

# Numerische Simulation der Strömung im Aortenbogen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Ingenieurwissenschaften  
der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Karlsruhe (TH)  
genehmigte

## Dissertation

von

Stephan Meyer

aus Ratingen

Datum der mündlichen Prüfung:  
20.01.2003

Hauptreferent: Professor Dr.-Ing. H. Oertel  
Korreferenten: Professor Dr.-Ing. D. Liepsch  
Professor Dr.-Ing. U. Müller



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strömungslehre an der Universität Karlsruhe (TH). Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Oertel möchte ich an dieser Stelle für die Ermöglichung zur Durchführung dieser Arbeit im Rahmen meiner Aktivitäten am Institut und die Übernahme des Hauptreferates danken. Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Müller und Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Liepsch gilt mein Dank für ihr freundliches Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferates.

Ohne die Hilfe meiner Diplomarbeiten und HiWi's sowie der kollegialen Unterstützung der Mitarbeiter des Instituts für Strömungslehre wäre die Durchführung dieser Arbeit nicht möglich gewesen. Mein besonderer Dank gilt Herrn M. Stripf, der mit seiner Diplomarbeit wesentlichen Anteil an der geleisteten Programmierarbeit hat und meinen Kollegen R. Keber und L. Zürcher für zahllose fruchtbare Diskussionen rund um die Strömungsmechanik.

Karlsruhe im September 2002

Stephan Meyer





# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>vi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Zielsetzung . . . . .	5
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Erhaltungsgleichungen . . . . .	7
2.2 Randbedingungen . . . . .	11
2.3 Anfangsbedingungen . . . . .	12
2.4 Strömungstopologie . . . . .	12
<b>3 Numerisches Verfahren</b>	<b>17</b>
3.1 Allgemeines . . . . .	18
3.2 Überblick über CVFEM-Verfahren auf unstrukturierten Gittern . .	22
3.3 Konzeption <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	26
3.3.1 Gebietsdiskretisierung . . . . .	26
3.3.2 Zeitdiskretisierung . . . . .	28
3.3.3 Diskretisierte Impulsgleichung . . . . .	30
3.3.4 Druckgleichung . . . . .	38
3.3.5 Randbedingungen . . . . .	40
3.3.6 Lösungsalgorithmus . . . . .	44
3.3.7 Gleichungslöser . . . . .	46
3.4 Numerisches Verfahren in STAR-CD . . . . .	47
3.4.1 Diskretisierungsverfahren in STAR-CD . . . . .	47

3.4.2	Lösungsalgorithmus . . . . .	52
3.4.3	Randbedingungen . . . . .	54
3.5	Geometrie- und Netzerstellung . . . . .	55
3.6	Auffinden kritischer Punkte in diskreten Vektorfeldern . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Verifikation</b>	<b>59</b>
4.1	Laminare Röhrrströmung . . . . .	60
4.2	Rohrströmung mit plötzlicher Verengung . . . . .	66
4.3	Rohrströmung mit pulsierender Einlassrandbedingung . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Strömung im Aortenbogen</b>	<b>75</b>
5.1	Ausgebildete und Pulsierende Krümmerströmung . . . . .	75
5.2	Versuchsaufbau Aortenbogenexperiment . . . . .	86
5.3	Stationäre Strömung im Aortenbogen . . . . .	91
5.4	Pulsierende Strömung im Aortenbogen . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Herleitung verschiedener Koeffizienten</b>	<b>132</b>
A.1	Koeffizienten in der Interpolationsfunktion für den Druck . . . . .	132
A.2	Koeffizienten in der Interpolationsfunktion für die dissipativen Terme	133
A.3	Koeffizienten in der Interpolationsfunktion für die konvektiven Terme	134
<b>B</b>	<b>Interpolationsfunktion in den konvektiven Termen</b>	<b>136</b>

# Nomenklatur

## Lateinische Buchstaben

Formelzeichen	Bedeutung
$a, b, c, d$	Koeffizienten in den diskretisierten Grundgleichungen
$e$	innere Energie
$f$	Frequenz
$i, j, k$	Indizes
$\dot{m}$	Massenstrom
$\vec{n}$	Normalenvektor
$p$	Druck
$p_{ij} = p(P_{ij})$	Druck im Punkt $P_{ij}$
$\mathbf{q}$	Wärmestromvektor
$t$	Zeit
$u, v, w$	kartesische Geschwindigkeitskomponenten
$\vec{v} = (u, v, w)^T$	Geschwindigkeitsvektor
$w_i$	Gewichtsfunktionen
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$	Ortsvektor
$A$	Oberfläche
$\vec{A}$	Vektorpotential
$A_p, B_p, C_p, D_p$	Koeffizienten in der Interpolationsfunktion des Drucks
$A_u, A_v, A_w, A_c$	Koeffizienten in den Interpolationsfunktionen der Geschwindigkeiten
$\mathbf{A}$	Matrix
$B(\Phi)$	beliebige Randbedingung
$D$	Durchmesser
$\mathbf{D}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor
$E$	Gesamtenergie
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\vec{J}$	Vektor der diffusiven und konvektiven Flüsse
$L$	beliebiger Differentialoperator, Länge
$P_{ij}$	Eckpunkt des Tetraeders $\Delta_i, j = 1, 2, 3, 4$
$R$	Radius, Residuum
$S_x, S_y, S_z$	volumetrische Quellterme
$T$	Temperatur
$\mathbf{T}$	Spannungstensor
$V$	Volumen
$\dot{V}$	Volumenstrom
$X, Y, Z$	lokale Koordinaten

## Griechische Buchstaben

Formelzeichen	Bedeutung
$\alpha$	Relaxationsfaktor, Winkel
$\beta$	Winkel
$\delta_{ij}$	Kroneckersymbol
$\xi(X) = \frac{\mu}{\rho \bar{u}} \left[ \exp \left\{ \frac{Re(X - X_{max})}{X_{max} - X_{min}} \right\} - 1 \right]$	Exponentialfunktion
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit
$\mu$	dynamische Viskosität
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$	Nablaoperator
$\nu$	kinematische Viskosität
$\rho$	Dichte
$\omega$	Wirbelstärke
$\Gamma$	Rand
$\Phi$	abhängige Variable
$\Psi$	Stromfunktion
$\Omega$	Rechengebiet

## Indizes

Formelzeichen	Bedeutung
$av$	gemittelter Wert
$inlet$	Einlass-
$nb$	benachbarter Tetraeder
$outlet$	Auslass-
$wall$	Wand-
$\infty$	Bezugs-

## Superskripte

Formelzeichen	Bedeutung
$c$	konvektive Geschwindigkeitskomponente
$d$	dissipative Geschwindigkeitskomponente
$m$	massenerhaltende Geschwindigkeitskomponente
$*$	dimensionslose Größe
$-$	gemittelte Größe
$\wedge$	Näherung

## Dimensionslose Kennzahlen

Formelzeichen	Bedeutung
$Co = \max(u\Delta t/\Delta x, \nu\Delta t/\Delta x^2)$	Courantzahl
$Pr = c_p\mu/\lambda$	Prandtlzahl
$Re = uL/\nu$	Reynoldzahl
$Wo = \sqrt{2\pi f/\nu}R$	Womersleyzahl

## Abkürzungen

CVFEM	<u>C</u> ontrol <u>V</u> olume based <u>F</u> inite <u>E</u> lement <u>M</u> ethod
FEM	<u>F</u> inite <u>E</u> lemente <u>M</u> ethode
FLO	<u>F</u> lux <u>O</u> rientated Scheme
FLOS	<u>F</u> lux <u>O</u> rientated Scheme with <u>S</u> ource Term
FVM	<u>F</u> inite <u>V</u> olumen <u>M</u> ethode
KAPPA	<u>K</u> arlsruhe <u>P</u> arallel <u>P</u> rogram for <u>A</u> erodynamics
MARS	<u>M</u> onotone <u>A</u> dvection <u>R</u> econstruction <u>S</u> cheme
MAW	<u>M</u> ass <u>W</u> eighted Scheme
PISO	<u>P</u> ressure <u>I</u> mplicit with <u>S</u> plitting of <u>O</u> perators
SIMPLE	<u>S</u> emi <u>I</u> mplicit <u>M</u> ethod for <u>P</u> ressure <u>l</u> inked <u>E</u> quations
SIMPLEC	SIMPLE <u>C</u> onsistent
SIMPLER	SIMPLE <u>R</u> evised



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Im Rahmen des Forschungsschwerpunktes Bioströmungsmechanik werden am Institut für Strömungslehre der Universität Karlsruhe (TH) Blutströmungen im menschlichen Körper untersucht. Naturgemäß spielt dabei die Strömung im Herzen und den umgebenden Blutgefäßen eine zentrale Rolle. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die numerische Simulation der dreidimensionalen, pulsierenden Strömung im Aortenbogen, die sowohl mit einem selbstentwickelten Code (*KAPPA-cvfem*) als auch einem kommerziellen Code (*STAR-CD*<sup>®</sup>) durchgeführt wird.

### Medizinische Aspekte

Erkrankungen des Kreislaufsystems sind in allen Industriestaaten die Haupttodesursache. Problematisch gestaltet sich allerdings die genaue Definition eines Krankheitsbildes, da der Übergang zwischen normalen, altersbedingten zu pathologischen Veränderungen fließend verläuft. Die Folgeerkrankungen an Herz, Gehirn, anderen Organen oder den Extremitäten sind ebenso folgenschwer und verbreitet wie bei der Atherosklerose. Die statistische Erfassung der Todesursachen spiegelt diese Problematik wider, zumal das Durchschnittsalter der an den Folgen von Gefäßkrankheiten Verstorbenen jenseits des siebzigsten Lebensjahres liegt und eine Abgrenzung zum Alterstod hier willkürlich erscheint. Dessen ungeachtet kommt den Gefäßerkrankungen neben dem individuellen Leid der Betroffenen durch die Kosten für Früherkennung, Prävention, Therapie und Rehabilitation eine volkswirtschaftliche Bedeutung zu, die Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet rechtfertigt.

Auch wenn die Ursachen der Entstehung der Atherosklerose noch nicht vollständig geklärt sind, können anhand von Risikoprofilen, präventive und kurative Maßnahmen ergriffen werden, die zu einem sichtbarem Rückgang in den Morta-

litätsstatistiken führen. Die wichtigsten, allgemein akzeptierten Risikofaktoren, die die Atherosklerose begünstigen, sind :

- Alter
- Geschlecht
- genetische Veranlagung
- Störungen des Fettstoffwechsels (Hyperlipoproteinämie)
- Nikotinabusus
- Störung des Glukosestoffwechsels (Diabetes mellitus)
- Fettsucht (Adipositas).

Solange jedoch bei einem nennenswerten Anteil aller an Gefäßkrankheiten Verstorbener keiner dieser Risikofaktoren zutrifft, muss weiterhin Ursachenforschung betrieben werden.

Einen Anhaltspunkt hierfür liefert die Erkrankenshäufigkeit, die nicht nur zwischen verschiedenen Populationen und innerhalb einer Population bei verschiedenen Individuen unterschiedlich ausgeprägt ist. Auch innerhalb eines Individuums gibt es Affinitäten zu bestimmten Gefäßabschnitten, die einen Zusammenhang zwischen dem Auftreten von Gefäßerkrankungen und lokalen Eigenschaften, wie der Gefäßbeschaffenheit und den lokalen Strömungseigenschaften nahelegen. Charakteristische Gefäßformen, die eine verstärkte Entstehung von Atherosklerose bzw. hypertensiver Arteriosklerose begünstigen, sind nach Untersuchungen von Anitschkow [2] und Aschoff [3] :

- Krümmerstrecken, z.B. der Aortenbogen (Arcus aortae), die Krümmung der inneren Halsschlagader (Carotissyphon) oder in Teilen der Hirnschlagader (Knie der Arteria lenticulostriata),
- Verzweigungen, z.B. die Abgänge der großen Arterien des Aortenbogens, die Teilung der Bauchaorta (Aorta abdominalis), der linken Herzkranzschlagader (Aorta coronaria sinistra) oder der Halsschlagader (Aorta carotis communis).

Resultierend aus der Betrachtung der örtlichen Faktoren wird die Hämodynamik als zusätzlicher Risikofaktor diskutiert. Die kausalen Zusammenhänge werden in der medizinischen Fachliteratur jedoch nicht einheitlich beschrieben und reichen über niedrige lokale Drücke, hohe und niedrige Schubspannungen bis zur Turbulenz. Da der Aortenbogen einvernehmlich als ein Bereich mit erhöhtem Risiko für Gefäßerkrankungen angesehen wird, soll in der vorliegenden Arbeit die Strömung



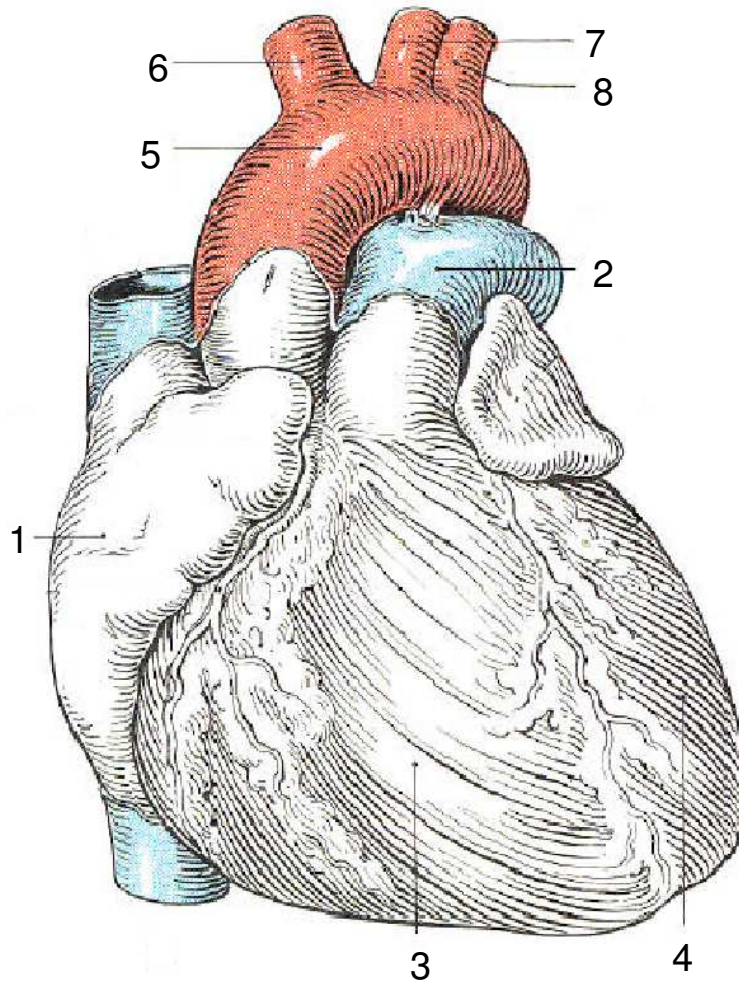


Abbildung 1.1: Herz (ventrale Ansicht)

im Aortenbogen genauer untersucht werden. Nicht berücksichtigt wird hier die Bewegung der elastischen Aderwände. Zur Simulation der dazu notwendigen Fluid-Struktur-Interaktion sind nichtlineare Modelle für die Struktur und eine vollständige Kopplung der struktur- und strömungsmechanischen Grundgleichungen nötig. Die entsprechenden Modelle und Algorithmen sind zur Zeit Gegenstand der Forschung und noch nicht auf die komplexe Fragestellung der Aderströmung anwendbar. Aus der Simulation des Aortenbogens mit starren Wänden können qualitative Aussagen über die Struktur der Strömung und damit ihren Einfluss auf die oben angesprochenen Risikofaktoren gewonnen werden.

Eine Frontalansicht (ventral) des menschlichen Herzens ist in Abbildung 1.1. Neben dem rechten Vorhof (Atrium dextrum, 1) und dem Stamm der Lungenschlag-

adern (Truncus pulmonalis, 2) sind die beiden Ventrikel (Ventriculus dexter, 3 und Ventriculus sinister, 4) zu erkennen. Die Aorta beginnt mit der Erweiterung der Aortenwurzel am Ursprung aus dem linken Ventrikel (Bulbus aortae) und geht in den aufsteigenden Teil der Aorta (Aorta ascendens) über. Daran schließt sich der eigentliche Aortenbogen (5) mit den Abgängen zum Kopf und den oberen Extremitäten an. Der erste Abgang ist der als Truncus brachiocephalicus (6) bezeichnete Arm-Kopf-Schlagaderstamm, der sich in die rechte Halsschlagader (Aorta carotis communis dextra) und die rechte Schlüsselbeinarterie (Aorta subclavia dextra) teilt. Anschließend erfolgen die Verzweigungen zur linken Halsschlagader (Aorta carotis communis sinistra, 7) und zur linken Schlüsselbeinarterie (Aorta subclavia sinistra, 8). Im weiteren Verlauf geht die Aorta in den absteigenden Teil (Aorta descendens) über, der durch das Zwerchfell in die Brustkorb- (Aorta thoracica) und die Bauchschlagader (Aorta abdominalis) unterteilt wird. Das in Kapitel 5 untersuchte Aortenbogenmodell beginnt unmittelbar hinter der Aortenwurzel und umfasst die Abgänge 6, 7 und 8 sowie ein Stück der absteigenden Aorta (siehe Abbildung 5.19).

## Strömungsmechanische Aspekte

Aus der Sicht der Strömungsmechanik stellt der Aortenbogen unter zwei wesentlichen Aspekten ein interessantes Forschungsobjekt dar. Zunächst sind im Bereich hinter der Aortenklappe Einlaufeffekte ebenso zu beobachten, wie in den drei Abzweigungen zu den Hals- und Schlüsselbeinarterien. Diesen Effekten werden im Bereich der Verzweigungen Ablösungen überlagert, die wiederum von der zeitlichen Pulsation der Blutströmung beeinflusst werden. Daraus resultiert eine komplexe Strömungsstruktur aus den angesprochenen Ablösungen, Rückströmungen durch die Pulsation und den natürlichen Sekundärströmungen, die in allen Formen von Geometrien mit Krümmung auftreten.

Die Mechanismen pulsierender Strömungen - auch in einfachen Geometrien - sind nach heutigem Stand sowohl experimentell als auch numerisch Gegenstand der Forschung. Çarpınlioğlu und Gündoğdu [12] stellen beispielsweise die noch offenen Fragen für pulsierende Rohrströmungen dar. Bestehende analytische oder experimentelle Untersuchungen sind nur unter starken Vereinfachungen wie ausgebildeter Strömung gültig oder betrachten nur Teilaspekte der untersuchten Strömung, beispielsweise die Abhängigkeit von der Pulsationsfrequenz ohne Berücksichtigung der Pulsationsamplitude.

Die Anwendung neuester numerischer Verfahren zur Simulation der Strömung im Aortenbogen kann daher sowohl strömungsmechanische Erkenntnisse liefern als auch der medizinischen Praxis dienlich sein, da experimentell - insbesondere *in vitro* - nur schwer zugängliche Bereiche untersucht werden können.

## 1.2 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Zum einen soll die pulsierende Strömung im menschlichen Aortenbogen unter ihren strömungsmechanischen Aspekten untersucht werden und damit Hilfestellung für die medizinische Untersuchung des Auftretens von Gefäßkrankheiten geleistet werden. Hierzu werden experimentelle Ergebnisse der Universität München herangezogen und es wird gezeigt, dass die eingesetzten numerischen Verfahren in der Lage sind, quantitative Ergebnisse mit der erforderlichen Genauigkeit zu liefern.

Der zweite Aspekt der vorliegenden Arbeit ist die Anwendung eines CVFEM-Verfahrens auf zeitabhängige, dreidimensionale Strömungen mit Massentransport durch das Rechengebiet. Dies stellt eine Erweiterung der in der Literatur vorhandenen Anwendung von CVFEM-Verfahren dar.

Zunächst wird daher ein CVFEM-Verfahren basierend auf den Methoden von Patankar *et al.* implementiert. Anhand einfacher Testfälle werden dann sowohl *KAPPA-cvfem* als auch das parallel eingesetzte *STAR-CD*<sup>©</sup> verifiziert und schließlich zur Simulation der pulsierenden Strömung im menschlichen Aortenbogen angewandt.

Die Verifikationsstrategie richtet sich dabei nach den Effekten der letztendlich untersuchten pulsierenden Strömung. Im Einzelnen sind dies Einlaufeffekte, die anhand laminarer, stationärer Rohrströmungen überprüft werden. Auftretende Ablösungen werden durch eine stationäre Rohrströmung mit plötzlicher Verengung verifiziert. Dreidimensionale Sekundärströmungen können in einem 180° Krümmer untersucht werden. Abschließend wird die Zeitgenauigkeit der eingesetzten Verfahren mit einer pulsierenden Rohr- und Krümmerströmung nachgewiesen. Zur Verifikation werden die lokalen ggf. zeitabhängigen Geschwindigkeitsprofile mit experimentellen Daten oder analytischen Lösungen verglichen. Die Struktur der Strömungen im 180° Krümmer und im Aortenbogen wird zudem auf ihre Topologie untersucht, was durch die Analyse der kritischen Punkte geschieht.

Anzumerken ist, dass in der vorliegenden einige Annahmen bzw. Vereinfachungen gegenüber der Strömung in der Realität gemacht werden. Im Einzelnen sind dies :

**Starre Aortenbogenwand** Die verfügbaren numerischen Verfahren beherrschen keine Strömungs-Strukturkopplung. Die Bewegung der Aortenbogenwände aufgrund des Druckpulses wird daher in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt.

**Newtonsches Medium** In den hier behandelten großen Blutgefäßen sind die Nicht-Newtonchen Eigenschaften des Blutes nicht entscheidend für die Struktur der Strömung. Um zudem Vergleichbarkeit zum Experiment zu gewährleisten, wird in den durchgeführten Simulationen ein Newtonsches Medium benutzt.

**Konstante Volumenstromanteile** Entsprechend den Vorgaben des Experimentes wird eine zeitlich konstante Aufteilung der Ein- und Auslassvolumenströme als Randbedingung vorgegeben.

Aus den oben beschriebenen Aufgaben ergibt sich die Gliederung der vorliegenden Arbeit :

- Beschreibung der behandelten Grundgleichungen in Kapitel 2,
- Vorstellung der eingesetzten numerischen Verfahren in Kapitel 3,
- Verifikation von *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*® in Kapitel 4,
- Simulation der Strömung im Aortenbogen in Kapitel 5.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

### 2.1 Erhaltungsgleichungen

Bei der Blutströmung im Aortenbogen handelt es sich um eine pulsierende, laminare Strömung eines Nicht-Newtonschen Mediums. Die Nicht-Newtonschen Effekte, die aus der Zusammensetzung menschlichen Blutes aus Blutplasma und einem nennenswerten Anteil an verschiedenen Blutkörperchen (Hämatokritwert) herrühren, werden in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt. Diese Vernachlässigung beruht auf dem geringen Einfluss dieser Effekte in den großen Blutgefäßen, zu denen der Aortenbogen und seine Abzweigungen zählen. Im folgenden wird demnach ein Newtonsches Medium behandelt und die entsprechenden Grundgleichungen nach der Hierarchie im Prandtl-Führer durch die Strömungslehre [48] vorgestellt. Ausgehend von der allgemeinen Form der Navier-Stokes-Gleichungen werden die Gleichungen für die eingesetzten numerischen Verfahren und die behandelten Strömungsfälle umformuliert bzw. angepaßt.

#### Differentielle Form

In den meisten technisch und in der Natur relevanten strömungsmechanischen Vorgängen können Fluide als Kontinuum angesehen werden. Sie unterliegen den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie, welche aus den mechanischen und thermodynamischen Gesetzen der Kontinuumsmechanik (siehe z.B. Oertel [46]) oder aus gaskinetischen Betrachtungsweisen (siehe z.B. Anderson [1]) abgeleitet werden können. Beide Vorgehensweisen führen auf ein System partieller Differentialgleichungen in Abhängigkeit des Ortes  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  und der Zeit  $t$  für die volumenbezogenen Größen Dichte  $\rho(\vec{x}, t)$ , Impulsdichte  $\rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)$  und Energiedichte  $\rho(\vec{x}, t) \cdot E(\vec{x}, t)$ . Unter Vernachlässigung von Massenkräften und äußeren

Wärmequellen lauten sie in koordinatenunabhängiger Vektorschreibweise :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 & \text{Massenerhaltung} \\
 \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) - \nabla \cdot \mathbf{T} &= 0 & \text{Impulserhaltung} \\
 \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} E) - \nabla \cdot (T \cdot \vec{v}) + \nabla \cdot q &= 0 & \text{Energieerhaltung}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Gesamtenergie  $E(\vec{x}, t)$  setzt sich dabei aus der inneren Energie  $e(\vec{x}, t)$  und der kinetischen Energie zusammen :

$$E(\vec{x}, t) = e(\vec{x}, t) + \frac{1}{2}[\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)] \quad .$$

Der aufgrund der Drehimpulserhaltung symmetrische Spannungstensor  $\mathbf{T}(\vec{x}, t)$  und der Wärmestromvektor  $\mathbf{q}(\vec{x}, t)$  ergeben sich unter der Annahme eines Newtonschen Fluids und der Stokeschen Hypothese zu :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\vec{x}, t) &= -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v})\mathbf{I} \\
 \mathbf{q}(\vec{x}, t) &= -\lambda\nabla\theta
 \end{aligned}$$

$\theta(\vec{x}, t)$  ist hierbei die Temperatur,  $p(\vec{x}, t)$  der thermodynamische Druck,  $\mu(\vec{x}, t)$  die dynamische Viskosität,  $\lambda(\vec{x}, t)$  die Wärmeleitfähigkeit und  $\mathbf{D}(\vec{x}, t)$  der Deformationsgeschwindigkeitstensor, der als symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradiententensors wie folgt definiert ist :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [(\nabla\vec{v}) + (\nabla\vec{v})^T] \quad .$$

Das bisher angegebene System muss durch die Vorgabe von Zustandsgleichungen oder physikalischen Einschränkungen wie konstanter Dichte geschlossen werden. Die speziellen Eigenschaften des Fluids gehen über die stoffspezifischen Größen Viskosität  $\mu$  und Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  in das Gleichungssystem ein.

Nicht-Newtonsche Medien zeichnen sich dadurch aus, dass der Ansatz  $\tau = \mu \cdot \dot{\gamma}$  seine Gültigkeit verliert und durch eine - möglicherweise nichtlineare - Fließfunktion  $\tau = f(\dot{\gamma})$  ersetzt wird. Die Navier-Stokes-Gleichungen enthalten allerdings den Ansatz für ein Newtonsches Medium und sind ohne weiteres nicht auf Nicht-Newtonsche Medien anwendbar. Wird eine Viskositätsfunktion  $\mu_{eff}(\dot{\gamma}) = f(\dot{\gamma})/\dot{\gamma}$  eingeführt, kann weiter mit den Navier-Stokes-Gleichungen gearbeitet werden, solange sich für  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  keine Singularität ergibt. Dies ist für Medien der Fall, die eine Fließgrenze besitzen und sich für verschwindende Schergeschwindigkeit wie ein Festkörper verhalten. Ein Ansatz für die Modellierung der Nicht-Newtonschen Eigenschaften ist das modifizierte Cross-Modell nach Perktold [53], das ähnlich wie

ein algebraisches Turbulenzmodell in bestehende Softwarepakete eingepasst werden kann.

Mit den oben beschriebenen Differential- und Zustandsgleichungen ist das System 2.2 geschlossen und der Zustandsvektor

$$\vec{w}(\vec{x}, t) = [\rho(\vec{x}, t), \rho\vec{v}(\vec{x}, t), \rho E(\vec{x}, t)]^T$$

kann bestimmt werden. Im Folgenden werden die Grundgleichungen für die eingesetzten Finite-Volumen-Verfahren umformuliert und an die behandelten inkompressiblen Medien angepasst.

## Integrale Form

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Strömungen inkompressibler Fluide behandelt. Bei konstanter Dichte  $\rho$  sind Massen-, Impuls- und Energieerhaltung voneinander entkoppelt. Dies hat den Vorteil, dass die Energiegleichung nun getrennt behandelt werden kann. Da im Folgenden nur das Strömungsproblem von Interesse ist, kann die Berechnung der Energiegleichung vollkommen entfallen.

Bei der Behandlung inkompressibler Fluide vereinfacht sich die Massenerhaltung zu  $\nabla\vec{v} = 0$ . Mit der Anwendung der Divergenzfreiheit, Integration über ein Kontrollvolumen  $V$  und dem Gauß'schen Integralsatz zur Umwandlung der Divergenzterme schreiben sich die Grundgleichungen als

$$\int_A \rho\vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV + \int_A (\rho u\vec{v} - \mu\nabla u) \cdot \vec{n} dA &= \int_V \left( S_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dV \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV + \int_A (\rho v\vec{v} - \mu\nabla v) \cdot \vec{n} dA &= \int_V \left( S_y - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dV \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho w dV + \int_A (\rho w\vec{v} - \mu\nabla w) \cdot \vec{n} dA &= \int_V \left( S_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right) dV \quad . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hierbei ist  $\rho$  die konstante Dichte,  $\mu$  die dynamische Viskosität des Fluids,  $\vec{v}$  ist der Geschwindigkeitsvektor mit seinen Komponenten  $u$ ,  $v$ , und  $w$  und  $p$  steht für den Druck. Die Integration erfolgt über das Kontrollvolumen  $V$  bzw. die Kontrollvolumenoberfläche  $A$ .  $S_x$ ,  $S_y$  und  $S_z$  sind volumetrische Quellterme (Gravitation, Zentrifugal- und Corioliskraft, etc.). Eine genaue Herleitung findet sich z.B. bei Oertel [47].

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, da  $S_x$ ,  $S_y$  und  $S_z$  für die im Rahmen der

vorliegenden Arbeit behandelten Strömungen (Kapitel 4 und 5) vernachlässigt werden können. Für die Formulierung der diskretisierten Gleichungen ist es vorteilhaft, die folgenden Flüsse einzuführen:

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_u &= \rho u \vec{v} - \mu \nabla u \\
 \vec{J}_v &= \rho v \vec{v} - \mu \nabla v \\
 \vec{J}_w &= \rho w \vec{v} - \mu \nabla w .
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die Impulsgleichungen 2.3 lauten damit in der Form, in der sie in Kapitel 3 diskretisiert werden :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV + \int_A \vec{J}_u \cdot \vec{n} dA &= - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV \\
 \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV + \int_A \vec{J}_v \cdot \vec{n} dA &= - \int_V \frac{\partial p}{\partial y} dV \\
 \frac{d}{dt} \int_V \rho w dV + \int_A \vec{J}_w \cdot \vec{n} dA &= - \int_V \frac{\partial p}{\partial z} dV .
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

## Dimensionslose Form

Für pulsierende Strömungen werden die Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichungen 2.2 und 2.3 mit einer charakteristischen Länge  $L$ , einer charakteristischen Geschwindigkeit  $U$  und der Pulsationsfrequenz  $\omega = 2\pi f$  entdimensioniert :

$$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} , \quad \vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{U} , \quad t^* = t \cdot 2\pi f , \quad p^* = \frac{P}{\rho U^2} .$$

Mit den dimensionslosen Kennzahlen Reynoldszahl  $Re_L = UL/\nu$  und Womersleyzahl  $Wo = \sqrt{\omega/\nu}R$  ergeben sich die dimensionslosen Grundgleichungen :

$$\begin{aligned}
 \nabla \vec{v} &= 0 \\
 \frac{Wo^2}{Re_L} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \frac{1}{Re_L} \cdot \Delta \vec{v} .
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Als charakteristische Länge  $L$  wird in den Verifikationsbeispielen in Kapitel 4 und dem 180° Krümmer jeweils der Rohrdurchmesser  $D$  gewählt. Beim Aortenbogen wird der Durchmesser zu Beginn des Rechengebietes hinter der Aortenwurzel als Längenmaß benutzt. Die charakteristische Geschwindigkeit ist in allen hier behandelten Fällen die mittlere Geschwindigkeit im Einlass  $\bar{u}$ .

Aus der Ähnlichkeitsmechanik ergibt sich die Interpretation der obigen Kennzahlen als Kräfteverhältnisse. Die Reynoldszahl beschreibt das Verhältnis der Trägheits- zur Reibungskraft. Die Womersleyzahl kennzeichnet das Verhältnis der instationären Beschleunigungskräfte zur Reibungskraft.



## 2.2 Randbedingungen

Um das Strömungsproblem vollständig zu beschreiben, werden zusätzlich zu den Erhaltungsgleichungen Randbedingungen benötigt. Für die in der vorliegenden Arbeit behandelten Fälle sind dies Einlass- Auslass- und Wandrandbedingungen. Dabei ist zwischen den Wandrandbedingungen und den freien Rändern an Ein- und Auslass zu unterscheiden. Während die Wände auch im Experiment Ränder darstellen, sind Ein- und Auslass meist willkürlich zum Beispiel aus Speicherplatz- oder Rechenzeitgründen eingeführt. Der Einfluss dieser freien oder offenen Ränder auf die Lösung soll demnach möglichst gering sein.

**Wand :** Für die in dieser Arbeit betrachteten Strömungsfälle gilt an allen Wänden die Haftbedingung. Das heißt die Geschwindigkeit des Fluids an der Wand ist gleich der Geschwindigkeit der Wand selbst (*Dirichlet*-Bedingung) :

$$\vec{v} = \vec{v}_{wall} \quad . \quad (2.7)$$

**Einlass :** An Einlassrändern wird je nach Art der Strömung eine konstante oder eine zeitabhängige Geschwindigkeitsverteilung und damit der Einlassmassenstrom vorgegeben (*Dirichlet*-Bedingung). Bei inkompressiblen Strömungen ist der Einlass somit vollständig beschrieben, da der Strömungszustand hier nicht vom Druckniveau abhängt :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}_{inlet}(\vec{x}, t) \quad . \quad (2.8)$$

**Auslass :** Die Formulierung der Auslassrandbedingung ist insbesondere bei Strömungen mit Massentransport durch das Rechengbiet hindurch sehr kritisch. Die gebräuchlichste Variante der Auslassrandbedingung ist die homogene (*Neumann*-Bedingung) [24] :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} = 0 \quad . \quad (2.9)$$

Diese Bedingung beruht auf der Tatsache, dass am Auslassrand normalerweise keinerlei Strömungsgrößen bekannt sind. Um dennoch eine sinnvolle Annahme treffen zu können, wird der Auslassrand so gelegt, dass die Geschwindigkeit nach dem Auslass gleich der Geschwindigkeit am Rand selbst ist. Mathematisch formuliert bedeutet dies, dass die Ableitung der Geschwindigkeit senkrecht zum Auslassrand gleich Null ist, wie Gleichung 2.9 beschreibt. In der Praxis bedeutet diese Randbedingung eine Einschränkung für die Wahl des Rechengbietes. Die Position der Auslassränder muss so gewählt werden, dass die Bedingung 2.9 erfüllt ist. Im Anwendungsbeispiel des Aortenbogens sind daher beispielsweise die Abgänge gegenüber der realen Geometrie verlängert, um die Outletrandbedingung

anwenden zu können.

**Druck :** Da in den Erhaltungsgleichungen inkompressibler Strömungen der Druck lediglich als Gradient auftritt, ist das absolute Druckniveau beliebig. Um das Druckniveau den realen Werten anzupassen, wird der Druck an einem beliebigen Punkt des Kontrollraums festgelegt. Die Formulierung von Druckrandbedingungen für inkompressible Strömungen ist möglich und in *STAR-CD*<sup>©</sup> implementiert. In der vorliegenden Arbeit sind keine Druckrandbedingungen eingesetzt worden und in *KAPPA-cvfem* auch nicht implementiert. Eine Möglichkeit zur Anwendung von Druckrandbedingungen in CVFEM-Verfahren findet sich bei Saabas [57].

## 2.3 Anfangsbedingungen

Zur Lösung der gegebenen Differentialgleichung sind neben den oben beschriebenen Randbedingungen Anfangsbedingungen vorzugeben. Genauer sind für alle abhängigen Variablen, die Werte zum Zeitpunkt  $t = 0$  bzw. der nullten Iteration festzulegen. Diese Werte sollten im Zusammenhang mit den gegebenen Strömungsproblem stehen und speziell von der Massenerhaltung möglichst wenig abweichen. Vorgegeben werden

$$\vec{v}(\vec{x}, 0) \quad p(\vec{x}, 0)$$

beziehungsweise

$$\vec{v}^0(\vec{x}) \quad p^0(\vec{x}) \quad .$$

Zudem spielt der gewählte Lösungsalgorithmus eine Rolle dabei, für welche numerisch berechneten Größen, Anfangsbedingungen benötigt werden. Genauer wird auf diesen Aspekt in Kapitel 3.3 eingegangen.

## 2.4 Strömungstopologie

Die numerische Simulation liefert als Ergebnis ein vollständiges räumliches und zeitabhängiges Feld aller abhängigen Variablen. Die hierbei anfallende Datenmenge erfordert spezielle Werkzeuge zur Aufbereitung und Analyse der gewonnenen Daten. Neben den herkömmlichen Visualisierungsmethoden, wie Schnittbildern, Isoflächen, Kontur- und Vektorplots bietet die Analyse der Strömungstopologie eine Möglichkeit der Datenreduktion und Strukturierung des dreidimensionalen Strömungsfeldes. Hierzu wird ein gegebenes Vektorfeld auf kritische Punkte untersucht. Die Grundlagen der Theorie kritischer Punkte sind von Chong *et al.* [13]

beschrieben worden und sollen hier kurz vorgestellt werden.

Die Theorie kritischer Punkte ist auf beliebige dreidimensionale Vektorfelder anwendbar. Neben dem Geschwindigkeitsfeld sind dies in der Strömungsmechanik beispielsweise die Vektorfelder der Wirbelstärke oder der Druckgradienten. Ohne die allgemeine Anwendbarkeit der Theorie einzuschränken wird im Folgenden die Analyse des Geschwindigkeitsfeldes behandelt. Für das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld sind in jedem Punkt die Integralkurven parallel zum Richtungsfeld bestimmt. Ein kritischer Punkt ist dadurch gekennzeichnet, dass der Betrag der Geschwindigkeit verschwindet und der Integralkurve keine Richtung zugeordnet ist. Die Untersuchung der näheren Umgebung eines solchen Punktes ist durch eine Taylorreihenentwicklung des Vektorfeldes möglich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird der kritische Punkt  $[x_0, y_0, z_0]$  als  $[0, 0, 0]$  angenommen. Die Reihenentwicklung ergibt :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} = u &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-j} U_{i,j,k} x^i y^j z^k + O_1(N+1) \\
 \dot{y} = v &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-j} V_{i,j,k} x^i y^j z^k + O_2(N+1) \\
 \dot{z} = w &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-j} W_{i,j,k} x^i y^j z^k + O_3(N+1)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

mit

$$\begin{aligned}
 U_{i,j,k} &= \frac{1}{i!j!k!} \frac{\partial^{i+j+k} u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \\
 V_{i,j,k} &= \frac{1}{i!j!k!} \frac{\partial^{i+j+k} v}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \\
 W_{i,j,k} &= \frac{1}{i!j!k!} \frac{\partial^{i+j+k} w}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Werden die Fehlerterme höherer Ordnung  $O_i$  vernachlässigt, ergibt sich ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} .$$

In der freien Strömung ist die Reihenentwicklung bis zur Ordnung  $N = 1$  ausreichend. Bei der Untersuchung des Vektorfeldes der Geschwindigkeiten ergeben sich

die Koeffizienten der Matrix  $\mathbf{A}$  aus den Gradienten  $a_{ij} = \partial \dot{x}_i / \partial x_j$ . Die Trajektorien des Gleichungssystems 2.4 sind die Bahnlinien des Stromfeldes, welche im stationären mit den Stromlinien identisch sind. An festen Wänden im Strömungsfeld ist das Verschwinden des Geschwindigkeitsbetrages keine Bedingung mehr für das Vorhandensein eines kritischen Punktes. Hier gilt stattdessen die Bedingung der verschwindenden Wandschubspannung  $\tau_W = 0$ . Mit einer Variablentransformation lässt sich allerdings ein zu 2.4 analoges Gleichungssystem aufstellen, so dass die folgenden Überlegungen sich auf kritische Punkte an festen Wänden übertragen lassen. Eine ausführlichere Betrachtung dazu findet sich beispielsweise bei Brenneisen [9]. Die Untersuchung der kritischen Punkte erfolgt nun über eine Betrachtung der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$ . Das charakteristische Polynom  $\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}]$  ergibt sich zu

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (2.12)$$

mit den reellwertigen Invarianten

$$\begin{aligned} P &= -\text{Spur}(\mathbf{A}) &= &-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ Q &= \frac{1}{2} [P^2 - \text{Spur}(\mathbf{A}^2)] &= &\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ R &= -\det(\mathbf{A}) &= &-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad . \end{aligned}$$

Die Lösungen der kubischen Gleichung 2.12 lassen sich anhand der Diskriminante

$$D = 27R^2 + (4P^3 - 18PQ)R + (4Q^3 - P^2Q^2) \quad (2.13)$$

klassifizieren (siehe Bronstein [10]). Ist  $D > 0$  ergeben sich aus Gleichung 2.12 ein reellwertiger und ein Paar konjugiert-komplexer Eigenwerte. Für  $D < 0$  treten drei reelle Eigenwerte auf.

Zum besseren Verständnis des Strömungsfeldes in der Umgebung kritischer Punkte kann der zweidimensionale Fall, beispielsweise des Wandschubspannungsfeldes, betrachtet werden. Analog zu den Gleichungen 2.4 bis 2.13 ergibt sich ein charakteristisches Polynom aus der linearisierten Entwicklung des Vektorfeldes in der Umgebung eines kritischen Punktes :

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0 \quad (2.14)$$

mit den Invarianten

$$\begin{aligned} P &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \\ Q &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

und der vereinfachten Diskriminante

$$D = 4Q - P^2 \quad (R = 0) \quad . \quad (2.15)$$

Wie in Abbildung 2.1 zu erkennen ist, trennt die Nulllinie der Diskriminante  $D = 0$  die PQ-Ebene in Form einer Parabel. Oberhalb dieser Parabel ( $D > 0$ ) liegen die

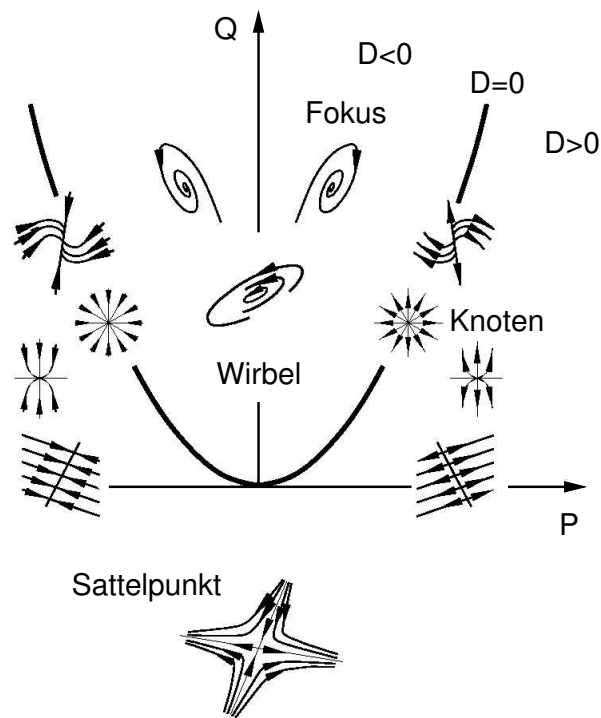


Abbildung 2.1: Klassifizierung kritischer Punkte eines zweidimensionalen Vektorfeldes

Gebiete komplexer Eigenwerte, unterhalb ( $D < 0$ ) finden sich reelle Eigenwerte. Die komplexen Eigenwerte kennzeichnen Foki und Wirbelpunkte. Für  $Q > 0$  sind den reellen Eigenwerten verschiedene Knoten zugeordnet. Unterhalb der P-Achse  $P < 0$  liegen Sattelpunkte.

Die dreidimensionale Klassifizierung kritischer Punkte soll hier für den Spezialfall inkompressibler Strömungen vorgestellt werden. Für inkompressible Strömungen ergibt sich aus der die Kontinuitätsbedingung  $\nabla \vec{v} = 0$ , dass die Invariante  $P$  gleich Null ist und sich damit Gleichung 2.13 zu  $D = 27R^2 + 4Q^3$  vereinfacht. Die Nulllinie der Diskriminante  $D = 0$  teilt jetzt die QR-Ebene in einen Bereich mit komplexen ( $D > 0$ ) und einen Bereich mit reellwertigen Eigenwerten ( $D < 0$ ). In Abbildung 2.2 sind verschiedene Typen kritischer Punkte in der QR-Ebene eingetragen. Im Bereich  $D = 27R^2 + 4Q^3 > 0$  ergeben sich Strudel- oder Wirbelpunkte, ansonsten liegen Sattel-Knoten-Kombinationen vor. Nach Chong *et al.* [13] sind dies im einzelnen:

### Sattel-Knoten-Kombinationen

1a stabiler Knoten / Sattel / Sattel

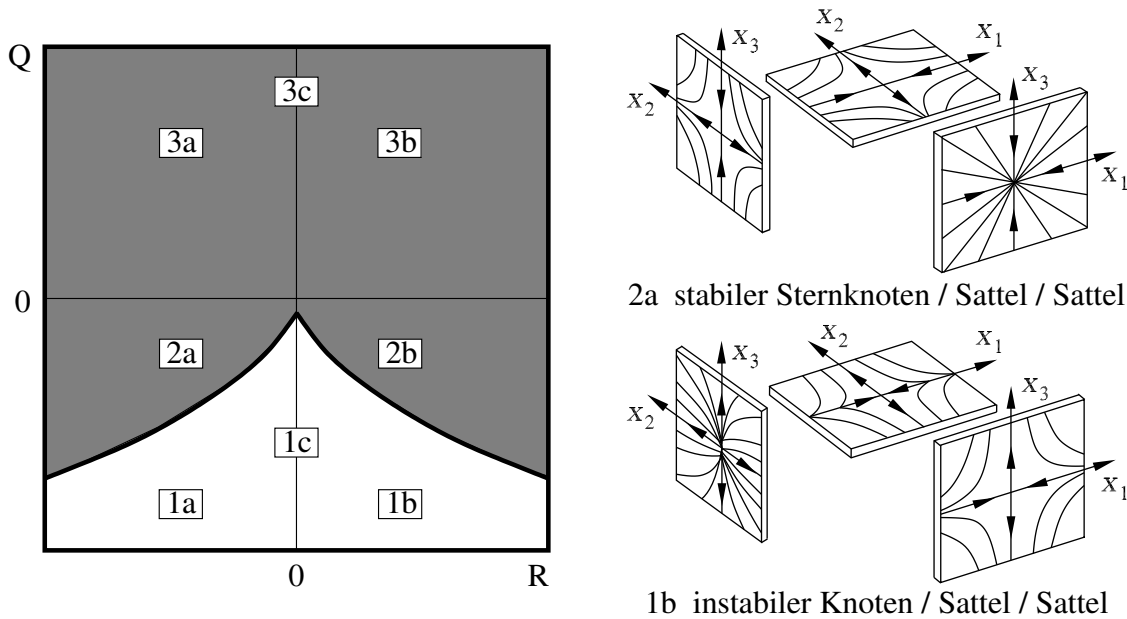


Abbildung 2.2: Klassifizierung kritischer Punkte in der QR-Ebene

**1b** instabiler Knoten / Sattel / Sattel

**1c** stabiler Knoten-Sattel / instabiler Knoten-Sattel / Staupunkt

**2a** stabiler Sternknoten / Sattel / Sattel

**2b** instabiler Sternknoten / Sattel / Sattel

### Strudelpunkte (Foki)

**3a** stabiler Strudelpunkt

**3b** instabiler Strudelpunkt

**3c** Wirbelpunkt

Zwei Beispiele für kritische Punkte sind in Abbildung 2.2 dargestellt. Für weitere Beispiele sei auf den Prandtl-Führer durch die Strömungslehre [48] oder die Dissertation von Brenneisen [9] verwiesen. Die konkrete Bestimmung kritischer Punkte im diskreten Geschwindigkeitsfeld wird in Kapitel 3.6 bei der Vorstellung der numerischen Verfahren beschrieben.

# Kapitel 3

## Numerisches Verfahren

Das Ziel der numerischen Strömungsmechanik ist es, Werte der abhängigen Variablen wie Geschwindigkeit, Druck oder Temperatur an diskreten Punkten eines gegebenen physikalischen Bereichs zu erhalten. Die Beziehungen zwischen diesen Punkt- oder Knotenwerten werden durch algebraische Gleichungen beschrieben, die aus den problembeschreibenden Differentialgleichungen abgeleitet werden. Je nach numerischer Methode wird zusätzlich eine Aussage über den Verlauf der abhängigen Variablen zwischen den Knotenpunkten gemacht. Zusätzlich zur Ableitung der algebraischen Gleichung wird zu jedem numerischen Verfahren ein Algorithmus zur Lösung der Gleichungen bzw. Gleichungssysteme vorgegeben. Der wesentliche Unterschied zwischen numerischen Verfahren findet sich in der Art und Weise, wie die problembeschreibenden Gleichungen in eine algebraische und damit Computer-verwertbare Form gebracht werden.

Eine der grundlegenden Überlegungen bei der Formulierung numerischer Methoden für Strömungsprobleme ist die Behandlung von Konvektions-Diffusions-Gleichungen, die die Berechnung einer skalaren Größe in einem gegebenen Strömungsfeld beschreiben. Die skalare Größe wird von der Strömung konvektiv transportiert und ihre Gradienten sorgen für diffusiven Transport. Zusätzlich wird die Verteilung des Skalars durch volumetrische Quellterme beeinflusst. So kann der Druckgradient in einer gegebenen Koordinatenrichtung als Quellterm für die entsprechende Geschwindigkeitskomponente gesehen werden. In diesem Sinne können die Impulsgleichungen 2.5 als gekoppelte, nicht-lineare Konvektions-Diffusion-Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten behandelt werden. Methoden, die speziell für Konvektions-Diffusions-Probleme entwickelt wurden, lassen sich dann mit einigen Zusatzüberlegungen zur Kopplung von Druck und Geschwindigkeit, auch für Strömungsprobleme anwenden.

In der vorliegenden Arbeit kommen zwei auf verschiedenen Methoden basierende numerische Verfahren zum Einsatz. Kernpunkt dieser Arbeit ist die Entwicklung eines auf der CVFEM-Methode basierenden Codes zur Lösung der inkompressi-

blen, instationären Navier-Stokes-Gleichungen. Dieser neu entwickelte Code wird anhand der in Kapitel 4 aufgeführten Fälle verifiziert und am Beispiel des menschlichen Aortenbogens angewendet. Zum Vergleich wird der kommerzielle CFD-Code *STAR-CD*<sup>©</sup> herangezogen, der auf der FVM-Methode basiert. Die numerischen Verfahren, auf denen *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> beruhen, werden im Folgenden vorgestellt. Dabei wird ein historischer Überblick über die Entwicklung der CVFEM-Methoden gegeben, der von den ursprünglichen Entwicklungen zur Behandlung einfacher Konvektions-Diffusions-Problemen bis zu dreidimensionalen Strömungsproblemen reicht. CVFEM-Verfahren für dreidimensionale, instationäre Strömungen finden sich in der Literatur derzeit nicht und stellen den zentralen Punkt der vorliegenden Arbeit dar.

## 3.1 Allgemeines

### Methode der gewichteten Residuen

Die in *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> implementierten CVFEM bzw. FVM-Verfahren fallen unter den Oberbegriff der *Methode der gewichteten Residuen*. Im Gegensatz zur klassischen Finite-Differenzen-Methode können bei dieser Methode die Differentialgleichungen nicht direkt ausgewertet werden. Die Ausgangsgleichungen werden daher zunächst in Integralgleichungen umgeformt (Gl. 2.2 und 2.3). Dadurch entsteht eine Variationsrechnungsaufgabe, die durch die in der Variationsrechnung gegebenen Methoden gelöst werden muss. Existiert ein Extremalprinzip für die gegebene Aufgabe, so werden die Integralgleichungen im Berechnungsgebiet integriert. Anschließendes Differenzieren nach den gesuchten Größen führt auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die unbekanntenen Größen liefert. Da für die Navier-Stokes-Gleichungen kein Extremalprinzip bekannt ist, wird auf die Methode der gewichteten Residuen zurückgegriffen. Diese Methode ist zur allgemeinen Lösung von Erhaltungsgleichungen anwendbar und nicht auf Strömungsberechnungen eingeschränkt.

$$L(\Phi) = f \tag{3.1}$$

sei eine beliebige Differentialgleichung im Rechenggebiet  $\Omega$  mit dem Differentialoperator  $L$  und den Randbedingungen

$$B(\Phi) = g$$

auf dem Rand  $\Gamma$  des Rechenggebiet  $\Omega$ . Zur Bestimmung einer Näherungslösung  $\hat{u}$  wird ein Reihenansatz

$$\hat{\Phi} = \sum_{n=1}^n c_n \phi_n \tag{3.2}$$



mit  $n$  linear unabhängigen, frei wählbaren Ansatzfunktionen  $\phi_i$  gemacht. Die Ansatzfunktionen  $\phi_i$  müssen genügend oft differenzierbar sein, um die Randbedingungen zu erfüllen. Damit die gesamte Näherungslösung  $\hat{\Phi}$  bekannt ist, müssen die Koeffizienten  $c_i$  bestimmt werden. Hier zu wird der Ansatz 3.2 in die Differentialgleichung 3.1 eingesetzt. Im Normalfall wird die Näherungslösung die Differentialgleichung nicht exakt erfüllen, vielmehr bleibt das Residuum  $R$  übrig :

$$R = L(\hat{\Phi}) - f \quad . \quad (3.3)$$

Dieses Residuum soll im Innern des Rechengebiets  $\Omega$  minimiert werden. Die Methode der gewichteten Residuen fordert dazu, dass das Integral des mit den linear unabhängigen Funktionen  $w_i$  gewichteten Residuums über das Rechengebiet verschwindet :

$$\int_{\Omega} w_i R d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (3.4)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der  $n$  Gewichtsfunktionen  $w_i$  ergeben sich nach der Integration von 3.4  $n$  unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der  $n$  Unbekannten  $c_i$ . Sowohl FVM als auch FEM und CVFEM-Verfahren fallen unter den Sammelbegriff der Methode der gewichteten Residuen [25]. Sie unterscheiden sich lediglich in der Wahl der Gewichtsfunktionen  $w_i$ .

Finite-Volumen-Verfahren wie in *STAR-CD*<sup>®</sup> zeichnen sich durch die einfachste aller möglichen Gewichtsfunktionen aus: Im betrachteten Subvolumen hat diese den Wert 1, überall sonst den Wert 0. Herausragende Eigenschaft der FVM ist die lokale (im einzelnen Teilvolumen) und globale (im gesamten Rechengebiet) Erhaltungstreue, die immer dann gilt, wenn die numerischen Näherungen für die Oberflächenintegrale benachbarter Gitterzellen betragsmäßig gleich sind. Anschaulich bedeutet dies, dass der Massen- oder Impulsstrom, der einem bestimmten Kontrollraum zufließt, identisch ist mit demjenigen Strom, der ein benachbartes Kontrollvolumen verlässt. Über den Verlauf der Zustandsgrößen zwischen den Knotenpunkten der räumlichen Diskretisierung wird mit der FVM keine Aussage gemacht.

Werden die Gewichtsfunktionen gleich den Ansatzfunktionen gewählt, also

$$w_i = \phi_i,$$

ergibt sich das Galerkin-Verfahren, das den am weitesten verbreiteten Ansatz in der FEM darstellt. Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Gewichtsfunktionen ist die Methode der kleinsten Fehlerquadrate (*least square*). Dabei wird gefordert, dass das Integral der quadrierten Differentialgleichung für die gesuchte Näherungslösung ein Minimum besitzt. Durch Differenzieren nach den  $n$  Unbekannten  $c_i$  ergeben sich Gewichtsfunktionen der Form

$$w_i = 2 \frac{\partial R}{\partial c_i} \quad .$$

Die Wahl von Gewichtsfunktionen nach der *least square* Methode führt zu einem symmetrischen Gleichungssystem, das effizient gelöst werden kann.

Kontrollvolumenbasierte Finite-Elemente-Verfahren versuchen, die Vorteile von FEM- und FVM-Verfahren zu kombinieren. Die Gewichtsfunktionen  $w_i$  werden wie bei den FVM-Verfahren in einem geeignet gewählten Kontrollvolumen zu 1 gesetzt und haben sonst überall den Wert 0. Die Oberfläche eines um einen Gitterknoten angeordneten Kontrollvolumens verläuft innerhalb mehrerer finiter Elemente, so dass sich eine starke räumliche Kopplung ergibt (siehe Kapitel 3.3.1, Abb. 3.3). Die Ansatzfunktionen  $\phi_i$  sind in den einzelnen finiten Elementen so definiert, dass sie über die Kontrollvolumenoberflächen stetig und differenzierbar sind. Hierdurch wird nach Baliga [6] die exakte Einhaltung der physikalischen Erhaltungsprinzipien gewährleistet. Der Verlauf der Zustandsgrößen zwischen den Gitterpunkten wird durch die Ansatzfunktionen ausgedrückt. Die CVFEM-Verfahren verfügen damit über die Flexibilität der Galerkin-FEM-Verfahren: durch die Wahl anderer Ansatzfunktionen kann ein bestehendes Verfahren angepasst werden.

Bei der Anwendung der Methode der gewichteten Residuen besitzen die Integralgleichungen ebenso hohe Ableitungen der Näherungsfunktionen wie die Differentialgleichungen. Die  $\phi_i$  müssen demnach die Stetigkeitsanforderungen der höheren Ableitungen erfüllen. Durch partielle Integration bzw. Anwendung der Greenschen und Gaußschen Integrationsätze können die Ableitungen in den Integralgleichungen und damit auch die Stetigkeitsanforderungen um eine Ordnung reduziert werden.  $c_{k-1}$ -stetige Ansatzfunktionen sind oft ausreichend, um zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen  $k$ -ter Ordnung verwendet zu werden.

## Verfahren für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

Bei der numerischen Berechnung der gesuchten Zustandsgrößen einer Strömung spielt der Druck eine besondere Rolle. Für kompressible Fluide, d.h. Gase bei Machzahlen über 0.3, sind Druck  $p$  und Dichte  $\rho$  über eine Zustandsgleichung gekoppelt. Die lokale Dichte wiederum ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung. Bei inkompressiblen Fluiden sind Druck und Dichte voneinander unabhängig. Die Kontinuitätsgleichung liefert somit keine direkten Informationen über das vorliegende Druckfeld. Um derartige Strömungen dennoch numerisch zu behandeln, sind zahlreiche unterschiedliche Vorgehensweisen entwickelt worden.

Aus Impulserhaltung und Kontinuität lassen sich sowohl im ebenen als auch im dreidimensionalen Fall Wirbeltransportgleichungen herleiten. Sie enthalten nicht den Druck  $p$  und den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$ , sondern die Wirbelstärke  $\omega$  und eine Stromfunktion  $\Psi$  bzw. ein Vektorpotential  $\vec{A}$  als Unbekannte. Für diese Variablen werden eigene Erhaltungsgleichungen aufgestellt und gelöst (siehe Ghia *et al.* [28]). Daneben sind Varianten gebräuchlich, in denen die Geschwindigkeitskomponenten als Transportgrößen neben der Wirbelstärke erhalten bleiben (siehe Guevremont *et al.* [29]). Während so bei zweidimensionalen Strömungen mindestens zwei Trans-

portgleichungen gelöst werden müssen, sind es in drei Dimensionen bereits sechs. Zusätzlich problematisch an diesem Vorgehen ist das Formulieren sinnvoller Randbedingungen für die Wirbelstärke.

Ebenfalls durch eine spezielle Umformung von Impulserhaltung und Kontinuität ergibt sich eine Poisson-Gleichung zur direkten Bestimmung des Druckes [30],[27]. Schwierigkeiten treten auch hier auf, da zur Berechnung einzelner Gleichungsterme mehrfache Ableitungen des Druckes sowohl im Feld als auch am Rand des Rechengebietes benötigt werden.

Eine weitere Möglichkeit, das Druck-Dichte-Problem bei niedrigen Machzahlen zu bewältigen, bietet das Einführen einer künstlichen Kompressibilität. Dazu wird über eine Kompressibilitätskonstante ein proportionaler Zusammenhang zwischen Druck und Dichte angenommen. Eine Zeitableitung dieses Ausdrucks liefert als zusätzliches Glied in der Kontinuitätsgleichung auch für inkompressible Fluide die gewünschte Kopplung mit dem Druck [14]. Die modifizierte Massenerhaltung muss nun instationär in einer nicht physikalischen Zeitebene bearbeitet werden. Mit Erreichen des stationären Endzustandes strebt der eingeführte Zusatzterm gegen Null, so dass die Manipulation der Gleichung die Lösung des Strömungsproblems nicht beeinflusst.

Die sogenannte Penalty-Methode verwendet ein der künstlichen Kompressibilität verwandtes Konzept. Dabei ist die Kontinuitätsgleichung Bestandteil einer Penalty-Funktion, welche die Druckterme in den Impulsgleichungen ersetzt [62]. Die problemgerechte Diskretisierung der Penalty-Formulierung stellt hohe Anforderungen bezüglich Datenstruktur, Speicherbedarf und Robustheit der Gleichungslöser.

Eine grundlegend andere Idee verfolgen die Druckkorrekturverfahren. Hier wird der Druck als Parameter interpretiert, der in den Impulsgleichungen für die Massenerhaltung sorgt. Die erste und am weitesten verbreitete Druckkorrekturmethode, der SIMPLE-Algorithmus, geht auf Caretto *et al.* [11] sowie auf Patankar und Spalding [52] zurück. Druck und Geschwindigkeiten werden in einem blockiterativen Prozess solange korrigiert, bis die berechnete Lösung Massen- und Impulserhaltung gleichermaßen erfüllt. Dazu dienen auf Basis der Impulsgleichungen formulierte algebraische Näherungen für die Geschwindigkeit an den Grenzflächen der Bilanzelemente, in die Druckwerte von den beiden benachbarten Gitterknoten eingehen. Die Bestimmungsgleichung für die Druckkorrekturen ergibt sich durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Kontinuitätsbeziehung (siehe Patankar [50]). Um eine Weiterentwicklung des SIMPLE-Algorithmus handelt es sich beim SIMPLEC-Verfahren. Durch einen konsistenteren Ansatz von Van Doormaal und Raithby [67] für die Flächengeschwindigkeiten wird das Konvergenzverhalten der iterativen Prozedur nochmals verbessert. Weitere Modifikationen nach Karki und Patankar [36] erlauben es, auch kompressible trans- und hypersonische Strömungen bei hoher numerischer Effizienz mit SIMPLE- und SIMPLEC-Verfahren zu berechnen. Ebenfalls auf der Grundidee des SIMPLE-Algorithmus basiert die SIMPLER-Methode. Hier ist neben der eigentlichen Druckkorrekturgleichung ein weiteres Gleichungssystem für den Druck selbst zu lösen [51].

Ein mehrstufiger Korrekturalgorithmus zur Aktualisierung von Druck- und Geschwindigkeitsvariablen wird beim PISO-Verfahren (*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*) durchlaufen. In diesem Fall dient eine aus Massen- und Impulserhaltung abgeleitete Poisson-Gleichung zur Berechnung des Druckfeldes [34]. Da der PISO-Algorithmus bei instationären Simulationen mit *STAR-CD*<sup>©</sup> eingesetzt wird, ist er in Kapitel 3.4 näher beschrieben.

Ein wesentlicher Vorzug der Druckkorrekturverfahren gegenüber anderen Methoden der Druckberechnung liegt in der Tatsache, dass sie sowohl für inkompressible als auch für kompressible Strömungsprobleme ohne weiteres anwendbar sind. Einen entsprechenden Vergleich mit einem dichte-basierten Verfahren haben Michelassi *et al.* [43],[44] vorgenommen. Numerische Untersuchungen von Van Doormal und Raithby [67] bzw. McQuirk und Palma [41] belegen, dass die Vorteile von Mehrschrittalgorithmen wie PISO und SIMPLER gegenüber den einfacheren Varianten SIMPLE und SIMPLEC stark vom jeweiligen Strömungsproblem abhängen und den deutlich höheren numerischen Aufwand nur bedingt rechtfertigen. Aufgrund seiner universellen Anwendbarkeit, gutmütiger Konvergenzeigenschaften und physikalischer Anschaulichkeit kommt für die Druckbestimmung beim hier vorgestellten CVFEM-Verfahren der SIMPLE-Algorithmus zum Einsatz.

## 3.2 Überblick über CVFEM-Verfahren auf unstrukturierten Gittern

CVFEM-Verfahren bieten eine Kombination der geometrischen Flexibilität der FEM-Verfahren und der einfachen physikalischen Interpretation, die FVM-Verfahren zu eigen ist. Die Formulierung eines CVFEM-Verfahrens besteht aus den folgenden Schritten :

1. Diskretisierung des Rechengebietes in Finite-Elemente.
2. Erneute Diskretisierung in Kontrollvolumen, die die Knoten des Finite-Elemente-Netzes umgeben.
3. Festlegen geeigneter elementinterner Interpolationsfunktionen zur Beschreibung der abhängigen Variablen ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $p$  im Fall der Strömungsberechnung) zwischen den Gitterpunkten.
4. Anwendung der Methode der gewichteten Residuen zur Herleitung algebraischer Approximationen an die Erhaltungsgleichungen.
5. Aufstellen und Lösen der algebraischen Gleichungssysteme.
6. Vorgabe einer Lösungsprozedur für die diskretisierten Gleichungen.

Die geometrische Flexibilität der FEM-Verfahren wird durch die erste Zerlegung des Rechengebietes in Finite-Elemente gewährleistet, die eine Diskretisierung komplexer Geometrien erlaubt. Im Innern dieser Elemente werden Kontrollvolumenoberflächen definiert, aus deren Summe die jeweiligen Kontrollvolumen entstehen. Die Kontrollvolumen, über die die Erhaltungsgleichungen integriert werden, müssen die folgenden Eigenschaften erfüllen :

- Die Kontrollvolumen überlappen sich nicht.
- Das gesamte Rechengebiet wird genau einmal überdeckt.
- Die Ränder der Kontrollvolumen enthalten keine elementinternen Kanten.

Die Verletzung dieser Eigenschaften führt zu Verfahren, die die lokale und globale Erhaltungstreue nicht gewährleisten [50].

Wie in Kapitel 3.1 angeführt können CVFEM-Verfahren zur Methode der gewichteten Residuen gezählt werden. Ausgehend von den Erhaltungsgleichungen in integraler Form und geeigneten elementinternen Interpolationsfunktionen werden algebraische Approximationen abgeleitet. Wie im Folgenden gezeigt wird, können die Integralgleichungen so geschrieben werden, dass der Anteil jedes Finiten-Elements zur Erhaltungsgleichung über ein Kontrollvolumen separat berechnet werden kann. Die Herleitung der algebraischen Approximationen kann demnach anhand eines typischen Elements erfolgen. Die Formulierung und speziell die Implementierung der numerischen Methode wird dadurch wesentlich erleichtert.

## Strömungsprobleme

In ihren ursprünglichen Vorschlägen eines CVFEM-Verfahren verwenden Baliga und Patankar [4], [5], [6] eine sogenannte *unequal-order* Methode, bei der das Rechengebiet zunächst in Makroelemente mit 6 Knoten zerlegt wird (Abb 3.1, links). Die Makroelemente werden in jeweils vier Subelemente mit drei Knoten unterteilt (Abb. 3.1, rechts). Der Druck wird nur an den 3 Eckpunkten der Makroelemente, die Geschwindigkeitskomponenten an allen 6 Punkten abgespeichert. Dieses Vorgehen entspricht den oben erläuterten versetzten Gittern. Innerhalb der Makroelemente wird der Druck linear interpoliert. Die Geschwindigkeit wird in den Subelementen flussorientiert behandelt. Zur Lösung der diskretisierten Gleichungen kommen SIMPLE, SIMPLER und SIMPLEC Algorithmen zum Einsatz. In den Abbildungen 3.1 sind die unterschiedlichen Kontrollvolumen für die Kontinuitäts- und die Impulsgleichungen eingezeichnet. Diese Vorgehensweise beseitigt zwar die auch von Finite-Differenzen-Methoden bekannten oszillierenden Druckfelder, hat aber in der Praxis wesentliche Nachteile :

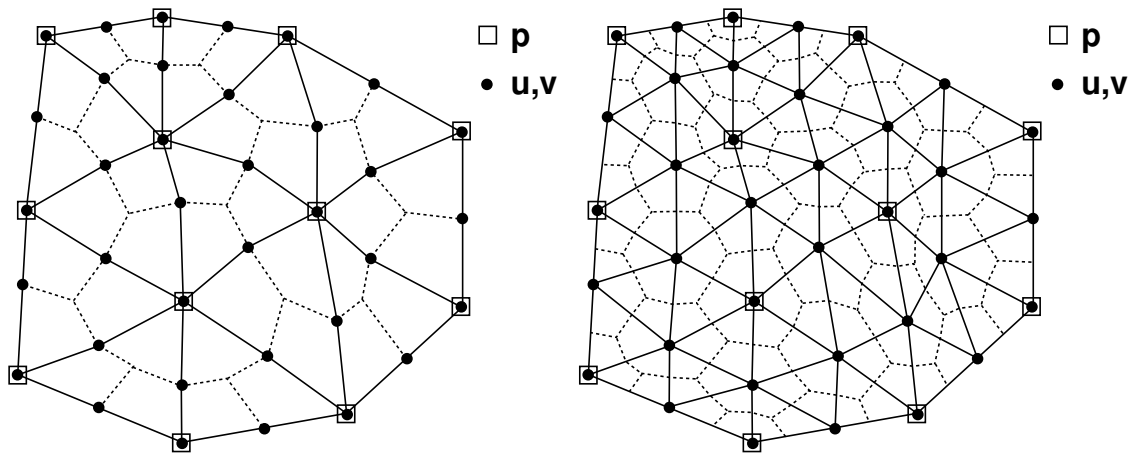


Abbildung 3.1: links: Makroelemente und Druck-Kontrollvolumen, rechts: Subelement und Impuls-Kontrollvolumen

- Der Buchhaltungsaufwand für die geometrischen Eigenschaften zweier Sätze von Kontrollvolumen ist beträchtlich.
- Die Massenerhaltung über die Kontrollvolumen der Impulsgleichungen ist nicht gewährleistet.
- Die Druckgleichung wird gröber diskretisiert als die Impulsgleichung. Bei Strömungsproblemen mit hohen Druckgradienten sind daher übermäßig feine Netze notwendig.

Um diese Problem zu überwinden stellen Prakash und Patankar [55] eine Methode ohne versetzte Gitter, d.h. mit an denselben Knoten abgespeicherten Druck- und Geschwindigkeitswerten vor. Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit polygonalen Strukturen um die Knoten des Finite-Elemente-Netzes (wie in Abb. 3.1, rechts). Der Druck wird wie in den vorherigen Verfahren linear interpoliert. Die Geschwindigkeitskomponenten werden abhängig von ihrer physikalischen Interpretation mit verschiedenen Ansatzfunktionen modelliert. Werden sie als transportierte Skalare angesehen, werden elementintern flussorientierte Ansatzfunktionen ohne Quellterm-effekt benutzt. In der Kontinuitätsgleichung werden die Geschwindigkeitskomponenten über eine modifizierte Form der diskretisierten Impulsgleichung angenähert. Die Knotenwerte der Geschwindigkeit werden dazu in zwei Teile aufgespalten: zum einen in eine Funktion der Knotenwerte der Geschwindigkeiten und der Quellterme, zum anderen in eine Funktion des Druckgradienten im Kontrollvolumen. Damit ergibt sich für jeden Knoten des Rechnernetzes ein Pseudogeschwindigkeitsfeld und ein Druckkoeffizient. Diese werden linear auf Elementebene interpoliert und ergeben die

*massenerhaltenden Geschwindigkeiten*. Der elementinterne Druckgradient wird dabei aus dem Druckkoeffizienten gewonnen. Dieses Vorgehen vermeidet Oszillationen im Druckfeld, unter denen *equal-order* Verfahren ohne weitergehende Vorkehrungen leiden. Zur Lösung der diskretisierten Gleichungen wird in der ursprünglichen Methode von Prakash der SIMPLER-Algorithmus angewendet. Das zweidimensionale Verfahren von Prakash ist von LeDain Muir und Baliga [38] auf dreidimensionale Probleme erweitert worden.

Hookey [31], der sich intensiv mit der Anwendung von CVFEM auf Strömungsprobleme auseinandersetzt, stellt einige Kritikpunkte an der Formulierung von Prakash und Patankar heraus. Zum einen besteht ein Einfluss des Unterrelaxationsfaktors auf das Pseudogeschwindigkeitsfeld, der sich allerdings umgehen lässt, wenn die Pseudogeschwindigkeits- und Druckkoeffizienten vor der Unterrelaxation gebildet werden. Zum anderen sieht er Probleme in der Inkonsistenz von Verfahren, in denen verschiedene Interpolationsfunktionen für dieselbe Größe in verschiedenen Termen angewandt werden (speziell wird im Verfahren von Prakash und Patankar und auch in dieser Arbeit die Geschwindigkeit in ihrer Eigenschaft als transportierter Skalar in den konvektiven Termen anders interpoliert als in der Kontinuitätsgleichung oder den dissipativen Termen). Allerdings ist zu beachten, dass alle hier vorgestellten Methoden diskrete Verfahren darstellen, die eine Approximation an ein komplexes Problem erzeugen. Die jeweiligen Interpolationsfunktionen sollten daher die physikalischen Effekte des gegebenen Problems behandeln. Zudem muss gewährleistet sein, dass bei Verfeinerung des Rechengitters die numerische Lösung sich der exakten Lösung annähert (Konsistenz). Diese Anforderungen können auch mit unterschiedlicher Diskretisierung gleicher Größen in unterschiedliche Termen erreicht werden [50]. Die Probleme, die im Übrigen auch bei gleicher Behandlung der physikalischen Größen entstehen, werden später angesprochen.

Prakash [54] sowie Hookey und Baliga [32] erweitern die flussorientierte Ansatzfunktion für die Geschwindigkeitskomponenten um Quelltermeffekte (*FLOS-Schema*). Sie setzen verschiedene SIMPLE Varianten ein und schlagen aufwendige Druckkorrekturgleichungen vor, die allerdings im dreidimensionalen Strömungsfall extrem rechenzeitintensiv sind. Schneider und Raw [61] stellen eine Erweiterung ihres Verfahrens für Konvektions-Diffusions-Probleme auf Strömungsprobleme vor.

Saabas [57] liefert in seiner Dissertation eine sehr detaillierte Untersuchung der vorliegenden CVFEM-Verfahren. Insbesondere für Strömungsprobleme mit Massentransport durch das Rechengebiet hindurch stellt er gravierende Probleme der Interpolationsfunktionen von Prakash [54] sowie Hookey und Baliga [32] fest. Die explizite Berücksichtigung von Quelltermen - speziell des Druckgradienten - in der Interpolationsfunktion für die Geschwindigkeitskomponenten erfordert bereits im einfachen Fall einer Pouseille-Strömung eine Überbestimmung der Randbedingungen. Saabas führt dies auf die Tatsache zurück, dass der Massenstrom durch das Rechengebiet neben den Knotenwerten der Geschwindigkeiten auch von elementbasierten Druckgradienten abhängt, wodurch letzterer an allen Rändern des Rechen-

gebietes vorgegeben werden muss. Dies ist im allgemeinen Fall nicht möglich und bei nicht-druckgetriebenen Strömungen wie der Couette-Strömung ist der Einfluss des Druckgradienten auf den Massenstrom sogar falsch. Als Schlussfolgerung daraus schlägt Saabas eine Rückkehr zu der älteren Methode von Prakash [55] vor.

Masson, Saabas und Baliga [40] wenden ihr CVFEM-Verfahren auf achsensymmetrische Strömungen an und vergleichen MAW- und FLO-Schema. Saabas und Baliga [58] berechnen dreidimensionale Strömungsprobleme mit dem MAW-Schema.

Neben den oben angesprochenen Arbeiten der Gruppe aus Montréal zeigt Larretguy [37] eine andere Möglichkeit, den Konvergenzproblemen des FLO- bzw. FLOS-Schemas bei stark verzerrten Netzen zu begegnen. In Abhängigkeit einer lokalen Qualitätskennzahl erfolgt eine Ausrichtung entlang der längsten Zellkante, wodurch das Auftreten negativer Koeffizienten in den diskretisierten Gleichungen vermieden wird.

Elkaim, Reggion und Camarero [23] behandeln turbulente Strömungen mit Hilfe des  $k$ - $\epsilon$ -Modells auf Basis einer Stromfunktions-Wirbelstärke-Formulierung. Diese Formulierung wird nur für zweidimensionale Fälle vorgestellt und ist nur schwer auf drei Dimensionen erweiterbar.

Costa, Oliveira und Figueiredo [17] setzen die CVFEM-Formulierung von Saabas [57] zusammen mit dem  $k$ - $\epsilon$ -Modell ein. Dabei werden dreidimensionale Strömungen in Kanalverzweigungen sowie ein turbulenter Jet behandelt.

Wintruff [68] schließlich formuliert ein instationäres zweidimensionales CVFEM-Verfahren für freie Randwertprobleme. Zudem koppelt er sein Verfahren mit adaptiver Netzverfeinerung und Phasenübergängen zwischen festen und flüssigen Phasen. Eine Formulierung und Anwendung von CVFEM-Verfahren auf instationäre dreidimensionale Strömungsprobleme ist in der Literatur bisher nicht vorhanden. Mit der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, diese Lücke zu schließen.

## 3.3 Konzeption *KAPPA-cvfem*

### 3.3.1 Gebietsdiskretisierung

Der erste Schritt der hier vorgestellten Konzeption ist die Zerlegung des Rechengebietes in Kontrollvolumen. Diese Gebietsdiskretisierung erfolgt wie in Kapitel 3.2 angesprochen in zwei Schritten. Zunächst wird das Rechenggebiet in Tetraeder-Elemente zerlegt, innerhalb derer später die Interpolationsfunktionen definiert werden. In einem zweiten Schritt werden um die Eckpunkte der Tetraeder Kontrollvolumen gebildet. Dafür werden die an einen Eckpunkt angrenzenden Tetraeder weiter unterteilt. In Abbildung 3.2 sind die Punkte  $a, b, c, d, e$  und  $f$  Mittelpunkte der Geraden, die durch Verbinden der Tetraeder-Eckpunkte gebildet werden. Die Punkte  $r, s, t$  und  $q$  ergeben sich als Schnittpunkte aus den Seitenhalbierenden und



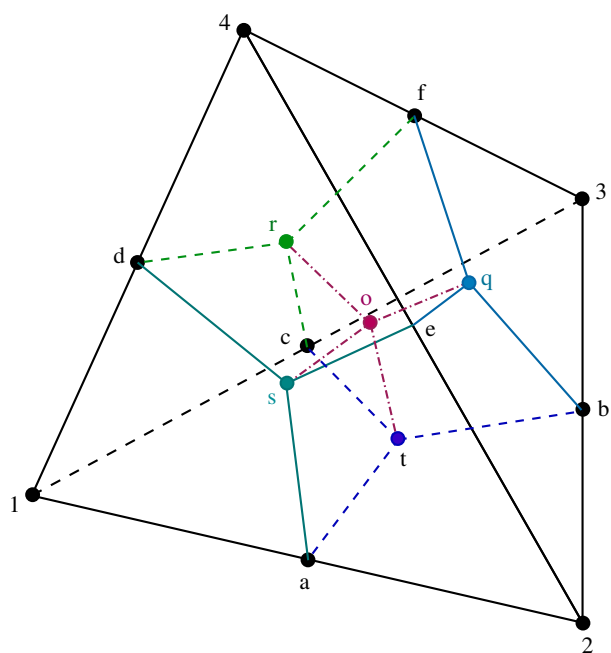


Abbildung 3.2: Zerlegung eines Tetraederelementes in Kontrollvolumenfragmente

Punkt  $o$  ist der Schwerpunkt des Tetraeders. Wird der Punkt 1 als Mittelpunkt eines Kontrollvolumens betrachtet, so liefert der dargestellte Tetraeder das Volumen  $V_{1atcdsor}$  als Beitrag. Der Rest des Kontrollvolumens wird durch die an Punkt 1 angrenzenden Tetraeder geliefert. Abbildung 3.3 veranschaulicht das prinzipielle

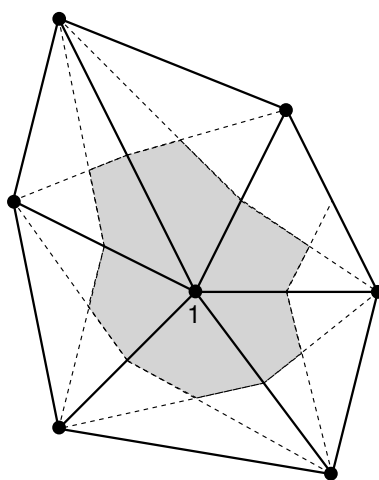


Abbildung 3.3: Zweidimensionales Kontrollvolumen um Punkt 1

Vorgehen vereinfacht an Dreieckselementen. Die graue unterlegte Fläche entspricht hier dem “Kontrollvolumen” um Punkt 1.

### 3.3.2 Zeitdiskretisierung

#### Allgemeines

Beide in dieser Arbeit eingesetzten Softwarepakete unterscheiden grundsätzlich zwischen der Berechnung stationärer und instationärer Strömungen. Sowohl *STAR-CD*<sup>©</sup> als auch *KAPPA-cvfem* lösen bei der Berechnung stationärer Strömungen die stationären Grundgleichungen, d.h. die zeitabhängigen Terme in den Grundgleichungen werden nicht diskretisiert. Davon abweichende Techniken, die auch im stationären Fall die zeitabhängigen Gleichungen verwenden, kommen hier nicht zum Einsatz.

Die Verwendung von Zeitschrittverfahren erfordert außer der Diskretisierung der instationären Terme in den Grundgleichungen 2.3 bzw. 3.77 die Zuteilung eines Zeitindex für alle Zustandsgrößen aus den räumlichen Ableitungen. Hierbei wird grundsätzlich zwischen expliziten und impliziten Verfahren unterschieden.

**Explizite Verfahren** weisen allen Zustandsgrößen aus den Ortsableitungen den Zeitindex  $n$  zu, d.h. sie werden als bekannt angenommen. Der Vorteil dieses Vorgehens ist, dass die Lösung großer Gleichungssysteme entfällt und der numerische Aufwand somit deutlich geringer ist. Explizite Verfahren der Ordnung  $O(\Delta t)$  wie das explizite Euler-Verfahren sind unterdiffusiv. Dieses numerische Phänomen soll kurz anhand einer eindimensionalen Konvektions-Diffusions-Gleichung für eine beliebige Größe  $\Phi$  erörtert werden :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} . \quad (3.5)$$

Dabei stellt  $u$  die Konvektivgeschwindigkeit und  $\Psi$  die Diffusionskonstante dar. Werden die Ortsableitungen mit zentralen Differenzen diskretisiert ergibt sich bei einer einseitigen, expliziten zeitlichen Diskretisierung :

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} = -u \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_{i-1}^n}{2\Delta x} + \Psi \frac{\Phi_{i+1}^n + \Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} . \quad (3.6)$$

Entwicklung der Differenzenquotienten in Gleichung 3.6 in Taylorreihen und Einsetzen ergibt :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta t^2) = -u \left[ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^n + O(\Delta x^2) \right] + \Psi \left[ \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_i^n + O(\Delta x^2) \right] . \quad (3.7)$$

Diese Gleichung verdeutlicht, dass die Diskretisierung in Gleichung 3.6 eine Näherung 1. Ordnung bezüglich der Zeit und 2. Ordnung bezüglich des Ortes darstellt. Wird Gleichung 3.5 nach der Zeit abgeleitet und geeignet umgeformt ergibt sich :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2u\Psi \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - \Psi^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0 \quad . \quad (3.8)$$

Vernachlässigung der Ableitungsterme höherer Ordnung liefert die Näherung :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \sim u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad . \quad (3.9)$$

Wird dies schließlich in Gleichung 3.7 eingesetzt, so folgt :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_i^n = -u \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^n + \left( \Psi - \frac{u^2 \Delta t}{2} \right) \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_i^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \quad (3.10)$$

Der Diffusionsterm ist um einen zu  $\Delta t$  proportionalen Faktor verringert, was eindeutig auf die explizite, einseitige Näherung des instationären Terms zurückzuführen ist. Als Folge daraus sind explizite Verfahren instabiler als implizite Verfahren und unterliegen starken Beschränkungen für die mögliche Wahl der Zeitschrittweite  $\Delta t$  :

- Diffusionslimit :

$$D = \frac{\Psi \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad . \quad (3.11)$$

- Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung :

$$C = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad . \quad (3.12)$$

Diese Kriterien lassen sich herleiten, wenn Gleichung 3.6 unter Verwendung der Kennzahlen  $C$  und  $D$  geschrieben wird :

$$\Phi_i^{n+1} = \left( \frac{C}{2} + D \right) \Phi_{i-1}^n + (1 - 2D) \Phi_i^n + \left( -\frac{C}{2} + D \right) \Phi_{i+1}^n \quad . \quad (3.13)$$

Nach Patankar [50] ist die Stabilität eines numerischen Verfahrens nur für Diskretisierungsschemata mit positiven Koeffizienten gegeben. Negative Koeffizienten auf der rechten Seite der Gleichung 3.13 entsprechen einer Verringerung des  $\Phi$ -Wertes in einem Knoten, wenn der  $\Phi$ -Wert eines Nachbarknotens erhöht wird. Dieses Verhalten ist unphysikalisch und kann zur Instabilität eines derartigen Verfahrens führen. Für die oben gezeigte FTCS-Diskretisierung (*Forward in Time Centered Space*) ist dies nur unter Einhaltung von 3.11 und 3.12 gewährleistet. Zusätzlich ist der Koeffizient vor  $\Phi_{i+1}^n$  nur dann positiv, wenn

$$\frac{C}{D} \leq 2 \quad (3.14)$$

gilt, was sofort auf die Maschenreynoldszahlbedingung

$$\text{Re}_{\Delta x} = \frac{u\Delta x}{\Psi} \leq 2 \quad (3.15)$$

führt.

Implizite Verfahren betrachten die diskretisierten Terme der Ortsableitungen zum neuen Zeitpunkt  $n + 1$ . Daraus resultiert ein erheblicher numerische Mehraufwand, da die diskretisierten Gleichungen innerhalb eines Gleichungssystems gelöst werden müssen. Analoge Überlegungen zu den expliziten Verfahren führen zu folgender Gleichung :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_i^n = -u \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^n + \left( \Psi + \frac{u^2 \Delta t}{2} \right) \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_i^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \quad (3.16)$$

Das Vorzeichen der numerischen Dissipation ist dabei umgedreht und führt dazu, dass implizite Verfahren überdiffusiv wirken. Die zu Gleichung 3.13 analoge Darstellung lautet :

$$(1 + 2D)\Phi_i^{n+1} = \left( \frac{C}{2} + D \right) \Phi_{i-1}^{n+1} + \Phi_i^n + \left( -\frac{C}{2} + D \right) \Phi_{i+1}^{n+1} \quad (3.17)$$

Die Einhaltung positiver Koeffizienten ist somit bereits durch Befolgen des Kriteriums 3.15 gewährleistet.

Alle in dieser Arbeit durchgeführten instationären Simulationen sind mit dem Impliziten Euler-Verfahren vorgenommen worden. Die örtlichen Terme der Differentialgleichungen werden dabei zum Zeitpunkt  $n + 1$  betrachtet :

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} = L(\Phi^{n+1}) + O(\Delta t) \quad (3.18)$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen zur räumlichen und zeitlichen Diskretisierung werden im Folgenden die Gleichungen hergeleitet, die in *KAPPA-cvfem* gelöst werden.

### 3.3.3 Diskretisierte Impulsgleichung

Die diskretisierte Gleichung für den Impuls ergibt sich, wenn die Integration in Gleichung 2.5 über ein finites Kontrollvolumen  $\delta V$  durchgeführt wird. Für den Eckpunkt 1 in Abbildung 3.2, folgt so die folgende Gleichung für den Impuls in  $x$ -Richtung :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{1atcdsor} \rho u dV + \int_{atos} \vec{J}_u \vec{n} dA + \int_{ctor} \vec{J}_u \vec{n} dA + \int_{dsor} \vec{J}_u \vec{n} dA \\ - \int_{1atcdsor} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) dV \\ + [\text{entspr. Summanden anderer angrenzender Tetraeder}] \\ + [\text{gegebenenfalls Summanden aus Randbedingungen}] = 0. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Die Herleitung in  $y$ - und  $z$ -Richtung verläuft analog. Die diskretisierte Impulsgleichung für ein Kontrollvolumen setzt sich also aus den Flüssen durch die Kontrollvolumenoberflächen und den entsprechenden Volumenintegralen der Druckgradienten zusammen. Ziel des numerischen Verfahrens ist nun eine Approximation der Flächen- und Volumenintegrale zu finden. Bei CVFEM-Verfahren werden dazu zunächst Interpolationsfunktionen für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck zwischen den Gitterpunkten vorgegeben.

## Interpolationfunktion des Drucks

Der Druck als skalare Größe wird innerhalb eines Tetraederelements linear interpoliert :

$$p(x, y, z) = A_p x + B_p y + C_p z + D_p \quad . \quad (3.20)$$

Die Richtungsableitungen des Druckes ergeben sich somit zu :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A_p \quad \frac{\partial p}{\partial y} = B_p \quad \frac{\partial p}{\partial z} = C_p \quad (3.21)$$

und sind damit innerhalb eines Tetraeders jeweils konstant. Die in Gleichung 3.20 gegebene Interpolation entspricht einer Zentralen-Differenz auf einem strukturierten Finite-Differenzen-Gitter. Die Koeffizienten  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  und  $D_p$  sind Funktionen der Drücke an den Eckpunkten des Tetraeders. Eine detaillierte Herleitung findet sich in Anhang A.1.

## Interpolationfunktion der Geschwindigkeitskomponenten

Die Geschwindigkeitskomponenten werden nach den Überlegungen von Saabas [57] abhängig von den Termen in denen sie auftreten, unterschiedlich interpoliert. Der Grund hierfür liegt in den unterschiedlichen Eigenschaften der Transportvorgänge, denen die einzelnen Terme entsprechen und im Besonderen dem Massenerhalt bei Massentransport durch das Rechengebiet hindurch. Der konvektive Transport erfolgt gerichtet und damit abhängig von der Strömungsrichtung, wohingegen der dissipative Transport ungerichtet erfolgt. Ist die Geschwindigkeit Teil eines Terms, der den Massenstrom beschreibt, so erfolgt eine Interpolation, die eine Massenerhaltung im gesamten Kontrollraum gewährleistet.

### Geschwindigkeitsinterpolation in den dissipativen Termen

In den dissipativen Termen wird die Geschwindigkeit wie der Druck linear interpoliert :

$$\begin{aligned}
 u^d(x, y, z) &= A_u^d x + B_u^d y + C_u^d z + D_u^d \\
 v^d(x, y, z) &= A_v^d x + B_v^d y + C_v^d z + D_v^d \\
 w^d(x, y, z) &= A_w^d x + B_w^d y + C_w^d z + D_w^d.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Die Koeffizienten  $A_i^d$ ,  $B_i^d$ ,  $C_i^d$  und  $D_i^d$  entsprechen denen in der Druckinterpolation, wenn anstelle der Drücke auf den Eckpunkten des Tetraeders die entsprechenden Geschwindigkeiten eingesetzt werden (siehe Anhang A.2).

### Geschwindigkeitsinterpolation in den konvektiven Termen

Eine Interpolationsfunktion für die Geschwindigkeit in den konvektiven Termen muss deren gerichtetes Transportverhalten berücksichtigen. Hier sollen kurz einige der verfügbaren Funktionen vorgestellt werden, die bereits in Kapitel 3.2 angesprochen wurden. Ausführliche Herleitungen finden sich bei Saabas [58],[57].

**Flussorientiertes Aufwind-Verfahren (FLO).** Zur Formulierung eines flussorientierten Verfahrens wird ein lokales Koordinatensystem definiert, das seinen Ursprung im Schwerpunkt des Tetraeders hat und dessen  $x$ -Achse in Strömungsrichtung zeigt. Die Richtung der  $x$ -Achse des lokalen Koordinatensystems muss also mit der Richtung des Vektors der Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_{av} &= (u_{av}, v_{av}, w_{av})^T \\
 &= \frac{1}{4} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

zusammenfallen. Zur Transformation der Koordinaten ist zuerst eine Translation in den Koordinatenursprung  $(x_0, y_0, z_0)$ , anschließend eine Rotation um die  $z$ -Achse und zuletzt eine Rotation um die neue  $Y$ -Achse erforderlich (siehe Abbildung 3.4). Folgende Gleichung beschreibt die Verknüpfung dieser Operationen. In Übereinstimmung mit der vorhandenen Literatur wird das lokale Koordinatensystem mit Großbuchstaben benannt.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}}_{\text{Rotation um Y}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Rotation um z}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}}_{\text{Transl.}} \tag{3.24}$$

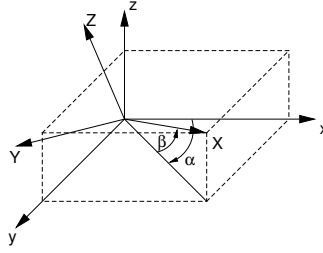


Abbildung 3.4: Drehung des Koordinatensystems

Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  ergeben sich unter Beachtung der Zweideutigkeit des Tangens zu :

$$\alpha = \arctan \left( \frac{v_{av}}{u_{av}} \right) \quad (3.25)$$

$$\beta = \arcsin \left( \frac{w_{av}}{\sqrt{u_{av}^2 + v_{av}^2 + w_{av}^2}} \right) \quad (3.26)$$

Eine geeignete Interpolationsfunktion kann aus einer stationären Konvektions-Diffusions-Gleichung unter Annahme konstanter Durchströmung in  $X$ -Richtung hergeleitet werden. Für die  $u$ -Komponente der Geschwindigkeit ergibt sich dabei :

$$u^c(x, y, z) = A_u^c \xi + B_u^c Y + C_u^c Z + D_u^c \quad (3.27)$$

Für die  $v$ - und  $w$ -Komponenten ergeben sich analoge Funktionen. Die genaue Herleitung ist in Anhang B beschrieben. Die Koeffizienten  $A_u^c$ ,  $B_u^c$ ,  $C_u^c$  und  $D_u^c$  entsprechen denen in der Geschwindigkeitsinterpolation für die dissipativen Terme, wenn alle  $x$ -Werte durch die entsprechenden  $\xi$ -Werte und alle  $y$ - und  $z$ -Werte durch die entsprechenden  $Y$ - und  $Z$ -Werte ersetzt werden (siehe Anhang A.3). Die Variable  $\xi$  ist definiert durch :

$$\xi = \frac{\mu}{\rho |\vec{v}_{av}|} \left( \exp \left( \frac{Re_{\Delta} (X - X_{max})}{X_{max} - X_{min}} \right) - 1 \right), \quad (3.28)$$

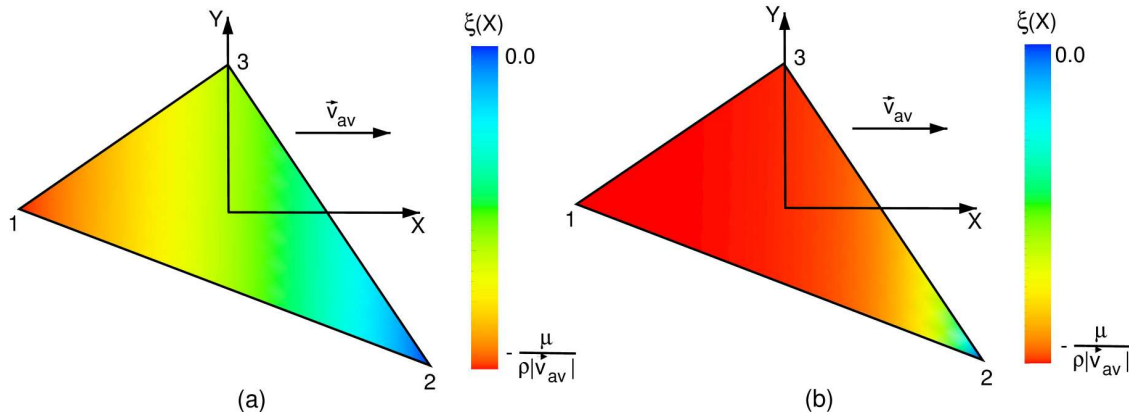
wobei  $Re_{\Delta}$  eine Maschenreynoldszahl darstellt und gegeben ist durch :

$$Re_{\Delta} = \frac{\rho |\vec{v}_{av}| (X_{max} - X_{min})}{\mu} \quad (3.29)$$

$X_{max}$  und  $X_{min}$  sind Maximal- bzw. Minimalwerte der  $X$ -Koordinaten der Eckpunkte des Tetraeders und sind wie folgt definiert :

$$X_{max} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4) \quad (3.30)$$

$$X_{min} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4) \quad (3.31)$$


 Abbildung 3.5: Wertebereich der  $\xi$ -Funktion

Um ein besseres Verständnis über den Verlauf der  $\xi$ -Funktion zu vermitteln, wurde diese für zwei unterschiedliche Maschenreynoldszahlen aufgetragen. Der Übersichtlichkeit wegen wurden zur Darstellung Dreieckselemente verwendet. Für Tetraederelemente ergibt sich ein analoger Verlauf. Abbildung 3.5a zeigt den Verlauf für  $Re_{\Delta} \approx 1$ , Abbildung 3.5b den Verlauf für  $Re_{\Delta} > 10$ . Der Maximalwert der Funktion ist unabhängig von der Reynoldszahl an Stellen mit  $X = X_{max}$  gleich Null. Für  $X = X_{min}$  ergibt sich der Minimalwert von  $\xi$ , der den Wert  $\xi_{min} = -\mu/\rho |\vec{v}_{av}|$  in keinem Fall unterschreitet, für kleine  $Re_{\Delta}$  jedoch auch darüber liegen kann. Der Aufwind-Charakter der Funktion ist deutlich sichtbar, da Punkte, die stromaufwärts des Dreiecksmittelpunktes liegen, mit einem betragsmäßig kleineren Funktionswert gewichtet werden.

**Flussorientiertes Aufwind Verfahren mit Quelltermeinfluss (FLOS).** Von Prakash wurde das FLO-Verfahren durch einen Term erweitert, der den Quelltermeinfluss auf die Interpolationsfunktion mit berücksichtigt [54]. Die Interpolationsfunktion lautet hier :

$$u^c(x, y, z) = A_u^c \xi + B_u^c Y + C_u^c Z + D_u^c + \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) F(X, Y, Z). \quad (3.32)$$

Die Koeffizienten, sowie die  $\xi$ -Funktion stimmen mit denen des FLO-Verfahrens überein. Die Quelltermfunktion ist in Anhang B angegeben. Dieses Verfahren wird am Forschungszentrum Karlsruhe von Wintruff zur Berechnung von Aufschmelz- und Erstarrungsvorgängen erfolgreich angewandt [68]. Bei Strömungsproblemen mit Massentransport durch das Rechenggebiet führt das FLOS-Verfahren jedoch zu massiven Problemen. An den Ein- und Auslassrändern muss der Druckgradient vorgegeben werden, um die Interpolationsfunktion aufstellen zu können. Saabas [57, 58]



erhält mit dem FLOS-Verfahren keine konvergierenden Lösungen für den Fall der Hagen-Poiseuille-Strömung. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit bzw. der Diplomarbeit von M. Stripf [63] bestätigen sich diese Schwierigkeiten, weshalb das FLOS-Schema im Folgenden nicht weiter behandelt wird.

**Massengewichtetes Verfahren (MAW).** Das MAW-Verfahren wurde von Schneider und Raw [60, 61] für vierseitige Elemente eingeführt, um negative Koeffizienten zu vermeiden. In der PhD-These von Saabas [57] wurde es auf Tetraeder angewandt und bietet damit eine Alternative für Probleme mit großen Geschwindigkeitsgradienten innerhalb eines Tetraederelements, bei denen das FLO-Verfahren negative Koeffizienten hervorbringen kann. Für das MAW-Verfahren ist eine andere Gebietsdiskretisierung als die hier verwendete notwendig (siehe [57, 58]), wodurch es in der vorliegenden Arbeit nicht eingesetzt werden kann. Die Strömungsrichtung und die Verteilung der abhängigen Variablen innerhalb eines Elementes werden weniger genau berücksichtigt. Bei Strömungsfällen, die wesentlich vom Massentransport abhängen, ist das MAW-Verfahren allerdings eine vielversprechende Alternative zum FLO-Schema.

### Flächenintegrale

Mit Hilfe der Interpolationsfunktionen und einer Gaußschen Quadratur ist es nun möglich, die Flächenintegrale in Gleichung 3.19 zu lösen. Die dazu benötigten Gauß-Punkte sind in Abbildung 3.6 gezeigt. Damit ergibt sich nun folgende Approximation:

$$\begin{aligned} \int_{atos} \vec{J}_u \vec{n}^a dA &\approx \frac{A_{ato}}{3} [(J_{ux}^{at} + J_{ux}^{ao} + J_{ux}^{ot}) n_x^a + (J_{uy}^{at} + J_{uy}^{ao} + J_{uy}^{ot}) n_y^a \\ &\quad + (J_{uz}^{at} + J_{uz}^{ao} + J_{uz}^{ot}) n_z^a] + \frac{A_{aos}}{3} [(J_{ux}^{as} + J_{ux}^{ao} + J_{ux}^{os}) n_x^a \\ &\quad + (J_{uy}^{as} + J_{uy}^{ao} + J_{uy}^{os}) n_y^a + (J_{uz}^{as} + J_{uz}^{ao} + J_{uz}^{os}) n_z^a] \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{ctor} \vec{J}_u \vec{n}^c dA &\approx \frac{A_{cto}}{3} [(J_{ux}^{ct} + J_{ux}^{co} + J_{ux}^{ot}) n_x^c + (J_{uy}^{ct} + J_{uy}^{co} + J_{uy}^{ot}) n_y^c \\ &\quad + (J_{uz}^{ct} + J_{uz}^{co} + J_{uz}^{ot}) n_z^c] + \frac{A_{cor}}{3} [(J_{ux}^{cr} + J_{ux}^{co} + J_{ux}^{or}) n_x^c \\ &\quad + (J_{uy}^{cr} + J_{uy}^{co} + J_{uy}^{or}) n_y^c + (J_{uz}^{cr} + J_{uz}^{co} + J_{uz}^{or}) n_z^c] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$(3.35)$$

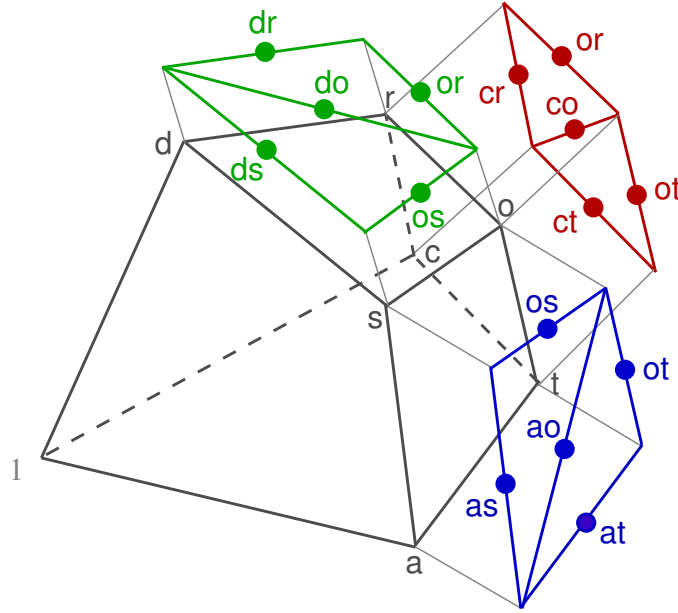


Abbildung 3.6: 12 Gauß-Punkte für die Gaußsche Quadratur

$$\begin{aligned}
 \int_{dsor} \vec{J}_u \vec{n}^d dA &\approx \frac{A_{dso}}{3} [(J_{ux}^{ds} + J_{ux}^{do} + J_{ux}^{os}) n_x^d + (J_{uy}^{ds} + J_{uy}^{do} + J_{uy}^{os}) n_y^d \\
 &\quad + (J_{uz}^{ds} + J_{uz}^{do} + J_{uz}^{os}) n_z^d] + \frac{A_{dor}}{3} [(J_{ux}^{dr} + J_{ux}^{do} + J_{ux}^{or}) n_x^d \\
 &\quad + (J_{uy}^{dr} + J_{uy}^{do} + J_{uy}^{or}) n_y^d + (J_{uz}^{dr} + J_{uz}^{do} + J_{uz}^{or}) n_z^d] . \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Die Flüsse  $\vec{J}_u(x, y, z)$  werden an den Gauß-Punkten durch Einsetzen der entsprechenden Interpolationsfunktionen für die Geschwindigkeit berechnet :

$$\begin{aligned}
 J_{ux}(x, y, z) &= \rho u^m u^c - \mu \frac{\partial u^d}{\partial x} \\
 &= \rho u^m (A_u^c \xi + B_u^c Y + C_u^c Z + D_u^c) - \mu A_u^d \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$(3.38)$$

$$\begin{aligned}
 J_{uy}(x, y, z) &= \rho v^m u^c - \mu \frac{\partial u^d}{\partial y} \\
 &= \rho v^m (A_u^c \xi + B_u^c Y + C_u^c Z + D_u^c) - \mu B_u^d \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

$$(3.40)$$

$$\begin{aligned}
 J_{uz}(x, y, z) &= \rho w^m u^c - \mu \frac{\partial u^d}{\partial z} \\
 &= \rho w^m (A_u^c \xi + B_u^c Y + C_u^c Z + D_u^c) - \mu C_u^d . \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten  $u^m$ ,  $v^m$  und  $w^m$  beschreiben den Massenstrom und sind auf eine Weise interpoliert, die zu jedem Zeitpunkt eine Massenerhaltung garantiert. Die Herleitung dieser Interpolation erfolgt später in Kapitel 3.3.4. Alle Koeffizienten  $A_u^c, B_u^c, C_u^c, D_u^c$  und  $A_u^d, B_u^d, C_u^d$  sind abhängig von den Geschwindigkeitswerten an den Eckpunkten des Tetraeders und geometrischen Faktoren (siehe Anhang A.3). Einsetzen dieser Koeffizienten und Umstellen der Gleichungen 3.37-3.41 führt auf die folgende Form :

$$J_{ux}(x, y, z) = A_1^x u_1 + A_2^x u_2 + A_3^x u_3 + A_4^x u_4 \quad (3.42)$$

$$J_{uy}(x, y, z) = A_1^y u_1 + A_2^y u_2 + A_3^y u_3 + A_4^y u_4 \quad (3.43)$$

$$J_{uz}(x, y, z) = A_1^z u_1 + A_2^z u_2 + A_3^z u_3 + A_4^z u_4. \quad (3.44)$$

### Instationäre Integrale

Die instationären Integrale in Gleichung 3.19 werden mit einseitigen Differenzenschemata (explizites und implizites Euler-Verfahren) in eine algebraische Form überführt :

$$\frac{d}{dt} \int_{1atcdsor} \rho u dV = a_u^t u^{n+1} + d_u^t u^n \quad (3.45)$$

Mit zeitlich konstanten Kontrollvolumen und einer als über das Kontrollvolumenfragment konstant angenommenen Größe  $u$  ergeben sich die Koeffizienten  $a_u^t$  und  $d_u^t$  zu :

$$a_u^t = -d_u^t = \frac{\rho V_{1atcdsor}}{\Delta t} \quad (3.46)$$

### Volumenintegrale

Das Volumenintegral in Gleichung 3.19 ist einfach zu berechnen, da die Druckableitung innerhalb eines Tetraeders nach Gleichung 3.21 als konstant angenommen wird. Es folgt

$$\int_{1atcdsor} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) dV = A_p V_{1atcdsor}, \quad (3.47)$$

wobei  $V_{1atcdsor}$  aufgrund der beschriebenen Diskretisierung genau ein Viertel des Volumens des betrachteten Tetraeders ist.

### Gesamte diskretisierte Impulsgleichung

In einem letzten Schritt sind die Beiträge des Flussintegrals, des Quellterintegrals und des instationären Integrals aufzuaddieren. Dazu werden die Gleichungen 3.45

und 3.33-3.36 aller angrenzenden Tetraeder zusammengefasst und die entsprechenden Flüsse gemäß 3.41-3.44 eingesetzt. Auf diese Weise entsteht für jeden Knoten  $i$  des Rechengebiets eine algebraische Gleichung der Form :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{1atcdsor} \rho u dV + \int_{atos} \vec{J}_u \vec{n} dA + \int_{ctor} \vec{J}_u \vec{n} dA + \int_{dsor} \vec{J}_u \vec{n} dA \\ & + [\text{entspr. Summanden anderer angrenzender Tetraeder}] \\ & = a_c^i u_c^i + \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die noch fehlenden Volumenintegrale lassen sich zu einer Konstanten zusammenfassen :

$$\begin{aligned} & - \int_{1atcdsor} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) dV \\ & + [\text{entspr. Summanden anderer angrenzender Tetraeder}] \\ & = b_c^u. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Die Konstante  $b_c^u$  kann auch als das Produkt des durchschnittlichen Druckgradienten im betrachteten Kontrollvolumen und des finiten Kontrollvolumens interpretiert werden :

$$b_c^u = -\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} \delta V.$$

Beide Anteile zusammengesetzt ergeben die diskretisierte Impulsgleichung in  $x$ -Richtung für ein Kontrollvolumen bzw. für den Punkt im Zentrum :

$$a_c u_c + \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \left( -\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} \delta V \right) = 0. \quad (3.50)$$

Gleichung (3.50) ist für innenliegende Kontrollvolumen vollständig. An Rändern müssen jedoch noch zusätzliche Beiträge berücksichtigt werden (siehe Kapitel 2.2).

### 3.3.4 Druckgleichung

Ausgangspunkt für die Formulierung der Druckgleichung ist die diskretisierte Kontinuitätsgleichung :

$$\begin{aligned} & \int_{atos} \rho \vec{v}^m \vec{n} dA + \int_{ctor} \rho \vec{v}^m \vec{n} dA + \int_{dsor} \rho \vec{v}^m \vec{n} dA \\ & + [\text{entspr. Summanden anderer angrenzender Tetraeder}] \\ & + [\text{gegebenenfalls Summanden aus Randbedingungen}] = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Die Flächenintegrale werden analog zur Impulsgleichung wie in Kapitel 3.3.3 behandelt. Dabei werden lediglich die Flüsse  $\vec{J}$  durch die Geschwindigkeiten  $\vec{v}^m$  ersetzt. Die Beschreibung der Geschwindigkeiten  $\vec{v}^m = (u^m, v^m, w^m)^T$  steht noch aus und wird im Folgenden gegeben.

### Massenerhaltende Geschwindigkeiten

Eine geeignete Form für die Geschwindigkeiten in den "Massenstrom-Termen" lässt sich mit Hilfe der diskretisierten Impulsgleichung herleiten. Dazu wird Gleichung 3.50 nach  $u_c$  aufgelöst :

$$u_c = \underbrace{-\frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb}}{a_c}}_{\hat{u}_c} - \underbrace{\frac{\delta V}{a_c}}_{d_c^u} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.52)$$

Mit Hilfe der Pseudo-Geschwindigkeiten  $\hat{u}_c$  und der Druckgradienten-Koeffizienten  $d_c^u$  können nun die Geschwindigkeiten  $u_c^m$ ,  $v_c^m$  und  $w_c^m$  definiert werden :

$$u_c^m = \hat{u}_c + d_c^u \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.53)$$

Analog ergeben sich :

$$v_c^m = \hat{v}_c + d_c^v \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.54)$$

$$w_c^m = \hat{w}_c + d_c^w \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.55)$$

Es ist zu beachten, dass hier im Gegensatz zu Gleichung 3.52 die Druckgradienten im jeweils betrachteten Tetraederelement und nicht die kontrollvolumenbezogenen durchschnittlichen Druckgradienten stehen. Auf diese Weise wird das Problem oszillierender Druckfelder vermieden [57]. Die Druckgradienten entsprechen den Koeffizienten  $A_p$ ,  $B_p$  und  $C_p$  in Gleichung 3.21. Sie sind innerhalb eines Tetraeders konstant und jeweils abhängig von den Druckwerten auf den vier Eckpunkten. Für 3.53-3.55 kann also auch geschrieben werden :

$$\begin{aligned} u_c^m &= \hat{u}_c + d_c^u (A_1^p p_1 + A_2^p p_2 + A_3^p p_3 + A_4^p p_4) \\ v_c^m &= \hat{v}_c + d_c^v (B_1^p p_1 + B_2^p p_2 + B_3^p p_3 + B_4^p p_4) \\ w_c^m &= \hat{w}_c + d_c^w (C_1^p p_1 + C_2^p p_2 + C_3^p p_3 + C_4^p p_4). \end{aligned} \quad (3.56)$$

An Rändern, an denen die Geschwindigkeit vorgegeben ist (Einlass und Wand), werden die Pseudogeschwindigkeiten  $\hat{u}_c$ ,  $\hat{v}_c$  und  $\hat{w}_c$  gleich den gegebenen Geschwindigkeiten und die Druckgradientenkoeffizienten  $d_c^i$  gleich Null gesetzt. Geschwindigkeitswerte zwischen den Eckpunkten der Tetraeder ergeben sich durch lineare Interpolation von Pseudo-Geschwindigkeiten und Druckgradienten-Koeffizienten :

$$\hat{u}_c(x, y, z) = a_{\hat{u}} x + b_{\hat{u}} y + c_{\hat{u}} z + d_{\hat{u}} \quad (3.57)$$

$$d_c^u = a_{d^u} x + b_{d^u} y + c_{d^u} z + d_{d^u}. \quad (3.58)$$

### Gesamte diskretisierte Druckgleichung

Wird Gleichung 3.56 in die diskretisierte Kontinuitätsgleichung 3.51 eingesetzt, resultiert die diskretisierte Druckgleichung für ein Kontrollvolumen bzw. für den Punkt im Zentrum des Kontrollvolumens :

$$a_c^p p_c + \sum_{nb} a_{nb}^p p_{nb} + b^p = 0. \quad (3.59)$$

Die Koeffizienten  $a_c^p$  und  $a_{nb}^p$  beinhalten die Druckgradientenkoeffizienten  $d_c^i$  und die Interpolationskonstanten  $A_i^p$ ,  $B_i^p$  und  $C_i^p$  für den Druck. Die Pseudogeswindigkeiten sind in  $b^p$  enthalten. Damit ist die Druckgleichung für innenliegende Kontrollvolumen vollständig formuliert. Wie bei der Impulsgleichung (3.50) müssen jedoch auch hier an den Rändern des Rechengebiets noch zusätzliche Flüsse berücksichtigt werden (siehe folgendes Kapitel).

### 3.3.5 Randbedingungen

Nach der theoretischen Behandlung der Randbedingungen in Kapitel 2.2 folgt hier die Anwendung auf das oben vorgestellte CVFEM-Verfahren. Angewandt werden die Randbedingungen auf die diskretisierte Impulsgleichung 3.50 und die diskretisierte Druckgleichung 3.59. Zur Zeit sind in *KAPPA-cvfem* Einlass-, Auslass- und Wandrandbedingungen implementiert.

#### Einlass

**Impulsgleichung.** Da die Geschwindigkeit an Einlassrändern fest vorgegeben ist, können die diskretisierten Impulsgleichungen für die Einlassrandpunkte so geschrieben werden, dass sie direkt die gegebene Geschwindigkeit ausdrücken. Dazu werden die Koeffizienten in Gleichung 3.50 wie folgt überschrieben :

$$a_c = 1 \quad a_{nb} = 0 \quad b_c^u = -u_{inlet} \quad , \quad (3.60)$$

so dass sich folgende explizite Gleichung für die  $u$ -Komponente der Geschwindigkeit ergibt :

$$u_c - u_{inlet} = 0. \quad (3.61)$$

Die Gleichungen für die  $v$ - und  $w$ -Komponente werden analog behandelt.

**Druckgleichung.** Bei der Druckgleichung muss der Massenstrom beachtet werden, der durch die Einlassfläche hindurchtritt. Angenommen Fläche 134 in Abbildung 3.2 ist ein Einlassrand und es wird die diskretisierte Gleichung für den

Eckpunkt 1 betrachtet, so muss der Massenstrom durch die Randfläche 1crd

$$\dot{m}_c^{1crd} = \int_{1crd} \rho \vec{v}_{inlet} \vec{n} dA \quad (3.62)$$

mit in die Gleichung eingehen. Die Flächenintegrale werden, wie in Kapitel 3.3.3 gezeigt, mit einer Gauß'schen Quadratur berechnet. Die benötigten Gaußpunkte sind die Mittelpunkte der Geraden 1c, cr, rd, 1d und 1r und die Geschwindigkeiten zwischen den Gitterpunkten erhält man durch lineare Interpolation. Auf diese Weise werden alle Einlassmassenströme der an Punkt 1 angrenzenden Tetraeder aufsummiert

$$\dot{m}_c^{in} = \sum_{nb} \dot{m}_c^{nb} \quad (3.63)$$

und anschließend zur Konstanten  $b_p$  in Gleichung 3.59 hinzuaddiert :

$$b_p^{gesamt} = b_p + \dot{m}_c^{in} . \quad (3.64)$$

## Auslass

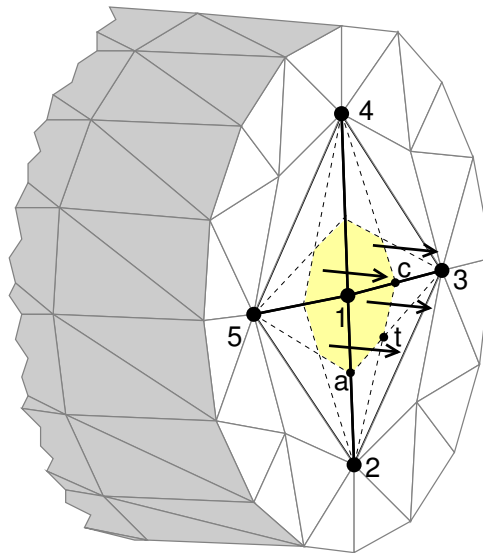


Abbildung 3.7: Auslassmassenstrom für den Gitterpunkt "1" am Auslass

Ähnlich wie bei Einlassrändern muss auch am Auslass der Massenstrom mit in die diskretisierte Gleichung eingehen, der das Gebiet verlässt. Abbildung 3.7 zeigt den Auslass eines Rohres. Betrachtet man Punkt 1, so setzt sich der Auslassmassenstrom

für das Kontrollvolumen um diesen Punkt aus vier Teilmassenströmen zusammen. Der Teilmassenstrom durch die Fläche  $1atc$  wird berechnet durch

$$\dot{m}_c^{1atc} = \int_{1atc} \rho \vec{v} \vec{n} dA \quad . \quad (3.65)$$

Der resultierende Massenstrom für Punkt 1 beträgt dann :

$$\dot{m}_c^{out} = \sum_{nb} \dot{m}_c^{nb} \quad . \quad (3.66)$$

Im Gegensatz zum Einlass beruht die Berechnung des Massenstroms hier nicht auf vorgegebenen Geschwindigkeiten. Vielmehr werden die aus der vorhergehenden Interpolation berechneten Geschwindigkeitswerte verwendet. Der Auslassmassenstrom wird also nach jeder Iteration auf Basis der alten Geschwindigkeitswerte neu errechnet.

**Impulsgleichung.** Der Impulsstrom durch die Auslassfläche besteht aus einem konvektiven und einem dissipativen Anteil. Da angenommen wird, dass die Strömung jenseits des Auslassrandes unverändert fortgesetzt wird (Kapitel 2.2), dürfen Stellen stromauf des Auslasses keinen Einfluss auf die Strömung im Rechengebiet haben. Um dies zu erreichen, muss der dissipative Anteil zu Null gesetzt werden [57]. Die Strömung in der letzten Zellschicht vor dem Auslass wird damit als reibungsfrei betrachtet. Diese Tatsache ist als unbefriedigend anzusehen, konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit aber nicht gelöst werden. Sie spiegelt die Hauptproblematik der CVFEM-Verfahren bei Strömungen mit Massentransport wider :

- Die Formulierung der Interpolationsfunktionen hat starken Einfluss auf die Massenerhaltung.
- Die Auslassrandbedingung muss entweder überbestimmt werden (was ohne Kenntniss der exakten Lösung nicht möglich ist) oder wird mit starken Einschränkungen wie Reibungsfreiheit definiert.

Mit der oben erklärten Einschränkung auf die reibungsfreien Anteil lässt sich der noch zu berechnende Impulsstrom über den Auslassrand im betrachteten Randpunkt wie folgt beschreiben :

$$\begin{aligned} \int_{out} \vec{J}_u \cdot \vec{n} dA &= \bar{u} \dot{m}_c^{out} \\ \int_{out} \vec{J}_v \cdot \vec{n} dA &= \bar{v} \dot{m}_c^{out} \\ \int_{out} \vec{J}_w \cdot \vec{n} dA &= \bar{w} \dot{m}_c^{out} \quad . \end{aligned} \quad (3.67)$$



Die Geschwindigkeit über die mit einem Randpunkt verknüpfte Teilfläche wird dabei als konstant angenommen. Eine lineare Verteilung der Geschwindigkeit auf der Auslassfläche ist ebenfalls denkbar, kann jedoch zu negativen Koeffizienten führen [57].

Abschließend wird der Auslassimpulsstrom zum Koeffizienten  $a_c$  des Knotenpunkts  $c$  hinzugezählt, so dass der letztendlich im Gleichungssystem eingefügte Koeffizient

$$a_c = a_c + \dot{m}_c^{out} \quad (3.68)$$

lautet. Die Nachbarkoeffizienten werden nicht verändert.

**Druckgleichung.** Wie beim Einlass wird bei der Druckgleichung der austretende Massenstrom zur Konstanten  $b_p$  addiert :

$$b_p^{gesamt} = b_p + \dot{m}_c^{out} . \quad (3.69)$$

## Wand

An Wänden des Rechengebiets ergibt sich keine Änderung für die Druckgleichung. Lediglich bei der Impulsgleichung wird wie bei Einlassrändern die diskretisierte Gleichung für die Randpunkte überschrieben :

$$a_c = 1, \quad a_{nb} = 0, \quad b_c^u = -u_{wall} \quad . \quad (3.70)$$

## Besonderheiten des Verfahrens an Gebietsrändern

**Pseudogeschwindigkeiten und Druckgradienten-Koeffizienten** An Dirichlet-Rändern, bei denen die Geschwindigkeit fest vorgegeben ist, werden die Pseudogeschwindigkeiten  $\hat{u}_c$ ,  $\hat{v}_c$  und  $\hat{w}_c$  gleich den vorgegebenen Geschwindigkeiten und die Druckgradienten-Koeffizienten  $d_c^i$  gleich Null gesetzt. Dadurch gehen die gegebenen Geschwindigkeiten unmittelbar in die Druckgleichung ein.

### Eckpunkte mit Nachbarpunkten ausschließlich auf Dirichlet-Rändern

An Gitterpunkten, deren Nachbarpunkte ausschließlich auf Rändern mit vorgegebenen Geschwindigkeiten liegen, ist in der Druckgleichung der Koeffizient für diesen Punkt gleich Null. Die Koeffizienten in der Druckgleichung 3.59 setzen sich aus den Druckgradienten-Koeffizienten zusammen, die wie oben erläutert an den Dirichlet-Rändern gleich Null gesetzt werden. Der Druck ist demnach an derartigen Eckpunkten unbestimmt. Abhilfe schafft nur eine räumliche Diskretisierung, die diese Situation vermeidet.

### 3.3.6 Lösungsalgorithmus

Mit den diskretisierten Gleichungen und den Randbedingungen können jetzt die zu lösenden Gleichungssysteme aufgestellt werden. Zu jedem Zeitschritt sind innerhalb einer SIMPLE-Iteration die folgenden Schritte abzuarbeiten :

1. Schätzen der Geschwindigkeitsverteilung (nur bei der ersten Iteration).
2. Berechnen des Einlassmassenstroms.
3. Berechnen der Koeffizienten  $a_c$  und  $a_{nb}$  in der Impulsgleichung 3.50.
4. Berechnen der Pseudogeschwindigkeiten  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  und  $\hat{w}$  und der Druckgradient-Koeffizienten  $d_c^u$ ,  $d_c^v$ ,  $d_c^w$  nach Gleichung 3.53 bis 3.55. Außerdem Modifikation von  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  und  $d_c^u$ ,  $d_c^v$ ,  $d_c^w$  an den Einlassrändern und Wänden.
5. Berechnen der Koeffizienten in der Druckgleichung 3.59, Anwendung der Randbedingungen für die Druckgleichung und Lösen des algebraischen Gleichungssystems für  $p$ .
6. Berechnen der Konstanten  $b_c^i$  in der Impulsgleichung nach Gleichung 3.49.
7. Überschreiben der Koeffizienten in der diskreten Impulsgleichung an Dirichlet-Rändern und ergänzen der Koeffizienten an Auslassrändern.
8. Lösen der Gleichungssysteme für  $u$ ,  $v$  und  $w$ . Relaxation der erhaltenen Werte.
9. Schritte 3. bis 8. mit den neuen Werten für  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $p$  wiederholen, bis das Konvergenzkriterium erreicht ist.

Vor der ersten Iteration ist es also notwendig, ein Geschwindigkeitsfeld vorzugeben. Dieses sollte nach Möglichkeit schon grob die erwartete Strömung widerspiegeln und die Massenerhaltung über das Rechengebiet einhalten. Auf Basis dieser Geschwindigkeitsverteilung werden nun die Koeffizienten  $a_c$  und  $a_{nb}$  in der Impulsgleichung berechnet. Die zur Lösung des Gleichungssystems noch fehlenden Konstanten  $b_c^i$  können noch nicht berechnet werden, da das Druckfeld zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt ist. Es werden also zunächst die Pseudogeschwindigkeiten und Druckgradient-Koeffizienten berechnet und mit dessen Hilfe die Koeffizienten in der Druckgleichung bestimmt. Anschließend kann die Druckverteilung berechnet werden und damit die Konstanten  $b_c^i$  für die Impulsgleichung. Nach Anwendung der Randbedingungen an Dirichlet-Rändern kann auch das Gleichungssystem für die Geschwindigkeitsverteilung gelöst werden. Ist das geforderte maximale Residuum noch nicht erreicht, werden mit der neuen Geschwindigkeits- und Druckverteilung wiederum die Koeffizienten  $a_c$  und  $a_{nb}$  bestimmt und damit ein neuer Iterationsschritt begonnen. Nach Erreichen des Konvergenzkriteriums wird ggf. der Einlassmassenstrom modifiziert und mit dem nächsten Zeitschritt in gleicher Weise verfahren.

## Konvergenzkriterium

Als Konvergenzkriterium dient die Summe der Gleichungsresiduen. Der Fehler für eine Gleichung berechnet sich durch Einsetzen der aktuellen Geschwindigkeits- und Druckverteilungen in das entsprechende Gleichungssystem. Damit lassen sich vier Residuen  $R_u$ ,  $R_v$ ,  $R_w$  und  $R_p$  beschreiben, deren Summe als Konvergenzkriterium herangezogen wird :

$$R_u + R_v + R_w + R_p < R_{\max} \quad . \quad (3.71)$$

$R_{\max}$  muss so gewählt werden, dass die erhaltene Lösung den Genauigkeitsforderungen entspricht.

Alternativ kann die relative Änderung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung von einer Iteration zur anderen als Konvergenzkriterium verwendet werden. Die relative Änderung in der Geschwindigkeitsverteilung für  $u$  berechnet sich z.B. :

$$\Delta u = \frac{\sum_i u_i - \sum_i u_i^*}{\sum_i u_i} \quad , \quad (3.72)$$

mit dem Geschwindigkeitsfeld  $u_i^*$  aus der vorhergehenden Iteration. Damit lässt sich das alternative Kriterium angeben :

$$\Delta u + \Delta v + \Delta w + \Delta p < \Delta_{\max} \quad . \quad (3.73)$$

Vorteil dieses Kriteriums ist, dass es sehr viel weniger Rechenzeit in Anspruch nimmt als das zuerst genannte.

## Relaxation der diskretisierten Gleichungen

Die Nichtlinearität der Grundgleichungen wird in *KAPPA-cvfem* durch die Verwendung eines iterativen Verfahrens berücksichtigt. Wie auch den kommerziellen FVM-Varianten ist es dabei oft notwendig, die Änderung der abhängigen Variablen von einer Iteration zur nächsten zu verlangsamen. Andernfalls kann die Lösung oszillieren oder sogar divergieren. Aus den verschiedenen Verfahren zur Relaxation des Gleichungssystems wird ein implizites Relaxationsverfahren gewählt [50], das anhand der Impulsgleichung in  $x$ -Richtung erläutert wird. Dazu wird Gleichung 3.50 nach  $u_c$  aufgelöst :

$$u_c = - \frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_c}{a_c} \quad . \quad (3.74)$$

Mit den Geschwindigkeitswerten der vorhergehenden Iteration  $u_c^*$  und durch Einführen des Relaxationsfaktors  $\alpha$ , kann die Änderung von Iteration zu Iteration einstellbar gemacht werden :

$$u_c = u_c^* - \alpha \underbrace{\left( \frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_c}{a_c} - u_c^* \right)}_{\text{Änderung}} \quad . \quad (3.75)$$

Umstellen der Gleichung führt auf folgende Form :

$$\underbrace{\frac{a_c}{\alpha}}_{a'_c} u_c + \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \underbrace{b_c + (\alpha - 1) \frac{a_c}{\alpha} u_c^*}_{b'_c} = 0 \quad (3.76)$$

mit dem neuen Koeffizienten  $a'_c$ , der neuen Konstanten  $b'_c$  und dem Relaxationsfaktor  $\alpha$ , der positive Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Typische Werte reichen von  $\alpha = 0.2$  bis  $\alpha = 0.8$ . Hierbei besteht ein starker Zusammenhang mit der Qualität der Tetraedernetze. Stumpfe Winkel führen mit dem verwendeten *FLO*-Schema zu negativen Koeffizienten in den diskretisierten Gleichungen. Speziell bei der Simulation des Aortenbogens lässt sich dies allerdings nicht immer vermeiden. Extrem kleine Relaxationsfaktoren führen dann zu einer Stabilisierung des Verfahrens, aber auch zu extrem hohen Rechenzeiten.

Zu beachten ist, dass nur die Gleichungssysteme für  $u$ ,  $v$  und  $w$  relaxiert werden dürfen. Eine Relaxation der Druckgleichung würde dazu führen, dass die Massenerhaltung nicht mehr gewährleistet ist.

### 3.3.7 Gleichungslöser

Zur Lösung der algebraischen Gleichungssysteme, die sich aus der Diskretisierung ergeben, wird die frei verfügbare *SPLIB* der Indiana University eingesetzt. Die *SPLIB* Bibliothek umfasst dreizehn iterative Gleichungslöser, zu denen neben den klassischen Gauß-, Jacobi- und *SOR*-Verfahren (*successive Over-Relaxation*) verschiedene Varianten der CG-Methode (*Conjugate Gradients*) gehören [8]. Zur Beschleunigung der iterativen Verfahren stehen sieben Prekonditionierer, im wesentlichen Varianten der unvollständigen *LU*-Zerlegung, zur Verfügung.

Die *SPLIB* verwendet das *CSR*-Datenformat (*Compressed Sparse Row*), bei dem nur die von null verschiedenen Einträge der Matrix abgelegt werden. Genauer werden die  $n_{NonZero}$  von null verschiedenen Elemente der  $n \times n$ -Matrix  $A$  in einem Feld der Länge  $n_{NonZero}$  abgelegt. Ein zweites Feld der Länge  $n_{NonZero}$  enthält die Spaltennummern der Einträge. Der Beginn der zu einer Zeile gehörenden Einträge wird schließlich in einem dritten Feld festgehalten. Der Speicherbedarf beläuft sich damit insgesamt auf  $n_{NonZero}$  Fließkomma und  $n_{NonZero} + n + 2$  ganzzahlige Variablen.

Als Prekonditionierer wird in den hier behandelten Simulationen die unvollständige *LU*-Zerlegung ohne Modifikation der Nicht-Diagonalelemente verwendet (*ILU0*). Zur Lösung der linearen Gleichungssysteme hat sich stabilisierte das Bi-Konjugierte-Gradienten-Verfahren bewährt (*CGSTAB*). Einzelheiten zu diesen Verfahren finden sich bei Meijerink und van der Vorst [42] bzw. van der Vorst [66].

### 3.4 Numerisches Verfahren in STAR-CD

In den Kapiteln 4 und 5 kommt neben dem oben vorgestellten *KAPPA-cvfem* der kommerzielle CFD-Code *STAR-CD*<sup>©</sup> zum Einsatz. Bei *STAR-CD*<sup>©</sup> handelt es sich um ein Finite-Volumen-Programm zur Strömungsanalyse, das von der Firma **Computational Dynamics Limited (CD)** in London/GB entwickelt wird. CD wurde 1987 mit der Zielsetzung gegründet, CFD-Programme für industrielle Anwendungen zu erstellen und vertreiben. *STAR-CD*<sup>©</sup> besteht aus mehreren auf Systemebene unabhängigen Modulen. Im Einzelnen sind dies :

- **ProStar** zur Beschreibung des konkreten Berechnungsproblems, Pre- und Postprozessing:
  - Netzgenerator
  - Eingabe von Anfangs- und Randbedingungen
  - Definition der physikalischen Größen
  - Konvertierung von Dateien, Einlesen von Rechnernetzen
  - Postprozessor zur graphischen Auswertung oder Export von Ergebnissen
- **ProHPC** zur Gebietszerlegung der Modelle für die Parallelverarbeitung mit **StarHPC**
- **StarHPC** Analysemodul (Solver)

Zusätzliche verfügbare Module zur automatischen Netzgenerierung wie **SAMM** oder **ProAM** werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht eingesetzt.

#### 3.4.1 Diskretisierungsverfahren in STAR-CD

Die in Kapitel 2.1 angeschriebenen Erhaltungsgleichungen 2.2 und 2.5 werden in *STAR-CD*<sup>©</sup> mit der Finite-Volumen-Methode räumlich diskretisiert. Dazu wird das Rechengebiet zunächst in Kontrollvolumen unterteilt. Die Erhaltungsgleichungen werden über die einzelnen Zellen bzw. deren Oberflächen integriert. Abschließend wird eine Approximation der abhängigen Variablen im Mittelpunkt der Zellen (*cell-centered*) vorgenommen.

Die Erhaltungsgleichungen werden in allgemeiner vektorieller Schreibweise als

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\Phi) + (\text{div } \rho\vec{u}_r - \Gamma_\Phi \text{ grad } \Phi) = S_\Phi \quad (3.77)$$

geschrieben, wobei  $\Phi$  für eine der abhängigen Variablen  $u, v, w, k, \varepsilon, T$ , usw. und  $\vec{u}_r$  für die Relativgeschwindigkeit der Strömung zu einer lokalen Netzgeschwindigkeit

steht.  $\Gamma_\Phi$  sind die entsprechenden Diffusionskoeffizienten und  $S_\Phi$  die Quellterme in den Ausgangsgleichungen.

Integration der Gleichung 3.77 liefert :

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V (\rho\Phi) dV + \oint_A (\rho\vec{u}_r\Phi - \Gamma_\Phi \text{grad } \Phi) d\vec{S} = \oint_V S_\Phi dV \quad (3.78)$$

mit dem Oberflächenvektor  $\vec{S}$  des Kontrollvolumens  $V$ . Für eine Zelle des Rechenetzes mit dem Volumen  $V_p$  und den Seitenflächen  $S_j, j = 1, \dots, n$  kann 3.78 auch in folgender Form geschrieben werden :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \oint_{V_p} (\rho\Phi) dv}_{T_1} + \underbrace{\sum_j \oint_{S_j} (\rho\vec{u}_r\Phi - \Gamma_\Phi \text{grad } \Phi) d\vec{S}}_{T_2} = \underbrace{\oint_{V_p} S_\Phi dV}_{T_3} \quad (3.79)$$

$$(3.80)$$

Die Terme in Gleichung 3.79 werden nun separat approximiert. Der instationäre

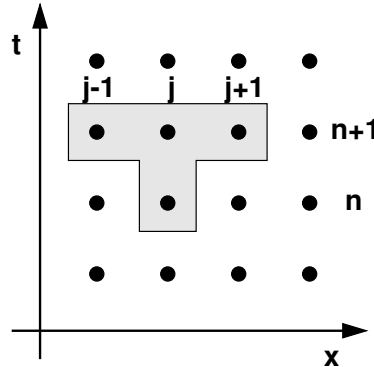


Abbildung 3.8: Molekül der Zeitdiskretisierung

Term  $T_1$  wird zu

$$T_1 \sim \frac{(\rho\Phi V)_p^{n+1} - (\rho\Phi V)_p^n}{\Delta t} \quad (3.81)$$

wobei die Indizes  $n + 1$  und  $n$  für den neuen und den alten Zeitschritt mit der Differenz  $\Delta t$  stehen. Bei allen in dieser Arbeit mit *STAR-CD*<sup>©</sup> durchgeführten Berechnungen wird die vollimplizite Zeitdiskretisierung benutzt, bei der alle Werte der Flüsse über ein Zeitintervall aus den Werten zum neuen Zeitschritt berechnet werden. Das zugehörige Molekül der Zeitdiskretisierung im eindimensionalen Fall ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

Der Term  $T_2$  wird in die konvektiven Flüsse  $K_j$  und die diffusiven Flüsse  $D_j$  aufgespalten, die dann als Mittelwerte auf den Zellflächen  $S_j$  bestimmt werden :

$$T_2 \sim \sum_j \left( \overline{\rho \vec{u}_r \Phi \cdot \vec{S}} \right)_j - \sum_j \left( \overline{\Gamma_\Phi \text{grad } \Phi \cdot \vec{S}} \right) \equiv \sum_j K_j - \sum_j D_j \quad . \quad (3.82)$$

Die diffusiven Terme  $D_j$  werden mit flächenzentrierten Ausdrücken approximiert :

$$D_j \sim \Gamma_{\Phi,j} \left[ f_j^l (\Phi_N - \Phi_P) + \left\{ \text{grad } \Phi \cdot \vec{S} - f_j^l \text{grad } \Phi \vec{d}_{PN} \right\}_j \right] \quad . \quad (3.83)$$

Darin sind  $f_j^l$  geometrische Faktoren,  $\vec{d}_{PN}$  der Abstandsvektor benachbarter Zellmittelpunkte (siehe Abb. 3.9) und  $\Gamma_{\Phi,j}$  der auf die Fläche  $S_j$  interpolierte Diffusionskoeffizient. Die Diskretisierung der konvektiven Flüsse ist aufgrund ihrer Nichtlinea-

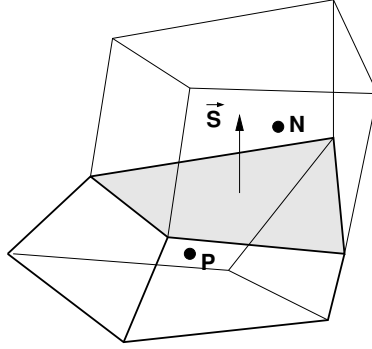


Abbildung 3.9: Benachbarte Zellen mit Zellzentren  $P$  und  $N$

rität deutlich kritischer und erfordert einen höheren numerischen Aufwand. *STAR-CD*<sup>©</sup> bietet eine Reihe von Diskretisierungsschemata vom Upwind-Verfahren 1. Ordnung über zentrale Differenzen bis zu Verfahren 3. Ordnung (Gamma, QUICK). In der vorliegenden Arbeit wird durchgehend das MARS-Verfahren eingesetzt, das ein Verfahren 2. Ordnung darstellt.

### MARS-Verfahren

Das MARS-Verfahren (Monotone Advection and Reconstruction Scheme) besteht aus zwei Schritten :

#### 1. Reconstruction

Mit Hilfe eines *Total Variation Diminishing* Schemas wird ein Feld monotoner Gradienten berechnet, das zusammen mit den Zellwerten eine räumliche Diskretisierung zweiter Ordnung gewährleistet.

## 2. Advection

Die Flüsse über die Zelloberflächen werden für alle advektiv transportierten Größen anhand eines monotonen und beschränkten Advektions-Schemas aus den im ersten Schritt berechneten Größen rekonstruiert.

Das MARS-Verfahren zeichnet sich durch eine geringe numerische Diffusion aus, kann allerdings dispersiv wirken.

## Abschließende FV-Gleichungen

Der 3. Term  $T_3$  der Gleichung 3.79 stellt im Allgemeinen Quellen oder Senken der transportierten Größe dar. Zusätzliche Flüsse werden ebenfalls über diesen Term behandelt. Die Formulierung des Terms ist von der Art der Quellterms abhängig. Flüsse und andere Gradienten enthaltende Terme werden ähnlich wie die Terme  $K_j$  und  $D_j$  approximiert, während Größen ohne Gradienten aus den zellzentrierten Größen berechnet werden. Allgemein kann das Ergebnis in quasi-linearer Form wie folgt formuliert werden :

$$T_3 = s_1 - s_2 \Phi_P \quad . \quad (3.84)$$

Durch Einsetzen der oben formulierten Gleichungen 3.81, 3.82, 3.83 und 3.84 in die Grundgleichungen 3.78 und der Kontinuitätsgleichung in folgender Form

$$\frac{(\rho V)^n - (\rho V)^0}{\delta t} + \sum F_j^{n+1} = 0 \quad (3.85)$$

ergibt sich die endgültige Form der diskreten Finite Volumen Gleichungen. In kompakter Form lauten die zu lösenden algebraischen Gleichungen wie folgt :

$$A_P \Phi_P^n = \sum_m A_m \Phi_m^n + s_1 + B_P \Phi_P^0 \quad . \quad (3.86)$$

- $A_m$  stellt die konvektiven und/oder diffusiven Effekte dar
- die Summation beinhaltet alle Nachbarzellen entsprechend der Raumdiskretisierung
- $B_P = (\rho V)^0 / \delta t$
- $A_P = \sum_m A_m + s - 2 + B_P$

Eine Gleichung der Form 3.86 wird für jede Zelle des Rechengebietes formuliert und entsprechend den Anforderungen modifiziert, beispielsweise durch Anwendung von Randbedingungen. Zusätzlich ist für jede der abhängigen Variablen ein entsprechender Satz an Gleichungen zu lösen, woraus die Gesamtzahl von  $\# \text{ Zellen} \times \text{ Variablen}$  an algebraischen Gleichungen folgt.



## PISO-Algorithmus

*STAR-CD*<sup>©</sup> stellt für stationäre Rechnungen den SIMPLE-ALgorithmus zur Verfügung, der in Kapitel 3.3.6 beschrieben ist. Detaillierte Informationen zu SIMPLE und seinen Varianten finden sich auch in den Standardwerken von Ferziger und Peric [24] bzw. Fletcher [26].

Im instationären Fall wird in *STAR-CD*<sup>©</sup> der PISO-Algorithmus (*Pressure Implicit with Splitting of Operators*) eingesetzt, der im Folgenden genauer beschrieben wird. Die Impulsgleichung wird aus der Transportgleichung 3.86 extrahiert und folgendermaßen formuliert :

$$A_P u_{i,P}^n = H(u_{i,m}^n) + B_P^0 u_{i,P}^0 + s_1 + D_P (p_{N+}^n - p_{N-}^n) \quad (3.87)$$

mit

$$H(u_{i,m}) = \sum_m A_m u_{i,m} \quad . \quad (3.88)$$

Der letzte Term in Gleichung 3.87 ist die Finite-Volumen Approximation des Druckgradienten  $\partial p / \partial x_i$ ,  $D_P$  ist ein geometrischer Koeffizient.

Die Kontinuitätsgleichung wird formuliert als :

$$B_P^n - B_P^0 + \sum_j (\rho^n u_j^n S_j) = 0 \quad (3.89)$$

wobei  $u_j$  die Geschwindigkeiten normal zu den Zelloberflächen und  $S_j$  die zugehörigen Oberflächen darstellen. Die Bezeichnungen der Zellen sind in Abbildung 3.10 dargestellt. Die Geschwindigkeiten der Oberflächen werden durch die Knotengeschwindigkeiten und durch die benachbarten Drücke beschrieben. Die Erhaltung der Masse wird durch die Geschwindigkeiten der Oberflächen  $u_j^n$  gewährleistet, die daher als *Massenerhaltende Geschwindigkeiten* bezeichnet werden. Eine Impulsgleichung für die Zelloberflächen wird formuliert als

$$\overline{A_P} u_j^n = \overline{H}(u_{i,m}^n) + \overline{B_P}^0 u_{i,P}^0 + \overline{s_1} + \overline{D_P} (p_P^n - p_{N+}^n) \quad , \quad (3.90)$$

wobei die überstrichenen Größen eine Mittelung über die Koeffizienten der Knotenwerte in den diskretisierten Impulsgleichungen darstellen.

Diese Formulierung führt nach Einsetzen der Gleichung 3.90 in die Kontinuitätsgleichung 3.89 zu der zuvor angesprochenen Druckgleichung, welche aufgrund der Entkoppelung der Impulserhaltungsgleichungen und der Kontinuität bei inkompressiblen Strömungen notwendig ist. In kompakter Form lautet diese :

$$A_P p_P^n = \sum_m A_m p_m^n + s_1 \quad . \quad (3.91)$$

Der Quellterm  $s_1$  ist unter anderem eine Funktion der Knotengeschwindigkeiten  $u_i^n$ .

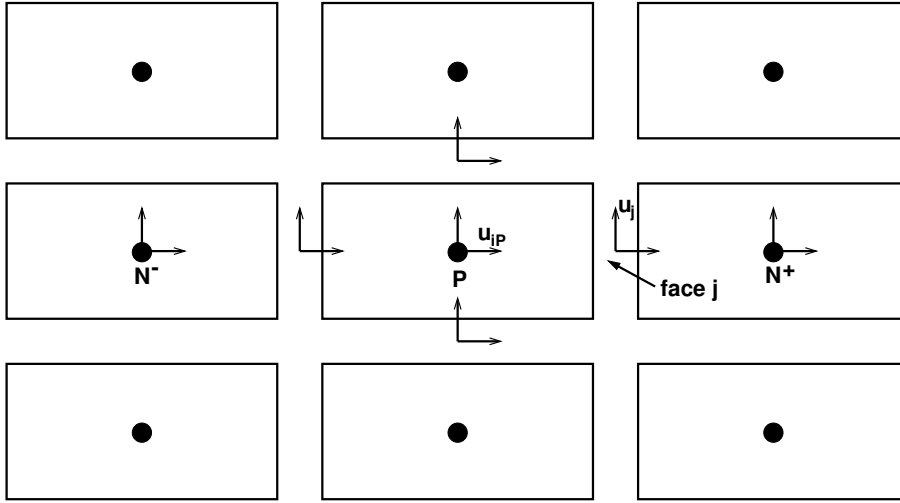


Abbildung 3.10: Bezeichnungen der PISO-Implementierung auf einem kartesischen Netz

### 3.4.2 Lösungsalgorithmus

Ausgehend von den Initialisierungsgrößen  $\Phi^0$  wird mittels des PISO-Algorithmus die Lösung für einen Zeitschritt  $\delta t$  in folgender Reihenfolge errechnet :

#### 1. Prediktor Schritt

Die Gleichungen 3.87 werden für alle Zellen und Variablen formuliert und in nachstehender Form für das vorläufige Geschwindigkeitsfeld der Knoten  $u_i^{(1)}$  berechnet.

$$A_P u_{i,P}^{(1)} = H(u_{i,m}^{(1)}) + B_P^0 u_P^0 + s_1 + D_P (p_{N^+}^{(0)} - p_{N^-}^{(0)}) \quad (3.92)$$

$p^{(0)}$  entspricht dem Druckfeld zum Beginn des Zeitschritts. Nach iterativer Lösung dieser Gleichung werden die vorläufigen Oberflächengeschwindigkeiten  $u_j^{(1)}$  aus Gleichung 3.90 berechnet, wobei  $u_i^n$  und  $p^n$  durch  $u_i^{(1)}$  bzw.  $p^0$  ersetzt wird.

#### 2. Erster Korrektor Schritt

Die Impulsgleichungen 3.87 werden nun formuliert als

$$A_P u_{i,P}^{(2)} = H(u_{i,m}^{(1)}) + B_P^0 u_P^0 + s_1 + D_P (p_{N^+}^{(1)} - p_{N^-}^{(1)}) \quad (3.93)$$

Durch Ersetzen der Größen  $u_i^n$  und  $p^n$  durch  $u_i^{(2)}$  bzw.  $p^{(1)}$  in Gleichung 3.90 ergibt sich die Gleichung der Impulserhaltung für die Zelloberflächen. Hieraus ergibt sich die Druckgleichung zu :

$$A_P p_P^{(1)} = \sum_m A_m p_m^{(1)} + s_1 \quad (3.94)$$

wobei der Quellterm  $s_1$  eine Funktion der Knotengeschwindigkeiten  $u_i^{(1)}$  und  $u_i^0$  ist. Die iterative Berechnung des Druckes  $p^{(1)}$  aus der Gleichung 3.94 erfolgt nach Berechnung der Größen  $u_i^{(2)}$  aus Gleichungen 3.93 und der wie beschrieben modifizierten Impulsgleichung für die Zelloberflächen 3.90.

### 3. Zusätzliche Korrekturschritte

Die zusätzlichen Korrekturschritte werden äquivalent zum ersten Korrekturschritt unter Verwendung folgender Gleichungen durchgeführt :

$$A_P u_{i,P}^{(q+1)} = H(u_{i,m}^{(q)}) + B_P^0 u_P^0 + s_1 + D_P (p_{N+}^{(q)} - p_{N-}^{(q)}) \quad (3.95)$$

$$A_P p_P^{(q)} = \sum_m A_m p_m^{(q)} + s_1 \quad (3.96)$$

Die Indizes  $q = 1, 2, \dots$  stellen die Korrekturschritte dar. Die Koeffizienten  $A_p$  bleiben über die Korrekturschritte konstant. Die Genauigkeit der Approximation der Lösungsgrößen  $u^n$  und  $p^n$  der ursprünglichen Gleichungen durch die Größen  $u^{(q+1)}$  und  $p^{(q)}$  wird durch eine Erhöhung der Anzahl der Korrekturschritte verbessert.

Nach Beendigung der notwendigen Korrekturschritte, welche sich aus dem Abbruchkriterium ergeben, wird die Lösung als Startlösung für den nächsten Zeitschritt verwendet und die Lösungssequenz beginnt bei Schritt 1.

## Konvergenz- und Abbruchkriterium

Für stationäre Rechnungen verwendet *STAR-CD*<sup>©</sup> das Residuum  $r_{\Phi}^k$  der FV-Gleichungen zu Überwachungs- und Kontrollzwecken. Das Residuum stellt das Restglied dar, das entsteht, wenn die Näherungslösung  $\Phi^K$  in die diskretisierten Transportgleichungen eingesetzt wird :

$$r_{\Phi}^k \equiv A_P \Phi_P^k - \sum_m A_m \Phi_m^k - s_1 \quad .$$

Die tatsächlich verwendeten Residuen werden normiert :

$$R_{\Phi}^k \equiv \frac{\sum |r_{\Phi}^k|}{M_{\Phi}} \quad (3.97)$$

wobei die Normierungsfaktoren  $M_{\Phi}$  abhängig von der betrachteten Gleichung sind. Die Summation erfolgt jeweils über das gesamte Rechengebiet. Die Normierungsfaktoren  $M_{\Phi}$  ergeben sich aus

$$M_{\Phi} = \sum_P A_P \Phi_P^k$$

wobei in den Impulsgleichungen  $\Phi_P$  der Geschwindigkeitsbetrag in der Zelle  $P$  ist. Für die Kontinuitätsgleichung wird das größte  $r_{\Phi}^k$  der ersten 10 Iterationen als Normierungsfaktor gewählt. Typische Abbruchkriterien liegen in der Größenordnung von  $\max(R_{\Phi}^k) < 10^{-3}$ .

Im instationären Fall kann das obige Konvergenzkriterium nicht verwendet werden. Stattdessen wird anhand einer internen Fehlerschätzung die Zahl der Korrektorschritte beschränkt. Der "Splitting Error" des PISO-Algorithmus ist von der Ordnung  $\delta t^2$  [34] und damit eine Größenordnung kleiner als der Fehler durch die Zeitdiskretisierung [35]. In der ursprünglichen Variante des PISO-Algorithmus sind daher nur 2 Korrektorschritte vorgesehen. Die Implementierung in *STAR-CD*<sup>©</sup> ist zur Erhöhung der Genauigkeit des Algorithmus mit einer variablen Anzahl von Korrektorschritten realisiert. Die Anzahl der benötigten Schritte wird mittels einer internen Abschätzung des "Splitting Errors" bestimmt.

Die dem Benutzer zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens zur Verfügung gestellten Information ist die "Global Rate of Change"  $C_{\Phi}^k$ , die wie folgt definiert ist :

$$C_{\Phi}^k = \sum (|B_P^n \Phi_P^n| - |B_P^0 \Phi_P^0|) \quad . \quad (3.98)$$

$k$  stellt die Anzahl der berechneten Zeitschritte dar, die Summation wird über alle Zellen durchgeführt. Dargestellt werden die Änderungen der Masse, des Impulses, der Energie, etc.. Im Falle der Darstellung des Verlaufs der Massenerhaltung wird  $C_{\Phi}^k$  aus der Summe über  $(|B_P^n| - |B_P^0|)$  berechnet. Weitere Informationen zu den Konvergenzverläufen und Abbruchkriterien sind der Methodology [15] bzw. dem User Guide [16] zu entnehmen.

### 3.4.3 Randbedingungen

*STAR-CD*<sup>©</sup> bietet eine Reihe von implementierten Randbedingungen zur Behandlung einer Vielzahl strömungsmechanischer Fragestellungen. Die mathematische Formulierung der in dieser Arbeit verwendeten Randbedingungen ist in Kapitel 2.2 zu finden. Ein Gesamtüberblick der verfügbaren Randbedingungen findet sich in der Methodology [15].

#### Einlass

Bei bekanntem Massenstrom findet die "Inlet"-Randbedingung Anwendung. Bei dieser Art von Randbedingung wird der Massenstrom am Einlass durch den Benutzer vorgegeben. Im Falle des in dieser Arbeit behandelten inkompressiblen Mediums muss die Verteilung aller Variablen, außer der des Druckes, in den Zellzentren bekannt sein. Die Flüsse werden direkt aus diesen Größen berechnet. Der Druck wird aus dem Inneren des Rechengbietes extrapoliert.

### Auslass

Die Auslass-Randbedingung findet an Stellen Anwendung, an denen die Strömungsrichtung aus dem Rechengebiet zeigt, ansonsten aber keine Informationen über die Strömung vorliegen. Die Berechnung der Randbedingung erfolgt in 2 Schritten :

1. Die Verteilung der Variablen am Auslass werden aus den Werten stromaufwärts extrapoliert, unter der Annahme, dass die Gradienten der Stromlinien in ihrem Schnittpunkt mit der Ebene des Auslasses gleich Null sind. Hierbei ist zu bemerken, dass
  - die Randbedingung an einer Stelle anzubringen ist, an der die Annahme der Nullgradienten möglichst realitätsnah ist. Konkret bedeutet dies, dass eine möglichst große Entfernung zu hohen, durch strömungsmechanische Vorgänge produzierten Gradienten einzuhalten ist.
  - die Größenordnung der Geschwindigkeiten am Auslass aufgrund dieser Extrapolation nicht fixiert wird.
2. Die Beträge der Geschwindigkeiten am Auslass werden aus der Kontinuitätsgleichung berechnet.

## 3.5 Geometrie- und Netzerstellung

Die einfachen Geometrien in den Verifikationsfällen und sämtliche verwendeten Rechengitter werden mit dem kommerziellen Preprocessing-System *ICEM-CFD*<sup>©</sup> erstellt. Die komplexere Geometrie des Aortenbogens ist mit *CATIA*<sup>©</sup> angefertigt.

### Tetra-Mesher

*ICEM-CFD-Tetra*<sup>©</sup> erlaubt die vollautomatische Vernetzung beliebiger Geometrien mit Tetraedernetzen. Einige Parameter erlauben die Kontrolle über Anzahl und Verteilung der Tetraeder. Dabei wird zwischen Parametern unterschieden, die sich auf das gesamte Modell auswirken und solchen, die nur auf bestimmte Oberflächen oder Volumen Einfluss nehmen. Nach der eigentlichen Triangulierung der Oberflächen und Berechnung der Tetraeder mit dem *Octree Verfahren* erlaubt ein sogenannter *Smoother* die Optimierung des Netzes hinsichtlich Seitenverhältnis und Größe der Tetraeder. Genauere Beschreibungen der mathematischen Grundlagen dieser automatischen Netzgenerierungsverfahren finden sich beispielsweise bei Lisejkin [39]. Details zur Netzerstellung sind in der Dokumentation zu *KAPPA-cvfem* bzw. *ICEM-CFD*<sup>©</sup> aufgeführt. Die folgenden Parameter können für einzelne Oberflächenfamilien separat vorgegeben werden. Dadurch können beispielsweise

Ein- und Auslassränder oder besonders kritische Gebiete des Rechnernetzes feiner aufgelöst werden.

### Hexa-Mesher

Der Hexaedervernetzer *ICEM-CFD-Hexa*<sup>©</sup> stellt einen Industrie-erprobten Ansatz in der Hexaedervernetzungstechnologie dar. Mit *ICEM-CFD-Hexa*<sup>©</sup> können hochwertige, multiblock-strukturierte Netze erzeugt werden. Durch die konsequente Automatisierung vieler Schritte zur Erstellung der Blocktopologie besteht dabei eine große Zeitersparnis gegenüber konventionellen Hexaedervernetzern. Details finden sich wiederum in den Dokumentationen *KAPPA-cvfem* bzw. *ICEM-CFD*<sup>©</sup>.

## 3.6 Auffinden kritischer Punkte in diskreten Vektorfeldern

Beim Auffinden kritischer Punkte in einem diskreten Vektorfeld wird zwischen Punkten in der freien Strömung und Punkten auf Wänden unterschieden.

### Kritische Punkte in freier Strömung

Hinreichende Bedingung für die Existenz eines kritischen Punktes in freier Strömung ist das Verschwinden des Betrags der zu untersuchenden Größe, beispielsweise  $|\vec{v}(x_0, y_0, z_0)| = 0$ . Bei den hier angewandten numerischen Verfahren liegen die Werte der Geschwindigkeitskomponenten nur in endlich vielen Punkten, bei *KAPPA-cvfem* den Knotenpunkten der Tetraedernetze, bei *STAR-CD*<sup>©</sup> den Zellmittelpunkten der Hexaedernetze, vor. Zur Vereinheitlichung der Auswertung werden in *STAR-CD*<sup>©</sup> die Werte in den Zellmittelpunkten auf die Knoten der Zellen interpoliert. Soll die oben genannte Bedingung des verschwindenden Geschwindigkeitsbetrages auf ein diskretes Feld angewandt werden, ist ein exakter Schnittpunkt der Isoflächen (bzw. Isolinien im zweidimensionalen Fall)  $v_i = 0$  der einzelnen skalaren Vektorkomponenten erforderlich. Aufgrund der beschränkten räumlichen Auflösung und numerischer Fehler ist dies im Allgemeinen nicht der Fall, wodurch die Untersuchung der skalaren Größe  $|\vec{v}|$  zum Auffinden kritischer Punkte ausscheidet.

Wie Abbildung 3.11 illustriert können kritische Punkte auch zwischen den Netzknoten existieren. Dies erfordert eine Bedingung, die auch die Richtungsinformation des diskreten Geschwindigkeitsfeldes berücksichtigt. Eine notwendige, indirekte Bedingung für die Existenz in einem numerischen oder experimentellen Kontrollvolumen ist ein Vorzeichenwechsel aller Richtungskomponenten in den Knotenpunkten des Kontrollvolumens. Für den zweidimensionalen Fall ist dies in Abbildung

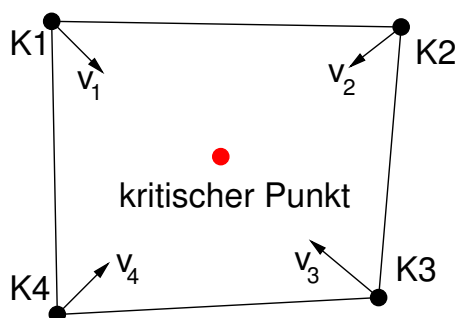


Abbildung 3.11: Kritischer Punkt in einer Zelle

3.11 am Beispiel einer Viereckszelle gezeigt. Nach der Identifikation einer Zelle, die gemäß der oben genannten Bedingung einen kritischen Punkt enthält, wird die Ortsbestimmung über eine gewichtete Interpolation zwischen den Koordinaten der Knotenpunkte vorgenommen. Als Gewichtungskriterium dient dabei der Geschwindigkeitsbetrag, das heißt es wird angenommen, dass der gesuchte kritische Punkt näher an den Koordinaten der geringeren Geschwindigkeit liegt.

### Kritische Punkte auf einer festen Wand

Kritische Punkte auf festen Wänden werden analog zu denen in freier Strömung bestimmt. Allerdings wird hierbei nicht das Geschwindigkeitsfeld, sondern das Feld der Wandreibungskräfte ausgewertet. Über den Zusammenhang

$$F = \tau \cdot A \quad \tau \sim \frac{\partial u}{\partial y}$$

hängt die Wandschubspannung direkt mit der Geschwindigkeit zusammen. Der positive Faktor  $A$  kann vernachlässigt werden, da keine absoluten Beträge sondern lediglich ein Vorzeichenwechsel untersucht wird.

Der Programmablauf zum Auffinden kritischer Punkte ist in Abbildung 3.12 schematisch dargestellt. Die Zerlegung der Hexaederzellen in jeweils 5 Tetraeder erfolgt, um die Untersuchung auf Vorzeichenwechsel sowohl für Hexaeder- als auch für Tetraedernetze einheitlich zu gestalten.

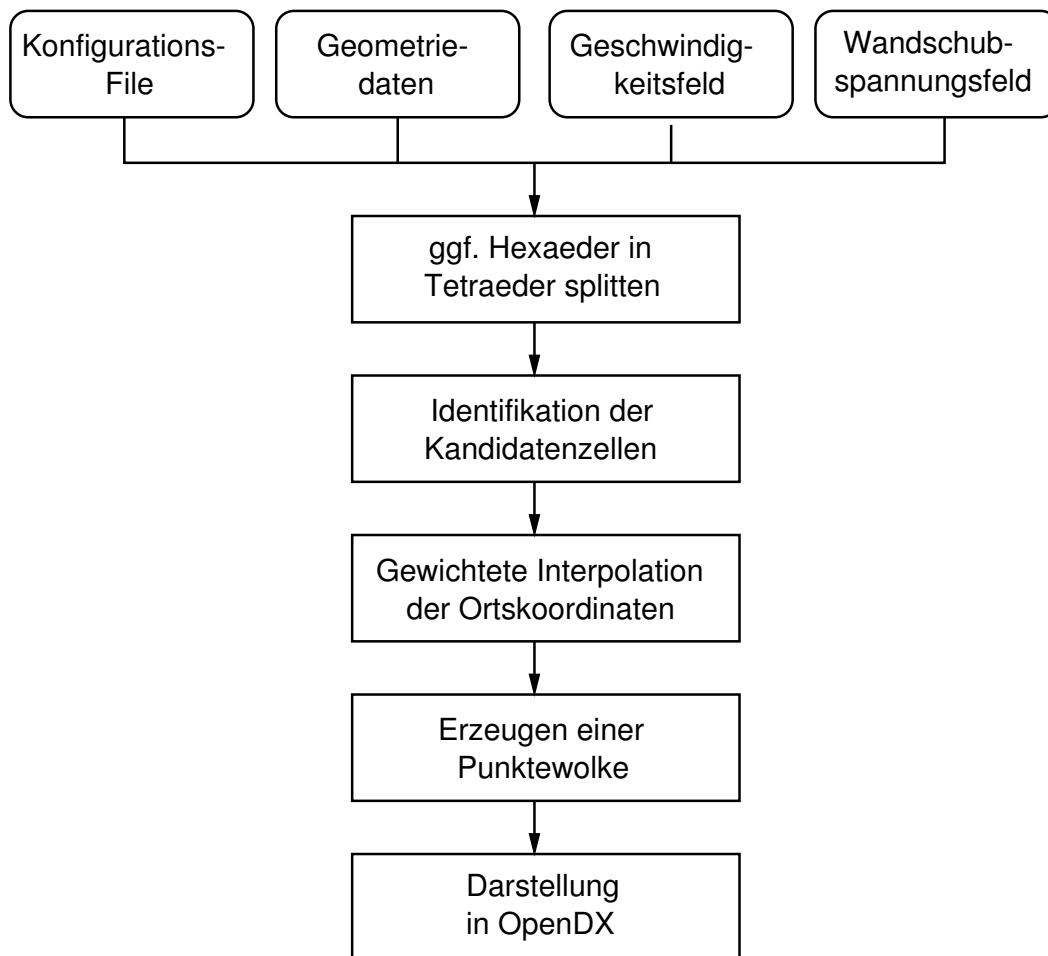


Abbildung 3.12: Programmablauf zum Auffinden kritischer Punkte



# Kapitel 4

## Verifikation

Das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte CVFEM-Verfahren stellt eine Weiterentwicklung der in der Literatur vorhandenen Verfahren dar. Daher ist es notwendig, eine vollständige Verifikationsprozedur durchzuführen, bevor *KAPPA-cvfem* für den Anwendungsfall des menschlichen Aortenbogens eingesetzt wird.

Alle in *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> implementierten numerischen Methoden sind bereits an anderer Stelle *validiert*, so dass - soweit dies für die Navier-Stokes-Gleichungen möglich ist - die mathematische Korrektheit beider Softwarepakete gesichert ist. In *KAPPA-cvfem* sind zudem verschiedene interne Testroutinen implementiert, die bereits auf niedriger Programmebene Fehler feststellen. Hierzu zählen Prüfsummen für das Volumen des Rechengebiets, für die Einlass- und Auslassflächen und für den Massenstrom. Die eigentliche Verifikation von *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> in Hinsicht auf den menschlichen Aortenbogen erfolgt anhand der folgenden Strömungsfälle :

1. Laminare Rührströmung
2. Laminare Rohrströmung mit plötzlicher Verengung
3. Pulsierende Rührströmung

Mit diesen Strömungsfällen sind die wesentlichen Effekte der Strömung im menschlichen Aortenbogen erfasst. Für die drei oben genannten Strömungen liegen entweder analytische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen oder exakt dokumentierte Experimente vor, so dass die numerischen Lösungen quantitativ untersucht werden können. Die laminare ausgebildete und pulsierende Strömung in einem 180° Krümmer wird aufgrund ihrer Komplexität als Anwendungsfall in Kapitel 5.1 behandelt.

## 4.1 Laminare Röhrrömung

Als erster Verifikationsfall wird die laminare Röhrrömung gewählt. Dabei wird die Ausbildung des bekannten parabolischen Geschwindigkeitsprofils bei unterschiedlichen Reynoldszahlen betrachtet, um sicherzustellen, dass sowohl *KAPPA-cvfem* als auch *STAR-CD*<sup>®</sup> die Einlauffeffekte richtig wiedergeben. Hierzu werden die Reynoldszahlen 50, 500, 1000 und 2000 berechnet, womit der im menschlichen Aortenbogen relevante Bereich abgedeckt wird. Die bekannte Hagen-Poiseuille-Strömung soll im folgenden kurz vorgestellt werden.

### Analytische Lösung

Für das Geschwindigkeitsprofil der ausgebildeten laminaren Rohrströmung existiert eine analytische Lösung. Herleitungen dieses Profils finden sich in allen einschlägigen Lehrbüchern der Strömungsmechanik, beispielsweise bei Oertel [46] :

$$u(r) = \bar{u} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) . \quad (4.1)$$

Dabei ist  $\bar{u}$  die mittlere Geschwindigkeit,  $R$  der Rohrradius und  $\bar{u}$  das volumetrische Mittel der Geschwindigkeit (Abb. 4.1). Die Länge  $l$  der Einlaufstrecke beträgt nach

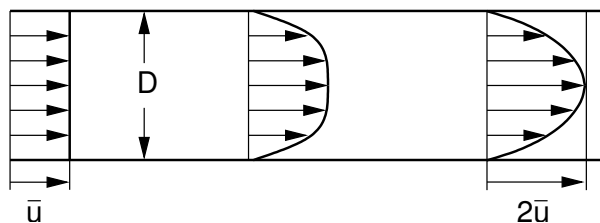


Abbildung 4.1: Rohrströmung und ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil

Schiller [59] im Verhältnis zum Rohrdurchmesser  $D$  :

$$l/D = 0.03 \cdot \text{Re}_D .$$

Dieses Verhältnis ist bei der Wahl der Rechengebiete zu beachten, um am Ende des jeweiligen Gebietes ein ausgebildetes Profil zu erlauben.

### Numerische Lösung

Bei den numerischen Simulationen der laminaren Rohrströmung wird ein Rohrdurchmesser von  $D = 20\text{mm}$  gewählt. Bei den Reynoldszahlen 50, 500 und 1000 ist

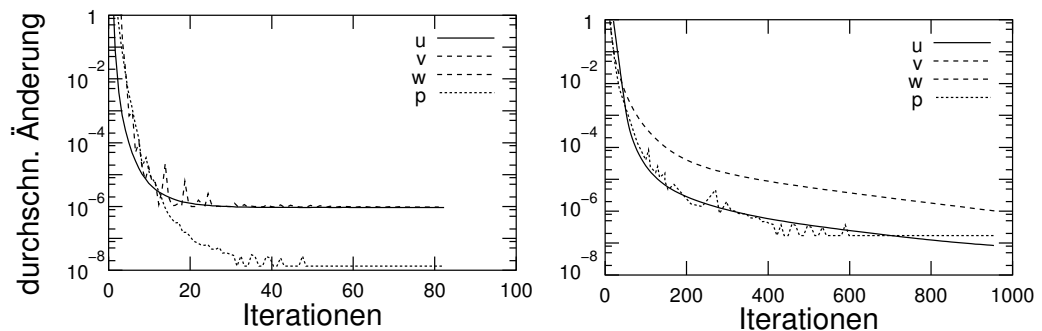
eine Länge von  $L = 1000\text{mm}$  und damit  $L/D = 50$  nach Gleichung 4.2 ausreichend, um ein ausgebildetes Profil zu erreichen. Für  $\text{Re}_D = 2000$  wird eine Länge von  $L = 1200\text{mm}$  verwendet, das Verhältnis  $L/D$  beträgt dann  $L/D = 60$ . In Tabelle 4.1 sind die weiteren physikalischen Parameter dynamische Viskosität  $\mu$ , Dichte  $\rho$ , Massenstrom  $\dot{m}$  und mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  angegeben. Die Dichte  $\rho$  und dynamische Viskosität  $\mu$  des Mediums sind dabei an die im experimentellen Aufbau von Baumgart [7] eingesetzte Calcium-Chlorid-Lösung angepasst. Die Tetraedernet-

$\text{Re}_D$	$\mu$ [kg/ms]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\dot{m}$ [kg/s]	$\bar{u}$ [m/s]
50	$3.18 \cdot 10^{-3}$	1281	$2.495 \cdot 10^{-3}$	$6.206 \cdot 10^{-3}$
500	$3.18 \cdot 10^{-3}$	1281	$2.495 \cdot 10^{-2}$	$6.206 \cdot 10^{-2}$
1000	$3.18 \cdot 10^{-3}$	1281	$4.990 \cdot 10^{-2}$	$1.241 \cdot 10^{-1}$
2000	$3.18 \cdot 10^{-3}$	1281	$9.980 \cdot 10^{-2}$	$2.482 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 4.1: Physikalische Parameter laminare Rohrströmung

ze für *KAPPA-cvfem* bestehen aus 103680 Tetraedern und 20125 Knotenpunkten bzw. 124416 Tetraedern und 24150 Knotenpunkten. Die durchschnittliche Zahl der Nachbarknoten beträgt ca. 20, der Maximalwert liegt bei 30. Bei Reynoldszahlen kleiner  $500 \text{ Re}_D < 500$  kann mit einem Relaxationsfaktor von  $\alpha = 0.5$  gerechnet werden. Für größere Reynoldszahlen  $\text{Re}_D > 500$  wird ein Relaxationsfaktor von  $\alpha = 0.2$  benutzt.

Als Anfangsbedingung wird das gesamte Strömungsfeld mit den Geschwindig-

Abbildung 4.2: Konvergenzverlauf laminare Rohrströmung, *KAPPA-cvfem*, links:  $\text{Re}_D = 50$ , rechts:  $\text{Re}_D = 2000$ 

keitswerten am Einlass initialisiert. Eine relative Änderung von einer Iteration zur nächsten von weniger als  $1 \cdot 10^{-6}$  und eine Summe der Gleichungsresiduen von weniger als  $1 \cdot 10^{-10}$  wird als Konvergenzkriterium herangezogen. In Abbildung

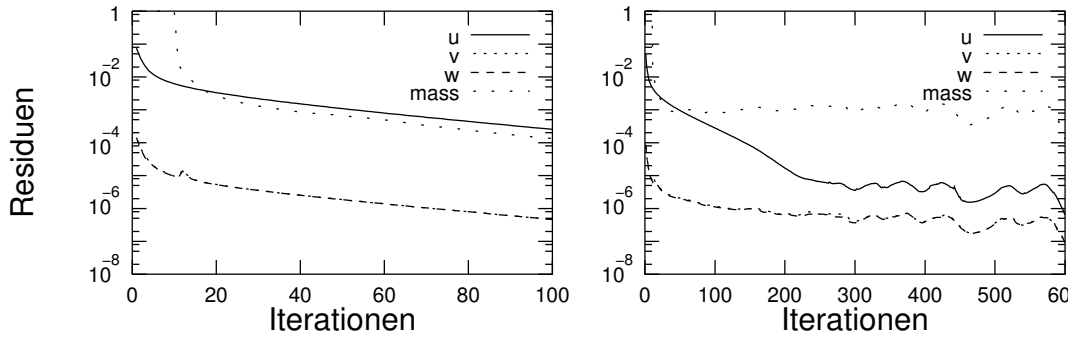


Abbildung 4.3: Konvergenzverlauf laminare Rohrströmung, *STAR-CD*, links:  $Re_D = 50$ , rechts:  $Re_D = 2000$

4.2 sind exemplarisch die Konvergenzverläufe für die Reynoldszahlen 50 und 2000 dargestellt. Auf der  $y$ -Achse findet sich dabei die durchschnittliche Änderung im Strömungsfeld zwischen zwei Iterationen in logarithmischer Skalierung. Bei höheren Reynoldszahlen sind mehr Iterationen notwendig, um das Konvergenzkriterium zu erreichen. Diese Tendenz ist bei *KAPPA-cvfem* deutlich stärker ausgeprägt, als bei *STAR-CD*<sup>©</sup>. Da aus weiteren Konvergenzverläufen bei den stationären Berechnungen der Strömung durch das Rohr mit Verengung bzw. den 180°-Krümmer keine neuen Informationen zu gewinnen sind, wird im Folgenden auf ihre Darstellung verzichtet.

Die Hexaedernetze für die Rechnungen mit *STAR-CD*<sup>©</sup> bestehen aus 359195 Zellen und 368911 Knoten bzw. 431395 Zellen und 442560 Knoten. In *STAR-CD*<sup>©</sup> werden jeweils die Residuen nach Gleichung 3.97 der drei Impuls- und der Konti-

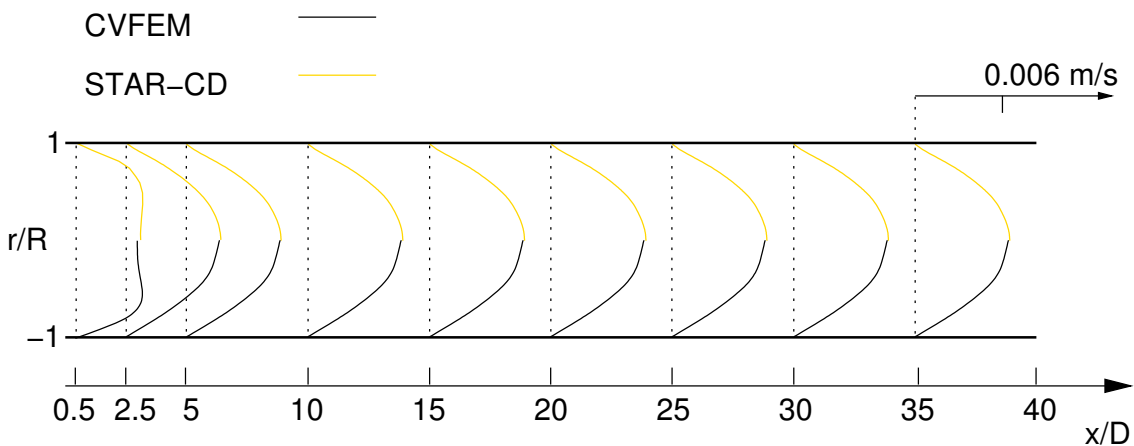


Abbildung 4.4: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*,  $Re_D = 50$

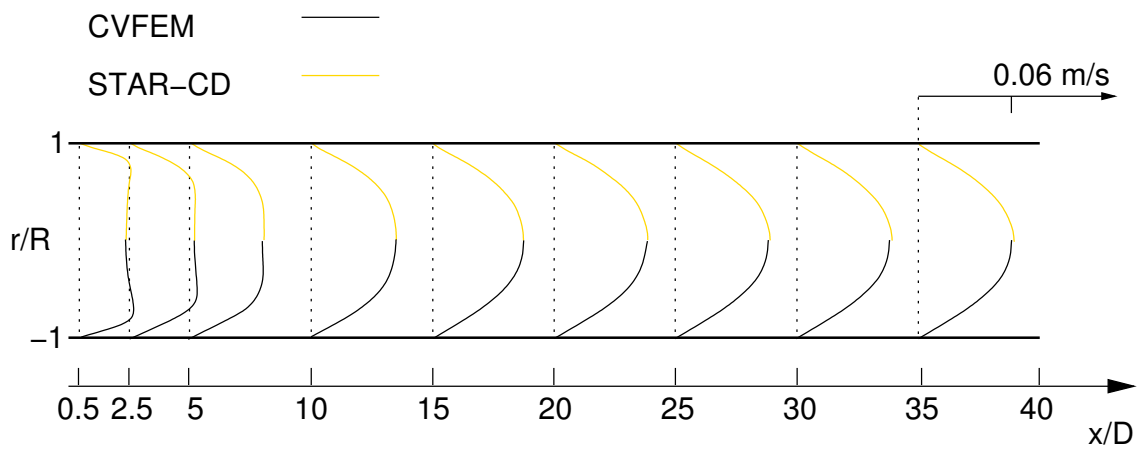


Abbildung 4.5: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*,  $Re_D = 500$

nuitätsgleichungen als Konvergenzkriterium herangezogen. Als Abbruchkriterium wird dabei ein maximaler Wert von  $1 \cdot 10^{-4}$  benutzt. In Abbildung 4.3 ist wiederum der Konvergenzverlauf für die Reynoldszahlen 50 und 2000 dargestellt. Für die Residuen der Kontinuitätsgleichungen ist dabei anzumerken, dass nach 10 Iterationen eine Normierung vorgenommen wird (siehe Kap. 3.4). Alle Rechnungen sind mit dem MARS-Diskretisierungsschema und den Standardrelaxationsfaktoren von 0.7 für die Impuls- bzw. 0.3 für die Kontinuitätsgleichung durchgeführt.

Es ist anzumerken, dass sich das Tetraeder- und das Hexaedernetz bei gleicher Anzahl Zellen deutlich in der Zahl der Knotenpunkte unterscheiden. Der Rechenauf-

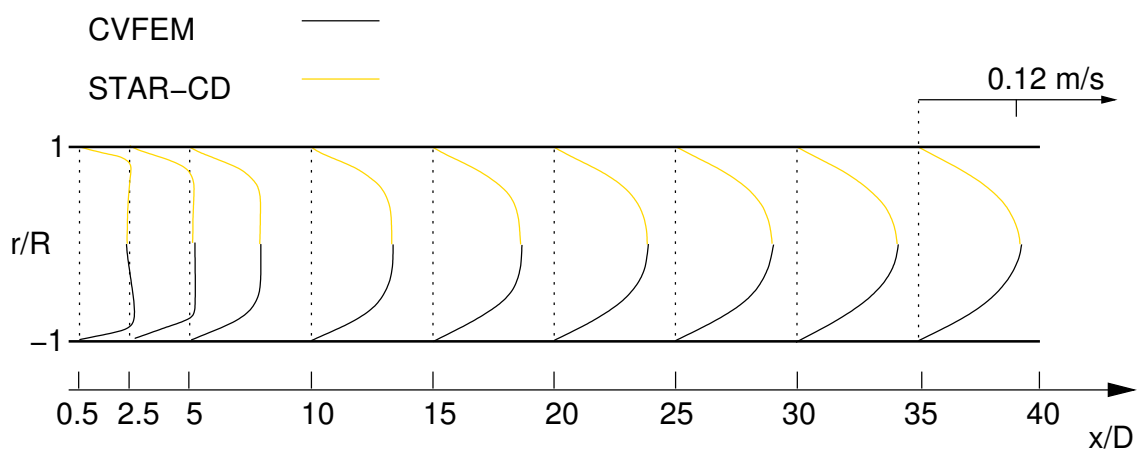


Abbildung 4.6: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*,  $Re_D = 1000$

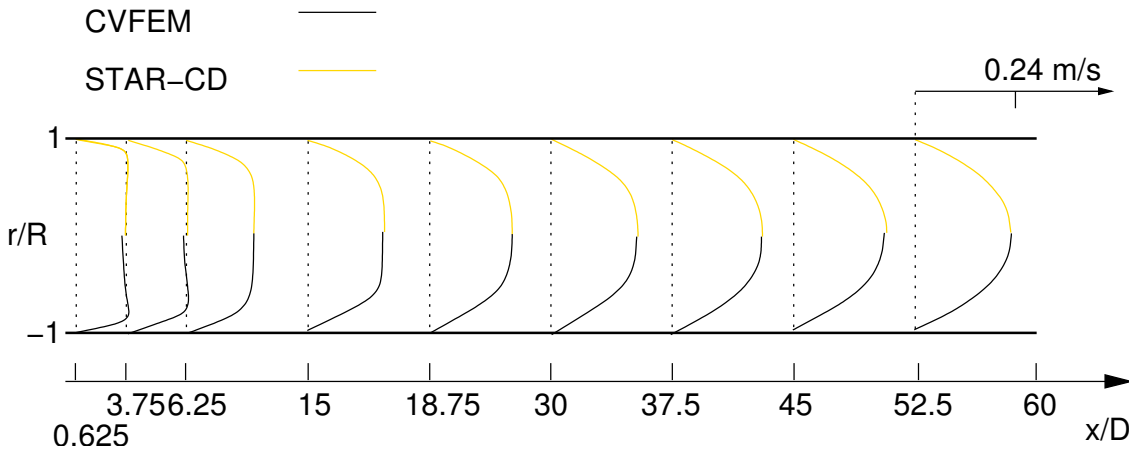


Abbildung 4.7: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*,  $Re_D = 2000$

wand für ein Tetraedernetz mit gleicher Anzahl an Diskretisierungspunkten wäre um ein Vielfaches größer. Die Zahlenwerte der Konvergenzkriterien sind ebenfalls nicht direkt vergleichbar, da sie wie in Kapitel 3.3.6 und 3.4 ausgeführt unterschiedlich gebildet werden. Genauer formuliert verzichtet *KAPPA-cvfem* auf die Normierungen, die *STAR-CD*<sup>©</sup> durchführt.

In den Abbildungen 4.4 bis 4.7 sind die Geschwindigkeitsprofile für *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> entlang eines Mittelschnittes dargestellt. Die unterschiedliche Länge der Einlaufstrecke für die verschiedenen Reynoldszahlen ist deutlich zu erkennen und stimmt mit dem in Gleichung 4.2 angegebenen Wert gut überein. So ist bei der niedrigen Reynoldszahl von  $Re_D = 50$  bereits nach einer Lauflänge von  $2.5 \cdot D$  keine Änderung im Geschwindigkeitsprofil mehr festzustellen. Bei  $Re_D = 500$  liegt die Länge der Einlaufstrecke bereits bei ca. 15 Rohrdurchmessern. Für  $Re_D = 1000$  ist erst kurz vor Ende des Rechengebietes bei ca. 30 Rohrdurchmessern das parabolische Geschwindigkeitsprofil erreicht. Für die größte hier betrachtete Reynoldszahl  $Re_D = 2000$  stellt sich das ausgebildete Profil erst nach ca. 60 Rohrdurchmessern ein. Anhand der analytischen Lösung 4.1 kann das ausgebildete Geschwindigkeitsprofil quantitativ bewertet werden. Beide Softwarepakete zeigen hier nur geringe Abweichungen, die letztendlich durch die Netzauflösung und die Tatsache, dass numerisch keine kontinuierliche Lösung erzielt wird erklärt werden. Die Profile am Ende der jeweiligen Rechengebiete im Vergleich zur analytischen Lösung sind in Abbildung 4.8 gezeigt. Erkennbare Unterschiede bestehen lediglich bei der höchsten Reynoldszahl  $Re_D = 2000$ , bei der beide Softwarepakete die Maximalgeschwindigkeit leicht unterschätzen. Die beobachtete Abweichung liegt jedoch unter 2% und ist im Rahmen der numerischen Abbruch- und Approximationsfehler.

Als Ergebnis des Verifikationsfalls laminare Rohrströmung lässt sich damit festhal-

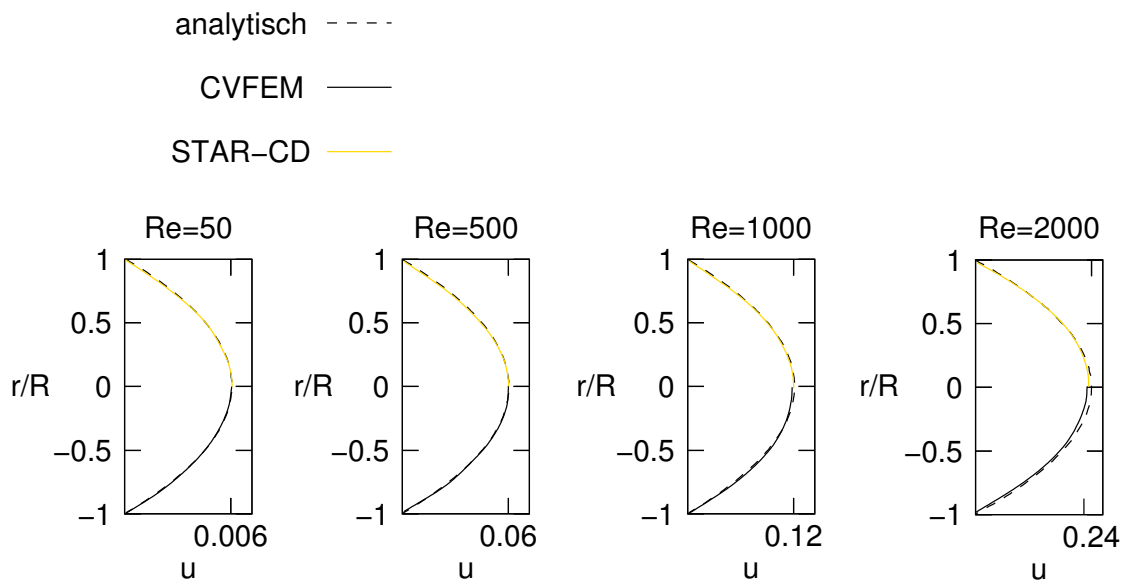


Abbildung 4.8: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile analytische Lösung, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*

ten, dass sowohl die Länge der Einlaufstrecke als auch das ausgebildete Geschwindigkeitsprofil der Hagen-Poiseuille-Strömung von beiden eingesetzten Softwarepaketen mit hoher Genauigkeit wiedergegeben werden.

## 4.2 Rohrströmung mit plötzlicher Verengung

Um die Strömung im menschlichen Aortenbogen numerisch korrekt wiedergeben zu können, muss sichergestellt werden, dass Ablösegebiete richtig berechnet werden. Diese Eigenschaft der eingesetzten Codes wird anhand der Rohrströmung mit plötzlicher Verengung untersucht.

### Experimentelle Daten

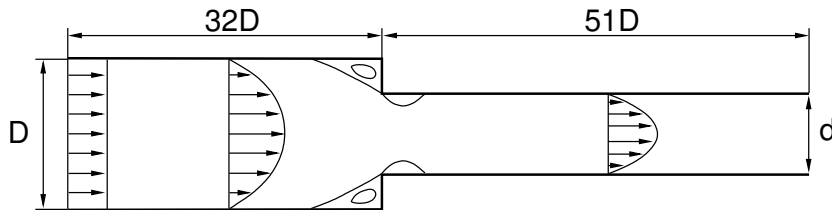


Abbildung 4.9: Geometrie der Rohrströmung mit plötzlicher Verengung

Als Grundlage für dieses Verifikationsbeispiel dient die Arbeit von F. Durst und T. Loy [22]. Darin werden detaillierte Ergebnisse für eine laminare Rohrströmung mit plötzlicher Abnahme des Rohrdurchmessers vorgestellt. Ein komplexer experimenteller Aufbau mit einem Doppel-Pumpensystem und Temperaturkontrolle gewährleistet eine konstante Strömung für alle angegebenen Reynoldszahlen. Als Messsystem dient ein Laser-Doppler-Anemometer mit einem Helium-Neon-Laser. Gleiche Brechungsindizes zwischen Glas und strömendem Medium werden im beschriebenen Experiment durch den Einsatz einer Heizöl-Palatinol-Mischung erreicht. Da dessen Eigenschaften (Dichte, Viskosität) nicht angegeben sind, wird in den numerischen Simulationen Wasser bei Standardbedingungen berechnet und die Einlassgeschwindigkeit an die gegebenen Reynoldszahlen angepasst.

Die Geometrie des Rohres und die Hauptmerkmale der Strömung sind in Abbildung 4.9 gezeigt. Der Einlassdurchmesser beträgt  $D = 19.1\text{mm}$  und verringert sich

$Re_D$	$\mu$ [kg/ms]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\dot{m}$ [kg/s]	$\bar{u}_{Einlass}$ [m/s]
23	$1.002 \cdot 10^{-3}$	998.2	$3.457 \cdot 10^{-4}$	$1.209 \cdot 10^{-3}$
196	$1.002 \cdot 10^{-3}$	998.2	$2.95 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$
372	$1.002 \cdot 10^{-3}$	998.2	$5.90 \cdot 10^{-3}$	$1.955 \cdot 10^{-2}$
968	$1.002 \cdot 10^{-3}$	998.2	$1.535 \cdot 10^{-2}$	$5.09 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 4.2: Physikalische Parameter laminare Rohrströmung mit plötzlicher Verengung



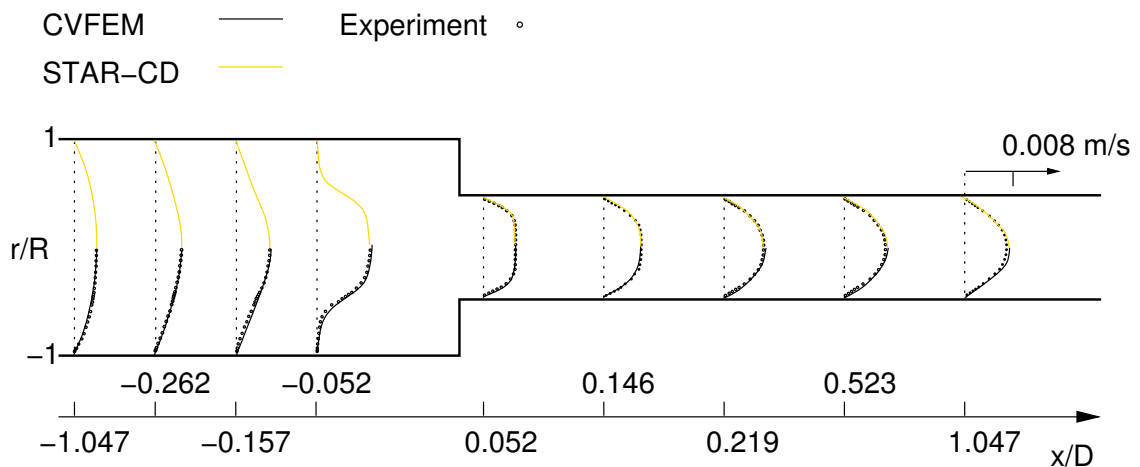


Abbildung 4.10: Geschwindigkeitsprofile Rohrströmung mit plötzlicher Verengung, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*,  $Re_D = 23$

sprunghaft auf  $d = 10.2\text{mm}$ . Die Höhe der Stufe ergibt sich daraus zu  $\Delta d = 4.45\text{mm}$ . Im experimentellen Aufbau beträgt die Einlaufstrecke  $l_1 = 620\text{mm}$  und die Länge des Rohres nach der Verengung  $l_2 = 980\text{mm}$ . Die Länge der Einlaufstrecke ist ausreichend, um vor der Stufe ein ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil zu gewährleisten. Ein bis zwei Stufenhöhen vor der Verengung beginnt sich das Profil zu verformen und zeigt höhere Geschwindigkeiten in der Mitte. Unmittelbar hinter der Stufe verändert sich das Profil abhängig von der Reynoldszahl. In Wandnähe treten Überschwinger in der Geschwindigkeit auf. In der Rohrmitte ist ein abgeflachtes Profil zu beobachten. Die Länge der Wiederausbildungsstrecke ändert sich trotz größerer Unterschiede in den Profilen zu Beginn des engeren Rohres nur wenig. Dies zeigt, dass das Eingangsprofil bei einer Rohrströmung nur geringen Einfluss auf die Einlaufstrecke hat und deckt sich mit den Aussagen zur laminaren Rohrströmung in Kapitel 4.1. In der vorliegenden Arbeit sind die vier in [22] experimentell untersuchten Reynoldszahlen  $Re_D = 23, 196, 372$  und  $968$  nachgerechnet worden. Die genauen physikalischen Parameter sind in Tabelle 4.2 angegeben.

## Numerische Lösung

Aufgrund der Ergebnisse der numerischen Untersuchung anhand der Rohrströmung wird die Einlaufstrecke in den Simulationen beibehalten. Vor der Verengung ist dadurch in allen Fällen ein ausgebildetes Rohrprofil gewährleistet. Die Länge des Rohres nach der Verengung kann auf  $380\text{mm}$  verkürzt werden, da die Geschwindigkeitsprofile in der Nähe der Verengung und nicht die Wiederausbildung im verengten Teil untersucht werden. Eine Rückwirkung der Auslassrandbedingungen bis zur Stu-

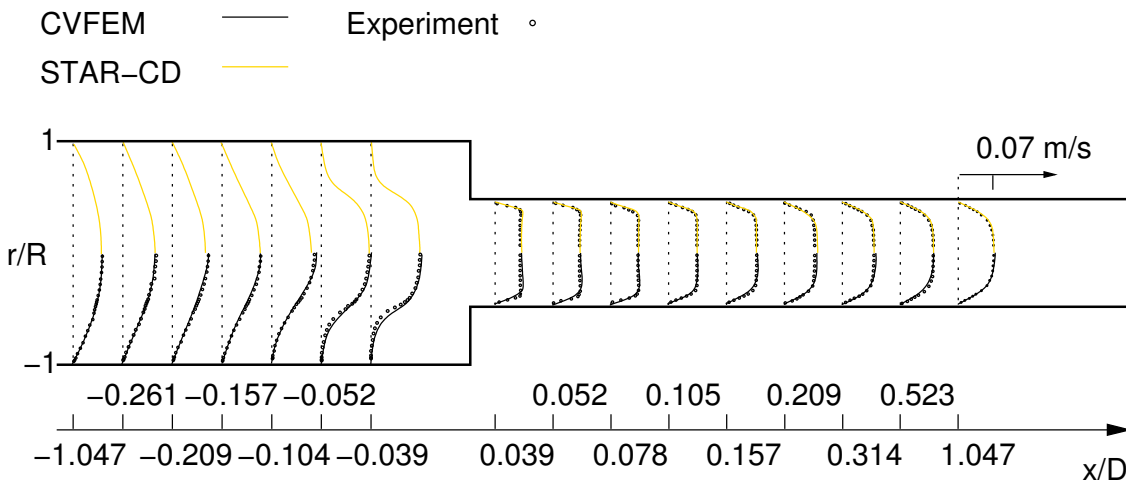


Abbildung 4.11: Geschwindigkeitsprofile Rohrströmung mit plötzlicher Verengung, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*,  $Re_D = 196$

fe liegt weder in *KAPPA-cvfem* noch in *STAR-CD*® vor.

Die Tetraedernetze für die Berechnung mit *KAPPA-cvfem* bestehen aus 207640 Tetraedern mit 35670 Knotenpunkten. Als Relaxationsfaktor wird für alle Fälle  $\alpha = 0.2$  gewählt. Die Anfangsbedingung beträgt im vorderen Bereich des Rohres den in Tabelle 4.2 angegebenen Wert der Geschwindigkeit im Einlass. Im verengten Teil des Rohr wird die Anfangsgeschwindigkeit entsprechend der Kontinuität um den Faktor 4 erhöht.

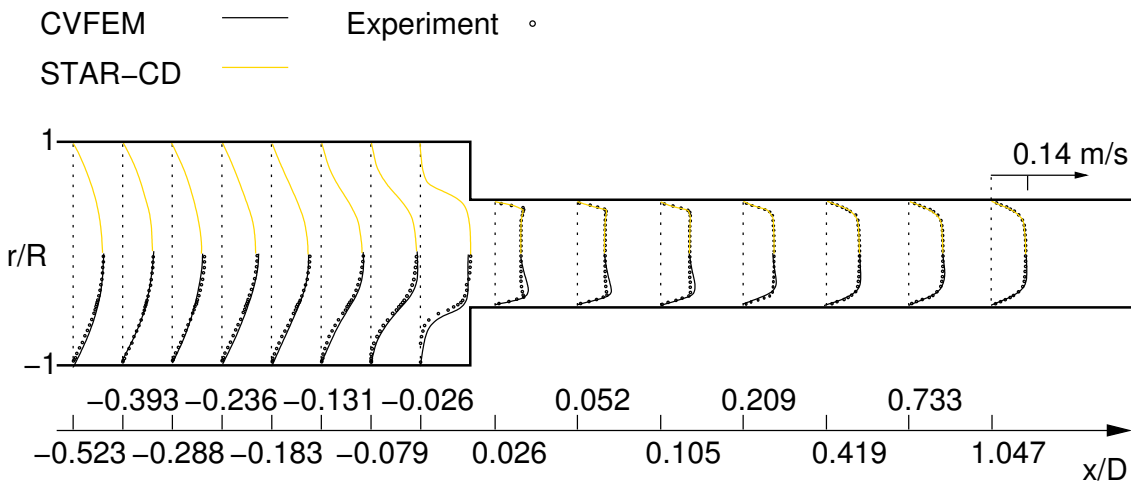


Abbildung 4.12: Geschwindigkeitsprofile Rohrströmung mit plötzlicher Verengung, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*  $Re_D = 372$

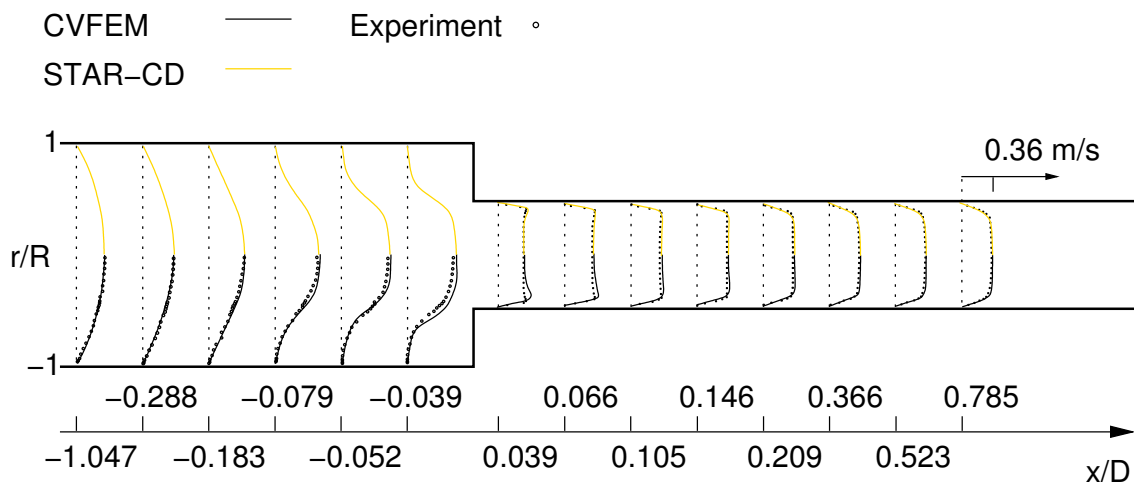


Abbildung 4.13: Geschwindigkeitsprofile Rohrströmung mit plötzlicher Verengung, *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*  $Re_D = 968$

Die Hexaedernetze der *STAR-CD*<sup>©</sup> Berechnungen bestehen aus 464056 Zellen und 474764 Knoten. Wie in Kapitel 4.1 wird mit dem MARS-Schema und den Standardrelaxationsfaktoren gerechnet.

Die Konvergenz- bzw. Abbruchkriterien sind gegenüber Kapitel 4.1 unverändert. Bei steigender Reynoldszahl ist bei *KAPPA-cvfem* eine stark ansteigende Zahl an Iteration zum Erreichen des Konvergenzkriteriums zu beobachten.

Die Abbildungen 4.10 bis 4.13 zeigen die Geschwindigkeitsprofile des Experiments sowie der numerischen Simulationen. Zu beachten ist, dass die Verteilung der Geschwindigkeitsprofile entlang der  $x$ -Achse nicht maßstabsgetreu ist, da im Experiment mehr Profile in Stufennähe vermessen wurden. Nicht alle Profile sind im Experiment über den gesamten Rohrdurchmesser vermessen worden. Im Bereich vor der Stufe sind dementsprechend nur Halbdurchmesserprofile eingetragen.

Erkennbare Abweichungen liegen für beide Softwarepakete im Bereich der sehr starken Gradienten unmittelbar hinter der Stufe vor. Die Überschwinger in den Geschwindigkeiten werden insbesondere von *KAPPA-cvfem* nicht hundertprozentig wiedergegeben. Der Grund hierfür liegt in der nicht ohne weiteres möglichen Verfeinerung der Tetraedernetze auf die Wand hin, ohne dabei die Gesamtzahl der Zellen extrem zu erhöhen. Bei den in sehr geringen Abständen vermessenen Profilen spielt die Netzauflösung in Laufrichtung des Rohres eine große Rolle. Liegt der Messpunkt zwischen zwei Zellmittelpunkten (*STAR-CD*<sup>©</sup>) bzw. Knotenpunkten (*KAPPA-cvfem*) schlägt sich dies direkt in Abweichungen der Ergebnisse nieder. Im Hinblick auf die Strömungsverhältnisse im Aortenbogen mit einer Reynoldszahl von  $Re = 1350$  im stationären Fall und vergleichbaren mittleren Reynoldszahlen der pulsierenden Strömung ist insgesamt eine gute Genauigkeit gegeben.

### 4.3 Rohrströmung mit pulsierender Einlassrandbedingung

Der Fall einer achsensymmetrischen Rohrströmung mit pulsierender Randbedingung auf der Einlassseite wird zur Verifikation der Zeitgenauigkeit der eingesetzten Verfahren benutzt. Die berechneten Womersley- und Reynoldszahlen orientieren sich an den Bedingungen in der menschlichen Aorta.

#### Analytische Lösung

Für den Fall einer ausgebildeten, achsensymmetrischen Rohrströmung mit pulsierender Randbedingung hat Uchida [65] eine analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet. Dazu wird von der Kontinuitäts- und den Impulsgleichungen in Zylinderkoordinaten ausgegangen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (4.4)$$

Mit der Annahme einer achsensymmetrischen Strömung verschwindet die  $v$ -Komponente der Geschwindigkeit und die Kontinuitätsgleichung wird zu  $\partial u / \partial x = 0$  und somit ist  $u = u(r, t)$ . Diese Bedingung entspricht einer ausgebildeten, laminaren Strömung. Das Einsetzen von  $v = 0$  in Gleichung 4.4 ergibt  $\partial p / \partial r = 0$ , d.h. der Druck ist konstant über den Rohrquerschnitt und nur noch von der Lauflänge  $x$  und der Zeit  $t$  abhängig. Die resultierende Bewegungsgleichung für die achsensymmetrische, ausgebildete Strömung schreibt sich damit als

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (4.5)$$

In der komplexen Ebene ist ein Fourier-Ansatz der Form

$$F(t) = -\frac{\partial p}{\partial x} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{int} \quad (4.6)$$

möglich. Gesucht werden Lösungen in der Form

$$u(r, t) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) e^{int} \quad (4.7)$$

wobei nur der Realteil eine physikalische Bedeutung besitzt. Werden die Ansätze 4.6 und 4.7 in Gleichung 4.5 eingesetzt, ergeben sich die folgenden inhomogenen Besselschen Differentialgleichungen :

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_0}{dr} + \frac{u_0}{\nu} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_n}{dr} + \frac{-in}{\nu} u_n + \frac{a_n}{\nu} = 0 \quad . \quad (4.9)$$

Die Integration dieser Differentialgleichung führt auf

$$u_0 = -\frac{a_0}{\nu} \cdot \frac{r^2}{4} + A_0 \ln r + B_0 \quad (4.10)$$

$$u_n = \frac{a_n}{in} + D_n J_0(kri^{3/2}) + E_n K_0(kri^{1/2}) \quad (4.11)$$

wobei  $k = \sqrt{n/\nu r}$  und  $J_0$  bzw.  $K_0$  Besselfunktionen erster bzw. zweiter Gattung 0-ter Ordnung sind. Die gesuchte analytische Lösung ist schließlich durch den Realteil des folgenden Ausdrucks gegeben :

$$u = \left. \begin{aligned} & -\frac{a_0}{\nu} \cdot \frac{r^2}{4} + A_0 \ln r + B_0 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{in} + D_n J_0(kri^{3/2}) + E_n K_0(kri^{1/2}) \right] e^{i\beta t} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Die Konstanten in Gleichung 4.12 werden anhand der Randbedingungen in der Rohrmitte und der Haftbedingung an der Wand bestimmt. In der Rohrmitte  $r = 0$  sind  $|\ln r|$  und  $K_0(kri^{1/2})$  unendlich, die Geschwindigkeit  $u$  ist jedoch beschränkt. Für die Konstanten  $A_0$  und  $E_n$  gilt damit  $A_0 = E_n = 0$ . Aus der Haftbedingung  $u(r = R) = 0$  ergibt sich der noch unbekannte Koeffizient  $D_n$  und damit die Gesamtlösung zu :

$$u = \frac{a_0}{4\nu} (R^2 - r^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{J_0(kri^{3/2})}{J_0(kRi^{1/2})} \right] e^{int} \quad (4.13)$$

Der in  $x$ -Richtung transportierte Massenstrom  $\dot{m}$  ist durch

$$\dot{m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^R 2\pi u r dr = \frac{\pi R^4 a_0}{8\nu} \quad (4.14)$$

oder

$$\dot{m} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (4.15)$$

mit dem zeitlichen Mittel des Druckgradienten  $-\overline{\partial p / \partial x} = \rho a_0$  gegeben. Damit entspricht der Massenstrom der pulsierenden Rohrströmung dem Massenstrom einer

Poiseuille-Strömung, deren Druckgradient dem zeitlich gemittelten Druckgradienten der pulsierenden Strömung entspricht. Die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  der pulsierenden Strömung, definiert durch  $\bar{u} = \dot{m}/(\pi R^4)$  beträgt

$$\bar{u} = \frac{R^4 a_0}{8\nu} = \frac{R^4}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right). \quad (4.16)$$

Mit der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}$  normiert lässt sich Gleichung 4.13 in der dimensionslosen Form

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{u_{mean}}{\bar{u}} + \frac{u'}{\bar{u}}, \quad \frac{u_{mean}}{\bar{u}} = 2 \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (4.17)$$

$$\frac{u'}{\bar{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_0} \left[ \frac{8}{(kR)^2} A(r) \cos nt + (1 - B(r)) \sin nt \right] \quad (4.18)$$

mit

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{\text{bei}(kR)\text{ber}(kr) - \text{ber}(kR)\text{bei}(kr)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)} \\ B(r) &= \frac{\text{ber}(kR)\text{ber}(kr) + \text{bei}(kR)\text{bei}(kr)}{\text{ber}^2(kR) + \text{bei}^2(kR)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

schreiben. Der Parameter  $kR = \sqrt{n/\nu}R$  entspricht der Womersleyzahl, die das Verhältnis der oszillierenden Beschleunigungskräfte zu den Reibungskräften darstellt. Der Ausdruck  $\sqrt{f/\nu}$  drückt dabei aus, wie weit die an der Wand entstehenden Wirbel in die Rohrmitte hineindiffundieren. Ist  $\sqrt{f/\nu}$  klein gegenüber dem Radius  $R$  wirken die Wirbel nur nahe der Wand. Das Fluid in der Mitte strömt wie ein starrer Körper.

Eine Zusammenfassung pulsierender und oszillierender Rohrströmungen liefern Çarpınlioğlu und Gündoğdu [12]. Sie zitieren ein Konzept von Ohmi et. al. [49], die wiederum pulsierende Rohrströmungen in drei Bereiche unterteilen :

- Quasi-stationärer Bereich
- Zwischenbereich
- Trägheits-dominiertes Bereich

Der Quasi-stationäre Bereich zeichnet sich durch eine dem stationären Zustand vergleichbare Strömungsstruktur aus. Im Zwischenbereich treten sichtbare Einflüsse der Oszillation auf. Der Trägheits-dominierte Bereich schließlich setzt sich deutlich von der bekannten parabolischen Geschwindigkeitsverteilung ab und zeigt Rückströmungen in der Nähe der Rohrwände. Die Übergänge zwischen den einzelnen Bereichen lassen sich anhand der Womersleyzahl kennzeichnen. Der Übergang vom Quasi-stationären Bereich in den Zwischenbereich erfolgt bei einer Womersleyzahl von  $Wo = 1.32$ , der Übergang vom Zwischenbereich zum Trägheits-dominierten Bereich bei  $Wo = 28$ . Die Obergrenze für die Strömung im menschlichen Blutkreislauf liegt bei einer Womersleyzahl von  $Wo = 27$  in der Aorta.

## Numerische Lösung

Die physikalischen Parameter der Simulation sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst. Die Materialeigenschaften entsprechen wiederum der Calcium-Chlorid-Lösung, die in den Aortenbogen-Experimenten zum Einsatz kommt. Die Womersleyzahl ist dem Prandtl-Führer durch die Strömungslehre [48] entnommen. Der zeitliche Verlauf der

$D$ [m]	$\mu$ [kg/ms]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\bar{u}$ [m/s]	$\overline{Re}_D$	$u_{\max}$ [m/s]	$\overline{Re}_{\max}$	$T$ [s]	Wo
0.02	$3.18 \cdot 10^{-3}$	1281	0.124	1000	0.248	2000	0.347	27

Tabelle 4.3: Physikalische Parameter pulsierende Rohrströmung

Einlassrandbedingung ist in Abbildung 4.14 gezeigt. Um Einlaufeffekte durch die Ausbildung des Geschwindigkeitsprofils gering zu halten, erfüllt die Einlassrandbedingung bereits die Haftbedingung und das parabolische Geschwindigkeitsprofil der laminaren Rohrströmung. Genauer gilt :

$$u(r, t) = \bar{u} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) (1 + \sin(\omega t)) \quad . \quad (4.20)$$

Die Netze für die Simulation der pulsierenden Röhrrströmung sind mit de-

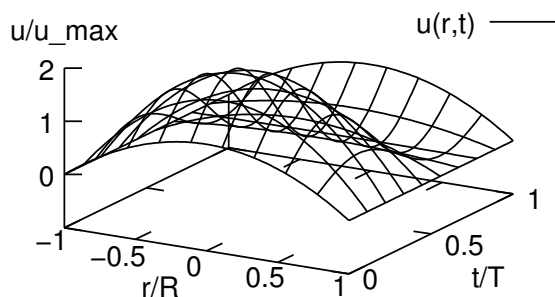


Abbildung 4.14: Einlassrandbedingung pulsierende Rohrströmung

nen der ausgebildeten Rohrströmung identisch. Die genauen Angaben dazu finden sich in Kapitel 4.1. Die Zeitdiskretisierung erfolgt sowohl für *KAPPA-cvfem* als auch *STAR-CD*<sup>©</sup> mit dem impliziten Euler-Verfahren. Die jeweiligen Lösungsalgorithmen SIMPLE bzw. PISO sind in Kapitel 3.3 und 3.4 beschrieben. Die Zeitschrittweite beträgt jeweils  $\Delta t = 0.0116s$ , womit eine Schwingungsperiode mit 30 Zeitschritten aufgelöst wird. Die zugehörigen Courantzahlen liegen in der

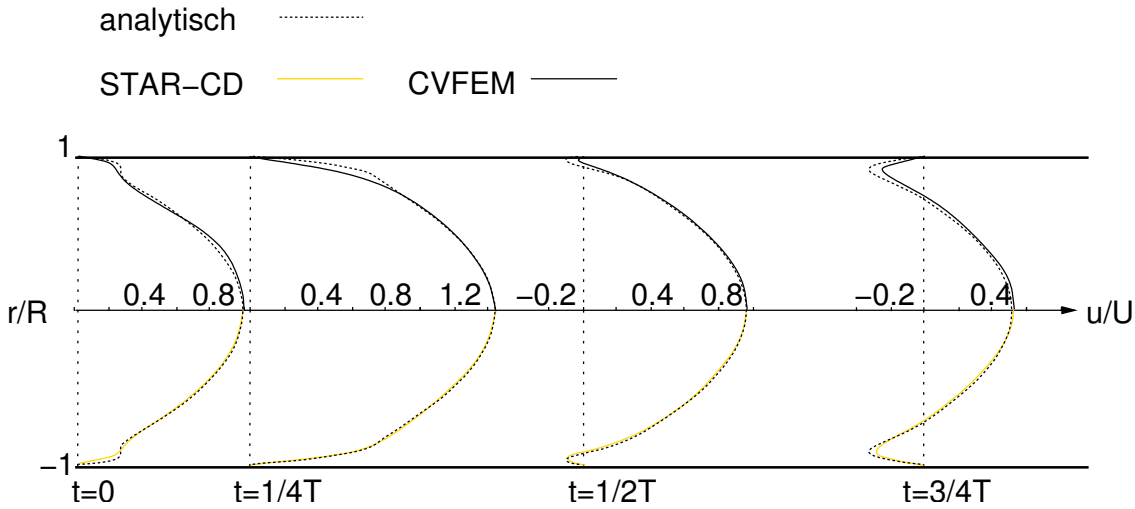


Abbildung 4.15: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile Pulsierende Rohrströmung

Größenordnung  $O(1)$ . Zu beachten ist, dass in der analytischen Lösung keine Information über die Lauflänge enthalten ist. In der numerischen Simulation erfolgt dagegen eine räumliche Ausbildung des Profils über die Rohrlänge. Daraus resultierend wird eine relativ hohe Zahl - die unten gezeigten Auswertungen sind nach jeweils 10 Schwingungsperioden erstellt - an Schwingungsperioden berechnet. Die räumliche Position der Auswertungen ist genauer untersucht worden. Bei der behandelten mittleren Reynoldszahl von  $\overline{Re}_D = 1000$  ist bei einer Lauflänge von  $x/D = 50$  eine gute Übereinstimmung zwischen numerischem und analytischem Profil gegeben. In Abbildung 4.15 sind die mit *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> errechneten Geschwindigkeitsprofile im Vergleich mit der analytischen Lösung dargestellt. Beide Programme treffen die Struktur der analytischen Lösung sehr gut. Abweichungen treten wie in den vorigen Strömungsfällen bei *KAPPA-cvfem* im Bereich der sehr hohen Wandgradienten auf. Probleme bestehen außerdem mit den Rückströmungen im Bereich der Auslassrandbedingung. Diese lässt an Auslassrändern keinen Massenstrom in das Rechengelände hinein zu. Es ist also darauf zu achten, dass ein ausreichend großer Abstand zwischen dem Auslass und der Stelle, an der die Auswertung erfolgt, eingehalten wird. Für die hier vorgestellten Ergebnisse erwies sich ein Abstand von  $10D$  als angemessen. Zusammenfassend bleibt festzustellen, dass *STAR-CD*<sup>©</sup> ohne Einschränkungen und *KAPPA-cvfem* mit leichten Abstrichen eine pulsierende Rohrströmung simulieren können.



# Kapitel 5

## Strömung im Aortenbogen

### 5.1 Ausgebildete und Pulsierende Krümmerströmung

Die Entstehung von Sekundärströmungen durch Zentrifugalkräfte und Druckausgleich in der Grenzschicht ist ein bekanntes Phänomen in allen Arten von Krümmergeometrien. Um die Strömung im Aortenbogen korrekt simulieren zu können, muss daher gewährleistet sein, dass die Struktur von Sekundärströmungen sowohl in stationären als auch in pulsierenden Strömungen von den eingesetzten CFD-Codes wiedergegeben wird. Anhand eines 180° Krümmers wird dies im Folgenden untersucht.

Die Geometrie des untersuchten Krümmers ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Der

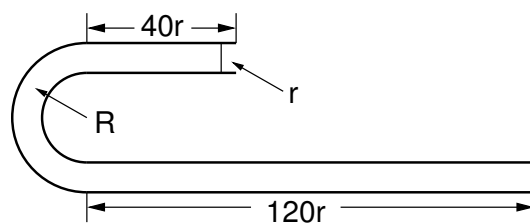


Abbildung 5.1: Krümmergeometrie

Radius  $r$  des Rohres beträgt  $r = 1\text{cm}$ , der Krümmungsradius  $R$  ist mit  $R = 4\text{cm}$  so gewählt, dass die Deanzahl mit der der Aorta übereinstimmt. In der Literatur finden sich verschiedene Definitionen der Deanzahl. Hier wird sie definiert als

$$\text{De} = \text{Re}_D \sqrt{\frac{r}{R}}$$

und kennzeichnet das Verhältnis zwischen der Zentrifugalkraft durch die Krümmung und der Trägheit der Strömung. Das Krümmungsverhältnis des in Kapitel 5.2 vorgestellten Aortenbogens beträgt ebenfalls  $r/R = 1/4$ . Da für die Untersuchung im  $180^\circ$  Krümmer dieselben physikalischen Parameter verwendet werden, stimmen die Reynold-, Womersley- und Deanzahl und damit die entstehende Sekundärströmung überein. Die Länge der Einlaufstrecke ist mit 60 Rohrdurchmessern so bemessen, dass am Beginn des Krümmers eine ausgebildete Strömung vorliegt. Die Strecke hinter dem Krümmer ist mit 20 Durchmessern ausreichend, um eine Rückwärtswirkung der Auslassrandbedingung auszuschließen.

## Stationäre Strömung

Zunächst wird die stationäre, ausgebildete Strömung untersucht. Die zugehörigen physikalischen Parameter sind in Tabelle 5.1 angegeben und entsprechen denen des Aortenbogenexperimentes. Für *STAR-CD*<sup>©</sup> wird auf einem Hexaedernetz mit

$Re_D$	$\mu$ [kg/ms]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\dot{V}$ [m <sup>3</sup> /s]	$\bar{u}$ [m/s]	De
1350	$3.18 \cdot 10^{-3}$	1218	$5.28 \cdot 10^{-5}$	0.168	675

Tabelle 5.1: Physikalische Parameter ausgebildete Strömung in einem  $180^\circ$  Krümmer

222460 Zellen und 230052 Knoten gerechnet. Nach Untersuchungen von Weston *et al.* ist diese Auflösung ausreichend, um eine netzunabhängige Lösung zu erhalten. Mit *KAPPA-cvfem* ist eine wesentlich feinere Auflösung mit 515546 Zellen und 97251 Knoten notwendig, um dieselbe Grobstruktur der Strömung wiedergeben zu können. Die Simulationen mit *STAR-CD*<sup>©</sup> erfolgen wiederum mit dem MARS-Schema und den weiteren in Kapitel 4.1 angegebenen Einstellungen. Für *KAPPA-cvfem* ist für die Strömung im  $180^\circ$  Krümmer eine Initialisierung des Strömungsfeldes nötig, bei der die Richtung der Geschwindigkeit parallel zu den Krümmerwänden vorgegeben wird. Der vorgegebene Geschwindigkeitsbetrag entspricht der mittleren Geschwindigkeit am Einlass  $\bar{u}$ . Ohne diese Vorgabe konnte keine Konvergenz erzielt werden. Der Relaxationsfaktor wird zudem auf  $\alpha = 0.05$  herabgesetzt, was eine deutliche Erhöhung der Rechenzeit zur Folge hat. Anzumerken ist, dass auch *STAR-CD*<sup>©</sup> intern eine Initialisierungsprozedur durchführt, um einen *Initial Guess* für die iterativen Verfahren zu erzeugen.

Aufgrund der Zentrifugalkraft stellen sich im Krümmer Ablösungen und Sekundärströmungen ein, die eine komplexe Strömungsstruktur zur Folge haben. In den Abbildungen 5.2 sind neben einigen Stromlinien ein horizontaler und ein vertikaler Schnitt mit dem Betrag der Geschwindigkeit direkt zu Krümmeranfang

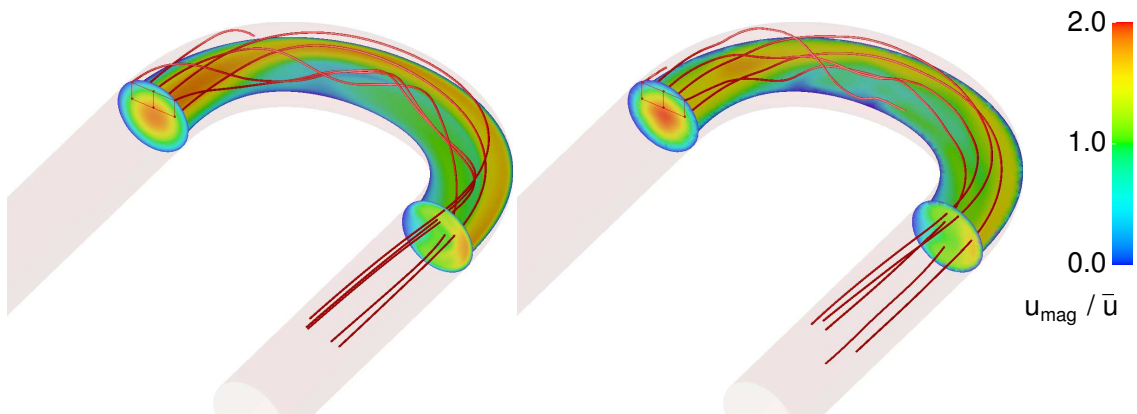


Abbildung 5.2: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, ausgebildete Krümmersströmung, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

und -ende gezeigt. Alle Geschwindigkeiten werden hierbei mit der mittleren Geschwindigkeit im Einlass  $\bar{u} = 0.168\text{m/s}$  normiert. Das Maximum der Geschwindigkeit ist zur außenliegenden Seite verschoben. Im vorderen Drittel des Krümmers löst die Strömung ab. Die eingetragenen Stromlinien, die von einem Gitter im Krümmeranfang ausgehen, zeigen die Helixstruktur der Sekundärströmung. Dabei ist zu erkennen, dass *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> leicht unterschiedliche Sekundärströmung ermitteln, wie weiter unten noch genauer erläutert wird. Die drei außen beginnenden Stromlinien folgen getrieben vom Druckausgleich in der Grenzschicht der Sekundärströmung, während die innenliegenden Stromlinien der Hauptströmungsrichtung folgen. Diese Grobstruktur der Krümmersströmung wird von *STAR-CD*<sup>©</sup> und *KAPPA-cvfem* identisch wiedergegeben. Kritische Punkte finden sich in der dreidimensionalen Krümmersströmung nicht, da die Sekundärströmung betragsmäßig klein gegenüber der Hauptströmung ist. Die Geschwindigkeitsprofile sind in den Abbildungen 5.3 dargestellt. *KAPPA-cvfem* berechnet ein leicht höheres Geschwindigkeitsmaximum zu Beginn des Krümmers von  $u_{\text{mag}}/\bar{u} = 1.91$  im Vergleich zu *STAR-CD*<sup>©</sup> mit  $u_{\text{mag}}/\bar{u} = 1.83$ . Im Verlauf des Krümmers sind die Profile mit *KAPPA-cvfem* bauchiger, was aus der etwas schwächer wiedergegebenen Ablösung resultiert.

Die Sekundärströmung wird am Krümmerende untersucht und ist in Abbildung 5.4 gezeigt. Dargestellt sind Stromlinien, die aus den projizierten Geschwindigkeitskomponenten in der Krümmerausgangsebene gebildet sind. Hinterlegt ist ein Konturplot des Geschwindigkeitsbetrages, der wiederum die Maximalgeschwindigkeit auf der Außenseite des Krümmers zeigt. Die Stromlinien der Sekundärströmung sind mit dem Geschwindigkeitsbetrag farbkodiert, woraus der geringe Betrag der Sekundärströmung mit 5-10% der Hauptströmung deutlich wird. Die Lösung mit *KAPPA-cvfem* beschreibt die klassische Struktur der Dean-Wirbel mit zwei Foki

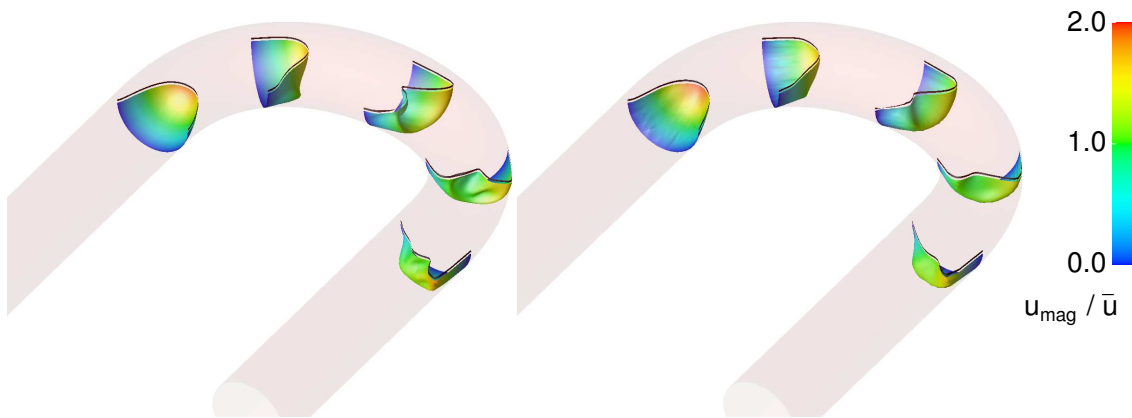


Abbildung 5.3: Geschwindigkeitsprofile, ausgebildete Krümmungsströmung, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

und zwei Halbsätteln an der Wand. *STAR-CD*<sup>®</sup> zeigt den Übergang von der Zwei-Wirbel zur Vier-Wirbel-Konfiguration, wie er beispielsweise von Nandakumar und Masliyah [45], Dennis und Michael [21] bzw. Daskopoulos und Lenhoff [18] untersucht wird. Sie zeigen übereinstimmend, dass eine stabile Vier-Wirbel-Konfiguration in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen und der Deanzahl als Verzweigungslösung erzielt werden kann. Aufgrund des geringen Betrages der Sekundärströmung liegen die Abweichungen zwischen beiden Softwarepaketen im Bereich der Rechengenauigkeit, so dass insgesamt eine gute Übereinstimmung besteht.

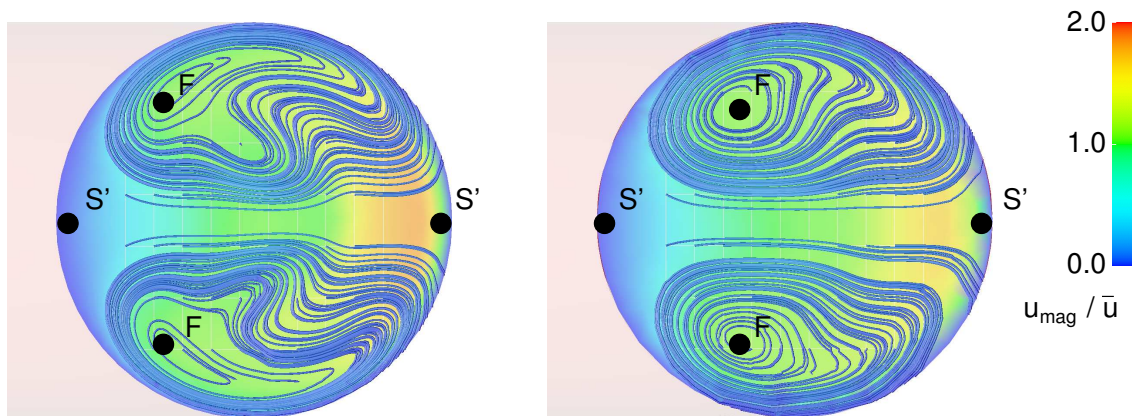


Abbildung 5.4: Stromlinien der Sekundärströmung, ausgebildete Krümmungsströmung, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*, F: Fokus, S': Halbsattel

## Pulsierende Strömung

Die pulsierende Krümmerströmung wird mit der gleichen Reynolds- und Womersleyzahl wie die pulsierende Rohrströmung simuliert. Als Einlassrandbedingung wird wieder die Sinusschwingung nach Gleichung 4.20 und Abbildung 4.15 benutzt. Die entsprechenden physikalischen Parameter sind in Tabelle 5.2 angegeben. Die Womersleyzahl entspricht nach dem Prandtl-Führer durch die Strömungslehre [48] wiederum dem Maximalwert im menschlichen Blutkreislauf von  $Wo = 27$ .

Die zeitliche Diskretisierung erfolgt für beide Softwarepakete mit dem impliziten Euler-Verfahren. Als Lösungsalgorithmen dienen wieder die in Kapitel 3.3.6 und 3.4.1 vorgestellten SIMPLE- bzw. PISO-Algorithmen. Die gewählten Zeitschrittweiten betragen  $\Delta t = 0.00347s = T/100$  für *STAR-CD*<sup>®</sup> und  $\Delta t = 0.001735 = T/200$ , womit jeweils mittlere Courantzahlen der Größenordnung  $O(1)$  erreicht werden.

$D$ [m]	$\mu$ [kg/ms]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\bar{u}$ [m/s]	$\overline{Re}_D$	$u_{\max}$ [m/s]	$Re_{\max}$	$T$ [s]	Wo
0.02	$3.18 \cdot 10^{-3}$	1281	0.124	1000	0.248	2000	0.347	27

Tabelle 5.2: Physikalische Parameter pulsierende Strömung in einem 180°-Krümmer

Die folgenden Auswertungen zeigen wie im stationären Fall die globale Struktur der Strömung in den Abbildungen 5.5, 5.8, 5.11 und 5.14. Die Geschwindigkeitsprofile sind in den Abbildungen 5.6, 5.9, 5.12 und 5.15 aufgetragen. Abschließend sind in den Abbildungen 5.7, 5.10, 5.13 und 5.16 die Sekundärströmungen in der Krümmerenebene gezeigt. Die jeweiligen Auswertungen sind zu vier Zeitpunkten einer Schwingungsperiode  $T$  erfolgt. Entsprechend der pulsierenden Rohrströmung

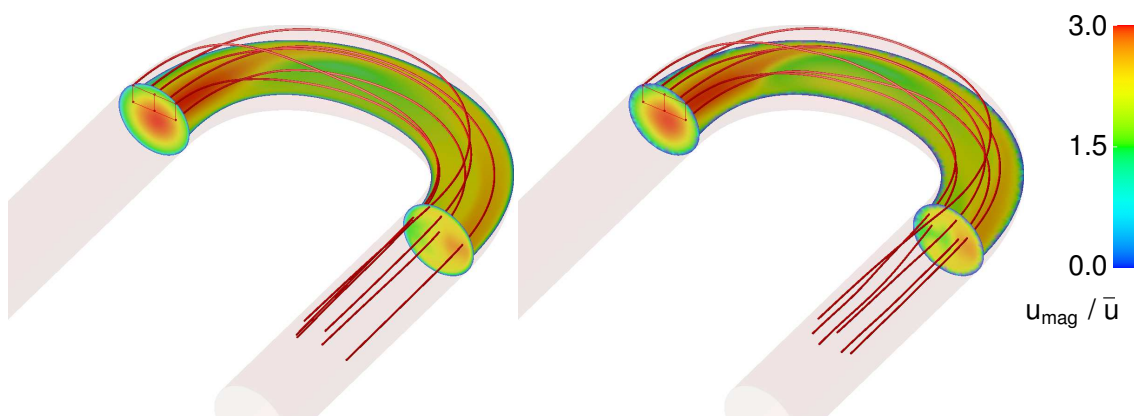


Abbildung 5.5: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Krümmerströmung,  $t = T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

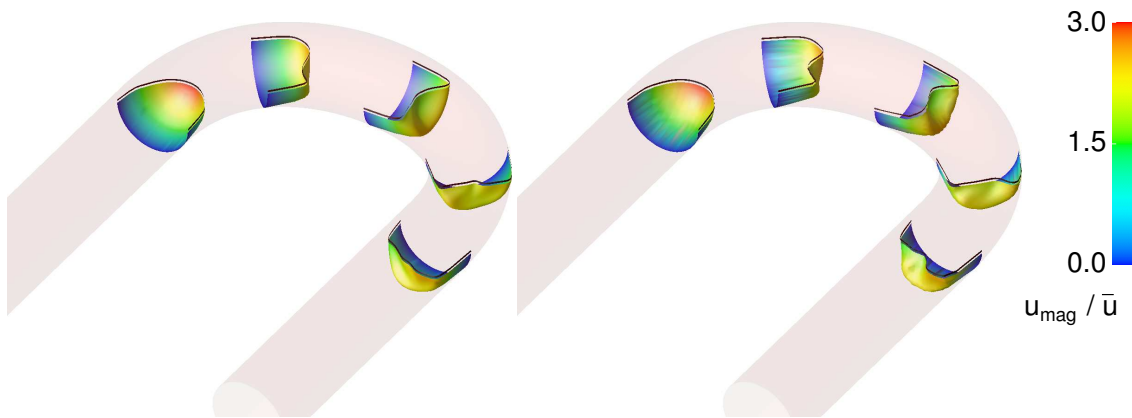


Abbildung 5.6: Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Krümmerströmung,  $t = T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

in Kapitel 4.3 ist dies zu den Zeitpunkten  $t = T/4$ ,  $t = T/2$ ,  $t = 3T/4$  und  $t = T$ . Die Normierung der Geschwindigkeiten in sämtlichen Darstellungen zur pulsierenden Krümmerströmung erfolgt mit der mittleren Einlassgeschwindigkeit  $\bar{u} = 0.124\text{m/s}$ . Analog zur pulsierenden Rohrströmung ergibt sich ein Geschwindigkeitsmaximum von  $u_{\max} \sim 2.9 \bar{u}$ , wodurch sich die einheitliche Farbskala von  $0 \leq u/\bar{u} \leq 3.0$  bzw.  $-3.0 \leq u/\bar{u} \leq 3.0$  zu den Zeitpunkten, zu denen Rückströmungen auftreten, ergibt.

In den Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7 ist die Strömung zu  $t = T/4$  gezeigt. Wie im Fall der pulsierenden Rohrströmung tritt hier das zeitliche Maximum der Geschwindigkeit auf. Übereinstimmung liegt auch für den Betrag der Maximalgeschwindigkeit im parabolischen Profil im Krümmeranfang vor. Dieser Betrag liegt bei  $u/\bar{u} \sim 2.99$

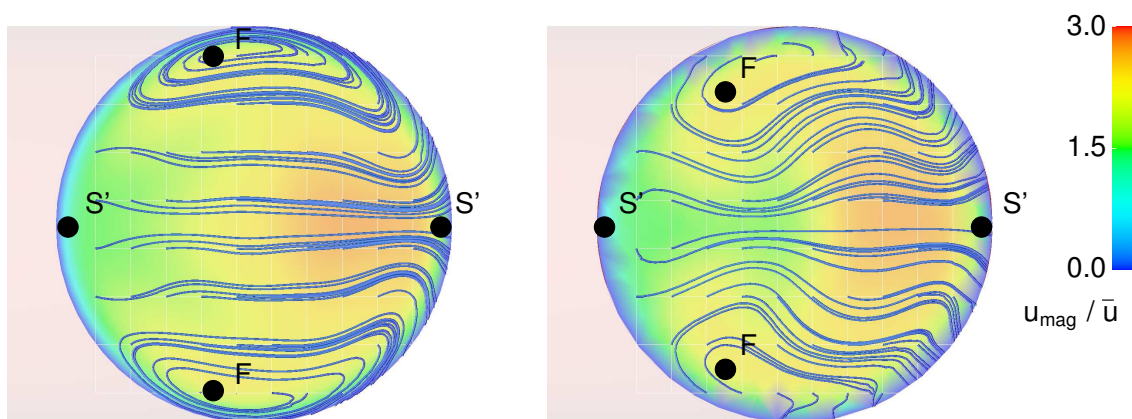


Abbildung 5.7: Stromlinien der Sekundärströmung, pulsierende Krümmerströmung,  $t = T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*, F: Fokus, S': Halbsattel

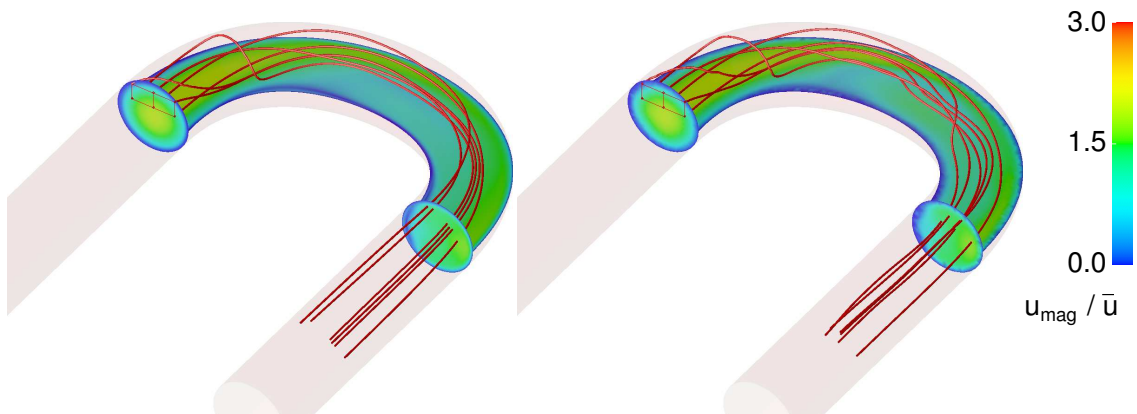


Abbildung 5.8: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Krümmersströmung,  $t = T/2$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

und entspricht damit sowohl für *STAR-CD*<sup>©</sup> als auch *KAPPA-cvfem* dem Wert der pulsierenden Rohrströmung. Anhand des horizontalen Mittelschnittes in Abbildung 5.5 wird ersichtlich, dass die Ablösung gegenüber der ausgebildeten Strömung wesentlich schwächer ausgebildet ist. Das Geschwindigkeitsprofil am Krümmeranfang entspricht zu  $t = T/4$  dem parabolischen Profil der Pouseille-Strömung und wird von *STAR-CD*<sup>©</sup> und *KAPPA-cvfem* nahezu identisch berechnet. Aus dem Vergleich der Profile bei  $90^\circ$  und am Krümmerende ergibt sich eine etwas stärkere Ablösung aus der Simulation mit *KAPPA-cvfem*. Die Sekundärströmung wird von beiden Softwarepaketen wie im stationären Fall nahezu identisch wiedergegeben. Es stellt sich die bekannte Dean-Wirbelstruktur mit zwei Foki und zwei Halbsätteln ein, wobei

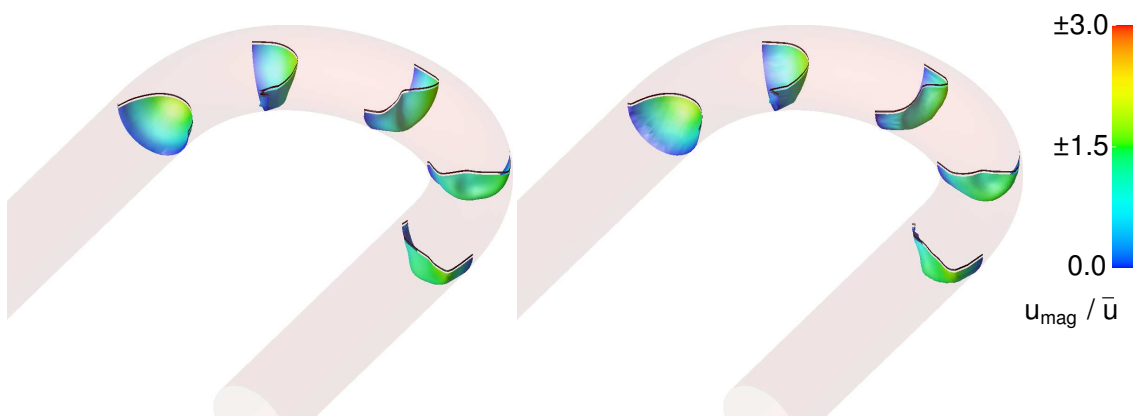


Abbildung 5.9: Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Krümmersströmung,  $t = T/2$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*



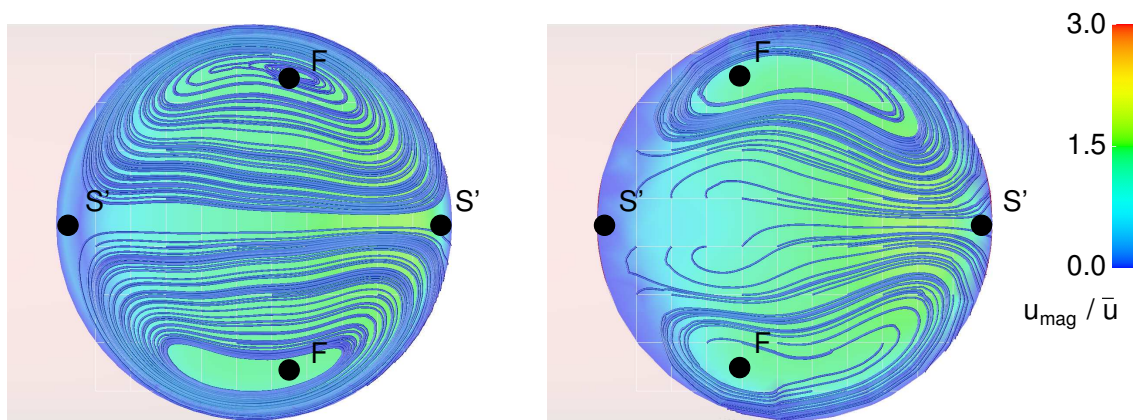


Abbildung 5.10: Stromlinien der Sekundärströmung, pulsierende Krümmersströmung,  $t = T/2$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*, F: Fokus, S': Halbsattel

die Foki bei *STAR-CD*<sup>©</sup> etwas mittiger als mit *KAPPA-cvfem* berechnet werden.

Die Strömung zu  $t = T/2$  ist in den Abbildungen 5.8, 5.9 und 5.10 dargestellt. Anhand der Struktur der Stromlinien in Abbildung 5.8 ist die Verzögerung der Strömung im vorderen Drittel des Krümmers ersichtlich. In den Profilen in Abbildung 5.9 treten Rückströmungen auf. Im Einlassquerschnitt des Krümmers sind diese symmetrisch und entsprechen dem Profil der pulsierenden Rohrströmung. Ab  $60^\circ$  ist die Rückströmung lediglich auf der Innenseite vorhanden, was ein Resultat der Verschiebung des Hautströmungsprofils in Richtung der Zentrifugalkraft darstellt. Die Sekundärströmung in der Krümmerebene in Abbildung 5.10 besteht weiterhin aus der bekannten Dean-Wirbelstruktur. Eine geringe Veränderung be-

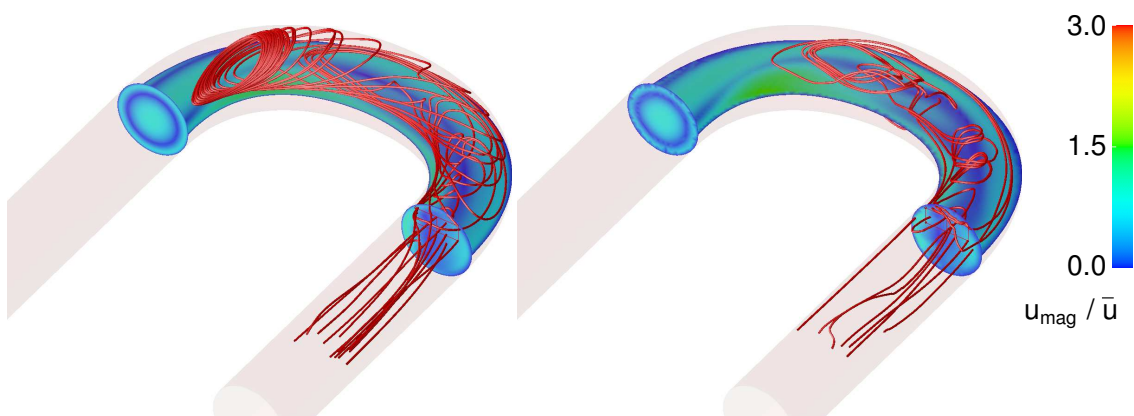


Abbildung 5.11: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Krümmersströmung,  $t = 3T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*





Abbildung 5.12: Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Krümmersströmung,  $t = 3T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

steht in der Position der beiden Foki, die mit *STAR-CD*<sup>®</sup> zu  $t = T/2$  im Vergleich zu  $t = T/4$  in Richtung Krümmersinnenseite wandern. Die Unterschiede zwischen beiden Ergebnissen liegen auch hier im einstelligen Prozentbereich bezogen auf die Hauptströmung. Die Rückströmung entspricht derjenigen, die auch bei der pulsierenden Rohrströmung (vergleiche Abbildung 4.15) beobachtet wird.

Nach drei Vierteln einer Schwingungsperiode zu  $t = 3T/4$  liegen massive Rückströmungen vor. In Abbildung 5.11 sind dazu Stromlinien beginnend in der Krümmersauslassenebene gezeigt. Sowohl mit *KAPPA-cvfem* als auch mit *STAR-CD*<sup>®</sup> ergibt sich eine Konfiguration mit mehrfachen einander durchdringenden Wirbeln. Im Bereich zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  liegen mehrere kleine Wirbel, die von

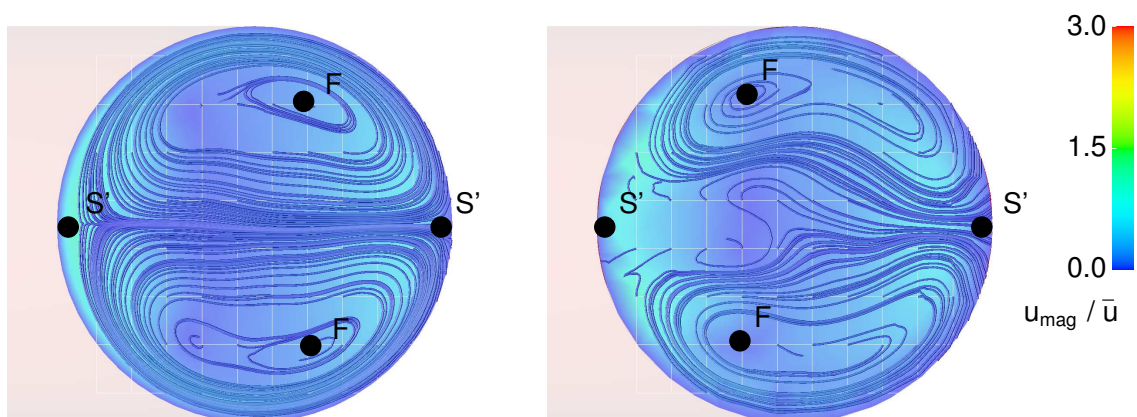


Abbildung 5.13: Stromlinien der Sekundärströmung, pulsierende Krümmersströmung,  $t = 3T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*, F: Fokus, S': Halbsattel

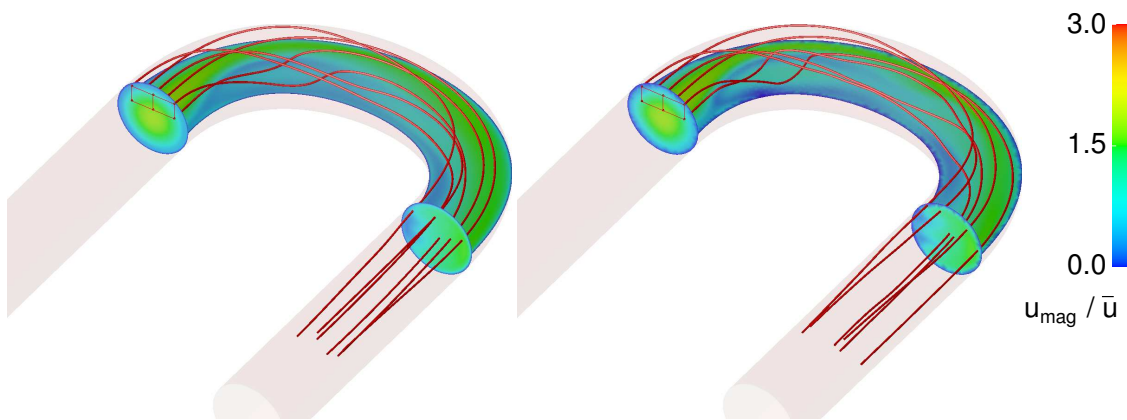


Abbildung 5.14: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Krümmersströmung,  $t = T$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

beiden Softwarepaketen ähnlich berechnet werden. Ein stärkerer Wirbel liegt für *KAPPA-cvfem* bei ca.  $75^\circ$ , der seine Entsprechung bei *STAR-CD*<sup>®</sup> in einem Wirbel bei ca.  $30^\circ$  findet. Eine ausführliche Analyse dieser Konfiguration sprengt den Rahmen der vorliegenden Arbeit, sollte allerdings in weiterführenden Arbeiten nachgeholt werden. In der Literatur ist wenig Material über pulsierende laminare Krümmersströmungen vorhanden. Zalosh und Nelson [69] stellen analytische Überlegungen analog zu denen von Dean [19], [20] für den stationären Fall vor. Von Sudo *et al.* [64] stammen umfassende numerische und experimentelle Untersuchungen zu ausgebildeten oszillierenden Krümmersströmungen. Sie finden fünf verschiedene Typen von Strömungsstrukturen in Abhängigkeit der Dean-

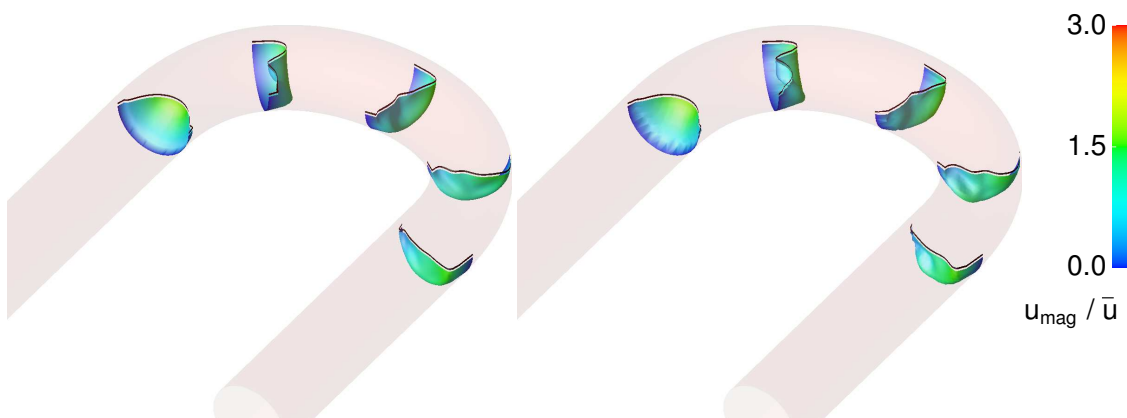


Abbildung 5.15: Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Krümmersströmung,  $t = T$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

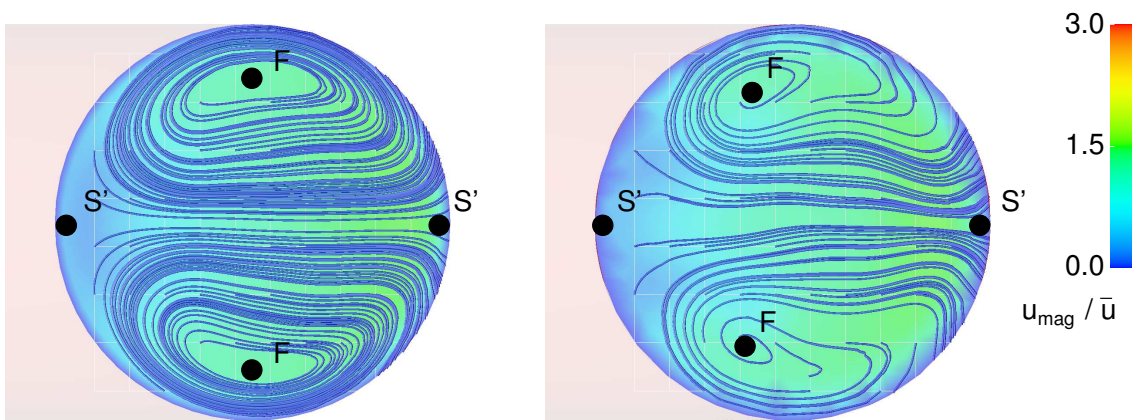


Abbildung 5.16: Stromlinien der Sekundärströmung, pulsierende Krümmersströmung,  $t = T$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*, F: Fokus, S': Halbsattel

und Womersleyzahl. Entsprechend ihrer Einordnung entspricht die hier vorliegende Strömung dem Typ der Lyne-Zirkulation. Die Betrachtung der Geschwindigkeitsprofile in Abbildung 5.12 zeigt trotz der Unterschiede bei den Stromlinien eine gute Übereinstimmung zwischen beiden Ergebnissen. Die Darstellung des Rückströmprofils in der Krümmereinlassebene (Abbildung 5.12 rechts) wird durch Probleme von *OpenDX* beim Rendern von Tetraederoberflächen eingeschränkt. In der Auslassebene bleiben die beiden Dean-Wirbel erhalten. Wie Abbildung 5.13 zu entnehmen ist, verschieben sich die beiden Foki mit *KAPPA-cvfem* leicht in Richtung Krümmereinneres.

Abschließend zur Analyse der pulsierenden Strömung im  $180^\circ$  Krümmer ist in Abbildung 5.14 das Stromlinienbild zu  $t = T$  eingetragen. Rückströmungen treten hierbei nicht mehr auf. Die Profile in Abbildung 5.15 nähern sich im Vergleich zur Abbildung 5.12 wieder denen der stationären Lösung an. *KAPPA-cvfem* zeigt verglichen mit *STAR-CD*<sup>©</sup> in der Krümmerebene ein stärkeres Geschwindigkeitsmaximum an der Krümmereaußenseite. Die Sekundärströmung in Abbildung 5.16 besteht erneut aus zwei Dean-Wirbeln mit zwei Foki  $F$  und zwei Halbsatteln  $S'$ .

Die Strömung im  $180^\circ$  Krümmer wird von *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> mit nur geringen Unterschieden berechnet. Ein quantitativer Vergleich mit experimentellen bzw. analytischen Werten ist nicht vorgenommen worden. Da qualitative Übereinstimmung beispielsweise mit Sudo *et al.* [64] besteht und *STAR-CD*<sup>©</sup> von Seiten des Herstellers quantitativ verifiziert ist, kann davon ausgegangen werden, dass beide Softwarepakete Sekundärströmungen richtig wiedergeben.

## 5.2 Versuchsaufbau Aortenbogenexperiment

Zentraler Anwendungsfall der vorliegenden Arbeit ist die Strömung im Modell eines menschlichen Aortenbogens. Geometrie und Randbedingungen der numerischen Simulationen dazu sind der Dissertation von Baumgart [7] entnommen, der die stationäre und pulsierende Strömung in einem Aortenbogenmodell experimentell untersucht. Im Folgenden werden zunächst der Versuchsaufbau und die eingesetzten Messmethoden erläutert. Anschließend werden die stationäre und die pulsierende Strömung mit *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> simuliert und - soweit dies möglich ist - mit den experimentellen Ergebnissen von Baumgart verglichen.

Das Labor für Biofluidmechanik der Fachhochschule München hat ein Verfahren zur Erstellung von Gefäßmodellen entwickelt. Dieses Verfahren erlaubt die Herstellung von Adermodellen, die die folgenden notwendigen Eigenschaften besitzen :

**Maßstabstreue** Durch das Herstellungsverfahren wird gewährleistet, dass weder hinsichtlich der Gefäßverläufe noch der Querschnittsformen geometrische Verzerrungen auftreten.

**Abbildungsgenauigkeit** Die Ausbildungen der Gefäßabgänge, Impressionen benachbarter Strukturen und die oben genannten geometrischen Formen werden wiedergegeben. Das Relief der Intima erfüllt die Bedingung eine hydraulisch glatten Rohres, d.h. die Wandstrukturen liegen unterhalb  $k \sim 0.1mm$ .

**Elastizität** Das elastische Verhalten der Modellgefäße ist abhängig vom Wandmaterial und der Wandstärke.

**Transparenz** Der Einsatz von Laser-basierten Messsystemen erfordert die Transparenz der Modelle.

Besonderes Augenmerk wird auf die Compliance  $C = \Delta V / \Delta p$  gelegt, die das Ausdehnungsverhalten bei Druckschwankungen beschreibt. Die numerischen Simulationen in der vorliegenden Arbeit beschränken sich auf starre Wände, weshalb speziell bei der pulsierenden Strömung lediglich ein qualitativer Vergleich zwischen Experiment und Simulation möglich ist.

Zur Erstellung des Aortenbogenmodells werden die Blutgefäße in ihrer anatomischen Umgebung mit einer Kochsalzlösung ausgespült. Anschließend erfolgt bei einem Fülldruck von  $79.8hPa$  ( $= 60mmHg$ ) das Ausgießen mit einer Silikonkautschukmischung. Nach Entnahme des Kautschukausgusses wird in mehreren Zwischenschritten ein Silikonmodell erstellt, das zum Einbau in die in Abbildung 5.17 skizzierte Anlage geeignet ist. Bei der experimentellen Strömungsuntersuchung wird als

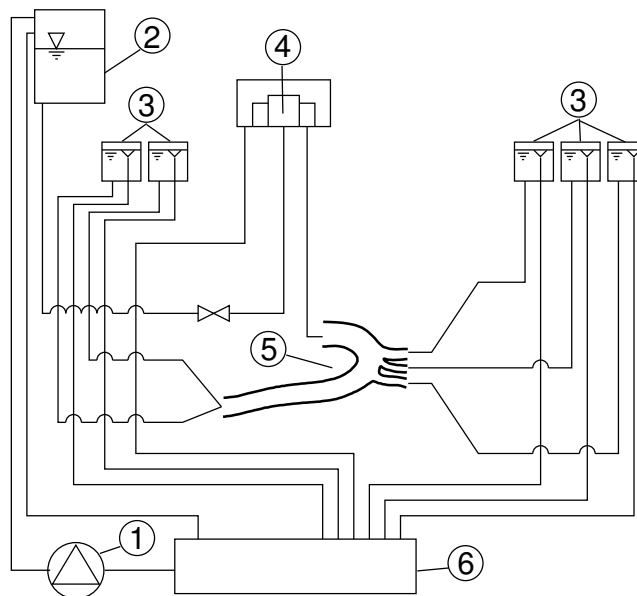


Abbildung 5.17: Schematische Darstellung des Kreislaufs für stationäre Strömung, 1=Pumpe, 2=Hochbehälter, 3=Regulierbehälter, 4=Überlaufbehälter, 5=Modell, 6=Vorratsgefäß

Medium eine wässrige Calcium-Chlorid-Lösung eingesetzt, deren Brechungsindex mit  $n = 1.413$  dem Wandmaterial des Aortenbogens angepasst ist. Die Stoffwerte der Lösung bei  $T = 20^\circ\text{C}$  betragen  $\rho = 1281\text{kg}/\text{m}^3$  und  $\mu = 3.18\text{mPas}$ . Anzumerken ist, dass menschliches Blut eine Suspension zellulärer Bestandteile (Erythrozyten, Leukozyten, Trombozyten) in einer flüssigen Phase, dem Blutplasma, darstellt. Während Vollblut viskoelastische und damit Nicht-newtonsche Eigenschaften zeigt, verhält sich Blutplasma wie ein Newtonsches Fluid. In der Aorta sind aufgrund des großen Gefäßdurchmesser im wesentlichen mäßige Scherraten zu erwarten. Die Strömungsblosungen, Sekundärströmungen und Einflüsse der Wände verursachen allerdings auch größere Scherraten, so dass Nicht-newtonsche Effekte einen Einfluß auf die Strömungsstruktur besitzen. In der vorliegenden Arbeit sollen die Unterschiede zwischen der Struktur der stationären und der pulsierenden Strömung untersucht werden. In Übereinstimmung mit den experimentellen Untersuchungen von Baumgart wird daher von einem Newtonschen Medium ausgegangen.

Der Versuchsaufbau in Abbildung 5.17 wird für die pulsierende Strömung leicht modifiziert. Vor der Aortenwurzel wird ein Modellventrikel eingebaut, das mit einem steuerbaren Drucksignal beaufschlagt wird und so den Pulsschlag simuliert. Die eingesetzte Herzpumpe ist eine von Reul [56] speziell für den Laboreinsatz konstruierte Kolbenpumpe. Zur Dämpfung von reflektierenden Druckwellen werden zudem zwischen die Abgänge und die absteigende Aorta Windkessel eingebaut.

Die CAD-Geometrie, die in den numerischen Simulationen Grundlage der Rechenetze ist, wird anhand des in Abbildung 5.18 gezeigten Wachskerns rekonstruiert. Dazu werden Digitalaufnahmen aus verschiedenen Blickwinkeln angefertigt, wobei jeweils Millimeterpapier als Skala hinterlegt ist. In die Digitalaufnahmen werden Splines eingezeichnet, die die Aussenkontur des Aortenbogens wiedergeben. Dies gewährleistet zunächst die Einhaltung der Krümmungsradien des Gesamtbogens und der Durchmesserhältnisse der einzelnen Abgänge. Zusätzlich werden die Absolutwerte der Durchmesser an den in Abbildung 5.21 gezeigten Positionen mit einer Schieblehre abgenommen, wodurch insgesamt eine Abbildungsgenauigkeit im Bereich von  $0.1-0.2\text{mm}$  erreicht werden kann. Die genauen Übergänge zwischen den Abzweigungen sind mit der eingesetzten Technik nicht exakt vermessbar. Hier bestehen also Unterschiede zwischen der tatsächlichen und der rekonstruierten Geometrie. Zu berücksichtigen ist dabei, dass die sehr kleinen Radien, die speziell zwischen den Abgängen zur linken Halsschlagader und zur linken Schlüsselbeinarterie (siehe Abbildung 1.1) vorliegen, von Rechenetzen in der hier eingesetzten Auflösung nicht wiedergegeben werden können und daher geometrische Vereinfachungen unerlässlich sind.

Die endgültige CAD-Geometrie ist mit *CATIA*® erstellt und als Oberflächenmodell in zwei Ansichten in Abbildung 5.19 gezeigt. Die Geschwindigkeitsmessung im Experiment erfolgt mittels Laser-Doppler-Anemometrie. Dazu werden der Strömung kleine Partikel der Größenordnung  $0.5\mu\text{m}$  zugesetzt, die als schlupffrei angesehen werden. Die Messungen erfolgen mit einem Zwei-Farben-LDA-System, das nach dem Differenzial-Doppler-Verfahren arbeitet. Für weitere Details über die Versuchsaufbauten und die verwendete Messtechnik sei auf die Dissertation von Baumgart [7] verwiesen.



Abbildung 5.18: Wackskern des Aortenbogen-Modells

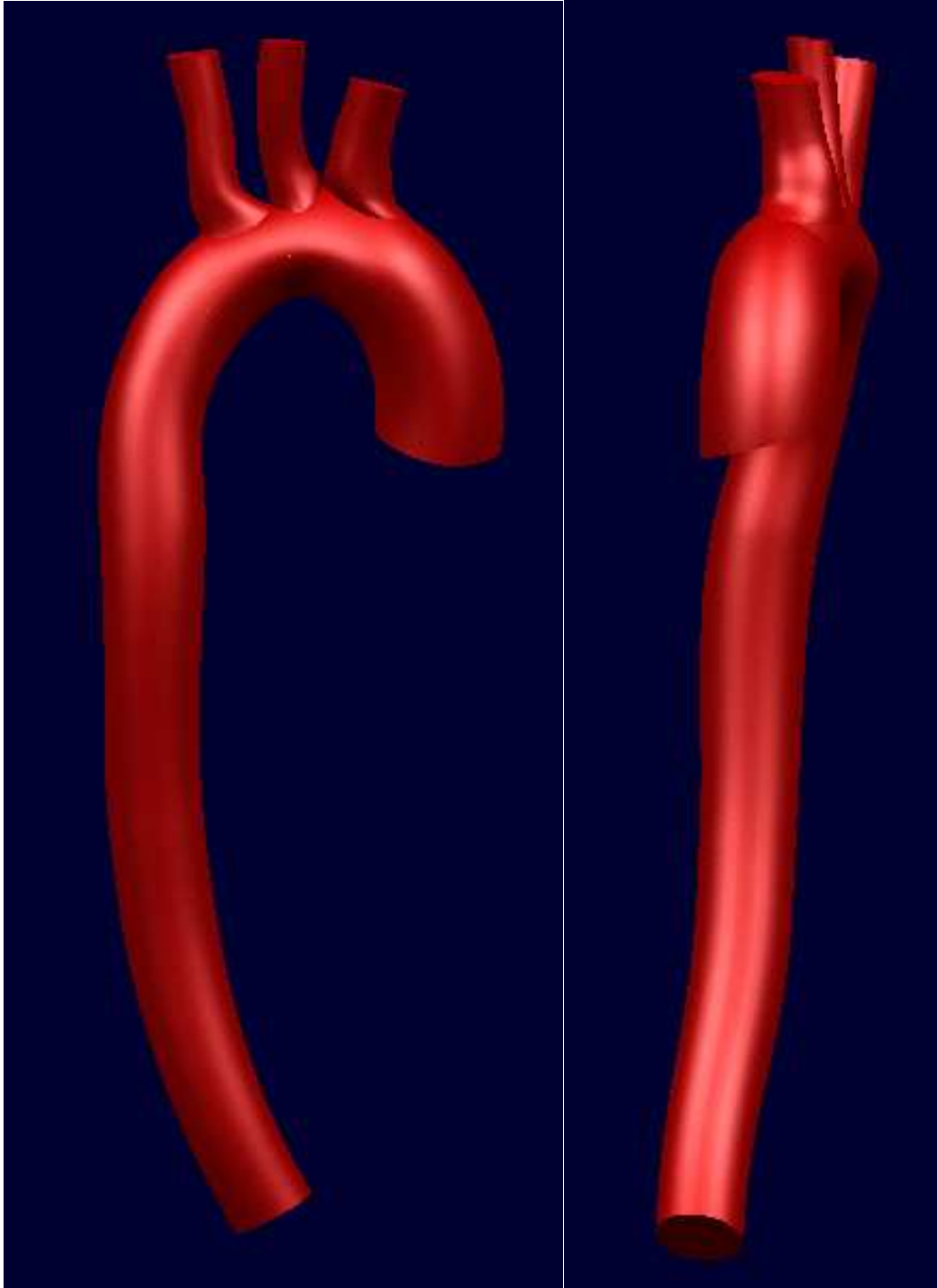


Abbildung 5.19: Oberflächengeometrie des Aortenbogen-CAD-Modells



### 5.3 Stationäre Strömung im Aortenbogen

Sowohl experimentell als auch numerisch wird zunächst die stationäre Strömung im Aortenbogen untersucht. Dieser erste Schritt dient dann als Vergleichsgrundlage für die instationäre bzw. pulsierende Strömung.

Die mittlere Reynoldszahl in der Aorta ascendens beträgt  $Re = 1350$ , woraus sich mit der Calcium-Chlorid-Lösung ein Volumenstrom von

$$\dot{V}_{CaCl} = 226l/h = 6.27 \cdot 10^{-5} m^3/s$$

ergibt. Zum Vergleich liegt der Volumenstrom bei Vollblut als Strömungsmedium bei einer Körperoberfläche von  $1.7m^2$  und einem Pulsschlag von  $66/min$  bei  $\dot{V}_{Blut} = 314l/h$ . Zugrundegelegt ist dabei eine repräsentative Viskosität von  $\eta = 3.6mPas$ . Der Gesamtvolumenstrom wird durch die Regulierbehälter (siehe Abbildung 5.17) auf die einzelnen Abgänge aufgeteilt. Dabei wird sowohl im Experiment als auch in den numerischen Simulationen die in Tabelle 5.3 angegebene Verteilung vorgegeben. Die oberen drei Abgänge (6, 7 und 8 in Abbildung 1.1) sind in der Simulation um

Arm-Kopf-Schlagaderstamm	10%
Linke Halsschlagader	7%
Linke Schlüsselbeinarterie	3%
Absteigende Aorta	80%

Tabelle 5.3: Verteilung des austretenden Volumenstroms

je 10 Durchmesser des jeweiligen Abgangs verlängert, um eine Rückwärtswirkung der Randbedingung zu vermeiden. Alle Parameter der stationären Strömung sind in Tabelle 5.4 zusammengefasst. Die angegebene Reynoldszahl  $Re_D$  wird für den

$Re_D$	$\mu$ [kg/ms]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\dot{m}$ [kg/s]	$\bar{u}$ [m/s]
1350	$3.18 \cdot 10^{-3}$	1281	0.08	0.152

Tabelle 5.4: Physikalische Parameter stationäre Strömung im Aortenbogen

Aortenbogen mit dem Durchmesser zu Beginn des Aortenbogenmodells an der Aorta ascendens gebildet. Die vorgegebene Geschwindigkeit für die stationäre Strömung ergibt sich aus dem oben angegebenen Volumenstrom und der durchströmten Fläche am Einlass  $A_{Inlet} = 4.135 \cdot 10^{-3} m^2$ . Das Druckniveau in der Simulation entspricht dem experimentellen Wert von  $p_{Reference} = 133hPa = 100mmHg$ .

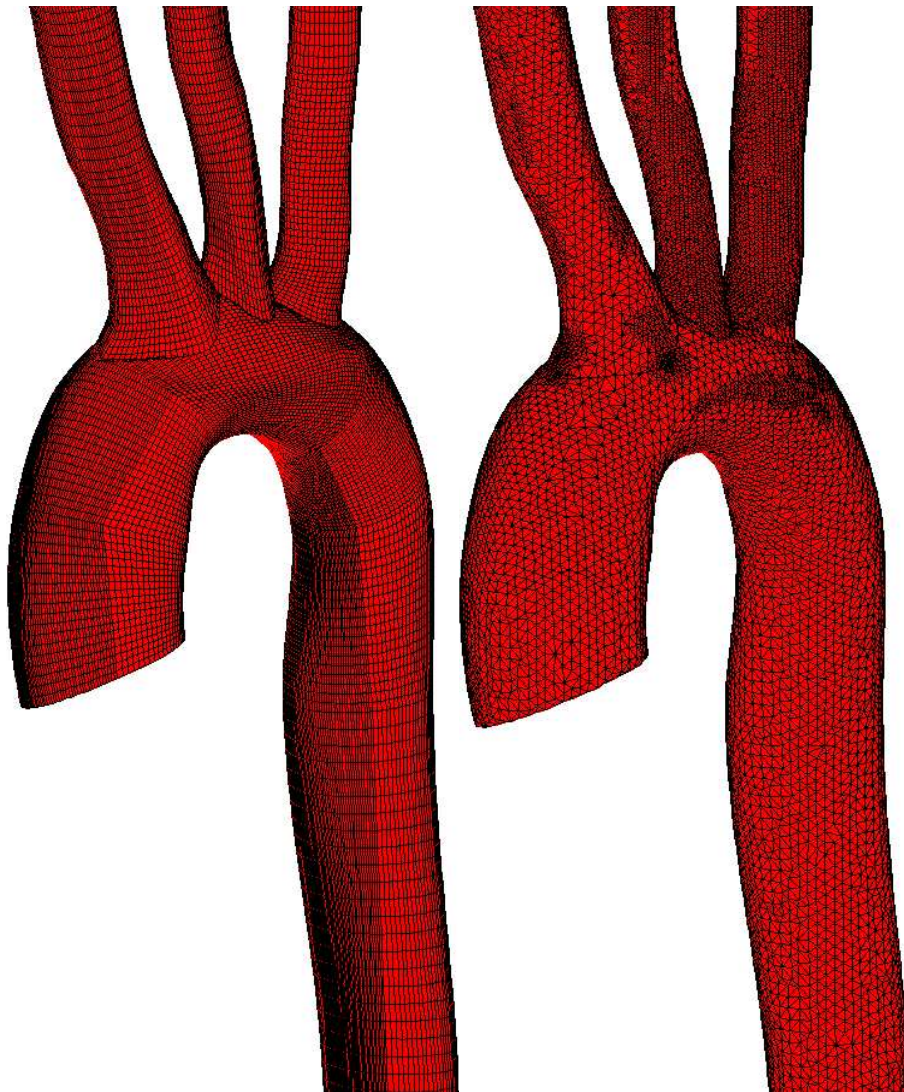


Abbildung 5.20: Rechennetze für den Aortenbogen, links: Hexaedernetz, rechts: Tetraedernetz

## Numerische Lösung

Die stationäre Strömung im Aortenbogen wird mit den CFD-Codes *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>®</sup> untersucht. Für *KAPPA-cvfem* wird dabei ein Tetraedernetz mit 367529 Zellen und 75528 Knoten verwendet. Das Tetraedernetz für den Aortenbogen ist in Abbildung 5.20 gezeigt. Um eine konvergente Lösung zu erhalten, erweist sich eine gute Anfangsbedingung als notwendig. Konkret bedeutet dies, dass eine mit *STAR-CD*<sup>®</sup> berechnete Lösung als Startwert für die *KAPPA-cvfem* Simulation eingesetzt wird. Alle Versuche, mit konstanten Werten zu initialisieren, führen

zur Divergenz des Verfahrens. Der Grund hierfür liegt in der starken Abhängigkeit vom auftretenden Massentransport durch das Rechenggebiet, bei dem im Fall des Aortenbogens zudem eine Aufspaltung in die drei Abgänge und die absteigende Aorta erfolgt. Laut Methodology [15] und User Guide [16] setzt *STAR-CD*<sup>®</sup> zur Initialisierung eine spezielle Prozedur ein, die ein Geschwindigkeits- und Druckfeld ermittelt, das bereits Informationen über die Randbedingungen, charakteristische Längen und Erfüllung der Kontinuitätsgleichung beinhaltet. Als zentrale Erkenntnis aus der Implementierung von *KAPPA-cvfem* kann gelten, dass eine entsprechende Initialisierungsprozedur notwendig ist, um konvergente Lösung für komplexe Strömungsfälle zu erlauben.

Das Hexaedernetz, mit dem die *STAR-CD*<sup>®</sup> Rechnungen durchgeführt werden, besteht aus 520185 Zellen und 542592 Knoten. Die Aorta und die drei Abgänge sind separat vernetzt und dann in *STAR-CD*<sup>®</sup> mit *Couples* verbunden. Hierdurch ist es möglich, die Winkel der Zellen bei 30° zu halten. Bei einer durchgehenden Vernetzung werden deutlich schlechtere Winkel erzeugt. Die in Abbildung 5.20 erkennbaren Zellübergänge liegen in der Größenordnung von 1:5 und sind im unkritischen Bereich. Als räumliches Diskretisierungsschema wird wiederum das MARS-Schema benutzt. Alle Konvergenz- und Abbruchkriterien entsprechen den in Kapitel 4.1 angegebenen Werten.

Zur Untersuchung der Strömung im Aortenbogen wird die Struktur der Strömung anhand von Stromlinien und Geschwindigkeitsverteilungen in insgesamt elf verschiedenen Schnitten dargestellt. Alle im Folgenden gezeigten Geschwindigkeiten sind mit der mittleren Einlassgeschwindigkeit  $\bar{u} = 0.152m/s$  normiert. Desweiteren ist in diesen Schnitten die Sekundärströmung durch die Stromlinien der in die jeweilige Ebene projizierten Geschwindigkeitskomponenten abgebildet. Zusätzlich zu diesen Stromlinien und Geschwindigkeitsverteilungen in Abbildung 5.22 sind Geschwindigkeitsprofile in Abbildung 5.23 eingetragen.

Die Positionen der 2D-Schnitte sind in Abbildung 5.21 gezeigt. Schnitt 1 liegt zwischen der Aortenwurzel und dem Arm-Kopf-Schlagaderstamm. Die Schnitte 2, 3 und 4 liegen unmittelbar vor den Abzweigungen zum Arm-Kopf-Schlagaderstamm, der linken Halsschlagader und der linken Schlüsselbeinarterie. Schnitt 5 ist unmittelbar hinter der Verzweigung zur linken Schlüsselbeinarterie positioniert. Der weitere Verlauf der Strömung in der absteigenden Aorta wird mit den Schnitten 6, 7 und 8 abgedeckt. Die Orientierung der Schnitte ist so gewählt, dass in den einzelnen Abbildungen in 5.24 oben der Bogenaußenseite entspricht. Dies bedeutet, dass auch die Zentrifugalkraft immer nach oben (auf die Richtung der Abbildung bezogen) wirkt. Erkennbar wird diese Orientierung an der Drehrichtung der Sekundärströmungswirbel. Die Schnitte 9, 10 und 11 schließlich sind in den drei Abgängen positioniert.

Die Orientierung der einzelnen Abbildungen in 5.25 ist so gewählt, dass oben in den Abbildung in Richtung der absteigenden Aorta zeigt. Der Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen von Baumgart [7] erfolgt abschließend mit den Abbildungen

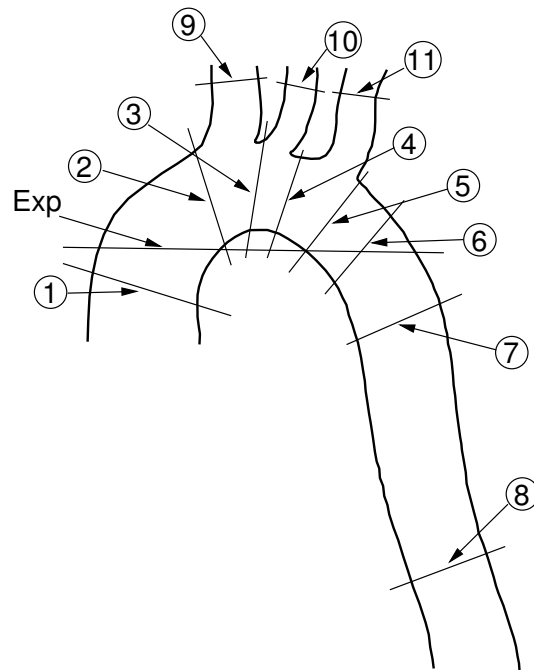


Abbildung 5.21: Positionen der Schnitte zur Auswertung der Strömung im Aortenbogen

5.26, 5.27 und 5.28. Die Position der verglichenen Profile ist in Abbildung 5.21 mit *Exp* gekennzeichnet.

Anhand der Stromlinien in Abbildung 5.22 und der Profile in 5.23 ist die Verschiebung der Geschwindigkeit aufgrund der Krümmung des Aortenbogens ersichtlich. Beginnend an der Aortenwurzel läuft die Krümmung bis in den Bereich der Abgänge aus der Bildebene hinaus. Dementsprechend verschiebt sich das Maximum der Geschwindigkeit, das in diesem Bereich mit den experimentellen Werten übereinstimmend bei knapp  $0.4m/s$  liegt. Im Bereich der Abgänge wird die Strömung zudem von den Abzweigungen beeinflusst, was am Verschwinden der Sekundärwirbel in den Schnitten 2 und 6 in Abbildung 5.24 deutlich wird. Ab der Abzweigung zur linken Schlüsselbeinarterie läuft die Krümmung des Aortenbogens in die Bildebene hinein. Das Fehlen der klaren Struktur der Sekundärströmung im Schnitt 6 wird durch die Richtungsänderung der Krümmung zwischen den Positionen 5 und 7 erklärt. In der absteigenden Aorta stellt sich wieder die bekannte Struktur der Dean-Wirbel mit zwei Foki und zwei Halbsätteln ein. Anzumerken ist, dass insgesamt die Sekundärströmung sehr schwach ist und wie beim  $180^\circ$  Krümmer in der Größenordnung von 5% der Hauptströmung liegt. Deutlich sichtbar ist diese Tatsache anhand der Stromlinien, deren Verlauf lediglich im Bereich der Abgänge nicht parallel zur Kontur des Aortenbogens verläuft. Bereits geringe Abweichun-

gen in der berechneten Geschwindigkeitsverteilung durch Rechenungenauigkeiten können dementsprechend zu einer Verfälschung der Topologie führen. Umso höher ist die gute Übereinstimmung in der Topologie zwischen *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>®</sup> zu bewerten.

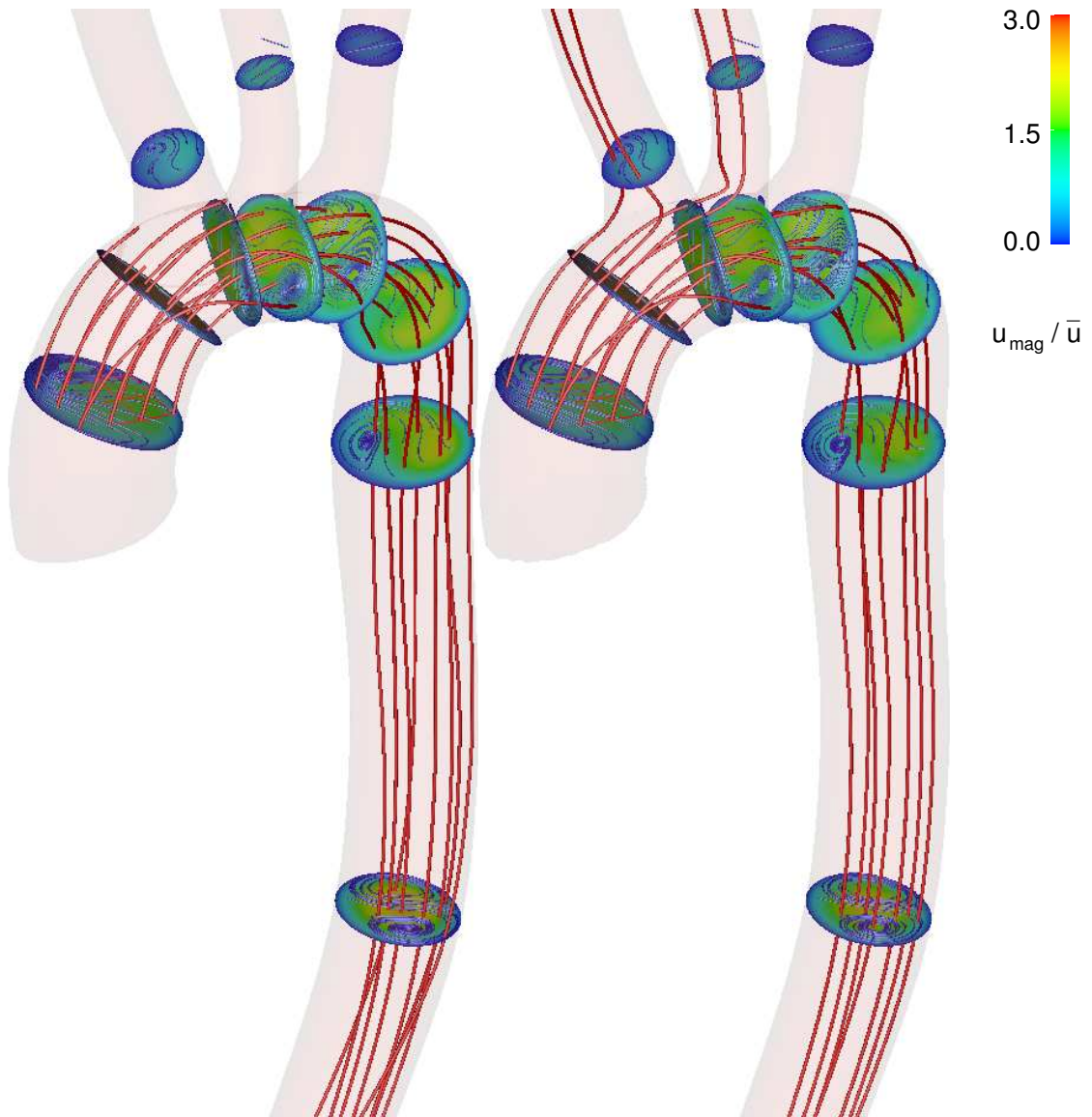


Abbildung 5.22: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, stationäre Strömung im Aortenbogen, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

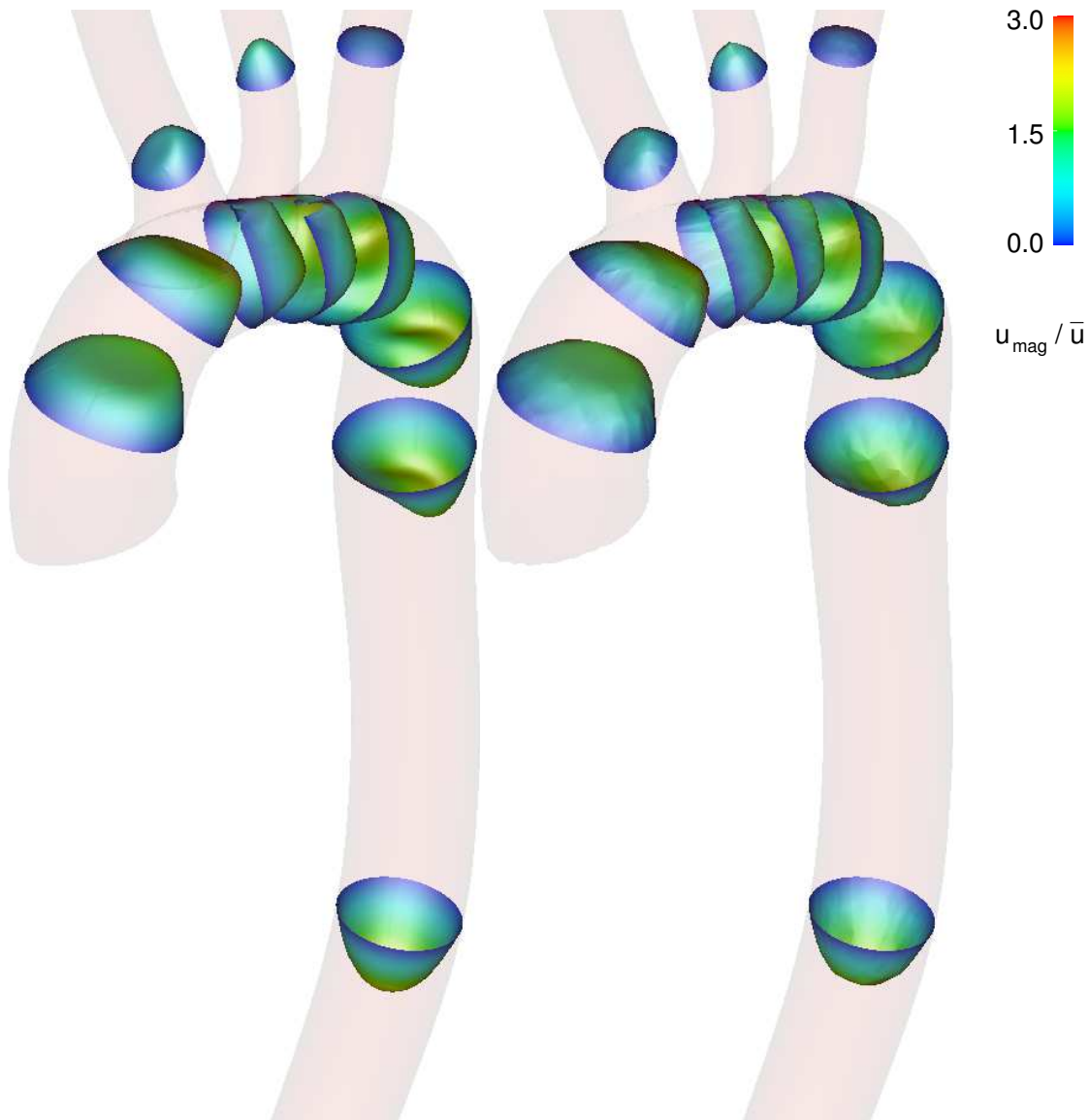


Abbildung 5.23: Geschwindigkeitsprofile, stationäre Strömung im Aortenbogen, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*



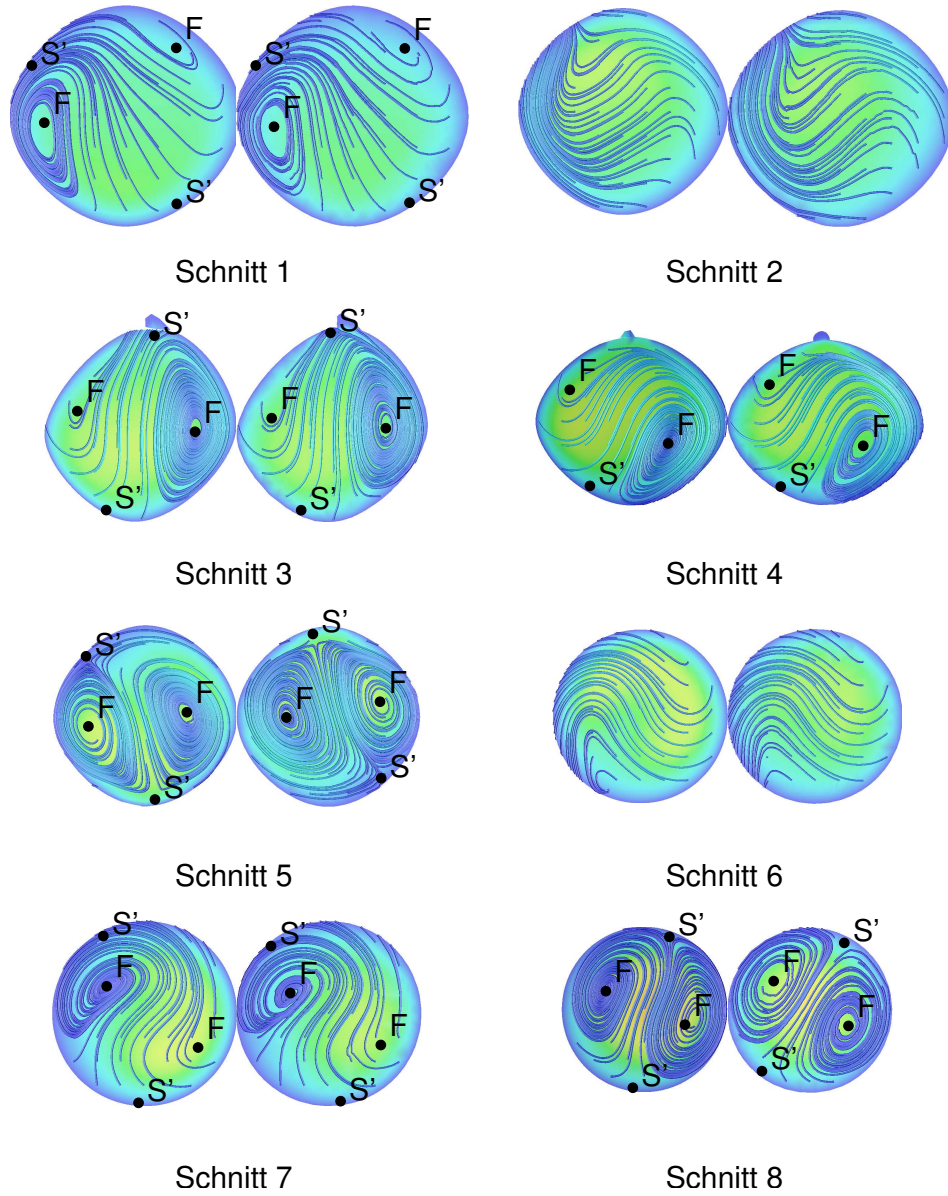


Abbildung 5.24: Sekundärströmung, stationäre Strömung im Aortenbogen, Schnitte 1-8, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*, F: Fokus, S': Halbsattel

Innerhalb der Abgänge zum Arm-Kopf-Schlagaderstamm, der linken Halsschlagader und linken Schlüsselbeinarterie stellt sich sehr schnell wieder ein ausgebildetes Profil ein. Die Krümmung aller drei Abgänge ist so gering, dass sich keine Sekundärströmung einstellt, wie Abbildung 5.25 verdeutlicht. Hierin ist lediglich im Arm-Kopf-Schlagaderstamm noch eine Abweichung vom ausgebildeten Profil zu erkennen (vergleiche auch Schnitt 9 in Abbildung 5.23).

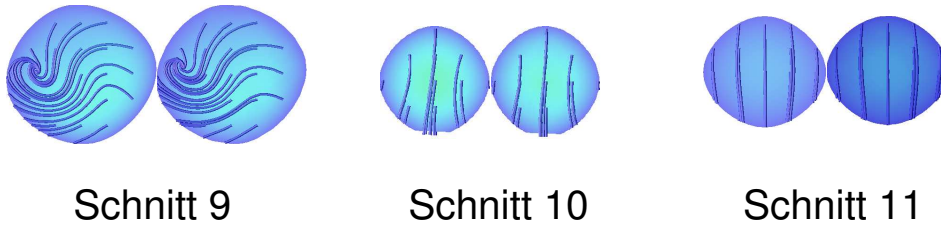


Abbildung 5.25: Sekundärströmung, stationäre Strömung im Aortenbogen, Schnitte 9, 10 und 11, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*



## Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

In den Abbildungen 5.26 bis 5.28 sind Geschwindigkeitsprofile in einem Schnitt auf etwa halber Höhe zwischen Aortenwurzel und dem Abgang zum Hals-Kopf-Schlagaderstamm (bezeichnet mit *Exp* in Abbildung 5.21) eingetragen. Das Profil in der aufsteigenden Aorta ist dabei aus zwei Blickwinkeln gezeigt (Abbildungen 5.26 und 5.27). Die experimentellen Ergebnisse sind in der Dissertation von Baumgart in einer isometrischen Ansicht gezeigt, die nicht exakt dokumentiert ist. Abweichungen können demnach auch aus den leicht unterschiedlichen Perspektiven entstehen.

Auf der aufsteigenden Aortenseite bestehen sichtbare Unterschiede zwischen Ex-

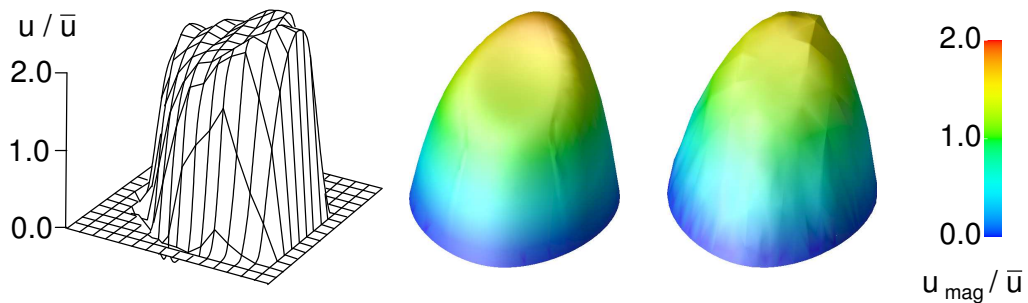


Abbildung 5.26: Vergleich Geschwindigkeitsprofile, links: Experiment, mitte: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

periment und Numerik. Beide numerischen Ergebnisse zeigen eine deutliche Verschiebung des Geschwindigkeitsmaximums in Richtung der Innenseite des Aortenbogens. Im Experiment ist das Profil näher am parabolischen Profil der ausgebildeten Strömung. Eine mögliche Erklärung hierfür ist der Unterschied in der Einlassrandbedingung. Während in den Simulationen ein Kolbenprofil in der Aortenwurzel vorgegeben wird, befindet sich im Experiment ein stationär durchströmtes Modell des linken Ventrikels vor der Aortenwurzel, das ein anderes Profil erzeugt. Dieses Profil ist im Experiment nicht gemessen worden und kann daher nicht als Randbedingung eingesetzt werden. Ein weiterer Unterschied zwischen Numerik und Experiment besteht in der Geometrie. Dem CAD-Modell liegt ein Wachskern zugrunde, wohingegen im Experiment ein Silikonkautschuk-Modell mit einem Druckbeaufschlagt wird. Bei nicht exakt konstanter Wandstärke wird die Geometrie dann nicht affin abgebildet sondern möglicherweise leicht verzerrt, wodurch Abweichungen in der Strömung entstehen.

Auf der absteigenden Seite der Aorta in Abbildung 5.28 besteht eine gute Übereinstimmung zwischen dem Experiment und der Simulation mit *STAR-CD*<sup>©</sup>. Bei *KAPPA-cvfem* besteht eine Abweichung in der linken unteren Ecke des Profils. Wie auch in den Schnitten 6 und 7, Abbildungen 5.23 und 5.24 zu sehen ist, wird die Geschwindigkeitsverteilung verschmiert, was in einer reduzierten Maximalgeschwin-

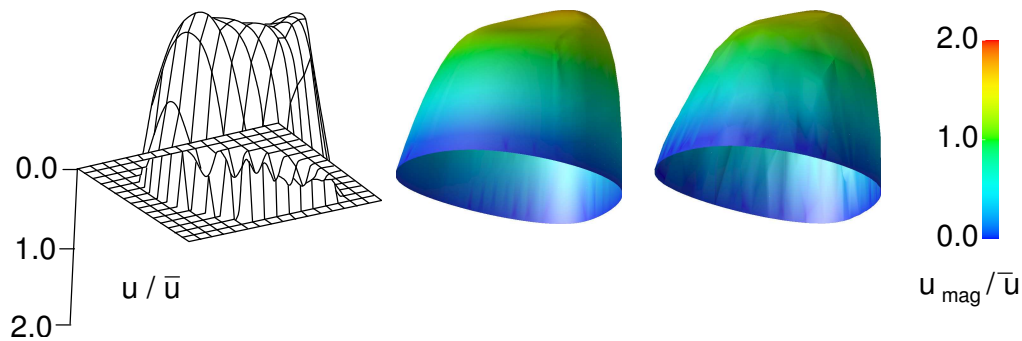


Abbildung 5.27: Vergleich Geschwindigkeitsprofile, links: Experiment, mitte: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

digkeit und der schwächeren Sekundärströmung resultiert. *KAPPA-cvfem* berechnet dabei eine Maximalgeschwindigkeit von  $u_{\max} = 0.2812m/s$ , *STAR-CD*<sup>©</sup> liefert hier  $u_{\max} = 0.2994m/s$ .

Im Rahmen der bestehenden Unterschiede zwischen dem experimentellen Versuchsaufbau und der Simulation bezüglich der Randbedingungen und der Geometrie kann von einer qualitativen Übereinstimmung der Ergebnisse gesprochen werden. Zusammen mit der Verifikation in Kapitel 4 und der Untersuchung des 180° Krümmers in Kapitel 5.1 sind damit alle Voraussetzungen erfüllt, um mit *STAR-CD*<sup>©</sup> und *KAPPA-cvfem* die pulsierende Strömung im Aortenbogen zu untersuchen.

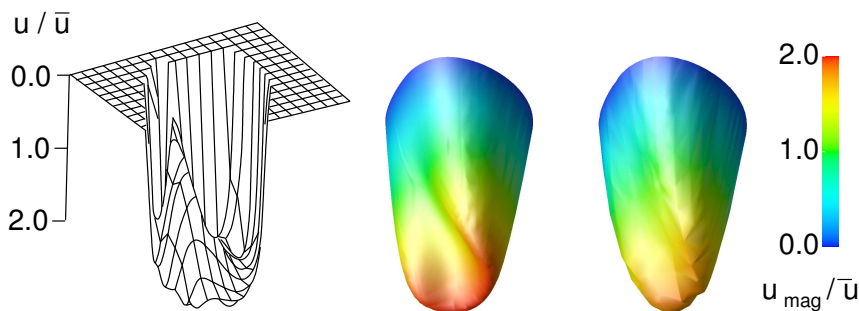


Abbildung 5.28: Vergleich Geschwindigkeitsprofile, links: Experiment, mitte: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

## 5.4 Pulsierende Strömung im Aortenbogen

Als abschließender Anwendungsfall wird die pulsierende Strömung im Aortenbogen numerisch berechnet. Hierzu wird an der Aortenwurzel eine zeitabhängige mittlere Geschwindigkeit vorgegeben. Diese ist den experimentellen Ergebnissen entnommen und in Abbildung 5.29 dargestellt. Die vorgegebene Pulsfrequenz beträgt

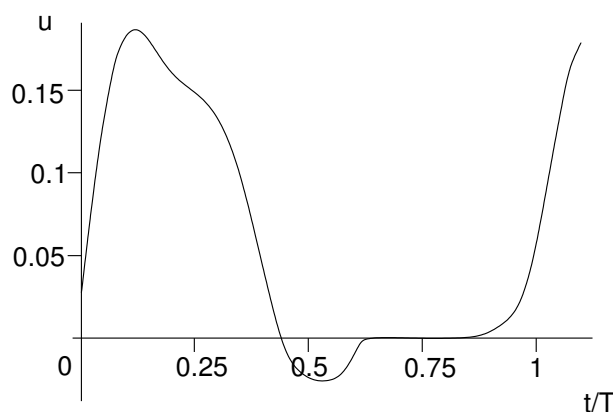


Abbildung 5.29: Einlassrandbedingung pulsierende Strömung im Aortenbogen

$f = 1.184s^{-1}$ , dies entspricht einer Periode von  $T = 0.84s$ . Die Womersleyzahl der pulsierenden Strömung ergibt sich damit zu  $Wo = 20$ . Als Medium wird weiterhin die Calcium-Chlorid-Lösung verwendet. Alle physikalischen Parameter sind in Tabelle 5.5 zusammengefasst.

$\mu$ [kg/ms]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$u_{\max}$ [m/s]	$T$ [s]	Wo
$3.18 \cdot 10^{-3}$	1281	0.1875	0.84	20

Tabelle 5.5: Physikalische Parameter pulsierende Strömung im Aortenbogen

### Numerische Lösung

Für die pulsierende Strömung werden wieder die in Abbildung 5.20 gezeigten Rechenetze eingesetzt. Die zeitliche Diskretisierung und sämtliche numerischen Einstellungen sind wie bei der pulsierenden Rohrströmung bzw. der pulsierenden Strömung im 180° Krümmer in den Kapiteln 4.3 bzw. 5.1 gewählt. Die Zeitschrittweiten betragen  $\Delta t = 1.3125 \cdot 10^{-3} = T/640$  für *KAPPA-cvfem* und  $\Delta t = 2.625 \cdot 10^{-3} = T/320$  für *STAR-CD*<sup>©</sup>. Als Anfangsbedingung wird für beide

Codes eine stationäre Lösung mit der mittleren Geschwindigkeit zu  $t = 0$  verwendet.

In den Abbildungen 5.30 bis 5.37 sind analog zur Krümmerströmung zu den vier Zeitpunkten  $t = T/4$ ,  $t = T/2$ ,  $t = 3T/4$  und  $t = T$  die Strukturen der Strömung anhand von Stromlinien und Geschwindigkeitsprofilen dargestellt. Dabei liegt die Auswertung zu  $t = T/4$  zeitlich kurz hinter dem Auftreten des maximalen vorgegebenen Volumenstroms. Bei  $t = T/2$  liegt der Schliessvorgang der Aortenklappe und damit die maximale Rückströmung vor. Zu  $t = 3T/4$  ist die Aortenklappe geschlossen und im Aortenbogen sinken die Strömungsgeschwindigkeiten auf ihre Minimalwerte. Bei  $t = T$  öffnet die Aortenklappe, die Strömungsgeschwindigkeiten sind allerdings immer noch sehr gering.

Sowohl mit *KAPPA-cvfem* als auch mit *STAR-CD*<sup>©</sup> werden fünf Perioden berechnet. Da in der vierten und fünften Periode übereinstimmende Ergebnisse berechnet werden, liegt eine eingeschwungene Lösung vor.

Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit experimentellen Daten ist nicht möglich, da im Experiment ein elastisches Modell eingesetzt wird und somit kaum Übereinstimmung zwischen den Strömungen besteht.

Die Strömung zu  $t = T/4$  entspricht im Wesentlichen der stationären Strömung in Kapitel 5.3. Die Profile in Abbildung 5.31 lassen im Bereich vor dem Arm-Kopf-Schlagaderstamm den Einlaufeffekt anhand einer Mischung aus dem am Einlass vorgegebenen Kolbenprofil und dem parabolischen Profil der ausgebildeten Strömung erkennen. Wie bei der stationären Strömung verschiebt sich das Geschwindigkeitsmaximum in Richtung der Krümmung des Aortenbogens. Die Sekundärströmungen, die in Abbildung 5.32 und 5.33 dargestellt sind, werden gegenüber der stationären Strömung weiter abgeschwächt. Dies deckt sich mit den Erfahrungen bei der Simulation des 180° Krümmers, wonach die Pulsation zu einer Stabilisierung der Hauptströmung führt.

Unterschiede zwischen *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup> finden sich im Bereich hinter dem Abzweig zur linken Schlüsselbeinarterie. *STAR-CD*<sup>©</sup> berechnet hier eine Rückströmung auf der Innenseite (siehe Schnitt 5 in Abbildung 5.31), die von *KAPPA-cvfem* nicht wiedergegeben wird. Im Bereich der Abzweigungen zum Arm-Kopf-Schlagaderstamm und zur linken Halsschlagader finden sich quantitative Unterschiede zwischen beiden Codes, die den Abweichungen in den Verifikationsfällen entsprechen. Im Verlauf der absteigenden Aorta erfolgt analog zur pulsierenden Rohrströmung eine Ausbildung des Profils (Schnitt 8 in Abbildung 5.31). Der Betrag sämtlicher Sekundärströmungen in den Abbildungen 5.32 und 5.33 ist im Bereich der Rechenungenauigkeiten anzusiedeln, so dass eine topologische Analyse nicht sinnvoll erscheint.

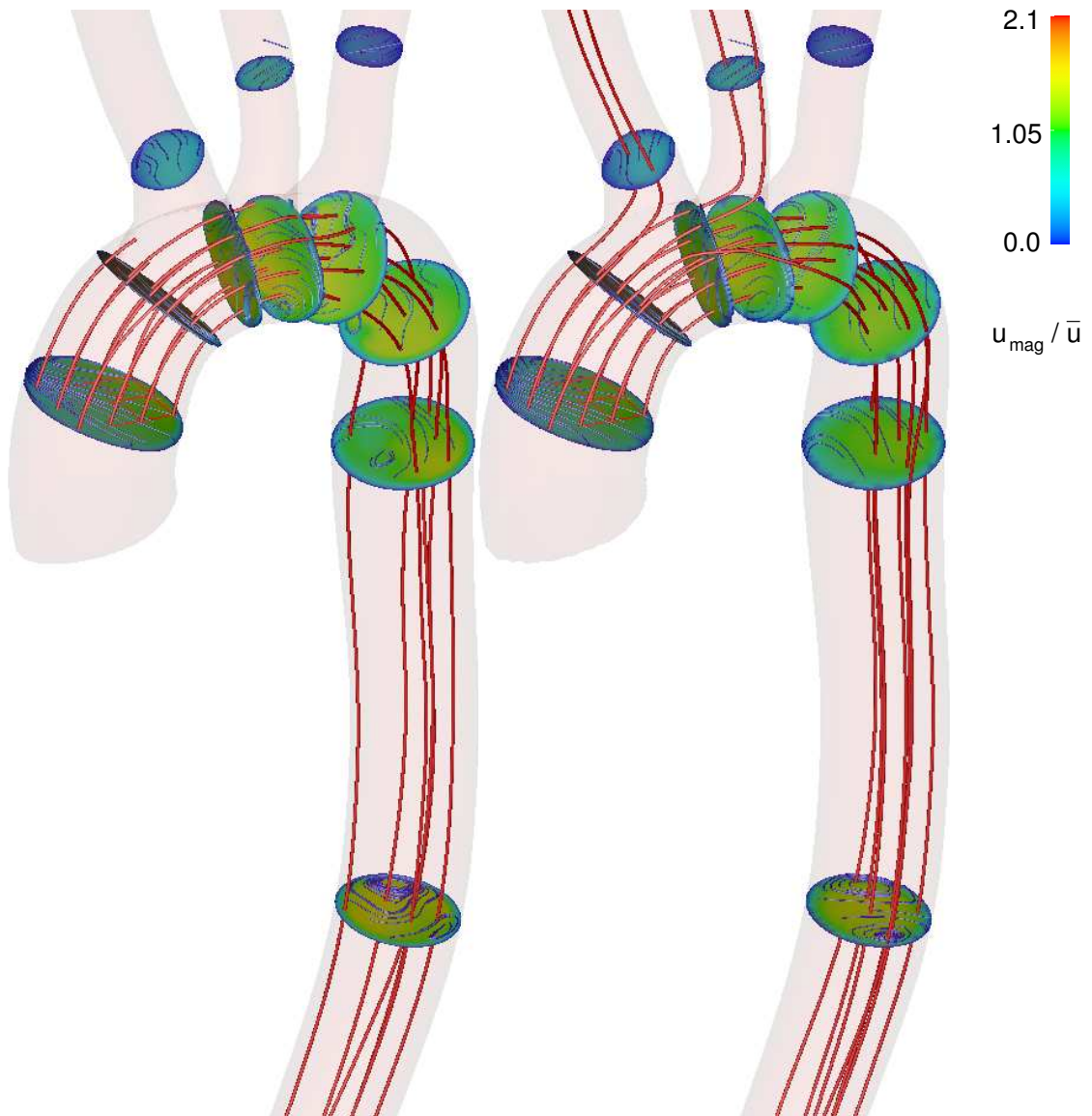


Abbildung 5.30: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag,  $t = T/4$ , pulsierende Strömung im Aortenbogen, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

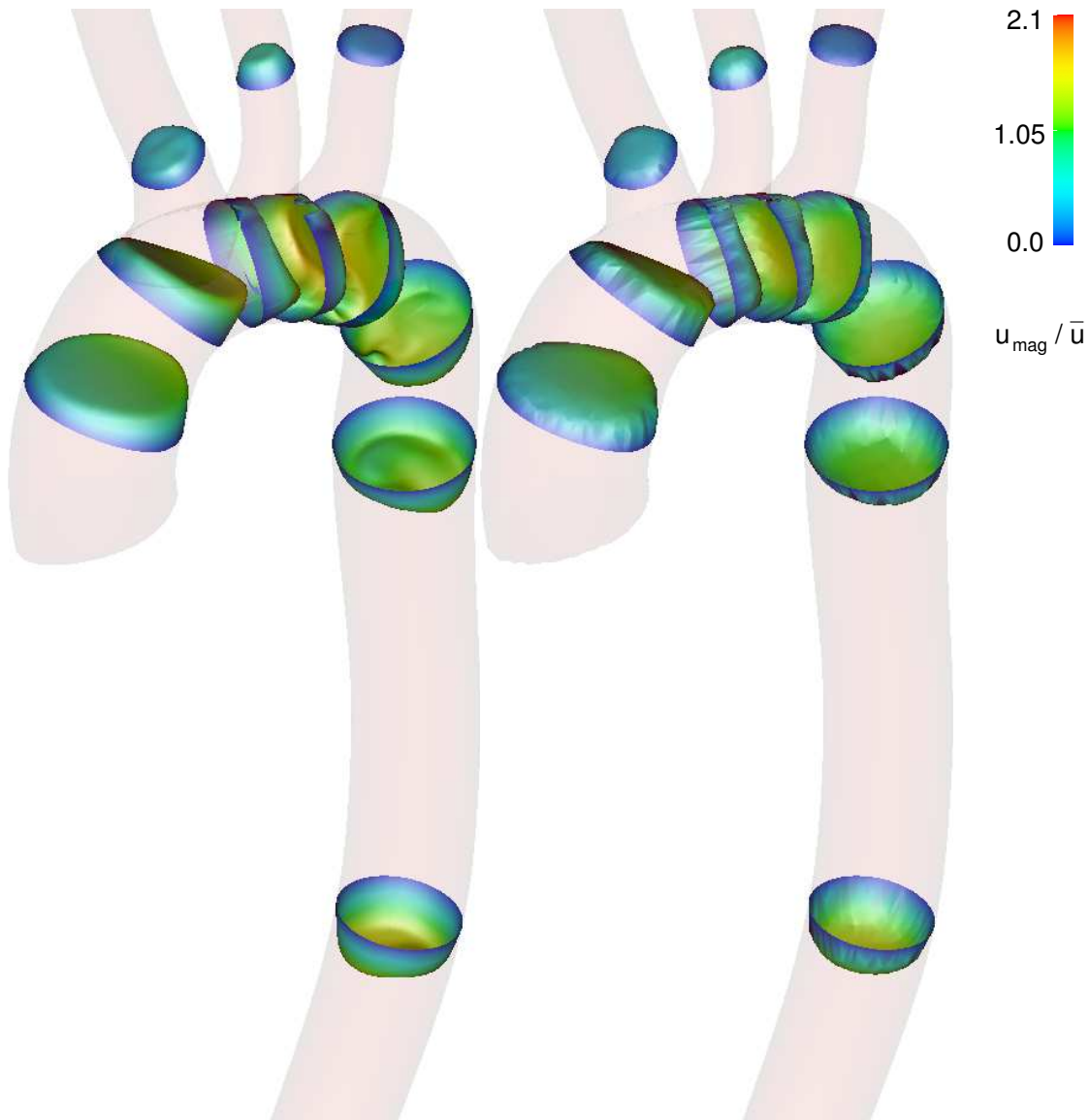


Abbildung 5.31: Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

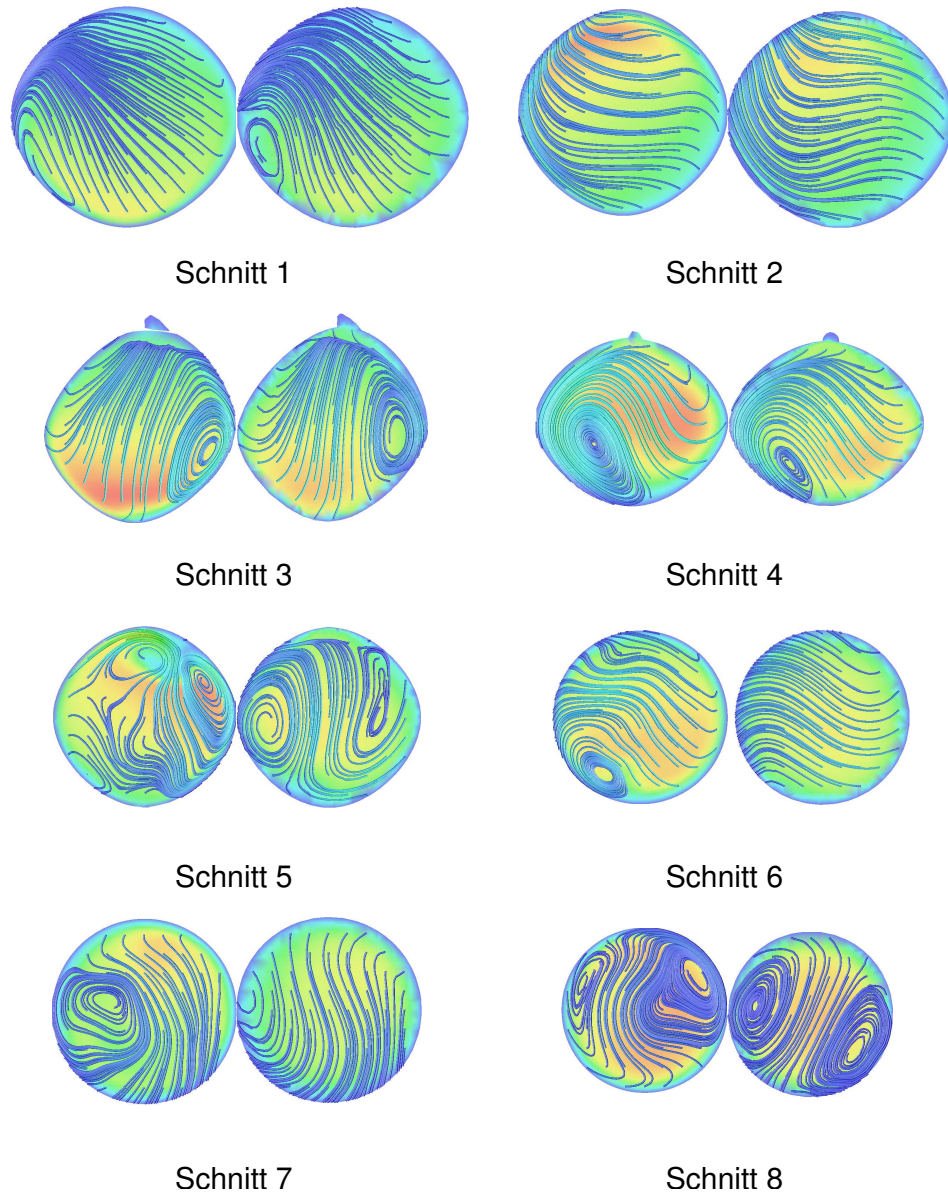


Abbildung 5.32: Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T/4$ , Schnitte 1-8, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

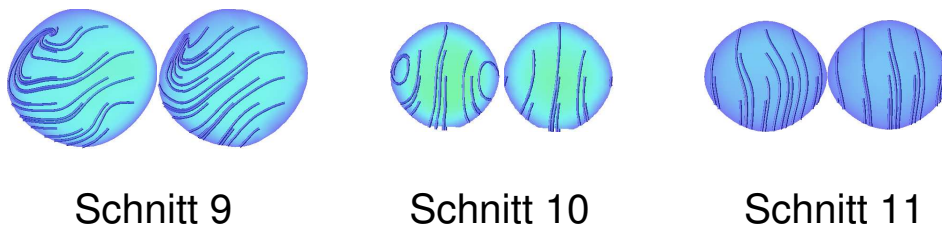


Abbildung 5.33: Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T/4$ , Schnitte 9, 10 und 11, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*



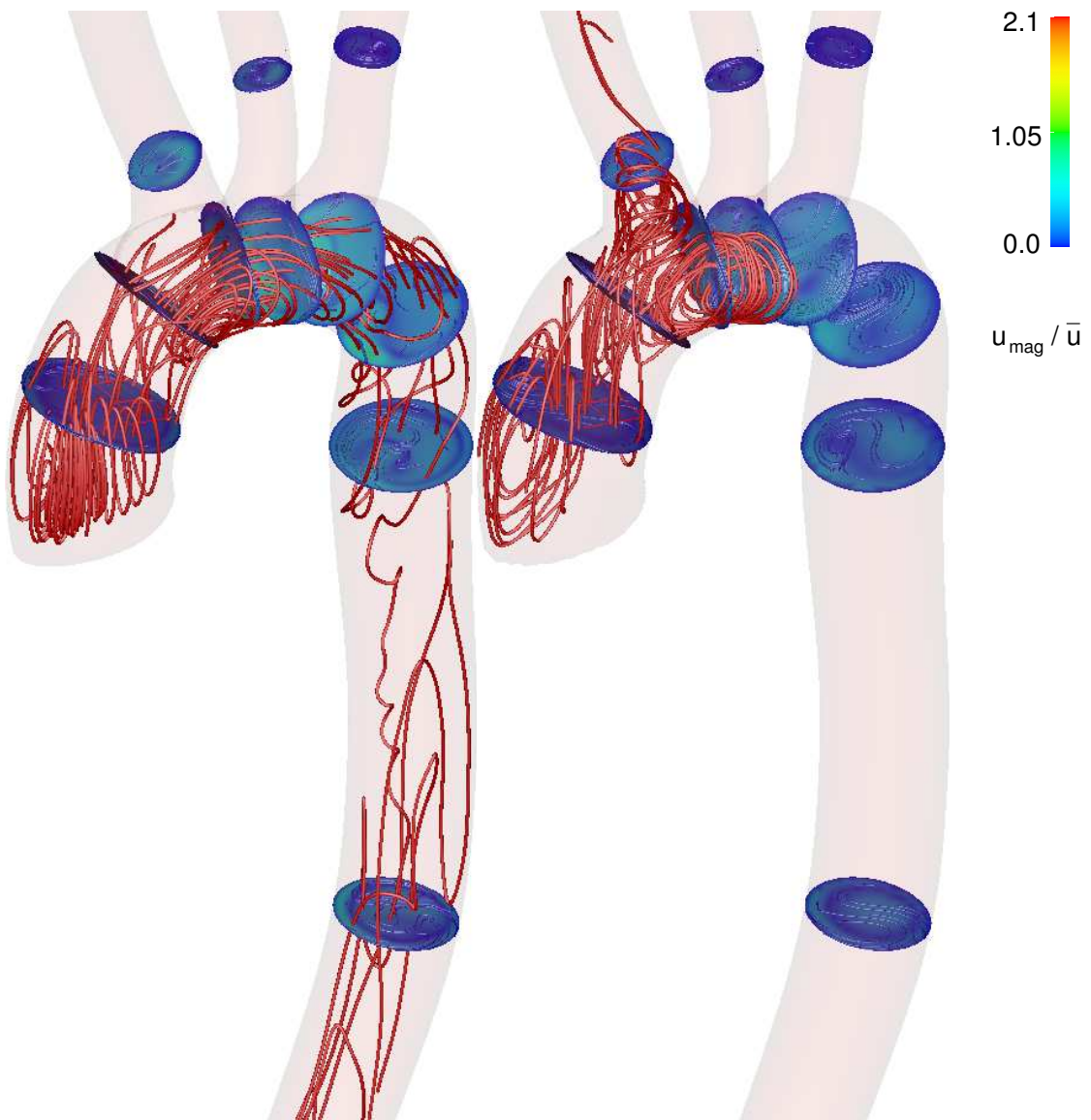


Abbildung 5.34: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T/2$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

In den Abbildungen 5.34 bis 5.37 ist die Strömung zu  $t = T/2$  dargestellt. Zu diesem Zeitpunkt schließt die Aortenklappe und erzeugt Bremswirbelartige Strukturen der Stromlinien in Abbildung 5.34. Der deutliche Unterschied der berechneten Stromlinien zwischen *STAR-CD*<sup>®</sup> und *KAPPA-cvfem* wird durch die gegebene Ähnlichkeit der Profile in Abbildung 5.35 relativiert und beruht auf der Tatsache, dass die Geschwindigkeiten nahe Null sind und bereits kleine Ungenauigkeiten Wechsel im Vorzeichen bewirken können. Die Geschwindigkeitsprofile lassen Rückströmungen

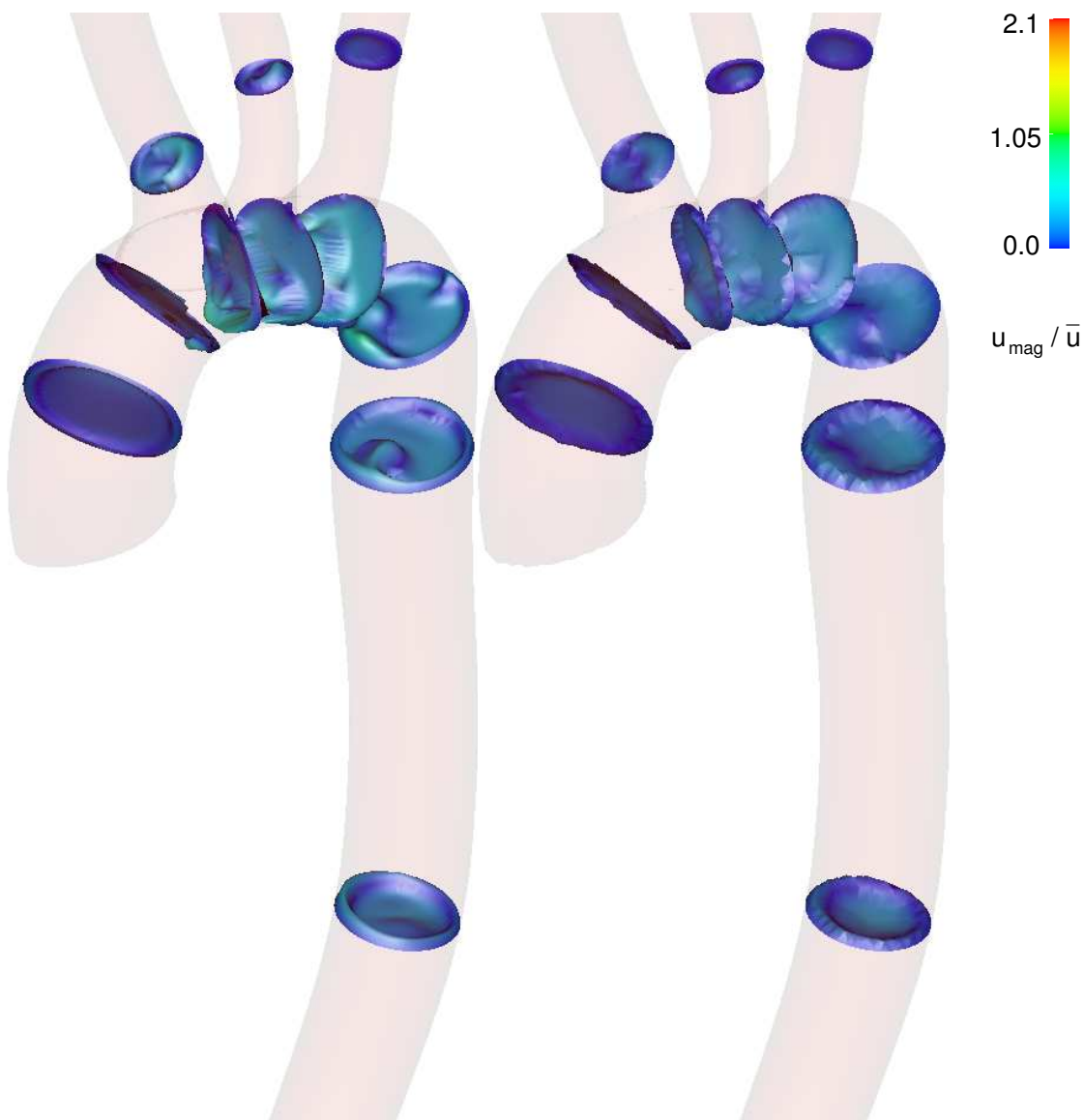


Abbildung 5.35: Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T/2$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

in zwei Bereichen erkennen. Zum Einen ist dies in der Nähe der Aortenbogenwände - entsprechend den Beobachtungen bei der pulsierenden Rohrströmung - zum Anderen in den Bereichen der maximalen Krümmung des Aortenbogens. Die Schnitte in Abbildung 5.36 zeigen diesbezüglich Übereinstimmung zwischen beiden CFD-Codes.

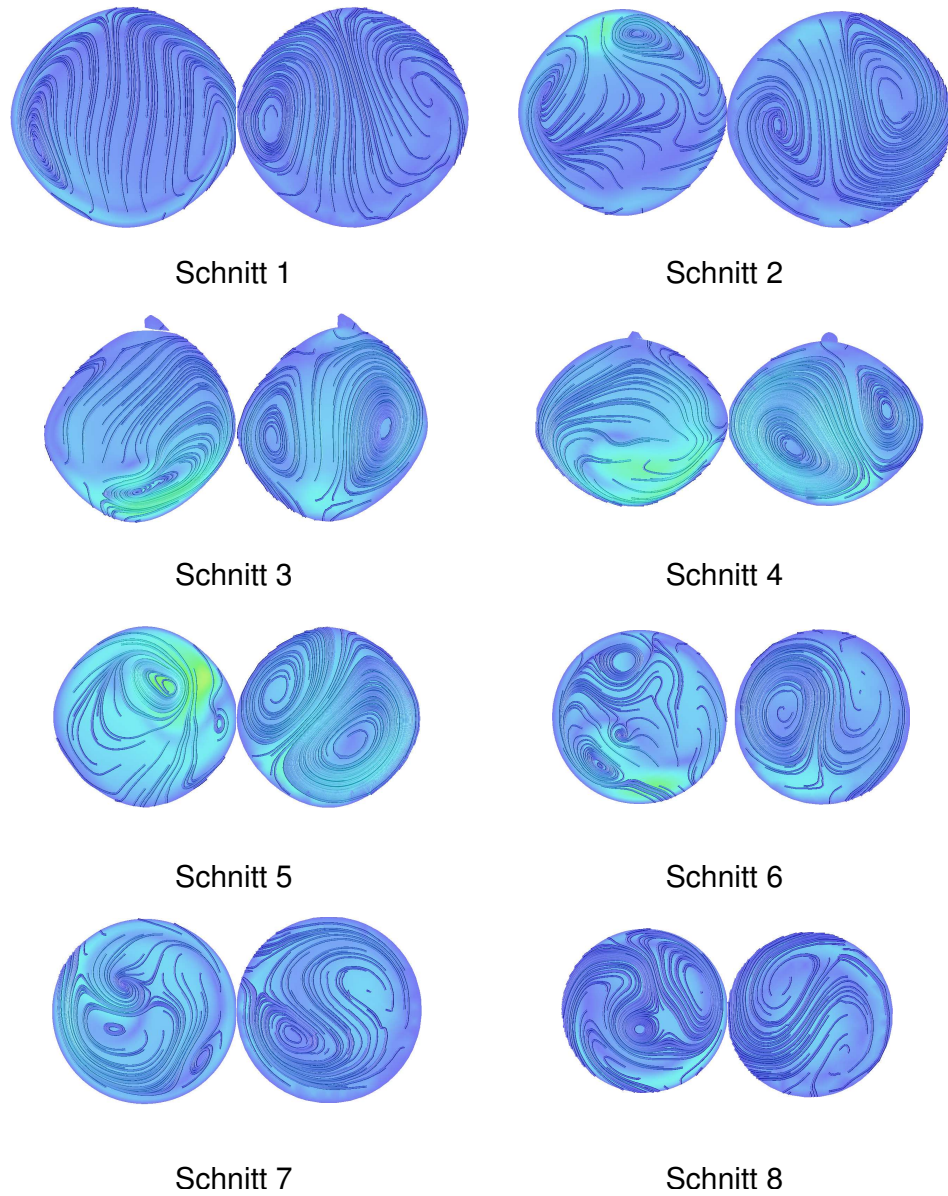


Abbildung 5.36: Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T/2$ , Schnitte 1-8, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

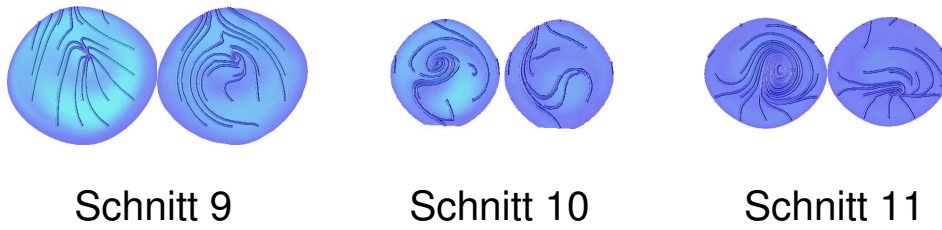


Abbildung 5.37: Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T/2$ , Schnitte 9, 10 und 11, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

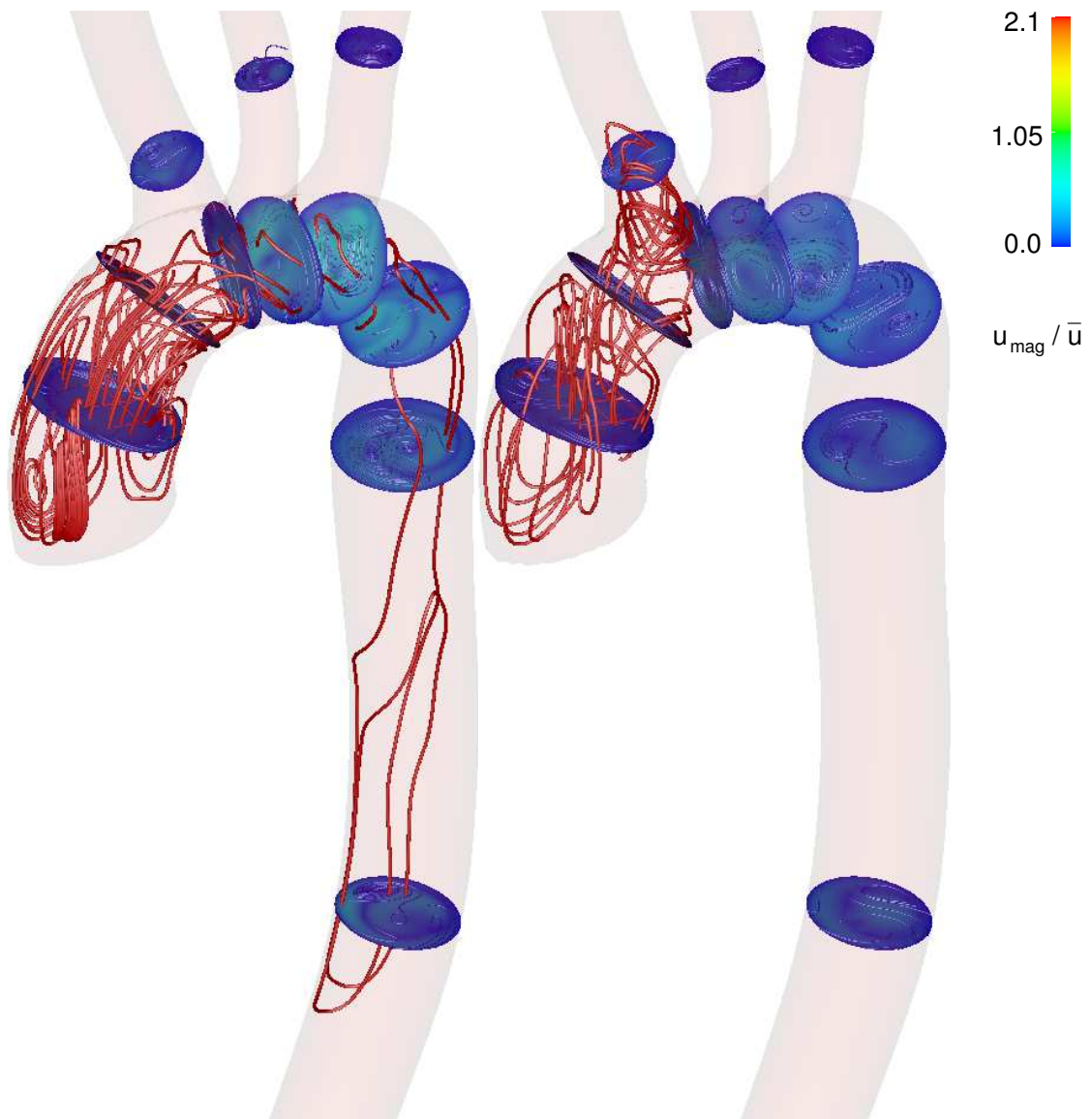


Abbildung 5.38: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = 3T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

Die Abbildungen 5.38 bis 5.41 dienen der Visualisierung der Strömung zu  $t = 3T/4$ . Die Aortenklappe ist geschlossen und dementsprechend die Geschwindigkeit am Einlass gleich Null. Demzufolge sind in den Profilen in Abbildung 5.39 lediglich trägheitsbedingte Geschwindigkeiten zu beobachten, die bei *KAPPA-cvfem* insbesondere im Bereich der Abzweigungen zur linken Halsschlagader und zur linken Schlüsselbeinarterie größer sind. In den Abbildungen 5.40 und 5.41 sind wiederum die Stromlinien aus den projizierten Geschwindigkeitskomponenten eingetragen, de-

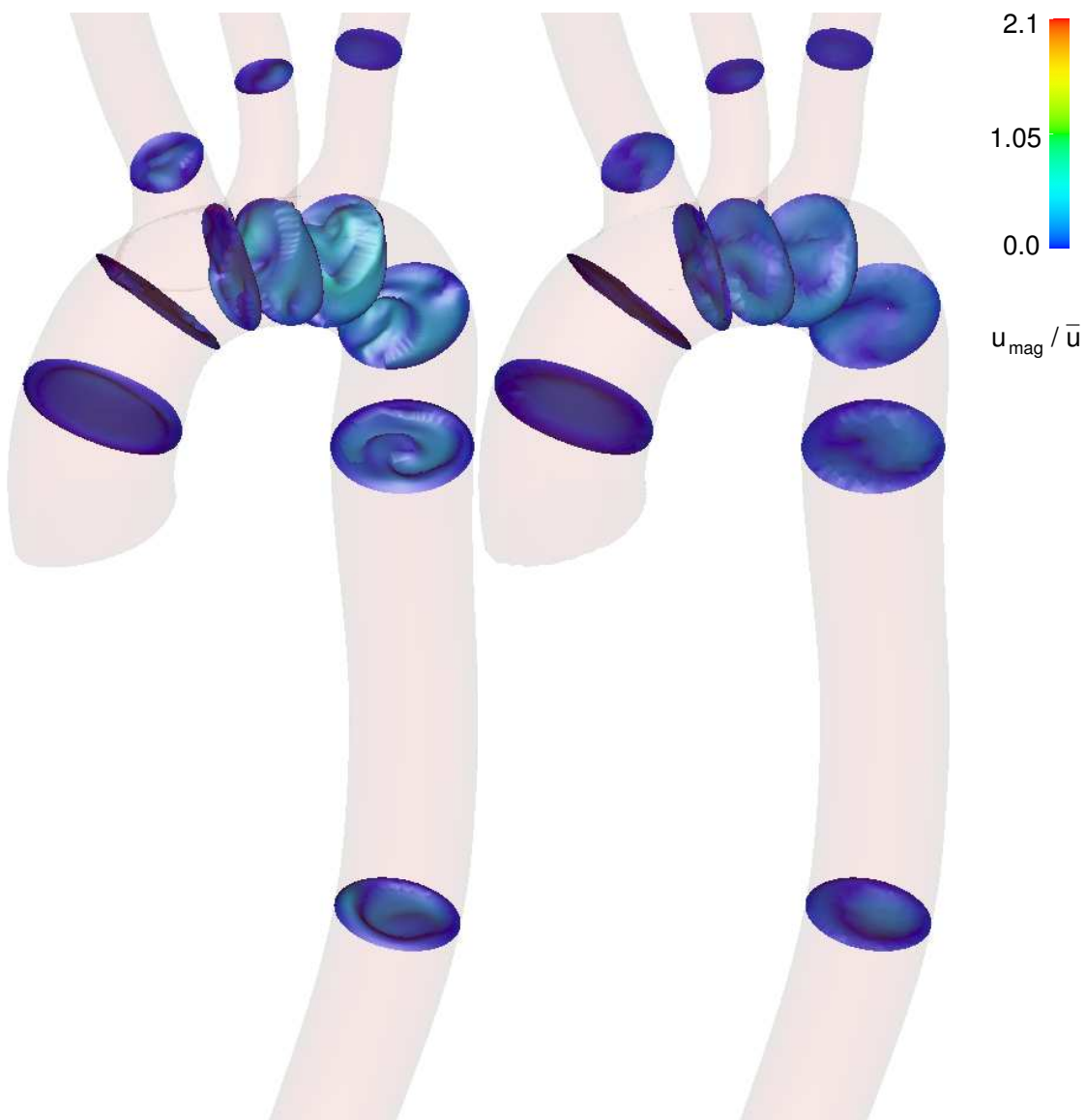


Abbildung 5.39: Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = 3T/4$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

ren Aussagekraft allerdings als gering zu betrachten ist, da insgesamt nur eine sehr schwache Strömung vorliegt.



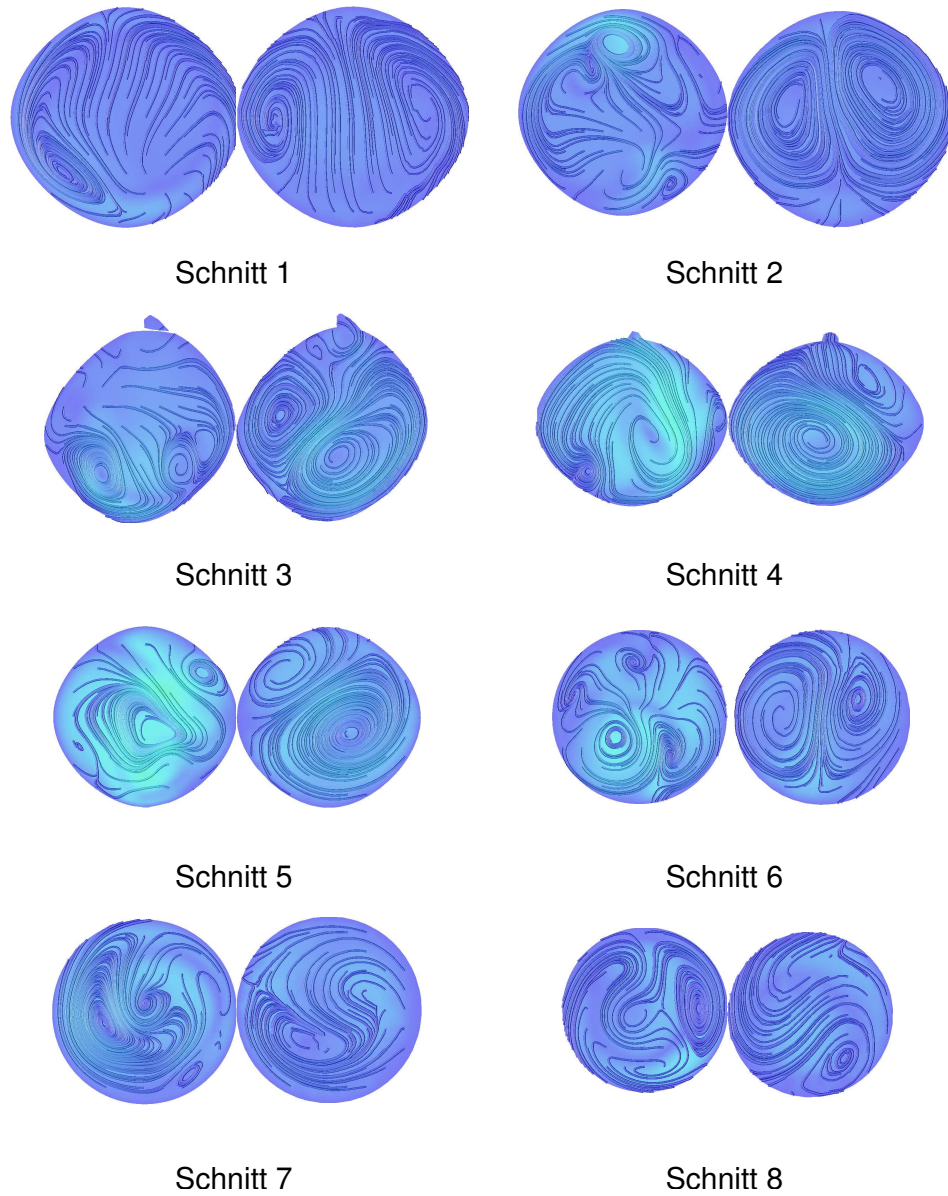


Abbildung 5.40: Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = 3T/4$ , Schnitte 1-8, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

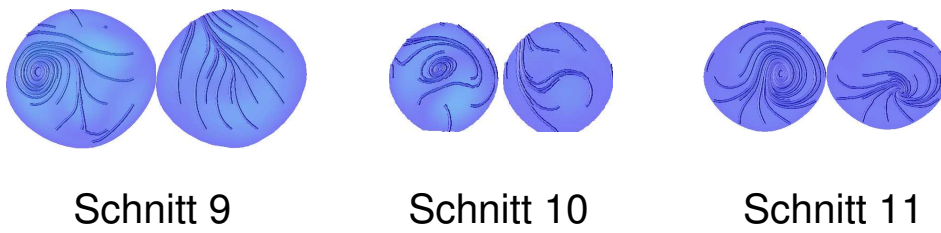


Abbildung 5.41: Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = 3T/4$ , Schnitte 9, 10 und 11, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*



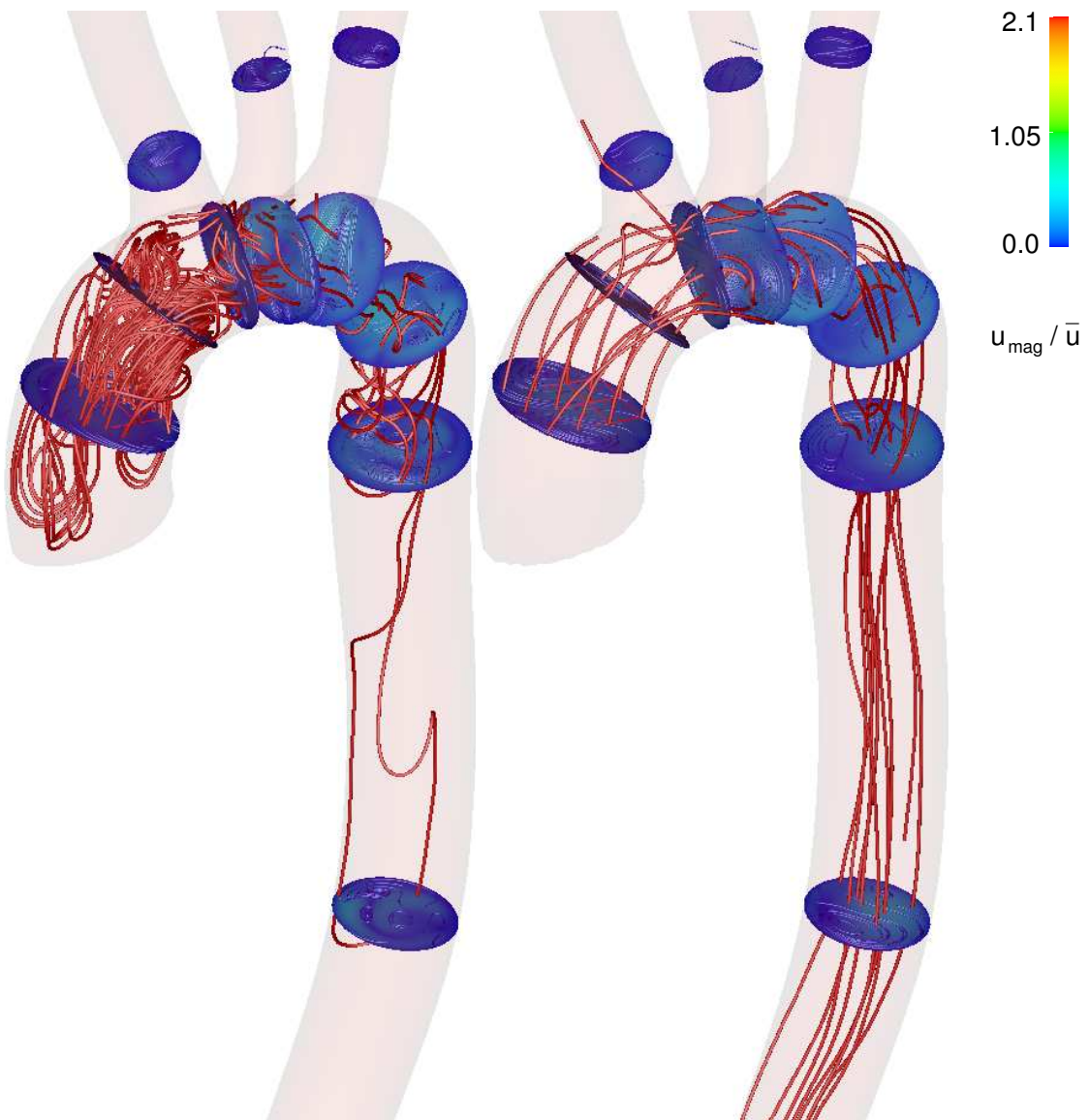


Abbildung 5.42: Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

Die Abbildungen 5.42 bis 5.45 zeigen schließlich die Strömung zu  $t = T = 0$ . Interessant ist hierbei insbesondere, dass *STAR-CD*<sup>©</sup> etwas länger als *KAPPA-cvfem* benötigt, um wieder eine Durchströmung des Aortenbogens zu erreichen. Anhand der Stromlinien in Abbildung 5.42 ist ersichtlich, dass diese bei *KAPPA-cvfem* bereits vorliegt, wohingegen *STAR-CD*<sup>©</sup> noch Geschwindigkeiten nahe Null berechnet. Diese Beobachtung kann anhand anderer Simulationen mit *STAR-CD*<sup>©</sup> in der Version 3.15 bestätigt werden. Die Version 3.15 verhält sich bei

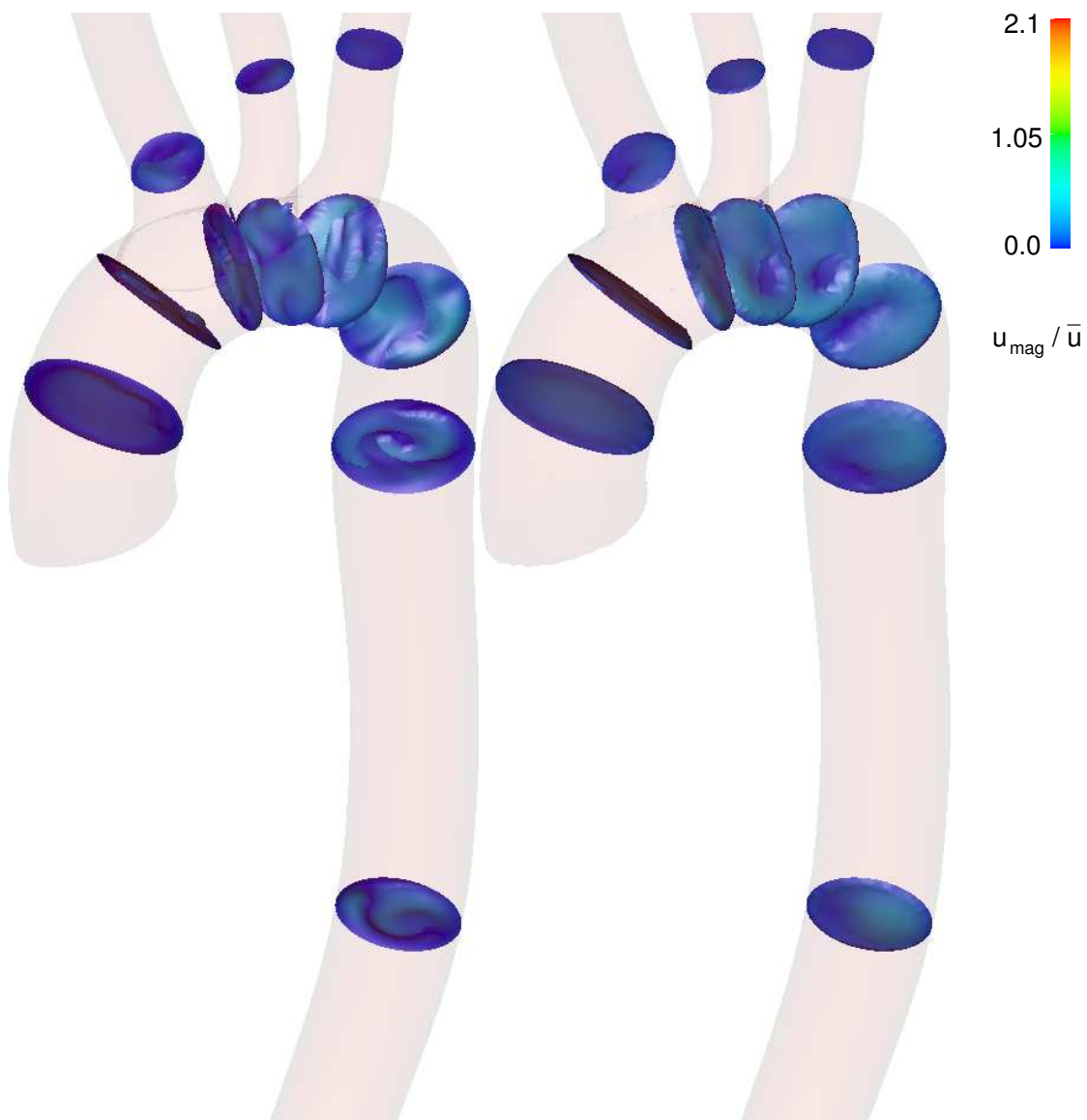


Abbildung 5.43: Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T$ , links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

instationären Berechnungen mit größerer Entfernung zwischen Ein- und Auslass relativ träge bezüglich der Strömungsbildung.

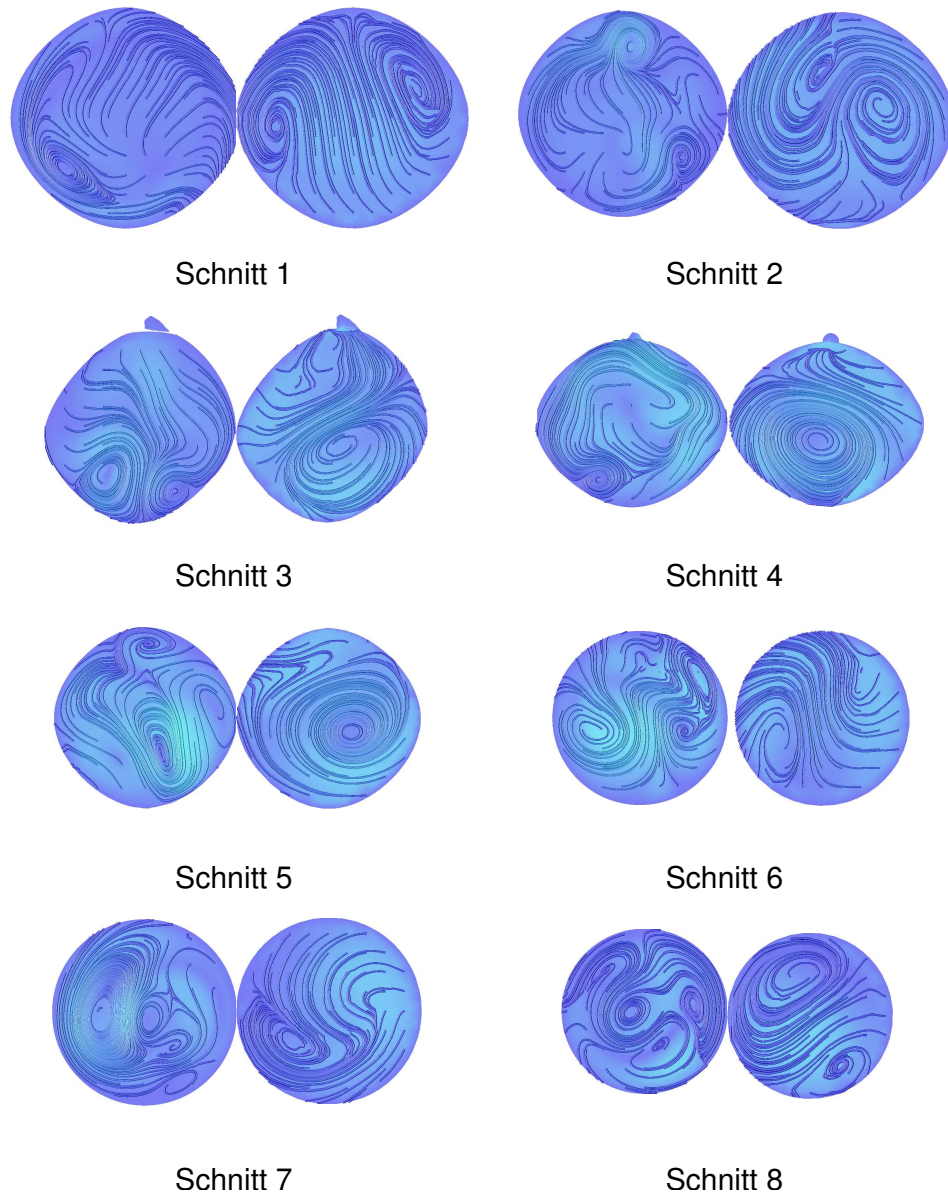


Abbildung 5.44: Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T$ ,  
Schnitte 1-8, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

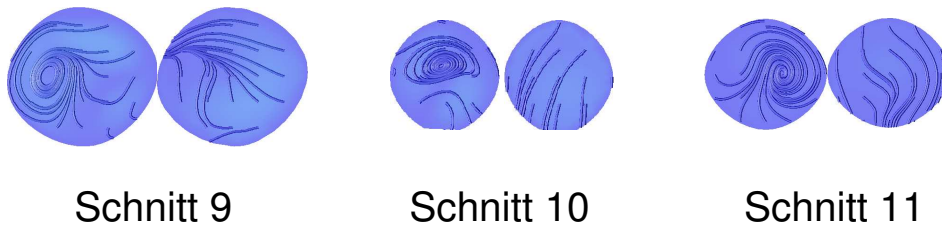


Abbildung 5.45: Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T$ ,  
Schnitte 9, 10 und 11, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem*

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit ist ein dreidimensionaler Code zur Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen implementiert, verifiziert und für die Strömung im Aortenbogen angewandt worden. Zu Vergleichszwecken sind dieselben Test- und Anwendungsfälle mit dem kommerziellen *STAR-CD*<sup>©</sup> in der Version 3.15 simuliert worden. Neben der Implementierung des eigentlichen Solvers nach der kontrollvolumenbasierten Finite-Elemente-Methode sind Schnittstellen zum Preprocessor *ICEM-CFD*<sup>©</sup> und der Visualisierungssoftware *OpenDX* erstellt worden.

Das mit dem FLO-Schema implementierte CVFEM-Verfahren ist bei den in Kapitel 4 behandelten Verifikationsfällen nahezu gleichwertig zu dem kommerziellen Code, benötigt aber mehr Rechenzeit und genauere Anfangsbedingungen. Die laminare Rohrströmung wird mit hoher Genauigkeit, die Rohrströmung mit plötzlicher Verengung mit guter Genauigkeit von *KAPPA-cvfem* berechnet. Mit den eingesetzten Tetraedernetzen ist eine Auflösung der Grenzschicht nicht mit der Feinheit der Hexaedernetze möglich, mit denen die *STAR-CD*<sup>©</sup> Simulationen durchgeführt sind. Daraus resultieren Abweichungen im Bereich sehr hoher Wandgradienten. Der instationäre Verifikationsfall der pulsierenden Rohrströmung zeigt gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung nach Uchida [65]. Zu berücksichtigen ist dabei, dass ein numerischer Einschwingvorgang vorliegt, bis der ausgebildete Zustand der analytischen Vereinfachungen erreicht wird.

Als erster Anwendungsfall wird die Strömung in einem 180° Krümmer behandelt. Die Untersuchung der Sekundärströmung zeigt im stationären Fall eine weitgehende Übereinstimmung zwischen *KAPPA-cvfem* und *STAR-CD*<sup>©</sup>. Die Topologie der Sekundärströmung ist identisch und stimmt mit den klassischen Dean-Wirbeln überein, wobei *STAR-CD*<sup>©</sup> Andeutungen zur ebenfalls bekannten 4-Wirbel-Konfiguration zeigt. Bei der pulsierenden Strömung im 180° Krümmer treten die Effekte der Lyne-Zirkulation auf und werden von beiden Codes qualitativ gleich wiedergegeben.

Der zentrale Anwendungsfall des Aortenbogens ist zunächst mit stationärer Durch-

strömung behandelt worden. Hierbei wird im Rahmen der gemachten Vereinfachungen eine gute Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den Ergebnissen der numerischen Simulation festgestellt. Anzumerken ist, dass beide Codes eine die Kontinuität erfüllende Anfangsbedingung benötigen. In *STAR-CD*<sup>©</sup> ist hierzu eine interne Prozedur implementiert, die in *KAPPA-cvfem* nicht vorhanden ist. Eine konvergente Lösung kann daher mit *KAPPA-cvfem* nur erreicht werden, wenn ein *STAR-CD*<sup>©</sup> Ergebnis als Anfangslösung benutzt wird.

Die abschließende Untersuchung der pulsierenden Strömung im Aortenbogen gibt die erwarteten Effekte der Einlaufströmung überlagert mit den Strömungsverzweigungen und der Pulsation der Strömung wieder. Die Pulsation führt zu einer Stabilisierung der Strömung und damit zu geringeren Sekundäreffekten im Vergleich zur stationären Strömung. Zu einer genaueren Beurteilung des Einflusses der Verzweigung sollte in kommenden Arbeiten eine pulsierende Strömungsverzweigung untersucht werden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die numerische Simulation der pulsierenden Strömung im Aortenbogen vor allem mit *STAR-CD*<sup>©</sup> ohne Einschränkungen möglich ist und im Rahmen der vorgenommenen Vereinfachungen Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen besteht. Auf die numerischen Aspekte, die *KAPPA-cvfem* betreffen, wird im Folgenden eingegangen.

In der vorliegenden Form hat das CVFEM-Verfahren einige gravierende Nachteile gegenüber dem kommerziellen Code. Speziell der Massentransport durch das Rechengebiet hindurch führt bei der Formulierung der Auslassrandbedingung zu Problemen, die nur durch eine reibungsfreie Formulierung der Randbedingung umgangen werden können. Mit dem FLO-Schema ist ein hoher Anspruch an die Netzqualität gegeben. Stumpfe Winkel führen schnell zu negativen Koeffizienten in den Gleichungssystemen und damit zu Konvergenzproblemen. Abhilfe kann hier das MAW-Schema schaffen, das allerdings eine andere Kontrollvolumenbildung erfordert. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass mit bisher bekannten Formulierungen für Diskretisierungsschemata und Randbedingungen CVFEM-Verfahren für Strömungsproblem mit Massentransport eher schlecht geeignet sind.

Die Untersuchung der Strömung im Aortenbogen beschränkt sich hier auf starre Wände und ein Newtonsches Medium. In weiterführenden Arbeiten sollten diese Effekte berücksichtigt werden. Die Behandlung der Nicht-Newtonschen Eigenschaften stellt dabei den weitaus leichteren Aspekt dar und kann beispielsweise durch die Implementierung des modifizierten Cross-Modells nach Perktold [53] geschehen. Zur Simulation der Compliance der realen Aderwand ist neben der Strömungs-Strukturkopplung ein strukturmechanisches Modell der elastischen Eigenschaften der Wand notwendig. Derartige Modelle werden zur Zeit von verschiedenen Forschergruppen erarbeitet, als Beispiel sei hier das Auckland Heart Model [33] genannt. Die Verknüpfung von Strömungs- und Strukturcodes erfolgt sowohl im Rahmen von Forschungsprojekten als auch durch die Hersteller entsprechender Softwarepakete.

# Literaturverzeichnis

- [1] D.A. Anderson. *Hypersonic and high Temperature Gas Dynamics*. McGraw-Hill, Series in Aeronautic and Aerospace Engineering, 1989.
- [2] N. Anitschkow. Experimental arteriosclerosis in animals. In E.V. Cowdry, editor, *Arteriosclerosis*. Macmillan, 1933.
- [3] L. Aschoff. Virchows Lehre von den Degenerationen (passiven Vorgängen) und ihre Weiterentwicklung. *Virchows Archiv*, 235:152-185, 1921.
- [4] B.R. Baliga and S.V. Patankar. A new finite-element formulation for convection-diffusion problems. *Numerical Heat Transfer*, 3:393-409, 1980.
- [5] B.R. Baliga and S.V. Patankar. A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer. *Numerical Heat Transfer*, 6:245-261, 1983.
- [6] B.R. Baliga and S.V. Patankar. *Elliptic Systems: Finite-element method II*, pages 421-461. John Wiley & Sons, 1988.
- [7] R. Baumgart. Strömungsuntersuchungen in einem menschlichen Aortenbogenmodell mittels Laser-Doppler-Anemometrie. Dissertation, Chirurgische Klinik Innenstadt der Universität München, 1986.
- [8] R. Bramley and X. Wang. Splib: A library of iterative methods for sparse linear systems. Technical report, Department of Computer Science, Indiana University, 1997.
- [9] C. Brenneisen. Numerische Simulation und topologische Analyse dreidimensionaler Innenströmungen. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 1998.
- [10] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlagsgesellschaft, 1991.
- [11] L.S. Caretto, A.D. Gosman, S.V. Patankar, and D.B. Spalding. Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation. *Proceedings of third International Conference Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 1972.

- [12] M.Ö. Çarpınlioğlu and M.Y. Gündoğdu. A critical review on pulsatile pipe flow studies directing towards future research topics. *Flow Measurement and Instrumentation*, 12:163-174, 2001.
- [13] M.S. Chong, A.E. Perry, and B.J. Cantwell. A general classification of three-dimensional flow fields. *Physics of Fluids*, 2(5):765-777, 1990.
- [14] A. J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 2:12-26, 1967.
- [15] Computational Dynamics Limited, London. *StarCD Methodology, Version 3.15*, 2001.
- [16] Computational Dynamics Limited, London. *StarCD User Guide, Version 3.15*, 2001.
- [17] V.A.F. Costa, L.A. Oliveira, and A.R. Figueiredo. A control-volume based finite element method for three-dimensional incompressible turbulent fluid flow, heat transfer and related phenomena. *International Journal for numerical Methods in Fluids*, 21:591-613, 1995.
- [18] P. Daskopoulos and A.M. Lenhoff. Flow in curved ducts: Bifurcation structure for stationary ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 203:125-148, 1989.
- [19] W.R. Dean. Note on the motion of fluid in a curved pipe. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4(20):208-223, 1927.
- [20] W.R. Dean. The stream-line motion of fluid in a curved pipe. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5(30):673-695, 1928.
- [21] S.C.R. Dennis and N.G. Michael. Dual solutions for steady laminar flow through a curved tube. *Journal of Applied Mathematics*, XXXV:305-324, 1982.
- [22] F. Durst and T. Loy. Investigations of laminar flow in a pipe with sudden contraction of cross sectional area. *Computers & Fluids*, 13:15-36, 1985.
- [23] D. Elkaim, M. Reggio, and R. Camarero. Simulating two-dimensional turbulent flow by using the  $k-\epsilon$ -model and the vorticity-streamfunction formulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 14:961-980, 1992.
- [24] F.H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1999.



- [25] B.A. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, 1972.
- [26] C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume 2, Specific Techniques for Different Flow Categories*. Springer Verlag, 1991.
- [27] K.N. Ghia, W.L. Hankey, and J.K. Hodge. Use of primitive variables in the solution of incompressible navier-stokes equations. *AIAA Journal*, 17(3):298-301, 1979.
- [28] U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387-411, 1982.
- [29] G. Guevremont, W.G. Habashi, and M.M. Hafez. Finite element solution of the navier-stokes equations by a velocity-vorticity method. *International Journal for numerical Methods in Fluids*, 11:661-675, 1990.
- [30] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physics of Fluids*, 8(12):2182-2189, 1965.
- [31] N.A. Hookey. A cvfem for two dimensional viscous compressible fluid flow. Phd thesis, Department of Mech. Engineering, McGill University, Montreal, Canada, 1989.
- [32] N.A. Hookey and B.R. Baliga. Evaluation and enhancements of some control volume finite-element methods - part 2: Fluid flow problems. *Numerical Heat Transfer*, 14:273-293, 1988.
- [33] P.J. Hunter. Auckland whole heart model. *Proceedings of The Second International Workshop on Computer Simulation and Experimental Assessment of Electrical Cardiac Function*, 2000.
- [34] R.I. Issa. Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62:40-65, 1985.
- [35] R.I. Issa, A.D. Gosman, and A.P. Watkins. The computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme. *Journal of Computational Physics*, 62:66-82, 1986.
- [36] K.C. Karki and S.V. Patankar. Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configuration. *AIAA Journal*, 27(9):1167-1174, 1989.

- [37] A.E. Larreteguy. An equal-order control-volume finite-element method for fluid flow in arbitrary triangulations. *Numerical Heat Transfer*, 28:401-413, 1995.
- [38] B. LeDain Muir and B.R. Baliga. Solution of three-dimensional convection-diffusion problems using tetrahedral elements and flow-oriented upwind interpolation functions. *Numerical Heat Transfer*, 9:143-162, 1986.
- [39] V.D. Lisejkin. *Grid Generation Methods*. Springer Verlag, 1999.
- [40] C. Masson, H.J. Saabas, and B.R. Baliga. Co-located equal-order control-volume finite element method for two-dimensional axisymmetric incompressible fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18:1-26, 1994.
- [41] J.J. McGuirk and J.M.L.M. Palma. The efficiency of alternative pressure-correction formulations for incompressible turbulent flow problems. *Computers & Fluids*, 22(1):77-87, 1993.
- [42] J.A. Meijerink and H.A. van der Vorst. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric m-matrix. *Mathematics of Computation*, 31(137):148-162, 1977.
- [43] V. Michaelassi, E.L. Papanicolaou, and G.S. Theodoridis. A comparison of time marching and pressure-correction algorithms for transonic turbine blades. In *Computational Fluid Dynamics in Aeropropulsion AD-Vol. 49*. ASME, 1995.
- [44] V. Michaelassi, G.S. Theodoridis, and Papanicolaou. Low-speed turbine computation by pressure-correction and time marching methods. In *Computational Fluid Dynamics in Aeropropulsion AD-Vol. 49*. ASME, 1995.
- [45] N. Nandakumar and H. Masliyah, J. Bifurcation in steady laminar flow through curved tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, 119:475-490, 1982.
- [46] H. Oertel. *Strömungsmechanik*. Vieweg Verlag, 1999.
- [47] H. Oertel and E. Laurien. *Numerische Strömungsmechanik*. Springer Verlag, 1995.
- [48] H. Oertel jr., editor. *Prandtl-Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg Verlag, 10 edition, 2001.
- [49] M. Ohmi, M. Iguchi, and T. Usui. Flow pattern and frictional losses in pulsating pipe flow. *Bull. JSME*, 23(186), 1980.
- [50] S.V Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, 1980.

- [51] S.V. Patankar. A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numerical Heat Transfer*, 14:409-425, 1985.
- [52] S.V. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:1787-1806, 1972.
- [53] K. Perktold, M. Resch, and H. Florian. Pulsatile non-newtonian flow characteristics in a three dimensional human carotid bifurcation model. *Journal of Biomechanical Engineering*, 13:464-476, 1991.
- [54] C. Prakash. An improved control volume finite-element method for heat and mass transfer, and for fluid flow using equal-order velocity-pressure interpolation. *Numerical Heat Transfer*, 9:253-276, 1986.
- [55] C. Prakash and S.V. Patankar. A control volume based finite-element method for solving the navier-stokes equations using equal-order velocity-pressure interpolation. *Numerical Heat Transfer*, 8:259-280, 1985.
- [56] H. Reul. Cardiovascular simulation models. *Life Supp. Sys. 2*, page 77, 1984.
- [57] H.J. Saabas. A control volume finite element method for three-dimensional, incompressible, viscous fluid flow. Phd thesis, Department of Mech. Engineering, McGill University, Montreal, Canada, 1991.
- [58] H.J. Saabas and B.R. Baliga. Co-located equal-order control-volume finite-element method for multidimensional, incompressible fluid-flow - part 1:formulation. *Numerical Heat Transfer*, 26:381-407, 1994.
- [59] L. Schiller. Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. *VDI-Forschungsheft*, 248, 1922.
- [60] G.E. Schneider and M.J. Raw. A skewed, positive influence coefficient up-winding procedure for control-volume-based finite-element convection-diffusion computation. *Numerical Heat Transfer*, 9:1-26, 1986.
- [61] G.E. Schneider and M.J. Raw. Control volume finite-element method for heat transfer and fluid flow using colocated variables - 1. computational procedure. *Numerical Heat Transfer*, 11:363-390, 1987.
- [62] J. Simoneau and A. Pollard. Finite volume methods for laminar and turbulent flows using a penalty function approach. *International Journal for numerical Methods in Fluids*, 18:733-746, 1994.

- [63] M.H.W. Stripf. Implementierung eines Navier-Stokes-Lösers auf Basis eines kontrollvolumenbasierten Finite-Elemente-Verfahrens. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2001.
- [64] K. Sudo, M. Sumida, and R. Yamane. Secondary motion of fully developed oscillatory flow in a curved pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, 237:189-208, 1992.
- [65] S. Uchida. Pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion. *ZAMP*, VII:403-422, 1956.
- [66] H.A. van der Vorst. Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal of scientific statistical computation*, 2:631-644, 1992.
- [67] J.P. Van Doormaal and G.D. Raithby. Enhancement of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7:147-163, 1984.
- [68] I. Wintruff. Ein adaptives Bewegte-Gitter-Verfahren zur Berechnung von Aufschmelz- und Erstarrungsvorgängen. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [69] R.G. Zalosh and W.G. Nelson. Pulsating flow in a curved tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 59:693-705, 1973.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Herz (ventrale Ansicht) . . . . .	3
2.1	Klassifizierung kritischer Punkte eines zweidimensionalen Vektorfeldes . . . . .	15
2.2	Klassifizierung kritischer Punkte in der QR-Ebene . . . . .	16
3.1	links: Makroelemente und Druck-Kontrollvolumen, rechts: Subelement und Impuls-Kontrollvolumen . . . . .	24
3.2	Zerlegung eines Tetraederelementes in Kontrollvolumenfragmente . . . . .	27
3.3	Zweidimensionales Kontrollvolumen um Punkt 1 . . . . .	27
3.4	Drehung des Koordinatensystems . . . . .	33
3.5	Wertebereich der $\xi$ -Funktion . . . . .	34
3.6	12 Gauß-Punkte für die Gaußsche Quadratur . . . . .	36
3.7	Auslassmassenstrom für den Gitterpunkt "1" am Auslass . . . . .	41
3.8	Molekül der Zeitdiskretisierung . . . . .	48
3.9	Benachbarte Zellen mit Zellzentren $P$ und $N$ . . . . .	49
3.10	Bezeichnungen der PISO-Implementierung auf einem kartesischen Netz . . . . .	52
3.11	Kritischer Punkt in einer Zelle . . . . .	57
3.12	Programmablauf zum Auffinden kritischer Punkte . . . . .	58
4.1	Rohrströmung und ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil . . . . .	60
4.2	Konvergenzverlauf laminare Rohrströmung, <i>KAPPA-cvfem</i> , links: $Re_D = 50$ , rechts: $Re_D = 2000$ . . . . .	61
4.3	Konvergenzverlauf laminare Rohrströmung, <i>STAR-CD</i> , links: $Re_D = 50$ , rechts: $Re_D = 2000$ . . . . .	62

4.4	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> , $Re_D = 50$ . . . . .	62
4.5	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> , $Re_D = 500$ . . . . .	63
4.6	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> , $Re_D = 1000$ . . . . .	63
4.7	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> , $Re_D = 2000$ . . . . .	64
4.8	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile analytische Lösung, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> . . . . .	65
4.9	Geometrie der Rohrströmung mit plötzlicher Verengung . . . . .	66
4.10	Geschwindigkeitsprofile Rohrströmung mit plötzlicher Verengung, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> , $Re_D = 23$ . . . . .	67
4.11	Geschwindigkeitsprofile Rohrströmung mit plötzlicher Verengung, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> , $Re_D = 196$ . . . . .	68
4.12	Geschwindigkeitsprofile Rohrströmung mit plötzlicher Verengung, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> $Re_D = 372$ . . . . .	68
4.13	Geschwindigkeitsprofile Rohrströmung mit plötzlicher Verengung, <i>KAPPA-cvfem</i> und <i>STAR-CD</i> $Re_D = 968$ . . . . .	69
4.14	Einlassrandbedingung pulsierende Rohrströmung . . . . .	73
4.15	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile Pulsierende Rohrströmung . . . . .	74
5.1	Krümmergeometrie . . . . .	75
5.2	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, ausgebildete Krümmerströmung, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	77
5.3	Geschwindigkeitsprofile, ausgebildete Krümmerströmung, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	78
5.4	Stromlinien der Sekundärströmung, ausgebildete Krümmerströmung, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> , F: Fokus, S': Halbsattel . . . . .	78
5.5	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Krümmerströmung, $t = T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	79
5.6	Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Krümmerströmung, $t = T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	80
5.7	Stromlinien der Sekundärströmung, pulsierende Krümmerströmung, $t = T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> , F: Fokus, S': Halbsattel . . . . .	80

5.8	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Krümmenströmung, $t = T/2$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	81
5.9	Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Krümmenströmung, $t = T/2$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	81
5.10	Stromlinien der Sekundärströmung, pulsierende Krümmenströmung, $t = T/2$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> , F: Fokus, S': Halbsattel . . . . .	82
5.11	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Krümmenströmung, $t = 3T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	82
5.12	Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Krümmenströmung, $t = 3T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	83
5.13	Stromlinien der Sekundärströmung, pulsierende Krümmenströmung, $t = 3T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> , F: Fokus, S': Halbsattel . . . . .	83
5.14	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Krümmenströmung, $t = T$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	84
5.15	Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Krümmenströmung, $t = T$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	84
5.16	Stromlinien der Sekundärströmung, pulsierende Krümmenströmung, $t = T$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> , F: Fokus, S': Halbsattel	85
5.17	Schematische Darstellung des Kreislaufs für stationäre Strömung, 1=Pumpe, 2=Hochbehälter, 3=Regulierbehälter, 4=Überlaufbehälter, 5=Modell, 6=Vorratsgefäß . . . . .	87
5.18	Wachskern des Aortenbogen-Modells . . . . .	89
5.19	Oberflächengeometrie des Aortenbogen-CAD-Modells . . . . .	90
5.20	Rechnernetze für den Aortenbogen, links: Hexaedernetz, rechts: Tetraedernetz . . . . .	92
5.21	Positionen der Schnitte zur Auswertung der Strömung im Aortenbogen . . . . .	94
5.22	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, stationäre Strömung im Aortenbogen, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	95
5.23	Geschwindigkeitsprofile, stationäre Strömung im Aortenbogen, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	96
5.24	Sekundärströmung, stationäre Strömung im Aortenbogen, Schnitte 1-8, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> , F: Fokus, S': Halbsattel	97
5.25	Sekundärströmung, stationäre Strömung im Aortenbogen, Schnitte 9, 10 und 11, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	98

5.26	Vergleich Geschwindigkeitsprofile, links: Experiment, mitte: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	99
5.27	Vergleich Geschwindigkeitsprofile, links: Experiment, mitte: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	100
5.28	Vergleich Geschwindigkeitsprofile, links: Experiment, mitte: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	100
5.29	Einlassrandbedingung pulsierende Strömung im Aortenbogen . . .	101
5.30	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, $t = T/4$ , pulsierende Strömung im Aortenbogen, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i>	103
5.31	Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	104
5.32	Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T/4$ , Schnitte 1-8, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	105
5.33	Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T/4$ , Schnitte 9, 10 und 11, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . .	106
5.34	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T/2$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . .	107
5.35	Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T/2$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	108
5.36	Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T/2$ , Schnitte 1-8, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	109
5.37	Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T/2$ , Schnitte 9, 10 und 11, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . .	110
5.38	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = 3T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . .	111
5.39	Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = 3T/4$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	112
5.40	Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = 3T/4$ , Schnitte 1-8, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . .	113
5.41	Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = 3T/4$ , Schnitte 9, 10 und 11, links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i>	114
5.42	Stromlinien und Geschwindigkeitsbetrag, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . .	115
5.43	Geschwindigkeitsprofile, pulsierende Strömung im Aortenbogen, $t = T$ , links: <i>STAR-CD</i> , rechts: <i>KAPPA-cvfem</i> . . . . .	116



5.44 Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T$ ,  
 Schnitte 1-8, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem* . . . . . 117

5.45 Sekundärströmung, pulsierende Strömung im Aortenbogen,  $t = T$ ,  
 Schnitte 9, 10 und 11, links: *STAR-CD*, rechts: *KAPPA-cvfem* . . . 118

# Anhang A

## Herleitung verschiedener Koeffizienten

### A.1 Koeffizienten in der Interpolationsfunktion für den Druck

Die Koeffizienten in der Interpolationsfunktion für den Druck

$$p(x, y, z) = A_p x + B_p y + C_p z + D_p,$$

können durch Lösen des folgenden Gleichungssystems hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} A_p x_1 + B_p y_1 + C_p z_1 + D_p &= p_1 \\ A_p x_2 + B_p y_2 + C_p z_2 + D_p &= p_2 \\ A_p x_3 + B_p y_3 + C_p z_3 + D_p &= p_3 \\ A_p x_4 + B_p y_4 + C_p z_4 + D_p &= p_4 \end{aligned}$$

Dabei sind  $x_i$ ,  $y_i$  und  $z_i$  die Koordinaten der Eckpunkte des Tetraeders und  $p_i$  sind die Drücke auf diesen Eckpunkten. Damit ergeben sich die vier Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{1}{\Delta} [((y_4 - y_3) z_2 + (y_2 - y_4) z_3 + (y_3 - y_2) z_4) p_1 \\ &\quad + ((y_3 - y_4) z_1 + (y_4 - y_1) z_3 + (y_1 - y_3) z_4) p_2 \\ &\quad + ((y_4 - y_2) z_1 + (y_1 - y_4) z_2 + (y_2 - y_1) z_4) p_3 \\ &\quad + ((y_2 - y_3) z_1 + (y_3 - y_1) z_2 + (y_1 - y_2) z_3) p_4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_p &= \frac{1}{\Delta} [ - ((x_4 - x_3) z_2 + (x_2 - x_4) z_3 + (x_3 - x_2) z_4) p_1 \\
&\quad - ((x_3 - x_4) z_1 + (x_4 - x_1) z_3 + (x_1 - x_3) z_4) p_2 \\
&\quad - ((x_4 - x_2) z_1 + (x_1 - x_4) z_2 + (x_2 - x_1) z_4) p_3 \\
&\quad - ((x_2 - x_3) z_1 + (x_3 - x_1) z_2 + (x_1 - x_2) z_3) p_4 ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_p &= \frac{1}{\Delta} [ ((x_4 - x_3) y_2 + (x_2 - x_4) y_3 + (x_3 - x_2) y_4) p_1 \\
&\quad + ((x_3 - x_4) y_1 + (x_4 - x_1) y_3 + (x_1 - x_3) y_4) p_2 \\
&\quad + ((x_4 - x_2) y_1 + (x_1 - x_4) y_2 + (x_2 - x_1) y_4) p_3 \\
&\quad + ((x_2 - x_3) y_1 + (x_3 - x_1) y_2 + (x_1 - x_2) y_3) p_4 ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_p &= \frac{1}{\Delta} [ ((x_3 y_4 - x_4 y_3) z_2 + (x_4 y_2 - x_2 y_4) z_3 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_4) p_1 \\
&\quad + ((x_4 y_3 - x_3 y_4) z_1 + (x_1 y_4 - x_4 y_1) z_3 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_4) p_2 \\
&\quad + ((x_2 y_4 - x_4 y_2) z_1 + (x_4 y_1 - x_1 y_4) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_4) p_3 \\
&\quad + ((x_3 y_2 - x_2 y_3) z_1 + (x_1 y_3 - x_3 y_1) z_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) z_3) p_4 ]
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta &= (x_1 - x_4) [(y_2 - y_4) (z_3 - z_4) - (y_3 - y_4) (z_2 - z_4)] \\
&\quad + (y_1 - y_4) [(x_3 - x_4) (z_2 - z_4) - (x_2 - x_4) (z_3 - z_4)] \\
&\quad + (z_1 - z_4) [(x_2 - x_4) (y_3 - y_4) - (x_3 - x_4) (y_2 - y_4)]
\end{aligned}$$

## A.2 Koeffizienten in der Interpolationsfunktion für die dissipativen Terme

Die Koeffizienten in der Interpolationsfunktion für die dissipativen Terme

$$u^d(x, y, z) = A_u^d x + B_u^d y + C_u^d z + D_u^d,$$

gleich den in Anhang A.1, nur sind die Drücke auf den Eckpunkten des Tetraeders durch die entsprechende Geschwindigkeitskomponente ersetzt.

$$\begin{aligned}
A_u^d &= \frac{1}{\Delta} [ ((y_4 - y_3) z_2 + (y_2 - y_4) z_3 + (y_3 - y_2) z_4) u_1 \\
&\quad + ((y_3 - y_4) z_1 + (y_4 - y_1) z_3 + (y_1 - y_3) z_4) u_2 \\
&\quad + ((y_4 - y_2) z_1 + (y_1 - y_4) z_2 + (y_2 - y_1) z_4) u_3 \\
&\quad + ((y_2 - y_3) z_1 + (y_3 - y_1) z_2 + (y_1 - y_2) z_3) u_4 ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_u^d &= \frac{1}{\Delta} [ -((x_4 - x_3) z_2 + (x_2 - x_4) z_3 + (x_3 - x_2) z_4) u_1 \\
 &\quad - ((x_3 - x_4) z_1 + (x_4 - x_1) z_3 + (x_1 - x_3) z_4) u_2 \\
 &\quad - ((x_4 - x_2) z_1 + (x_1 - x_4) z_2 + (x_2 - x_1) z_4) u_3 \\
 &\quad - ((x_2 - x_3) z_1 + (x_3 - x_1) z_2 + (x_1 - x_2) z_3) u_4 ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_u^d &= \frac{1}{\Delta} [ ((x_4 - x_3) y_2 + (x_2 - x_4) y_3 + (x_3 - x_2) y_4) u_1 \\
 &\quad + ((x_3 - x_4) y_1 + (x_4 - x_1) y_3 + (x_1 - x_3) y_4) u_2 \\
 &\quad + ((x_4 - x_2) y_1 + (x_1 - x_4) y_2 + (x_2 - x_1) y_4) u_3 \\
 &\quad + ((x_2 - x_3) y_1 + (x_3 - x_1) y_2 + (x_1 - x_2) y_3) u_4 ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_u^d &= \frac{1}{\Delta} [ ((x_3 y_4 - x_4 y_3) z_2 + (x_4 y_2 - x_2 y_4) z_3 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_4) u_1 \\
 &\quad + ((x_4 y_3 - x_3 y_4) z_1 + (x_1 y_4 - x_4 y_1) z_3 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_4) u_2 \\
 &\quad + ((x_2 y_4 - x_4 y_2) z_1 + (x_4 y_1 - x_1 y_4) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_4) u_3 \\
 &\quad + ((x_3 y_2 - x_2 y_3) z_1 + (x_1 y_3 - x_3 y_1) z_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) z_3) u_4 ]
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die  $v$ - und  $w$ -Komponente haben die gleiche Form. Auf eine erneute Auflistung wird deshalb verzichtet. Die Determinante  $\Delta$  ist identisch mit der in Anhang A.1.

### A.3 Koeffizienten in der Interpolationsfunktion für die konvektiven Terme

Die Koeffizienten in der Gleichung

$$u^c(x, y, z) = A_u^c \xi + B_u^c Y + C_u^c Z + D_u^c .$$

entsprechen denen in Anhang A.1. Es müssen nur die Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  durch  $\xi$ ,  $Y$  und  $Z$  ersetzt werden. Es ergeben sich dann folgende Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 A_u^c &= \frac{1}{\Delta^c} [ ((Y_4 - Y_3) \xi_2 + (Y_2 - Y_4) \xi_3 + (Y_3 - Y_2) \xi_4) u_1 \\
 &\quad + ((Y_3 - Y_4) \xi_1 + (Y_4 - Y_1) \xi_3 + (Y_1 - Y_3) \xi_4) u_2 \\
 &\quad + ((Y_4 - Y_2) \xi_1 + (Y_1 - Y_4) \xi_2 + (Y_2 - Y_1) \xi_4) u_3 \\
 &\quad + ((Y_2 - Y_3) \xi_1 + (Y_3 - Y_1) \xi_2 + (Y_1 - Y_2) \xi_3) u_4 ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_u^c &= \frac{1}{\Delta^c} [ - ((X_4 - X_3) \xi_2 + (X_2 - X_4) \xi_3 + (X_3 - X_2) \xi_4) u_1 \\
 &\quad - ((X_3 - X_4) \xi_1 + (X_4 - X_1) \xi_3 + (X_1 - X_3) \xi_4) u_2 \\
 &\quad - ((X_4 - X_2) \xi_1 + (X_1 - X_4) \xi_2 + (X_2 - X_1) \xi_4) u_3 \\
 &\quad - ((X_2 - X_3) \xi_1 + (X_3 - X_1) \xi_2 + (X_1 - X_2) \xi_3) u_4 ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_u^c &= \frac{1}{\Delta^c} [ ((X_4 - X_3) Y_2 + (X_2 - X_4) Y_3 + (X_3 - X_2) Y_4) u_1 \\
 &\quad + ((X_3 - X_4) Y_1 + (X_4 - X_1) Y_3 + (X_1 - X_3) Y_4) u_2 \\
 &\quad + ((X_4 - X_2) Y_1 + (X_1 - X_4) Y_2 + (X_2 - X_1) Y_4) u_3 \\
 &\quad + ((X_2 - X_3) Y_1 + (X_3 - X_1) Y_2 + (X_1 - X_2) Y_3) u_4 ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_u^c &= \frac{1}{\Delta^c} [ ((X_3 Y_4 - X_4 Y_3) \xi_2 + (X_4 Y_2 - X_2 Y_4) \xi_3 + (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) \xi_4) u_1 \\
 &\quad + ((X_4 Y_3 - X_3 Y_4) \xi_1 + (X_1 Y_4 - X_4 Y_1) \xi_3 + (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) \xi_4) u_2 \\
 &\quad + ((X_2 Y_4 - X_4 Y_2) \xi_1 + (X_4 Y_1 - X_1 Y_4) \xi_2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \xi_4) u_3 \\
 &\quad + ((X_3 Y_2 - X_2 Y_3) \xi_1 + (X_1 Y_3 - X_3 Y_1) \xi_2 + (X_2 Y_1 - X_1 Y_2) \xi_3) u_4 ]
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \Delta^c &= (x_1 - x_4) [(y_2 - y_4) (\xi_3 - \xi_4) - (y_3 - y_4) (\xi_2 - \xi_4)] \\
 &\quad + (y_1 - y_4) [(x_3 - x_4) (\xi_2 - \xi_4) - (x_2 - x_4) (\xi_3 - \xi_4)] \\
 &\quad + (\xi_1 - \xi_4) [(x_2 - x_4) (y_3 - y_4) - (x_3 - x_4) (y_2 - y_4)]
 \end{aligned}$$

# Anhang B

## Interpolationsfunktion in den konvektiven Termen

Zur Herleitung der Interpolationsfunktion der Geschwindigkeitskomponenten in den konvektiven Termen wird eine vereinfachte Konvektions-Diffusions-Gleichung aufgestellt. Dazu wird wie in Kapitel 3.3.3 beschrieben ein lokales Koordinatensystem  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  definiert, dessen  $X$ -Richtung der lokalen Hauptströmungsrichtung entspricht. Unter der Annahme, dass innerhalb eines Tetraederelements eine Parallelströmung in  $X$ -Richtung herrscht, kann für die transportierte Größe  $u$  folgende Konvektions-Diffusions-Gleichung formuliert werden :

$$\rho |\vec{v}_{av}| \frac{\partial u}{\partial X} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \right) + S_u \quad . \quad (\text{B.1})$$

Der Quellterm  $S_u$  wird dabei im Fall inkompressibler Strömungsprobleme aus dem Druckgradienten und einer Funktion  $F(X, Y, Z)$  zusammengesetzt

$$S_u = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) F(X, Y, Z)$$

mit

$$F(X, Y, Z) = \frac{X}{N\rho |\vec{v}_{av}|} - \frac{1 - \frac{1}{N}}{4\mu} (Y^2 + Z^2) \quad .$$

Mit den in Kapitel 3.3.3 eingeführten Bezeichnungen

$$X_{max} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4) \quad X_{min} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

und der Maschenreynoldszahl

$$Re_{\Delta} = \frac{\rho |\vec{v}_{av}| (X_{max} - X_{min})}{\mu}$$

---

stellt

$$u(X, Y, Z) = A_u^c \xi + B_u^c Y + C_u^c Z + D_u^c + \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) F(X, Y, Z) \quad (\text{B.2})$$

eine exakte Lösung der Gleichung B.1 dar. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten von der Strömungsrichtung wird dabei mit der Variablen  $\Xi$  berücksichtigt :

$$\xi = \frac{\mu}{\rho |\vec{v}_{av}|} \left( \exp \left( \frac{\text{Re}_\Delta (X - X_{max})}{X_{max} - X_{min}} \right) - 1 \right) .$$

Wird in Gleichung B.1 der Quellterm  $S$  zu Null gesetzt, entspricht B.2 der Lösung der homogenen Konvektions-Diffusions-Gleichung. Der Parameter  $N$  in der Ansatzfunktion B.2 kann nach Wintruff [68] in Abhängigkeit der Maschenreynoldszahl behandelt werden :

$$N = 1 + e^{-C_N \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{\max}}} , \quad C_N = 3.0 .$$

Durch die Anpassung an die lokalen Strömungsverhältnisse erzielt er damit bei Aufschmelz- und Erstarrungsvorgängen bessere Ergebnisse als mit der Ansatzfunktion, die aus der homogenen Betrachtung resultiert.