K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

KBB

1.8.1957 (57/16) Planungsabteilung Bericht Nr. 10,2

TSCHEBYSCHEFF'SCHE APPROXIMATIONEN FUER BESSELFUNKTIONEN

(Teil II)

von

Helmut Werner

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

1.8.1957 (57/16)	Planungsabteilung	Bericht Nr.10

Tschebyscheff'sche Approximationen für Besselfunktionen

(Teil II)

Helmut Werner

Es werden Formeln angegeben, die die Funktionen Y_o, Y_1, K_o und K_1 mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen zu berechnen gestatten.

Es sollen Formeln zusammengestellt werden, die es erlauben, die Funktionen Y_o, Y_1, K_o und K_1 mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen möglichst schnell zu berechnen.

Es ist

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_o(x)\left\{C + \ln\left(\frac{1}{2}x\right)\right\} - \psi_o(x)\right]$$

$$\psi_o(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r}\right]$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_1(x)\left\{C + \ln\left(\frac{1}{2}x\right)\right\} - \frac{1}{x} - \psi_1(x)\right]$$

$$\psi_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} + \frac{1}{2(r+1)}\right]$$

$$K_o(x) = -I_o(x)\left\{C + \ln\left(\frac{1}{2}x\right)\right\} + \varphi_o(x)$$

$$\varphi_o(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r}\right]$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} + I_1(x)\left\{C + \ln\left(\frac{1}{2}x\right)\right\} - \varphi_1(x)$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!(r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} + \frac{1}{2(r+1)}\right]$$

C = Eulersche Konstante = 0,57721 56649 015329.

Wie in Teil I dieses Berichtes werden auf Arbeitsblättern Tschebyscheff-Approximationen für die Funktionen ψ_o, ψ_1, φ_o und φ_1 zu verschiedenen Genauigkeiten für das Intervall $0 \leq x \leq 8$ angegeben. Es ist dabei von der Tatsache Gebrauch gemacht worden, daß in den Aufgaben der Reaktorberechnungen meist die Funktionen $I_i(x)$ und $K_i(x)$ bzw. $J_i(x)$ und $Y_i(x)$ mit $i = 1,2$ gemeinsam auftreten.

Approximationen für J_o, J_1, I_o und I_1 sind in [1] angegeben worden. Für die Funktion log x kann man Approximationen aus [2] entnehmen. Bei Rechnungen auf Maschinen, die im Dualsystem arbeiten, hat man noch den Vorteil, daß man die Tschebyscheff-Approximation für den Logarithmus nur zwischen zwei Zweierpotenzen braucht (etwa zwischen 0,5 und 1), da man mit wenigen Befehlen zu einer Darstellung $z = x \cdot 2^y$ mit $0{,}5 < x \leq 1$ gelangen kann, so daß $\log z = \log x + y \cdot \log 2$ ist.

Da unsere Rechnungen es nicht a priori erlaubten, Annäherungen des Argumentes an den Nullpunkt auszuschließen, so waren wir zu der obigen Aufspaltung der Funktionen Y_0, Y_1, K_0 und K_1 gezwungen. Man könnte geneigt sein, Aufspaltungen vorzuziehen, in denen der Logarithmus nicht auftritt.
So könnte man etwa $Y_1(x) + \frac{2}{\pi x}$ betrachten. Diese Funktion ist in der Tat stetig, kann also durch Polynome approximiert werden. Praktische Versuche zeigen, daß man mit einem Polynom 6. Grades (also 7 Koeffizienten) eine Annäherung bis auf einen Fehler von der Größe 0,01, mit einem Polynom 9. Grades (also 10 Koeffizienten) bis auf etwa 0,007 erreichen kann. Man sieht, daß die Konvergenz mit wachsendem Grade außerordentlich schlecht ist. Bessere Erfolge kann man erwarten, wenn man sich aufgrund des vorliegenden Problems auf ein Intervall beschränken kann, das den Nullpunkt nicht enthält, etwa auf $0{,}1 \leqq x \leqq 8$, so daß die Singularität bei $x = 0$ herausfällt.

Für die Ueberlassung der G2 zur Durchführung der Rechnungen bin ich Herrn Prof. Dr. Biermann, Max-Planck-Institut für Physik Göttingen, zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dr. Häfele möchte ich dafür danken, daß er durch sein Interesse das Zustandekommen dieser Arbeit förderte. Fräulein Dipl.-Math. Döderlein gilt mein Dank für die umfangreiche Unterstützung bei der Herstellung der Arbeitsblätter.

<u>Literatur:</u>

[1] Helmut Werner, Tschebyscheff'sche Approximationen für Besselfunktionen (Teil I)

[2] C. Hastings, Approximations for Digital Computers, Princeton 1955.

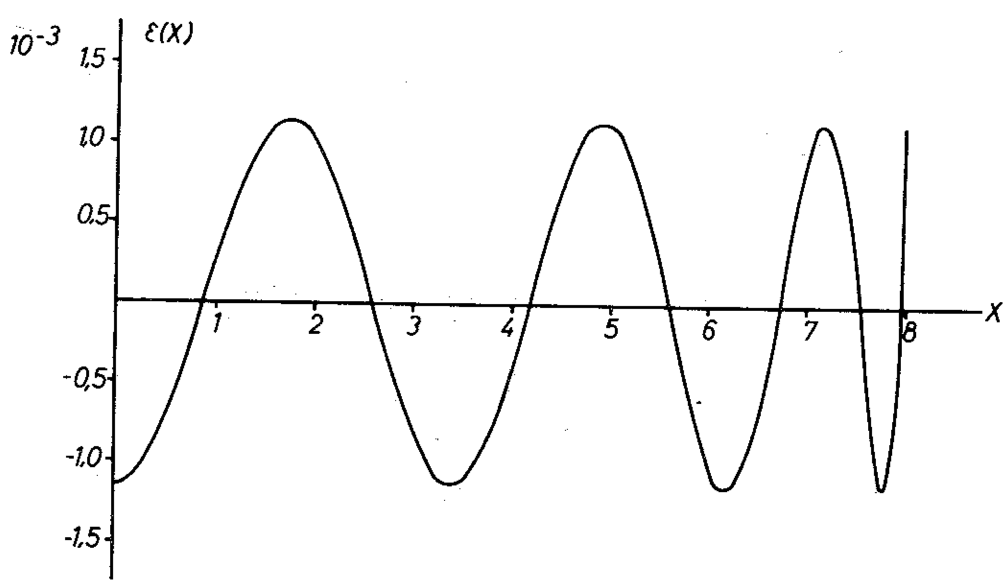
Funktion: $\psi_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\psi_o^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = -\ \ 0{,}001\ 13$
$a_1 = -\ 15{,}883\ 65$
$a_2 = +\ 94{,}048\ 80$
$a_3 = -196{,}208\ 08$
$a_4 = +\ 198{,}860\ 13$
$a_5 = -\ 103{,}300\ 34$
$a_6 = +\ \ 22{,}471\ 33$

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \psi_o^*(x) - \psi_o(x)$



$\varepsilon(x) = \varepsilon(-x)$

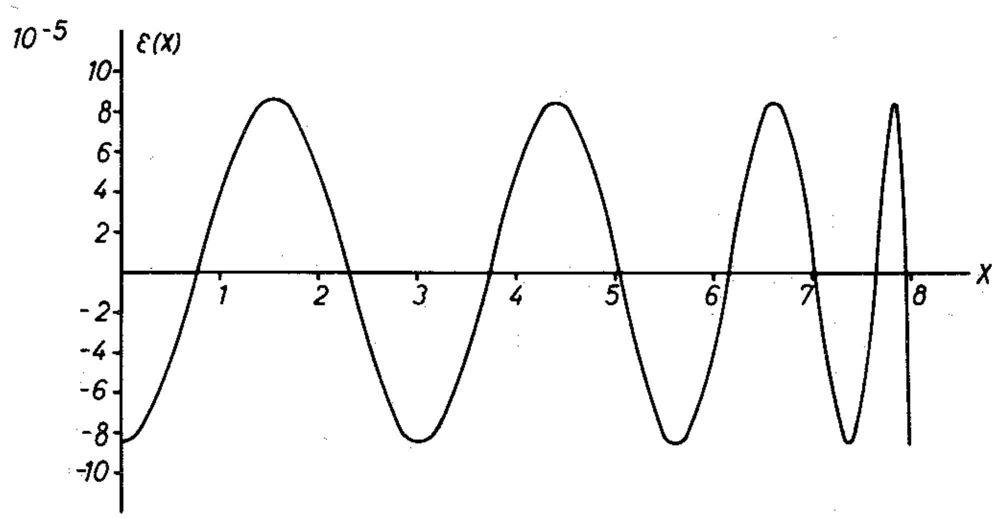
Funktion: $\psi_o(x)$

Bereich: $|x| \leq 8$

Approximation: $\psi_o^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v\left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

a_o	=	- 0,000 0851
a_1	=	- 15,988 7596
a_2	=	+ 95,756 8687
a_3	=	- 206,579 5410
a_4	=	+ 228,772 6560
a_5	=	- 147,506 8047
a_6	=	+ 54,824 2723
a_7	=	- 9,292 7605

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \psi_o^*(x) - \psi_o(x)$



$\varepsilon(x) = \varepsilon(-x)$

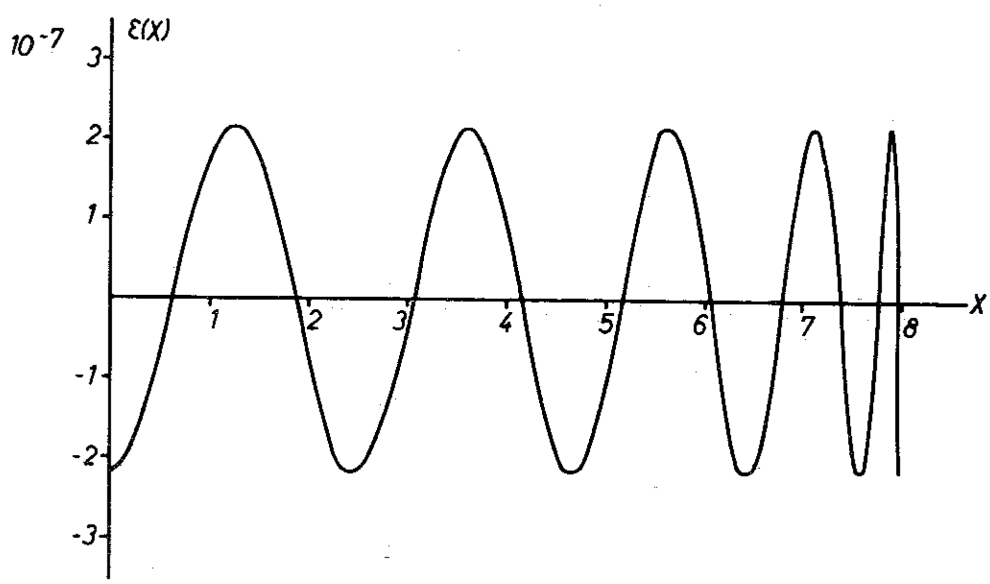
Funktion: $\psi_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\psi_o^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_0 = -\ 0{,}0000\ 00216$
$a_1 = -\ 15{,}9999\ 55945$
$a_2 = +\ 95{,}9985\ 21319$
$a_3 = -\ 208{,}5733\ 29001$
$a_4 = +\ 236{,}9092\ 82019$
$a_5 = -\ 165{,}7784\ 31172$
$a_6 = +\ 78{,}1428\ 80624$
$a_7 = -\ 25{,}7091\ 65876$
$a_8 = +\ 5{,}6305\ 42628$
$a_9 = -\ 0{,}6344\ 13251$

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \psi_o^*(x) - \psi_o(x)$



$\varepsilon(x) = \varepsilon(-x)$

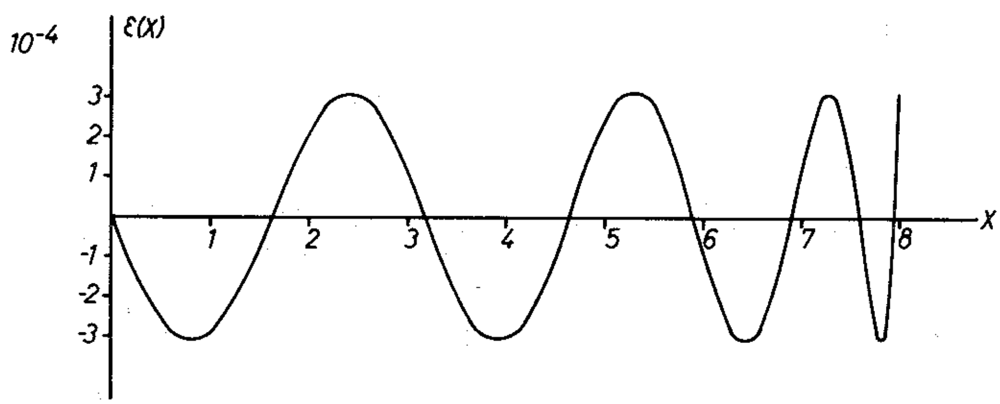
Funktion: $\psi_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\psi_1^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = + \quad 1{,}995\ 274$	$a_4 = + \ 171{,}639\ 071$
$a_1 = - \quad 39{,}816\ 701$	$a_5 = - \quad 75{,}383\ 238$
$a_2 = + \ 140{,}158\ 105$	$a_6 = + \quad 14{,}465\ 192$
$a_3 = - \ 212{,}473\ 402$	

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \psi_1^*(x) - \psi_1(x)$



$\varepsilon(x) = -\varepsilon(-x)$

Blatt: ψ_1, II

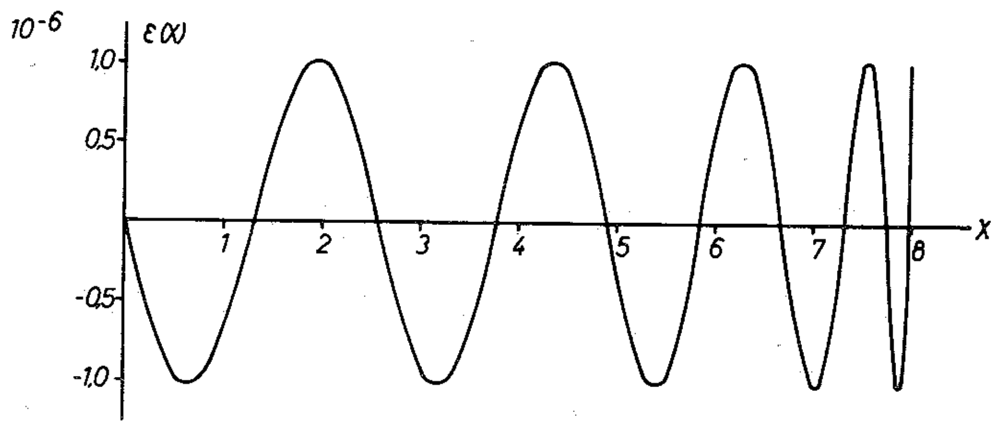
Funktion: $\psi_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\psi_1^*(x) = \sum_{\nu=0}^{8} a_\nu \left(\frac{x}{8}\right)^{2\nu+1}$

a_0	$= + \quad 1{,}9999\ 8040$	a_5	$= - 112{,}8282\ 2954$
a_1	$= - \quad 39{,}9988\ 0294$	a_6	$= + \quad 43{,}2931\ 7929$
a_2	$= + 142{,}2007\ 4775$	a_7	$= - \quad 10{,}7234\ 9045$
a_3	$= - 222{,}6391\ 8172$	a_8	$= + \quad 1{,}3298\ 5795$
a_4	$= + 197{,}9499\ 3190$		

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \psi_1^*(x) - \psi_1(x)$



$\varepsilon(x) = -\varepsilon(-x)$

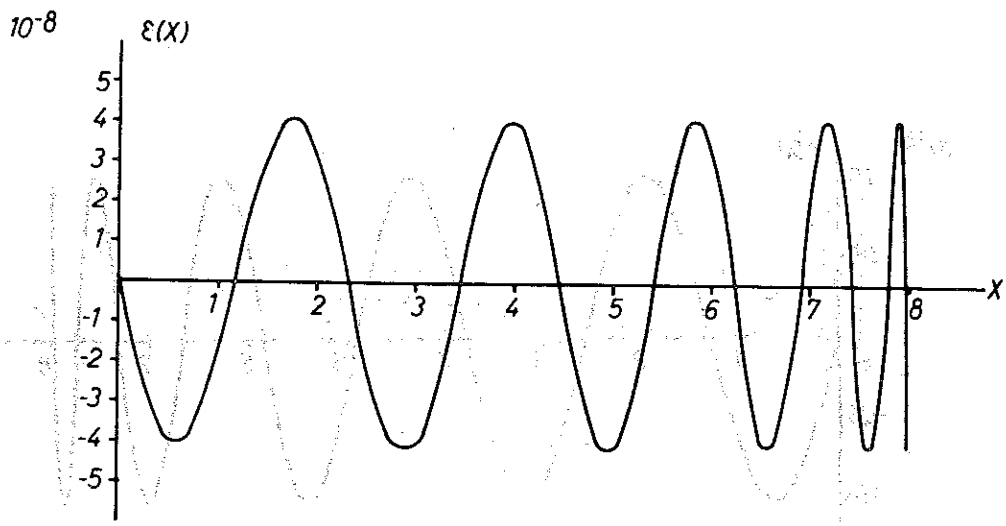
Funktion: $\psi_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\psi_1^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = + \quad 1{,}99999\ 91327$	$a_5 = - \ 114{,}62365\ 80879$
$a_1 = - \ 39{,}99993\ 52240$	$a_6 = + \ 46{,}06584\ 84953$
$a_2 = + \ 142{,}22079\ 87885$	$a_7 = - \ 13{,}26697\ 96745$
$a_3 = - \ 222{,}80047\ 26565$	$a_8 = + \ 2{,}60535\ 91066$
$a_4 = + \ 198{,}65226\ 04649$	$a_9 = - \ 0{,}26922\ 87739$

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \psi_1^*(x) - \psi_1(x)$



$$\varepsilon(x) = -\varepsilon(-x)$$

Blatt: φ_o, I

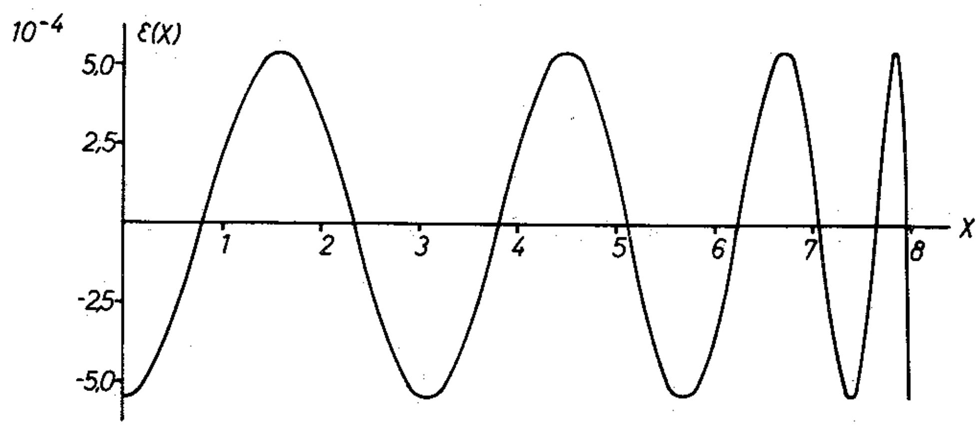
Funktion: $\varphi_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\varphi_o^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_0 = -\ \ 0{,}000\ 538$	$a_4 = +\ 195{,}934\ 511$
$a_1 = +\ \ 16{,}067\ 571$	$a_5 = +\ 249{,}884\ 844$
$a_2 = +\ \ 94{,}610\ 918$	$a_6 = -\ \ 12{,}342\ 712$
$a_3 = +\ 219{,}416\ 298$	$a_7 = +\ \ 75{,}955\ 145$

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \varphi_o^*(x) - \varphi_o(x)$



$\varepsilon(x) = \varepsilon(-x)$

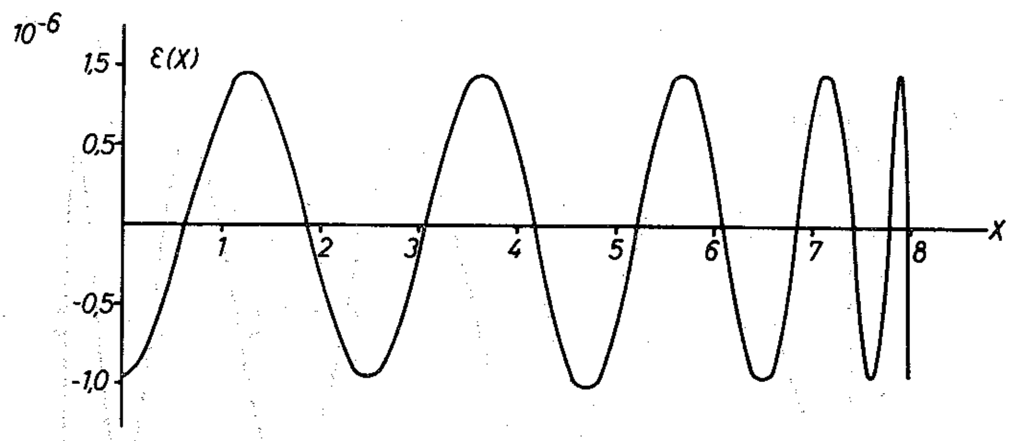
Funktion: $\varphi_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\varphi_o^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_o = -\ 0{,}000\ 000\ 95$	$a_5 = +\ 168{,}119\ 180\ 974$
$a_1 = +\ 16{,}000\ 189\ 78$	$a_6 = +\ 75{,}186\ 046\ 346$
$a_2 = +\ 95{,}993\ 781\ 42$	$a_7 = +\ 32{,}963\ 935\ 978$
$a_3 = +208{,}671\ 373\ 982$	$a_8 = +\ 2{,}729\ 896\ 901$
$a_4 = +236{,}531\ 882\ 181$	$a_9 = +\ 3{,}330\ 286\ 888$

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \varphi_o^*(x) - \varphi_o(x)$



$\varepsilon(x) = \varepsilon(-x)$

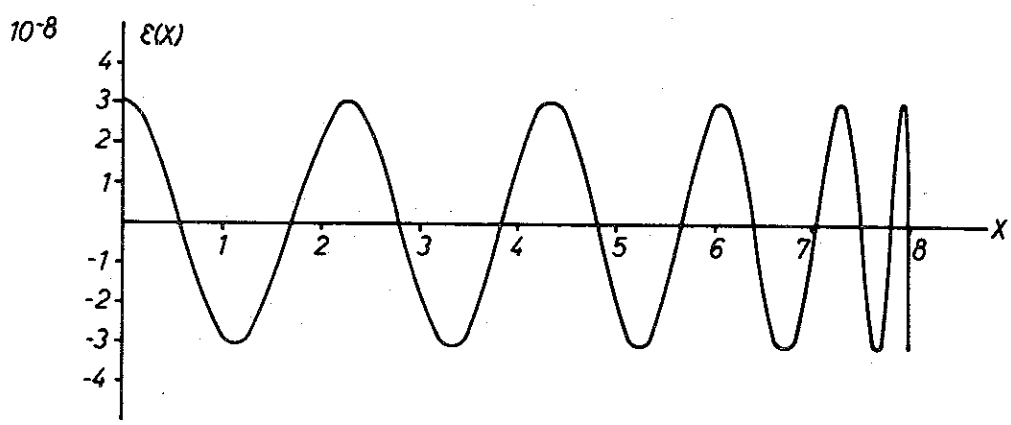
Funktion: $\varphi_o(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\varphi_o^*(x) = \sum_{v=0}^{10} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v}$

$a_0 = +\ 0{,}000\ 000\ 0305$	$a_6 = +\ 79{,}766\ 470\ 4791$
$a_1 = +\ 15{,}999\ 992\ 5932$	$a_7 = +\ 26{,}531\ 533\ 3056$
$a_2 = +\ 96{,}000\ 294\ 6152$	$a_8 = +\ 8{,}188\ 200\ 9132$
$a_3 = +\ 208{,}588\ 032\ 1084$	$a_9 = +\ 0{,}766\ 073\ 7658$
$a_4 = +\ 237{,}073\ 157\ 8779$	$a_{10} = +\ 0{,}511\ 970\ 2444$
$a_5 = +\ 166{,}100\ 848\ 4903$	

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \varphi_o^*(x) - \varphi_o(x)$



$\varepsilon(x) = \varepsilon(-x)$

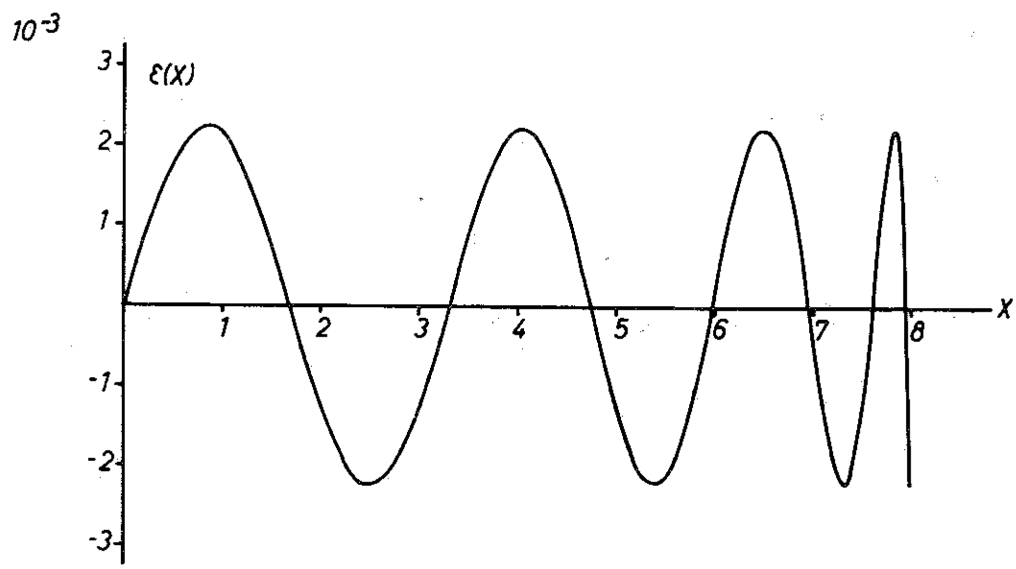
Funktion: $\varphi_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\varphi_1^*(x) = \sum_{v=0}^{6} a_v\left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = + \quad 2{,}03310$
$a_1 = + \quad 38{,}79474$
$a_2 = + \quad 154{,}85023$
$a_3 = + \quad 164{,}89151$
$a_4 = + \quad 333{,}26093$
$a_5 = - \quad 47{,}60996$
$a_6 = + \quad 139{,}05698$

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \varphi_1^*(x) - \varphi_1(x)$



$\varepsilon(x) = -\varepsilon(-x)$

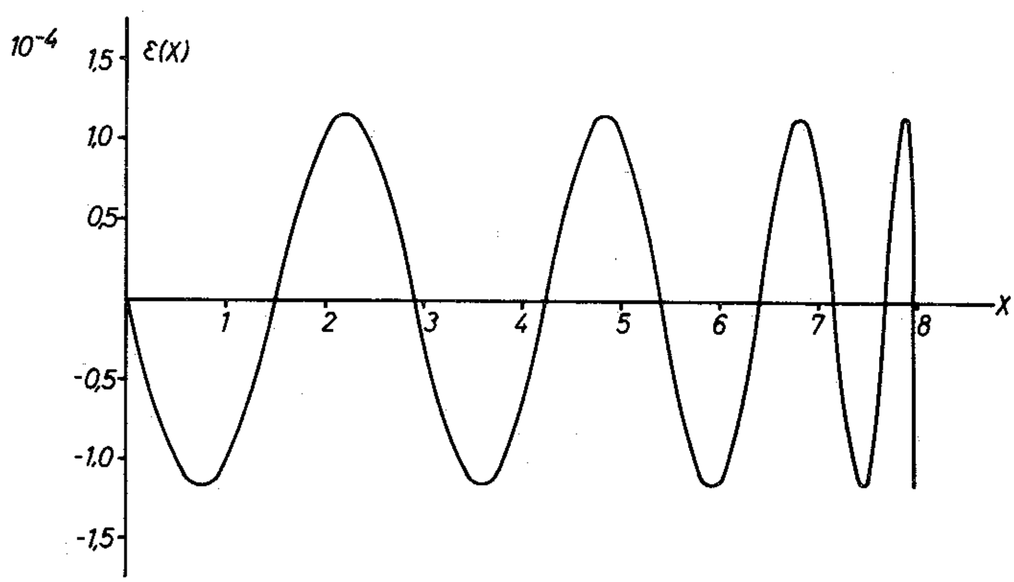
Funktion: $\varphi_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\varphi_1^*(x) = \sum_{v=0}^{7} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = +$	1,998 024	$a_4 = +$	173,530 250
$a_1 = +$	40,092 871	$a_5 = +$	160,474 575
$a_2 = +$	140,949 623	$a_6 = +$	0,908 431
$a_3 = +$	230,617 939	$a_7 = +$	36,707 928

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \varphi_1^*(x) - \varphi_1(x)$



$\varepsilon(x) = -\varepsilon(-x)$

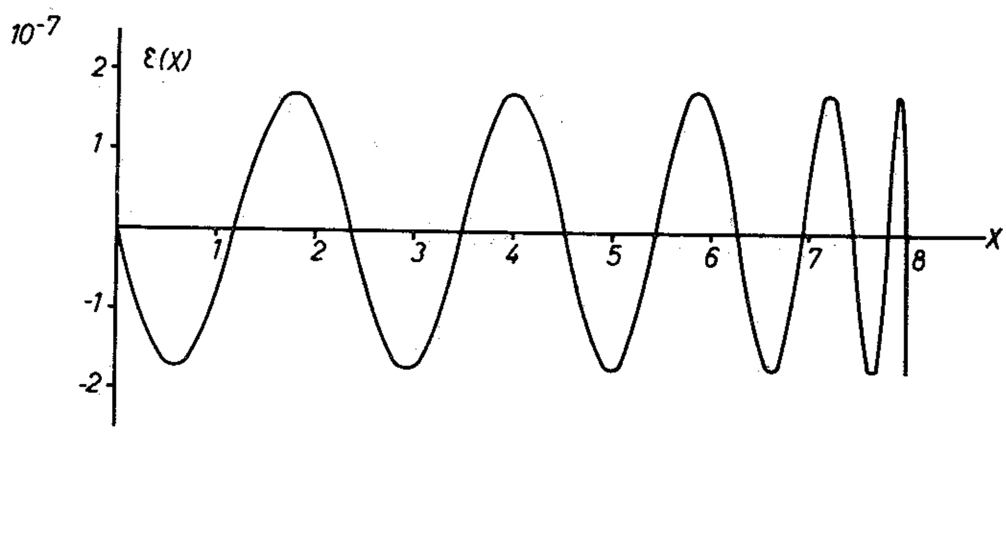
Funktion: $\varphi_1(x)$

Bereich: $|x| \leqq 8$

Approximation: $\varphi_1^*(x) = \sum_{v=0}^{9} a_v \left(\frac{x}{8}\right)^{2v+1}$

$a_0 = +\ \ 1{,}999\ 996\ 391$	$a_5 = +\ 115{,}837\ 493\ 464$
$a_1 = +\ \ 40{,}000\ 262\ 262$	$a_6 = +\ \ 44{,}732\ 901\ 977$
$a_2 = +\ 142{,}216\ 613\ 971$	$a_7 = +\ \ 16{,}402\ 802\ 501$
$a_3 = +\ 222{,}869\ 709\ 703$	$a_8 = +\ \ 1{,}477\ 856\ 570$
$a_4 = +\ 198{,}437\ 197\ 312$	$a_9 = +\ \ 1{,}304\ 923\ 514$

Fehlerkurve: $\varepsilon(x) = \varphi_1^*(x) - \varphi_1(x)$



$\varepsilon(x) = -\varepsilon(-x)$