[redacted]

KFK-10-T1

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

KBB

1.5.1957 (57/9) Planungsabteilung Bericht Nr. 10/1

TSCHEBYSCHEFF'SCHE APPROXIMATIONEN FÜR BESSELFUNKTIONEN

(Teil I)

von

Helmut Werner

TA 7.002

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

1.5.1957 (57/9)	Planungsabteilung	Bericht Nr. 10

Tschebyscheff'sche Approximationen für Besselfunktionen

(Teil I)

Helmut Werner

In elektronischen Rechenmaschinen werden transzendente Funktionen, die während einer Rechnung gebraucht werden, meist als Potenzreihenentwicklungen verschlüsselt, wobei die Maschine selbst die Koeffizienten bildet und die Summe abbricht, sobald das letzte gebildete Glied eine vorgegebene Größe unterschreitet. Wenn diese Entwicklungen für große Argumente nur langsam konvergieren, ist ein anderes Verfahren angemessener. Man benutzt dann Polynome $f^*(x)$, die die Funktion $f(x)$ in einem vorgegebenen Intervall möglichst gut approximieren. Für diese Polynome soll also

$$\max_{x_0 \leqq x \leqq x_1} \left| f(x) - f^*(x) \right|$$

möglichst klein werden. Man nennt dieses Verfahren Tschebyscheff'sche Approximation.

Im folgenden werden solche Approximationen für die bei $x = 0$ regulären Besselfunktionen im Intervall $|x| \leqq 8$ angegeben. Außerhalb dieses Bereiches können die asymptotischen Darstellungen der Besselfunktionen benutzt werden.

Zum Ansatz wurde ein Polynom benutzt, das an vorgegebenen Stellen x_i mit der zu approximierenden Funktion übereinstimmt. Für diese "Nullstellen" ist also der Fehler $\varepsilon(x_i) = f^*(x_i) - f(x_i) = 0$. Dieses Polynom wurde in einem iterativen Prozeß so abgeändert, daß die Maxima von $|\varepsilon(x)|$ zwischen den einzelnen Nullstellen alle gleich groß werden. Das so gewonnene Polynom $f^*(x)$ erfüllt dann nach allgemeinen Sätzen der Analysis die obige Bedingung und stellt daher in diesem Sinne die "beste" Approximation dar (1).

Die im folgenden zusammengestellten Blätter geben neben den Approximationsfunktionen $f^*(x)$ auch den genauen Verlauf der Fehlerkurven $\varepsilon(x)$ an. In den Abbildungen 1 und 2 sind Angaben zusammengestellt, die es einem Benutzer einer elektronischen Rechenmaschine ermöglichen sollen, im Bedarfsfall noch genauere Approximationen ohne großen Rechenaufwand zu bestimmen. In Abbildung 1 ist die Lage der Nullstellen von $\varepsilon(x)$ als Funktion der Zahl der Koeffizienten für die Funktion J_0, J_1, I_0 und I_1 dargestellt. Man kann daraus durch Extrapolation solche Abszissenwerte x bestimmen, die für den Ansatz der nächsthöheren Approximation geeignet sind. Abbildung 2 gibt Aufschluß über die zu erwartende Güte dieser Approximation.

Eine Fortsetzung dieser Arbeit wird die bei x = 0 singulären Funktionen Y_o, Y_1 und K_o, K_1 behandeln.

Die Rechnungen wurden auf den Göttinger Rechenmaschinen G 1 und G 2 durchgeführt. Ich bin Herrn Prof. Biermann, Max-Planck-Institut für Physik, zu großem Dank dafür verpflichtet, daß er mir die Benutzung dieser Maschinen ermöglichte. Ohne diese Hilfsmittel wäre der Rechenaufwand kaum zu überwinden gewesen. Für die Anregung zu dieser Arbeit und das stete Interesse an ihrem Fortgang möchte ich Herrn Dr. Häfele sehr danken.

Literatur:

(1) Achieser, Vorlesungen über Approximationstheorie; Berlin 1954

weitere Literatur:

C. Hastings, Approximations for Digital Computers, Princeton 1955.

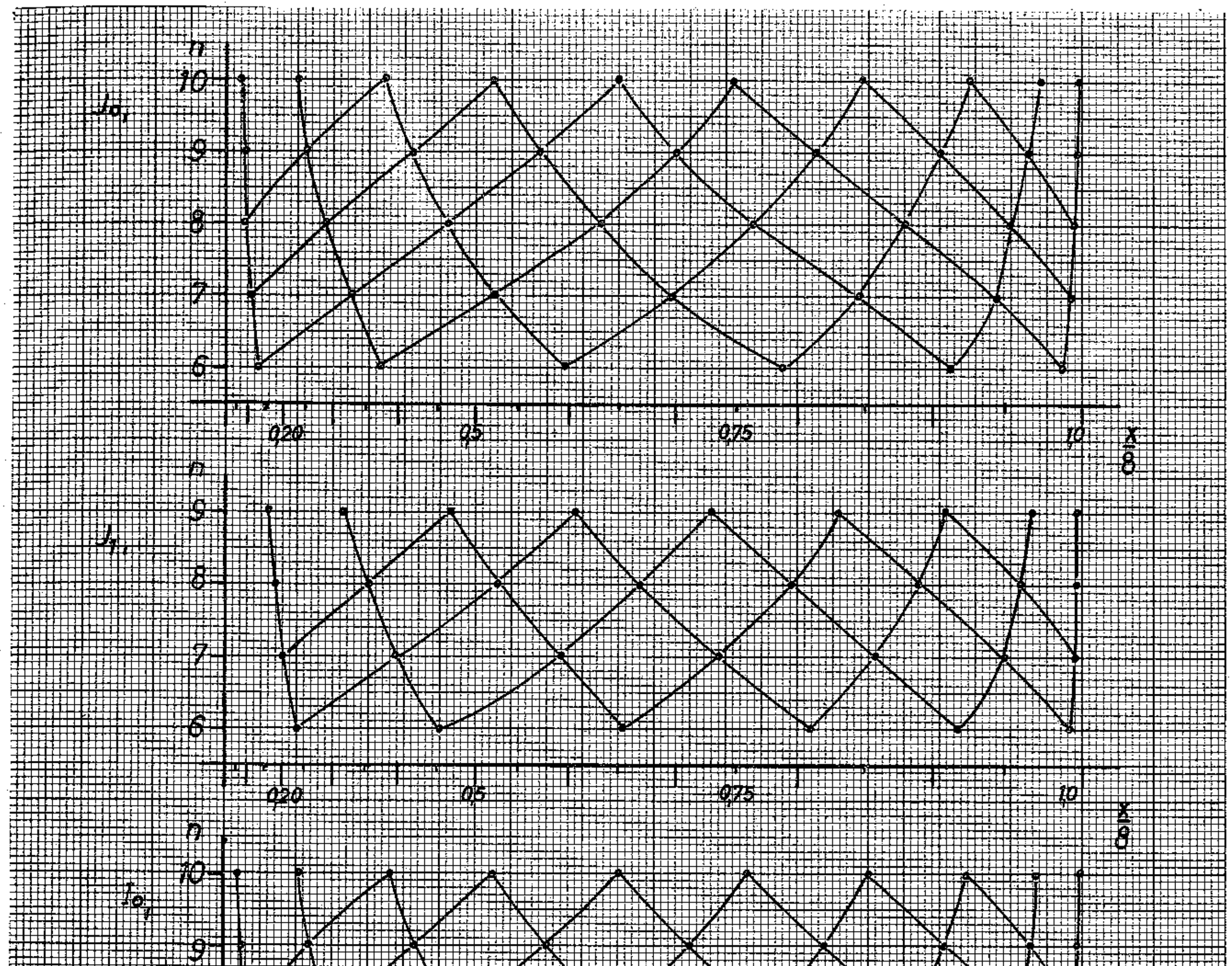


Abb 1: Lage der Nullstellen von $\varepsilon(x)$ bei den verschiedenen Funktionen (n = Anzahl der Koeffizienten). Maßstab der Abszisse $\bar{x} = 2x(1+5x)$

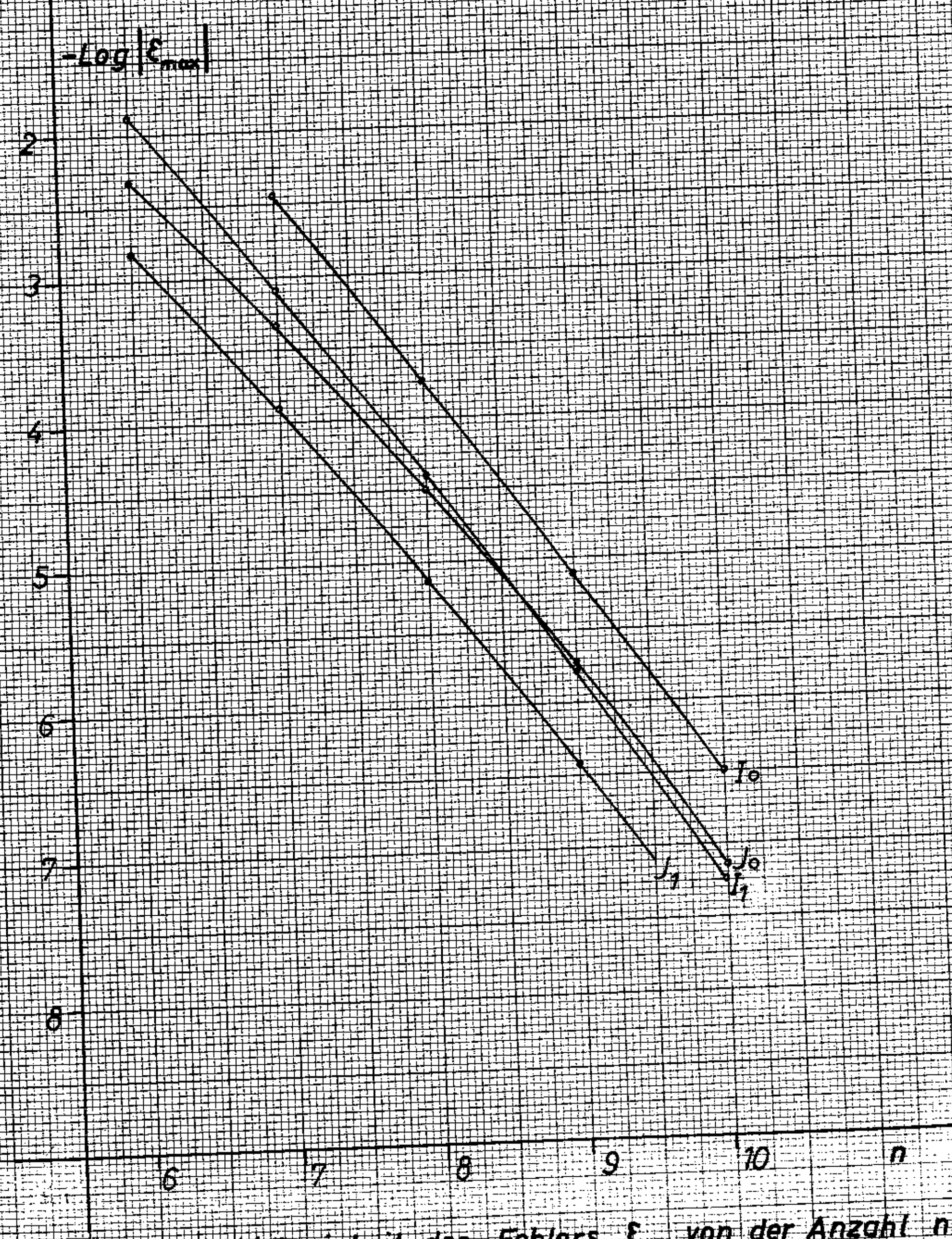


Abb 2: Abhängigkeit des Fehlers ε_{max} von der Anzahl n der Koeffizienten

Funktion: $J_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*(x) = \sum_{v=0}^{5} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = 0{,}995\,15$

$a_1 = -15{,}626\,13$

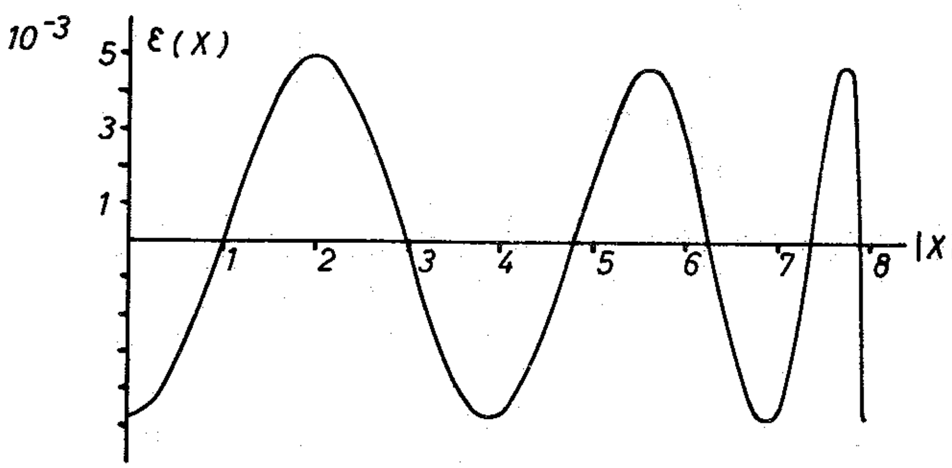
$a_2 = 59{,}315\,34$

$a_3 = -91{,}896\,52$

$a_4 = 65{,}476\,76$

$a_5 = -18{,}097\,80$

$\varepsilon(x) = J_o^*(x) - J_o(x)$



Funktion: $J_o\,(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*\,(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v}$

$a_o = 0{,}999\,538$

$a_1 = -15{,}952\,769$

$a_2 = 63{,}209\,748$

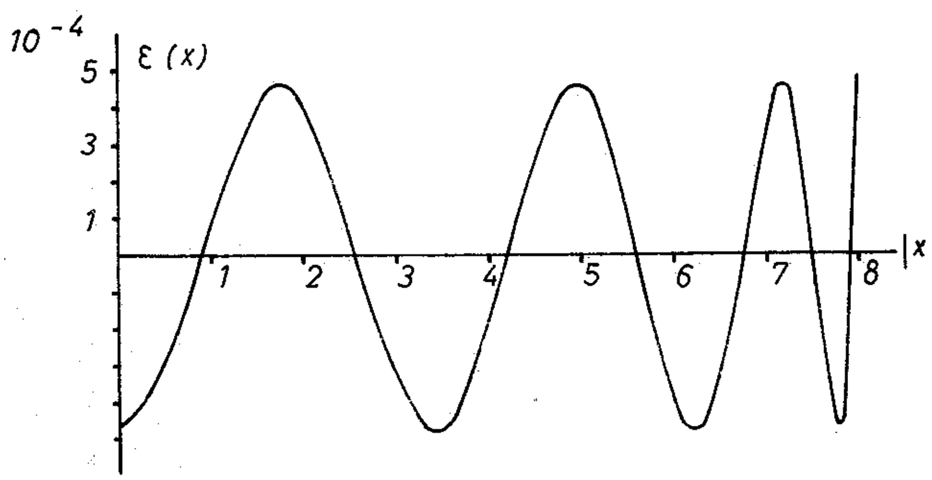
$a_3 = -108{,}777\,672$

$a_4 = 98{,}430\,957$

$a_5 = -47{,}673\,619$

$a_6 = 9{,}935\,929$

$\varepsilon\,(x) = J_o^*\,(x) - J_o(x)$



Funktion: $J_o(x)$

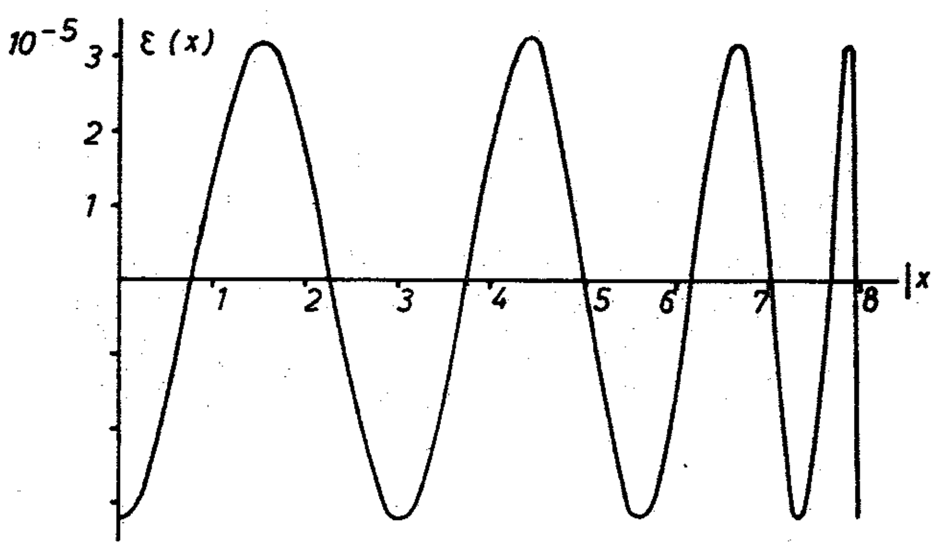
Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o =$ 0,999 9676
$a_1 =$ -15,995 6992
$a_2 =$ 63,907 0764
$a_3 =$ -113,009 5167

$a_4 =$ 110,630 5111
$a_5 =$ -65,696 0661
$a_6 =$ 23,121 6188
$a_7 =$ -3,786 2734

$\varepsilon(x) = J_o^*(x) - J_o(x)$



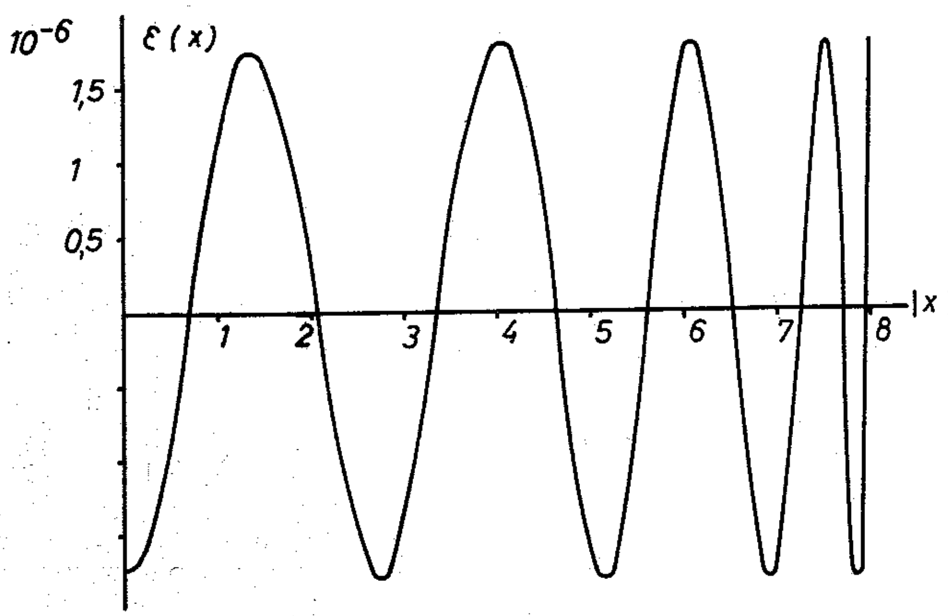
Funktion: $J_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*(x) = \sum_{v=0}^{8} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = 0{,}9999\ 9824$
$a_1 = -\ 15{,}9997\ 0669$
$a_2 = 63{,}9920\ 3145$
$a_3 = -\ 113{,}6941\ 9518$
$a_4 = 113{,}3363\ 4350$
$a_5 = -\ 71{,}4967\ 9410$
$a_6 = 30{,}0052\ 1187$
$a_7 = -\ 8{,}0371\ 8123$
$a_8 = 1{,}0659\ 4470$

$\varepsilon(x) = J_o^*(x) - J_o(x)$



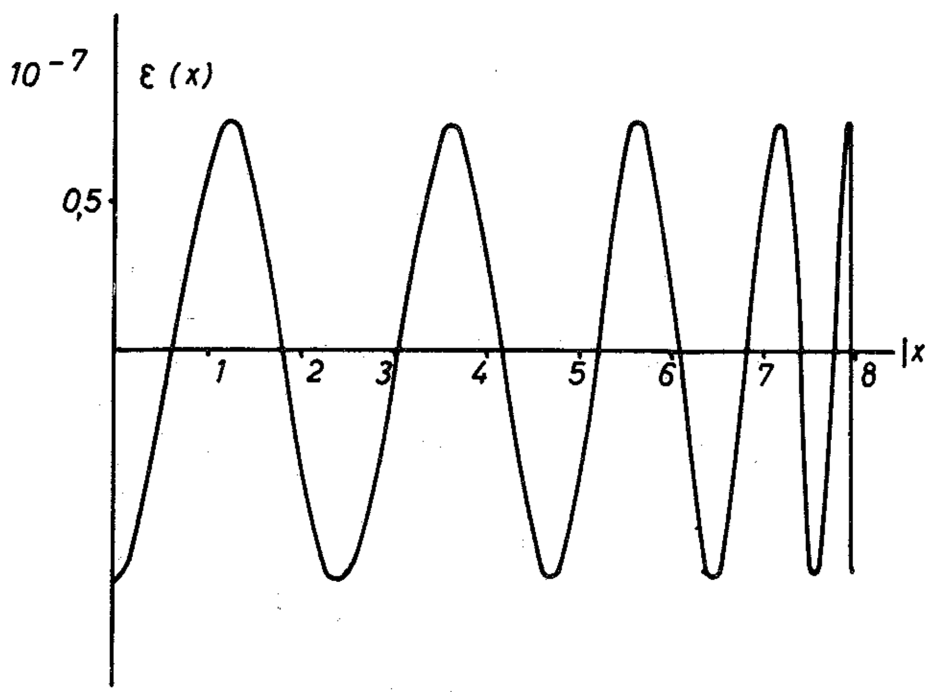
Funktion: $J_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_o^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = 0{,}99999\ 99239$
$a_1 = -\ 15{,}99998\ 45142$
$a_2 = 63{,}99948\ 11374$
$a_3 = -\ 113{,}77103\ 05040$
$a_4 = 113{,}73310\ 96936$
$a_5 = -\ 72{,}64714\ 74559$
$a_6 = 31{,}96354\ 76186$
$a_7 = -\ 9{,}97944\ 52396$
$a_8 = 2{,}10439\ 78327$
$a_9 = -\ 0{,}23127\ 77615$

$\varepsilon(x) = J_o^*(x) - J_o(x)$



Funktion: $J_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

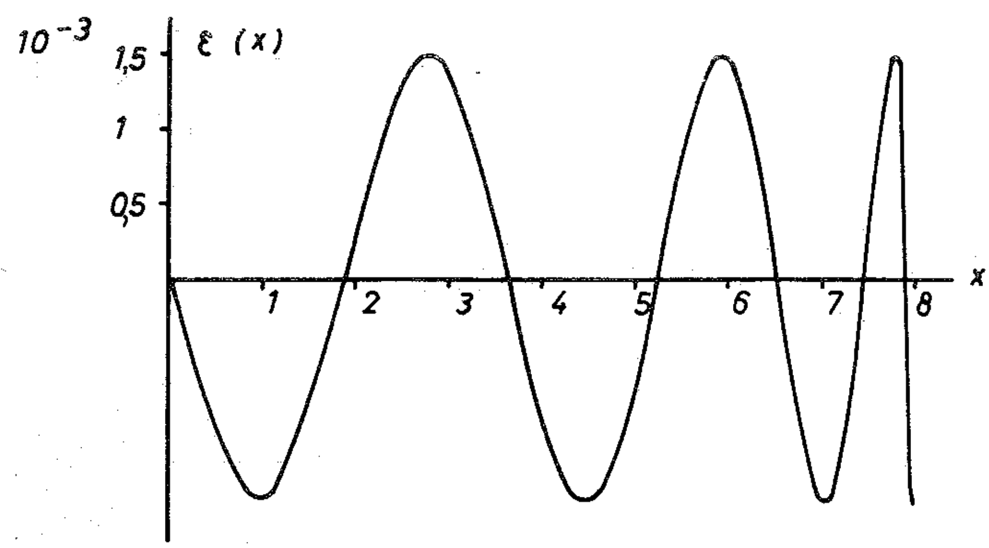
Approximation: $J_1^*(x) = \sum_{v=0}^{5} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = 3{,}979\,99$ $\quad$ $a_3 = -95{,}112\,23$

$a_1 = -31{,}408\,88$ $\quad$ $a_4 = 55{,}868\,44$

$a_2 = 80{,}308\,44$ $\quad$ $a_5 = -13{,}402\,61$

$\varepsilon(x) = J_1^*(x) - J_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

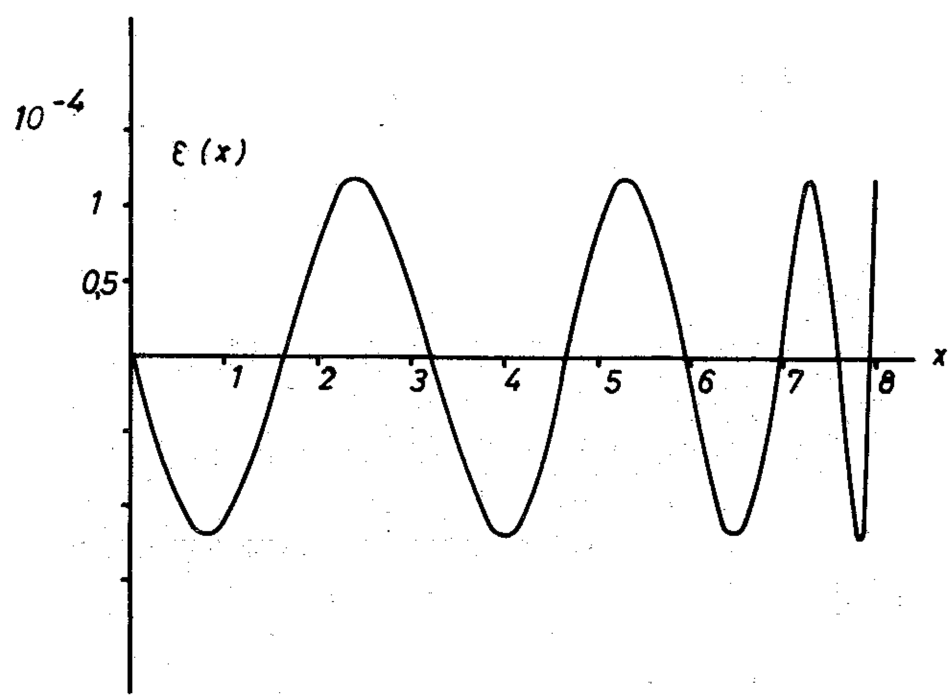
Funktion: $J_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_1^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

a_o = 3,998 131	a_4 = 80,447 872
a_1 = -31,927 719	a_5 = -33,213 503
a_2 = 84,521 876	a_6 = 6,133 647
a_3 = -109,725 545	

$\varepsilon(x) = J_1^*(x) - J_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

Funktion: $J_1(x)$

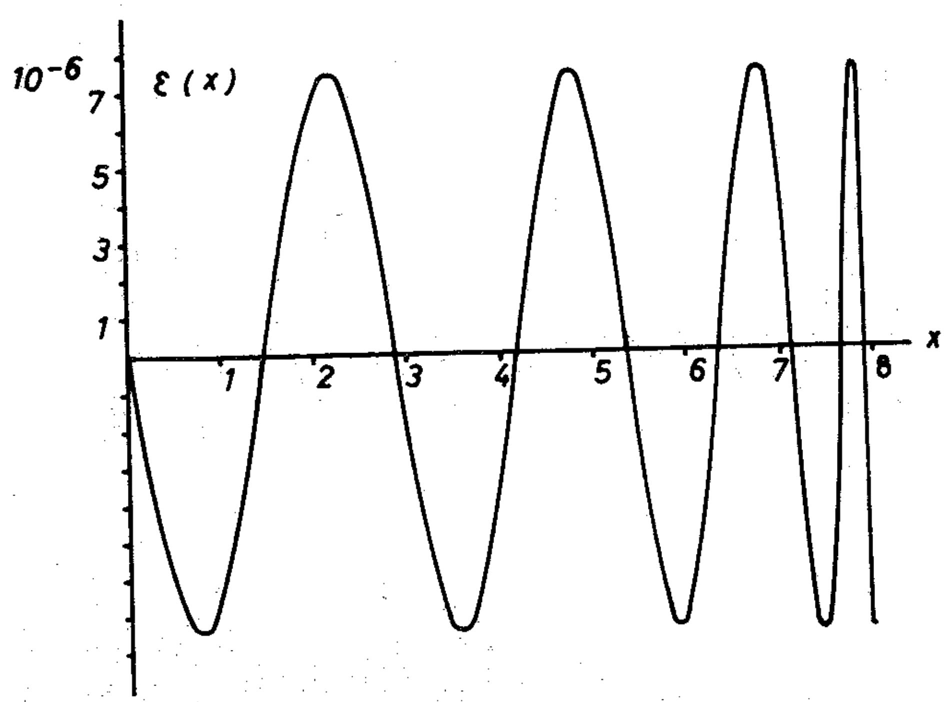
Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_1^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_o = 3{,}9998\ 689$
$a_1 = -31{,}9935\ 646$
$a_2 = 85{,}2410\ 311$
$a_3 = -113{,}1803\ 145$

$a_4 = 88{,}9528\ 422$
$a_5 = -44{,}4122\ 634$
$a_6 = 13{,}6359\ 076$
$a_7 = -2{,}0088\ 784$

$\varepsilon(x) = J_1^*(x) - J_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$.

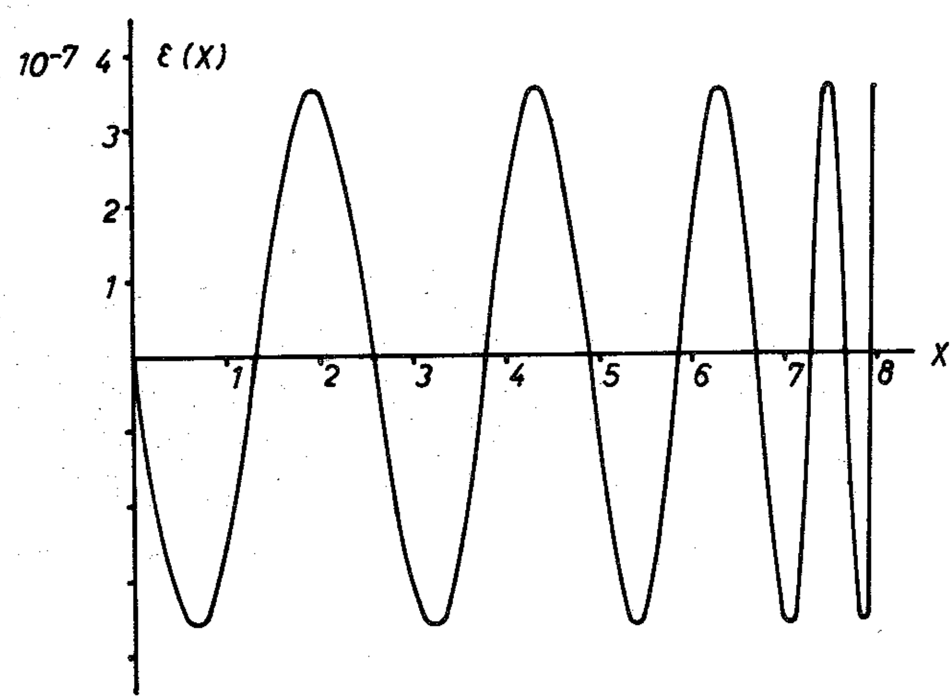
Funktion: $J_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $J_1^*(x) = \sum_{v=0}^{8} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_o = 3,9999\ 9302$
$a_1 = -31,9995\ 7355$
$a_2 = 85,3256\ 8265$
$a_3 = -113,7152\ 3335$
$a_4 = 90,7440\ 1028$
$a_5 = -\ 47,8124\ 4770$
$a_6 = 17,3100\ 3982$
$a_7 = -\ 4,1145\ 7410$
$a_8 = 0,4967\ 3964$

$\varepsilon(x) = J_1^*(x) - J_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

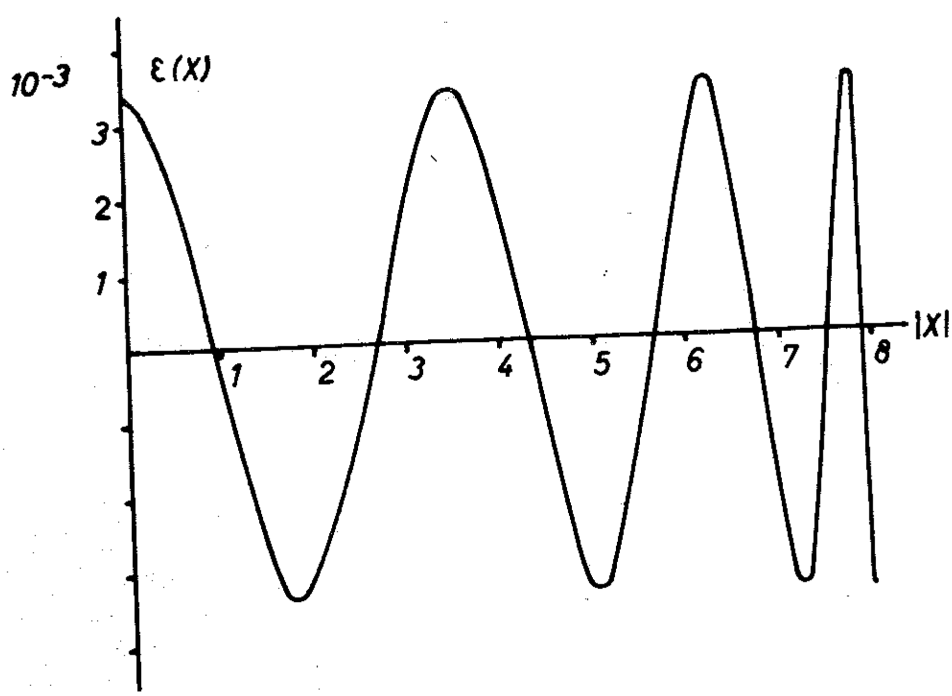
Funktion: $I_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_o^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v}$

$a_o = 1{,}00341$
$a_1 = 15{,}67531$
$a_2 = 69{,}03008$
$a_3 = 84{,}74508$
$a_4 = 192{,}48047$
$a_5 = -33{,}49576$
$a_6 = 98{,}12212$

$\varepsilon(x) = I_o^*(x) - I_o(x)$



Blatt: I_o, II

Funktion: $I_o(x)$

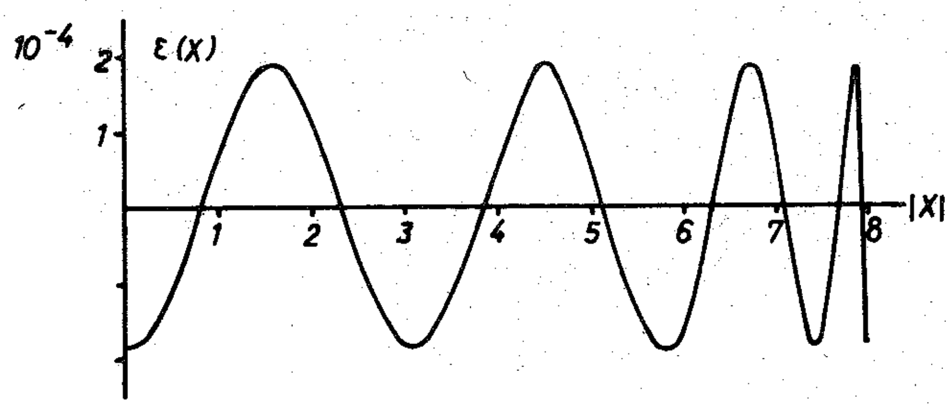
Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_o^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v}$

$a_o = 0{,}999\ 808$
$a_1 = 16{,}024\ 030$
$a_2 = 63{,}506\ 205$
$a_3 = 117{,}628\ 712$

$a_4 = 99{,}131\ 235$
$a_5 = 102{,}677\ 154$
$a_6 = -\ 0{,}456\ 618$
$a_7 = 28{,}053\ 397$

$\varepsilon(x) = I_o^*(x) - I_o(x)$



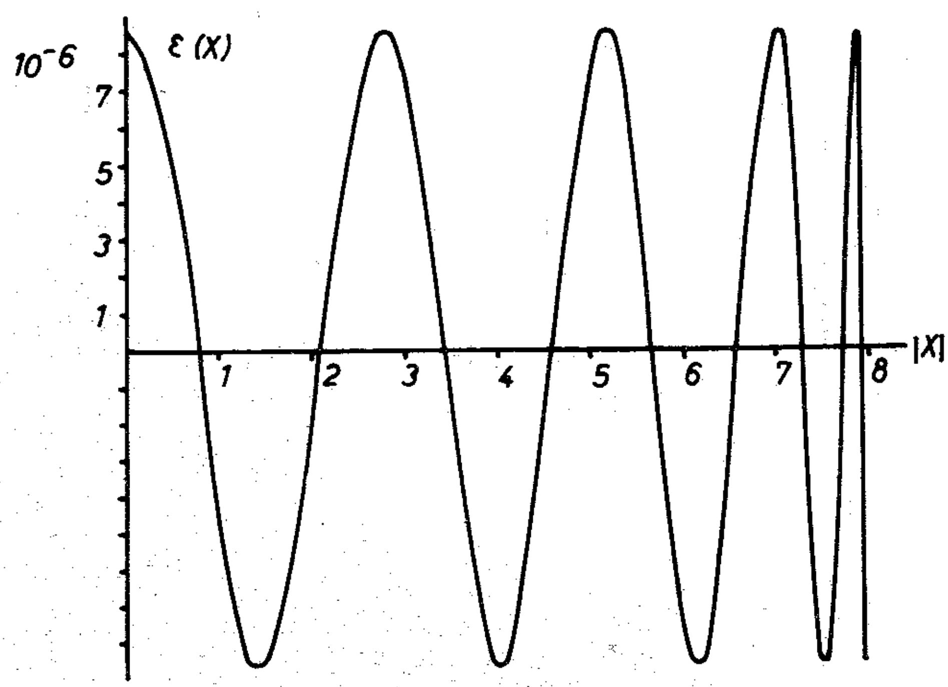
Funktion: $I_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_o^*(x) = \sum_{v=0}^{8} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = 1,000\ 0087$
$a_1 = 15,998\ 6087$
$a_2 = 64,036\ 5097$
$a_3 = 113,409\ 7078$
$a_4 = 115,629\ 6372$
$a_5 = 67,618\ 2515$
$a_6 = 40,836\ 4888$
$a_7 = 2,717\ 5389$
$a_8 = 6,317\ 3557$

$\varepsilon(x) = I_o^*(x) - I_o(x)$



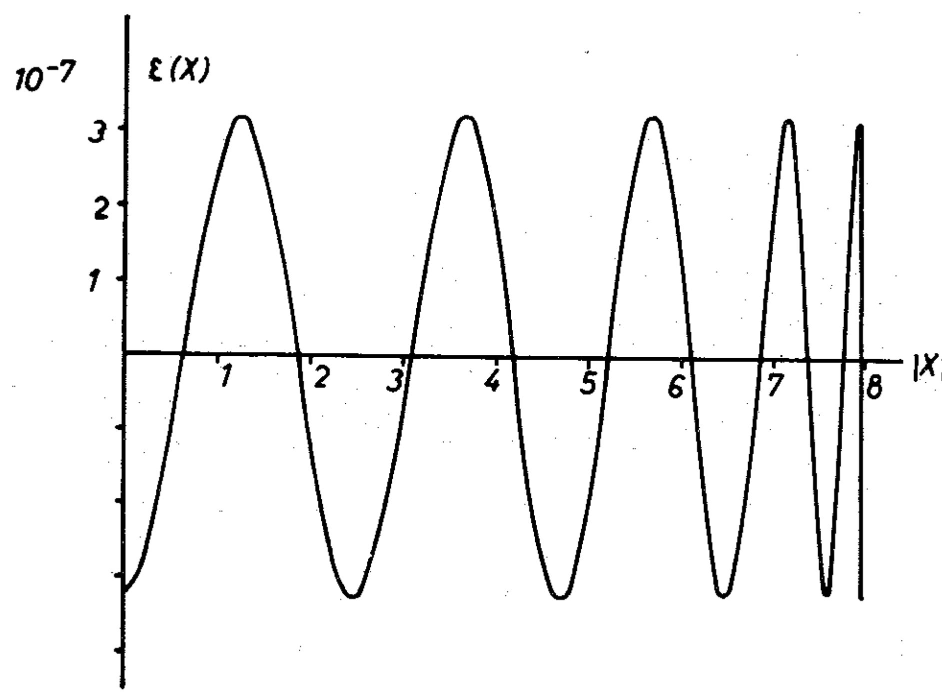
Funktion: $I_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_o^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v}$

$a_o = 0,9999\ 9968$
$a_1 = 16,0000\ 6417$
$a_2 = 63,9979\ 0262$
$a_3 = 113,8042\ 9684$
$a_4 = 113,6079\ 7955$
$a_5 = 73,4397\ 1788$
$a_6 = 30,9855\ 1187$
$a_7 = 12,4359\ 2722$
$a_8 = 1,1457\ 8784$
$a_9 = 1,1469\ 2773$

$\varepsilon(x) = I_o^*(x) - I_o(x)$



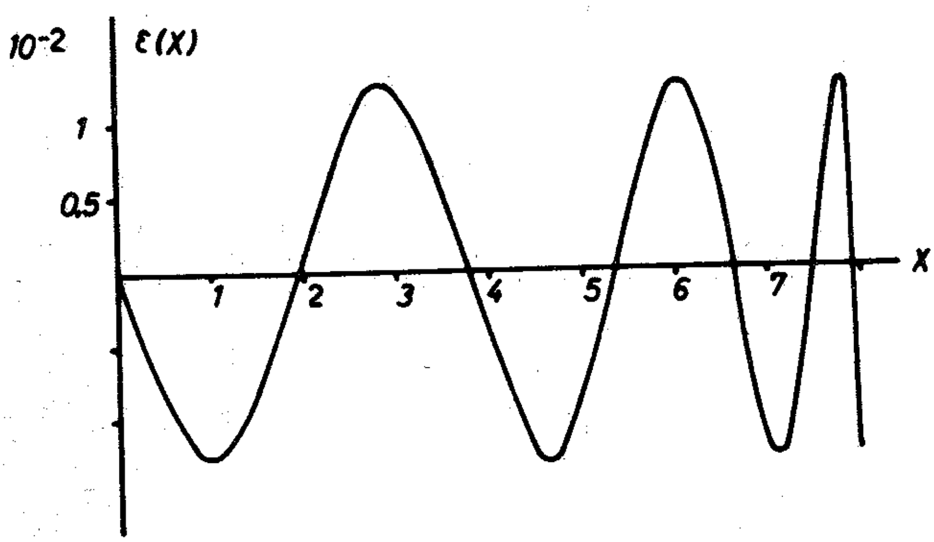
Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{5} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_o = 3,8365$
$a_1 = 36,4060$
$a_2 = 51,6052$
$a_3 = 222,9180$
$a_4 = -75,4192$
$a_5 = 160,5138$

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

Blatt: I_1, II

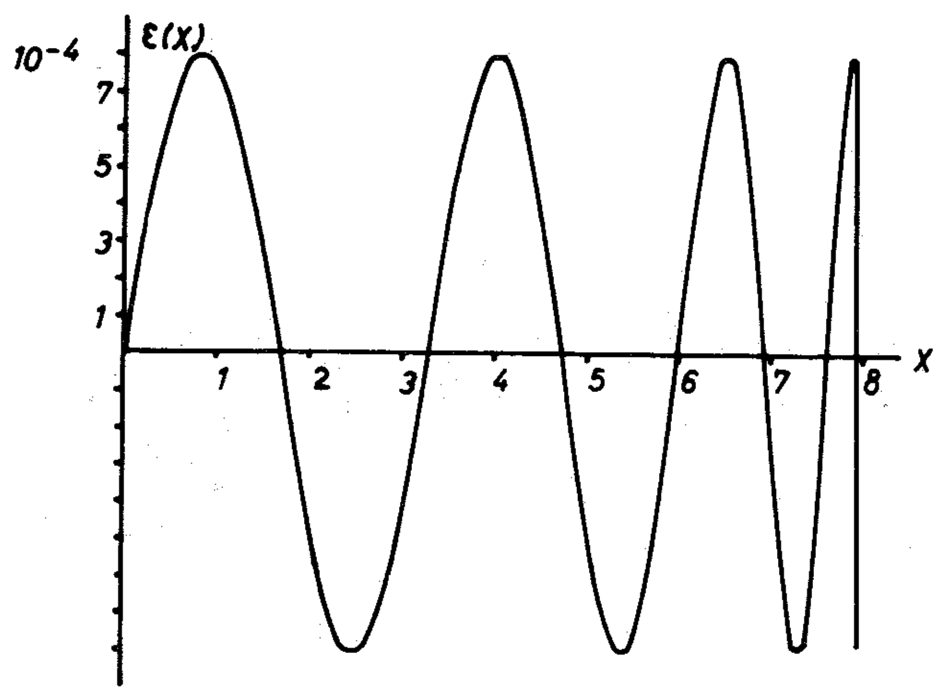
Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_o = 4{,}01202$
$a_1 = 31{,}56268$
$a_2 = 89{,}92013$
$a_3 = 92{,}70758$
$a_4 = 140{,}05165$
$a_5 = -10{,}84805$
$a_6 = 52{,}46632$

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

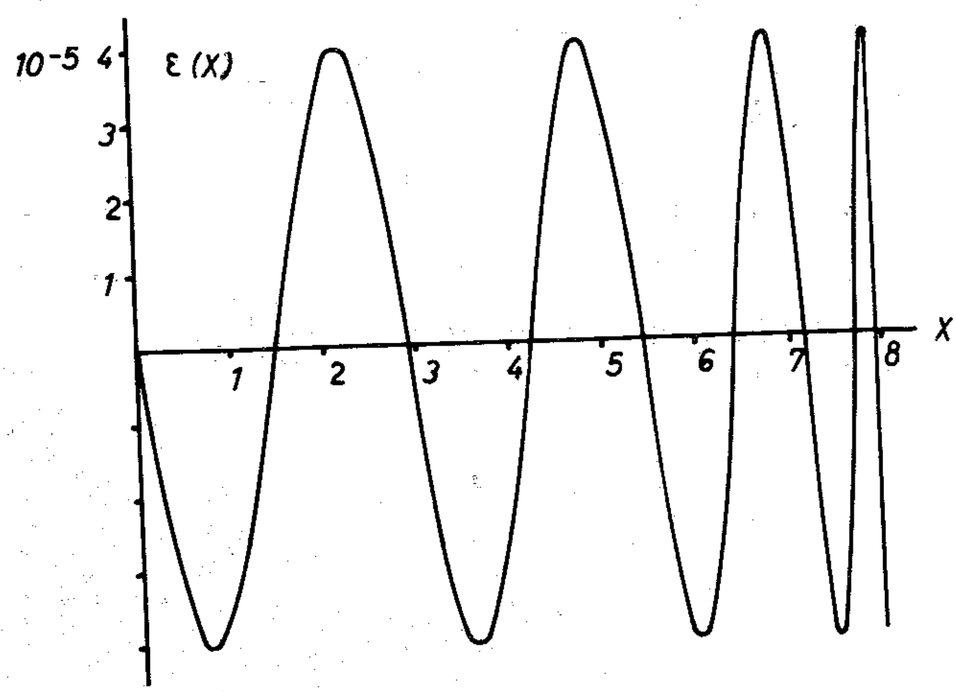
Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

a_o =	3,999 308	a_4 =	82,161 321
a_1 =	32,032 571	a_5 =	64,589 936
a_2 =	84,886 526	a_6 =	2,369 886
a_3 =	116,519 356	a_7 =	13,314 191

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

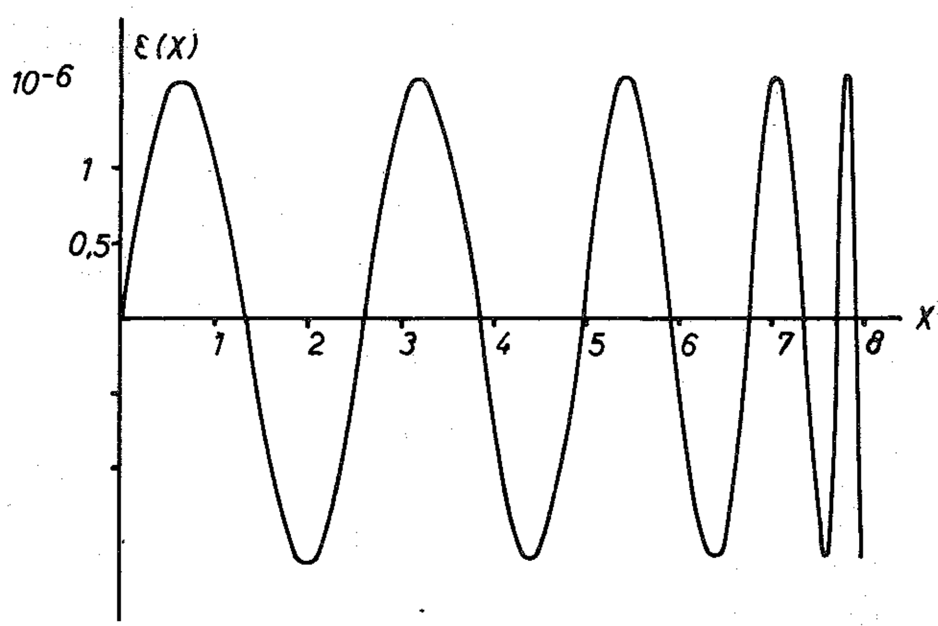
Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{8} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_0 = 4{,}0000\ 3170$	$a_5 = 45{,}8444\ 5584$
$a_1 = 31{,}9981\ 2009$	$a_6 = 22{,}4918\ 9739$
$a_2 = 85{,}3659\ 5445$	$a_7 = 1{,}8484\ 1209$
$a_3 = 113{,}5210\ 9772$	$a_8 = 2{,}6911\ 2125$
$a_4 = 92{,}1120\ 4458$	

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = -\varepsilon(x)$

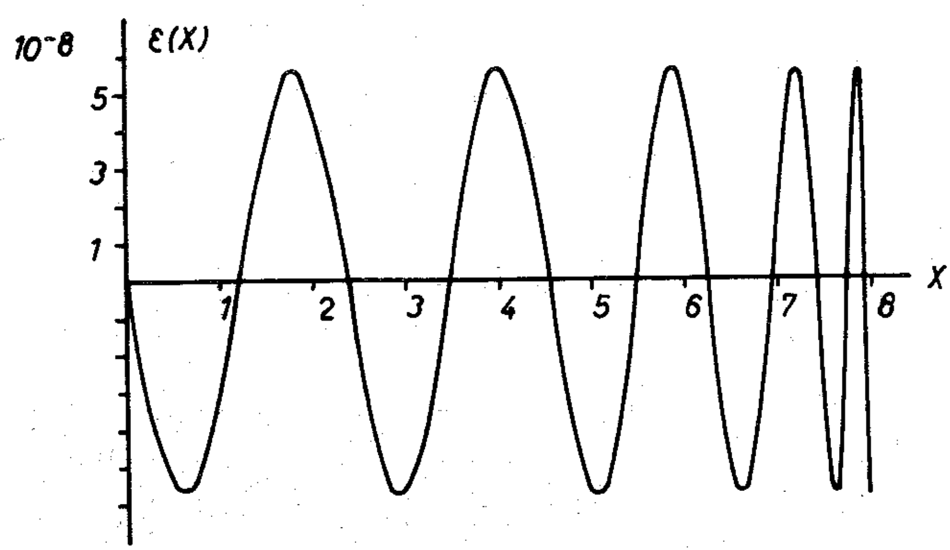
Funktion: $I_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $I_1^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8} \right)^{2v+1}$

$a_0 = 3{,}99999\ 8802$	$a_5 = 48{,}85899\ 5315$
$a_1 = 32{,}00008\ 6980$	$a_6 = 17{,}86491\ 3364$
$a_2 = 85{,}33147\ 4517$	$a_7 = 6{,}07013\ 4559$
$a_3 = 113{,}79596\ 7431$	$a_8 = 0{,}58411\ 5288$
$a_4 = 90{,}92460\ 0045$	$a_9 = 0{,}44285\ 0424$

$\varepsilon(x) = I_1^*(x) - I_1(x)$



Es ist $\varepsilon(-x) = - \varepsilon(x)$