

## BERICHTE DER REAKTORGRUPPE

der Physikalischen Studiengesellschaft Düsseldorf m. b. H.

im

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PHYSIK

G O T T I N G E N

KBB Nr. 8 (56/41)

28. Juni 1956

Über die Wirksamkeit von Abschaltstäben thermischer Reaktoren  
im Hinblick auf deren Durchmesser, Anzahl und Anordnung.

W. HÄFELE

I. Einleitung

Bei dem Entwurf eines thermischen Reaktors entsteht die Aufgabe, Abschalt- und Regelstäbe so zu dimensionieren, daß ein sicheres Arbeiten gewährleistet werden kann. Dabei entsteht die Frage, welche Anzahl von Stäben vorzusehen ist und was für einen Durchmesser sie haben sollen. Insbesondere fragt man sich, was wirksamer sein kann: Die Erhöhung der Stabzahl oder die Vergrößerung des Durchmessers. Auch erhebt sich die Frage, in welcher Anordnung die Stäbe am besten anzubringen sind.

Nun findet man in der zugänglichen Literatur eine ganze Reihe von solchen Angaben. Im Buch von Glasstone - Edlund "The Elements of Nuclear Reactor Theory" findet man die Behandlung des Problems eines einzelnen Stabes in der Achse eines zylindrischen Reaktorkernes mit Hilfe der Ein- und Zweigruppentheorie. Mit der Eingruppentheorie wird auch der Fall behandelt, daß der Stab exzentrisch angebracht ist. Im Reaktorhandbuch II, S.602 ff. findet sich eine Kurve über die Wirksamkeit von 4 symmetrisch angeordneten Abschaltstäben als Funktion des Abstandes vom Zentrum bei einem einzigen Verhältnis von wirksamen Durchmesser des Abschaltstabes zum Gesamtradius des Reaktors. Offen jedoch bleibt die Frage, wie sich die Wirksamkeit mit Anzahl und Durchmesser ändert, - wenn man von Abschätzungen absieht. Diese Frage soll hier mit Hilfe der Eingruppentheorie für zylindrische

Reaktoren behandelt werden. Dabei wird angenommen, daß die Stäbe ganz eingefahren werden, also ganz durch den Reaktorkern hindurchgehen.

## II. Allgemeine Gleichungen

In den folgenden Überlegungen behandeln wir Reaktortypen, deren Reflektorsparnis  $\delta$  im Verhältnis zum Gesamtradius  $R_w$  so klein ist, daß man die Flußverhältnisse in genügend guter Näherung wiedergibt, wenn man einen Reaktor ohne Reflektor mit dem Radius  $R = R_w + \delta$  betrachtet. Da wir mit der Eingruppentheorie arbeiten wollen, haben wir es also allein mit der Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta \phi + \beta^2 \phi = 0$$

zu tun.

Wir gehen in die Gleichung (1) mit dem üblichen Separationsansatz (2) ein:

$$(2) \quad \phi = \phi_r(r, \varphi) \phi_z(z)$$

Hier berücksichtigen wir nur die Flußverteilungsänderung in einem horizontalen Schnitt  $z = \text{konst.}$ , so daß wir aus (1) und (2) erhalten:

$$(3) \quad \Delta_r \phi_r + \beta_r^2 \phi_r = 0$$

Dabei gilt:

$$(3a) \quad \Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$(3b) \quad \beta^2 = \beta_r^2 + \beta_z^2$$

$\beta_r$  und  $\beta_z$  sind die Formfaktoren in radialer bzw. vertikaler Richtung,  $\beta$  ist der durch (3b) erklärte totale Formfaktor. Neben (3) gilt die Gleichung:

$$(4) \quad \Delta_z \phi_z^2 + \beta_z^2 \phi_z = 0$$

mit

$$(4a) \quad \Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Im folgenden wollen wir für  $\phi_r$  wieder  $\phi$  schreiben, da wir nur die Funktion  $\phi_r$  untersuchen werden. Gleichung (3) hat die allgemeine Lösung:

$$(5) \quad \phi(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ A_m J_m(\beta_r r) + B_m N_m(\beta_r r) \right] e^{im\varphi}$$

$r$  und  $\varphi$  sind die zu einem geeignet gewählten Zentrum gehörigen Polarkoordinaten,  $J_m$  ist die Bessel'sche Funktion  $m$ -ter Ordnung.  $N_m$  ist die Neumann'sche Funktion  $m$ -ter Ordnung.  $J_m$  ist im Nullpunkt regulär und hat dort für ganzzahliges  $m$  die Entwicklung

$$(6) \quad J_m(x) = \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m + \quad \begin{array}{l} m \geq 0 \\ \text{(für } m < 0 \text{ beachte (10))} \end{array}$$

$N_m$  ist im Nullpunkt nicht regulär. Für ganzzahliges  $m$  gilt

$$N_m(x) = -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \quad \begin{array}{l} m \geq 0 \\ \text{(für } m < 0 \text{ beachte (10))} \end{array}$$

(7)

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} + \dots$$

Dabei ist  $\gamma$  die Euler'sche Konstante.

Bei der Behandlung unserer Fragestellung werden wir fortgesetzt das sogenannte Additionstheorem der Zylinderfunktionen verwenden müssen. Deshalb geben wir es hier ganz allgemein an, bevor wir in die detaillierten Untersuchungen eintreten. Dabei beziehen wir uns z.B. auf G.N.Watson "A Treatise on the Theory of Bessel Functions" S. 358 ff.  $Z_\nu$  bezeichnet eine beliebige Zylinderfunktion  $\nu$ -ter Ordnung, also entweder  $J_\nu$  oder  $N_\nu$  oder eine Linear-Kombination von beiden. Die Größen  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $R$ , und  $z$  möge man aus nebenstehender Skizze entnehmen. Das Additionstheorem gibt an, wie eine Zylinderfunktion im Aufpunkt  $P$ , dessen Polarkoordinaten vom Punkt  $O$  ausgehen, vom Punkt  $O'$  aus beschrieben wird.

Es gilt für  $z < R$

$$(8) \quad e^{i\nu\psi} Z_\nu(\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z_{\nu+m}(R) J_m(z) e^{im\varphi}$$

Fig. 1

für  $z > R$  gilt:

$$(9) \quad e^{i\nu\psi} Z_\nu(\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{\nu+m}(R) Z_m(z) e^{im\varphi}$$

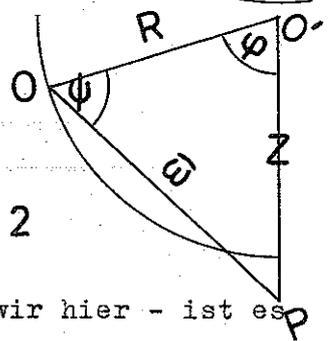
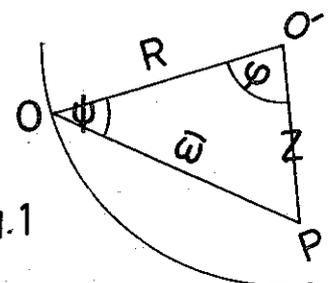
Fig. 2

für ganzzahlige  $\nu$  - und nur diesen Fall betrachten wir hier - ist es gleichgültig, ob wir den Winkel  $\varphi$  oder  $2\pi - \varphi$  einführen, da für ganzzahliges  $\nu$  (für das wir den Buchstaben  $n$  einführen) gilt:

$$(10) \quad Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x)$$

Wir stellen weiter fest, daß für  $Z_n = J_n$  die Ausdrücke (8) und (9) ineinander übergehen. Das ist verständlich, weil  $J_n$  im Nullpunkt regulär ist. Es gilt ohne Einschränkung

$$(11) \quad e^{in\psi} J_n(\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n+m}(R) J_m(z) e^{im\varphi}$$



Bei der Neumann'schen Funktion bleibt es bei der Einschränkung  $Z \leq R$ . Für  $z = R$  sind nämlich die Stellen  $\varphi = 0$  zu meiden, denn dort hat  $N_n$  einen Pol. Für  $\varphi \neq 0$  kann entweder die eine oder die andere Darstellung gewählt werden.

### III. Ein exzentrischer Stab

Wir behandeln jetzt folgendes Randwertproblem: Vorgegeben sei das zweifach zusammenhängende Gebiet  $\Omega$

(s. Fig.3). In ihm soll die Differentialgleichung (3) gelöst werden, wobei  $\phi$  auf dem gesamten Rand  $\mathcal{L}_0$  und  $\mathcal{L}_1$  verschwinden soll. Der Mittelpunkt des Reaktors heisse 0, der Mittelpunkt des Abschaltstabes  $0'$ . R sei der effektive Radius des Reaktors,

$\rho$  der wirkliche Radius des Abschalt- bzw. Regelstabes,

$\rho_0$  der effektive Radius. Der Abstand des Mittelpunktes des Abschaltstabes vom Mittelpunkt des Reaktors sei a. Die von dem Mittelpunkt  $0'$  ausgehenden Polarkoordinaten bezeichnen wir mit  $r_1, \varphi_1$ .

Wir machen an dieser Stelle ein für alle Mal die Voraussetzung:

$$(12) \quad \frac{\beta_r \rho}{2} \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\beta_r \rho_0}{2} \ll 1$$

Ihr Sinn wird in den folgenden Ausführungen klar werden.

Um die Bedingung

$$(13) \quad \phi = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{L}_1$$

einfach erfüllen zu können, setzen wir an:

$$(14) \quad \phi(r_1, \varphi_1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ A_m J_m(\beta_r r_1) + B_m N_m(\beta_r r_1) \right] e^{im\varphi_1}$$

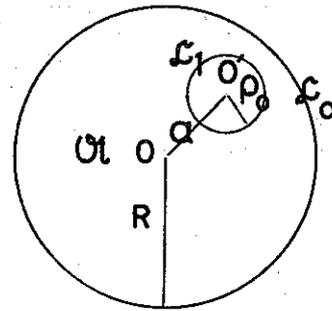


Fig. 3

Dann ergibt sich aus der Randbedingung (13)

$$(15) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (A_m J_m(\beta_r \rho_0) + B_m N_m(\beta_r \rho_0)) e^{im\varphi_1} = 0$$

Das führt auf die Bedingung

$$(16) \quad B_m = -A_m \frac{J_m(\beta_r \rho_0)}{N_m(\beta_r \rho_0)}$$

mit (12) folgt aus (6) und (7) für  $m \neq 0$

$$B_m = A_m \frac{\pi}{m!(m-1)!} \left(\frac{\beta_r \rho_0}{2}\right)^{2m} \quad (m \neq 0)$$

d.h.

$$(17) \quad B_m = A_m \left(\frac{\beta_r \rho_0}{2}\right)^{2m} \quad (m \neq 0)$$

Unter Zuhilfenahme dieses Formalismus werden wir die Randbedingungen (14) nicht befriedigen. Wir haben Gleichung (17) nur abgeleitet, um eine allgemeine Relation zwischen den Größen  $B_m$  und  $A_m$  zu besitzen, die wegen (12) weiter unten sofort eine bestimmte Vernachlässigung nahelegt.

Die Bedingung:

$$(18) \quad \varphi = 0 \quad \text{auf } \mathcal{L}_0$$

untersuchen wir, indem wir die Theoreme (8), (9) und (11) anwenden.  
Wir erhalten:

$$\Phi(r_0 \varphi_0) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (A_p J_{m+p}(\beta_r a) J_p(\beta_r r_0) + B_p J_{m+p}(\beta_r a) N_p(\beta_r r_0)) e^{ip\varphi_0}$$

(18) bedingt die Gleichungen:

$$(19) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [A_m J_p(\beta_r R) + B_m N_p(\beta_r R)] J_{m+p}(\beta_r a) = 0$$

für alle p

Mit (16) und (19) sind die beiden Sätze von unendlich vielen Konstanten  $A_m$  und  $B_m$  völlig bestimmt. Dadurch ist das Problem im Prinzip streng gelöst. Wir berücksichtigen nun (12), lesen Gleichung (16) in der Näherung (17) und setzen wegen (17)

$$B_0 = 1 \quad (m=0)$$

(20)

$$B_m = 0 \quad (m \neq 0)$$

$B_0 = 1$  ist im Sinne einer Normierung zu verstehen (das ganze Problem ist linear und hat einen Faktor frei). (19) legt jetzt folgende Transformationen nahe:

$$(21) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m J_{m+p}(\beta_r a) = \bar{A}_p$$

Wir erhalten:

$$\bar{A}_p J_p(\beta_r R) + N_p(\beta_r R) J_p(\beta_r a) = 0 \quad \text{für alle } p$$

d.h.

$$(19a) \quad \bar{A}_p = - \frac{N_p(\beta_r R)}{J_p(\beta_r R)} J_p(\beta_r a)$$

Nun schreiben wir den allgemeinen Ausdruck für  $\phi(r, \varphi)$  noch einmal an. Dabei beschreiben wir die Terme, die mit  $A_m$  behaftet sind, von 0 aus, dagegen den einen Singularitätsterm weiterhin von 0' aus

und erhalten:

$$(13a) \quad \phi = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_p J_p(\beta_r r_0) e^{ip\psi_0} + N_0(\beta_r r_1)$$

In dieser gemischten Form ergibt die Bedingung (14) jetzt die kritische Gleichung für den Eigenwert  $\beta_r$ . Wir geben sie unter Verwendung von (19a) an, indem wir im Summenterm einfach  $r_0 = a$  und  $\psi_0 = 0$  setzen, was wegen (12) erlaubt ist:

$$(22) \quad -N_0(\beta_r \rho_0) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{N_p(\beta_r R)}{J_p(\beta_r R)} J_p^2(\beta_r a) = 0$$

Hätten wir, anstatt  $\psi = 0$  für den effektiven Radius  $\rho_0$  des Stabes zu verlangen, die genauere Bedingung

$$(14a) \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi}{d} \quad \left( d \text{ ist die Extrapolationslänge, wie sie als Funktion von } \rho \text{ etwa im Reaktorhandbuch II, S. 395 zu finden ist.} \right)$$

auf dem wirklichen Radius  $\rho$  verlangt, so hätten wir an Stelle von (22) erhalten:

$$(22a) \quad -N_0(\beta_r \rho) - \beta_r d N_1(\beta_r \rho) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{N_p(\beta_r R)}{J_p(\beta_r R)} J_p^2(\beta_r a) = 0$$

Aus (22) und (22a) folgt mit (6) und (7) in Übereinstimmung mit dem Reaktorhandbuch Band II, S. 606, daß der effektive Radius des Stabes sich aus dem wirklichen wie folgt bestimmt:

$$N_0(\beta_r \rho_0) = N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d N_1(\beta_r \rho)$$

d.h.

(23)

$$\rho_0 = \rho e^{-\frac{d}{\rho}}$$

für große  $\rho$  ergibt sich die bekannte Formel

$$(23a) \quad \rho_0 = \rho - d$$

Der Ausdruck (22a) findet sich bereits bei Glasstone-Edlund "The Elements of Nuclear Reactor Theory" S.329 Formel (11,42,2), wobei dort die Größe  $d$  infolge eines Druckfehlers da auftritt, wo  $\frac{1}{d}$  stehen müßte.

(22a) wurde hier noch einmal auf etwas andere Art und Weise ermittelt, weil von der hier vorliegenden Betrachtungsweise aus unmittelbar der Zugang zu den Problemen mehrerer Abschaltstäbe möglich ist. Zu dem Ende untersuchen wir jetzt die erhaltenen Relationen auch einmal auf ihren physikalischen Gehalt hin. Gleichung (2) können wir auch als Gleichung zur Bestimmung von skalaren Eigenschwingungen  $\phi$  auffassen. Die Terme  $A_m$  und  $B_m$  sind dann die Amplituden der Oberwellen, die angeregt werden können, wenn der Schwingungsausschlag der entstehenden Gesamtschwingung sich merklich über den Durchmesser des Stabes ändert. Im Gegensatz zu Beugungsvorgängen mit von außen anregender Grundschwingung verschwinden hier aber trotz der Bedingung (12) nicht die Größen  $A_m(m=0)$ .

(Vergleiche: W.v.Ignatowski, Ann.d.Physik 44 (1914),S.369 ff.  
F.Zaviska, Ann.d.Physik 40 (1913),S.1023 ff.  
R.Honerjäger, Ann.d.Physik 6.Folge,Band 4,(1948)  
W.Häfele, Diplomarbeit (1950), TH München,(unveröffentl.)

Um die Randbedingung (18) erfüllbar zu machen, bleiben gewisse Oberwellenamplituden  $A_m$  übrig. Sie finden sich im Summenterm der Gleichung (22) bzw. (22a) wieder. Je größer die Oberwellenanregung ist, desto kleiner ist der für die Anregung der Grundwelle verbleibende Anteil, umso schlechter ist die Wirkung des Abschaltstabes. Bei einem exzentrischen Stab wird der Summenterm für  $a = 0$  zu 0, also dann, wenn der Stab konzentrisch sitzt, ist seine Wirkung am größten. Diese Erkenntnis ist für den Fall eines Stabes trivial, wird aber beim Übergang zu mehreren Stäben uns helfen, die Verhältnisse besser zu durchschauen.

IV. Vier symmetrisch angeordnete Stäbe

Wir geben nun das mehrfach zusammenhängende Gebiet  $\mathcal{B}$  vor, das vier symmetrisch angeordneten Stäben entspricht.

In  $\mathcal{B}$  soll (3) gelten,

auf  $\mathcal{L}_0$  gelte:

$$\phi = 0$$

und auf  $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_4$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi}{d}$$

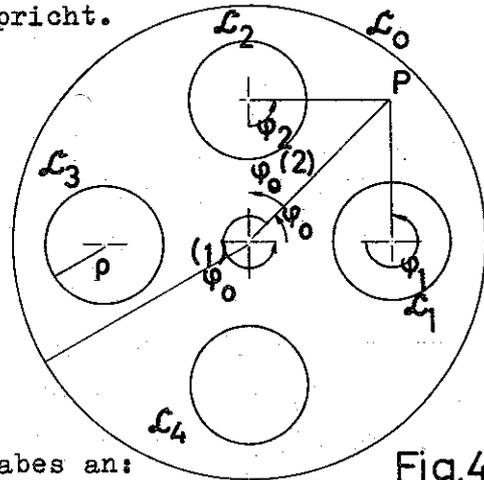


Fig.4

Wir setzen im Zentrum eines jeden Stabes an:

$$(24) \quad \phi_i(r_i, \varphi_i) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [A_m J_m(\beta_r r_i) + B_m N_m(\beta_r r_i)] e^{im\varphi_i} \quad i=1 \dots 4$$

$$(25) \quad \phi_{\text{ges}} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$

Aus Symmetriegründen sind die  $A_m, B_m$  für jeden Stab gleich, sie müssen also nicht indiziert werden. Bei einem exzentrischen Stab galt die Relation:

$$B_m \sim A_m \left( \frac{\beta_r \rho}{2} \right)^{2m} \quad (m > 0)$$

Für kleine  $\frac{\beta_r \rho}{2}$  war allein  $B_0$  zu berücksichtigen. Das entsprach dem Umstand, daß die dem betrachteten Diffusionsproblem analoge Eigenschwingung über den Durchmesser eines Stabes ihren Schwingungsaus-  
schlag nur wenig änderte. So lange der gegenseitige Abstand der Stäbe - hier  $a\sqrt{2}$  - noch wesentlich größer ist als der Durchmesser eines Stabes, können wir auch hier setzen. (Vergleiche auch die zitierte Diplomarbeit von W.Häfele):

$$(20a) \quad B_0 = 1 \quad (m=0)$$

$$B_m = 0 \quad (m \neq 0)$$

Analog dem Vorgehen bei einem exzentrischen Stab beschreiben wir die Terme  $A_m$  vom Zentrum aus, die  $B_o$  Terme lassen wir von ihren jeweiligen Ursprungs koordinaten abhängen. Wir erhalten mit (8), (9) bzw. (11) unter Verwendung der Transformation (21)

$$(26) \quad \Phi = \sum_{i=1}^4 \left\{ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_p J_p(\beta_r r_o) e^{ip\varphi_o^{(i)}} + N_o(\beta_r r_i) \right\}$$

Die Winkel  $\varphi_o^{(i)}$  sind jeweils um  $\frac{\pi}{2}$  gegeneinander versetzt, weil jeder Winkel  $\varphi_o^{(i)}$  zwar im Zentrum gezählt wird, aber seinen Bezugsstrahl in der Verbindungsachse zum i-ten Stab hat. Wir beachten, daß man aus den Figuren 1 bzw. 2 und 4 leicht die Relationen

$$(27) \quad \begin{array}{ll} (2) & \varphi_o = \frac{\pi}{2} - \varphi_o \\ (3) & \varphi_o = \pi - \varphi_o \\ (4) & \varphi_o = \frac{3\pi}{2} - \varphi_o \\ (1) & \varphi_o = 2\pi - \varphi_o \end{array}$$

ablesen kann. Mit (27) erhalten wir aus (26)

$$\Phi = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_p J_p(\beta_r r_o) e^{ip\varphi_o} \left[ (+1)^p + (+i)^p + (-1)^p + (-i)^p \right] + \sum_{j=1}^4 N_o(\beta_r r_j)$$

Der Klammerausdruck ist für  $p = 4q$  gleich 4, sonst ist er Null. Wie es sein muß, kann sich nur die 0,4,8,12te usw. Oberwelle ausbilden. Wir erhalten:

$$(28) \quad \Phi = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_{4q} J_{4q}(\beta_r r_o) e^{i4q\varphi_o} 4 + \sum_{i=1}^4 N_o(\beta_r r_i)$$

Wir vergleichen den Ausdruck (28) mit (13a). Beim Summenterm taucht der Faktor 4 auf, und es werden auch nur die 0,4,8,12te usw. Oberwellen angeregt. Statt des Ausdrucks  $N_o(\beta_r r_i)$  stehen 4 Terme mit den Mittelpunkten der 4 Stäbe als Nullpunkte da. Sonst hat sich nichts verändert.

Gehen wir an die Erfüllung der Bedingung  $\phi = 0$  auf  $\mathcal{L}_0$ , so ergibt sich, wie man sofort einsieht, aus Symmetriegründen:

$$4 [\bar{A}_{4q} J_{4q}(\beta_r R) + N_{4q}(\beta_r R) J_{4q}(\beta_r a)] = 0 \quad (\text{für alle } q)$$

Bis auf den gemeinsamen Faktor 4 hat sich gegenüber dem Falle eines Stabes die Form der Gleichung nicht geändert. Deshalb werden wir auch hier auf die (19a) entsprechende Bedingung für  $A_{4q}$  geführt:

$$(29) \quad \bar{A}_{4q} = - \frac{N_{4q}(\beta_r R)}{J_{4q}(\beta_r R)} J_{4q}(\beta_r a)$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi}{d} \quad \text{auf } \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$$

reduziert sich aus Symmetriegründen auf nur eine Gleichung, die unter Verwendung von (29) zur kritischen Gleichung für  $\beta_r$  wird.

Es gilt, indem wir  $\phi_0 = 0$  und  $r_0 = a$  setzen unter Bezugnahme auf (12):

$$(30) \quad -N_0(\beta_r \rho) - \beta_r d N_1(\beta_r \rho) + 4 \sum_{g=-\infty}^{+\infty} \frac{N_{4g}(\beta_r R)}{J_{4g}(\beta_r R)} J_{4g}(\beta_r a)$$

$$- 2 N_0(\beta_r a \sqrt{2}) - N_0(\beta_r 2a) = 0$$

Wir stellen fest, daß wegen der Vierersymmetrie die Konvergenz der Reihe in (30) erheblich besser ist, als im Falle eines einzigen exzentrischen Stabes. Der Summenterm gibt auch hier die gegenseitige Beschattung wieder. Ist er ein Minimum, so ist die Wirksamkeit der 4 Stäbe maximal.

#### V. Mehr als 4 Stäbe

Nun ist es leicht, den Ausdruck (30) so zu verallgemeinern, daß man mehr als 4 Stäbe, die symmetrisch angebracht sind, behandeln kann.

Es gilt der jetzt unmittelbar verständliche Ausdruck, wenn wir den Fall von n Stäben kennzeichnen wollen:

$$-N_0(\beta_r \rho) - \beta_r d N_1(\beta_r \rho) + n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{N_{nq}(\beta_r R)}{J_{nq}(\beta_r R)} J_{nq}^2(\beta_r a)$$

(31)

$$- \sum_j N_0(\beta_r r_{ij}) = 0$$

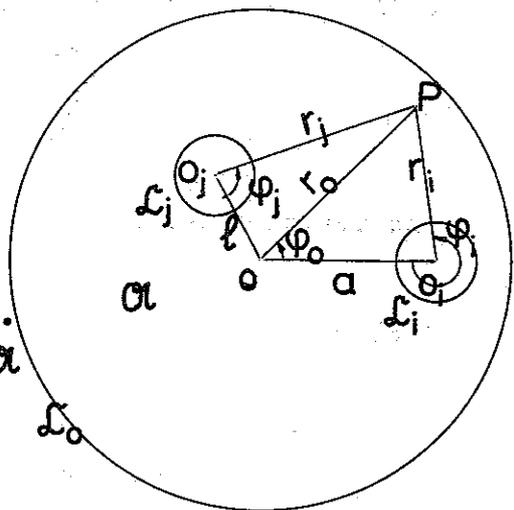
Die  $r_{ij}$  sind die Abstände vom Mittelpunkt eines Stabes  $i$  zu je einem anderen Stab  $j$  und das Summenzeichen  $\sum_j$  bedeutet Summation über alle Stäbe unter Auslassung der  $r_{ii}$ . Mit (31) kann man leicht den Fall  $n = 6$ ,  $n = 8$  und  $n = 12$  behandeln. Man muß nur darauf achten, daß die Bedingung

$$\frac{\rho}{r_{ij}} \ll 1$$

für alle  $j$  unverletzt bleibt.

#### VI. Stabanordnungen mit niedrigeren Symmetrien

Um Stabanordnungen behandeln zu können, deren Symmetrie schwächer ist als die bisher behandelten, wird der Fall zweier Stäbe in beliebiger Position behandelt. Das dabei angewendete Vorgehen kann auf beliebig viele Stäbe beliebiger Anordnung übertragen werden. Wenn man den Rechenaufwand nicht scheut, kann also jedes Anordnungsproblem gelöst werden. Bei dem bei uns vorliegenden Fall soll die Diffgl. (3) im dreifach zusammenhängenden Gebiet  $\Omega$  (siehe Fig.5) gelöst werden, wobei gelten soll



Figur 5

$$(33) \quad \begin{array}{ll} \text{(a) auf } \mathcal{L}_0 & \phi = 0 \\ \text{(b) auf } \mathcal{L}_i \text{ und } \mathcal{L}_j & \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi}{d} \quad \text{bzw. } \phi = 0 \end{array}$$

$2 \rho_0$  ist wieder der effektive Durchmesser der beiden Abschaltstäbe.  $2 \rho$  dagegen der echte Durchmesser. Auch ihn hätten wir bei den beiden Stäben verschieden annehmen können, nur um den Rechenaufwand beschränkt zu halten, ist er als gleich groß angenommen. Es gelte nach wie vor die Voraussetzung (12) und ebenso die Voraussetzung (32). Für die der Diffgl.(3) gehorchenden Funktion  $\phi$  setzen wir an:

$$(34) \quad \phi = \phi^{(i)} + \phi^{(j)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [A_m J_m(\beta_r r_i) + B_m N_m(\beta_r r_i)] e^{im\varphi_i} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [L_m J_m(\beta_r r_j) + M_m N_m(\beta_r r_j)] e^{im\varphi_j}$$

$i$  und  $j$  bezeichnen hier die beiden Stäbe und laufen also noch nicht. Um die Randbedingung (33a) befriedigen zu können, beschreiben wir (34) völlig von 0 aus, setzen wegen (12)

$$(35) \quad \begin{array}{ll} B_0 & = B_0 \\ B_m & = 0 \quad m \neq 0 \\ L_0 & = L_0 \\ L_m & = 0 \quad m \neq 0 \end{array}$$

und transformieren:

$$(36) \quad \begin{array}{l} \sum_m A_m J_{n+m}(\beta_r a) = \bar{A}_n \\ \sum_m L_m J_{n+m}(\beta_r e) = \bar{L}_n \end{array}$$

Außerdem beachten wir die Winkelrelationen

$$(37) \quad \begin{aligned} (i) \quad \varphi_0 &= 2\pi - \varphi_0 \\ (j) \quad \varphi_0 &= \alpha - \varphi_0 \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$(38) \quad \Phi \text{ auf } \mathcal{L}_0 = \sum_n \left\{ \left[ \bar{A}_n J_n(\beta_r R) + B_0 J_n(\beta_r a) N_n(\beta_r R) \right] + e^{in\alpha} \left[ \bar{L}_n J_n(\beta_r R) + M_0 J_n(\beta_r \ell) N_n(\beta_r R) \right] \right\} \cdot e^{-in\varphi_0} = 0$$

Diese Bedingung hat für jedes n zu gelten, also verlangen wir:

$$(39) \quad J_n(\beta_r R) (\bar{A}_n + e^{in\alpha} \bar{L}_n) + N_n(\beta_r R) [B_0 J_n(\beta_r a) + M_0 J_n(\beta_r \ell)] = 0$$

$$\bar{A}_n + e^{in\alpha} \bar{L}_n = - \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} [B_0 J_n(\beta_r a) + M_0 J_n(\beta_r \ell)]$$

Um die Randbedingungen, die wir auf  $\mathcal{L}_i$  bzw.  $\mathcal{L}_j$  fordern, erfüllen zu können, beschreiben wir wie üblich die Terme  $N_0$  von  $O_i$  bzw.  $O_j$  aus, dagegen die Terme  $I_n$  von  $O$  aus. Wir erhalten:

$$(40) \quad \begin{aligned} \Phi &= \sum_n \bar{A}_n J_n(\beta_r r_0) e^{-in\varphi_0} + B_0 N_0(\beta_r r_i) \\ &+ \sum_n \bar{L}_n e^{in\alpha} J_n(\beta_r r_0) e^{-in\varphi_0} + M_0 N_0(\beta_r r_j) \end{aligned}$$

Auf i gilt:

$$(r = a, \varphi_0 = 0)$$

$$B_0 (N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d N_1(\beta_r \rho)) + \sum_n J_n(\beta_r a) (\bar{A}_n + \bar{L}_n e^{in\alpha}) + M_0 N_0(\beta_r r_{i,j}) = 0$$

Auf j gilt:

$$(r = \ell, \varphi_0 = \alpha)$$

$$M_0 [(N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d N_1(\beta_r \rho)) + \sum_n J_n(\beta_r \ell) (\bar{A}_n + \bar{L}_n e^{in\alpha}) e^{-in\alpha} - B_0 N_0(\beta_r r_{i,j})] = 0$$

$r_{i,j}$  ist der Abstand vom Stab  $i$  zum Stab  $j$ .

Als homogenes Gleichungssystem für die Größen  $B_0$  und  $M_0$  geschrieben, wobei wir (39) verwenden, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & B_0 \left[ N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d N_1(\beta_r \rho) - \sum_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n^2(\beta_r a) \right] \\
 & + M_0 \left[ N_0(\beta_r r_{i,j}) - \sum_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n(\beta_r \ell) J_n(\beta_r a) \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 & B_0 \left[ N_0(\beta_r r_{i,j}) - \sum_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n(\beta_r a) J_n(\beta_r \ell) e^{-in\alpha} \right] \\
 & + M_0 \left[ N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d N_1(\beta_r \rho) - \sum_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n^2(\beta_r \ell) e^{-in\alpha} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Das Verschwinden der Determinante dieses Gleichungssystems liefert die kritische Bedingung für die Größe  $\beta_r$ . Sie lautet:

$$\begin{aligned}
 & \left[ N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d N_1(\beta_r \rho) - \sum_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n^2(\beta_r a) \right] \cdot \\
 & \left[ N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d N_1(\beta_r \rho) - \sum_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n^2(\beta_r \ell) e^{-in\alpha} \right] \\
 & - \left[ N_0(\beta_r r_{i,j}) - \sum_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n(\beta_r a) J_n(\beta_r \ell) \right] \cdot \\
 & \cdot \left[ N_0(\beta_r r_{i,j}) - \sum_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n(\beta_r a) J_n(\beta_r \ell) e^{-in\alpha} \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Gleichung (42) geht für  $a = \ell$  und  $\alpha = \pi$  wie es sein muß in (31) über, wenn wir dort die Stabzahl gleich 2 setzen.

#### VII. Zwei mal zwei bzw. zwei mal vier Stäbe

Nun ist es leicht, den Fall zweier Kränze von Abschaltstäben zu errechnen, wobei der eine Kranz von Stäben den Radius  $a$ , der andere den Radius  $\ell$  haben soll. Bei der Aufstellung gehen wir davon aus, daß jeder der beiden Ringe mit zunächst nur zwei Stäben besetzt ist,

um ein zu großes Durcheinander mit den Winkelrelationen zu vermeiden. Später ist es dann leicht auf den Fall zu verallgemeinern, daß jeder der Kränze mehr als zwei Stäbe hat. Aus praktischen Gründen interessiert uns der Fall, daß jeder Kranz mit vier Stäben besetzt ist.

Wir wollen Stäbe des Ringes mit dem Radius  $a$  der Anregungsstärke  $B_0$  und dem jetzt laufenden Index  $i$  zuordnen, Stäbe des Ringes mit dem Radius  $\ell$  der Anregungsstärke  $M_0$  und dem laufenden Index  $j$ .

Abgekürzt:

$$a : B_0 \longleftrightarrow i$$

$$\ell : M_0 \longleftrightarrow j$$

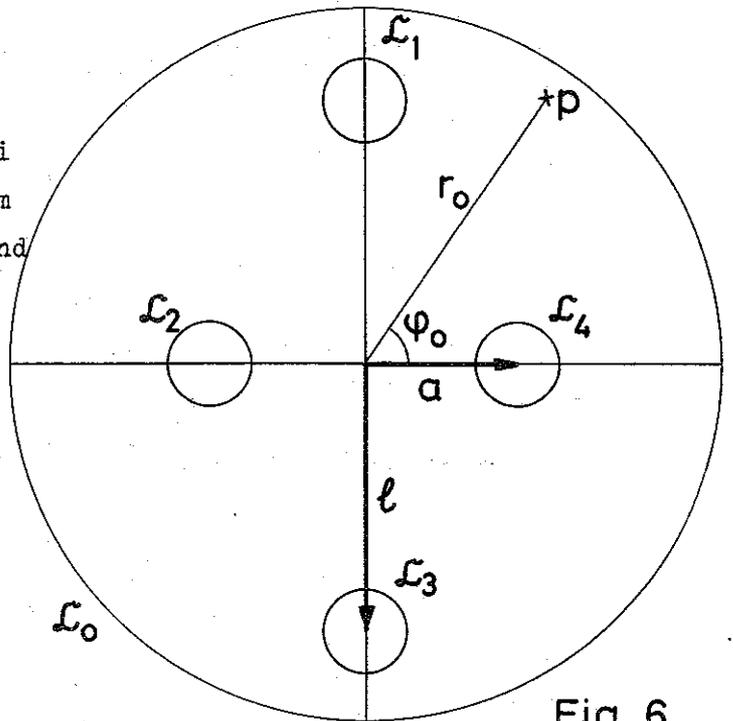


Fig. 6

Es gelten nun die folgenden Relationen, wobei wir  $S$  als Summenzeichen über Stäbe desselben Kranzes verwenden:

$$\phi = \phi^{(i)} + \phi^{(j)} = S \sum_{i,n,m} [A_m J_{n+m}(\beta_r a) J_n(\beta_r r_0) + B_m J_{n+m}(\beta_r a) N_n(\beta_r r)] e^{in\phi_0^{(i)}}$$

$$(43) + S \sum_{j,n,m} [L_m J_{n+m}(\beta_r \ell) J_n(\beta_r r_0) + M_m J_{n+m}(\beta_r a) N_n(\beta_r r_0)] e^{in\phi_0^{(j)}}$$

Man beachte folgende Winkelrelationen:

| i   | j                               |
|---|---------------------------------|
| (1)<br>$\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \phi_0$  | (2)<br>$\phi_0 = \pi - \phi_0$  |
| (3)<br>$\phi_0 = \frac{3\pi}{2} - \phi_0$ | (4)<br>$\phi_0 = 2\pi - \phi_0$ |

$$\phi = \sum_{n,m} \left[ A_m J_{n-m}(\beta_r a) J_n(\beta_r r_0) + B_m J_{n-m}(\beta_r a) N_n(\beta_r r_0) \right] (1 + e^{in\pi}) e^{-in\varphi_0} e^{in\frac{\pi}{2}}$$

$$(45) \quad + \sum_{n,m} \left[ L_m J_{n-m}(\beta_r \ell) J_n(\beta_r r_0) + B_m J_{n-m}(\beta_r a) N_n(\beta_r r_0) \right] (e^{in\pi} + 1) e^{-in\varphi_0}$$

Wir setzen  $e^{in\pi} + 1 = \delta_n$  und bemerken, daß gilt:

$$\delta_n = 2, \text{ falls } n \text{ gerade ist}$$

$$\delta_n = 0, \text{ falls } n \text{ ungerade ist.}$$

Wir verwenden auch hier die Transformation (36) und gehen somit auf die Größen  $\bar{A}_n$  und  $\bar{L}_n$  über.

Auf dem äußeren Rande gilt  $\phi = 0$ , was auf die Bedingung

$$(46) \quad (\bar{A}_n e^{in\frac{\pi}{2}} + \bar{L}_n) = - \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} [B_0 J_n(\beta_r a) + M_0 J_n(\beta_r \ell)]$$

führt. In der gemischten Darstellung schreiben wir wieder für  $\phi$  wie folgt:

$$(47) \quad \phi = \sum_n \left[ \bar{A}_n J_n(\beta_r r_0) \delta_n e^{in\frac{\pi}{2}} \right] e^{-in\varphi_0} + B_0 \sum_i N_0(\beta_r r_i)$$

$$+ \sum_n \bar{L}_n J_n(\beta_r r_0) \delta_n e^{-in\varphi_0} + M_0 \sum_j N_0(\beta_r r_j)$$

Auf den Stäben i gilt  $\varphi_0 = 0$  und  $r = a$  (als Bedingung, die für alle Stäbe i typisch ist.)

Auf den Stäben j dagegen  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $r = \ell$  (als Bedingung, die für alle Stäbe j typisch ist.)

Wir erhalten mit solchen Werten für  $\varphi_0$  und  $r$  wieder ein homogenes Gleichungssystem für die Größen  $M_0$  und  $B_0$ , dessen Determinante verschwinden muß.

Unter Verwendung von (46) erhalten wir:

$$(48) \quad \begin{aligned} & \left[ N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d \quad N_1(\beta_r \rho) - \sum_n \delta_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n^2(\beta_r a) + \sum_{j'} N_0(\beta_r r_{i,j}) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ N_0(\beta_r \rho) + \beta_r d \quad N_1(\beta_r \rho) - \sum_n \delta_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n^2(\beta_r \ell) e^{i n \frac{\pi}{2}} + \sum_i N_0(\beta_r r_{i,j}) \right] - \\ & - \left[ \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) - \sum_n \delta_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n(\beta_r \ell) J_n(\beta_r a) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ \sum_i N_0(\beta_r r_{i,j}) - \sum_n \delta_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n(\beta_r \ell) J_n(\beta_r a) e^{i n \frac{\pi}{2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$(49) \quad \begin{aligned} \sum_{j'} N_0(\beta_r r_{i,j}) &= N_0(\beta_r 2a) \\ \sum_i N_0(\beta_r r_{i,j}) &= N_0(\beta_r 2\ell) \\ \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) &= 2 N_0(\beta_r \sqrt{\ell^2 + a^2}) \\ \sum_i N_0(\beta_r r_{i,j}) &= \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) \end{aligned}$$

$S_{i'}$  bzw.  $S_{j'}$  ist die Summation über die Terme  $N_0(r_{i,j})$ , wobei die  $r_{i,j}$  die Abstände von einem Stab zu den übrigen Stäben des gleichen Kranzes bedeuten.  $S = S_{i'}$  bedeutet dagegen die Summation, bei der die  $r_{i,j}$  die Abstände von einem Stab des einen Kranzes zu allen Stäben des anderen Kranzes darstellen.  $S_i$  ist also um einen Summationsterm reicher als  $S_{i'}$ . Deswegen die übliche Apostrophierung.

Die Verallgemeinerung auf den Fall von 2 x 4 Stäben ist nun leicht. Statt des Faktors  $e^{i n \frac{\pi}{2}}$  tritt der Faktor  $e^{i n \frac{\pi}{4}}$  auf und für die Größen  $\delta_n$  gilt nun

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= 0, \text{ falls } n \neq 4m \\ \delta_n &= 4, \text{ falls } n = 4m \end{aligned} \right\} m \text{ ganzzahlig}$$

Man beachte die Figur 7.

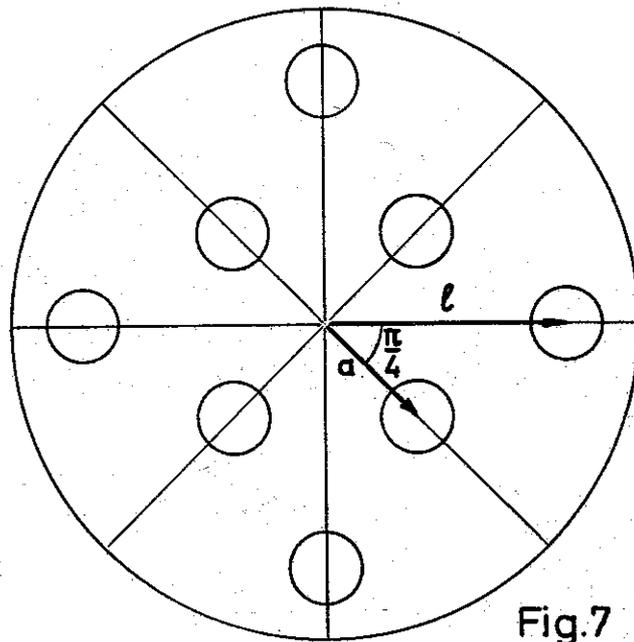


Fig.7

Für 2 x 4 Stäbe gilt also:

$$\begin{aligned}
 & \left[ N_0(\beta_r \rho) + \beta d N_1(\beta_r \rho) - \sum_n \delta_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n^2(\beta_r a) + \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) \right] \cdot \\
 & \cdot \left[ N_0(\beta_r \rho) + \beta d N_1(\beta_r \rho) - \sum_n \delta_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n^2(\beta_r \ell) e^{in\frac{\pi}{4}} + \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) \right] - \\
 (50) \quad & \left[ \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) - \sum_n \delta_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n(\beta_r \ell) J_n(\beta_r a) \right] \cdot \\
 & \cdot \left[ \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) - \sum_n \delta_n \frac{N_n(\beta_r R)}{J_n(\beta_r R)} J_n(\beta_r \ell) J_n(\beta_r a) e^{in\frac{\pi}{4}} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}
 \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) &= N_0(\beta_r 2a) + 2N_0(\beta_r \sqrt{2}a) \\
 \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) &= N_0(\beta_r 2\ell) + 2N_0(\beta_r \sqrt{2}\ell) \\
 (51) \quad \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) &= 2N_0(\beta_r \sqrt{\ell^2 + a^2 - a\ell\sqrt{2}}) \\
 & \quad + 2N_0(\beta_r \sqrt{\ell^2 + a^2 + a\ell\sqrt{2}}) \\
 \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) &= \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j})
 \end{aligned}$$

Für  $a = \ell$  geht (48) bzw. (50) in die Formel (31) für 4 bzw. 8 Abschaltstäbe über.

VIII. Änderung des Exzesses  $k - 1$  durch Einfahren der Abschaltstäbe

Auf die Änderung des Exzesses  $k - 1$  durch Einfahren der Stäbe schließen wir wie folgt: (Index 0 bezieht sich auf den Reaktor ohne Stäbe, Index 1 auf den Reaktor mit Stäben).

$$k_0 - 1 = (L_{\text{eff}}^2 + \tau) \beta_0^2$$

$$\beta_0^2 = (\beta_r)_0^2 + \beta_z^2$$

$$(\beta_r)_0^2 = \left(\frac{2405}{R}\right)^2$$

Dabei ist  $L_{\text{eff}}$  die effektive Diffusionslänge und  $\tau$  das Fermialter, das das Verhalten der schnellen Neutronen in die Rechnung bringt.

Sagen wir nun, daß die Änderung von  $\beta_r$  sich nur auf langsame Neutronen beziehen soll, dagegen der durch  $\tau$  charakterisierte Anteil der schnellen Neutronen von den Abschaltstäben nichts merkt, also die alte Verteilung des schnellen Flusses vorliegen soll, so gilt:

$$k_1 - 1 = L_{\text{eff}}^2 (\beta_r)_1^2 + (L_{\text{eff}}^2 + \tau) \beta_z^2 + \tau (\beta_r)_0^2$$

d.h.

$$k_1 - k_0 = L_{\text{eff}}^2 [(\beta_r)_1^2 - (\beta_r)_0^2]$$

oder anders geschrieben

$$(52) \quad \Delta k = L_{\text{eff}}^2 \Delta \beta_r^2$$

Hierbei haben wir so gerechnet, als würde ein Absenken des thermischen Flusses den schnellen Fluß überhaupt nicht beeinflussen. Sicher erhalten wir somit eine zu kleine Abschaltwirkung. Genau genommen müßte man alle Fragestellungen dieser Arbeit mit der Zweigruppentheorie behandeln. Nun geht es vor allem darum, Abschaltwirkungen zu vergleichen, wofür eine Behandlung mit der Eingruppentheorie ausreichen dürfte. Um den Anschluß an absolute

Werte zu gewinnen, vergleichen wir Ein- und Zweigruppentheorie bei der Behandlung des Problems eines zentralen Stabes. Gemäß Glasstone und Edlund "The Elements of Nuclear Reactor Theory" (11.21.1) gilt :

a) nach der korrigierten Eingruppentheorie:

$$(53) (\Delta k)_a = \frac{7,5 M^2}{R^2} \left[ (0,116 + \ln \frac{R}{2405 \rho_0}) (1 + \frac{\tau}{L^2}) \right]^{-1}$$

b) nach der Zweigruppentheorie:

$$(54) (\Delta k)_b = \frac{7,5 M^2}{R^2} \left[ (0,116 + \ln \frac{R}{2405 \rho_0}) (1 + \frac{\tau}{L^2}) + \frac{\tau}{L^2} \ln \frac{L \sqrt{\tau} \cdot 2405}{M \cdot R} \right]^{-1}$$

Dabei ist:

$$M^2 = L^2 + \tau$$

Wenn

$$(55) \left| \frac{\frac{\tau}{L^2} \ln \frac{L \sqrt{\tau} \cdot 2405}{M \cdot R}}{0,116 + \ln \frac{R}{2405 \rho_0}} \right| \ll 1$$

stimmen die beiden Fälle a und b überein. Die Größe im Zähler von (55) ist durch den Reaktortyp weitgehend festgelegt und dann nicht mehr variabel. Je nach Wahl der verschiedenen Parameter ergibt sich unter Umständen ein beträchtlicher Unterschied zwischen a und b, z.B. ergibt sich für einen echten Radius  $\rho = 1,0 \text{ cm}$  ( $\rho \neq \rho_0$ );  $\tau = 100 \text{ cm}^2$  und  $L^2 = 240 \text{ cm}^2$  bei  $R = 90 \text{ cm}$  ( $D_2O$  als Moderator)

Im Fall a)

$$\Delta k_a = 3,55 \%$$

Im Fall b)  $\Delta k_b = 3,82 \%$

also:

$$\frac{(\Delta k)_b - (\Delta k)_a}{(\Delta k)_a} = 0,076$$

Bei  $\rho = 2,5 \text{ cm}$ ,  $\tau = 125 \text{ cm}^2$ ,  $L^2 = 160 \text{ cm}^2$  und  $R = 120 \text{ cm}$  finden wir:

Im Fall a)  $\Delta k_a = 2,08 \%$

Im Fall b)  $\Delta k_b = 2,58 \%$

$$\frac{(\Delta k)_b - (\Delta k)_a}{(\Delta k)_a} = 0,24$$

Bei  $\rho = 4,0 \text{ cm}$ ,  $\tau = 150 \text{ cm}^2$ ,  $L^2 = 100 \text{ cm}^2$  und  $R = 150 \text{ cm}$  finden wir:

Im Fall a)  $\Delta k_a = 0,98 \%$

Im Fall b)  $\Delta k_b = 1,56 \%$

$$\frac{(\Delta k)_b - (\Delta k)_a}{(\Delta k)_a} = 0,60$$

Allgemein gilt, daß der Unterschied zwischen a und b wächst, wenn  $\frac{R}{L}$  groß ist, wenn  $\frac{\tau}{R}$  groß ist, und wenn  $\frac{Q}{R}$  groß ist. Das mittlere Beispiel entspricht einem  $D_2O$ -Reaktor für etwa 10 MW bei Verwendung von natürlichem Uran.

Wir werden also (52) mit einem Korrekturfaktor versehen, den wir als das Verhältnis von

$$(56) \quad \lambda = \frac{(\Delta k)_b}{(\Delta k)_a}$$

approximieren können.

Bei mehreren Stäben wird dieser Korrekturfaktor etwas kleiner sein als in (55), weil der lokale schnelle Fluß außerhalb des Mittelpunktes des Reaktorkernes schwächer vom lokalen thermischen Fluß abhängt als im Mittelpunkt. Im Mittelpunkt speist er sich nur aus Spaltneutronen des Mittelpunktes, außerhalb des Mittelpunktes aus den Spaltneutronen des betrachteten Volumenelementes und dem Neutronenstrom, der vom Mittelpunkt her das betrachtete Volumenelement durchsetzt.

Wir erhalten also schließlich

$$(57) \quad \Delta k = L_{\text{eff}}^2 \Delta B_r^2 \lambda$$

$$(58) \quad 1 \leq \lambda \leq \frac{(\Delta k)_b}{(\Delta k)_a}$$

#### IX. Numerische Auswertung

Gleichung (31) wurde für den Fall  $n = 4$ ,  $n = 6$ ,  $n = 8$  und  $n = 12$  ausgewertet. Dabei wurde zunächst nicht mit dem effektiven Radius der Stäbe gerechnet, sondern es wurde die volle Gleichung benutzt. Es wurden für  $\rho$  die Werte 1,5 cm, 2 cm und 3 cm eingesetzt. Die Funktion  $d(\rho)$  wurde für eine freie Weglänge  $\lambda_{iR} = 2,4$  cm ermittelt, was einem  $D_2O$ -Reaktor entspricht. Schon bei  $n = 4$ , erst recht bei  $n = 6$ ,  $n = 8$  und  $n = 12$  kann man die Reihe in Gleichung (31) nach dem ersten Glied abbrechen, solange man  $a$  nicht zu nahe an  $R$  herankommen läßt. Dann nämlich wird das erste Glied gegenüber dem zweiten klein. Außer  $\rho$  und  $n$  wurden die Werte  $\frac{a}{R}$  variiert, im allgemeinen durchläuft  $\frac{a}{R}$  die Werte 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8.

Substituieren wir

$$(59) \quad B_r R = x$$

so ergeben sich schließlich aus (31) folgende Formeln:

$$(60) \left\{ \begin{array}{l} n = 4 \\ N_0(x \frac{\rho}{R}) + x \frac{d}{R} N_1(x \frac{\rho}{R}) - 4J_0^2(x \frac{a}{R}) \frac{N_0(x)}{J_0(x)} \\ + N_0(x \frac{2a}{R}) + 2N_0(x \frac{a\sqrt{2}}{R}) = 0 \end{array} \right.$$

$$(61) \left\{ \begin{array}{l} n = 6 \\ N_0(x \frac{\rho}{R}) + x \frac{d}{R} N_1(x \frac{\rho}{R}) - 6J_0^2(x \frac{a}{R}) \frac{N_0(x)}{J_0(x)} \\ + N_0(x 2\frac{a}{R}) + 2N_0(x \sqrt{3} \frac{a}{R}) + 2N_0(x \frac{a}{R}) = 0 \end{array} \right.$$

$$(62) \left\{ \begin{array}{l} n = 8 \\ N_0(x \frac{\rho}{R}) + x \frac{d}{R} N_1(x \frac{\rho}{R}) - 8J_0^2(x \frac{a}{R}) \frac{N_0(x)}{J_0(x)} \\ + N_0(x \frac{2a}{R}) + 2N_0(x \frac{a\sqrt{2}}{R}) + 2N_0(x \frac{a 2 \sin \frac{\pi}{8}}{R}) + 2N_0(x \frac{a 2 \cos \frac{\pi}{8}}{R}) = 0 \end{array} \right.$$

$$(63) \left\{ \begin{array}{l} n = 12 \\ N_0(x \frac{\rho}{R}) + x \frac{d}{R} N_1(x \frac{\rho}{R}) - 12J_0^2(x \frac{a}{R}) \frac{N_0(x)}{J_0(x)} \\ + N_0(x \frac{2a}{R}) + 2N_0(x \frac{2a}{R} \sin \frac{\pi}{12}) + 2N_0(x \frac{a}{R}) + 2N_0(x \frac{2a}{R} \cos \frac{\pi}{12}) \\ + 2N_0(x \frac{a\sqrt{3}}{R}) + 2N_0(x \frac{a\sqrt{2}}{R}) = 0 \end{array} \right.$$

Über die Größe  $d$ , die eine Funktion von  $\rho/\lambda_{tR}$  ist, kommen in die Gleichung (60) bis (63) absolute Maßstäbe herein.

Deswegen wurden die Gleichungen noch einmal für den Fall  $d = 0$  gelöst, wobei aber  $\rho$  dann den effektiven Radius bedeutet, den wir ja  $\rho_0$  nennen. Die Parameter  $\frac{\rho_0}{R}$  hatten die folgenden Werte:

$$\left. \frac{\rho_0}{R} \right\} = \begin{array}{l} 0,01 \\ 0,0075 \\ 0,005 \end{array}$$

Der Fall  $\frac{\rho_0}{R} = 0,01$  entspricht ziemlich genau dem Fall

$$\rho = 3 \text{ cm}, \quad R = 142,5; \quad \lambda_{tR} = 2,4 \text{ cm (D}_2\text{O)}$$

Für den nicht maßstabfreien Fall  $d \neq 0$  war folgende Kopplung eingehalten worden.

$$R = 142,5 \text{ cm} \quad \lambda_{tR} = 2,4 \text{ cm}$$

$$\rho = 1,5 \text{ cm} \quad \rho = 2,0 \text{ cm} \quad \rho = 3,0 \text{ cm}$$

$$d = 23,8 \text{ cm} \quad d = 2,28 \text{ cm} \quad d = 2,15 \text{ cm}$$

Die Kurve für  $\frac{\rho_0}{R} = 0,01$  und 4 Abschaltstäbe stimmt sehr genau mit der im Reaktorhandbuch Band II, S.608 angegebenen Kurve überein. Weiter wurde die Formel (50) für 2 x 4 Stäbe numerisch ausgewertet.

Dafür galt:

$$d = 0$$

$$\frac{\rho_0}{R} = 0,01$$

$$0,2 \leq \frac{l}{R} \leq 0,8$$

$$\frac{a}{R} \leq \frac{l}{R}$$

Die schließlich benutzte Formel lautete unter Verwendung von (59)

$$\begin{aligned}
 & \left[ N_0(x, 0,01) - 4 \frac{N_0(x)}{J_0(x)} J_0^2\left(\frac{a}{R}x\right) + S_i N_0 \right] \cdot \\
 & \cdot \left[ N_0(x, 0,01) - 4 \frac{N_0(x)}{J_0(x)} J_0\left(x \frac{a}{R}\right) J_0\left(x \frac{l}{R}\right) \right] - \\
 (64) & - \left[ S_i N_0 - 4 \frac{N_0(x)}{J_0(x)} J_0\left(x \frac{a}{R}\right) J_0\left(x \frac{l}{R}\right) \right]^2 = 0 \\
 & S_i = N_0\left(x \frac{2a}{R}\right) + 2N_0\left(\frac{a\sqrt{2}}{R}x\right); S_i = N_0\left(x \frac{2l}{R}\right) + 2N_0\left(\frac{l\sqrt{2}}{R}x\right) \\
 & S_i = 2N_0 \left[ x \sqrt{\left(\frac{l}{R}\right)^2 + \left(\frac{a}{R}\right)^2} - \frac{a}{R} \frac{l}{R} \sqrt{2} \right] + 2N_0 \left[ x \sqrt{\left(\frac{l}{R}\right)^2 + \left(\frac{a}{R}\right)^2} + \left(\frac{a}{R}\right) \left(\frac{l}{R}\right) \sqrt{2} \right]
 \end{aligned}$$

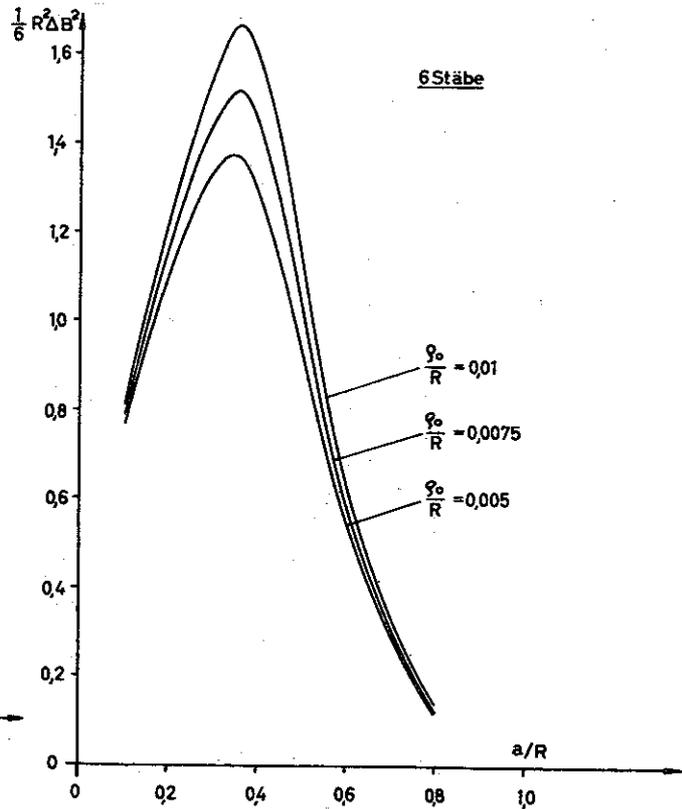
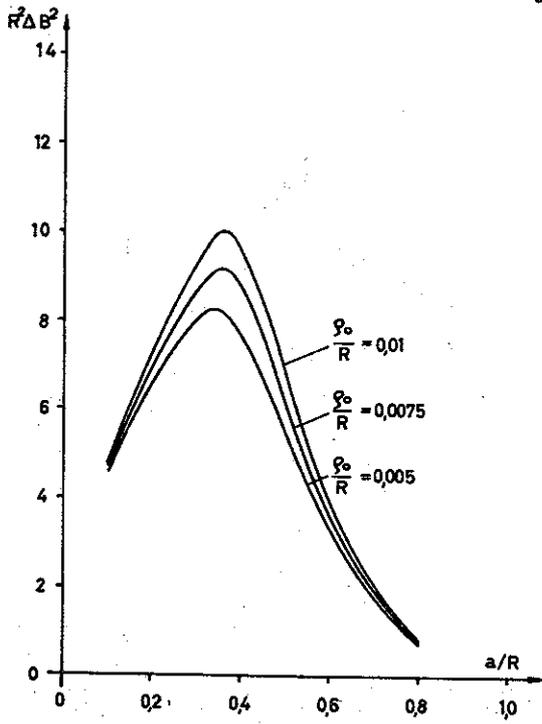
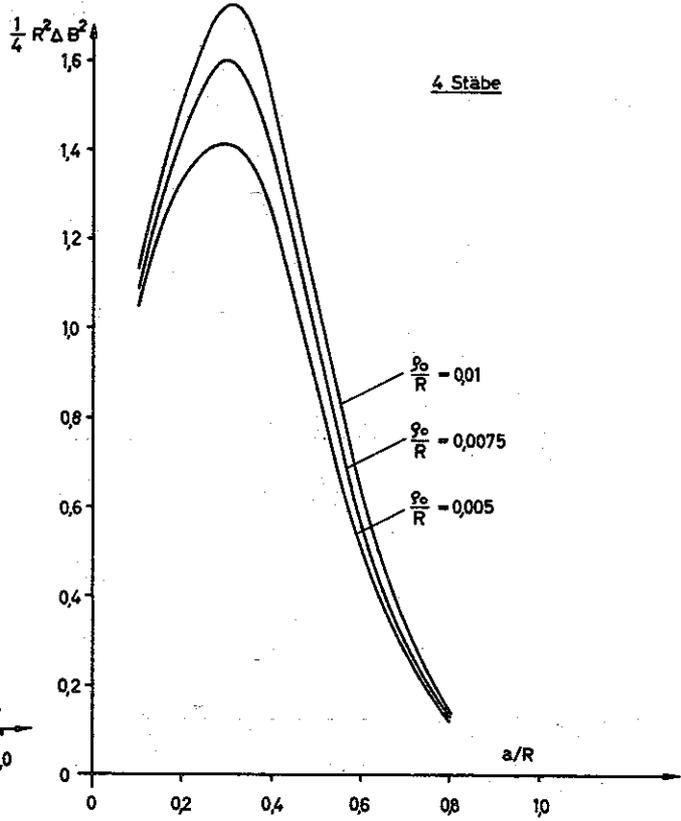
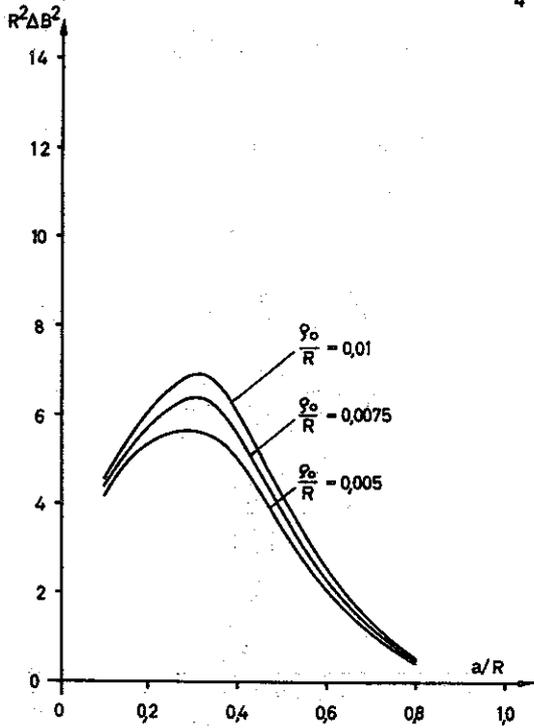
Die numerischen Auswertungen erfolgten mit Hilfe der Göttinger elektronischen Rechenmaschine G 1. Die Zylinder-Funktionen wurden durch Reihenentwicklung im Nullpunkt mit einer Genauigkeit von  $5 \cdot 10^{-5}$  berechnet und die Gleichungen wurden nach der regula falsi mit einer Genauigkeit von 1 bis  $3 \cdot 10^{-2}$  zu Null gemacht. In den Werten  $X$  bedeutete das eine Genauigkeit von  $(1 \text{ bis } 2) \cdot 10^{-2}$ .

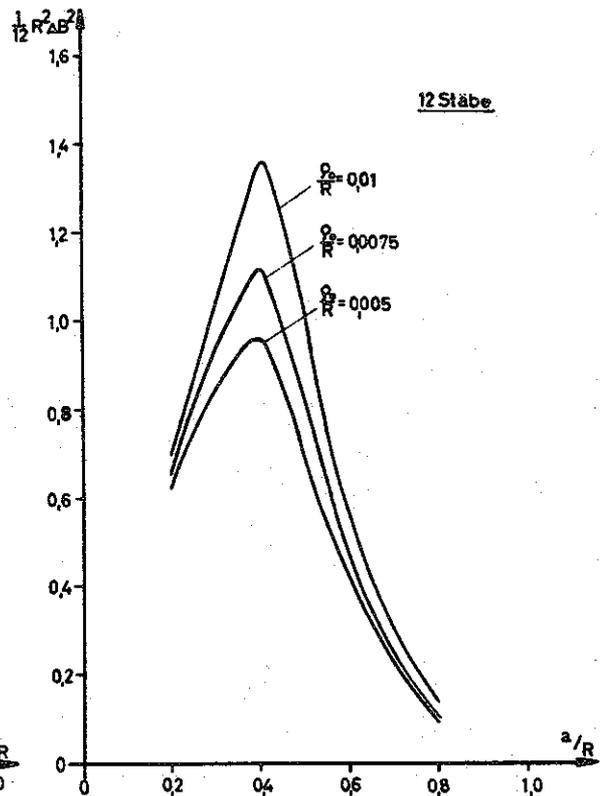
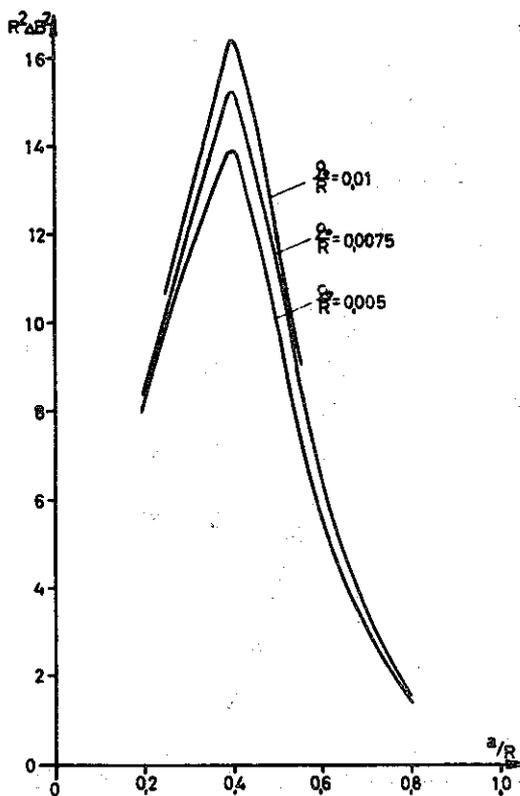
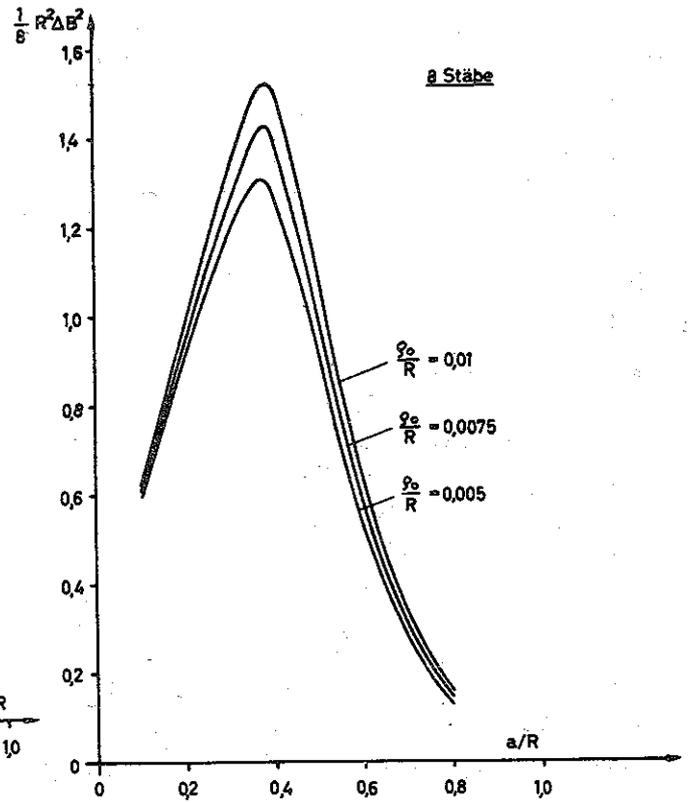
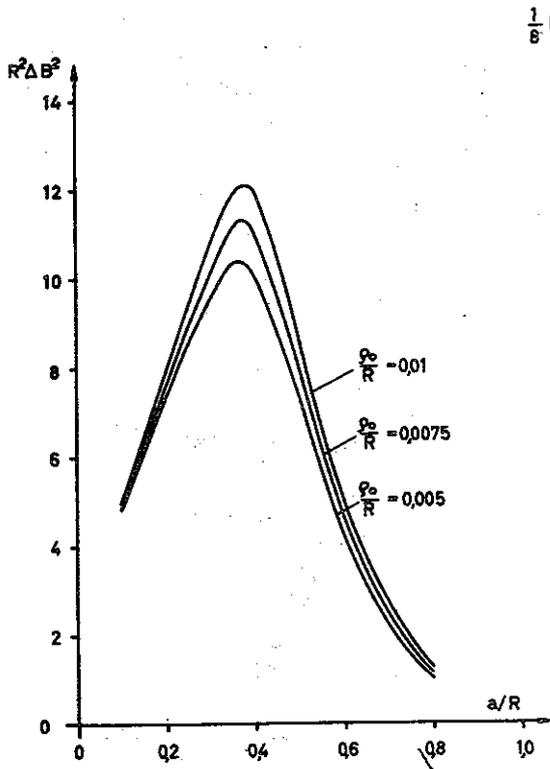
Bei den Gleichungen (60) bis (63) geben wir die Resultate in Form von Diagrammen wieder. Für  $d \neq 0$  und  $R = 142,5$  cm ist einmal  $\rho$ , das andere Mal die Stabanzahl  $n$  Parameter. Das gleiche ist noch einmal für den maßstabfreien Fall  $d = 0$  ausgeführt.

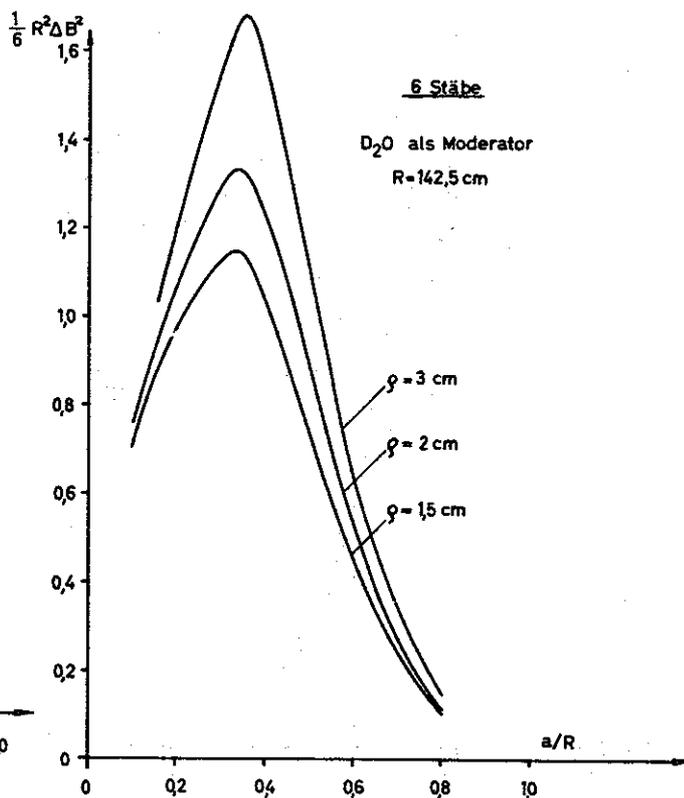
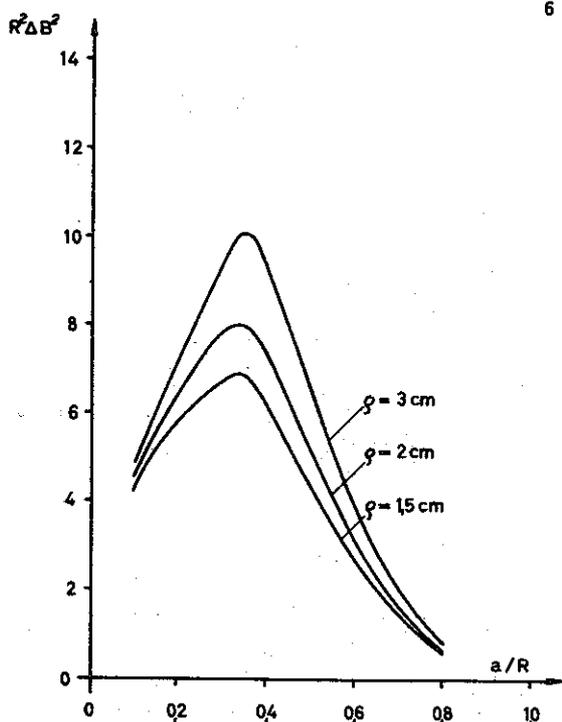
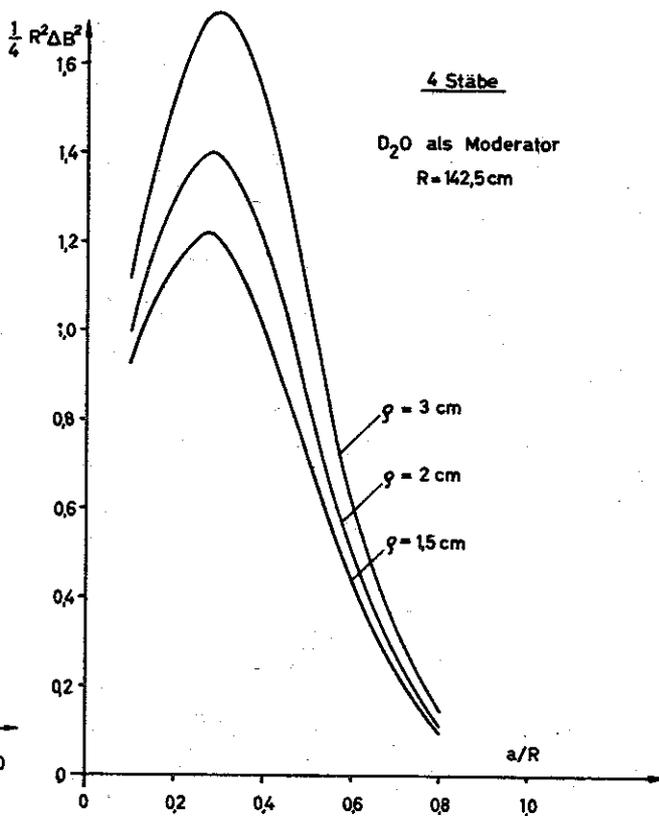
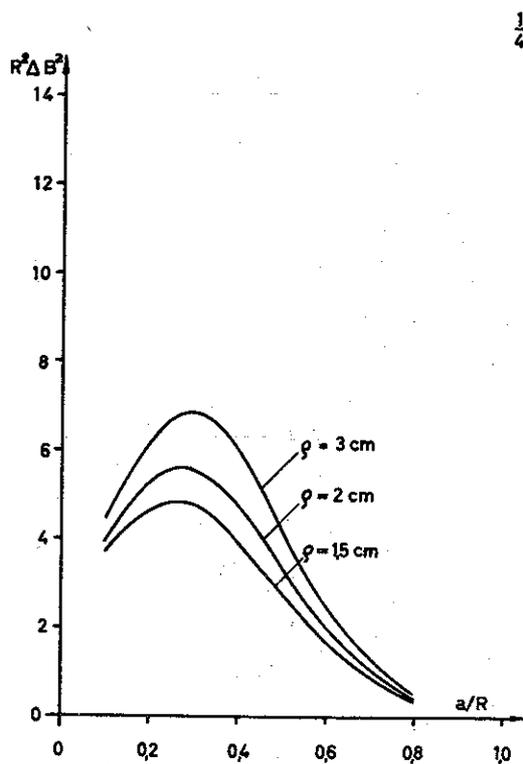
Für den Fall der zwei Kränze von je 4 Abschaltstäben geben wir das Ergebnis in Tabellenform an. Um Kurven konstanter Abschaltwirkung in einer  $(a, l)$  Ebene ( $a$  Radius des ersten Kranzes,  $l$  Radius des zweiten Kranzes) zeichnen zu können, hätte man erheblich mehr Werte ermitteln müssen.

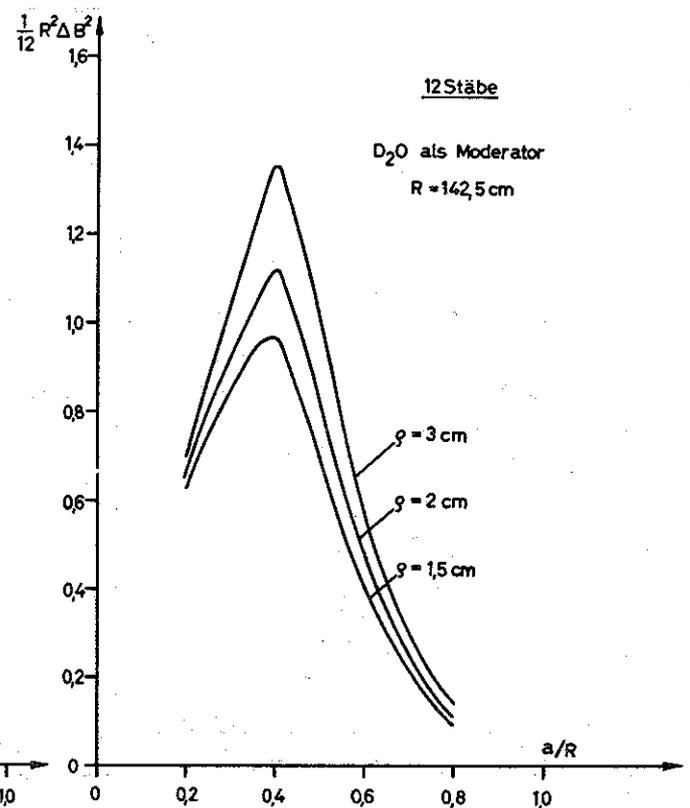
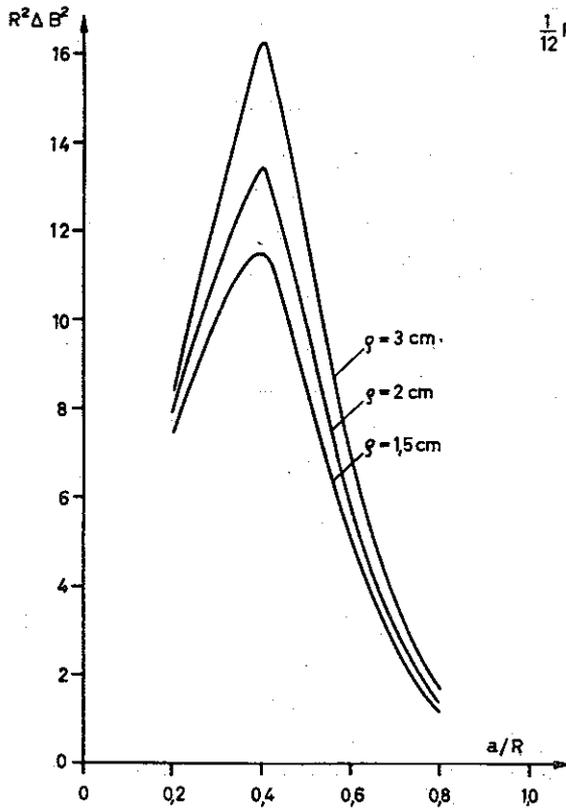
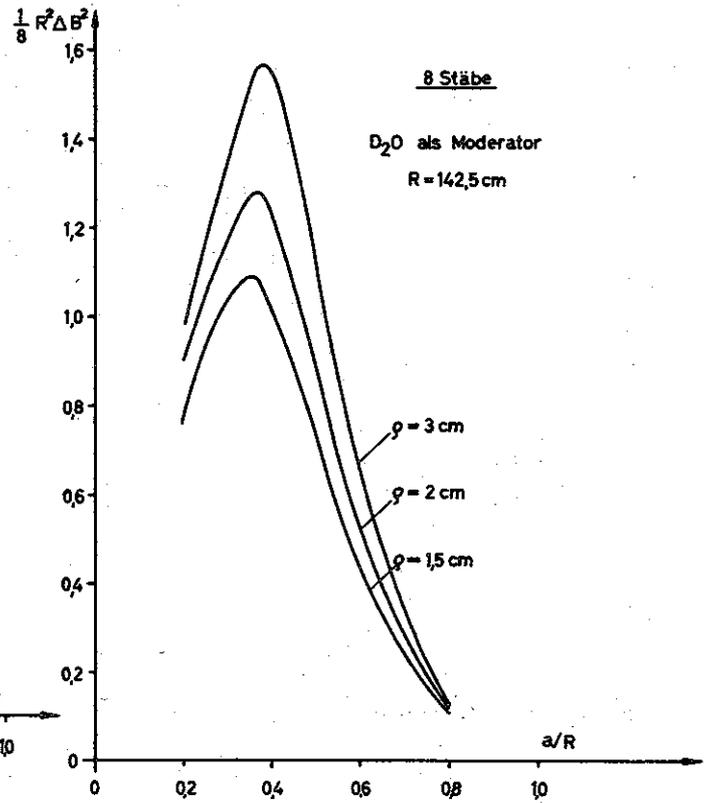
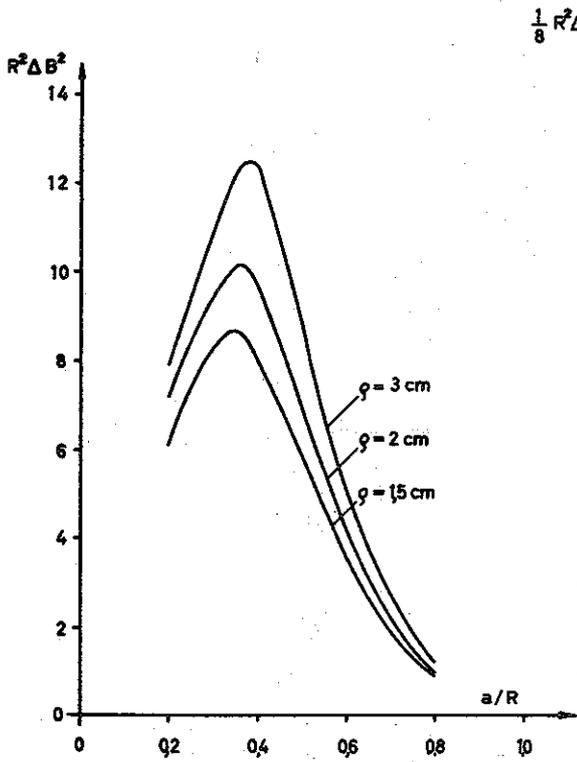
Aber gerade das Lösen der Gleichung (64) war mit erheblichem Zeit-

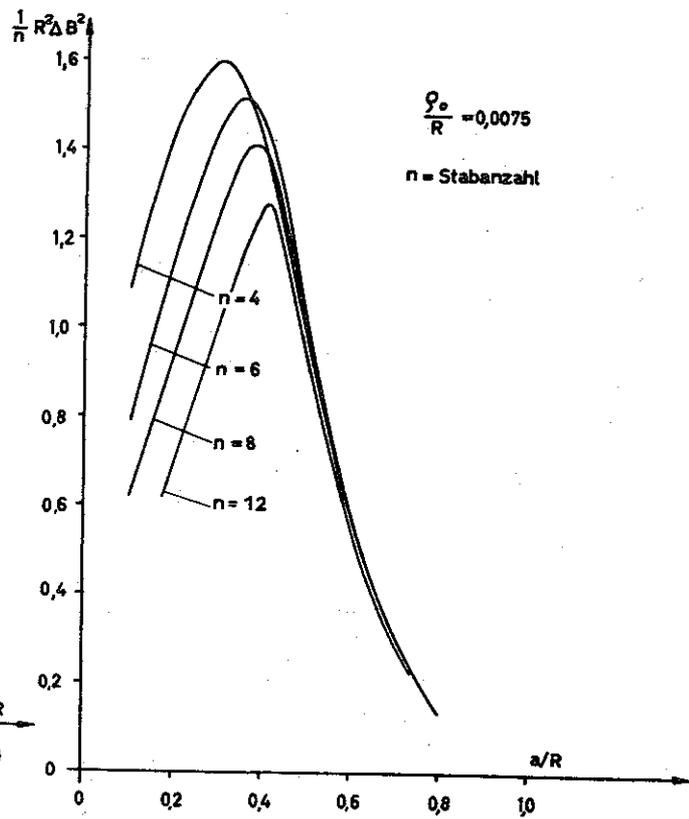
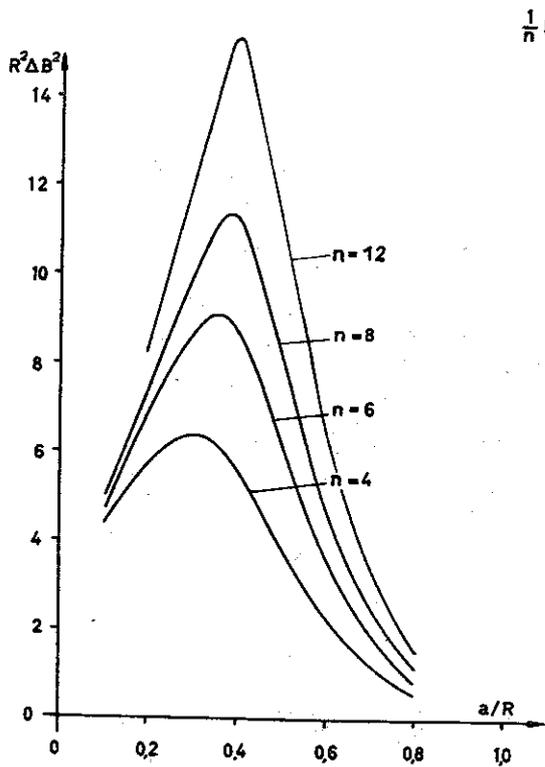
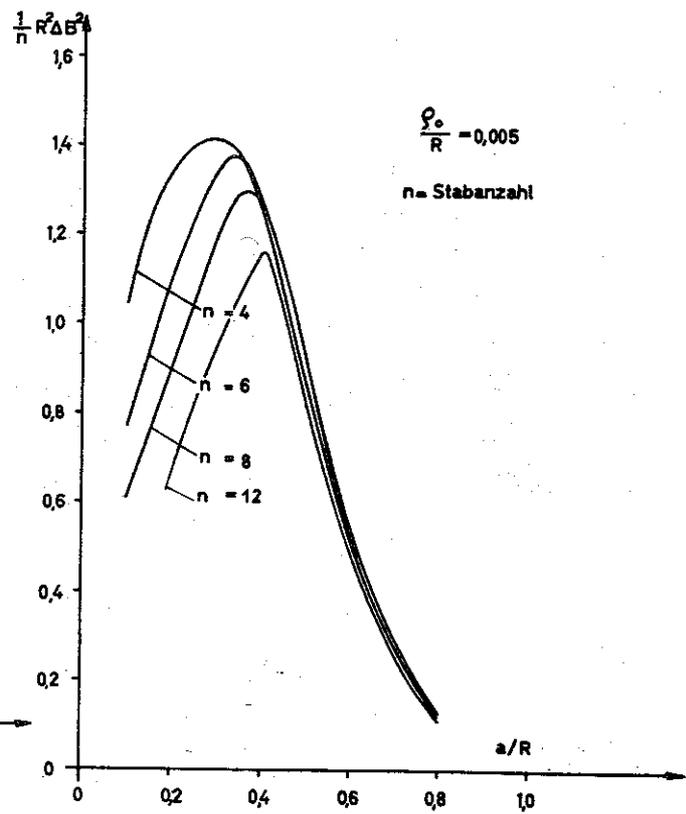
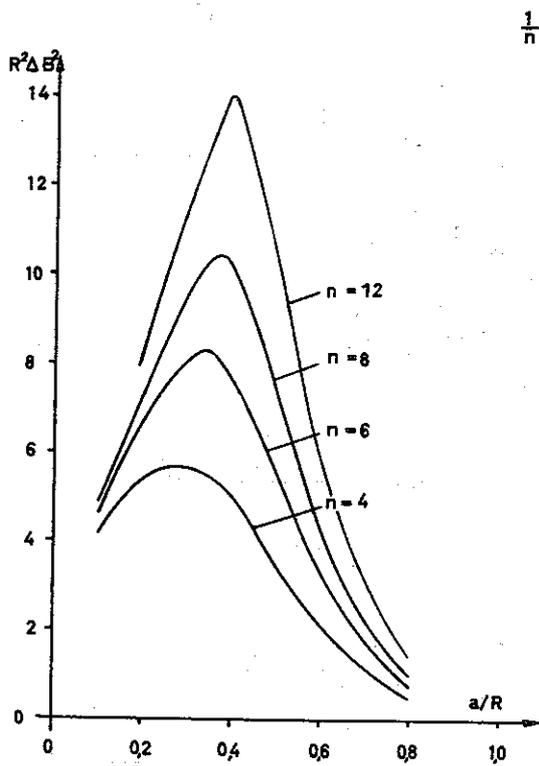
aufwand verbunden, so daß die Gleichung hier nur für insgesamt 28 Wertpaare gelöst wurden. Für  $a = \ell$  stimmen die Ergebnisse natürlich mit dem Fall eines Kranzes, der mit acht Stäben besetzt ist, überein. Wir erhalten die Tabellen bzw. die Figuren der folgenden Seiten:

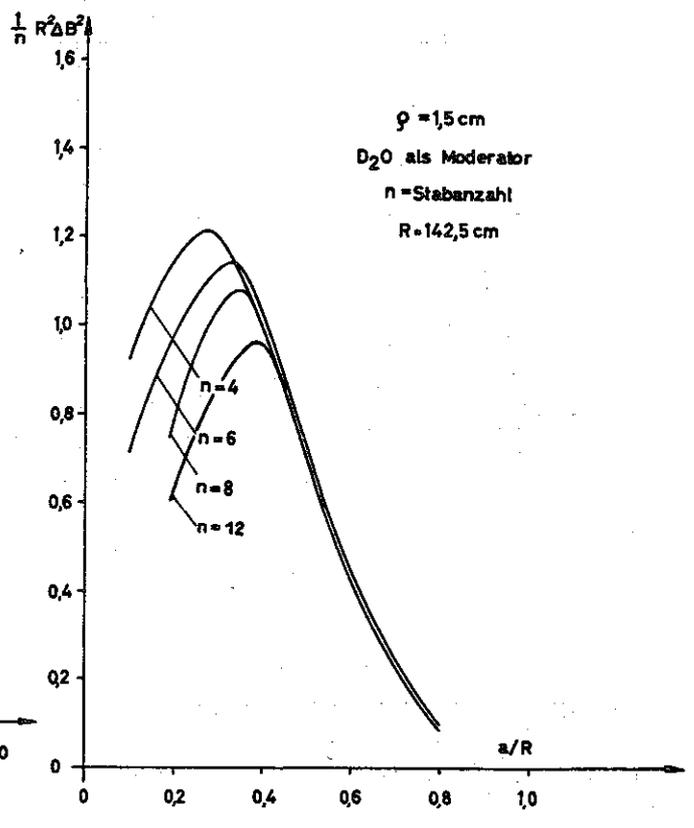
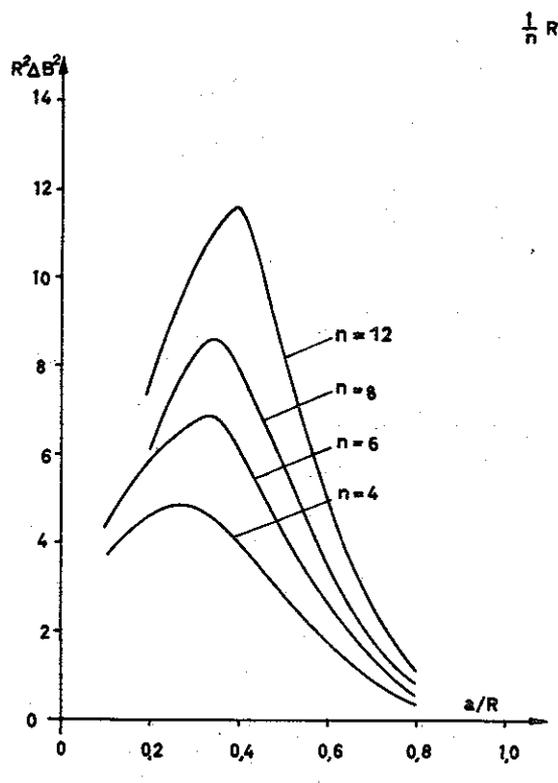
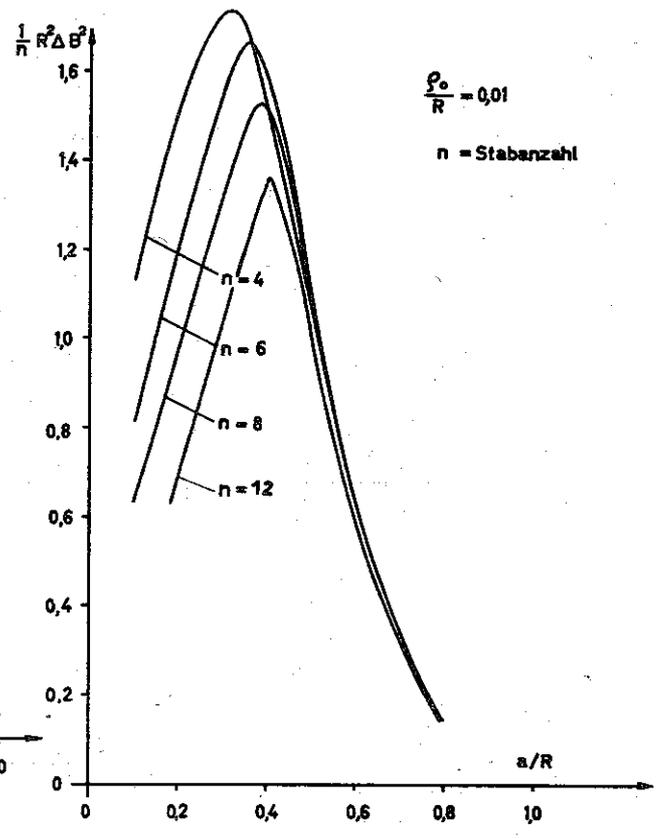
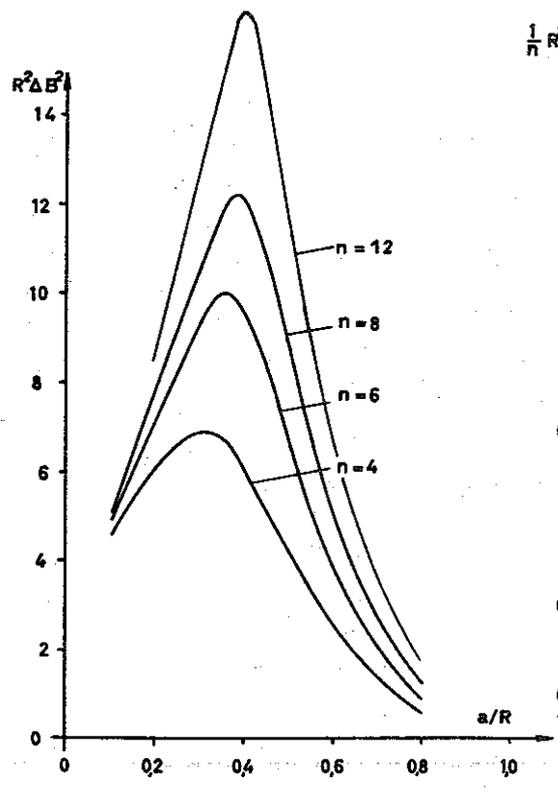


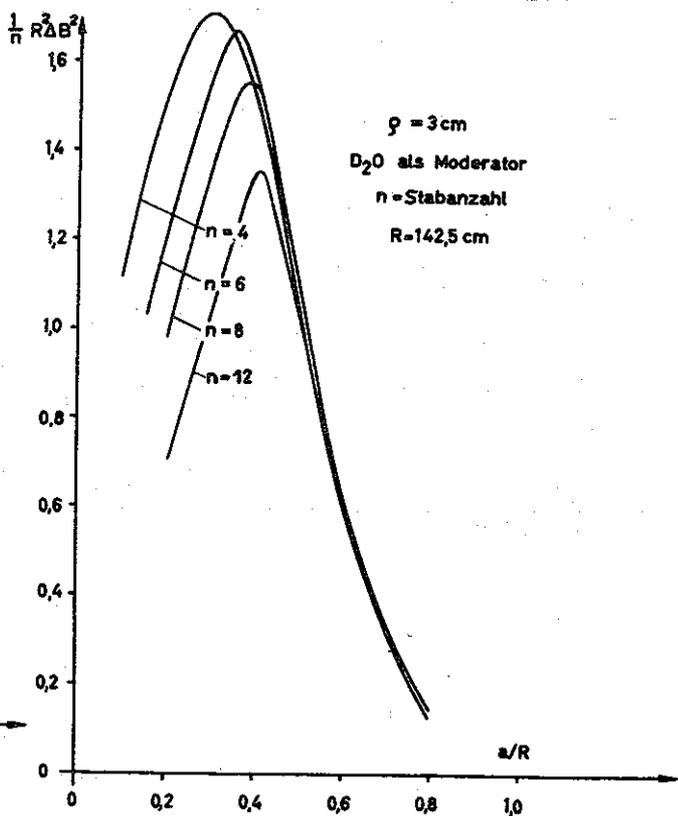
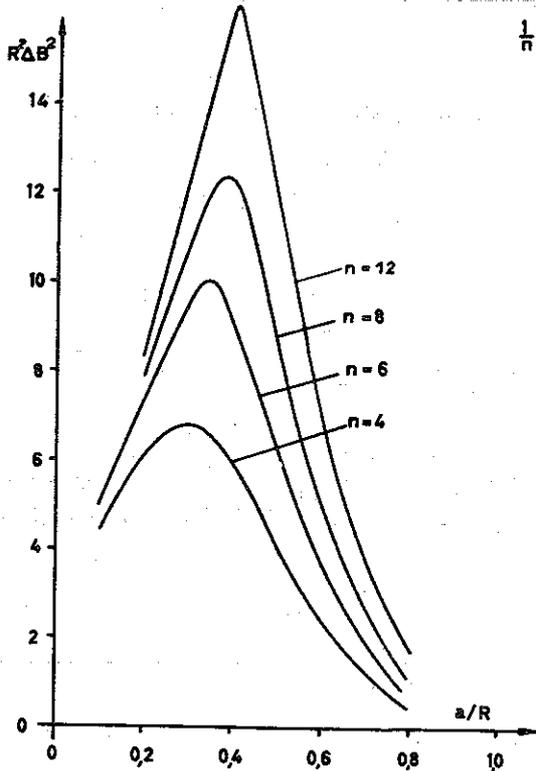
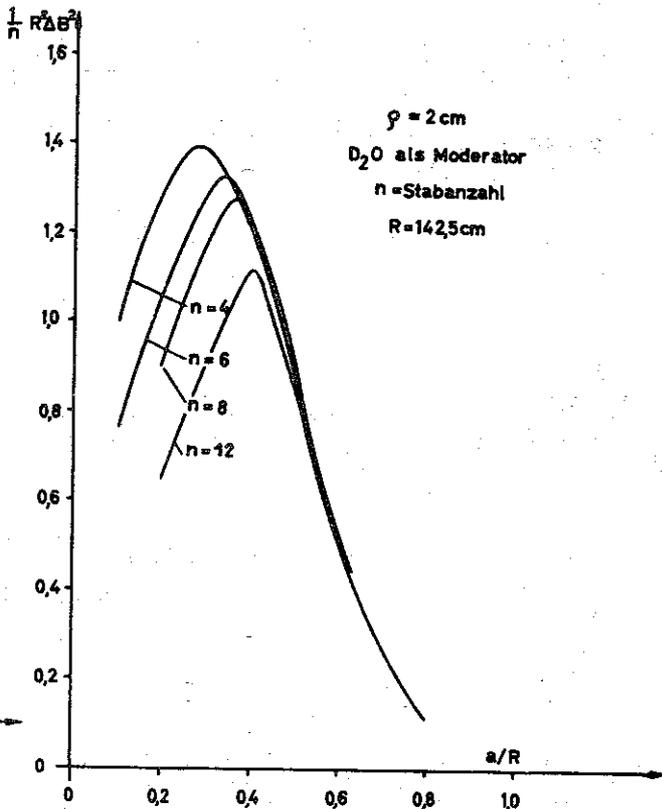
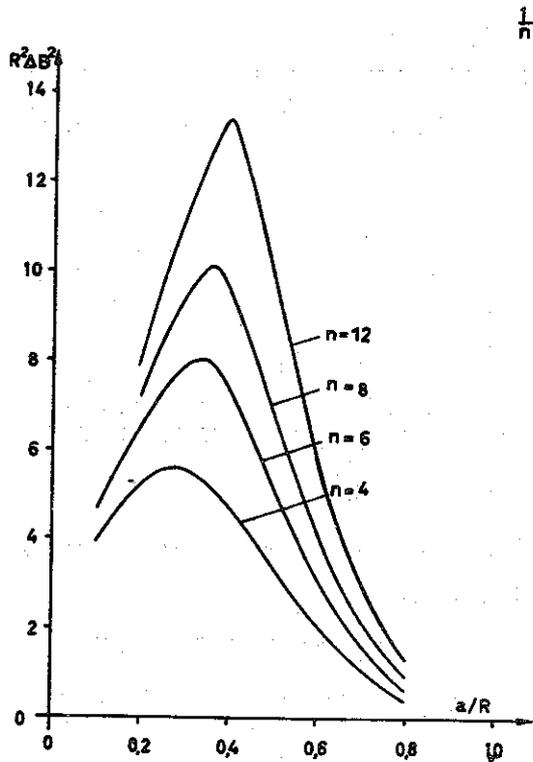












$$x = R B_N$$

| $\frac{l/R}{a/R}$             | 0,2         | 0,3          | 0,4          | 0,5         | 0,6         | 0,7         | 0,8         |
|-------------------------------|-------------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,2                           | <u>3,70</u> | -            | -            | -           | -           | -           | -           |
| 0,3                           | 3,92        | <u>4,06</u>  | -            | -           | -           | -           | -           |
| 0,4                           | 4,13        | 4,24         | <u>4,22</u>  | -           | -           | -           | -           |
| 0,5                           | 4,18        | 4,26         | 4,11         | <u>3,80</u> | -           | -           | -           |
| 0,6                           | 4,03        | 4,12         | 3,91         | 3,57        | <u>3,29</u> | -           | -           |
| 0,7                           | 3,81        | 3,91         | 3,73         | 3,39        | 3,11        | <u>2,91</u> | -           |
| 0,8                           | 3,62        | 3,73         | 3,58         | 3,27        | 2,99        | 2,78        | <u>2,65</u> |
| $x^2 - 2,405^2$               |             |              |              |             |             |             |             |
| $\frac{l/R}{a/R}$             | 0,2         | 0,3          | 0,4          | 0,5         | 0,6         | 0,7         | 0,8         |
| 0,2                           | <u>7,89</u> | -            | -            | -           | -           | -           | -           |
| 0,3                           | 9,62        | <u>10,68</u> | -            | -           | -           | -           | -           |
| 0,4                           | 11,24       | 12,18        | <u>12,07</u> | -           | -           | -           | -           |
| 0,5                           | 11,66       | 12,40        | 11,15        | <u>8,69</u> | -           | -           | -           |
| 0,6                           | 10,49       | 11,21        | 9,52         | 6,97        | <u>5,07</u> | -           | -           |
| 0,7                           | 8,75        | 9,53         | 8,10         | 5,73        | 3,90        | <u>2,71</u> | -           |
| 0,8                           | 7,31        | 8,12         | 7,02         | 4,90        | 3,14        | 1,95        | <u>1,24</u> |
| $\frac{1}{8} (x^2 - 2,405^2)$ |             |              |              |             |             |             |             |
| $\frac{l/R}{a/R}$             | 0,2         | 0,3          | 0,4          | 0,5         | 0,6         | 0,7         | 0,8         |
| 0,2                           | <u>0,99</u> | -            | -            | -           | -           | -           | -           |
| 0,3                           | <u>1,20</u> | <u>1,34</u>  | -            | -           | -           | -           | -           |
| 0,4                           | 1,41        | 1,52         | <u>1,51</u>  | -           | -           | -           | -           |
| 0,5                           | 1,46        | 1,55         | 1,39         | <u>1,09</u> | -           | -           | -           |
| 0,6                           | 1,31        | 1,40         | 1,19         | 0,87        | <u>0,63</u> | -           | -           |
| 0,7                           | 1,09        | 1,19         | 1,01         | 0,72        | 0,49        | <u>0,34</u> | -           |
| 0,8                           | 0,91        | 1,01         | 0,88         | 0,61        | 0,39        | 0,24        | <u>0,15</u> |

Bei der Diskussion der Ergebnisse, wie sie in den Diagrammen vorliegen, bemerkt man zunächst, wie das Maximum der Kurven mit wachsender Stabzahl und wachsendem Stabradius zu größeren Werten  $\frac{a}{R}$  wandert. Allerdings ist dieses Auswandern nur schwach. Bei kleinen Werten von  $\frac{a}{R}$  ist die gegenseitige Kopplung der Stäbe noch stark; je mehr sie zusammenrücken, desto mehr wirken sie wie ein Stab von großem Radius. Bei großen Werten von  $\frac{a}{R}$  nimmt die Wirksamkeit stark ab, denn für  $\frac{a}{R} = 1$  ist sie natürlich Null. So bildet sich das Maximum bei mittleren Werten von  $\frac{a}{R}$  aus. Je größer die Stabanzahl und je größer der Radius ist, desto später setzt die Entkopplung ein, bei umso größeren Werten von  $\frac{a}{R}$  liegt also das Maximum. Für Werte von  $\frac{a}{R}$ , die größer als der Wert sind, bei dem das Maximum in Erscheinung tritt, ist die Entkopplung dann so vollständig, so daß die spezifische Wirksamkeit unabhängig von der Stabanzahl wird: Die Wirkungen addieren sich einfach.

Vergleicht man das Anwachsen der Wirksamkeit bei Erhöhen des Stabradius, so erkennt man, daß man schnell in eine Sättigung hineinfließt: Bei 8 Stäben zum Beispiel ist für  $\rho = 1,5$  cm die spezifische Abschaltwirkung 1,09. Würde man entsprechend den Radien 2,0 cm und 3,0 cm diesen Wert einfach mit  $\frac{4}{3}$  bzw. 2 multiplizieren, so ergäben sich die Werte 1,45 bzw. 2,18 als spezifische Abschaltwirkung. Tatsächlich heißen aber die Zahlen 1,27 bzw. 1,56, wie man leicht den Diagrammen entnehmen kann. Die linear extrapolierten Werte liegen um 14 bzw. 40 % des wahren Wertes höher als diese wahren Werte. Ähnlich ist es mit der Vergrößerung der Stabanzahl.

Nehmen wir z.B. den Fall  $\rho = 3$  cm und variieren die Stabzahl  $n$ . Für  $n = 4$  ergibt sich eine gesamte Abschaltwirkung von 6,8. Multiplizieren wir diesen Wert mit  $\frac{6}{4}$  bzw.  $\frac{8}{4}$ , so ergeben sich die Werte 10,2 bzw. 13,6. Tatsächlich ergeben sich aber aus den Diagrammen die Werte: 10,0 bzw. 12,4. Auch hier laufen wir, wenn auch langsamer in eine Sättigung hinein. Die angegebenen Zahlen sind Beispiele und sind für verschiedene Parameterkonstellationen verschieden. Man muß in jedem einzelnen Fall die Diagramme lesen. Nun erhebt sich die Frage, ob man nichts gewinnen kann, wenn man den einen Kranz von z.B. acht Stäben in zwei Kränze aufteilt, also letzten

Endes die Stäbe gleichmäßig über den Reaktor verteilt. Man erkennt an der Tabelle, daß für  $\frac{a}{R} = 0,3$  und  $\frac{l}{R} = 0,5$  sich eine noch höhere Abschaltwirkung ergibt. Aus dem für wachsende Stabanzahl immer steiler werdende Maximum der Diagramme für einen Kranz hätte man vielleicht schließen können, daß ein Abweichen vom optimalen Abstand die Wirksamkeit stark beeinträchtigt. Man erkennt, daß dem nicht so ist, sondern sich im Gegenteil noch eine leichte Steigerung ergibt. In Figur 8 ist die optimale Stabanordnung wiedergegeben.

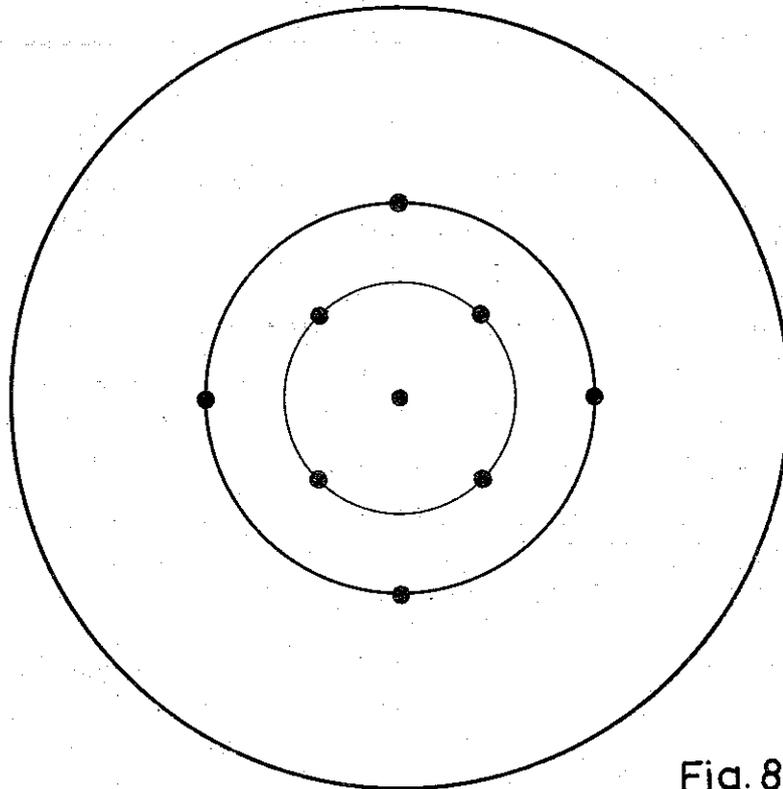


Fig. 8

Qualitativ kann man also bezüglich der Frage nach der günstigsten Stabanordnung das Ergebnis so aussprechen, daß man sagt:  
Die Stäbe sind unter einer gewissen Bevorzugung der Mitte gleichmäßig über den Reaktor zu verteilen.

Nach Fertigstellen dieser Arbeit kam dem Verfasser eine Arbeit von Raymond L. Murray <sup>+</sup> in die Hand, die dieselbe Fragestellung mit denselben Methoden nach der 2-Gruppen-Theorie behandelt.

Indessen dürfte wegen der erheblich umfangreicheren numerischen Ergebnisse die vorliegende Arbeit doch noch von Interesse sein. Ein zahlenmäßiger Vergleich ist nicht möglich, da die Wirksamkeit unmittelbar als Reaktivitätsverlust angegeben ist und nicht in Einheiten, die dem Reaktortyp gegenüber invariant sind.

Ich danke Herrn Prof. Dr. L. Biermann für die Möglichkeit, die elektronische Rechenmaschine G 1 des Max-Planck-Instituts für Physik zu benutzen. Die Durchführung der Rechnungen wurde durch dieses Hilfsmittel erst ermöglicht.

+

---

Raymond L. Murray

North Caroline State College, Raleigh, North Carolina

Published on behalf of the Nuclear Engineering and Science  
Congress by

'American Institute of Chemical Engineers'

25 West 45 Street, New York 36, New York

N11<05428526085

