunktion, gegeben durch $W_1 \delta(t)$ und der Netzwerkantwortfunktion $a_1(t)$ in (II.5.30) und nachfolgende Integration über alle Arten und Orte von z-Reaktionen ergibt:

$$\int dt g_2(t) \int dz s_1(z) \varphi_1(z, t) = \int dt g_2(t) F W_1 \Delta_1 \delta(t-\tau) . \quad (\text{II.5.32})$$

Die Funktion $g_2(t)$, die Antwort von r_2 auf den Einschub eines Neutrons in den Reaktor zur Zeit $t = 0$, und ihre Berechnung unter den vorliegenden Voraussetzungen führte zum Ausdruck (II.3.25). Ihre entsprechende Verwendung in Gleichung (II.5.32) und Integration über die Zeit führt zu:

$$\int dt g_2(t) F W_1 \Delta_1 \delta(t-\tau) = \frac{W_2 k}{l v} e^{-\alpha \tau} W_1 F \Delta_1 . \quad (\text{II.5.33})$$

Wird dieser Beitrag auf Grund von Folgeteilchen im Detektor 1 zur Kreuzkorrelationsfunktion (II.5.9) hinzugefügt und umgeformt, so folgt:

$$r_{12}(\tau) = W_1 F \left[W_2 F + \frac{W_2}{l} \left\{ \frac{\chi_2 k^2}{2\alpha l} + \frac{\Delta_1 k}{v} \right\} e^{-\alpha \tau} \right] . \quad (\text{II.5.34})$$

Zur Abschätzung des Detektoreinflusses werden die Ausdrücke in der geschweiften Klammer der Gleichung (II.5.34) betrachtet, da der zweite Ausdruck im Vergleich zum ersten die relative Erhöhung des korrelierten Beitrags durch den Detektor liefert. Im Falle des verzögert kritischen Reaktors ($k=1$; $\alpha = \frac{\beta}{l}$) gilt:

$$\frac{\chi_2 k^2}{2\alpha l} + \frac{\Delta_1 k}{v} = \frac{\chi_2}{2\beta} + \frac{\Delta_1}{v} . \quad (\text{II.5.35})$$

Wird angenommen, daß es sich beim Detektor 1 um eine Spaltkammer handelt, so ist $\Delta_1 = v$, und mit den Werten $\chi_2 = 0,8$ und $\beta = 0,007$ ergibt sich:

$$\frac{\chi_2}{2\beta} + \frac{\Delta_1}{v} = 57 + 1 . \quad (\text{II.5.36})$$

Hieraus folgt, daß bei einem kritischen Reaktor in der betrachteten Näherung der Beitrag einer Spaltkammer im Vergleich zu einem Absorptionsdetektor knapp 2% ausmacht. Der Beitrag erhöht sich mit zunehmender Unterkritikalität, so daß er bei einem 5% unterkritischen Reaktor ($k = 0,95$) bereits auf 15% angestiegen ist. Die Schlußfolgerung hieraus ist, daß bei Messungen nahe am kritischen Zustand der Detektoreinfluß gewöhnlicherweise vernachlässigt werden darf, daß jedoch bei stärkerer Unterkritikalität Korrekturen anzubringen sind, um systematische Fehler auszuschließen.

Zum Abschluß der Behandlung der Rossi- α -Methode sei noch auf experimentelle Anordnungen eingegangen, die im Gegensatz zur Apparatur der Abb.II.5.1 die Forderungen der aufgestellten Theorie unter Umständen nicht erfüllen. Es handelt sich dabei um Rossi- α -Experimente, die an verschiedenen Stellen [26,27,28] mit Zeitanalysatoren durchgeführt worden sind, in denen nicht alle ankommenden Detektorimpulse zur Messung der Korrelationsfunktion Verwendung finden. Diese beschränkte Auswahl von Detektorimpulsen führt dazu, daß das Signal-zu-Untergrundverhältnis Q , gegeben durch Gleichung (II.5.16), zu kleine Werte annimmt. Eine ausführliche theoretische Untersuchung dieses Phänomens, die an dieser Stelle nicht gebracht wird, ist in [23] enthalten.

Die erwähnten Analysatoren arbeiten meistens nach einer Art Stoppuhr-Prinzip. Der erste Impuls startet den Analysatorzyklus, und die nachfolgenden Impulse werden je nach ihrem zeitlichen Abstand zum Startimpuls in die entsprechenden Kanäle des Analysators einsortiert und registriert. Während eines solchen Analysatordurchlaufs, dessen Zeitdauer sich nach der eingestellten Kanalbreite und der Anzahl der Kanäle richtet, kann der Zyklus gewöhnlicherweise nicht neu gestartet werden. Dies führt dazu, daß die Detektorimpulse, die nach dem Startimpuls eintreffen, zwar einsortiert werden, aber selbst keine Zyklen starten können. Diese Arbeitsweise ist der wesentliche Unterschied zu der Anordnung in Abb.II.5.1, bei der jeder Impuls auch als Startimpuls wirkt und somit eine vollständige "Zyklusüberlagerung" garantiert ist. Diese Art der Auswahl von Startimpulsen führt letztlich zu der Verkleinerung von Q_{\max} , die, wenn sie nicht berücksichtigt wird, z.B. zu falschen Werten für die Spaltrate und damit für die absolute Reaktorleistung führt. Die Abklingkonstante des prompten Neutronenflusses, α , wird dagegen durch diese Arbeitsweise nicht in Mitleidenschaft gezogen.

II.6 Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bei der Untersuchung statistisch ablaufender Prozesse spielt die Frage nach ihrer zeitlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung eine große Rolle. Gefragt wird dabei nach der Wahrscheinlichkeit, daß eine Anzahl von n Prozessen in einem vorgegebenen Zeitintervall der Länge T stattfinden, wobei n ganzzahlige positive Werte von 0 bis ∞ annehmen kann. Ein klassisches Beispiel ist die im Abschnitt I.4 behandelte POISSON-Verteilung, gegeben durch die Beziehung:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.6.1})$$

mit

n = Anzahl der Prozesse in einem Zeitintervall der Länge T ,

\bar{n} = Mittlere Anzahl von Prozessen in einem Zeitintervall der Länge T .

Diese Verteilung gilt speziell unter der Voraussetzung, daß die Prozesse voneinander unbeeinflusst ablaufen, d.h. völlig unkorreliert sind, wie es z.B. bei radioaktiven Zerfällen zutrifft. Das Vorhandensein korrelierter Prozesse führt infolgedessen zu anderen Verteilungsgesetzen, die von der POISSON-Verteilung abweichen. Die Abweichung wird umso stärker sein, je höher der Anteil der korrelierten Ereignisse ist.

Zur Bestimmung der kennzeichnenden Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt es zwei Möglichkeiten: (1) Die Berechnung ihrer Momente, wie der Varianz etc., wodurch die Verteilung eindeutig bestimmt ist. (2) die direkte Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten, aus denen sich die Verteilung zusammensetzt. Im folgenden sind beide Möglichkeiten untersucht worden.

Berechnung von Momenten der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Ausgangsgleichung zur Momentenberechnung der Verteilung ist der Ausdruck (II.3.42), in dessen zweitem Term der Beitrag der korrelierten Ereignisse berücksichtigt wird. Verwendet wird eine elektronische Netzwerkanordnung, die es erlaubt, während eines Zeitintervalls der Länge T Detektorimpulse zu registrieren und die die folgende Antwortfunktion besitzt:

$$a_1(t) = a_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{im übrigen Bereich,} \end{cases} \quad (\text{II.6.2})$$

T = Länge des Zeitintervalls.

Ist ferner

$n_1(t-T, t)$ = Anzahl von Registrierungen des Detektors 1 im Intervall $(t-T, t)$,

$n_2(t-T, t)$ = Anzahl von Registrierungen des Detektors 2 im Intervall $(t-T, t)$,

so folgt für die Ausgangssignale:

$$r_1(t) = \frac{n_1(t-T, t)}{T}, \quad (\text{II.6.3})$$

$$r_2(t) = \frac{n_2(t-T, t)}{T}, \quad (\text{II.6.4})$$

und daraus das Produkt:

$$r_1(t) r_2(t) = \frac{n_1(t-T, t) n_2(t-T, t)}{T^2}. \quad (\text{II.6.5})$$

Die mittleren Zählraten aus den Detektoren 1 und 2 sind gegeben durch die Beziehungen:

$$\bar{r}_1 = W_1 F = \frac{\bar{n}_1(T)}{T}, \quad (\text{II.6.6})$$

$$\bar{r}_2 = W_2 F = \frac{\bar{n}_2(T)}{T}. \quad (\text{II.6.7})$$

Der zeitliche Mittelwert des Produkts der Ausgangssignale ergibt sich zu:

$$\overline{r_1 r_2} = \frac{\overline{n_1 n_2(T)}}{T^2}. \quad (\text{II.6.8})$$

Für die Vereinfachung der Rechenoperation wird die Fouriertransformation für (II.6.2) durchgeführt:

$$A_1(\omega) = A_2(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega T}}{i\omega T}. \quad (\text{II.6.9})$$

Wenn dieser Ausdruck zusammen mit der Reaktorantwortfunktion (II.3.5) in den Integralteil der Ausgangsgleichung (II.3.42) eingesetzt und die Integration durchgeführt, so folgt:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{(1 - e^{-i\omega T})(1 - e^{i\omega T})}{\omega^2 T^2 (\alpha + i\omega)(\alpha - i\omega)} = \frac{e^{-\alpha T} - 1 + \alpha T}{\alpha^3 T^2}. \quad (\text{II.6.10})$$

Einsetzen der Beziehungen (II.6.6), (II.6.7), (II.6.8) und (II.6.10) in die Ausgangsgleichung (II.3.42) ergibt:

$$\overline{r_1 r_2}(T) = \frac{\overline{n_1 n_2(T)}}{T^2} = W_1 F [W_2 F + \frac{W_2 \chi_2 k^2}{\alpha l^2} \cdot \frac{e^{-\alpha T} - 1 + \alpha T}{(\alpha T)^2}] \quad (\text{II.6.11})$$

Völliger Analogie zu diesem Rechnungsgang läßt sich ebenfalls die Bestimmungsgleichung für Experimente mit nur einem Detektor aufstellen. Diese Herleitung ist in [21] angegeben und liefert:

$$\frac{\overline{n^2}(T)}{T^2} = WF \left[\frac{1}{T} + WF + \frac{W \chi_2 k^2}{\alpha T^2} \cdot \frac{e^{-\alpha T} - 1 + \alpha T}{(\alpha T)^2} \right]. \quad (\text{II.6.12})$$

Unter Verwendung der Beziehungen (II.6.6) und (II.3.2c) - Definitionsgleichung für α - läßt sich der Ausdruck (II.6.12) zur besseren Diskussion wie folgt umformen:

$$\frac{\overline{n^2}(T) - \bar{n}^2(T)}{\bar{n}(T)} = 1 + \frac{W \chi_2 k^2}{[1-k(1-\beta)]^2} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right]. \quad (\text{II.6.13})$$

Für den Grenzfall $\alpha T \rightarrow \infty$ ergibt sich hieraus:

$$\left[\frac{\overline{n^2} - \bar{n}^2}{\bar{n}} \right]_{\infty} = 1 + \frac{W \chi_2 k^2}{[1-k(1-\beta)]^2}. \quad (\text{II.6.14})$$

Auf der linken Seite der Gleichung (II.6.13) steht als Größe die Varianz $(\overline{n^2} - \bar{n}^2)$, dividiert durch den Erwartungswert \bar{n} , die auch als reduzierte Varianz bezeichnet wird. Die Varianz der POISSON-Verteilung ist nach (I.4.43) gleich \bar{n} , und folglich ist ihre reduzierte Varianz gleich eins. Die rechte Seite der Gleichung (II.6.13) gibt durch den zweiten Summanden infolgedessen direkt die Abweichung von der reduzierten Varianz der POISSON-Verteilung auf Grund der korrelierten Prozesse im Reaktor an. Der zweite, in Klammern stehende Faktor, beschreibt dabei die Abhängigkeit von der Abklingkonstanten α und der Zeitintervallbreite T . Für kleine Werte von αT , d.h. wenn α durch den Reaktor vorgegeben, bei kurzen Zeitintervallen, ist der Klammerausdruck sehr klein. Für größer werdende Werte von αT strebt er asymptotisch gegen 1. Dieses Verhalten gibt den physikalischen Sachverhalt wieder, daß bei Beobachtung sehr kurzer Zeitintervalle der Einfluß der korrelierten Ereignisse in den Reaktionsketten nur teilweise erfaßt wird, während bei längeren Zeitintervallen die Korrelationen innerhalb der Ketten voll zum Tragen kommen. Eine weitere Vergrößerung der Zeitintervalle bringt keinen wesentlichen Gewinn mehr, da dann die Korrelationen weitgehend abgeklungen sind. Der Faktor vor der Klammer enthält den Einfluß der Detektorempfindlichkeit W und der Multiplikationskonstanten K . Der Faktor ist umso größer, je näher der Reaktor dem kritischen Zustand ist und je höher die Detektorempfindlichkeit liegt. Dies ist physikalisch ebenfalls plausibel, da dadurch erstens der Zunahme von Verzweigungsprozessen bei stärkerer Kritikalität und zweitens der größeren Wahrscheinlichkeit, im Detektor korrelierte Ereignisse nachzuweisen, Rechnung getragen wird.

Durch die experimentelle Bestimmung der reduzierten Varianz in Abhängigkeit von der Intervalldauer T lassen sich die in der Gleichung (II.6.13) enthaltenen Reaktorparameter durch Vergleich der gemessenen und der gerechneten Kurven bestimmen. Auf die Durchführung derartiger Messungen wird noch weiter unten eingegangen.

Direkte Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die direkte Berechnung der Verteilung der Wahrscheinlichkeiten, in einem Zeitintervall der Länge T eine Anzahl von n Detektorregistrierungen zu finden, wurde von ZOLOTUKHIN und MOGILNER [18] versucht. Sie bedienten sich dabei der Technik der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen, um die Verteilungen zu berechnen. Die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen sind eng verwandt mit den im Abschnitt I.3 behandelten charakteristischen Funktionen und dienen im wesentlichen dem gleichen Ziel, nämlich einer möglichst einfachen Berechnung von Momenten und Einzelwahrscheinlichkeiten. Der Ausgangspunkt ist wieder ein stationäres unterkritisches Reaktorsystem mit Quelle.

Eingeführt wird die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $E(T,u)$ durch die Definitionsgleichung:

$$E(T,u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(T) u^n, \quad (\text{II.6.15})$$

wobei

T = Länge des Zeitintervalls,
u = Hilfsvariable.

Auf Grund der Definition und der Eigenschaften der erzeugenden Funktion lassen sich mit ihr die Wahrscheinlichkeiten und Momente der Verteilung berechnen. Ausgehend von der Gleichung (II.6.15) läßt sich zeigen, daß folgende Beziehungen gelten:

$$p_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n E(T,u)}{d u^n} \right|_{u=0}, \quad (\text{II.6.16})$$

$$\text{Varianz} = \left. \frac{d^2 E(T,u)}{d u^2} \right|_{u=1} + \left. \frac{dE(T,u)}{d u} \right|_{u=1} - \left[\left. \frac{dE(T,u)}{d u} \right|_{u=1} \right]^2. \quad (\text{II.6.17})$$

Unter Voraussetzung der Orts- und Energieunabhängigkeit, der Vernachlässigung relativ seltener Verzweigungsprozesse, unter Ausschluß der verzögerten Neutronen und unter der Annahme, daß nicht mehr als zwei korrelierte Prozesse aus einer Reaktionskette nachgewiesen werden, erhielten ZOLOTUKHIN und MOGILNER [18] für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion folgenden Ausdruck:

$$\ln E(T, u) = \bar{n}(T)(u-1) \left\{ \frac{1 - \varphi}{\hat{z}(u-1)} - \frac{2}{\alpha T \hat{z}(u-1)} \ln \left[1 + \frac{(\varphi - 1)^2}{4\varphi} (1 - e^{-\alpha T \varphi}) \right] \right\}, \quad (\text{II.6.18})$$

wobei

$$\varphi = \sqrt{1 - 2 \hat{z}(u-1)}, \quad (\text{II.6.19})$$

$$\hat{z} = \frac{W \chi_2 k^2}{[1 - k(1 - \beta)]^2}. \quad (\text{II.6.20})$$

Die anderen Größen waren bereits durch (II.3.1) eingeführt worden.

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten p_n lassen sich aus (II.6.18) unter Verwendung der Berechnungsvorschrift (II.6.16) prinzipiell bestimmen. Für größere Werte von n jedoch wird das Verfahren analytisch fast undurchführbar. Von ZOLOTUKHIN wurde nur $p_0(T)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß im betrachteten Zeitintervall keine Registrierung erfolgt, berechnet. Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus (II.6.16) und (II.6.18) nach Umformung zu:

$$p_0(T) = e^{-\bar{n}(T) \frac{2}{\varphi_0 + 1} \left\{ 1 + \frac{2}{(\varphi_0 - 1)\alpha T} \ln \left[1 + \frac{(\varphi_0 - 1)^2}{4\varphi_0} (1 - e^{-\alpha T \varphi_0}) \right] \right\}}, \quad (\text{II.6.21})$$

wobei

$$\varphi(\hat{z}, u=0) = \varphi_0 = \sqrt{1 + 2 \hat{z}}. \quad (\text{II.6.22})$$

Werden $p_0(T)$ und $\bar{n}(T)$ für verschieden lange Zeitintervalle gemessen, so lassen sich die Größen α und \hat{z} durch Anpassung bestimmen.

Wird wiederum der Grenzfall $\alpha T \rightarrow \infty$ betrachtet, so vereinfacht sich die erzeugende Funktion (II.6.18) wesentlich. Wird dieser Fall durch $E_\infty(u)$ gekennzeichnet, so folgt:

$$E_\infty(u) = e^{\frac{\bar{n}}{\hat{z}} (1 - \sqrt{1 - 2 \hat{z}(u-1)})}. \quad (\text{II.6.23})$$

Mit Hilfe der Beziehung (II.6.16) lassen sich für diesen Spezialfall die Wahrscheinlichkeiten wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 p_{1\infty} &= \left. \frac{dE(u)}{du} \right|_{u=0} = \frac{\bar{n}}{\sqrt{1+2\hat{z}}} e^{\frac{\bar{n}}{\hat{z}} (1 - \sqrt{1+2\hat{z}})} \\
 &= \frac{\bar{n}}{\sqrt{1+2\hat{z}}} p_{0\infty} ,
 \end{aligned}
 \tag{II.6.24}$$

$$\begin{aligned}
 p_{2\infty} &= \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 E(u)}{du^2} \right|_{u=0} = \frac{\bar{n}}{\sqrt{1+2\hat{z}}} \cdot \left. \frac{dE(u)}{du} \right|_{u=0} + \frac{\bar{n}}{\sqrt{1+2\hat{z}}} \cdot \frac{\hat{z}}{1+2\hat{z}} E_{\infty}(u=0) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{n}}{\sqrt{1+2\hat{z}}} [p_{1\infty} + \frac{\hat{z}}{1+2\hat{z}} p_{0\infty}] .
 \end{aligned}
 \tag{II.6.25}$$

Durch fortlaufende Differentiation lassen sich ebenfalls die Wahrscheinlichkeiten für höhere Werte von n gewinnen, woraus folgende Rekursionsformel aufgestellt werden kann:

$$p_{n\infty} = p_{m+1} = \frac{\bar{n}}{(1+m)\sqrt{1+2\hat{z}}} \sum_{j=0}^m p_{m-j} \frac{(2j-1)!!}{j!} \left[\frac{\hat{z}}{1+2\hat{z}} \right]^j .
 \tag{II.6.26}$$

Eine Möglichkeit zu prüfen, ob die von ZOLOTUKHIN und MOGILNER aufgestellte erzeugende Funktion (II.6.18) Ergebnisse liefert, die mit der Theorie nach [21] übereinstimmen, ist durch Vergleich der berechneten Ausdrücke für die Varianz gegeben. Aus der erzeugenden Funktion (II.6.18) und der Beziehung (II.6.17) folgt für die reduzierte Varianz:

$$\frac{\overline{n^2}(T) - \bar{n}^2(T)}{\bar{n}(T)} = 1 + \frac{W \chi_2 k^2}{[1-k(1+\beta)]^2} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right]
 \tag{II.6.27}$$

in Übereinstimmung mit der Beziehung (II.6.13). Entsprechend folgt für den Grenzfall $\alpha T \rightarrow \infty$ aus (II.6.23) und durch Bildung der Ableitungen (II.6.24) und (II.6.25) an der Stelle $u = 1$ mit Hilfe der Rechenvorschrift (II.6.17) sofort

$$\left[\frac{\overline{n^2} - \bar{n}^2}{\bar{n}} \right]_{\infty} = 1 + \frac{W \chi_2 k^2}{[1-k(1-\beta)]^2}
 \tag{II.6.28}$$

in Übereinstimmung mit (II.6.14). Die beiden theoretischen Methoden liefern unter den gemachten Voraussetzungen somit die gleichen Resultate.

Experimentelle Meßanordnungen

Zur Aufnahme experimenteller Daten, die zur Gewinnung reaktorphysikalischer Parameter aus der Analyse der Wahrscheinlichkeitsverteilung notwendig sind, lassen sich verschiedene Verfahren verwenden. Das erste Verfahren geht direkt von der Beziehung (II.6.13) aus. Für jedes einzelne Zeitintervall wird die Anzahl n der registrierten Ereignisse bestimmt und daraus die Varianz berechnet. Eine experimentelle Anordnung dazu wurde von ALBRECHT [29] erstellt und ist in Abb.II.6.1 schematisch gezeigt.

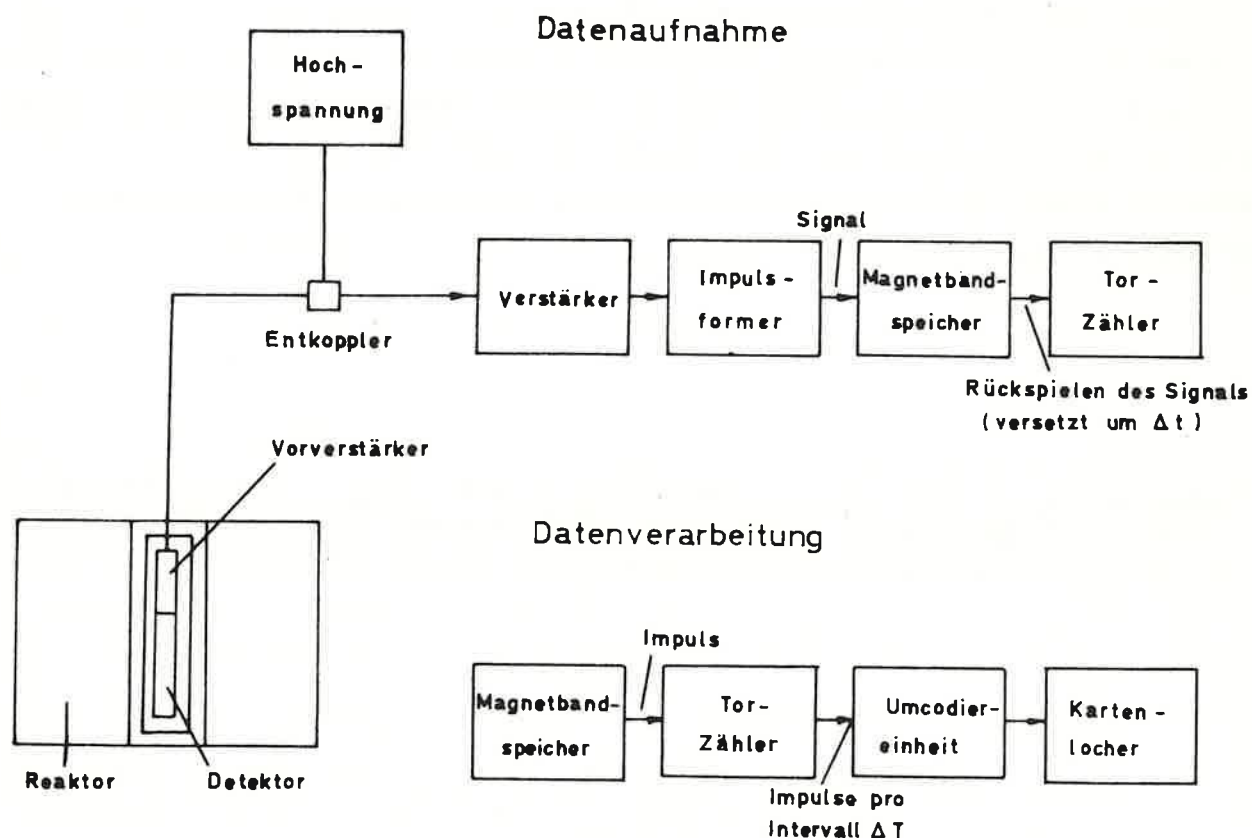


Abb.II.6.1 Meßanordnung zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung nach ALBRECHT [29]

Verwendet wird ein Zähler, der ein Eingangstor besitzt, das während der Zeitintervalldauer T geöffnet ist. Jedes Intervall wird einzeln ausgezählt und die Anzahl der Ereignisse n in diesem Intervall über eine Umcodierstufe auf eine Lochkarte gestanzt. Aus diesen Daten wird die reduzierte Varianz als Funktion der Intervalldauer T berechnet. Der Vorteil des Verfahrens besteht in seinem relativ einfachen Aufbau. Die wesentlichen Nachteile sind:

(a) Beschränkung auf eine niedrige Anzahl von Ereignissen pro Zeitintervall-
dauer T (600 Ereignisse bei [29]), wodurch ein großer statistischer Fehler
entsteht. Der Grund zur Beschränkung liegt in der Menge der anfallenden Loch-
karten. (b) Lange Meßzeiten auf Grund der Pausen, die durch die Ausgabe der
Information nach jedem einzelnen Intervall bedingt sind. (c) Unrationelle
Auswertung in der Rechenmaschine.

Das zweite Verfahren wurde von ZOLOTUKHIN und MOGILNER [15-17] entwickelt und
dient der experimentellen Bestimmung von p_0 , um durch Anwendung der Gleichung
(II.6.21) die reaktorphysikalischen Parameter zu gewinnen. Da bei diesem Ver-
fahren nur die beiden Größen p_0 und \bar{n} als Funktion von T bestimmt werden, zeich-
net es sich durch ein einfaches Prinzip aus, da eigentlich nur gemessen werden
muß, ob im betrachteten Intervall die Ereigniszahl größer als Null ist. Dies
wird mit einer FLIP-FLOP Schaltung erreicht, die in Abb.II.6.2 schematisch
dargestellt ist.

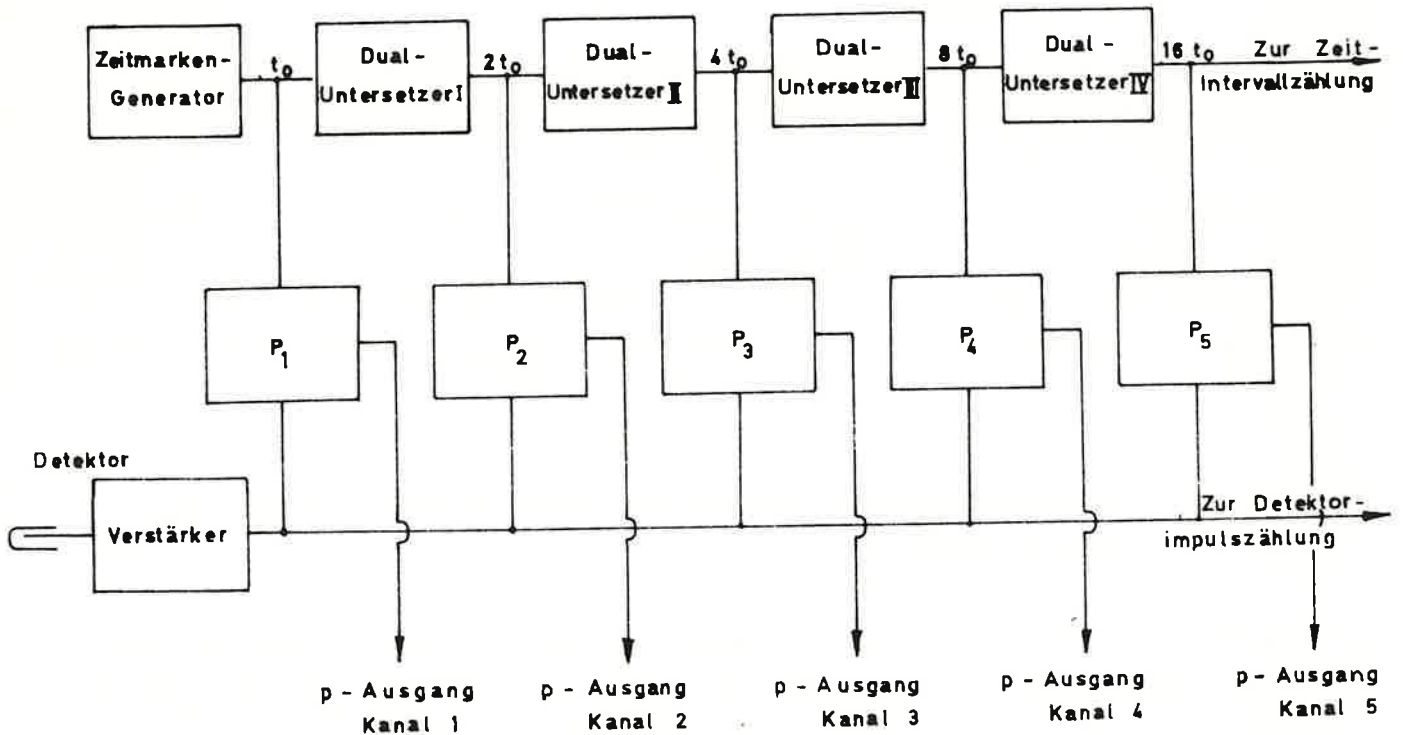


Abb.II.6.2 Meßanordnung zur Bestimmung von p_0 nach [15-17]

Verwendet werden fünf identische Elemente. Ein Zeitmarkengenerator liefert Impulse definierten zeitlichen Abstands, die noch untersetzt werden, um verschiedene Intervalllängen zu gewinnen. Das sogenannte "p-Element" besteht aus einem Flip-Flop, das von dem Impuls des Zeitmarkengenerators in die stabile Stellung I gebracht wird. Kommt nun vom Detektor während des Zeitintervalls ein oder mehrere Impulse, so bringt der erste ankommende Detektorimpuls das Element in die stabile Stellung II, und dort bleibt es, bis der nächste Zeitimpuls kommt. Dieser kippt es zurück in die Stellung I, und dabei wird ein Impuls an einen Zähler gegeben, der besagt, daß mindestens ein Ereignis während des Intervalls registriert wurde. Infolgedessen besteht die eigentliche Meßgröße aus der Summation über alle Wahrscheinlichkeiten p_1 bis p_∞ , d.h. sie ist gegeben durch $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$. Da aber andererseits die grundsätzliche Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad (\text{II.6.29})$$

erfüllt sein muß, folgt zur Bestimmung von p_0 :

$$p_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad (\text{II.6.30})$$

Diese Beziehung läßt die wesentlichen Nachteile des Verfahrens deutlich erkennen. Aus der Bestimmungsgleichung (II.6.21) für p_0 folgt, daß es bei wachsendem $\bar{n}(T)$ exponentiell abnimmt. Werden alle anderen Größen konstant gehalten, so nimmt $\bar{n}(T)$ linear mit der Zeitintervalldauer T zu. Dieses Verhalten von p_0 ist in Abb.II.6.3 anhand anderweitig gewonnener Meßergebnisse quantitativ gezeigt.

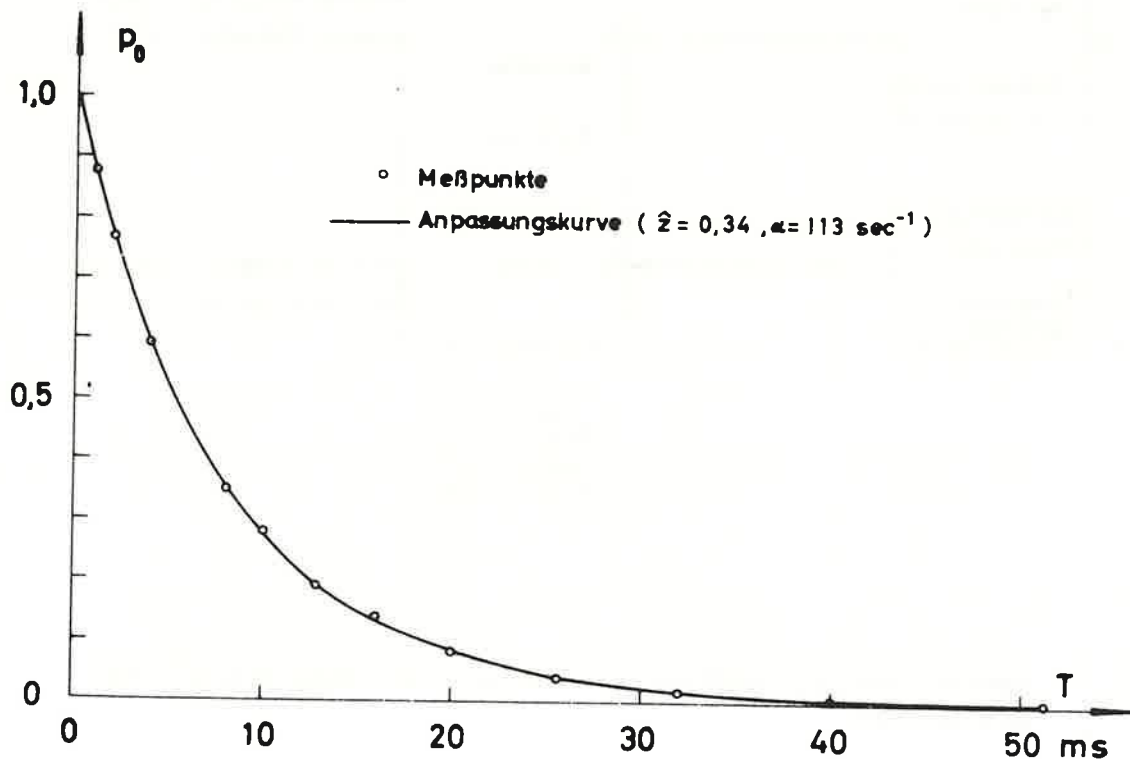


Abb.II.6.3 Wahrscheinlichkeit p_0 als Funktion der Intervalldauer T

Die Wahrscheinlichkeit $p_0(T)$ ergibt sich infolgedessen aus (II.6.30) in den meisten Fällen als Differenz zweier ungefähr gleich großer Zahlen, wodurch der Fehler groß wird. Erschwerend kommt hinzu, daß die eigentlichen Meßgrößen nur in der Differenz zwischen dem gemessenen p_0 -Wert und dem p_0 der entsprechenden POISSON-Verteilung enthalten sind und sich dadurch Fehler in der p_0 -Bestimmung stark auf die Genauigkeit der Reaktorgrößen auswirken. Zusammengefaßt ergeben sich bei diesem Verfahren folgende Nachteile: (a) Beschränkung auf einen kleinen Zeitintervallbereich, (b) große Fehlergrenzen.

Eine andere Methode, entwickelt mit dem Ziel, die sich bietenden Möglichkeiten voll zu nutzen und die aufgezählten Nachteile auszuschalten, besteht darin, für ein vorgegebenes Zeitintervall der Länge T den gesamten interessierenden Bereich der Wahrscheinlichkeitsverteilung schnell und genau, d.h. unter Verwendung großer Zählraten und hoher Ereigniszahlen, zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird ein Wahrscheinlichkeitsverteilungs-Analysator verwendet, dessen Wirkungsweise aus dem Blockschaltbild in Abb.II.6.4 hervorgeht [30] .

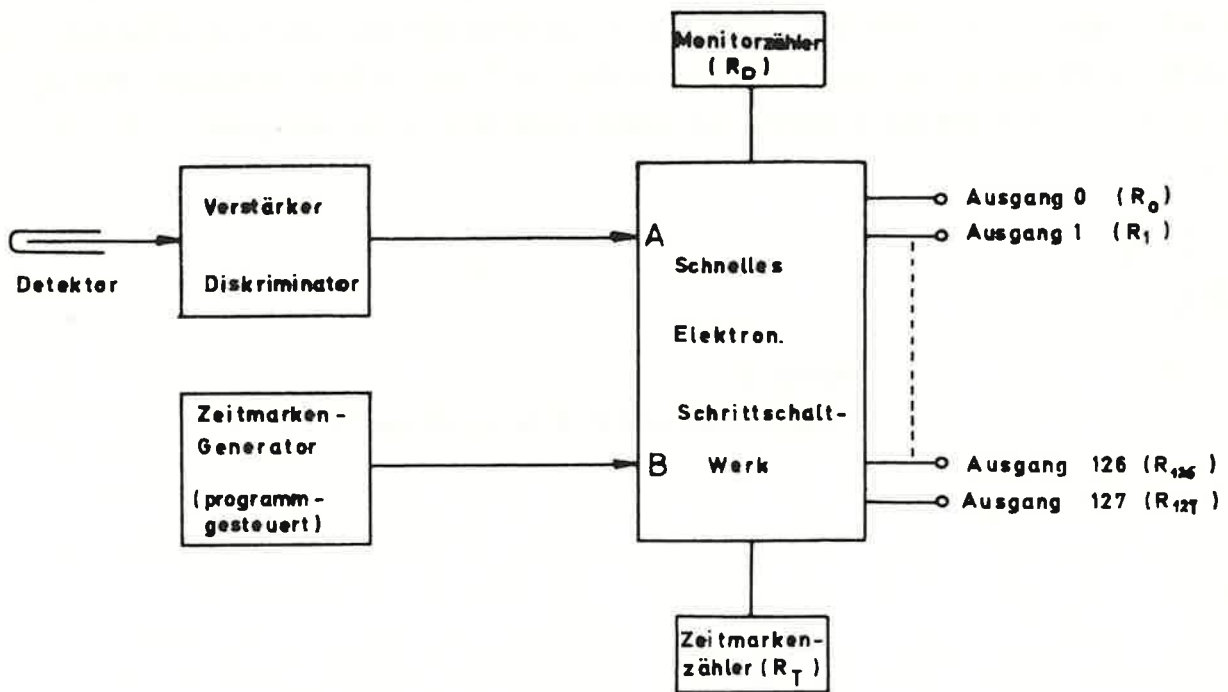


Abb.II.6.4 Schematische Darstellung des Wahrscheinlichkeitsverteilungs-analysators

Der Analysator erlaubt eine direkte Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $p_n(T)$, wobei n sich von 0 bis 127 erstrecken kann. Das Kernstück ist ein schnelles elektronisches Schrittschaltwerk mit 127 Schaltstellungen, das von jedem, den Eingang A passierenden, Impuls um einen Schritt weitergeschaltet wird. Auf den Eingang A werden die in zufälliger Folge ankommenden Detektorimpulse gegeben. In den Eingang B gelangen in periodischer Folge Impulse aus einem Zeitmarkengenerator, deren zeitlicher Abstand die Länge des Zeitintervalls T bestimmt. Je nach Stellung des elektronischen Schrittschaltwerks wird am betreffenden Ausgang ein Tor geöffnet, durch das der Zeitimpuls, der das Ende des Intervalls angibt, in einen angeschlossenen Zähler gelangt. Danach wird das Schrittschaltwerk zurückgesetzt und der Analysator für das nächste Zeitintervall geöffnet. Wenn also z.B. während des Intervalls 3 Detektorimpulse am Eingang A ankommen, wird dadurch das Tor am Ausgang 3 geöffnet, so daß der Impuls des Zeitmarkengenerators ein Signal in den angeschlossenen Zähler Nr.3 liefert. Das bedeutet, daß 3 Impulse während des Intervalls registriert wurden. Zusätzlich werden bei der Messung alle Detektorimpulse und Ausgangssignale des Zeitmarkengenerators gezählt. Die Bestimmung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $p_n(T)$ ergibt sich folgendermaßen: Ist

$$\begin{aligned} R_n &= \text{Anzahl der Registrierungen im Zähler } n \text{ (} n = 0 \text{ bis } 127\text{)}, \\ R_T &= \text{Anzahl der Ausgangssignale des Zeitmarkengenerators,} \end{aligned} \quad (\text{II.6.31})$$

so folgt:

$$p_n = \frac{R_n}{R_T}, \quad (\text{II.6.32})$$

wobei speziell

$$p_0 = \frac{R_0}{R_T}. \quad (\text{II.6.33})$$

Die Varianz läßt sich mit bekannten $p_n(T)$ ebenfalls bestimmen. Verwendung finden dabei die nach (I.3.18) bzw. (I.3.20) bekannten Beziehungen

$$\bar{n}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(T) \cdot n, \quad (\text{II.6.34})$$

$$\overline{n^2}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(T) \cdot n^2, \quad (\text{II.6.35})$$

woraus für die Varianz folgt:

$$\overline{n^2}(T) - \bar{n}^2(T) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(T) \cdot n^2 - \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(T) \cdot n \right]^2. \quad (\text{II.6.36})$$

Die Beziehungen (II.6.33) und (II.6.36) sind an dieser Stelle angeführt, um zu zeigen, daß die beiden zuerst behandelten Verfahren in dieser Methode eingeschlossen sind.

Der gesamte Analysator ist auf eine maximale Zählfrequenz von 20 MHz ausgelegt, um hohe Zählraten, wie sie in Plutonium enthaltenden schnellen Nullenergieanordnungen auftreten, verarbeiten zu können. Zu bemerken ist dabei, daß die angeschlossenen Zähler diese Frequenzanforderung nur in den ersten Kanälen erfüllen müssen, da durch die Untersetzung im Schrittschaltwerk die Zählfrequenz der höheren Kanalnummern automatisch herabgesetzt wird.

Da während eines Versuchs die Zeitintervalldauer T öfters zu verändern ist, wird ein programmgesteuerter Zeitmarkengenerator verwendet, mit dem die Anzahl, Folge und Zeitdauer der Intervalle vorgegeben werden kann und während des Versuchs automatisch abläuft. Die Intervalldauer T ist dabei in 51 diskreten Schritten zwischen $10\text{ }\mu\text{s}$ und 640 ms wählbar. Dieser Zeitumfang ist notwendig, um den Anwendungsbereich von thermischen bis zu schnellen Reaktor-anordnungen zu überstreichen, da die Intervalldauer immer in der Größenordnung $T \approx \alpha^{-1}$ liegen muß. Das Programm wird über einen Lochstreifenleser eingegeben, von dessen Kontakten eine Diodenmatrix gesteuert wird, die die gewünschte Zeitintervalldauer aufruft. Die Weiterschaltung der Programmpunkte erfolgt entsprechend den gewählten Zeiten im Versuch durch einen Meß- und Pausenzeit-Timer (vgl. Abb.II.6.5).

Die Betriebsweise des Analysators während eines Versuchs läuft folgendermaßen ab: Entsprechend der Reaktor-anordnung und dem Reaktivitätszustand wird das Programm für die Reihenfolge, Werte und Anzahl der Zeitintervall-dauern T aufgestellt, wobei gewöhnlicherweise mehrere Messungen mit gleicher Intervall-dauer wiederholt werden, um Langzeiteffekte erkennen bzw. ausschließen zu können. Die Meßzeit pro Intervall-dauer T wird je nach Größe der Zählrate unter dem Gesichtspunkt einer ausreichenden statistischen Genauigkeit festgelegt. Für jede Intervall-dauer T (und ihre Wiederholungen) wird die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgenommen, nach Beendigung ausgegeben und die Zählerinhalte gelöscht. Die Pausenzeit zwischen zwei Messungen hängt nur von der Datenausgabegeschwindigkeit ab und beträgt im vorliegenden Fall 30 sec . Nach Ablauf des Programms wird der Analysator gestoppt.

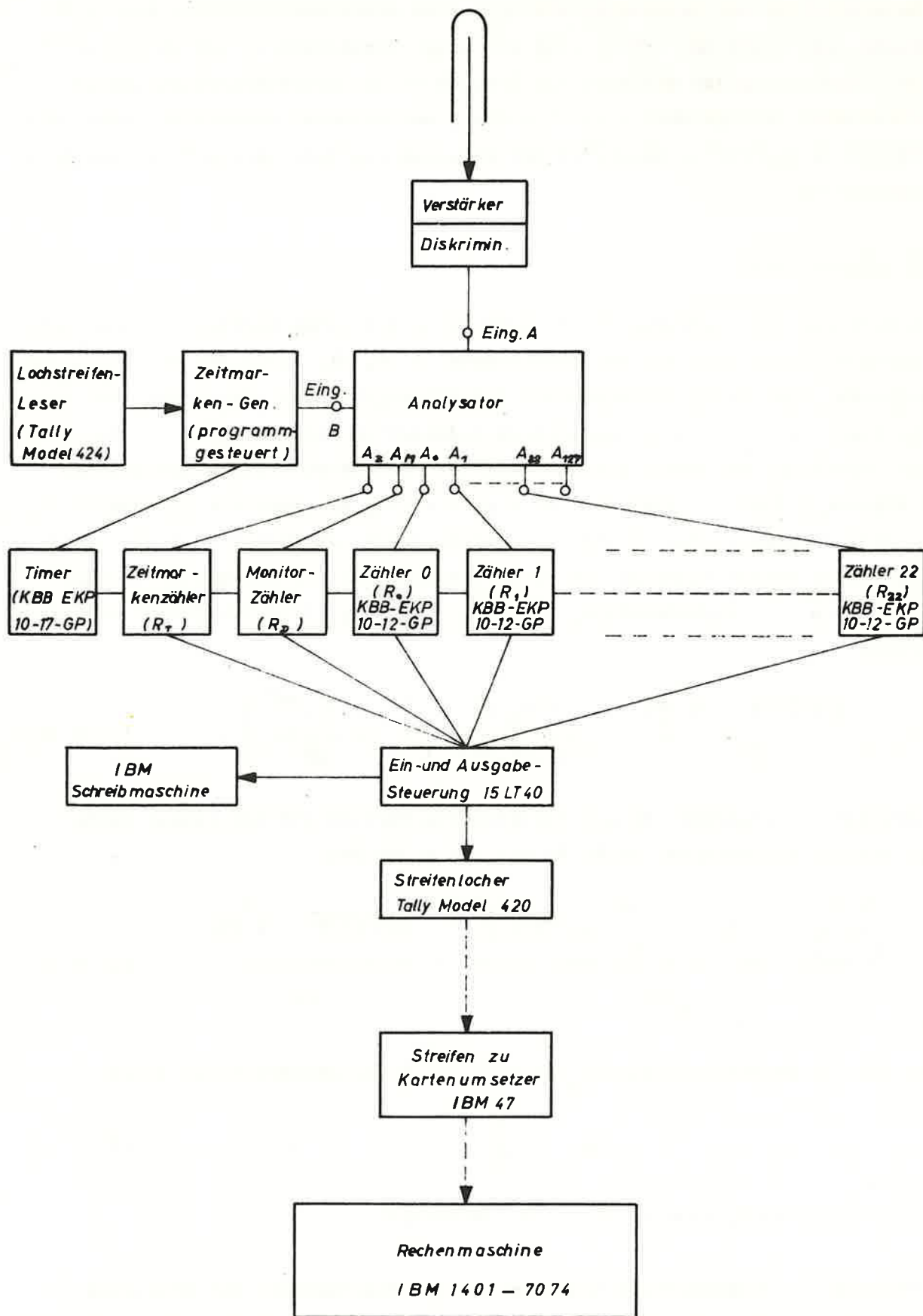


Abb.II.6.5 Darstellung der Datensammlung und Datenverarbeitung

Die Datensammlung und Datenverarbeitung ist im Blockschaltbild der Abb.II.6.5 angegeben. Die einzelnen Zähler sind mit einer Steuereinheit verbunden, durch die die Umcodierung der Meßdaten zur Ausgabe in der Schreibmaschine und im Streifenlocher durchgeführt wird. Die vom Streifenlocher erstellten Lochstreifen werden in Lochkarten umgesetzt und gelangen von dort in die Rechenmaschine zur Auswertung.

Auswertungsmethoden

Zur Auswertung der experimentellen Daten mit Hilfe eines Rechenprogramms nach der Varianzmethode wird von den Gleichungen (II.6.13), (II.6.34) und (II.6.35) ausgegangen. Aus der Gleichungsform (II.6.13) ergäbe sich die eigentliche Bestimmungsgröße, wenn von der gemessenen reduzierten Varianz auf der linken Seite der Gleichung, die reduzierte Varianz der POISSON-Verteilung vom Betrage eins abgezogen würde. Dieser Wert eins gilt streng genommen nur für unendlich große Ereigniszahlen. Bei endlichen Ereigniszahlen ist dieser Wert mit einem statistischen Fehler behaftet. Um diese Tatsache bei der Auswertung in angemessener Form zu berücksichtigen, wird die Gleichung (II.6.13) folgendermaßen umgeformt:

$$\frac{\overline{n(n-1)}(T) - \bar{n}^2(T)}{\bar{n}(T)} = \frac{W \chi_2^2 k^2}{[1-k(1-\beta)]^2} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right]. \quad (\text{II.6.37})$$

Die Bestimmungsgleichung für die modifizierte Varianz auf der linken Seite folgt aus den Beziehungen (II.6.34) und (II.6.35) zu:

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} p_n(T) \cdot n(n-1) - \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(T) \cdot n \right]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(T) \cdot n} = \frac{\overline{n(n-1)}(T) - \bar{n}^2(T)}{\bar{n}(T)}, \quad (\text{II.6.38})$$

wobei die Wahrscheinlichkeiten $p_n(T)$ nach (II.6.32) gegeben waren durch:

$$p_n = \frac{R_n}{R_T}. \quad (\text{II.6.32})$$

Die Größen R_n und R_T sind in (II.6.31) definiert.

Zur Prüfung der einwandfreien Arbeitsweise des Analysators, der Datenausgabevorrichtung und der Auswertungsmethode werden folgende Kontrollgrößen gebildet:

- (1) Berechnung der mittleren Anzahl von Registrierungen im Intervall der Länge T, $\bar{n}(T)$, nach der Beziehung:

$$\bar{n} = \frac{R_D}{R_T}, \quad (\text{II.6.39})$$

wobei

R_D = Anzahl der Registrierungen im Monitorzähler.

Der daraus resultierende Wert für \bar{n} muß gleich dem sein, der sich durch Anwendung der Beziehung (II.6.34) ergibt. Infolgedessen muß sein:

$$\frac{R_D}{R_T} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(T) \cdot n. \quad (\text{II.6.40})$$

- (2) Die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{R_T} = 1 \quad (\text{II.6.41})$$

muß erfüllt sein. Anzumerken ist hier, daß die Summierung jeweils bei Werten von n abgebrochen wird, bei denen die p_n -Werte vernachlässigbar klein sind.

- (3) Auf Grund der Arbeitsweise des Analysators müssen ebenfalls die beiden Beziehungen

$$R_D = \sum_{n=1}^{\infty} n R_n \quad (\text{II.6.42})$$

und

$$R_T = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \quad (\text{II.6.43})$$

gültig sein. Bei Erfüllung der Kontrollbeziehungen (II.6.40) bis (II.6.43) ist die fehlerfreie Arbeitsweise der Anordnung gewährleistet.

Die modifizierte Varianz wird für jede Intervalldauer T nach (II.6.38) berechnet und ausgegeben. Die daraus folgende Kurve der modifizierten Varianz als Funktion von T ist für ein typisches Beispiel in Abb.II.6.6 dargestellt.

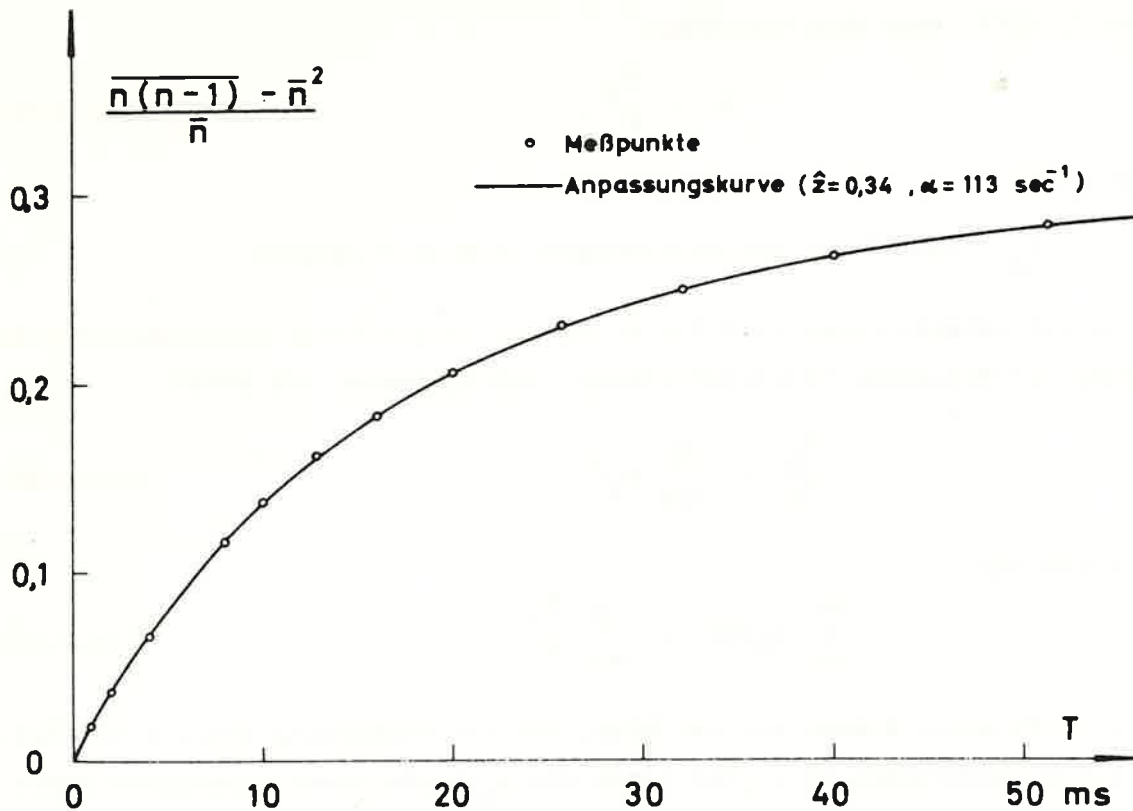


Abb.II.6.6 Abweichung von der reduzierten Varianz der POISSON-Verteilung als Funktion der Intervalldauer T

Der nun noch durchzuführende Auswertungsschritt ist die Bestimmung der gesuchten Reaktorparameter durch Anpassung der Beziehung (II.6.37) an die Kurven. Die Beziehung (II.6.37) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\overline{n(n-1)}(T) - \bar{n}^2(T)}{\bar{n}(T)} = \hat{z} \cdot B(\alpha, T), \quad (\text{II.6.44})$$

wobei

$$B(\alpha, T) = 1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T}, \quad (\text{II.6.45})$$

$$\hat{z}(W, k) = \chi_2 W \frac{k^2}{[1 - k(1 - \beta)]^2}. \quad (\text{II.6.46})$$

Am Anfang wird für jeden Meßpunkt (gekennzeichnet durch Index k) mit einem geschätzten Wert für α nach (II.6.44) und (II.6.45) ein Wert \hat{z}_k berechnet. Aus diesen Einzelwerten \hat{z}_k wird der Mittelwert \hat{z}_m gebildet und nach der Vorschrift

$$\left\langle \frac{(\hat{z}_k - \hat{z}_m)^2}{\hat{z}_m^2} \right\rangle = \text{Minimum} \quad (\text{II.6.47})$$

unter Adjustierung von α der Wert für \hat{z}_m mit der kleinsten relativen Abweichung σ bestimmt, wobei

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\hat{z}_k - \hat{z}_m)^2}{\hat{z}_m^2}} . \quad (\text{II.6.48})$$

Da die Werte der bei der Messung verwendeten Intervallauern T eingegeben werden, folgt die Größe α_{MESS} ebenfalls direkt aus der optimalen Anpassung.

Ein spezieller Zusatz besteht in der Einführung von Gewichten g_k , die nach Durchlaufen der ersten Stufe an den Meßpunkten angebracht werden. Sie sind definiert durch die Gleichung

$$g_k \approx \exp - \left[\frac{\hat{z}_k - \hat{z}_m}{\hat{z}_m \tau} \right]^2 \quad (\text{II.6.49})$$

mit

τ = Vorwählbare Toleranzgrenze.

Hierdurch wird erreicht, daß ein stark von der erhaltenen Kurve abweichender Meßpunkt mit einem objektiven Gewichtungsfaktor g_k versehen wird, der umso kleiner ist, je weiter der Punkt von der Kurve entfernt liegt und je enger die Toleranz gewählt wird. Mit den so gewichteten Meßpunkten wird ein zweiter Rechnungsgang durchgeführt, der schließlich zu entsprechend korrigierten Werten von \hat{z} und α_{MESS} , sowie zu einer ausgeglichenen Meßkurve führt.

Die auf die beschriebene Art gewonnenen Werte für die Abklingkonstante des prompten Neutronenflusses, α , können auf die gleiche Weise wie beim Rossi- α -Experiment über einer reaktivitätsproportionalen Größe aufgetragen werden, um den Wert für einen kritischen Reaktor, α_c , zu erhalten, wenn eine direkte Messung im verzögert kritischen Zustand nicht möglich ist. Bei bekanntem α_c kann α entsprechend der Abb.II.5.3 direkt über der Reaktivität aufgetragen werden. Diese beiden Möglichkeiten sind in Abb.II.6.7 dargestellt.

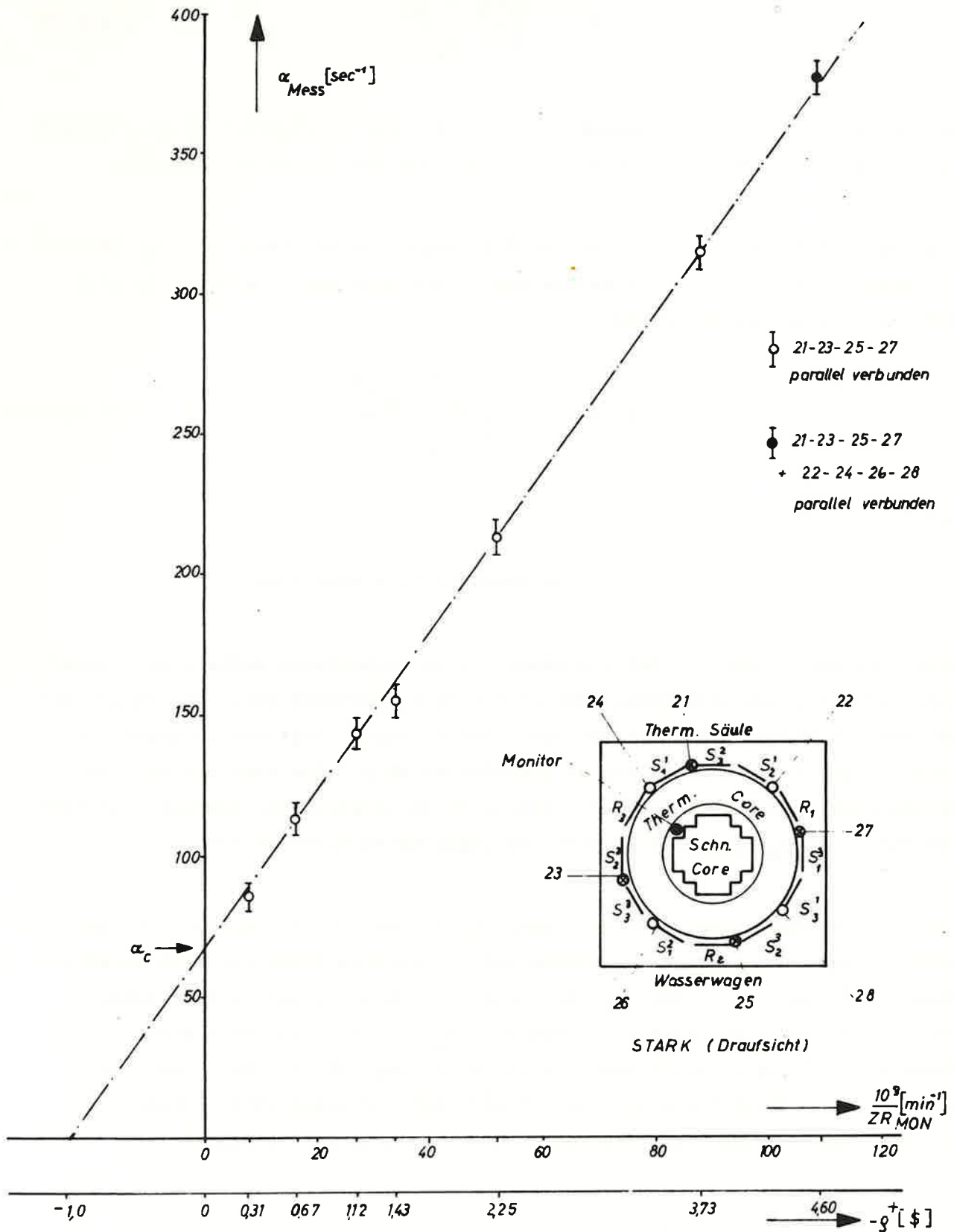


Abb.II.6.7 α_{MESS} als Funktion der Reaktivität für die angegebenen Detektorkonfigurationen

Es handelt sich um typische Messungen, die am Schnell-Thermischen Argonaut-Reaktor Karlsruhe (STARK) durchgeführt worden sind. Ein Querschnitt durch den Reaktor und die Positionen der Detektoren sind auf der Abb.II.6.7 mitangegeben. Als reaktivitätsproportionale Größe wurde die reziproke Zählrate eines bei allen Messungen eingeschalteten Monitors gewählt. Nach Extrapolation der Kurve und Bestimmung von α_c wurde die Reaktivität ρ^+ nach der Beziehung (II.5.21) berechnet und als zweite Skala der Abszisse miteingezeichnet. Erwähnt sei an dieser Stelle, daß durch sorgfältige Detektorpositionierung und Parallelschaltung dafür Sorge getragen werden muß, daß das gemessene α eindeutig der Grundwelle der Reaktorordnung zugeordnet werden kann, da anderenfalls die Interpretation der Ergebnisse im Rahmen des Punkt-Reaktor-Modells nicht zulässig ist.

Das Verhältnis Q von korrelierten zu nichtkorrelierten Detektorereignissen ergibt sich in diesem Falle aus der Gleichung (II.6.27). Der unkorrelierte Beitrag zum Signal ist der erste Term auf der rechten Seite von (II.6.27),

$$U = 1, \quad (\text{II.6.50})$$

und der korrelierte Beitrag der zweite Term:

$$K = \frac{W \chi_2 k^2}{[1-k(1-\beta)]^2} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right]. \quad (\text{II.6.51})$$

Der maximale Wert von K folgt für $\alpha T \rightarrow \infty$ zu:

$$K_{\max} = \frac{W \chi_2 k^2}{[1-k(1-\beta)]^2}. \quad (\text{II.6.52})$$

Das maximale Verhältnis Q_{\max} ist hier identisch mit K_{\max} und darüber hinaus mit der durch (II.6.20) eingeführten Größe \hat{z} , deren Bestimmungsmöglichkeit aus der Meßkurve in Abb.II.6.6 miteingezeichnet ist. Somit folgt:

$$Q_{\max} = \hat{z} = \frac{W \chi_2 k^2}{[1-k(1-\beta)]^2} = \frac{W \chi_2 k^2}{\alpha_c^2 l^2} = \frac{W \chi_2 k^2}{\beta^2} \frac{\alpha_c^2}{\alpha^2}. \quad (\text{II.6.53})$$

Das Verhältnis Q_{\max} bzw. auch Q sind in diesem Falle unabhängig von F im Gegensatz zur Rossi- α -Methode. Für einen kritischen Reaktor ($k=1$, $\alpha=\alpha_c=\beta/l$) geht (II.6.53) über in:

$$Q_{\max o} = \frac{\chi_2}{\beta^2} W. \quad (\text{II.6.54})$$

Bei einem experimentell bestimmten Reaktivitätszustand und bekanntem χ_2 und β läßt sich die Detektorempfindlichkeit sowohl aus (II.6.53) als auch (II.6.54) bestimmen. Da aber die mittlere Detektorzählrate entsprechend (II.6.6) bzw. (II.6.7) gegeben ist durch

$$\bar{r} = W F, \quad (\text{II.6.55})$$

folgt daraus die Bestimmungsmöglichkeit für die Spaltrate F zu

$$F = \frac{\chi_2}{\beta^2} \cdot \frac{\bar{r}}{Q_{\max o}} \quad (\text{II.6.56})$$

oder, in entsprechender Weise, mit Q_{\max} . Durch Anwendung des Umrechnungsfaktors (II.5.28) kann aus der Spaltrate F die Reaktorleistung in Watt erhalten werden. Mit bekannter Spaltrate F läßt sich nach (II.5.22) auch die Neutronenquellstärke S_0 gewinnen.

Zum Abschluß der Behandlung der Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen seien noch einige Gesichtspunkte zur Bestimmung der Reaktorparameter aus Einzelwahrscheinlichkeiten oder aus der gesamten Wahrscheinlichkeitsverteilung angeführt. Die experimentelle Gewinnung der Wahrscheinlichkeit p_0 , daß in dem betrachteten Zeitintervall keine Registrierung erfolgte, geschieht mit dem Analysator der Abb.II.6.4 durch Anwendung der Beziehung (II.6.33). Auf diese Weise erhaltene Ergebnisse sind in der Abb.II.6.3 dargestellt. Sie stammen aus der gleichen Messung, aus der die Kurve in Abb.II.6.6 gewonnen wurde. Die Auswertung nach der Gleichung (II.6.21) für p_0 lieferte die gleichen Werte für α und \hat{z} , wie die Auswertung nach der Momentenmethode. Zur Veranschaulichung sind in Abb.II.6.8 für die gleiche Messung einige bei verschiedenen langen Zeitintervallen gemessene Verteilungen dargestellt. Zusätzlich sind zum Vergleich entsprechende, nach (II.6.1) berechnete POISSON-Verteilungen mit eingetragen, um die Abweichungen feststellen zu können. In der Histogrammdarstellung der Abb.II.6.8 treten die Abweichungen von der POISSON-Verteilung nicht so deutlich hervor wie bei der Varianz-Darstellung der Abb.II.6.6. Zu beachten ist allerdings, daß in diesem Fall der maximale Anteil Q_{\max} von korrelierten Detektorereignissen, der gemäß (II.6.53) durch \hat{z} gegeben ist, nur 34% beträgt und somit eine sehr starke Abweichung nicht zu erwarten ist.

Gemessene Wahrscheinlichkeitsverteilungen
für den Fall $\hat{z} = 0,34$, $\alpha = 112,6 \text{ sec}^{-1}$

und berechnete Poisson - Verteilungen

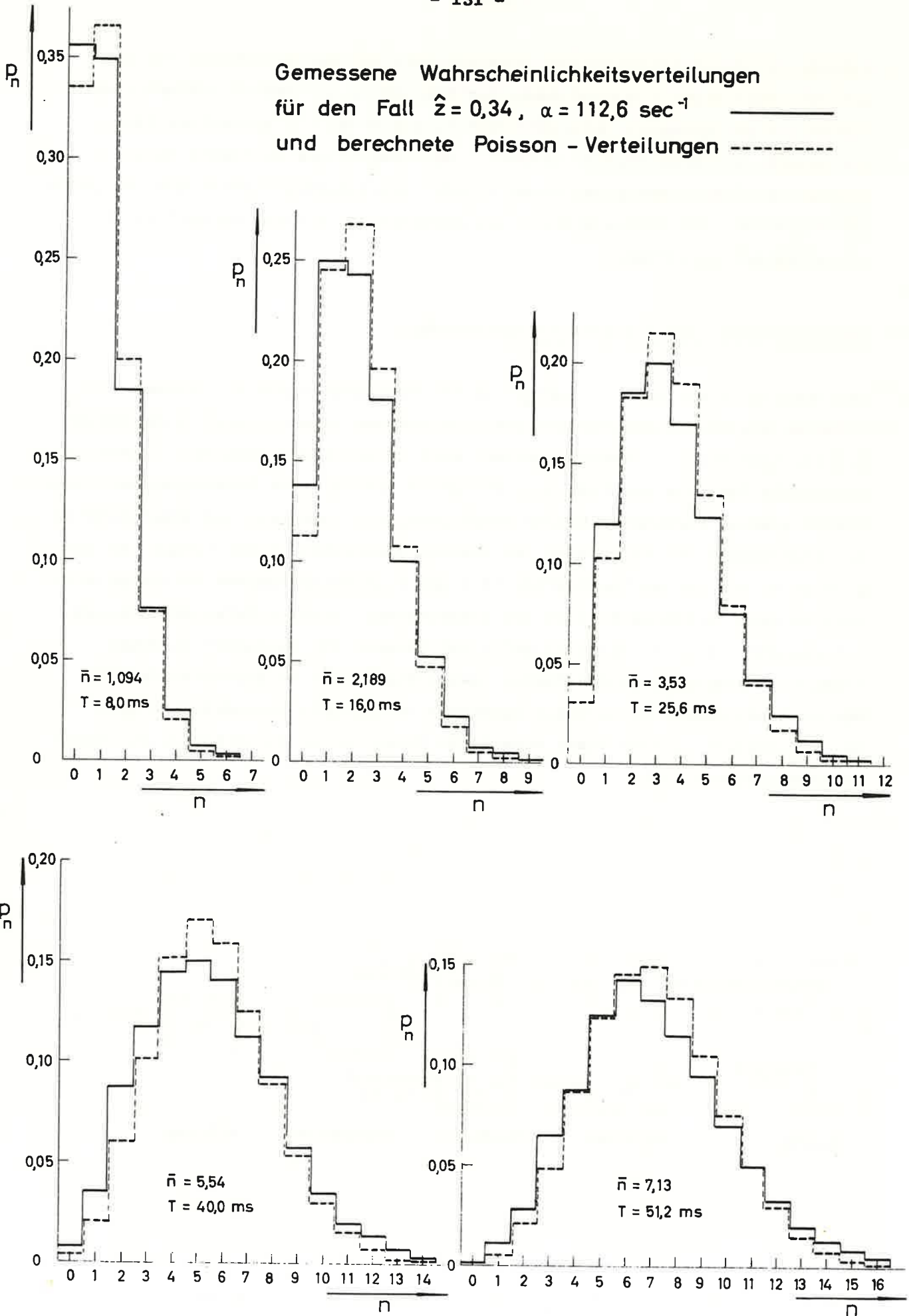


Abb. II.6.8

Infolge der Kompliziertheit und Schwierigkeit bei der Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten sind diese zur Bestimmung der Reaktorparameter nicht sonderlich gut geeignet. Eine Ausnahme bildet dabei die Auswertung nach p_0 , die jedoch, wie oben bereits erwähnt, zwei wesentliche Nachteile besitzt, nämlich (a) Beschränkung auf einen kleinen Zeitintervallbereich und (b) große Fehlergrenzen. Aus diesen Gründen ist generell die Auswertung nach der Momentenmethode vorzuziehen.

II.7 Frequenzanalyse von Ionisationskammerströmen

Das Prinzip dieser Methode besteht in der Frequenzanalyse von Strömen, die entweder aus Ionisationskammern oder aus anderen in den Reaktor eingebauten Detektoranordnungen stammen. Bestimmt wird speziell die spektrale Leistungsdichte als Funktion der Frequenz, aus deren Verlauf sich Reaktorparameter gewinnen lassen. Verwendung finden Bandfilter, mit denen aus dem interessierenden Frequenzbereich Intervalle zur Analyse ausgewählt werden können. Im Gegensatz zu den in den Abschnitten II.5 und II.6 beschriebenen Verfahren handelt es sich in diesem Fall um die Untersuchung stetiger Zufallsfunktionen, wie sie durch die Stromsignale geliefert werden. Die besondere Betonung liegt hier wiederum auf dem Zwei-Detektor-Experiment in Kreuzkorrelation, das sich bei dieser Methode als besonders vorteilhaft herausstellen wird. Der prinzipielle Aufbau eines derartigen Experiments ist in Abb.II.7.1 schematisch dargestellt.

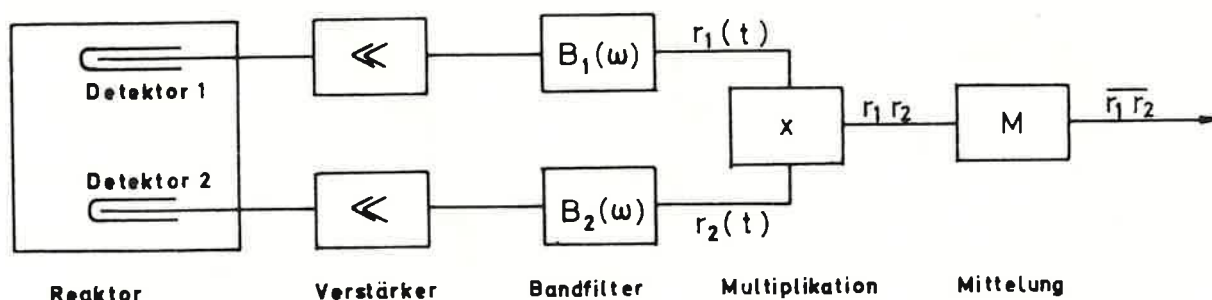


Abb.II.7.1 Schematische Anordnung für Zwei-Detektor-Experiment

Vorausgesetzt wird wiederum, daß nur Absorptionsdetektoren verwendet werden. Der Ausgangsstrom der Detektoren wird einem Breitband-Gleichspannungsverstärker zugeführt und gelangt verstärkt in ein Bandfilter, das die Frequenzcharakteristik $B(\omega)$ besitze. Also

$$B_n(\omega) = \text{Frequenzcharakteristik des Bandfilters im Kanal } n \text{ (} n=1,2 \text{)}, \quad (\text{II.7.1})$$

$$\omega = 2\pi f = \text{Kreisfrequenz [sec}^{-1}\text{]} .$$

Der mittlere Ausgangsstrom des Verstärkers im Kanal n ist gegeben durch

$$\overline{i}_n = W_n F q_n , \quad n = 1 \text{ und } 2 , \quad (\text{II.7.2})$$

wobei

$$q_n = \text{Mittlere Ladung pro nachgewiesenem Neutron in Kanal } n$$

und die Größen W_n und F in (II.3.1) definiert sind. ($W_n F$) ist die Rate von Neutronennachweisreaktionen im Detektor n . Die Netzwerkantwortfunktion für den Kanal n , $A_n(\omega)$, ist gegeben durch

$$A_n(\omega) = q_n B_n(\omega) . \quad (\text{II.7.3})$$

Den Ausgangspunkt zur Berechnung des zeitlich gemittelten Produkts der Ausgangssignale bildet die Gleichung (II.3.42), deren Herleitung und Voraussetzungen im Abschnitt II.3 behandelt wurden. Sie lautet:

$$\overline{r_1 r_2} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} + F \frac{W_1 W_2 k^2 \chi_2}{l^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} A_1(\omega) A_2(-\omega) |H(\omega)|^2 . \quad (\text{II.3.42})$$

Nach der Beziehung (II.3.45) berechnen sich die Mittelwerte der Einzelausgangssignale unter Berücksichtigung von (II.7.3) zu:

$$\overline{r}_n = q_n W_n F A_n(0) . \quad (\text{II.7.4})$$

Durch Einsetzen von (II.7.3) und (II.7.4) in (II.3.42) und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß zur Bestimmung der Amplitudenwerte nur der Realteil interessiert, folgt:

$$\overline{r_1 r_2} = q_1 q_2 F^2 W_1 W_2 B_1(0) B_2(0) + q_1 q_2 F \frac{W_1 W_2 \chi_2 k^2}{l^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} B_1(\omega') B_2(-\omega') |H(\omega')|^2 . \quad (\text{II.7.5})$$

Zur Untersuchung werden Bandfilter verwendet, deren Durchlaßbereich im interessierenden Frequenzbereich verschiebbar ist. Die spezielle Eigenschaft dieser Bandfilter ist, daß außerhalb des betrachteten Frequenzintervalls $\Delta\omega$ um eine Zentralfrequenz ω das ankommende Signal unterdrückt wird, so daß

$$B_1(\omega') B_2(-\omega') = 0 \quad (\text{II.7.6})$$

außerhalb des Frequenzintervalls $\Delta\omega$. Hieraus folgt weiterhin:

$$B_1(0) B_2(0) = 0. \quad (\text{II.7.7})$$

Ist die Auflösung des Filters $\frac{\omega}{\Delta\omega}$ so groß, daß sich $H(\omega)$ innerhalb des Frequenzbereichs $\Delta\omega$ nicht stark ändert, so läßt sich $|H(\omega)|^2$ im Ausdruck (II.7.5) vor das Integral ziehen, und es ergibt sich folgender Näherungsausdruck:

$$\text{Re} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} B_1(\omega') B_2(-\omega') |H(\omega')|^2 \approx \Gamma(\omega, \Delta\omega) |H(\omega)|^2, \quad (\text{II.7.8})$$

wobei

$$\Gamma(\omega, \Delta\omega) = \text{Re} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} B_1(\omega') B_2(-\omega'). \quad (\text{II.7.9})$$

Die Funktion $\Gamma(\omega, \Delta\omega)$ ist ein Parameter, der die Bandfiltereigenschaften ausdrückt. Falls das Bandfilternetzwerk zu kompliziert für eine direkte Berechnung ist, muß $\Gamma(\omega, \Delta\omega)$ für verschiedene Zentralfrequenzen ω und Bandbreiten $\Delta\omega$ experimentell bestimmt werden.

Aus Gleichung (II.7.5) folgt unter Berücksichtigung des Ausdrucks (II.7.7) und der Näherung (II.7.8) nach Division durch $\Gamma(\omega, \Delta\omega)$ die Beziehung:

$$\frac{\overline{r_1 r_2}(\omega, \Delta\omega)}{\Gamma(\omega, \Delta\omega)} = q_1 q_2 F \frac{w_1 w_2 \chi_2 k^2}{l^2} |H(\omega)|^2. \quad (\text{II.7.10})$$

Sollen die verzögerten Neutronen bei der Messung mitberücksichtigt werden, so ist für $H(\omega)$ die Beziehung (II.3.3) zu verwenden. Im folgenden seien die verzögerten Neutronen ausgeschlossen und der Gültigkeitsbereich der Gleichungen nur auf die prompten Neutronen beschränkt, so daß für $|H(\omega)|^2$ der Ausdruck (II.3.6) zur Anwendung kommen kann. Hiermit geht (II.7.10) über in:

$$\frac{\overline{r_1 r_2}(\omega, \Delta\omega)}{\Gamma(\omega, \Delta\omega)} = q_1 q_2 F \frac{w_1 w_2 \chi_2 k^2}{l^2 (\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (\text{II.7.11})$$

Dies ist die Berechnungsgleichung für das Zwei-Detektor-Experiment in Kreuzkorrelation, auf dessen Diskussion nach Behandlung des Ein-Detektor-Experiments (Autokorrelation) zurückgekommen wird.

Das Autokorrelationsexperiment, dessen prinzipieller Aufbau in Abb.II.7.2 schematisch dargestellt ist, war schon im Abschnitt II.2 als Spezialfall des Zwei-Detektor-Kreuzkorrelationsexperiments betrachtet worden.

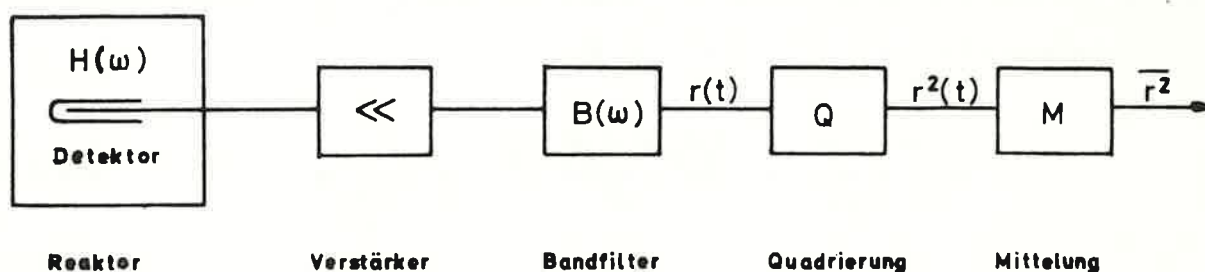


Abb.II.7.2 Schematische Anordnung für Ein-Detektor-Experimente

Wesentlich für das Autokorrelationsexperiment war der Zusatzterm π_{12} , der durch die Eigenkorrelation des Signals mit sich selbst zustande kam. Zur Berechnung von π_{12} bildet die Grundlage der Ausdruck (II.2.23). Für die Frequenzanalyse von Ionisationskammerströmen berechnet er sich angenähert zu:

$$\pi_{12} = W F \overline{q^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} |B(\omega')|^2 = W F \overline{q^2} \Gamma(\omega, \Delta\omega). \quad (\text{II.7.12})$$

mit $q \equiv \overline{q}$

Diese Näherung ist gültig, wenn das Bandfilter keine eigenen Rauschanteile zum Signal liefert, was in den meisten Fällen erreicht werden kann. Zur Berücksichtigung statistischer Schwankungen bei den Ionisationsprozessen während des Nachweises im Detektor wurde von BENNET [31] ein Faktor R eingeführt, der gegeben ist durch

$$R = \frac{\overline{q^2}}{\overline{q}^2} \geq 1. \quad (\text{II.7.13})$$

Je nach Geometrie und Arbeitsweise von Detektoren kann R Werte zwischen 1,0 und ungefähr 1,5 annehmen.

Entsprechend den Ergebnissen im Abschnitt II.2 ergeben sich die Gleichungen für das Autokorrelationsexperiment aus denen des Kreuzkorrelationsexperiments durch Hinzufügen des Zusatzterm π_{12} . Infolgedessen ergibt sich aus (II.7.11), (II.7.12) und unter Berücksichtigung von (II.7.13) die Berechnungsgleichung für das Ein-Detektor-Experiment zu:

$$\frac{\overline{r^2}(\omega, \Delta\omega)}{\Gamma(\omega, \Delta\omega)} = W F \frac{2}{q} R + \frac{W^2 F \frac{2}{q} \chi_2 k^2}{l^2 (\alpha^2 + \omega^2)} \quad (\text{II.7.14})$$

Im Falle des kritischen Reaktors, bei dem $k = 1$ und $\alpha_c = \frac{\beta}{l}$, vereinfachen sich die Gleichungen (II.7.11) und (II.7.14) zu

$$\frac{\overline{r_1 r_2}(\omega, \Delta\omega)}{\Gamma(\omega, \Delta\omega)} = \frac{W_1 W_2 F q_1 q_2 \chi_2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_c}\right)^2} \quad (\text{II.7.15})$$

für das Zwei-Detektor-Experiment und zu

$$\frac{\overline{r^2}(\omega, \Delta\omega)}{\Gamma(\omega, \Delta\omega)} = W F \frac{2}{q} R + \frac{W^2 F \frac{2}{q} \chi_2}{\beta^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_c}\right)^2} \quad (\text{II.7.16})$$

für das Ein-Detektor-Experiment.

Auf der linken Seite der Beziehungen (II.7.11) und (II.7.14) bzw. (II.7.15) und (II.7.16) steht die spektrale Leistungsdichte, deren Zusammenhang mit den Korrelationsfunktionen durch die Beziehungen (I.5.64) und (I.5.87) dargestellt werden und im Abschnitt I.5 diskutiert sind. Während sich die spektrale Leistungsdichte im Ein-Detektor-Experiment aus zwei Beiträgen zusammensetzt, nämlich aus dem Beitrag der unkorrelierten Detektorereignisse

$$U = W F \frac{2}{q} R \quad (\text{II.7.17})$$

und dem Beitrag der korrelierten Detektorereignisse

$$K = \frac{W^2 F \frac{2}{q} \chi_2 k^2}{l^2 (\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{W^2 F \frac{2}{q} \chi_2 k^2}{\beta^2} \frac{\alpha_c^2}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (\text{II.7.18})$$

fehlt im Zwei-Detektor-Experiment der Beitrag U der unkorrelierten Ereignisse. Dies ist der wesentliche Vorteil des Zwei-Detektor-Experiments gegenüber dem Ein-Detektor-Experiment. Der physikalische Grund für diesen Sachverhalt ist plausibel, da bei der Kreuzkorrelation von zwei Zufallsfunktionen im Ausgangssignal $\overline{r_1 r_2}$ nur deren korrelierte Anteile erscheinen können, da nichtkorrelierte

Signale bei einer Kreuzkorrelation unberücksichtigt bleiben. Der Wegfall des unkorrelierten Beitrags im Kreuzkorrelationsexperiment bietet große experimentelle Vorteile, auf die weiter unten eingegangen wird. Für $1 < \omega \ll \alpha$ folgt:

$$K_{\max} = \frac{W^2 F \frac{\chi_2^2 k^2}{\beta^2}}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha_c^2}{\alpha^2} \quad (\text{II.7.18a})$$

Das Verhältnis von korrelierten zu unkorrelierten Detektorereignissen, Q , d.h. mit anderen Worten das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis, folgt direkt aus den Beziehungen (II.7.17) und (II.7.18) zu:

$$Q(\omega) = \frac{K}{U} = \frac{\chi_2 k^2}{\beta^2 R} W \frac{\alpha_c^2}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{II.7.19})$$

Der Maximalwert von Q ergibt sich bei niedrigen Frequenzen ($\omega \approx 5$ cps), bei denen $\omega \ll \alpha$, so daß folgt:

$$Q_{\max} = \frac{\chi_2 k^2}{\beta^2 R} W \frac{\alpha_c^2}{\alpha^2}, \quad 1 < \omega \ll \alpha \quad (\text{II.7.20})$$

In einem kritischen Reaktor ($k = 1$; $\alpha = \alpha_c$) vereinfacht sich der Maximalwert zu:

$$Q_{\max o} = \frac{\chi_2}{\beta^2 R} W \quad (\text{II.7.21})$$

Aus der Diskussion der Berechnungsgleichungen für das Ein- und das Zwei-Detektor-Experiment ergeben sich direkt die Gesichtspunkte, die bei der Auswertung der Meßkurven zur Bestimmung der Reaktorparameter zu berücksichtigen sind. Begonnen werde mit der Gleichung (II.7.14) für das Ein-Detektor-Experiment. Für sehr hohe Frequenzen $\omega \gg \alpha$ wird der Nenner des zweiten Terms auf der rechten Seite, der die korrelierten Detektorereignisse berücksichtigt, sehr groß und damit der zweite Term im Vergleich zum ersten Term vernachlässigbar klein. Übrig bleibt infolgedessen bei hohen Frequenzen nur der unkorrelierte Beitrag, der frequenzunabhängig ist. Die Frequenzunabhängigkeit ist ein typisches Kennzeichen für die spektrale Leistungsdichte von unkorreliertem Rauschen. Wird die spektrale Leistungsdichte als Funktion der Frequenz aufgetragen, so liefert der erste Term einen für alle Frequenzen konstanten Wert, wie es in Abb.II.7.3 schematisch dargestellt ist.

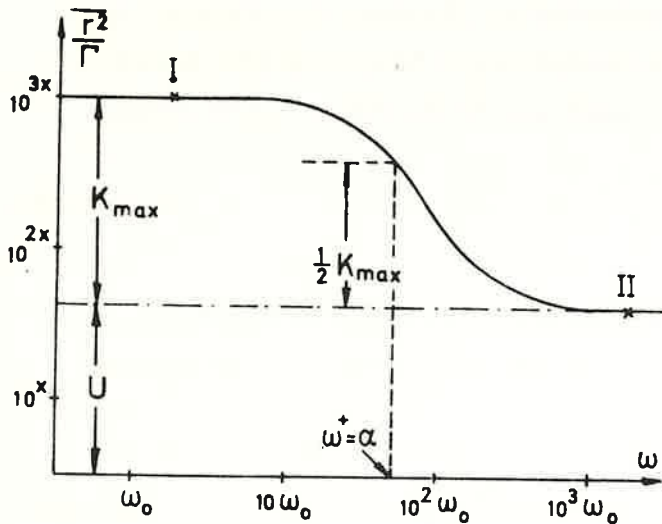


Abb.II.7.3

Während der zweite Term frequenzabhängig und für hohe Frequenzen sehr klein ist, besitzt er, wenn nur prompte Neutronen berücksichtigt werden, für niedrige Frequenzen $\omega \approx 5 \text{ Hz} \ll \alpha$ seinen Maximalwert K_{\max} , gegeben durch (II.7.18a). mit steigender Frequenz ω wird der zweite Term kleiner und fällt bei $\omega^+ = \alpha$ auf die Hälfte des Betrages bei niedrigen Frequenzen ($\frac{1}{2} K_{\max}$) ab. Bei hohen Frequenzen wird die Kurve der spektralen Leistungsdichte schließlich nur noch von dem unkorrelierten Beitrag U

gebildet. Die Größe α läßt sich durch Anpassung der gemessenen Kurve an die durch (II.7.16) gegebene gewinnen. Weiterhin läßt sich aus der Kurve das Verhältnis Q_{\max} einfach bestimmen. Bei hohen Frequenzen ($\omega \gg \alpha$) gilt:

$$\left(\frac{\overline{r^2}}{\Gamma} \right)_{\omega \gg \alpha} = U. \quad (\text{II.7.22})$$

Dieser Bereich ist in Abb.II.7.3 durch den Kurvenpunkt II markiert. Bei niedrigen Frequenzen $\omega \ll \alpha$ gilt:

$$\left(\frac{\overline{r^2}}{\Gamma} \right)_{\omega \ll \alpha} = U + K_{\max}. \quad (\text{II.7.23})$$

Der Kurvenpunkt I in Abb.II.7.3 deutet diesen Bereich an. Aus zwei derartigen Meßpunkten folgt die Bestimmbarkeit sofort aus der Beziehung

$$\frac{\left(\frac{\overline{r^2}}{\Gamma} \right)_{\omega \ll \alpha}}{\left(\frac{\overline{r^2}}{\Gamma} \right)_{\omega \gg \alpha}} = \frac{U + K_{\max}}{U} = Q_{\max} + 1. \quad (\text{II.7.24})$$

Vermerkt sei, daß in Gleichung (II.7.14) für das Ein-Detektor-Experiment beide Beiträge zur spektralen Leistungsdichte proportional zur Spaltrate F sind. Daraus folgt, daß in diesem Fall das Signal-zu-Untergrundverhältnis Q unabhängig von der Reaktorleistung ist.

Die spektrale Leistungsdichte des Zwei-Detektor-Experiments, gegeben durch Gleichung (II.7.11) bzw. (II.7.15), zeichnet sich dadurch aus, daß aus den schon diskutierten Gründen kein Beitrag auf Grund unkorrelierter Detektorereignisse vorhanden ist. Für das Zwei-Detektor-Experiment ist der Verlauf der spektralen Leistungsdichte als Funktion der Frequenz schematisch in Abb.II.7.4 dargestellt. Diese Darstellung ist mit der Nulleistungsübertragungsfunktion des Reaktors identisch. Für niedrigere Frequenzen ergibt sich

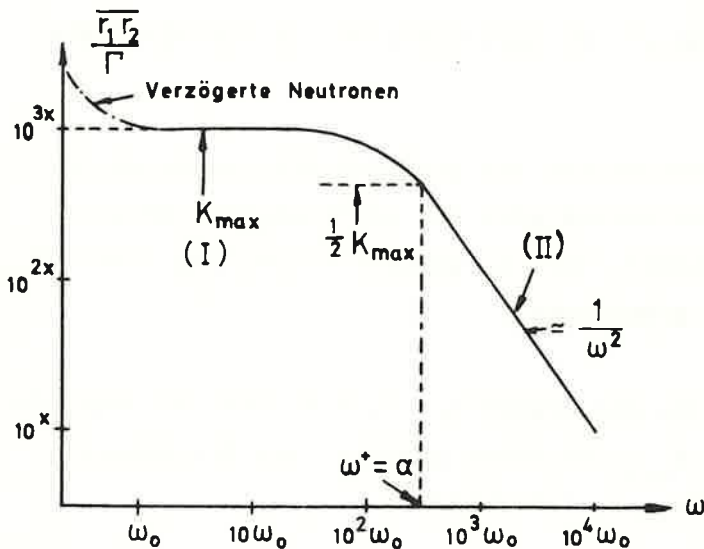


Abb.II.7.4

Grund ist, vorausgesetzt kritische Reaktoren mit $\alpha_c = \frac{\beta}{l}$, eine Verkleinerung der mittleren Lebensdauer. Dies ist der Fall beim Übergang von thermischen zu schnellen Reaktorsystemen. Der zweite Grund ist bei einem vorgegebenen Reaktorsystem die Vergrößerung der Unterkritikalität. Es ist aus der Definitionsgleichung (II.3.2c) für α und der Beziehung (II.5.21) für die Reaktivität ρ^+ ersichtlich, daß α beim Übergang zu unterkritischen Zuständen zunimmt und sich damit auch die Grenzfrequenz ω^+ zu höheren Werten hin verschiebt.

Die Gründe für den Verlauf der spektralen Leistungsdichte als Funktion der Frequenz für das Zwei-Detektor-Experiment in Abb.II.7.4 lassen sich auch physikalisch plausibel machen. Die Kurve gibt letzten Endes nur das Korrelationszeitverhalten wieder, das seinerseits das Zeitverhalten der Neutronenketten widerspiegelt. Da im Zwei-Detektor-Experiment nur die korrelierten Detektorereignisse im Ergebnis erfaßt werden, ist die Veranschaulichung hierbei besonders deutlich. Der Abfall der spektralen Leistungsdichte mit $\frac{1}{\omega^2}$ bei hohen

bei Vernachlässigung der verzögerten Neutronen ein konstanter Bereich, dessen Wert bei $\omega^+ = \alpha$ auf die Hälfte abgefallen ist. Hierdurch ist eine besonders einfache Bestimmung von α möglich. Eine Anpassung der Gleichung (II.7.11) an die Kurve nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert jedoch gewöhnlicherweise genauere Werte. Im hochfrequenten Teil ($\omega \gg \alpha$) fällt die spektrale Leistungsdichte proportional zu $\frac{1}{\omega^2}$ ab. Die sogenannte "Reaktor-Grenzfrequenz" ω^+ kann sich aus zwei Gründen zu höheren Werten verschieben. Der erste

Frequenzen rührt daher, daß sich in den kurzen betrachteten Zeiträumen, die den hohen Frequenzen entsprechen, die Korrelationen in den Ketten noch nicht ausgebildet haben. Erst bei niedrigeren Frequenzen und entsprechend längeren Beobachtungszeiträumen werden mehr Korrelationen erfaßt. Nach Erreichen einer unteren Frequenzgrenze sind die Beobachtungszeiträume so lang, daß alle Korrelationen erfaßt wurden, so daß sich beim Übergang zu noch tieferen Frequenzen kein Informationsgewinn mehr erzielen läßt, sofern nur das Zeitverhalten der prompten Neutronen interessiert. Bei Frequenzen, die im Bereich der Werte für die Zerfallskonstanten der Vorläuferkerne verzögerter Neutronen liegen, steigt die spektrale Leistungsdichte wiederum an, da diese dann zu den Korrelationen beitragen.

Außer der Bestimmung der Abklingkonstanten für den prompten Neutronenfluß, α , kann aus den experimentell ermittelten Kurven auch die absolute Reaktorleistung und die Reaktivität bestimmt werden. Der Einfachheit halber sei hier nur auf das Zwei-Detektor-Experiment eingegangen.

Zur Ermittlung der Spaltrate F wird von der Gleichung (II.7.2) und dem Maximalwert der spektralen Leistungsdichte, $K_{\max}^{(I)}$, Gebrauch gemacht. Der Maximalwert, in Abb.II.7.4 mit (I) bezeichnet, folgt aus (II.7.11) zu:

$$\left(\frac{\overline{r_1 r_2}}{\Gamma} \right)_{\omega \ll \alpha} = K_{\max}^{(I)} = \frac{q_1 q_2 F W_1 W_2 \chi_2 k^2}{\beta^2} \frac{\alpha_c^2}{\alpha} \quad (\text{II.7.25})$$

Wird dieser Ausdruck durch das Produkt $\overline{i_1 \cdot i_2}$ unter Berücksichtigung der Gleichung (II.7.2) dividiert und nach F aufgelöst, so folgt:

$$F = \frac{\overline{i_1 \cdot i_2}}{K_{\max}^{(I)}} \cdot \frac{\chi_2 k^2}{\beta^2} \cdot \frac{\alpha_c^2}{\alpha} \quad (\text{II.7.26})$$

Für den kritischen Reaktor ($k = 1$; $\alpha = \alpha_c$) vereinfacht sich diese Beziehung zu:

$$F_0 = \frac{\overline{i_1 \cdot i_2}}{K_{\max}^{(I)}} \cdot \frac{\chi_2}{\beta^2} \quad (\text{II.7.27})$$

Die mittleren Detektorströme $\overline{i_1}$ und $\overline{i_2}$ können im Experiment gemessen werden. Die Größe $K_{\max}^{(I)}$, α und α_c können aus experimentellen Bestimmungen der spektralen Leistungsdichte entsprechend der Abb.II.7.4 gewonnen werden. Die Kernkonstante hat für U^{235} den Wert $\chi_2 = 0,8$ [25], und β ist aus theoretischen Berechnungen des untersuchten Reaktorsystems zu entnehmen. Durch Anwendung der Umrechnungsbeziehung (II.5.28) kann die Reaktorleistung in Watt angegeben werden.

Zur Bestimmung der Reaktivität wird je ein Wert der spektralen Leistungsdichte im hohen und niederen Frequenzbereich ermittelt. Die entsprechenden Punkte sind in Abb.II.7.4 mit (II) und (I) bezeichnet. Der Wert für die spektrale Leistungsdichte im unteren Frequenzbereich ist bereits durch (II.7.25) gegeben. Wird die Beziehung (II.5.21) für die Reaktivität ρ^+ [§] in (II.7.25) eingesetzt, so folgt:

$$\frac{\overline{r_1 r_2}(\omega_I, \Delta\omega_I)}{\Gamma(\omega_I, \Delta\omega_I)} = \frac{q_1 q_2 F W_1 W_2 \chi_2 k^2}{\beta^2} \frac{1}{(1-\rho^+)^2} \quad (\text{II.7.28})$$

Für den Punkt (II) bei hohen Frequenzen ($\omega_{II} \gg \alpha$) folgt aus (II.7.11):

$$\frac{\overline{r_1 r_2}(\omega_{II}, \Delta\omega_{II})}{\Gamma(\omega_{II}, \Delta\omega_{II})} = \frac{q_1 q_2 F W_1 W_2 \chi_2 k^2}{\beta^2} \cdot \frac{\alpha_c^2}{\omega_{II}^2} \quad (\text{II.7.29})$$

Wird das Verhältnis von (II.7.29) zu (II.7.28) gebildet, angenommen, daß die Filtercharakteristiken bei ω_I und ω_{II} gleich sind, und nach ρ^+ aufgelöst, so folgt:

$$-\rho^+ = \sqrt{\frac{\overline{r_1 r_2}(\omega_{II}, \Delta\omega_{II})}{\overline{r_1 r_2}(\omega_I, \Delta\omega_I)} \frac{\omega_{II}}{\alpha_c}} - 1 \quad (\text{II.7.30})$$

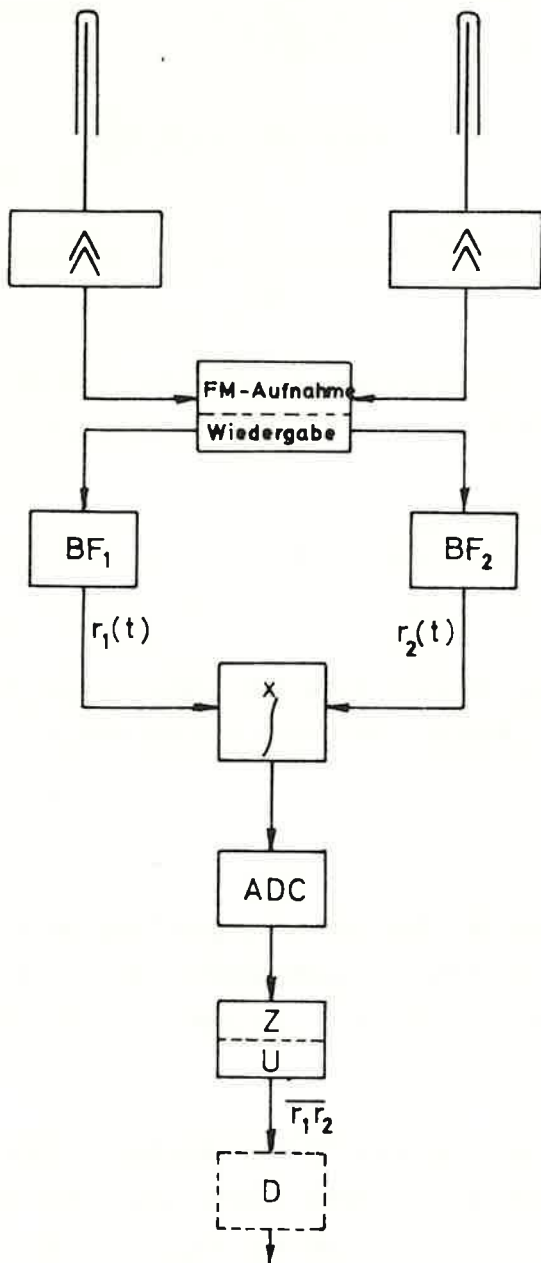
Ist α_c für den untersuchten Reaktor bekannt, so läßt sich die Reaktivität ρ^+ berechnen, da alle anderen Größen aus der Meßkurve entnommen werden können.

Experimentelle Anordnung und Meßergebnisse

Nachdem die grundsätzlichen Erläuterungen zu den Bestimmungsmöglichkeiten von Reaktorparametern aus der Frequenzanalyse von Ionisationskammerströmen hiermit abgeschlossen sind, soll nun auf ausgeführte Experimente und deren Ergebnisse eingegangen werden.

Als Beispiele wurden Messungen ausgewählt, die im Schnell-Thermischen Argonaut-Reaktor STARK durchgeführt worden sind. Eine detaillierte Beschreibung des Reaktors sowie dieser und anderer Experimente befindet sich in [28,32]. Der Reaktor, dessen Querschnitt in den Abbildungen II.6.7 und II.7.6 angedeutet ist, besteht aus einem zylindrischen schnellen Core (37 cm mittlerer Durchmesser, 61 cm Höhe), das durch ein ringförmiges thermisches Core und einen Graphitreflektor umgeben ist. Das schnelle Core ist von einem Natururanmantel (mittlere Dicke 5 cm) eingeschlossen, der als Pufferzone wirkt und das Eindringen

thermischer Neutronen in das schnelle Core stark reduziert. Da in diesem Zusammenhang nur der prinzipielle Aufbau von Interesse ist, sei auf Einzelheiten, wie Anreicherung, Materialzusammensetzung etc. nicht näher eingegangen. Die verwendete elektronische Meßanordnung ist als Blockdiagramm in Abb.II.7.5 gezeigt. Die Ausgangssignale der Verstärker wurden auf einem Magnetband gespeichert. Dies ist insofern vorteilhaft, da erstens das Abspielen



Neutronendetektoren
 ^3He -Zählrohre und ^{10}B -Kammern
 im Strombetrieb

Verstärker vom Typ
 KEITHLEY 103 bzw. 603

Magnetbandgerät
 AMPEX FR 1300

Bandfilter vom Typ
 KROHN-HITE 330 M

Kreuzkorrelator
 Multiplikation und Integration
 PACE TR 10

Analog-zu-Digital-Wandler
 DYMEC 2210

Normaler Impulszähler
 und Meßuhr

Datenverarbeitung und Korrekturen
 für Frequenzgang etc.

Spektrale Leistungsdichte

Abb.II.7.5

der Bänder mit größerer Bandgeschwindigkeit erfolgen kann als das Aufnehmen und zweitens für jede Frequenzeinstellung das einmal auf Band gezeichnete Signal verwendet werden kann. Beide Gründe reduzieren die eigentliche Versuchszeit am Reaktor beträchtlich. Der Frequenzgang derartiger Meßanordnungen muß sich nach den im Reaktor zu erwartenden Grenzfrequenzen ω^+ richten.

Aus der Abb. II.7.4 ist ersichtlich, daß die obere Grenzfrequenz der Meßanordnung nach Möglichkeit ein bis zwei Zehnerpotenzen oberhalb ω^+ (Reaktorgrenzfrequenz) liegen sollte. Während Magnetbandgerät, Bandfilter, Analog- und Digitalgeräte diese Forderung erfüllten, war im vorliegenden Beispiel das durch die Detektorkapazität und den Verstärkereingangswiderstand gebildete RC-Netzwerk der begrenzende Faktor. Der Eingangswiderstand des Verstärkers richtet sich nach dem Ausgangsstrom des Detektors, der wiederum von der Detektorempfindlichkeit und der Reaktorleistung abhängt. Obwohl in diesem Beispiel nur Messungen am kritischen Reaktor bei einer Leistung von 10 W (Maximalleistung) durchgeführt wurden, konnte auf Grund des anfallenden Stromes der Eingangswiderstand nicht niedriger als ca. 10 Megohm gewählt werden. Die Kapazitäten der Detektoren, Zuleitungskabel etc. betragen ca. 125 pF im Falle der ^3He -Zählrohre und 500 pF bei den ^{10}B -Kammern, so daß die obere Grenzfrequenz der Meßanordnung bei 132 Hz bzw. 33 Hz lag. Der Frequenzgang der Anordnung wurde durch Messungen in unkorreliertem Neutronenrauschen, sog. "weißem Rauschen", geprüft. Dazu wurden die Detektoren in die thermische Säule eines großen Forschungsreaktors (FR2) gebracht und die spektrale Leistungsdichte als Funktion der Frequenz bestimmt. Eine Möglichkeit, diese relativ niedrigen Grenzfrequenzen des Eingangskreises zu umgehen und zu hohen Grenzfrequenzen zu gelangen, ist die Verwendung von Detektoren, die Impulse liefern (schnelle Szintillationszähler, Spaltkammern etc.), zusammen mit angeschlossenen Zählratenmittelwertmessern, deren Zeitkonstanten variabel sind und deren Werte an die vorhandenen Zählraten einerseits und die verlangten oberen Grenzfrequenzen andererseits anzupassen sind. Die RC-Zeitkonstante des Zählratenmessers ist bei diesem Verfahren für die obere Grenzfrequenz des Eingangskreises verantwortlich.

Das Ziel der Experimente mit der in Abb. II.7.5 gezeigten Anordnung war, zu erkunden, bis zu welchem praktischen Mindestwert von Q_{\max} - vgl. (II.7.20) und (II.7.21) - Autokorrelationsexperimente einerseits und Kreuzkorrelationsexperimente andererseits durchführbar sind. Zu diesem Zweck wurde das maximale Verhältnis von korrelierten zu unkorrelierten Detektorereignissen, C_{\max} ,

durch Variation der Detektorpositionen systematisch verändert. Die Ergebnisse, die am kritischen Reaktor bei 10 W gewonnen wurden, sind in den Abbildungen II.7.6 a - c dargestellt. Zunächst wurde für die Detektoren in

Position B_1 und K_1 je eine Autokorrelationsmessung durchgeführt und daraus durch Anwendung der Gleichung (II.7.24) das Verhältnis $Q_{\max o}$ bestimmt. Dies ist an den Kurven verzeichnet. Der höhere Wert in Position K_1 rührt von dem dort, im Vergleich zu B_1 , höheren Neutronenfluß her. Die danach durchgeführte Kreuzkorrelationsmessung mit zwei Detektoren (in B_1 und K_1) ist ebenfalls in II.7.6a verzeichnet. Im Anschluß daran wurden die Detektoren in die Positionen B_2 und K_2 verschoben, und zwar so, daß jeder Detektor den gleichen Ausgangsstrom besaß und somit ihre Empfindlichkeiten gleich waren. Damit war nur eine Autokorrelationsmessung zur Bestimmung von $Q_{\max o}$ erforderlich. Der Wert liegt für die Positionen B_2 und K_2 bei 0,53. Der stark abgeflachte Verlauf der Autokorrelationskurve ist deutlich erkennbar. Im Falle der Abb.II.7.6c wurden die Detektorpositionen so gewählt, daß $Q_{\max o}$ nur einen Wert von 0,11 besaß, d.h. der Anteil der korrelierten Detektorereignisse nur 11% betrug. Während die Autokorrelationskurve fast flach verläuft, hat sich an der Kreuzkorrelationskurve nichts verändert. Hinsichtlich der Bestimmbarkeit der Abklingkonstanten des prompten Neutronenflusses, α ,

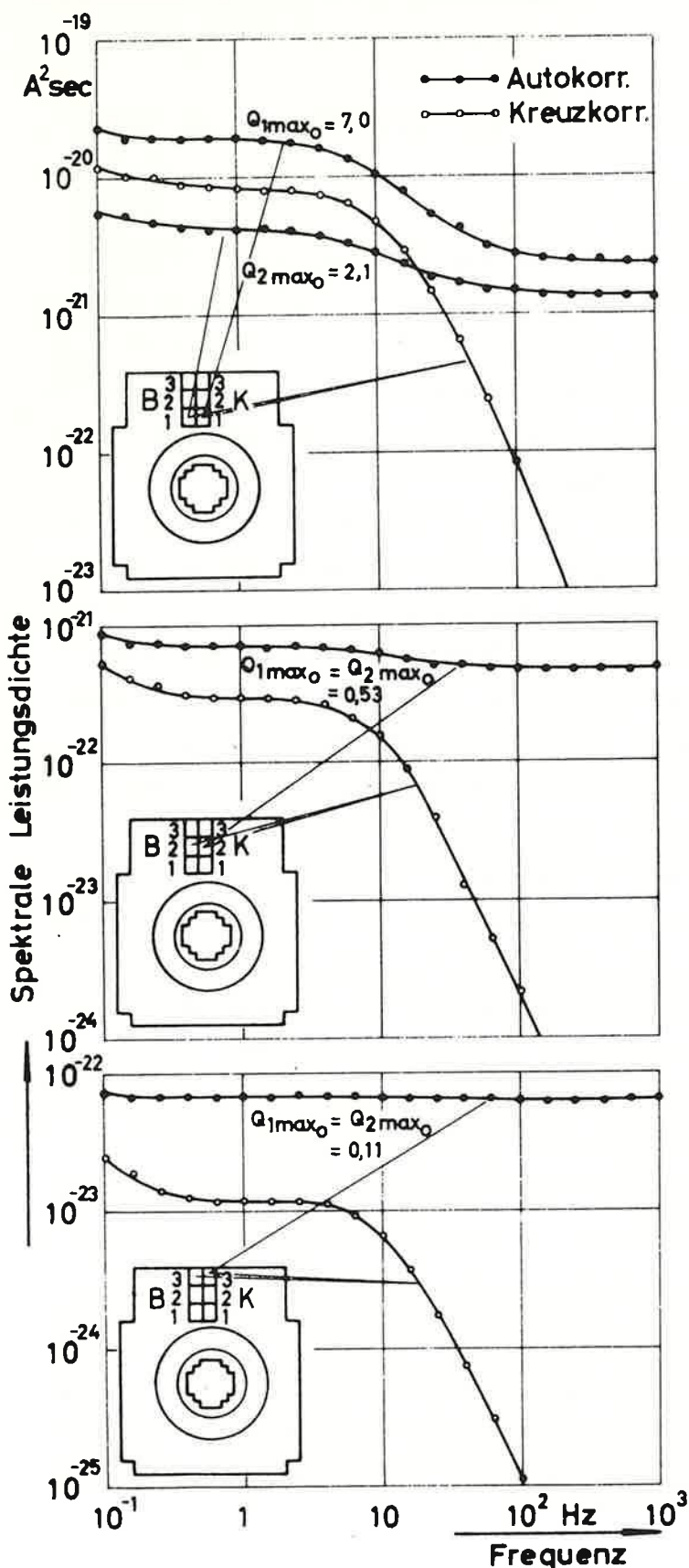


Abb.II.7.6 a,b,c

und der Reaktivität, ρ^+ , aus den Meßkurven kann aus den Experimenten die Schlußfolgerung gezogen werden, daß der Mindestwert von $Q_{\max 0}$ für Ein-Detektor-Experimente bei ca. 2 liegt und für Zwei-Detektor-Experimente bei ca. 0,1. Daraus resultiert nach (II.7.21), daß die Detektorempfindlichkeit bei Kreuzkorrelationsmessungen prinzipiell um einen Faktor 20 kleiner als bei Autokorrelationsmessungen sein kann. Dieses Resultat ist besonders wichtig für Anwendungen dieser Methode in Reaktorsystemen, bei denen nur relativ kleine Detektorempfindlichkeiten zu erzielen sind, wie z.B. in schnellen Reaktoranordnungen. Die Bedeutung dieser Tatsache sei an einem einfachen Beispiel illustriert. Wenn Spaltkammern als Detektoren Verwendung finden, ist die Empfindlichkeit der Kammer in einem schnellen Reaktor angenähert durch das Verhältnis von spaltbarem Material in der Kammer zu spaltbarem Material im Reaktor gegeben. Für $Q_{\max 0} = 0,1$ kann aus (II.7.21) die Mindestempfindlichkeit W_{\min} berechnet werden. Wird ein plutoniumbeladenes schnelles Reaktorsystem mit einer ^{239}Pu -Spaltkammer betrachtet und die dafür typischen Werte $\beta = 3,3 \cdot 10^{-3}$, $\chi_2 = 0,8$ und $R = 1,2$ verwendet, so ergibt sich $W_{\min} = 1,6 \cdot 10^{-6}$. Die größten, kommerziell erhältlichen Spaltkammern haben Belegungen von ca. 2 g spaltbarem Material. Die kritische Masse des zu untersuchenden schnellen Reaktors könnte somit bis zu ca. 1260 kg Pu betragen. Die Anwendbarkeit der Ein-Detektor-Methode würde bereits bei kritischen Massen von ca. 60 kg aufhören. Auch in thermischen Systemen bietet die Kreuzkorrelationsmethode Vorteile, da mit ihr zu weiter unterkritischen Zuständen gemessen werden kann.

Fehlerabschätzung bei Zwei-Detektor-Experimenten

Zum Abschluß der Behandlung der Frequenzanalyse von Ionisationskammerströmen soll auf die Fehlerabschätzung für die spektrale Leistungsdichte bei Zwei-Detektor-Experimenten eingegangen werden. Dazu sei nochmals die Abb. II.7.1 bzw. II.7.5 betrachtet. Die Unterdrückung des unkorrelierten Beitrags U im zeitlich gemittelten Produkt der Ausgangssignale $\overline{r_1 r_2}(\omega, \Delta\omega)$ geschieht auf Grund des Multiplikationsprozesses im Kreuzkorrelator. Es darf dabei nicht vergessen werden, daß der unkorrelierte Beitrag in den Filterausgangssignalen $r_1(t)$ und $r_2(t)$ noch vorhanden ist. Infolgedessen ist das zu analysierende korrelierte Rauschen am Eingang des Kreuzkorrelators von einem unkorrelierten Rauschen überlagert. Die Fehlerabschätzung für diesen speziellen Fall wurde im Detail von BENDAT [33] untersucht. Die Ergebnisse seiner theoretischen Untersuchungen sind bis zu einem gewissen Grade auf das vorliegende Problem direkt anwendbar. Es wird dabei angenommen, daß die beiden Rauschanteile, die das Korrelator-Eingangssignal bilden, voneinander unabhängig

sind und die charakteristischen Eigenschaften von normalem Rauschen besitzen. Dies ist bei Experimenten gut erfüllt, bei denen die Detektorempfindlichkeit nicht zu große Werte annimmt. Die theoretische Behandlung von BENDAT schließt die Verwendung von Bandfiltern vor dem Korrelator mit ein. Es ergab sich für die Varianz σ_{xy}^2 der spektralen Leistungsdichte im Kreuzkorrelationsexperiment folgende Gleichung:

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{S^2 [\kappa + (N_1/S) + (N_2/S) + (N_1/S) \cdot (N_2/S)]}{b T}, \text{ mit } bT \geq 10^4. \quad (\text{II.7.31})$$

S, N_1 und N_2 kennzeichnen die mittleren quadratischen (Leistungs-) Werte (im vorliegenden Fall K, U_1 und U_2)

κ = Konstante, $1 < \kappa < 2$

b = $\pi \Delta f = \frac{\Delta \omega}{2}$ = Bandbreite

T = Analysierzeit.

Mit der bisher verwendeten Bezeichnungsweise und durch Einführung der relativen Standardabweichung für die spektrale Leistungsdichte bei Kreuzkorrelationsmessungen, ϵ_{KSLD} , folgt aus (II.7.31) die Beziehung:

$$\epsilon_{\text{KSLD}} = \frac{\sigma_{xy}}{K} \cong \left[\frac{\kappa + (Q_1)^{-1} + (Q_2)^{-1} + (Q_1 Q_2)^{-1}}{\pi \Delta f T} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II.7.32})$$

mit $\pi \Delta f T \geq 10^4$ und $1 < \kappa < 2$.

Die spektrale Leistungsdichte K ist dabei gegeben durch (II.7.18), und die Verhältnisse Q_1 und Q_2 lassen sich aus (II.7.19) gewinnen.

Abnehmende Werte für Q_1 und Q_2 vergrößern den Zähler in (II.7.32). Diese Vergrößerung der relativen Standardabweichung läßt sich durch eine Vergrößerung des Nenners kompensieren, wenn längere Analysierzeiten T angesetzt werden, konstante Bandbreite vorausgesetzt. Gewöhnlicherweise nimmt mit steigender Frequenz ebenfalls die Bandbreite zu, so daß der Abfall von Q mit steigender Frequenz auch hierdurch teilweise ausgeglichen wird. Der Hauptnutzen der Gleichung (II.7.32) besteht in der Möglichkeit, bei vorgegebener Genauigkeitsforderung durch Anpassung der Bandbreite an die Versuchsbedingungen die notwendige Analysierzeit bei bekannten Q-Werten abschätzen zu können. Umgekehrt läßt sich für eine noch erträgliche Analysierzeit ebenfalls die Mindestempfindlichkeit angenähert gewinnen. Darüber hinaus liefert die Berechnungsformel (II.7.32) eine wertvolle Hilfe bei der Genauigkeitsabschätzung der aus den Kurven gewonnenen Reaktorparameter.

II.8 Zusammenfassender Rückblick

Nachdem die drei behandelten Analysiermethoden des Neutronenrauschens in den einzelnen Abschnitten beschrieben und diskutiert worden sind, stellt sich die Frage, welche Methode ist am besten geeignet, die gesuchten Reaktorparameter zu gewinnen. Um eine solide Ausgangsbasis zur Beantwortung dieser Fragestellung zu erhalten, war die Aufstellung einer einheitlichen Theorie für die verschiedenen Methoden eine notwendige Voraussetzung. Gleichzeitig war jedoch ebenfalls ein Vergleich der experimentellen Anordnungen und Analysiermöglichkeiten erforderlich, um ebenfalls auf der experimentellen Seite eine gute Grundlage zu besitzen. Bei einer sorgfältigen Abwägung der Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren stellt es sich deutlich heraus, daß eine einfache Antwort auf die Frage nicht möglich ist. Diese Feststellung soll durch einige Erfahrungen und Tatsachen begründet werden. Bei der Rossi- α -Methode ist z.B., wie aus den Beziehungen (II.5.16) bis (II.5.18) ersichtlich, das Signal-zu-Untergrundverhältnis umgekehrt proportional zur Reaktorleistung und unabhängig von der Detektorempfindlichkeit. Bei den beiden anderen Methoden, der Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und der Frequenzanalyse von Ionisationskammerströmen ist es anders. Wie die Ausdrücke (II.6.53, 54) und (II.7.19-21) zeigen, ist bei diesen beiden Verfahren das Signal-zu-Untergrundverhältnis unabhängig von der Reaktorleistung, dafür aber proportional zur Detektorempfindlichkeit. Daraus folgt sofort, daß die Anwendung der Rossi- α -Methode in Reaktoranordnungen schwierig wird, in denen beispielsweise durch Spontanspaltungen und andere neutronenerzeugende Reaktionen bereits im unterkritischen Zustand eine hohe Spaltrate vorhanden ist, die im verzögert kritischen Zustand dann spätestens so hoch ist, daß eine sinnvolle Messung nicht mehr möglich ist. In diesem Falle sind infolgedessen die anderen Methoden von Vorteil. Bei der Frequenzanalyse des Neutronenrauschens ist in diesem Fall hoher Spaltrate selbst bei relativ niedrigen Detektorempfindlichkeiten durch Anwendung des Zwei-Detektor-Experiments eine Bestimmung der Reaktorparameter ohne Schwierigkeiten möglich. Liegt die Abklingkonstante des prompten Neutronenflusses, α , und damit die Grenzfrequenz, ω^+ , bei so hohen Werten, daß die Grenzfrequenz der Frequenzanalyse-Meßanordnung nicht ausreicht, so liefert die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsverteilungs-Methode die gesuchten Größen. Andererseits liegt der Vorteil der Rossi- α -Methode auf der Hand, wenn es sich um die Untersuchung von gekoppelten Reaktorsystemen handelt, die zwei oder mehr α -Werte

besitzen. Durch die δ -funktionsförmige Netzwerkantwort - vgl.(II.5.2) - zeigt sich das exponentielle Abklingen des prompten Neutronenflusses direkt in der Meßkurve. Infolgedessen ist diese Methode am geeignetsten, zwei oder mehrere Exponentialterme im Experiment festzustellen. Diese Möglichkeit besteht dagegen bei den anderen Methoden nur bedingt, da durch die Integration über längere Zeitbereiche die Meßkurven derartige Phänomene nicht in der Klarheit erkennen lassen, wie im Rossi- α -Experiment. Dies seien nur einige Beispiele des Vergleichs, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben, die jedoch bisher als besonders auffallend festgestellt werden konnten.

Abschließend kann die eingangs gestellte Frage in folgender Form beantwortet werden: Es gibt nach dem jetzigen Stand der Untersuchungen keine Methode für die Analyse des Neutronenrauschens, die den gesamten Bereich der möglichen Anwendungen mit optimalem Wirkungsgrad umfaßt, so daß anhand der Problemstellung zu entscheiden ist, welches Verfahren die meisten Vorteile bietet.

Literaturangaben

Spezielle Literatur zu Kapitel I

- [1] WIENER, N.; Cybernetics, John Wiley and Sons, New York (1948)
- [2] NEUMANN, J. VON; Physical Applications of the Ergodic Hypothesis
Proc. Nat. Acad. Sci. 18, 70, 263 (1932)
- [3] WIENER, N.; The Fourier Integral and Certain of its Applications,
Dover Publications, New York (1933).

Allgemeine Literatur zu Kapitel I

1. BARTLETT, M.S.; Stochastic Processes, Cambridge University Press (1960)
2. BENDAT, J.S.; Principles and Applications of Random Noise Theory,
John Wiley and Sons, New York - London (1958)
3. CRAMER, H.; Random Variables and Probability Distributions,
Cambridge University Press (1962)
4. FELLER, W.; An Introduction to Probability Theory and Its Applications,
John Wiley and Sons, New York - London (1961)
5. FREEMAN, J.J.; Principles of Noise, John Wiley and Sons, New York -
London (1958)
6. LEE, Y.W.; Statistical Theory of Communication, John Wiley and Sons,
New York - London (1963), (Hauptsächlich zu Kapitel I verwendet)
7. RENYI, A.; Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informa-
tionstheorie, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1962).

Spezielle Literatur zu Kapitel II

- [1] COHN, C.E.; Nucl. Sci. and Eng. 7, 472-475 (1960)
- [2] MOORE, M.N.; Nucl. Sci. and Eng. 6, 448-452 (1959)
- [3] SHEFF, J.R.; The Crosscorrelation of the Neutron Density of Two Points in a Nuclear Reactor, Ph. D. Thesis, University of Washington (1965)
- [4] OTSUKA, M., SAITO, K.; J. of Nucl. Sci. and Techn. 2, 191-198 (1965)
- [5] COURANT, E.D., WALLACE, R.R.; Phys. Rev. 72, 1038-1048 (1947)
- [6] RAIJEVSKI, V.; CEA-1973 (1960)
- [7] MATTHES, W.; Nukleonik 4, 213 (1962)
- [8] OSBORN, R.K., YIP, S.; Noise Analysis in Nuclear Systems, AEC-Symposium Series No 4, 1-9, TID-7679 (1964)
- [9] NATELSON, M.; An Analysis of Space and Energy Effects in Reactor Fluctuation Experiments, Ph. D. Thesis, University of Washington (1965)
- [10] DE HOFFMANN, F.; The Science and Eng. of Nucl. Power, Vol.II, 118 (1949)
- [11] FEYNMANN, R., DE HOFFMANN, F., SERBER, R.; J. of Nucl. Energy 3, 64 (1956)
- [12] PAL, L.; Acta Physica Acad. Sci. Hung. 14, Fasc. 4 (1962)
- [13] BELL, G.I.; Nucl. Sci. and Eng. 21, 390-401 (1965)
- [14] HARRIS, D.H.; Nucl. Sci. and Eng. 21, 369-381 (1965)
- [15] MOGILNER, A.I., ZOLOTUKHIN, V.G.; Atomnaya Energ. 10, 377 (1961)
- [16] ZOLOTUKHIN, V.G., MOGILNER, A.I.; Atomnaya Energ. 10, 973 (1961)
- [17] MOGILNER, A.; Physics of Fast and Intermediate Reactors, Proc. of IAEA-Seminar, Vol.III, 33-40 (1961), übersetzt KFK-tr-126
- [18] ZOLOTUKHIN, V.G., MOGILNER, A.I.; Atomnaya Energ. 15, 11 (1963)
- [19] BORGWALDT, H., SANITZ, D.; Nukleonik 5, 239 (1963)
- [20] BORGWALDT, H., MURLEY, T.E., SANITZ, D.; The Modal Synthesis of Rossi- α -Data for Moderator-Reflected Fast Assemblies, Proc. of the Int. Symp. on Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation, Gainesville, Florida (1966) und Bericht KFK 409 (1966)

- [21] BORGWALDT, H., STEGEMANN, D.; Nukleonik 7, 313 (1965)
- [22] GLASSTONE, S., SESONSKE, A.; Nuclear Reactor Engineering, p.299 ff, Van Nostrand, New York (1963)
- [23] BORGWALDT, H.; Einheitliche Theorie der Korrelationsexperimente in Nulleistungsreaktoren, Disseration, TH Karlsruhe (1966)
- [24] ORNDOFF, J.D.; Nucl. Sci. and Eng. 2, 450 (1957)
- [25] TERREL, J.; Phys. Rev. 108, No 3, 783 (1957)
- [26] BRUNSON, G.S., CURRAN, R., KAUFMANN, S.G., McMAHON, J., PAHIS, L.; Nucleonics 15, No 11 (1957)
- [27] STRIBEL, T.; Nukleonik 6, 196 (1964)
- [28] EDELMANN, M., KUSSMAUL, G., MEISTER, H., STEGEMANN, D., VÄTH, W.; Pulsed Source and Noise Measurements on the STARK Reactor at Karlsruhe, Proc. of the IAEA-Symposium on Pulsed Neutron Research, Vol.2, 799 (1965) und Bericht KFK 303 (1965)
- [29] ALBRECHT, R.W.; Nucl. Sci. and Eng. 14, 153 (1962)
- [30] STEGEMANN, D.; Bestimmung reaktorphysiaklischer Parameter aus dem Reaktorrauschen durch Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, unveröffentlicht
- [31] BENNET, E.F.; Nucl. Sci. and Eng. 8, 53 (1960)
- [32] SEIFRITZ, W., STEGEMANN, D., VÄTH, W.; Two-Detector Crosscorrelation Experiments in the Fast-Thermal Argonaut Reactor STARK, Proc. of Symp. on Neutron Noise, Waves and Pulse Propagation, Gainesville, Florida (1966) und Bericht KFK 413 (1966)
- [33] BENDAT, J.S.; Principles and Applications of Random Noise Theory, p.272 ff, John Wiley, New York (1958)
- [34] WEINBERG, A.M., WIGNER, E.P.; The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, The University of Chicago Press (1958), Kapitel IX
- [35] CASE, K.M.; Ann. Phys. 9, 1 (1960)
- [36] DRESNER, L., WEINBERG, A.M.; Rev. Mod. Phys. 34, 747 (1962).

