KBB-Ber. 2
KFK-2

BERICHTE

der

Reaktorgruppe
im Max-Planck-Institut für Physik
Göttingen

Nr. 2

[Kernreaktor-GmbH., Karlsruhe, Bericht No 2.]

[1956]

Druck: Max-Planck-Gesellschaft — Dokumentationsstelle

Bestimmung des Neutronenflusses in einem thermischen Reaktor.

R.SCHULTEN

Die Neutronenproduktion in einem thermischen Reaktor wird durch die Multiplikationskonstante k_{eff}[1] charakterisiert.

Unter k_{eff} versteht man die Anzahl der Neutronen, die in einem thermischen Reaktor bei der Kettenreaktion durchschnittlich entstehen und im Reaktor verbleiben. Der Reaktor wird sich nur dann in einem stationären Zustand befinden, wenn der Multiplikationsfaktor k_{eff} exakt gleich 1 ist. Ist dagegen k_{eff} kleiner als 1, so wird der Neutronenfluß abnehmen, und ist es größer als 1, so wird der Neutronenfluß exponentiell abhängig von der mittleren Lebensdauer der Neutronen zunehmen. Es erweist sich jedoch, daß bei ansteigendem Neutronenfluß der Multiplikationsfaktor k_{eff} nicht konstant bleibt, sondern kleiner wird. Es wird also bei zunehmendem Neutronenfluß und gleichzeitig abnehmendem k_{eff} schließlich ein stationärer Zustand erreicht werden, für den $k_{eff} = 1$ ist. Aus dieser Bedingung lässt sich die Größe des Neutronenflusses ermitteln, wenn bekannt ist, in welcher Weise k_{eff} von dem Neutronenfluß abhängt.

Der Neutronenfluß kann so in zwei Schritten bestimmt werden:

Zunächst muß untersucht werden, in welcher Weise k_{eff} von dem Neutronenfluß ϕ abhängt. Dann liefert die Bedingung des stationären Zustandes: $k_{eff} = 1$ durch einfaches Auflösen dieser Gleichung die Größe des stationären Neutronenflusses ϕ. Und schließlich lässt sich daraus durch eine einfache Beziehung die Gesamtleistung eines Reaktors berechnen.

1. Gründe für die Verminderung der Multiplikationskonstanten.

Für Reaktoren mit natürlichem Uran kann k_{eff} in folgender Weise zusammengesetzt werden:

$$K_{eff} = K_{\infty} - \delta K_A - \delta K_V - \delta K_T - \delta K_E - \delta K_K \qquad (1)$$

Dabei ist k_{eff} der Multiplikationsfaktor des Reaktors für den gedachten Fall einer unendlichen Ausdehnung und einer Neutronenflußdichte Null. Dieser Faktor kann allein aus der inneren Gitterstruktur bestimmt werden.

δk_R ist derjenige Anteil an Neutronen, der nach außen durch die Oberfläche entweicht. Er ist von ϕ weitgehend unabhängig. (Eine genaue Untersuchung zeigt, daß höchstens ein Einfluß von wenigen Prozent möglich ist). δk_R ist aus den äußeren Massen des Reaktors elementar bestimmbar.

δk_V ist der Bruchteil von Neutronen, der durch die bei der Spaltung des Urans entstehenden Spaltprodukte eingefangen wird. Dieser Prozeß, der als Vergiftung bezeichnet wird, kann trotz der geringen Konzentration der Spaltprodukte wegen ihrer teilweise extrem großen Einfangquerschnitte für Neutronen die Kettenreaktion empfindlich stören.

Mit δk_T ist der Bruchteil von Neutronen gemeint, der aus dem Zyklus der Kettenreaktion infolge der Temperaturerhöhung von Uran und Moderator zusätzlich ausgeschieden wird. Hier wirkt sich vor allem die Vergrößerung der Resonanzeinfangwahrscheinlichkeit durch den Doppler-Effekt aus. Ferner wird δk_T durch eine Abweichung der Einfangquerschnitte für thermische Neutronen von der 1/v-Abhängigkeit und eine Veränderung der Dichte des Reaktormaterials bei Temperaturerhöhung beeinflusst.

δk_E ist eine Verminderung des Multiplikationsfaktors, die auf die Erschöpfung des U^{235}-Gehaltes im Uran zurückzuführen ist. Es wird zwar aus dem anwesenden U^{238} als neuer Brennstoff Pu^{239} erzeugt, aber die Produktionsrate (Anzahl der erzeugten Plutoniumkerne dividiert durch Anzahl der verbrauchten Uran^{235}-Kerne) lässt sich in den meisten thermischen Reaktorsystemen nicht größer oder gleich 1 machen[2)]. Es kommt hinzu, daß in thermischen Reaktoren das Plutonium ein schlechterer Brennstoff als das Uran^{235} ist; ersetzt man nämlich U^{235} durch Pu^{239}, so erhält man einen kleineren Multiplikationsfaktor. δk_E ist von dem Zeitintegral des Neutronenflusses abhängig, in jedem Betriebszeitpunkt also eine vorgegebene Größe, die vom Alter des Reaktors und nicht von der Neutronenflußdichte abhängt.

δk_K sei diejenige Verminderung des Multiplikationsfaktors, die durch die Kontrollstäbe bzw. in den Reaktor eingebrachte Stoffe (Isotopenbestrahlung) verursacht wird.

Es zeigt sich, daß die Anteile δK_A , δK_E , δK_K und K_∞ des Multiplikationsfaktors nicht vom Neutronenfluß abhängen. Es sind noch die Anteile δK_V und δK_T zu untersuchen.

2. Neutronenverluste durch Vergiftung.

Unter den Spaltprodukten gibt es zwei Kernsorten, die wegen ihres außerordentlichen Absorptionsquerschnittes für Neutronen die Kettenreaktion empfindlich stören können. Es handelt sich um die Kerne Xe^{135} und Sm^{149}, deren Absorptionsquerschnitte, Häufigkeit unter den Spaltprodukten (in %) und Halbwertszeit (Beta-Zerfall) in einer Tabelle zusammengestellt sind:

	Absorptionsquerschnitt (σ_a)	Häufigkeit (γ)	Halbwertszeit ($\frac{\ln 2}{\lambda}$)
Xe^{135}	$3{,}5\cdot 10^6$ b	5,9 %	9,2 h
Sm^{149}	$5{,}3\cdot 10^4$ b	1,4 %	stabil

Aus der Literatur[1)] entnimmt man für die Verminderung des Multiplikationsfaktors durch Xe^{135}-Vergiftung:

$$\delta K_V(Xe^{135}) = f\cdot\gamma\cdot\frac{\sigma_a\Phi}{\sigma_a\Phi+\lambda}\,\frac{\Sigma_f}{\Sigma_u} \tag{2}$$

Bezeichnungen:

f = thermische Ausnutzung des Reaktors[1)]
γ = Häufigkeit des Xe^{135}
σ_a = thermischer Absorptionsquerschnitt
λ = Beta-Zerfallskonstante des Xe^{135}
Σ_f = makroskopischer Absorptionsquerschnitt des Urans für Spaltung
Σ_u = makroskopischer Absorptionsquerschnitt des Urans für thermische Neutronen

Der gleiche Ausdruck lässt sich auch für die Sm^{149}-Vergiftung ableiten, wobei man allerdings wegen der Stabilität von Sm^{149} die Zerfallskonstante λ = 0 setzen muß:

$$\delta k_r (Sm^{149}) = f \cdot \gamma \cdot \frac{\Sigma_f}{\Sigma_u} \qquad (3)$$

Die Verminderung des Multiplikationsfaktors durch die Sm^{149}-Vergiftung ist also ein konstanter Betrag, der lediglich von der Zusammensetzung des Brennstoffes und der thermischen Ausnutzung abhängt. Verwendet man natürliches Uran als Brennstoff, dann wird diese Konstante etwa 0,006 betragen.

3. Neutronenverluste durch Temperaturerhöhung.

Für alle praktischen Fälle lässt sich die Verkleinerung des Multiplikationsfaktors bei Temperaturerhöhung darstellen durch:

$$\delta k_T = \Gamma T \qquad (4)$$

T ist hier die mittlere Temperatur der Uranstäbe, bezogen auf die Außentemperatur, die gleich Null gesetzt wurde, und Γ der Temperaturkoeffizient des Reaktors.

Der Temperaturkoeffizient des Reaktors berücksichtigt außer der Temperaturerhöhung des Urans auch die des Moderators, die eine Funktion der Urantemperatur und des Kühlsystems ist. Γ hängt also in recht komplizierter Weise von der inneren Struktur des Reaktors, seiner Größe und seiner Kühlanlage ab. Je nach dem Aufbau des Reaktors kann Γ sehr verschiedene Werte annehmen. Aus der Literatur sind folgende Zahlen bekannt geworden:

Graphitreaktoren:	$\Gamma \approx$	2 bis $3 \cdot 10^{-5}/°C$
D_2O-Reaktoren:	$\Gamma \approx$	$10^{-4}/°C$
Water-Boyler:	$\Gamma \approx$	$10^{-3}/°C$
CP5(D_2O und angereicherter Brennstoff)	$\Gamma \approx$	$5 \cdot 10^{-2}/°C$

Auch negative Temperaturkoeffizienten sind denkbar; sie müssen aber aus Sicherheitsgründen sorgfältig vermieden werden, da allein der Neutronenverlust bei Temperaturerhöhung in Unglücksfällen[3] das exponentielle Anwachsen des Neutronenflusses in genügend kurzer Zeit abstoppen kann. (Der Xe^{135}-Vergiftungseffekt wirkt sich erst nach 5 bis 8 Stunden aus).

Nach der Theorie der Wärmeübertragung ist die mittlere Temperatur der Uranstäbe mit der Leistung und der Kühlmitteltemperatur auf folgende Weise gekoppelt[4]:

$$Q = \alpha \cdot F(T-\Theta) = j c_p \Theta e \qquad (5)$$

Bezeichnungen:
Q = Leistung
α = Wärmeüberführungszahl[4]
F = Gesamtoberfläche der Uranstäbe
Θ = mittlere Temperatur des Kühlmittels
Θ_e = Temperatur des Kühlmittels bei Verlassen des Reaktors
j = Kühlstrom
c_p = spezifische Wärme des Kühlmittels.

Nimmt man an, daß der Neutronenfluß und die zu ihm proportional erzeugte Leistung in den Uranstäben näherungsweise durch eine Cosinusverteilung gekennzeichnet ist, so folgt außerdem, daß die mittlere Temperatur des Kühlmittels halb so groß ist wie ihre Austrittstemperatur[4]:

$$\Theta = \frac{1}{2} \Theta e \qquad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) können benutzt werden, um in die Gleichung (4) statt der Temperatur die Leistung des Reaktors einzuführen:

$$\delta k_T = \frac{\Gamma Q}{2 J c_p} \qquad mit: \; J = \frac{j}{1 + \frac{2 j c_p}{\alpha F}} \qquad (7)$$

α ist von j abhängig und verhält sich wie $(j)^{0,8}$ [4], so daß im letzten Ausdruck der zweite Summand unter dem Bruchstrich praktisch konstant ist.

Die Gleichung (7) ist auch für Reaktoren mit flüssigem Brennstoff gültig. In diesem Falle ist der Brennstoff gleichzeitig das Wärmetransportmittel, so daß der Ausdruck $\alpha F \to \infty$ geht. Für die Gleichung (8) erhält man dann:

$$J = j \tag{8}$$

Es bleibt nur noch die Leistung Q durch den mittleren Neutronenfluß auszudrücken[3]:

$$Q = V \Sigma_f \phi E_{sp} \tag{9}$$

Bezeichnungen:

V = Gesamtvolumen des Urans

E_{sp} = 180 MeV = Energie der Uranspaltung abzüglich der Neutronenenergie[1].

4. Bestimmung der Neutronenflußdichte aus der Bedingung für den stationären Zustand eines Reaktors.

Im stationären Zustand gilt:

$$\begin{aligned} K_{eff} - 1 &= K_\infty - \delta K_R - \delta K_E - \delta K_r(Sm^{149}) - \delta K_r(Xe^{135}) - \delta K_T - 1 \\ &= \Delta K - \delta K_r(Xe^{135}) - \delta K_T = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

In der zweiten Zeile sind die von ϕ unabhängigen Summanden in dem Ausdruck Δk zusammengefasst. Das ist der Anteil des Multiplikationsfaktors, der durch die Xe^{135}-Vergiftung und den Temperatureffekt kompensiert wird. Setzt man die gewonnenen Ausdrücke für δK_r (Xe^{135}) und δK_T ein, so erhält man:

$$\Delta K - \frac{\Gamma C}{2 J c_p} \phi - \frac{a \phi}{1 + b\phi} = 0 \tag{11}$$

Hier wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$C = V \Sigma_f E_{sp} \qquad a = f \cdot \gamma \cdot \frac{\sigma_a}{\lambda} \frac{\Sigma_f}{\Sigma_u} \quad ; \quad b = \frac{\sigma_u}{\lambda}$$

Für ϕ ergibt sich durch Auflösung der Gleichung (11):

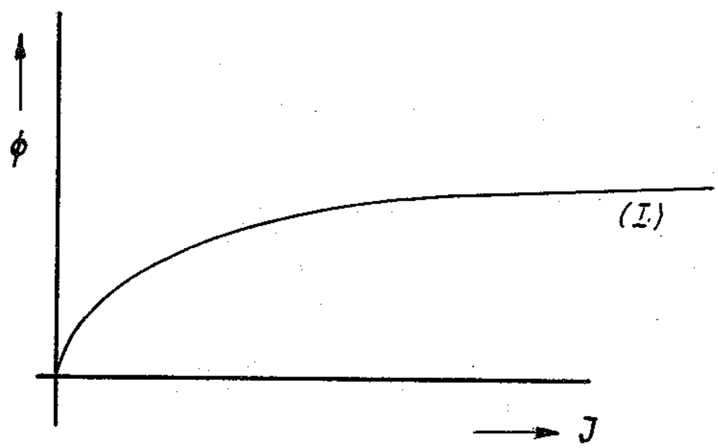
$$\phi = \frac{1}{2b} \left\{ \sqrt{\frac{8Jc_p \cdot b}{\Gamma C}\,\Delta k + \left(1 + (a - b \cdot \Delta k)\frac{2Jc_p}{\Gamma C}\right)^2} - \left(1 + (a - b \cdot \Delta k)\,\frac{2Jc_p}{\Gamma C}\right) \right\} \tag{12}$$

Es interessiert vor allem die Frage, wie lässt sich bei vorgegebener Reaktorgröße und -struktur, bei einem bestimmten Betriebsalter des Reaktors (also bei gegebenem Δk) der Neutronenfluß als Funktion des Kühlstroms bestimmen. Wir unterscheiden drei Fälle:

I. $a - b \cdot \Delta k > 0 \qquad \Delta k < \frac{a}{b}$ ($\approx$ 0,028 für natürl.Uran)

In diesem Falle steigt der Neutronenfluß zuerst mit der Wurzel des Kühlstroms an und nähert sich dann asymptotisch dem Wert:

$$\phi_{asym.} = \frac{\Delta k}{a - \Delta k \cdot b} \tag{13}$$



Die Zeichnung 1) zeigt den Verlauf des Neutronenflusses ϕ in Abhängigkeit vom Kühlstrom J (in willkürlichen Einheiten).
Bei Graphitreaktoren liegt wegen ihrer schlechten Neutronenökonomie immer der Fall I vor. Daher ist der maximal erreichbare Neutronenfluß

eines solchen Reaktors durch den angegebenen asymptotischen Grenzwert nach oben begrenzt. Eine Steigerung des Kühlstroms kann von einem bestimmten Wert an nur noch den Zweck haben, die Temperatur der Uranstäbe zu erniedrigen, was manchmal aus Materialgründen erforderlich ist.

II. $a - \Delta k \cdot b = 0$ $\Delta k = \frac{a}{b}$

Der Neutronenfluß steigt für größere Werte von J mit der Wurzel des Kühlstroms an (s. Bild 2)

III. $a - \Delta k \cdot b < 0$ $\Delta k > \frac{a}{b}$

Im letzten Fall wächst der Neutronenfluß zunächst mit der Wurzel des Kühlstroms und steigt dann linear an. Reaktoren mit angereichertem Material (U^{235}) und D_2O-Reaktoren können mit einem Δk arbeiten, das in diesen Bereich fällt.

Bild 2

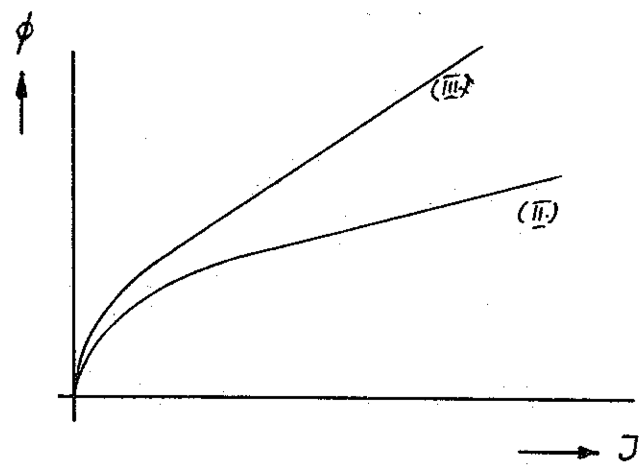


Bild 2 stellt den Neutronenfluß in Abhängigkeit vom Kühlstrom für die Fälle II und III dar.

5. Rechengenauigkeit.

Die Genauigkeit der Gleichung (12) für den Neutronenfluß ist durch die Unsicherheit des Temperaturkoeffizienten Γ gegeben. Dieser Koeffizient wird am besten experimentell bestimmt, da die theoretischen Berechnungen bis heute sehr ungenau sind[1] (man muß dabei sicher mit einem Fehler von 20 bis 30 % rechnen). Es kommen noch kleinere Fehler durch die Unsicherheit der Bestimmung von Δk und durch die Abweichung des Neutronenflusses von der Cosinusverteilung hinzu, die aber gegenüber der Ungenauigkeit des Temperaturkoeffizienten vernachlässigt werden können.

Wegen der Unsicherheit von Γ und Δk ist die exakte Behandlung der vorliegenden Probleme mit Hilfe einer nichtlinearen Differentialgleichung wenig sinnvoll, da der mathematische Aufwand bei weitem nicht der Genauigkeit der Ergebnisse entspricht. Außerdem ist die dabei errechnete Verteilung von ϕ praktisch immer durch den Einfluß der Kontrollstäbe und anderer Absorber gestört.

Zusammenfassend kann man bemerken, daß die vorliegende Methode zwar keine genauen Resultate liefern kann, aber eine gute Hilfe ist, wenn man mit einfachen Mitteln die mittlere Neutronenflußdichte und nach Gl.(13) auch die Gesamtleistung eines Reaktors in einer Überschlagsrechnung abschätzen will.

Literatur

1.) Glasstone und Edlund; The Elements of Nuclear Reactor Theory

2.) M.Bogaardt and M.Bustraan; Nucleonics Dez. 1954, p. 32

3.) H.Gaus und R.Schulten; Zs.f.Natf. 9a, 11, 1954

4.) E.R.Gilliland et al. in The Science and Engineering of Nuclear Power, Addison-Wesley-Press 1949