[redacted]

KFK-10-T1

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

KBB

1.5.1957 (57/9)	Planungsabteilung	Bericht Nr. 10 1

TSCHEBYSCHEFF'SCHE APPROXIMATIONEN FÜR BESSELFUNKTIONEN

(Teil I)

von

Helmut Werner

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

1.5.1957 (57/9)	Planungsabteilung	Bericht Nr. 10

Tschebyscheff'sche Approximationen für Besselfunktionen

(Teil I)

Helmut Werner

In elektronischen Rechenmaschinen werden transzendente Funktionen, die während einer Rechnung gebraucht werden, meist als Potenzreihenentwicklungen verschlüsselt, wobei die Maschine selbst die Koeffizienten bildet und die Summe abbricht, sobald das letzte gebildete Glied eine vorgegebene Größe unterschreitet. Wenn diese Entwicklungen für große Argumente nur langsam konvergieren, ist ein anderes Verfahren angemessener. Man benutzt dann Polynome $f^*(x)$, die die Funktion $f(x)$ in einem vorgegebenen Intervall möglichst gut approximieren. Für diese Polynome soll also

$$\underset{x_0 \leqq x \leqq x_1}{\mathrm{Max}} \left| f(x) - f^*(x) \right|$$

möglichst klein werden. Man nennt dieses Verfahren Tschebyscheff'sche Approximation.

Im folgenden werden solche Approximationen für die bei $x = 0$ regulären Besselfunktionen im Intervall $|x| \leqq 8$ angegeben. Außerhalb dieses Bereiches können die asymptotischen Darstellungen der Besselfunktionen benutzt werden.

Zum Ansatz wurde ein Polynom benutzt, das an vorgegebenen Stellen x_i mit der zu approximierenden Funktion übereinstimmt. Für diese "Nullstellen" ist also der Fehler $\varepsilon(x_i) = f^*(x_i) - f(x_i) = 0$. Dieses Polynom wurde in einem iterativen Prozeß so abgeändert, daß die Maxima von $|\varepsilon(x)|$ zwischen den einzelnen Nullstellen alle gleich groß werden. Das so gewonnene Polynom $f^*(x)$ erfüllt dann nach allgemeinen Sätzen der Analysis die obige Bedingung und stellt daher in diesem Sinne die "beste" Approximation dar (1).

Die im folgenden zusammengestellten Blätter geben neben den Approximationsfunktionen $f^*(x)$ auch den genauen Verlauf der Fehlerkurven $\varepsilon(x)$ an. In den Abbildungen 1 und 2 sind Angaben zusammengestellt, die es einem Benutzer einer elektronischen Rechenmaschine ermöglichen sollen, im Bedarfsfall noch genauere Approximationen ohne großen Rechenaufwand zu bestimmen. In Abbildung 1 ist die Lage der Nullstellen von $\varepsilon(x)$ als Funktion der Zahl der Koeffizienten für die Funktion J_0, J_1, I_0 und I_1 dargestellt. Man kann daraus durch Extrapolation solche Abszissenwerte x bestimmen, die für den Ansatz der nächsthöheren Approximation geeignet sind. Abbildung 2 gibt Aufschluß über die zu erwartende Güte dieser Approximation.

Eine Fortsetzung dieser Arbeit wird die bei $x = 0$ singulären Funktionen Y_o, Y_1 und K_o, K_1 behandeln.

Die Rechnungen wurden auf den Göttinger Rechenmaschinen G 1 und G 2 durchgeführt. Ich bin Herrn Prof. Biermann, Max-Planck-Institut für Physik, zu großem Dank dafür verpflichtet, daß er mir die Benutzung dieser Maschinen ermöglichte. Ohne diese Hilfsmittel wäre der Rechenaufwand kaum zu überwinden gewesen. Für die Anregung zu dieser Arbeit und das stete Interesse an ihrem Fortgang möchte ich Herrn Dr. Häfele sehr danken.

Literatur:

(1) Achieser, Vorlesungen über Approximationstheorie; Berlin 1954

weitere Literatur:

C. Hastings, Approximations for Digital Computers, Princeton 1955.

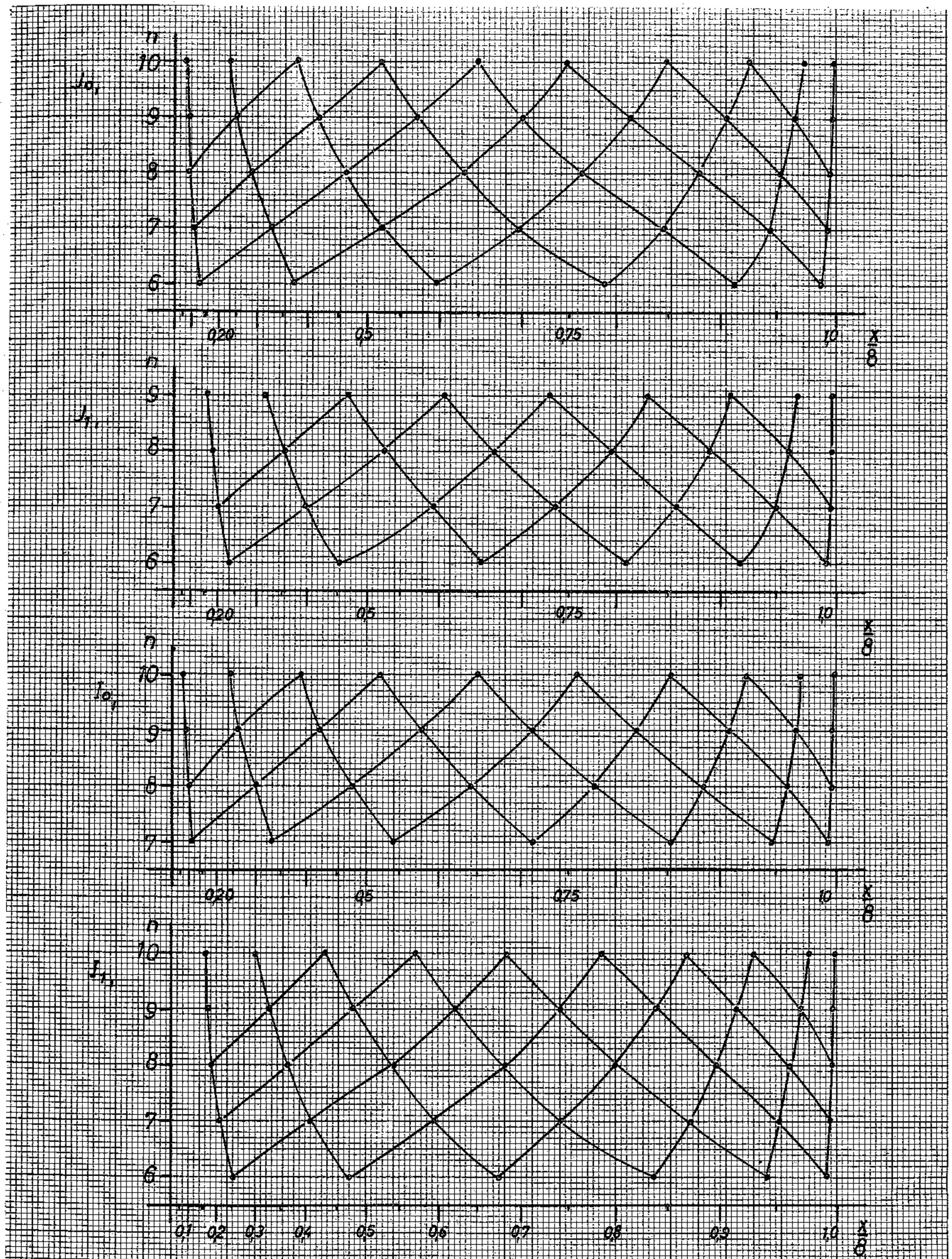


Abb 1: Lage der Nullstellen von $\varepsilon(x)$ bei den verschiedenen Funktionen (n = Anzahl der Koeffizienten).
Maßstab der Abszisse $\bar{x} = 2x(1+5x)$

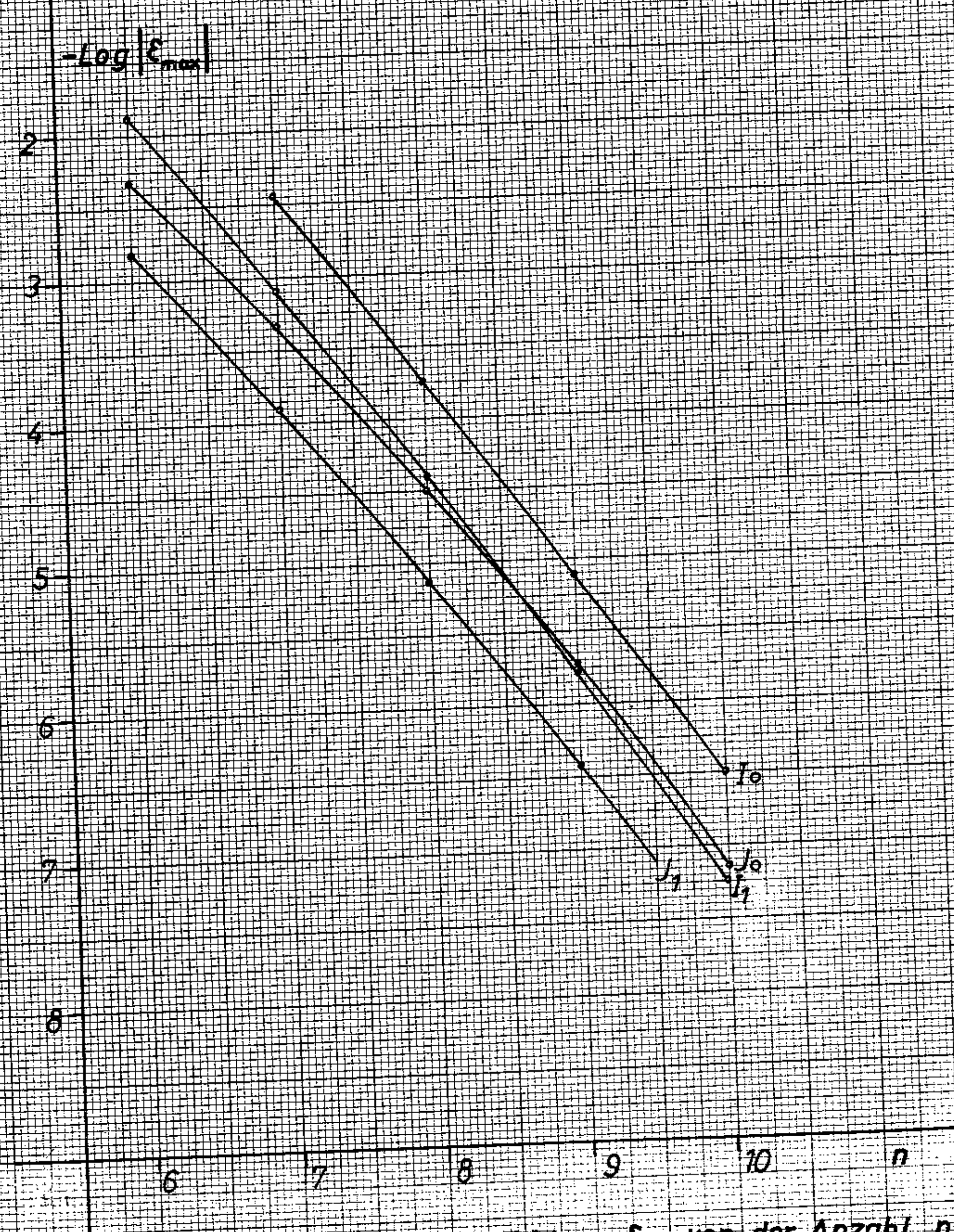


Abb 2: Abhängigkeit des Fehlers ε_{max} von der Anzahl n der Koeffizienten

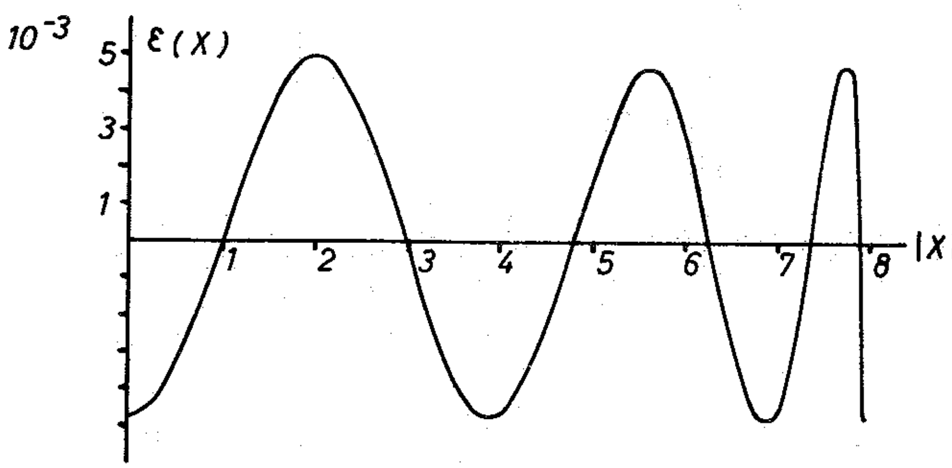
Funktion: $J_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*(x) = \sum_{v=0}^{5} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = 0{,}995\ 15$
$a_1 = -15{,}626\ 13$
$a_2 = 59{,}315\ 34$
$a_3 = -91{,}896\ 52$
$a_4 = 65{,}476\ 76$
$a_5 = -18{,}097\ 80$

$\varepsilon(x) = J_o^*(x) - J_o(x)$



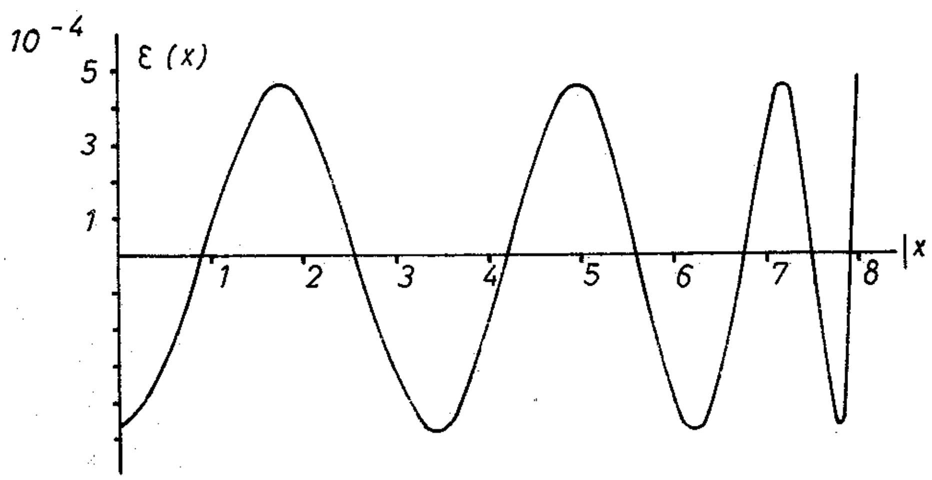
Funktion: $J_o\ (x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*\ (x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v}$

$a_o = 0{,}999\ 538$
$a_1 = -15{,}952\ 769$
$a_2 = 63{,}209\ 748$
$a_3 = -108{,}777\ 672$
$a_4 = 98{,}430\ 957$
$a_5 = -47{,}673\ 619$
$a_6 = 9{,}935\ 929$

$\varepsilon\ (x) = J_o^*\ (x) - J_o(x)$



Funktion: $J_o(x)$

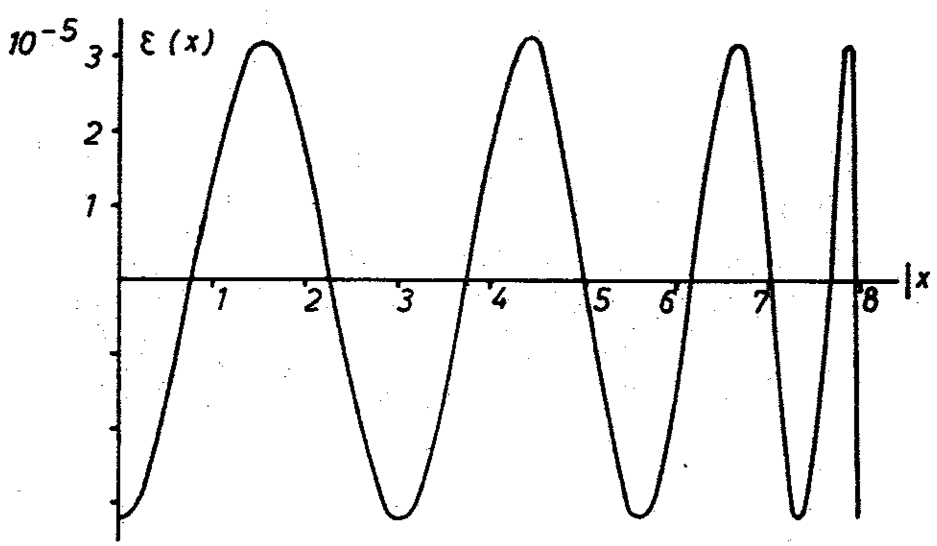
Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = 0{,}999\,9676$
$a_1 = -15{,}995\,6992$
$a_2 = 63{,}907\,0764$
$a_3 = -113{,}009\,5167$

$a_4 = 110{,}630\,5111$
$a_5 = -65{,}696\,0661$
$a_6 = 23{,}121\,6188$
$a_7 = -3{,}786\,2734$

$\varepsilon(x) = J_o^*(x) - J_o(x)$



Funktion: $J_o(x)$

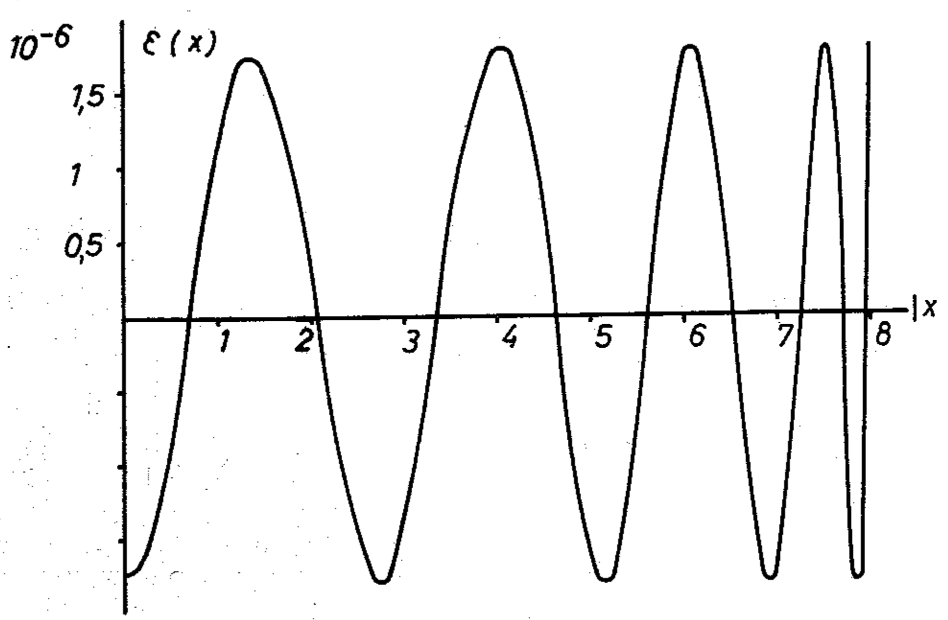
Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*(x) = \sum_{v=0}^{8} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = 0{,}9999\,9824$
$a_1 = -\ 15{,}9997\,0669$
$a_2 = 63{,}9920\,3145$
$a_3 = -\ 113{,}6941\,9518$
$a_4 = 113{,}3363\,4350$

$a_5 = -\ 71{,}4967\,9410$
$a_6 = 30{,}0052\,1187$
$a_7 = -\ 8{,}0371\,8123$
$a_8 = 1{,}0659\,4470$

$\varepsilon(x) = J_o^*(x) - J_o(x)$



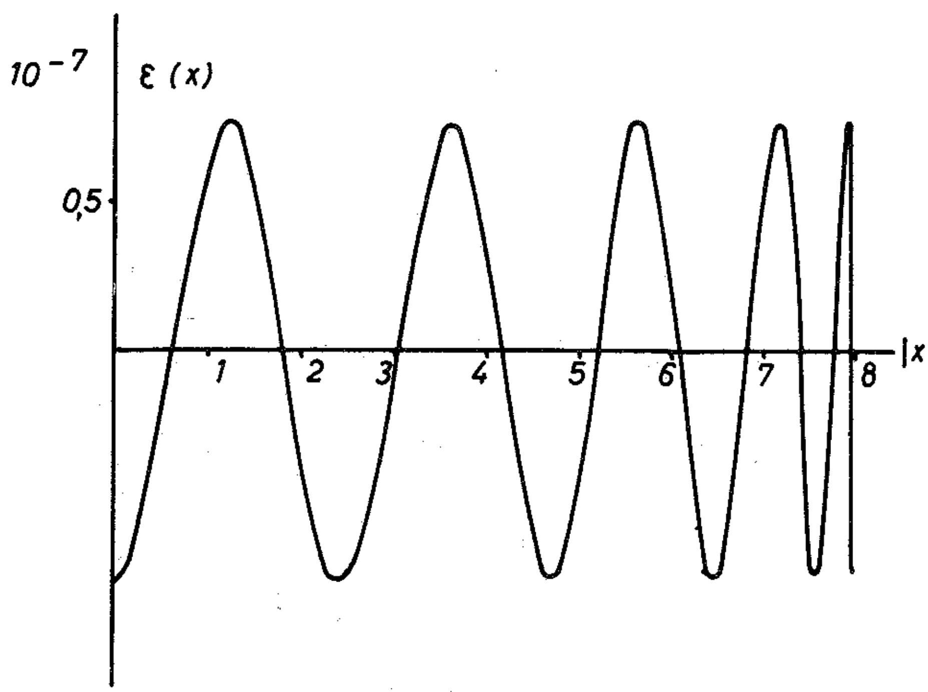
Funktion: $J_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

a_0 =	0,99999 99239	a_5 =	- 72,64714 74559
a_1 =	- 15,99998 45142	a_6 =	31,96354 76186
a_2 =	63,99948 11374	a_7 =	- 9,97944 52396
a_3 =	- 113,77103 05040	a_8 =	2,10439 78327
a_4 =	113,73310 96936	a_9 =	- 0,23127 77615

$\varepsilon(x) = J_o^*(x) - J_o(x)$



Funktion: $J_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

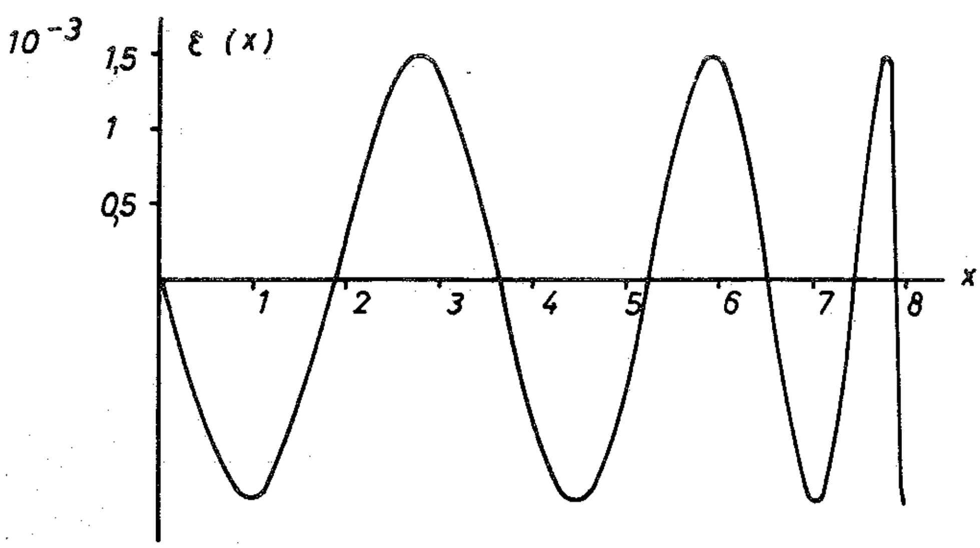
Approximation: $J_1^*(x) = \sum_{v=0}^{5} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = 3{,}979\,99$ $\quad a_3 = -95{,}112\,23$

$a_1 = -31{,}408\,88$ $\quad a_4 = 55{,}868\,44$

$a_2 = 80{,}308\,44$ $\quad a_5 = -13{,}402\,61$

$\varepsilon(x) = J_1^*(x) - J_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

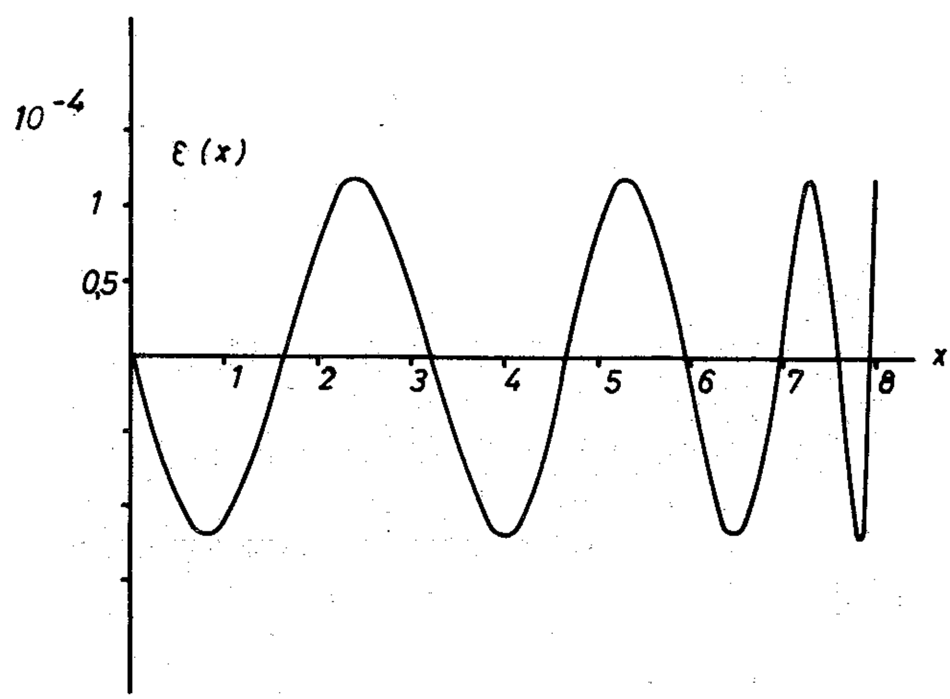
Funktion: $J_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_1^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = 3{,}998\ 131$
$a_1 = -31{,}927\ 719$
$a_2 = 84{,}521\ 876$
$a_3 = -109{,}725\ 545$
$a_4 = 80{,}447\ 872$
$a_5 = -33{,}213\ 503$
$a_6 = 6{,}133\ 647$

$\varepsilon(x) = J_1^*(x) - J_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

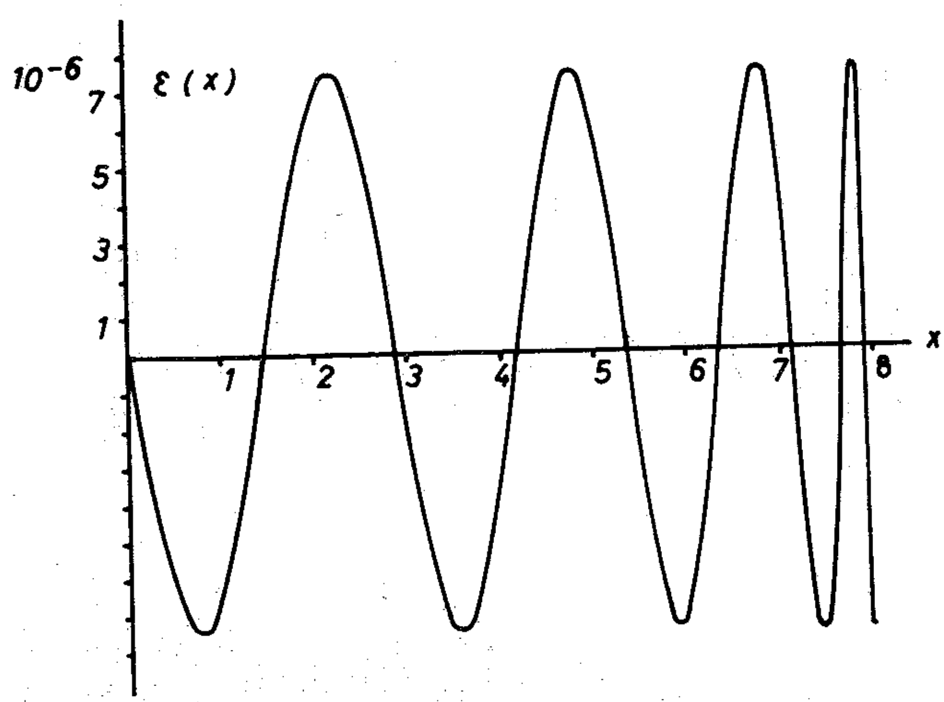
Funktion: $J_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_1^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_0 =$	3,9998 689	$a_4 =$	88,9528 422
$a_1 =$	- 31,9935 646	$a_5 =$	- 44,4122 634
$a_2 =$	85,2410 311	$a_6 =$	13,6359 076
$a_3 =$	-113,1803 145	$a_7 =$	- 2,0088 784

$\varepsilon(x) = J_1^*(x) - J_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$.

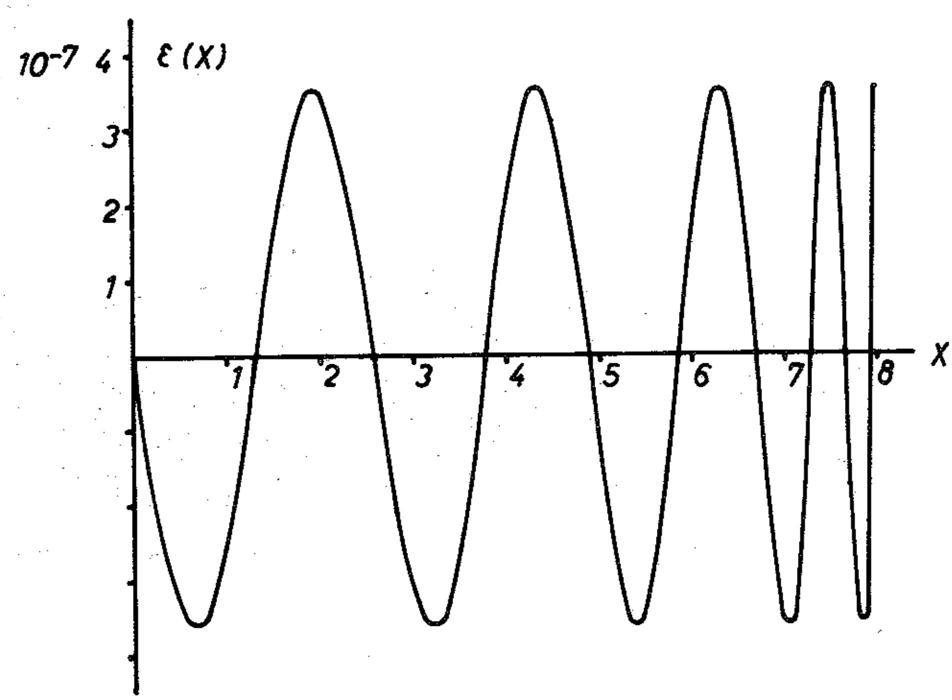
Funktion: $J_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_1^*(x) = \sum_{v=0}^{8} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = 3,9999\ 9302$	$a_5 = -47,8124\ 4770$
$a_1 = -31,9995\ 7355$	$a_6 = 17,3100\ 3982$
$a_2 = 85,3256\ 8265$	$a_7 = -4,1145\ 7410$
$a_3 = -113,7152\ 3335$	$a_8 = 0,4967\ 3964$
$a_4 = 90,7440\ 1028$	

$$\varepsilon(x) = J_1^*(x) - J_1(x)$$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

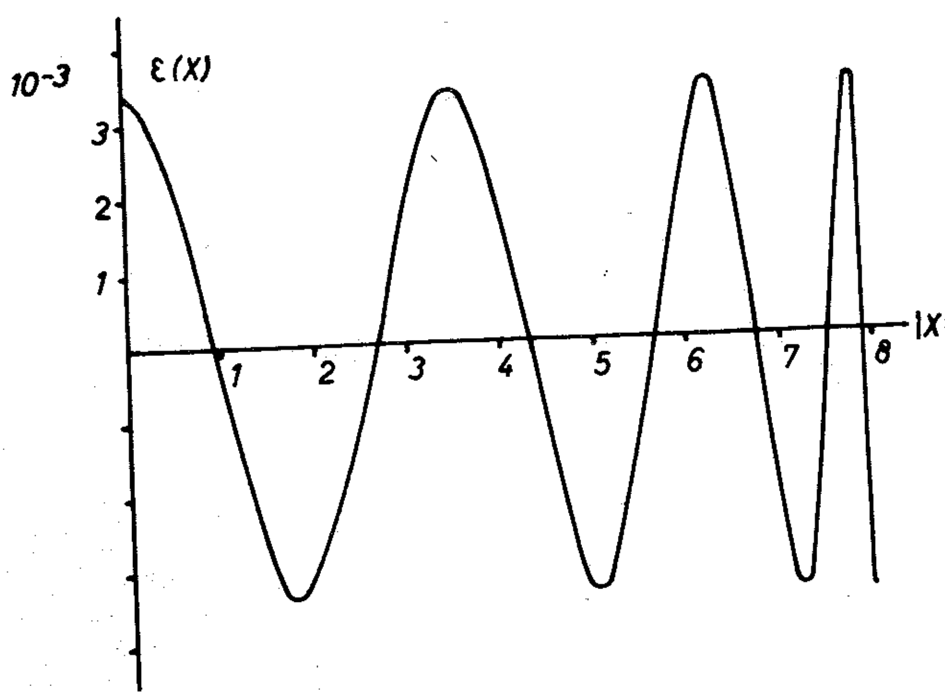
Funktion: $I_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_o^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v}$

$a_o = 1,00341$
$a_1 = 15,67531$
$a_2 = 69,03008$
$a_3 = 84,74508$
$a_4 = 192,48047$
$a_5 = -33,49576$
$a_6 = 98,12212$

$\varepsilon(x) = I_o^*(x) - I_o(x)$



Funktion: $I_o(x)$

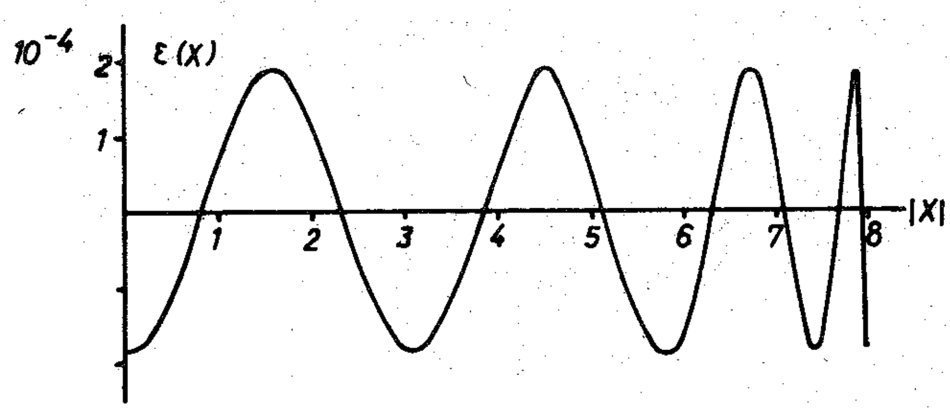
Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_o^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v}$

$a_o = 0{,}999\ 808$
$a_1 = 16{,}024\ 030$
$a_2 = 63{,}506\ 205$
$a_3 = 117{,}628\ 712$

$a_4 = 99{,}131\ 235$
$a_5 = 102{,}677\ 154$
$a_6 = -\ 0{,}456\ 618$
$a_7 = 28{,}053\ 397$

$\varepsilon(x) = I_o^*(x) - I_o(x)$



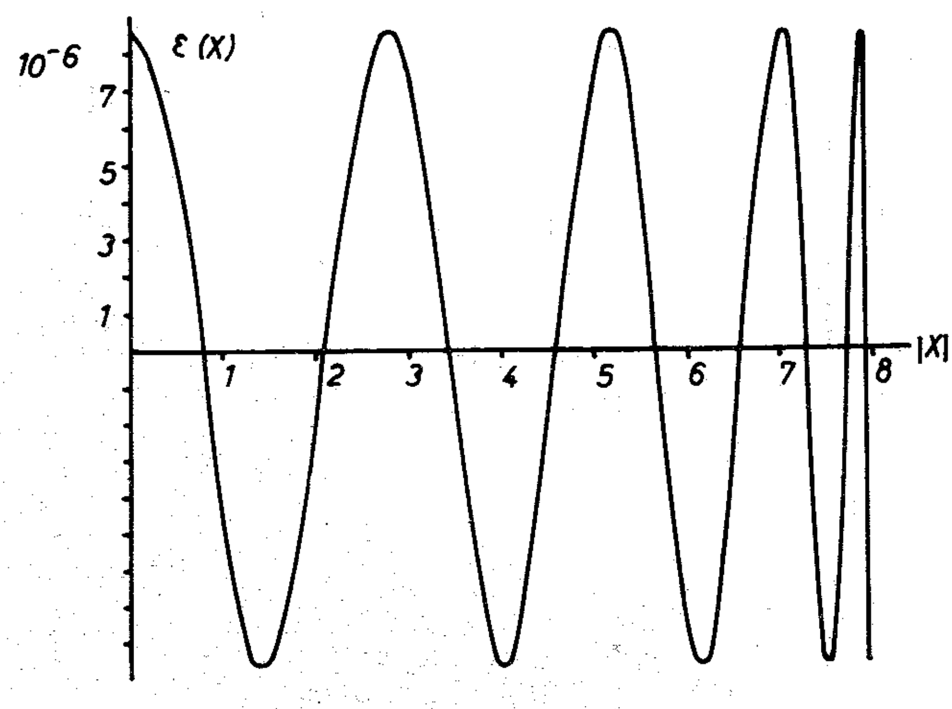
Funktion: $I_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_o^*(x) = \sum_{v=0}^{8} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = 1{,}000\ 0087$
$a_1 = 15{,}998\ 6087$
$a_2 = 64{,}036\ 5097$
$a_3 = 113{,}409\ 7078$
$a_4 = 115{,}629\ 6372$
$a_5 = 67{,}618\ 2515$
$a_6 = 40{,}836\ 4888$
$a_7 = 2{,}717\ 5389$
$a_8 = 6{,}317\ 3557$

$\varepsilon(x) = I_o^*(x) - I_o(x)$



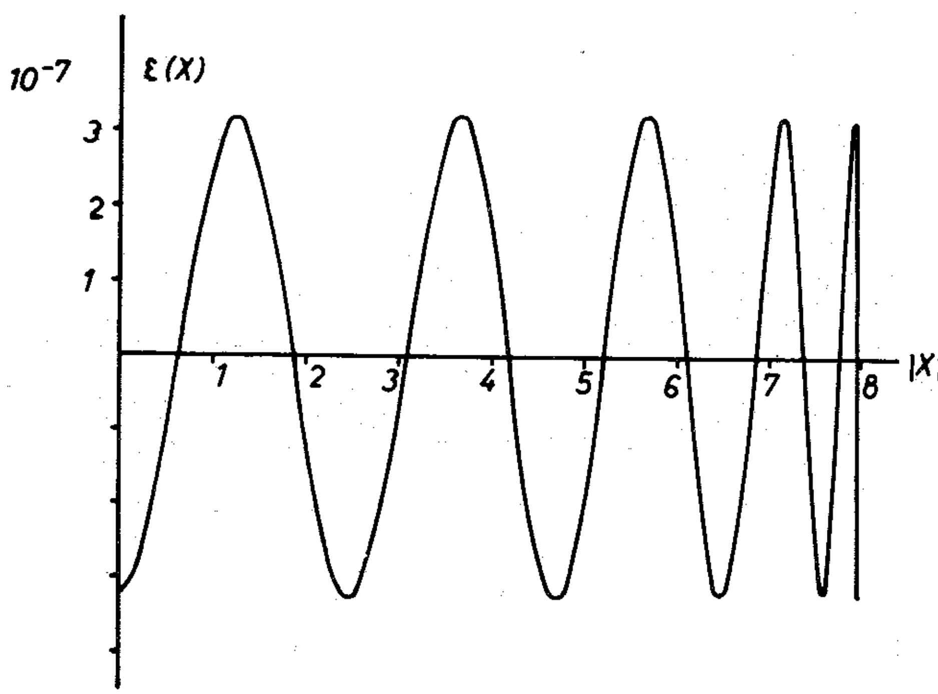
Funktion: $I_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_o^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v}$

$a_o = 0{,}9999\ 9968$
$a_1 = 16{,}0000\ 6417$
$a_2 = 63{,}9979\ 0262$
$a_3 = 113{,}8042\ 9684$
$a_4 = 113{,}6079\ 7955$
$a_5 = 73{,}4397\ 1788$
$a_6 = 30{,}9855\ 1187$
$a_7 = 12{,}4359\ 2722$
$a_8 = 1{,}1457\ 8784$
$a_9 = 1{,}1469\ 2773$

$\varepsilon(x) = I_o^*(x) - I_o(x)$



Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{5} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_o = 3,8365$

$a_1 = 36,4060$

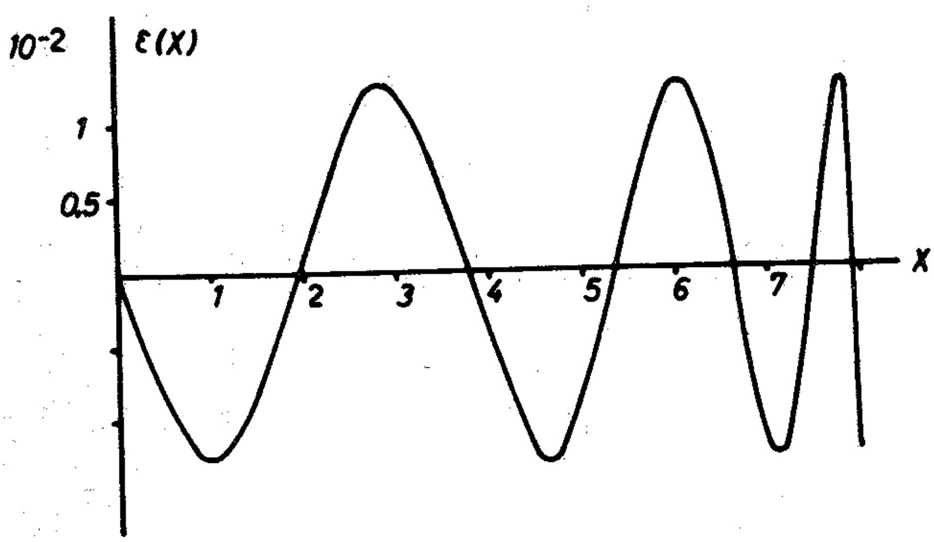
$a_2 = 51,6052$

$a_3 = 222,9180$

$a_4 = - 75,4192$

$a_5 = 160,5138$

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = - \varepsilon(x)$

Blatt: I_1, II

Funktion: $I_1(x)$

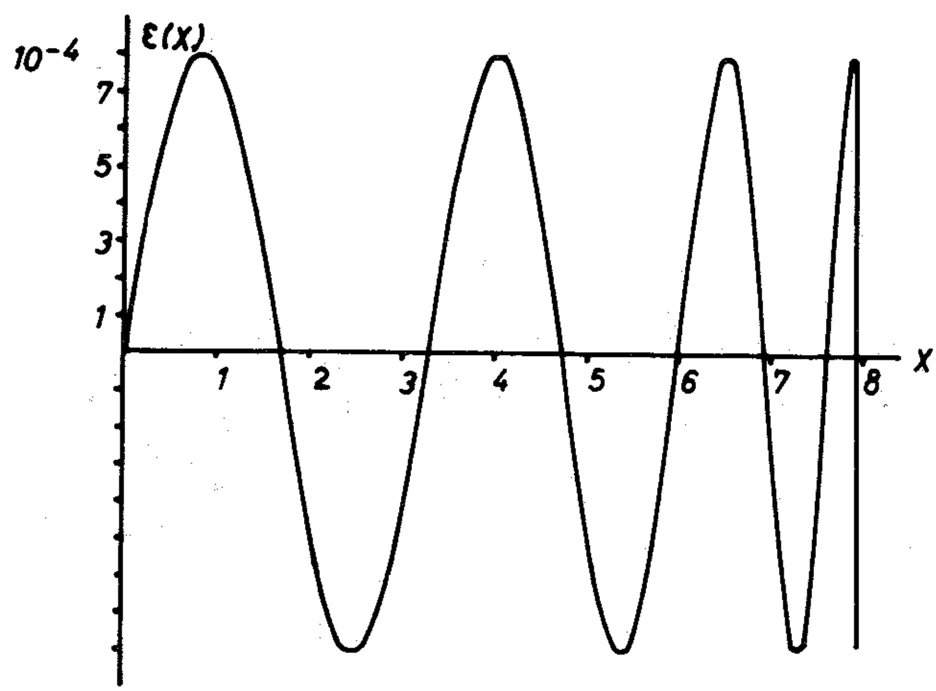
Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_o = 4{,}01202$
$a_1 = 31{,}56268$
$a_2 = 89{,}92013$
$a_3 = 92{,}70758$

$a_4 = 140{,}05165$
$a_5 = -10{,}84805$
$a_6 = 52{,}46632$

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

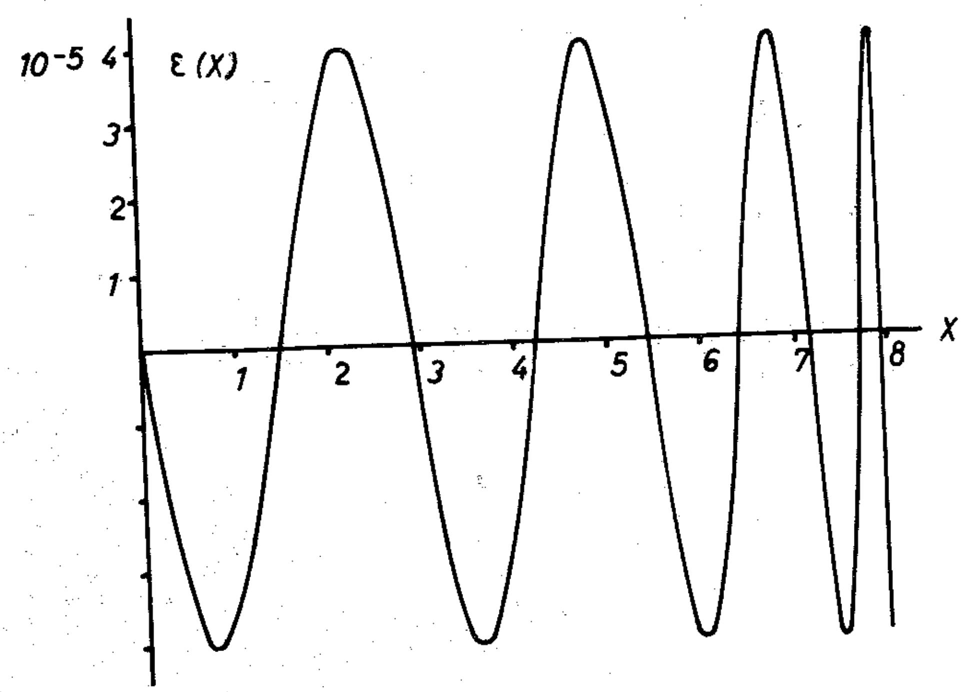
$a_0 = 3,999\,308$ $\quad a_4 = 82,161\,321$

$a_1 = 32,032\,571$ $\quad a_5 = 64,589\,936$

$a_2 = 84,886\,526$ $\quad a_6 = 2,369\,886$

$a_3 = 116,519\,356$ $\quad a_7 = 13,314\,191$

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

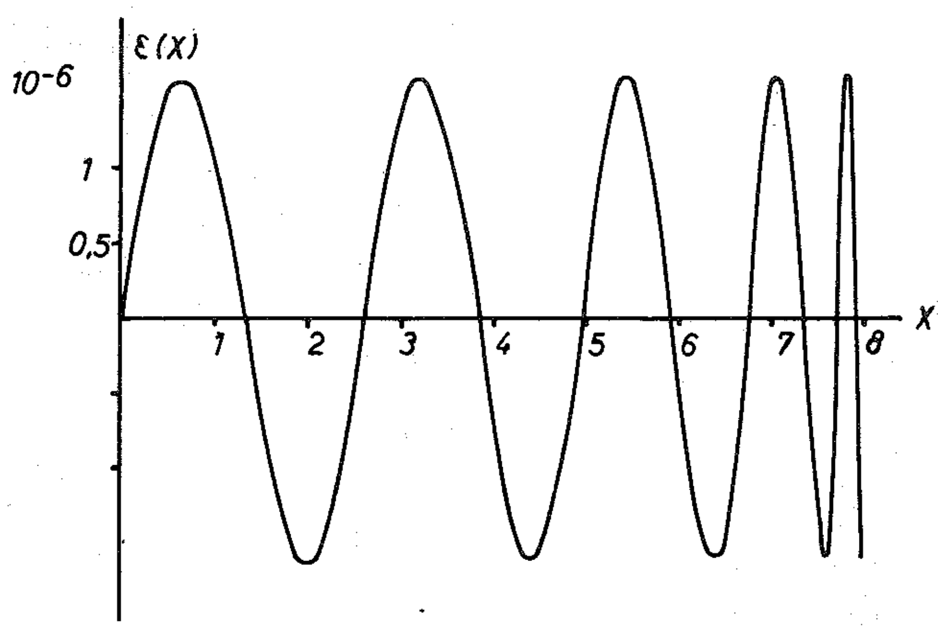
Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{\nu=0}^{8} a_\nu \left(\frac{x}{8} \right)^{2\nu+1}$

a_0 = 4,0000 3170	a_5 = 45,8444 5584
a_1 = 31,9981 2009	a_6 = 22,4918 9739
a_2 = 85,3659 5445	a_7 = 1,8484 1209
a_3 = 113,5210 9772	a_8 = 2,6911 2125
a_4 = 92,1120 4458	

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1'(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

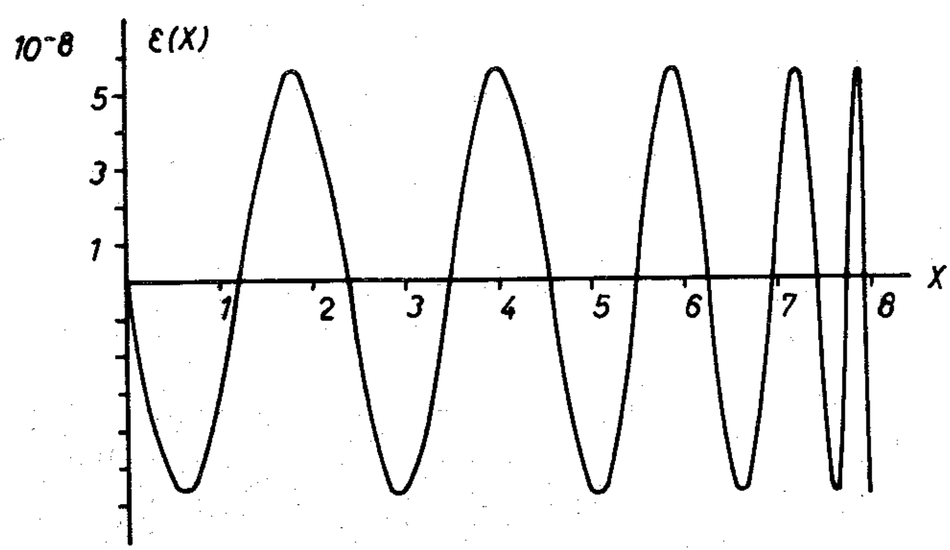
Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

a_0 =	3,99999 8802	a_5 =	48,85899 5315
a_1 =	32,00008 6980	a_6 =	17,86491 3364
a_2 =	85,33147 4517	a_7 =	6,07013 4559
a_3 =	113,79596 7431	a_8 =	0,58411 5288
a_4 =	90,92460 0045	a_9 =	0,44285 0424

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$