

Nicht
entleihbar

KBB-Ber. 16
| KFK-16

K E R N R E A K T O R
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.
- Karlsruhe -

22.1.1960

Institut für Neutronenphysik
und Reaktortechnik

Bericht Nr. 16

= [Interner Bericht. Nr 59/59]

Numerische Berechnung heterogener Reaktoren

von

F. Stummel

KERNREAKTOR
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.
Zentralbücherei

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

- Karlsruhe -

22.1.1960

Institut für Neutronenphysik
und Reaktortechnik

Bericht Nr. 16

Numerische Berechnung heterogener Reaktoren

von

F. Stummel

KERNREAKTOR
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.
Zentralbücherei

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

K E R N R E A K T O R
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
1. Problemstellung	2
2. Allgemeine Mittelwertgleichungen	6
3. Numerische Approximation und Mittelwertgleichungen für Randpunkte	14
4. Der f -Faktor und die kritische Gleichung	20
5. Rechenmethoden	25
6. Beispiele	30
Literatur	36
Anhang I	37

Einleitung

Betrachten wir einen zylindrischen heterogenen Reaktor, der aus zylindrischen Brennelementen, Kontrollstäben und Experimentierkanälen in einem einheitlichen Moderator aufgebaut ist. Die Flußverteilung in diesem Reaktor möge durch die Multigruppen-Diffusionstheorie beschrieben werden. Um die Darstellung in dieser Arbeit zu vereinfachen, beschränken wir uns auf die Lösung der Zweigruppendiffusionsgleichungen. Die Flußverteilung parallel zur Längsachse der Stäbe sei bekannt, so daß sich das Problem reduziert auf die Bestimmung des schnellen und thermischen Flusses über einem Querschnitt des Reaktors, senkrecht zur Längsachse der Stäbe und Kanäle.

In den Arbeiten von S.M. Feinberg [3], A.D. Galanin [4], [5] und K. Meetz [7] wurden analytische Methoden zur Lösung dieser Aufgabe entwickelt. Der Nachteil dieser Verfahren besteht jedoch darin, daß es nur beschränkt möglich ist, irreguläre Stabanordnungen und eine beliebige Gestalt der äußeren Begrenzung des Reaktorquerschnitts zu behandeln. Nun ist es zwar ohne weiteres möglich, die Diffusionsgleichungen in der üblichen Weise durch Differenzgleichungen zu approximieren, wie es zum Beispiel bei L. Collatz [1] angegeben ist. Auf diesem Wege wurden auch Reaktoren berechnet (vgl. den Bericht von A. Hassit in [6]). Da aber die Flußverteilung im Moderator sich in der Umgebung eines Stabes im wesentlichen verhält wie in der Umgebung einer logarithmischen Singularität, ist es notwendig, eine sehr kleine Maschenweite und damit eine sehr große Anzahl von Gitterpunkten zu wählen, um dadurch eine hinreichende Genauigkeit der Differenzenapproximation zu erreichen. Diese Schwierigkeit kann man jedoch beheben auf einem Wege, der von zwei Gesichtspunkten bestimmt wird.

1) In einer geeigneten Umgebung eines Stabes läßt sich der Fluß in eine Fourierreihe entwickeln. Die Fourierkoeffizienten dieser Entwicklung genügen ihrerseits Differentialgleichungen, die es ermöglichen, den Fluß in der Umgebung eines Stabes darzustellen in Abhängigkeit von den Fourierkoeffizienten des Flusses auf dem Stabrand selbst. Bis auf diese Größen sind damit insbesondere auch die Singularitäten des Moderatorflusses im Mittelpunkt eines Stabquerschnitts bekannt und können bei der Approximation der Diffusionsgleichungen explizit berücksichtigt werden.

2) Der Fluß an einem Punkt im Moderator sowie auch die Fourierkoeffizienten des Flusses auf dem Rande von Stäben genügen sogenannten Mittelwertgleichungen (vgl. R. Courant-D. Hilbert [2]). Das sind lokale Integralgleichungen für den Fluß in einer passenden Umgebung des betrachteten Punktes. Durch trigonometrische Interpolation des Flusses in diesen Gleichungen erhält man eine Approximation von sehr großer Genauigkeit.

Auf diesem Wege erhält man ein endliches, lineares Gleichungssystem in der Form eines Eigenwertproblems für die Flußwerte an Gitterpunkten im Moderator beziehungsweise die Fourierkoeffizienten des Flusses auf Stabrändern. In dieser Gestalt kann man das Problem mit den bekannten Iterationsverfahren, der sogenannten Quelliteration und der beschleunigten Liebmannschen Überrelaxation, lösen. An einer Reihe von Beispielen werden wir schließlich die in dieser Arbeit entwickelten Methoden erläutern.

§ 1. Problemstellung

Betrachten wir einen zylindrischen Reaktor, der gleichmäßig mit einem homogenen Moderator gefüllt ist. In diesem seien kreiszyklindrische Brennelemente, Abschaltstäbe, Experimentierkanäle und ähnliches angeordnet, die im folgenden kurz mit "Stäben" bezeichnet werden sollen. Die Längsachsen dieser Stäbe seien parallel zur z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Wir setzen voraus, daß sich die Bestimmung der Flußverteilung in diesem Reaktor zurückführen läßt auf die Berechnung der horizontalen Flußverteilung $\phi = \phi(x,y)$, die den Gleichungen genügt

$$(1.1) \quad -D_1 \Delta \phi^{(1)} + \frac{D_1}{L_1^2} \phi^{(1)} = \nu \Sigma_f \phi^{(2)} ,$$

$$-D_2 \Delta \phi^{(2)} + \frac{D_2}{L_2^2} \phi^{(2)} = \Sigma_1 \phi^{(1)} ,$$

mit den Randbedingungen:

Der Fluß ϕ und die Normalkomponente des Stromes, $-(D \nabla \phi)_n$, sind stetig an Grenzflächen zwischen Medien.

(1.1') Es ist $\phi = 0$ auf dem äußeren Reaktorrand.

Auf allen übrigen Rändern gilt eine Randbedingung der Form $\phi + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$.

Die Bestimmung der Flußverteilung ist also ein Eigenwertproblem mit Eigenwertparameter ν . Gesucht ist der kleinste Eigenwert und die zugehörige Eigenlösung.

Über die Gestalt der Differentialgleichungen, die die Flußverteilung bestimmen, sollen einige spezielle Annahmen gemacht werden.

(i) Die Koeffizienten D , Σ , $\frac{1}{L^2}$ seien in jedem Medium konstant.

(ii) Der schnelle Fluß $\phi^{(1)}$ hat im Moderator keine Quellen, so daß die Differentialgleichungen dort die Gestalt haben

$$-\Delta \phi^{(1)} + \frac{1}{L_{1+}^2} \phi^{(1)} = 0 \quad ,$$

(1.2)

$$-\Delta \phi^{(2)} + \frac{1}{L_{2+}^2} \phi^{(2)} = q_{2+} \phi^{(1)} \quad ,$$

mit der Abkürzung $q_{2+} = \frac{\Sigma_1}{D_2}$.

(iii) In Brennelementen möge die Flußverteilung sich beschreiben lassen durch die Gleichungen

$$-\Delta \phi^{(1)} + \frac{1}{L_{1-}^2} \phi^{(1)} = q_{1-} \phi \quad ,$$

(1.3)

$$-\Delta \phi^{(2)} + \frac{1}{L_{2-}^2} \phi^{(2)} = 0 \quad ,$$

mit den Bezeichnungen $q_{1-} = \frac{\Sigma_f}{D_1}$, $\phi = \nu \phi^{(2)}$, so daß also der thermische Fluß $\phi^{(2)}$ im Brennstoff keine Quellen hat.

Für sehr starke und sehr schwache Absorber, z.B. Abschaltstäbe und Experimentierkanäle, ist es üblich, auf der Staboberfläche eine Randbedingung zweiter Art anzugeben der Gestalt $\phi + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$, wenn $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ die Ableitung des Flusses nach der inneren Normalen an die Staboberfläche und λ die Extrapolationslänge bezeichnet. Diese Randbedingung ist als eine integrale Bedingung zu verstehen: Sind r, φ Polarkoordinaten um den Mittelpunkt eines kreisförmigen Stabquerschnitts vom Radius a , so lautet diese Randbedingung genauer

$$(1.4) \quad \int_0^{2\pi} \phi(a, \varphi) \, d\varphi + \lambda \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r}(a, \varphi) \, d\varphi = 0 \quad .$$

Um in einfacher Weise eine Aussage über die Winkelabhängigkeit des Flusses auf der Staboberfläche zu gewinnen, kann man folgenden Weg einschlagen. Man definiert ein fiktives Material im Stab, so daß sich dort eine Flußverteilung bestimmen läßt, die der Differentialgleichung

$$(1.5) \quad -\Delta \phi + \frac{1}{L_-^2} \phi = 0$$

genügt. In diesem Material sei die Diffusionskonstante D_- gleich der Diffusionskonstanten D_+ im Moderator, und auf dem Stabrand $r = a$ sei der Fluß ϕ und der Strom $D \frac{\partial \phi}{\partial r}$ stetig. Später werden wir zeigen, daß in diesem Fall die Relation besteht

$$a \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r}(a, \varphi) \, d\varphi = \frac{a}{L_-} \frac{I_1\left(\frac{a}{L_-}\right)}{I_0\left(\frac{a}{L_-}\right)} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi(a, \varphi) \, d\varphi \quad .$$

Bestimmt man daher die Größe $\frac{1}{L_-^2}$ im fiktiven Material durch die Gleichung

$$(1.6) \quad \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{L_-} \frac{I_1\left(\frac{a}{L_-}\right)}{I_0\left(\frac{a}{L_-}\right)} \quad ,$$

dann genügt die so definierte Flußverteilung insbesondere der Randbedingung zweiter Art auf der Staboberfläche.

Man erkennt leicht, daß diese Gleichung für jedes $\frac{a}{\lambda} \geq 0$ eine und nur eine Zahl $\frac{a}{L_-}$ bestimmt. Sei nämlich $z = \frac{a}{L_-}$ und $f(z) = \frac{z I_1(z)}{I_0(z)}$, dann wird für $z > 0$

$$f'(z) = \frac{z}{I_0^2(z)} \left\{ I_0^2(z) - I_1^2(z) \right\} = \frac{2}{z I_0^2(z)} \int_0^z z' I_0^2(z') dz' > 0 .$$

Die Funktion $f(z)$ ist also monoton wachsend. Ferner ist $f(0) = 0$ und für $z \rightarrow \infty$ strebt auch $f(z) \rightarrow \infty$.

Man kann also stets annehmen, daß in Absorberstäben eine Flußverteilung ϕ definiert ist, die den Gleichungen

$$(1.7) \quad \begin{aligned} - \Delta \phi^{(1)} + \frac{1}{L_{1-}^2} \phi^{(1)} &= 0 , \\ - \Delta \phi^{(2)} + \frac{1}{L_{2-}^2} \phi^{(2)} &= q_{2-} \phi^{(1)} , \end{aligned}$$

genügt, mit $q_{2-} = \frac{\Sigma_1}{D_2}$.

Um das oben definierte Eigenwertproblem wenigstens näherungsweise lösen zu können, überdecken wir den Reaktorquerschnitt mit einem regelmäßigen Punktgitter, welches so beschaffen ist, daß insbesondere Mittelpunkte von Stabquerschnitten auf Gitterpunkten liegen. Wir wollen hier voraussetzen, daß dieses Gitternetz aus quadratischen Maschen der Maschenweite h besteht, obwohl die in dieser Arbeit entwickelten Methoden zum Beispiel auch für regelmäßige Sechsecknetze anwendbar sind. Die Darstellung im Folgenden wird sich ferner auf den Fall einer solchen Maschenweite h beschränken, für die der Abstand zwischen zwei Stäben mindestens $2\sqrt{2}h$ beträgt, und die der Bedingung $a \leq h$ genügt, wenn a der Radius eines Stabquerschnitts ist. Schließlich sei die Größe h so gewählt, daß die äußere Begrenzung des Reaktorquerschnitts, über die man sonst keine weiteren Voraussetzungen zu machen braucht, sich hinreichend genau mit einem Polygonzug durch Gitterpunkte approximieren läßt.

Die Aufgabe dieser Arbeit wird es nun sein, ein endliches Gleichungssystem anzugeben, das die näherungsweise Bestimmung des kleinsten Eigenwerts ν und die Berechnung der zugehörigen Flußverteilung an Gitterpunkten ermöglicht.

§ 2. Allgemeine Mittelwertgleichungen

Sei eine Funktion $\phi = \phi(x, y)$ in einem Bereich T der x, y -Ebene erklärt und dort beliebig oft stetig differenzierbar nach beiden Variablen. Seien r, φ Polarkoordinaten um den Punkt $P = (x_0, y_0)$. Ist der Bereich T so beschaffen, daß ein Kreisring $\varrho \leq r \leq R, |\varphi| \leq \pi$, mit $\varrho \geq 0, R > \varrho$, ganz in T liegt, dann läßt sich die Funktion ϕ in diesem Kreisring in eine Fourierreihe entwickeln der Gestalt

$$(2.1) \quad \phi(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n(r) e_n(\varphi) \quad ,$$

mit den Bezeichnungen

$$(2.2) \quad \begin{aligned} e_n(\varphi) &= \cos n \varphi \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \\ e_{-n}(\varphi) &= \sin n \varphi \quad , \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

und den Fourierkoeffizienten

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \phi_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi(r, \varphi) d\varphi \quad , \\ \phi_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi(r, \varphi) \cos n \varphi d\varphi \quad , \quad n = 1, 2, \dots, \\ \phi_{-n}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi(r, \varphi) \sin n \varphi d\varphi \quad , \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

Ist die Funktion $f = f(r, \varphi)$ mit den Fourierkoeffizienten $f_n = f_n(r)$ erklärt durch die Gleichung

$$-\Delta \phi + \frac{1}{L^2} \phi = f \quad ,$$

dann genügen die Funktionen $\phi_n(r)$ bekanntlich den Differentialgleichungen

$$(2.4) \quad -\Delta_n \phi_n + \frac{1}{L^2} \phi_n = f_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Der Differentialoperator Δ_n ist gegeben durch die Darstellung

$$(2.5) \quad -\Delta_n \phi_n = -\left\{ \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_n}{\partial r} \right\} + \frac{n^2}{r^2} \phi_n.$$

Betrachten wir nun einen Punkt P der x,y-Ebene, der Mittelpunkt eines Stabquerschnitts vom Radius a ist und eine Funktion $G_n = G_n(r)$, die definiert ist durch die Gleichung

$$(2.6) \quad G_n(r) = \frac{I_n\left(\frac{r}{L}\right)}{I_n\left(\frac{a}{L}\right)}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Dann genügt $G_n(r)$ in $r \leq a$ der Differentialgleichung $-\Delta_n G_n + \frac{1}{L^2} G_n = 0$, und durch Anwendung des Greenschen Satzes erhält man die Beziehung

$$\int_0^a G_n(r) \left[-\Delta_n \phi_n + \frac{1}{L^2} \phi_n \right] (r) r dr = -a \frac{\partial \phi_n}{\partial r} (a) + \frac{a}{L} \phi_n (a) \frac{I_n'\left(\frac{a}{L}\right)}{I_n\left(\frac{a}{L}\right)}.$$

Die Ableitungen der Fourierkoeffizienten $\phi_n(r)$ lassen sich also auf Stabrändern darstellen in der Form

$$(2.7) \quad a \frac{\partial \phi_n}{\partial r} (a) = \frac{a}{L} \frac{I_n'\left(\frac{a}{L}\right)}{I_n\left(\frac{a}{L}\right)} \phi_n (a) - \int_0^a G_n(r) f_n(r) r dr.$$

Hier bedeutet $\frac{\partial \phi_n}{\partial r} (a)$ den linksseitigen Grenzwert dieser Größe für $r \rightarrow a$.

Das Integral über die Fourierkoeffizienten f_n läßt sich auf Grund der Voraussetzungen in § 1 ohne Schwierigkeiten berechnen. In Brennelementen ist $f^{(2)} = 0$. Daher lautet die obige Beziehung (2.7) für den thermischen Fluß $\phi^{(2)}$ auf dem Rande eines Brennelements

$$(2.8) \quad a \frac{\partial \phi_n^{(2)}}{\partial r_-} (a) = \frac{a}{L_{2-}} \frac{I_n'(\frac{a}{L_{2-}})}{I_n(\frac{a}{L_{2-}})} \phi_n^{(2)} (a) .$$

Für den Quellterm $f^{(1)}$ der Gleichung des schnellen Flusses ist $f^{(1)} = q_{1-} \phi$ und ϕ dem thermischen Fluß proportional. Daher genügt $f^{(1)}$ der Differentialgleichung $-\Delta f^{(1)} + \frac{1}{L_{2-}^2} f^{(1)} = 0$, so daß sich das

Integral in (2.7) über $f_n^{(1)}$ umwandeln läßt in die Form

$$\begin{aligned} \int_0^a G_n^{(1)}(r) f_n^{(1)}(r) r dr &= L_{2-}^2 \int_0^a G_n^{(1)}(r) \Delta_n f_n^{(1)}(r) r dr = \\ &= L_{2-}^2 \left\{ r G_n^{(1)}(r) \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial r} (r) - r \frac{\partial G_n^{(1)}}{\partial r} (r) f_n^{(1)}(r) \right\}_0^a + \frac{L_{2-}^2}{L_{1-}^2} \int_0^a G_n^{(1)}(r) f_n^{(1)}(r) r dr, \end{aligned}$$

oder auch

$$(2.9) \quad \int_0^a G_n^{(1)}(r) f_n^{(1)}(r) r dr = \frac{q_{1-}}{L_{1-}^{-2} - L_{2-}^{-2}} \left\{ \frac{a}{L_{1-}} \frac{I_n'(\frac{a}{L_{1-}})}{I_n(\frac{a}{L_{1-}})} \phi_n(a) - a \frac{\partial \phi_n}{\partial r_-} (a) \right\} .$$

Mit Hilfe der bereits hergeleiteten Beziehung (2.8) für die Ableitung des thermischen Flusses auf dem Stabrand, kann man die Größe $a \frac{\partial \phi_n}{\partial r_-} (a)$ aus (2.9) eliminieren und erhält damit für die Ableitungen der Fourierkoeffizienten des schnellen Flusses die Gleichungen

$$(2.10) \quad a \frac{\partial \phi_n^{(1)}}{\partial r_-} (a) = \frac{a}{L_{1-}} \frac{I_n'(\frac{a}{L_{1-}})}{I_n(\frac{a}{L_{1-}})} \phi_n^{(1)}(a) - \frac{q_{1-}}{L_{1-}^{-2} - L_{2-}^{-2}} \left\{ \frac{a}{L_{1-}} \frac{I_n'(\frac{a}{L_{1-}})}{I_n(\frac{a}{L_{1-}})} - \frac{a}{L_{2-}} \frac{I_n'(\frac{a}{L_{2-}})}{I_n(\frac{a}{L_{2-}})} \right\} \phi_n (a) .$$

Für den Quellterm f der Flußverteilung in einem Absorber ist nach (1.7):
 $f^{(1)} = 0$, $f^{(2)} = q_{2-} \phi^{(1)}$. Daher gelten auf dem Rande eines Absorbers
 ganz entsprechende Beziehungen, die sich formal aus den oben herge-
 leiteten durch Vertauschung der Gruppenindizes gewinnen lassen.

Fassen wir die Ergebnisse dieses Abschnitts in einer für das Folgende
 handlichen Form zusammen: Die Fourierkoeffizienten der Ableitung des
 schnellen bzw. thermischen Flusses genügen auf einem Stabrand für
 alle $n = 0, \pm 1, \dots$ den Gleichungen

$$(2.11) \quad a \frac{\partial \phi_n}{\partial r_+}(a) = \alpha_n \phi_n(a) + \alpha'_n \psi_n(a) \quad ,$$

wobei $\frac{\partial \phi_n}{\partial r_+}(a) = \frac{D_-}{D_+} \frac{\partial \phi_n}{\partial r_-}(a)$, $\psi_n^{(1)}(a) = \phi_n(a)$, $\psi_n^{(2)}(a) = \phi_n^{(1)}(a)$

ist, und die Konstanten α_n , α'_n gegeben sind durch

$$(2.12) \quad \alpha_n = \frac{D_-}{D_+} \cdot \frac{a}{L_-} \frac{I'_n\left(\frac{a}{L_-}\right)}{I_n\left(\frac{a}{L_-}\right)} \quad ,$$

$$\alpha'_n = - \frac{D_-}{D_+} \cdot \frac{q_-}{L_{1-}^{-2} - L_{2-}^{-2}} \left\{ \frac{a}{L_{1-}} \frac{I'_n\left(\frac{a}{L_{1-}}\right)}{I_n\left(\frac{a}{L_{1-}}\right)} - \frac{a}{L_{2-}} \frac{I'_n\left(\frac{a}{L_{2-}}\right)}{I_n\left(\frac{a}{L_{2-}}\right)} \right\} .$$

Sei wiederum der Bereich $r \leq a$, $|\varphi| \leq \pi$ der Querschnitt eines Stabes
 und die Größe h so gewählt, daß der Kreisring $a \leq r \leq h$, $|\varphi| \leq \pi$
 ganz im Moderator liegt. Erklärt man nun eine Funktion G_n für
 $n = 0, \pm 1, \dots$ durch die Gleichung

$$(2.13) \quad G_n(r) = I_n\left(\frac{h}{L_+}\right) K_n\left(\frac{r}{L_+}\right) - K_n\left(\frac{h}{L_+}\right) I_n\left(\frac{r}{L_+}\right) \quad ,$$

dann wird $G_n(h) = 0$, $\frac{\partial G_n}{\partial r}(h) = -\frac{1}{h}$, und die Funktion $G_n(r)$ genügt in
 $r > 0$ der Differentialgleichung $-\Delta_n G_n + \frac{1}{L_+^2} G_n = 0$.

Mit Hilfe dieser Funktion $G_n(r)$ erhält man die Gleichung

$$(2.14) \quad \int_a^h G_n(r) \left[-\Delta_n \phi_n + \frac{1}{L_{1+}^2} \phi_n \right] (r) r dr =$$

$$= -\phi_n(h) - a \frac{\partial G_n}{\partial r}(a) \phi_n(a) + a G_n(a) \frac{\partial \phi_n}{\partial r}(a).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(2.15) \quad g_n = -a \frac{\partial G_n}{\partial r}(a), \quad k_n = G_n(a), \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

und eliminiert die Größe $a \frac{\partial \phi_n}{\partial r}(a)$ in Gleichung (2.14) auf Grund der Randbedingung (2.11) auf dem Stab, dann genügen die Fourierkoeffizienten der Flußverteilung auf einem Stabrand der "Mittelwertgleichung" ¹⁾

$$(2.16) \quad [g_n + \alpha_n k_n] \phi_n(a) = \phi_n(h) - \alpha'_n k_n \psi_n(a) + \int_a^h G_n(r) f_n(r) r dr.$$

Da auf Grund der Voraussetzungen in § 1 der schnelle Fluß im Moderator keine Quellen hat, ist $f^{(1)} = 0$, so daß die Mittelwertgleichung in diesem Falle die einfache Gestalt annimmt

$$(2.17) \quad [g_n^{(1)} + \alpha_n^{(1)} k_n^{(1)}] \phi_n^{(1)}(a) = \phi_n^{(1)}(h) - \alpha_n'^{(1)} k_n^{(1)} \phi_n^{(1)}(a).$$

In der Gleichung für den thermischen Fluß $\phi^{(2)}$ dagegen ist $f^{(2)} = q_{2+} \phi^{(1)}$, also dem schnellen Fluß proportional, $f^{(2)}$ genügt daher der Gleichung $-\Delta f^{(2)} + \frac{1}{L_{1+}^2} f^{(2)} = 0$. Dementsprechend läßt sich somit das

Integral über $f_n^{(2)}$ berechnen. Es gilt nämlich

$$(2.18) \quad \int_a^h G_n^{(2)}(r) f_n^{(2)}(r) r dr =$$

$$= L_{1+}^2 \left\{ r G_n^{(2)}(r) \frac{\partial f_n^{(2)}}{\partial r}(r) - r \frac{\partial G_n^{(2)}}{\partial r}(r) f_n^{(2)}(r) \right\}_a^h + \frac{L_{1+}^2}{L_{2+}^2} \int_a^h G_n^{(2)}(r) f_n^{(2)}(r) r dr,$$

¹⁾ vgl. [2]

so daß man die Darstellung erhält

$$(2.19) \int_a^h G_n^{(2)}(r) f_n^{(2)}(r) r dr = \frac{q_{2+}}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \left\{ \phi_n^{(1)}(h) - g_n^{(2)} \phi_n^{(1)}(a) - k_n^{(2)} \frac{\partial \phi_n^{(1)}}{\partial r} (a) \right\}.$$

Eliminiert man nun die Größe $\phi_n^{(1)}(h)$ aus dieser Gleichung mit Hilfe der obigen Mittelwertbeziehung (2.17) und die Ableitung $\frac{\partial \phi_n^{(1)}}{\partial r} (a)$ durch die Randbedingung (2.11) auf Stabrändern, dann wird schließlich

$$(2.20) \int_a^h G_n^{(2)} f_n^{(2)}(r) r dr = \frac{q_{2+}}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \left\{ \left[g_n^{(1)} - g_n^{(2)} + \alpha_n^{(1)} (k_n^{(1)} - k_n^{(2)}) \right] \phi_n^{(1)}(a) + \alpha_n'^{(1)} (k_n^{(1)} - k_n^{(2)}) \phi_n'(a) \right\}.$$

Die Fourierkoeffizienten des schnellen und thermischen Flusses auf einem Stabrand genügen also Mittelwertgleichungen der Gestalt

$$(2.21) \phi_n(a) = \beta_n \phi_n(h) + \beta_n' \psi_n(a) + \beta_n'' \psi_n'(a)$$

für alle $n = 0, \pm 1, \dots$, mit $\psi_n^{(1)} = \phi_n$, $\psi_n^{(2)} = \phi_n^{(1)}$ und $\psi_n'^{(1)} = \phi_n^{(1)}$, $\psi_n'^{(2)} = \phi_n$. Die Größen $\beta_n, \beta_n', \beta_n''$ sind definiert durch die Gleichungen

$$(2.22) \begin{aligned} \beta_n &= [g_n + \alpha_n k_n]^{-1}, \\ \beta_n' &= [g_n + \alpha_n k_n]^{-1} \left\{ -\alpha_n' k_n + \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} [g_n^{(1)} - g_n^{(2)} + \alpha_n^{(1)} (k_n^{(1)} - k_n^{(2)})] \right\}, \\ \beta_n'' &= [g_n + \alpha_n k_n]^{-1} \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \alpha_n'^{(1)} [k_n^{(1)} - k_n^{(2)}], \end{aligned}$$

Einen wichtigen Spezialfall dieser Mittelwertgleichung erhält man für den Grenzfall $a \rightarrow 0$. Sei der Punkt P der Mittelpunkt einer Kreisscheibe vom Radius h, die ganz im Moderator liegt. Dann ist der Fluß $\phi = \phi(r, \varphi)$ regulär in $r \leq h$ und für alle φ . Sei nun a eine beliebige Zahl im Intervall $0 < a \leq h$, dann gilt für $r = a$ die Randbedingung mit

$$\alpha_n = \frac{a}{L_+} \frac{I_n'(\frac{a}{L_+})}{I_n(\frac{a}{L_+})}, \quad (2.23)$$

$$\alpha_n' = - \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \left\{ \frac{a}{L_{1+}} \frac{I_n'(\frac{a}{L_{1+}})}{I_n(\frac{a}{L_{1+}})} - \frac{a}{L_{2+}} \frac{I_n'(\frac{a}{L_{2+}})}{I_n(\frac{a}{L_{2+}})} \right\}.$$

Man berechnet leicht, daß dann für alle $n = 0, \pm 1, \dots$ gilt

$$\beta_n = \frac{I_n(\frac{a}{L_+})}{I_n(\frac{h}{L_+})}, \quad \beta_n' = \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \left\{ \frac{I_n(\frac{h}{L_{1+}})}{I_n(\frac{a}{L_{1+}})} - \frac{I_n(\frac{h}{L_{2+}})}{I_n(\frac{a}{L_{2+}})} \right\} \cdot \frac{I_n(\frac{a}{L_+})}{I_n(\frac{h}{L_+})} \quad (2.24)$$

und $\beta_n'' = 0$. Daher bleibt die Mittelwertgleichung gültig auch für den Limes $a \rightarrow 0$. Man erhält in diesem Grenzfall

$$n! (2 L_+)^n I_n(\frac{h}{L_+}) \lim_{a \rightarrow 0} a^{-n} \phi_n(a) = \quad (2.25)$$

$$= \phi_n(h) + \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} n! \left\{ (2L_{1+})^n I_n(\frac{h}{L_{1+}}) - (2L_{2+})^n I_n(\frac{h}{L_{2+}}) \right\} \lim_{a \rightarrow 0} a^{-n} \psi_n(a)$$

Ist der Punkt P Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und sei $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, dann läßt sich der Fluß ϕ in $x^2 + y^2 \leq h^2$ in eine Taylorreihe um den Punkt P entwickeln. Beschränken wir uns hier auf den Anfang dieser Entwicklung, dann wird

$$\phi(x, y) = \phi(0) + r \left\{ \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x}(0) + \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial y}(0) \right\} + O(r^2), \quad (2.26)$$

so daß man für die Grenzwerte der ersten Fourierkoeffizienten erhält

$$\lim_{a \rightarrow 0} \phi_0(a) = \phi(0) ,$$

$$(2.27) \quad \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} \phi_1(a) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(0) ,$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} \phi_{-1}(a) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(0) .$$

Der Fluß im Mittelpunkt einer Kreisscheibe vom Radius h , die ganz im Moderator liegt, genügt daher der Mittelwertgleichung

$$(2.28) \quad I_0\left(\frac{h}{L_+}\right) \phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi(h, \varphi) d\varphi + q_+ \frac{I_0\left(\frac{h}{L_{1+}}\right) - I_0\left(\frac{h}{L_{2+}}\right)}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \Psi(0) .$$

Ist der Einheitsvektor n gegeben durch $n = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ und sei die Ableitung des Flusses in dieser Richtung

$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \cos \varphi_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}(0) + \sin \varphi_0 \frac{\partial \phi}{\partial y}(0)$, so gilt für diese Größe die Mittelwertgleichung

$$(2.29) \quad 2L_+ I_1\left(\frac{h}{L_+}\right) \frac{\partial \phi}{\partial n}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi(h, \varphi) \cos(\varphi_0 - \varphi) d\varphi + q_+ \frac{2L_{1+} I_1\left(\frac{h}{L_{1+}}\right) - 2L_{2+} I_1\left(\frac{h}{L_{2+}}\right)}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \frac{\partial \Psi}{\partial n}(0) .$$

$\Psi_n(a)$

§ 3. Numerische Approximation und Mittelwertgleichungen für Randpunkte

Überdecken wir nun den Reaktorquerschnitt mit einem quadratischen Punktgitter der Maschenweite h , welches den Voraussetzungen des § 1 genügt. Sei der Punkt P Ursprung eines Polarkoordinatensystems r , und Mittelpunkt eines Kreisrings $\xi \leq r \leq R, |\varphi| \leq \pi$, in dem der Fluß regulär ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die Gitterlinien im Punkt P die Richtungen $\varphi_j = j \pi/2$, $j = 0, 1, 2, 3$, haben und daher die diesem Punkt benachbarten Gitterpunkte im Abstand h die Koordinaten $(r_j, \varphi_j) = (h, j \pi/2)$ erhalten.

Bekanntlich läßt sich dann die Funktion $\phi = \phi(r, \varphi)$ hinsichtlich der Winkelvariablen φ "trigonometrisch" interpolieren. Das heißt, es gilt die Darstellung

$$(3.1) \quad \phi(r, \varphi) = \sum_{n=-1}^2 \tilde{\phi}_n(r) e_n(\varphi) + R(r, \varphi) \quad ,$$

wenn die Funktionen e_n erklärt sind wie in § 2 und die Koeffizienten $\tilde{\phi}_n(r)$ definiert sind durch die Gleichungen

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\phi}_0(r) &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \phi(r, j \pi/2) \quad , \\ \tilde{\phi}_1(r) &= \frac{1}{2} \left\{ \phi(r, 0) - \phi(r, \pi) \right\} \quad , \\ \tilde{\phi}_{-1}(r) &= \frac{1}{2} \left\{ \phi(r, \pi/2) - \phi(r, -\pi/2) \right\} \quad , \\ \tilde{\phi}_2(r) &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (-1)^j \phi(r, j \pi/2) \quad . \end{aligned}$$

Der Rest $R(r, \varphi)$ verschwindet also für $\varphi = j \cdot \pi/2$, $j = 0, 1, 2, 3$, so daß das trigonometrische Polynom an diesen Stellen φ_j die Werte $\phi(r, j \pi/2)$ annimmt.

Mit Hilfe dieser angenäherten Darstellung des Flusses in der Umgebung des Punktes P lassen sich nun die in § 2 hergeleiteten integralen Mittelwertgleichungen sehr leicht auf Beziehungen zwischen Funktions-

werten an Gitterpunkten oder zumindest auf Gitterlinien zurückführen. Berechnet man nämlich die Fourierkoeffizienten ϕ_n mit Hilfe des Interpolationspolynoms, dann wird in der betrachteten Näherung

$$(3.3) \quad \phi_n(r) = \begin{cases} \tilde{\phi}_n(r) & , \quad n = -1, 0, 1, 2, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit gelten die Mittelwertgleichungen des § 2 im Rahmen dieser Approximation auch für die Größen $\tilde{\phi}_n(r)$.

Bezeichnen wir die dem Punkt P benachbarten Gitterpunkte $P_j = (h, j \pi/2)$ auch mit E, N, W, S. Liegt dann eine Kreisscheibe vom Radius h um den Punkt P ganz im Moderator, dann wird die Mittelwertgleichung (2.28) für den Fluß ϕ im Punkte P

$$(3.4) \quad \phi(o) = \frac{1}{4 I_0\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ \phi_E + \phi_N + \phi_W + \phi_S + 4q_+ \frac{I_0\left(\frac{h}{L_{1+}}\right) - I_0\left(\frac{h}{L_{2+}}\right)}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \psi(o) \right\}.$$

Sei jetzt der Punkt P Mittelpunkt eines Stabquerschnitts vom Radius $a \leq h$. Auf Grund der Resultate des § 2 kann man sich überlegen, daß der Fluß im Punkt P sich stets berechnen läßt, wenn die Mittelwerte $\phi_o(a)$ bzw. $\tilde{\phi}_o(a)$ auf dem Stabrand im schnellen und thermischen Fluß bekannt sind und umgekehrt. Daher bedeutet es keinen Verlust an Allgemeinheit, wenn wir die Mittelwertgleichung in diesem Falle in der Form

$$(3.5) \quad \tilde{\phi}_o(a) = \frac{1}{4} \beta_o \left\{ \phi_E + \phi_N + \phi_W + \phi_S \right\} + \beta_o' \tilde{\psi}_o(a) + \beta_o'' \tilde{\psi}_o'(a)$$

verwendet werden. Etwas allgemeiner werden wir sogar für jeden Stab die Größen $\tilde{\phi}_n(a)$, $n = -1, 0, 1, 2$, berechnen, die nach § 2, (2.21), gegeben sind durch die Gleichungen

$$(3.6) \quad \tilde{\phi}_n(a) = \beta_n \tilde{\phi}_n(h) + \beta_n' \tilde{\psi}_n(a) + \beta_n'' \tilde{\psi}_n'(a) .$$

Ihre Kenntnis ermöglicht es nämlich, den Fluß in der Umgebung eines Stabes im Moderator zu berechnen. Ersetzt man in der letzten Gleichung (3.6) die Schrittweite h durch die Variable r und löst diese Gleichung nach $\tilde{\phi}_n(r)$ auf, so kann man schreiben

$$(3.7) \quad \tilde{\phi}_n(r) = \gamma_n(r) \tilde{\phi}_n(a) + \gamma'_n(r) \tilde{\psi}_n(a) + \gamma''_n(r) \tilde{\psi}'_n(a) .$$

Hier sind die Größen $\gamma_n(r)$ gemäß der Definition (2.22) der Koeffizienten \mathcal{S}_n gegeben durch

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \gamma_n(r) &= g_n(r) + \alpha_n k_n(r) , \\ \gamma'_n(r) &= \alpha'_n k_n(r) - \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \left\{ \left[g_n^{(1)} - g_n^{(2)} \right] (r) + \alpha_n^{(1)} \left[k_n^{(1)} - k_n^{(2)} \right] (r) \right\} , \\ \gamma''_n(r) &= - \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \alpha_n^{(1)} \left[k_n^{(1)} - k_n^{(2)} \right] (r) , \end{aligned}$$

wenn $g_n(r)$, $k_n(r)$ erklärt sind durch

$$(3.9) \quad \begin{aligned} g_n(r) &= - \frac{a}{L_+} \left\{ I_n\left(\frac{r}{L_+}\right) K'_n\left(\frac{a}{L_+}\right) - K_n\left(\frac{r}{L_+}\right) I'_n\left(\frac{a}{L_+}\right) \right\} , \\ k_n(r) &= I_n\left(\frac{r}{L_+}\right) K_n\left(\frac{a}{L_+}\right) - K_n\left(\frac{r}{L_+}\right) I_n\left(\frac{a}{L_+}\right) . \end{aligned}$$

Die angenäherte Flußverteilung ϕ^* läßt sich somit in der Umgebung eines Stabes schreiben

$$(3.10) \quad \phi^*(r, \varphi) = \sum_{n=-1}^2 \left\{ \gamma_n(r) \tilde{\phi}_n(a) + \gamma'_n(r) \tilde{\psi}_n(a) + \gamma''_n(r) \tilde{\psi}'_n(a) \right\} e_n(\varphi)$$

Da $\gamma_n(a) = 1$, $\gamma'_n(a) = \gamma''_n(a) = 0$ ist, wird also für $r = a$

$$(3.11) \quad \phi^*(a, \varphi) = \sum_{n=-1}^2 \tilde{\phi}_n(a) e_n(\varphi) ,$$

so daß insbesondere $\phi^*(a, j \pi/2) = \phi(a, j \pi/2)$ für $j = 0, 1, 2, 3$, ist.

Ferner hat man die Beziehung

$$(3.12) \quad a \frac{\partial \phi^*}{\partial r}(a, \varphi) = \sum_{n=-1}^2 \left\{ \alpha_n \tilde{\phi}_n(a) + \alpha'_n \tilde{\psi}_n(a) \right\} e_n(\varphi)$$

Daher genügt ϕ^* der Randbedingung auf dem Stab $a \frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \alpha_n \tilde{\phi}_n(a) + \alpha'_n \tilde{\psi}_n(a)$. Schließlich überzeugt man sich leicht, daß die Funktion ϕ^* der Differentialgleichung

$$(3.13) \quad -\Delta \phi^* + \frac{1}{L_+^2} \phi^* = f^*$$

mit

$$(3.14) \quad f^*(r, \varphi) = q_+ \sum_{n=-1}^2 \left\{ \gamma_n^{(1)}(r) \tilde{\phi}_n^{(1)}(a) + \gamma_n^{(1)}(r) \tilde{\psi}_n(a) \right\} e_n(\varphi)$$

genügt, und zwar in $r > 0$. Das heißt aber, daß ϕ^* alle Forderungen erfüllt, die in der gewählten Näherung möglich sind. Darüber hinaus stellt man fest, daß sich der Fluß im Moderator, für $r \geq a$, beliebig oft stetig differenzierbar in das Gebiet $0 < r \leq a$ fortsetzen läßt²⁾. Von dieser Tatsache werden wir jetzt Gebrauch machen.

Sei nun P_j , $j = 0, 1, 2, 3$, ein Gitterpunkt, der Nachbarpunkt des Punktes P im Abstand h ist, so daß also P_j die Koordinaten $(r, \varphi) = (h, j \pi/2)$ hat. Seien ferner $(r', \varphi')_j$ Polarkoordinaten um den Punkt P_j . Auf Grund der Fortsetzbarkeit der Flußverteilung in das Gebiet $0 < r \leq a$ läßt sich dann eine Lösung ϕ der Differentialgleichung $-\Delta \phi + \frac{1}{L_+^2} \phi = f$ um den Punkt P_j in $0 \leq r' < h$ in eine Fourierreihe

entwickeln der Gestalt

$$(3.15) \quad \phi_j(r', \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{n,j}(r') e_n(\varphi')$$

Insbesondere gilt nach § 2, (2.28) für den Fourierkoeffizienten $\phi_{j,0}$ die

²⁾ Dasselbe gilt natürlich nicht nur für die Näherung ϕ^* ,

sondern auch für $\phi(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n(r) e_n(\varphi)$.

Mittelwertgleichung

$$(3.16) \quad \phi_j(o) = \frac{1}{I_o\left(\frac{r'}{L_+}\right)} \phi_{o,j}(r') + \sigma(r') \psi_j(o)$$

für $r' < h$ und mit

$$(3.17) \quad \sigma(r') = \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \frac{1}{I_o\left(\frac{r'}{L_+}\right)} \left\{ I_o\left(\frac{r'}{L_{1+}}\right) - I_o\left(\frac{r'}{L_{2+}}\right) \right\} .$$

Die Beschränkung auf Werte von $r' < h$ ist zunächst notwendig, da man aus den obigen Überlegungen und der Gestalt der Größen $\gamma_n, \gamma_n', \gamma_n''$ entnehmen kann, daß die Fortsetzung des Flusses im Mittelpunkt eines Stabquerschnitts singularär wird.

Sei der Winkel φ' so orientiert, daß der Stabmittelpunkt P die Koordinaten $(r', \varphi')_j = (h, -\pi)$ erhält. Dann wollen wir nun verlangen, daß der Fluß $\phi_j(r', \varphi')$ der Randbedingung genügt für $(r', \varphi')_j \rightarrow (h, -\pi)$

$$(3.18) \quad \lim \left\{ \phi_j(r', \varphi') - \phi_j^*(r', \varphi') \right\} = 0 ,$$

wobei $\phi_j^*(r', \varphi')$ die Darstellung von $\phi^*(r, \varphi)$ in den Koordinaten $(r', \varphi')_j$ ist. Setzt man zur Abkürzung $\chi_j(r', \varphi') = \phi_j(r', \varphi') - \phi_j^*(r', \varphi')$, dann ist auf Grund dieser Randbedingung χ_j regulär in $r' \leq h$ und genügt der Mittelwertgleichung

$$(3.19) \quad \chi_j(o) = \frac{1}{2\pi I_o\left(\frac{h}{L_+}\right)} \int_{-\pi}^{+\pi} \chi_j(h, \varphi) d\varphi + \sigma \left\{ \psi_j(o) - \psi_j^*(o) \right\} .$$

Hier läßt sich das Integral mit Hilfe der trigonometrischen Interpolation berechnen, so daß man die Gleichung erhält

$$(3.20) \quad \chi_j(o) = \frac{1}{4I_o\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ \chi_j(h, o) + \chi_j(h, \pi/2) + \chi_j(h, -\pi/2) \right\} + \sigma \left\{ \psi_j(o) - \psi_j^*(o) \right\} ,$$

da die Randbedingung $\chi_j(h, -\pi) = 0$ ergibt. Ersetzt man jetzt wiederum χ_j durch $\phi_j - \phi_j^*$, dann entsteht die Mittelwertgleichung für Randpunkte

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \phi_j(0) = & \frac{1}{4I_0\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ \phi_j(h, 0) + \phi_j(h, \pi/2) + \phi_j(h, -\pi/2) \right\} + \\ & + \phi_j^*(h, j\pi/2) - \frac{1}{4I_0\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ \phi_j^*(2h, j\pi/2) + \phi_j^*(\sqrt{2}h, j\pi/2 + \pi/4) + \right. \\ & \left. + \phi_j^*(\sqrt{2}h, j\pi/2 - \pi/4) \right\} + \mathcal{D} \left\{ \psi_j(0) - \psi_j^*(h, j\pi/2) \right\} . \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich bequemer schreiben mit den Abkürzungen

$$(3.22) \quad \tilde{\phi}_{n,j} = \begin{cases} \tilde{\phi}_0 & , \quad n = 0 \quad , \\ \tilde{\phi}_1 \cos j\pi/2 + \tilde{\phi}_{-1} \sin j\pi/2 & , \quad n = 1 \quad , \\ \tilde{\phi}_2 \cos j\pi & , \quad n = 2 \quad , \end{cases}$$

und den Koeffizienten $\mathcal{D}_n, \mathcal{D}'_n, \mathcal{D}''_n, n = 0, 1, 2$, die gegeben sind durch

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_n &= \gamma_n(h) - \frac{1}{4I_0\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ \gamma_n(2h) + 2\gamma_n(\sqrt{2}h) \cos n\pi/4 \right\} , \\ \mathcal{D}'_n &= \gamma'_n(h) - \frac{1}{4I_0\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ \gamma'_n(2h) + 2\gamma'_n(\sqrt{2}h) \cos n\pi/4 \right\} - \mathcal{D} \gamma_n^{(1)}(h) , \\ \mathcal{D}''_n &= \gamma''_n(h) - \frac{1}{4I_0\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ \gamma''_n(2h) + 2\gamma''_n(\sqrt{2}h) \cos n\pi/4 \right\} - \mathcal{D} \gamma_n^{(1)'}(h) , \\ \mathcal{D} &= \frac{q_+}{L_{1+}^{-2} - L_{2+}^{-2}} \frac{1}{I_0\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ I_0\left(\frac{h}{L_{1+}}\right) - I_0\left(\frac{h}{L_{2+}}\right) \right\} . \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Größen lauten dann die Mittelwertgleichungen für die Randpunkte $P_j, j = 0, 1, 2, 3$, eines Stabes

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \phi_j(0) = & \sum_{n=0}^2 \mathcal{D}_n \tilde{\phi}_{n,j}(a) + \frac{1}{4I_0\left(\frac{h}{L_+}\right)} \left\{ \phi_j(h, 0) + \phi_j(h, \pi/2) + \phi_j(h, -\pi/2) \right\} + \\ & + \sum_{n=0}^2 \left\{ \mathcal{D}'_n \tilde{\psi}_{n,j}(a) + \mathcal{D}''_n \tilde{\psi}'_{n,j}(a) \right\} + \mathcal{D} \cdot \psi_j(0) . \end{aligned}$$

§ 4. Der f-Faktor und die kritische Gleichung

Betrachten wir jetzt einen Reaktorquerschnitt Γ , dessen äußerer Rand durch die Randkurve γ gegeben ist. In diesem Reaktor seien Brennelemente mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius a auf einem regelmäßigen Gitter angeordnet. Sei ferner die Funktion $H = H(x,y)$ in Γ Eigenlösung der Gleichung

$$(4.1) \quad \Delta H + B^2 H = 0, \quad H = 0 \quad \text{auf} \quad \gamma,$$

zum kleinsten Eigenwert B^2 . Dann kann man Größen $\bar{D}_i, \bar{\Sigma}_i, f$ definieren für $i = 1, 2$ durch die Gleichungen

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \int_{\Gamma} H \bar{D}_i \Delta \phi^{(i)} d\sigma &= \bar{D}_i \int_{\Gamma} \Delta H \phi^{(i)} d\sigma, \\ \int_{\Gamma} H \bar{\Sigma}_i \phi^{(i)} d\sigma &= \bar{\Sigma}_i \int_{\Gamma} H \phi^{(i)} d\sigma, \\ \int_{\Gamma_B} H \Sigma_2 \phi^{(2)} d\sigma &= f \int_{\Gamma} H \Sigma_2 \phi^{(2)} d\sigma, \end{aligned}$$

wobei das Gebiet Γ_B die Menge aller derjenigen Punkte aus Γ ist, die im Brennstoff liegen. Der Fluß ϕ genügt in Γ den Differentialgleichungen (1.1) bzw. (1.3) in Γ_B und (1.2) in Γ_M , wenn Γ_M das Moderatorgebiet bezeichnet. Mit den Abkürzungen

$$(4.3) \quad \eta = \sqrt{\frac{\Sigma_f}{\Sigma_{2-}}}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\bar{D}_1}{\bar{\Sigma}_1}, \quad L^2 = \frac{\bar{D}_2}{\bar{\Sigma}_2},$$

lassen sich daher leicht die Relationen gewinnen

$$\begin{aligned} (\tilde{\tau} B^2 + 1) \int_{\Gamma} H \phi^{(1)} d\sigma &= \eta f \cdot \int_{\Gamma} H \phi^{(2)} d\sigma, \\ (L^2 B^2 + 1) \int_{\Gamma} H \phi^{(2)} d\sigma &= \int_{\Gamma} H \phi^{(1)} d\sigma. \end{aligned}$$

Damit diese Beziehungen bestehen können, muß für die oben definierten Größen die "kritische Gleichung" gelten

$$(4.4) \quad (\tilde{\tau} B^2 + 1) (L^2 B^2 + 1) = \eta f.$$

Die Bestimmung von \bar{D} , $\bar{\Sigma}$ und f erfordert die Berechnung von Flußmittelwerten über den Brennstoff T_B und den Moderator T_M . Hierfür soll jetzt ein Weg angegeben werden.

Zunächst lassen sich die Flächenintegrale über T_B und T_M zurückführen auf Randintegrale über den Rand γ_B des Gebietes T_B . Und zwar erhält man mit Hilfe der Differentialgleichungen (1.2) und (1.3) durch Anwendung des Greenschen Satzes die Darstellungen, wenn n die äußere Normale des Randes γ_B ist,

$$\begin{aligned}
 \int_{T_M} H \phi^{(1)} d\sigma &= (B^2 + L_{1+}^{-2})^{-1} \int_{\gamma_B} (\phi^{(1)} \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n_+}) d s, \\
 \int_{T_B} H \phi^{(1)} d\sigma &= (B^2 + L_{1-}^{-2})^{-1} \left\{ \int_{\gamma_B} (H \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n_-} - \phi^{(1)} \frac{\partial H}{\partial n}) d s + \nu q_1 \int_{T_B} H \phi^{(2)} d\sigma \right\}, \\
 (4.5) \quad \int_{T_M} H \phi^{(2)} d\sigma &= (B^2 + L_{2+}^{-2})^{-1} \left\{ \int_{\gamma_B} (\phi^{(2)} \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n_+}) d s + q_{2+} \int_{T_M} H \phi^{(1)} d\sigma \right\}, \\
 \int_{T_B} H \phi^{(2)} d\sigma &= (B^2 + L_{2-}^{-2})^{-1} \int_{\gamma_B} (H \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n_-} - \phi^{(2)} \frac{\partial H}{\partial n}) d s,
 \end{aligned}$$

sowie für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad \int_{T^i} H D_i \Delta \phi^{(i)} d\sigma &= -B^2 D_{i+} \int_{T_M} H \phi^{(i)} d\sigma - B^2 D_{i-} \int_{T_B} H \phi^{(i)} d\sigma + \\
 &+ (D_{i+} - D_{i-}) \int_{\gamma_B} \phi^{(i)} \frac{\partial H}{\partial n} d s.
 \end{aligned}$$

Die Randintegrale über γ_B können nun durch die Fourierkoeffizienten von ϕ und H auf Stabrändern ausgedrückt werden. Numeriert man die Brennelemente in irgendeiner Reihenfolge und bezeichnet mit $\phi_k(r, \varphi)$, $H_k(r, \varphi)$ die Darstellung dieser Funktionen bezüglich der Polarkoordinaten r , φ um den Mittelpunkt des k -ten Stabquerschnitts, dann gilt also für $k = 1, \dots, N$, mit den Bezeichnungen des § 2

$$\phi_k(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{k,n}(r) e_n(\varphi) ,$$

$$H_k(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{k,n}(r) e_n(\varphi) .$$

Für die Integrale über γ_B gelten somit Entwicklungen der Gestalt

$$(4.7) \quad \int_{\gamma_B} \phi H \, ds = 2\pi a \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n^{-1} \phi_{k,n}(a) H_{k,n}(a) ,$$

wenn $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = 2$ für $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ist. Die Funktion $H = H(x, y)$ genügt nun in T der Differentialgleichung $\Delta H + B^2 H = 0$. Hieraus folgt daß auf dem Rande des k -ten Stabquerschnitts für die Ableitung des n -ten Fourierkoeffizienten $H_{k,n}$ stets die Gleichung gilt

$$(4.8) \quad a \frac{\partial H_{k,n}}{\partial r}(a) = \lambda_n H_{k,n}(a)$$

für $k = 1, \dots, N$, $n = 0, \pm 1, \dots$ und mit

$$(4.9) \quad \lambda_n = B a \frac{J'_n(Ba)}{J_n(Ba)} .$$

Mit Hilfe dieser Beziehung und der Gleichung (2.11) für die Ableitung der Fourierkoeffizienten des Flusses auf Stabrändern lassen sich daher die oben auftretenden Randintegrale darstellen in der Form

$$(4.10) \quad \int_{\gamma_B} \phi \frac{\partial H}{\partial n} \, ds = 2\pi \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n^{-1} \lambda_n \phi_{k,n}(a) H_{k,n}(a)$$

und

$$(4.11) \quad \int_{\gamma_B} H \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds = 2\pi \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n^{-1} (\alpha_n \phi_{k,n}(a) + \alpha'_n \phi_{k,n}(a)) H_{k,n}(a)$$

Auf Grund der beiden letzten Gleichungen erhält man schließlich die folgenden Reihenentwicklungen für die Flußmittelwerte:

$$\int_{\Gamma_M} H \phi^{(1)} d\sigma = 2\pi (B^2 + L_{1+}^{-2})^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ (\lambda_n - \alpha_n^{(1)}) \phi_{k,n}^{(1)} - \alpha_n^{\prime(1)} \phi_{k,n} \right\} \epsilon_n^{-1} H_{k,n},$$

$$\int_{\Gamma_B} H \phi^{(1)} d\sigma = 2\pi (B^2 + L_{1-}^{-2})^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{D_{1+}}{D_{1-}} \alpha_n^{(1)} - \lambda_n \right) \phi_{k,n}^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{D_{1+}}{D_{1-}} \alpha_n^{\prime(1)} \phi_{k,n} \right\} \epsilon_n^{-1} H_{k,n} + q_{1-} (B^2 + L_{1-}^{-2})^{-1} \int_{\Gamma_B} H \phi^{(2)} d\sigma,$$

(4.12)

$$\int_{\Gamma_M} H \phi^{(2)} d\sigma = 2\pi (B^2 + L_{2+}^{-2})^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ (\lambda_n - \alpha_n^{(2)}) \phi_{k,n}^{(2)} - \alpha_n^{\prime(2)} \phi_{k,n}^{(1)} \right\} \epsilon_n^{-1} H_{k,n} + \\ + q_{2+} (B^2 + L_{2+}^{-2})^{-1} \int_{\Gamma_M} H \phi^{(1)} d\sigma,$$

$$\int_{\Gamma_B} H \phi^{(2)} d\sigma = 2\pi (B^2 + L_{2-}^{-2})^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{D_{2+}}{D_{2-}} \alpha_n^{(2)} - \lambda_n \right) \phi_{k,n}^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{D_{2+}}{D_{2-}} \alpha_n^{\prime(2)} \phi_{k,n}^{(1)} \right\} \epsilon_n^{-1} H_{k,n}.$$

Für die numerische Berechnung dieser Ausdrücke ergeben sich noch einige Vereinfachungen. Wählt man auch hier die in § 3 beschriebene numerische Approximation, dann treten an die Stelle der Fourierkoeffizienten $\phi_{k,n}(a) = 0$ die Größen $\tilde{\phi}_{k,n}(a) = \phi_{k,n}(a)$ für $n = -1, 0, 1, 2$ und $\phi_{k,n}(a) = 0$ für alle anderen Indizes n . Ferner wird in den Anwendungen der Reaktorquerschnitt Γ von einfacher geometrischer Gestalt sein. In diesen Fällen lassen sich die Größen $H_{k,n}(a)$ explizit angeben.

(a) Ist das Gebiet Γ ein Rechteck, mit den Kantenlängen H_x und H_y . Sei

$$B_x = \frac{\pi}{H_x}, \quad B_y = \frac{\pi}{H_y}, \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad \text{und}$$

$$(4.13) \quad H(x, y) = \cos B_x x \cos B_y y,$$

dann erhält man für $H_{k,n}(a)$, $n = 1, 0, 1, 2$, $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
 H_{k,0}(a) &= \xi_0 J_0(Ba) \cos B_x x_k \cos B_y y_k, \\
 H_{k,1}(a) &= -\xi_1 J_1(Ba) \frac{B_x}{B} \sin B_x x_k \cos B_y y_k, \\
 H_{k,-1}(a) &= -\xi_{-1} J_1(Ba) \frac{B_y}{B} \cos B_x x_k \sin B_y y_k, \\
 H_{k,2}(a) &= -\xi_2 J_2(Ba) \frac{B_x^2 - B_y^2}{B^2} \cos B_x x_k \cos B_y y_k,
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

wenn die kartesischen Koordinaten x_k, y_k den Mittelpunkt des k -ten Stabquerschnitts bezeichnen.

Für einen kreisförmigen Reaktorquerschnitt Γ vom Radius R sei

$$H(x,y) = J_0(B\sqrt{x^2 + y^2})
 \tag{4.15}$$

mit $B = \frac{j_{0,0}}{R}$, wenn $j_{0,0}$ die kleinste Nullstelle der Besselfunktion J_0 ist. Die Koeffizienten $H_{k,n}(a)$, $n = -1, 0, 1, 2$ werden in diesem Falle

$$\begin{aligned}
 H_{k,0}(a) &= \xi_0 J_0(Ba) J_0(Br_k), \\
 H_{k,1}(a) &= -\xi_1 J_1(Ba) \frac{x_k}{r_k} J_1(Br_k), \\
 H_{k,-1}(a) &= -\xi_{-1} J_1(Ba) \frac{y_k}{r_k} J_1(Br_k), \\
 H_{k,2}(a) &= \xi_2 J_2(Ba) \frac{x_k^2 - y_k^2}{r_k^2} J_2(Br_k),
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

für $k = 1, \dots, N$ und mit $r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$.

§ 5. Rechenmethoden

In § 2 und § 3 wurden Mittelwertgleichungen hergeleitet für jeden Punkt des quadratischen Maschennetzes, mit dem wir den Reaktorquerschnitt überdeckt haben. Damit wird das ursprüngliche Eigenwertproblem (1.1) approximiert durch ein System von Mittelwertgleichungen für die gesuchten Flußwerte an Gitterpunkten. Die Lösung dieses Gleichungssystems kann mit den hierfür üblichen Methoden bewerkstelligt werden. Der Vollständigkeit halber sollen jedoch die bei der Berechnung der Beispiele angewandten Verfahren kurz dargestellt werden.

Wir schreiben die Differentialgleichungen (1.1) in der abgekürzten Form

$$(5.1) \quad A \phi = \nu B \phi .$$

Mit den Bezeichnungen $\phi = (\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$,

$$(5.2) \quad A = \begin{pmatrix} -D_1 \Delta + \frac{D_1}{L_1^2} & 0 \\ -\Sigma_1 & -D_2 \Delta + \frac{D_2}{L_2^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_f \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und definieren ein Skalarprodukt zwischen zwei Flußvektoren ϕ, ψ durch die Gleichung

$$(\phi, \psi) = \int_{\Gamma} (\phi^{(1)} \psi^{(1)} + \phi^{(2)} \psi^{(2)}) d\Omega .$$

Zusammen mit den Randbedingungen (1.1') ist dann ein Eigenwertproblem definiert. Nun lautet die Vorschrift zur Berechnung einer Folge von Funktionen ϕ_j und Zahlen ν_j , die gegen die Eigenlösung ϕ und den zugehörigen kleinsten Eigenwert ν konvergieren sollen

$$(5.3) \quad A \phi_{j+1} = \nu_j B \phi_j ,$$

$$(5.4) \quad \nu_{j+1} = \frac{(\phi_{j+1}^*, B \phi_j)}{(\phi_{j+1}^*, B \phi_{j+1})} ,$$

für $j = 0, 1, \dots$, wobei die Funktionen ϕ_{j+1}^k Näherungslösungen des zuge-

hörigen adjungierten Problems $A^* \phi^* = \downarrow B^* \phi^*$ sind, und die Ausgangsnäherungen $v_o \phi_o$, $v_o \phi_o^*$ passend gewählt werden.

Damit ist die Lösung des Eigenwertproblems zurückgeführt auf ein iteratives Verfahren, den sogenannten äußeren Iterationszyklus, der in jedem Schritt die Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems erfordert.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, führen wir an, daß sich die Skalarprodukte, die bei der Bestimmung von v_j auftreten, in eine für die numerische Berechnung bequeme Form bringen lassen. Und zwar kann man mit Hilfe der Differentialgleichungen (1.3), denen der Fluß im Brennstoff genügt, und den entsprechenden Gleichungen für den adjungierten Fluß die Formel herleiten, mit den in (2.12) definierten Größen α'_n ,

$$(5.5) \quad v_{j+1} = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n^{-1} \alpha'_n (1) (\phi_{k,n}^{*(1)}(a))_{j+1} (\phi_{k,n}^{(2)}(a))_j}{\sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n^{-1} \alpha'_n (1) (\phi_{k,n}^{*(1)}(a))_{j+1} (\phi_{k,n}^{(2)}(a))_{j+1}},$$

die unter der Voraussetzung gilt, daß alle Brennelemente die gleiche Materialzusammensetzung haben. In den dieser Arbeit beigelegten Beispielen wurde der adjungierte Fluß jedoch nicht berechnet. In diesem Falle kann man in der letzten Formel die Größen $(\phi_{k,n}^{*(1)}(a))_{j+1}$ ersetzen durch die Größen $(\phi_{k,n}^{(2)}(a))_{j+1}$, ohne die Konvergenz der Eigenwertnäherungen v_j wesentlich zu beeinträchtigen.

Um das Iterationsverfahren beginnen zu können, muß eine Ausgangsverteilung $v_o \phi_o$ vorgegeben werden. Da diese in der Gleichung (5.3) nur in der Form $v_o B \phi_o = (0, \sum_f v_o \phi_o^{(2)})$ auftritt, genügt es also, eine Schätzung des thermischen Flusses im Brennstoff anzugeben, oder genauer, der Fourierkoeffizienten $\phi_{k,n}^{(2)}(a)$ des thermischen Flusses auf dem Rande der Brennelemente. Diese Schätzung braucht nicht sehr genau zu sein. In allen Beispielen dieser Arbeit wurde gesetzt

$$(5.6) \quad v_o (\phi_{k,n}^{(2)}(a))_o = \begin{cases} H_{k,o}(a) & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n \neq 0 \end{cases} .$$

In jedem Schritt des äußeren Iterationszyklus ist ein inhomogenes System von Mittelwertgleichungen für die Funktionswerte des schnellen und thermischen Flusses zu lösen. Da die Gleichungen, die den schnellen Fluß $\phi_{j+1}^{(1)}$ der (j+1)-ten Eigenwertnäherung bestimmen, nur den thermischen Fluß der j-ten, also schon berechneten, Näherung enthalten, löst man diese Gleichungen zunächst. Anschließend kann man dann die Gleichungen für den thermischen Fluß $\phi_{j+1}^{(2)}$ lösen, womit der neue Flußvektor ϕ_{j+1} bekannt ist und die neue Eigenwertnäherung ψ_{j+1} berechnet werden kann. Ein gutes Verfahren für die Lösung der inhomogenen Gleichungen ist die sogenannte beschleunigte Liebmannsche Überrelaxation³⁾, die jetzt kurz beschrieben werden soll.

Bezeichnen wir mit $P_{i,k}$ die Gitterpunkte des quadratischen Maschennetzes, das den Reaktorquerschnitt überdeckt, und sei $P_{i,k} = (x_k, y_i)$ mit $x_k = k \cdot h$, $y_i = i \cdot h$, wobei die Indizes i, k ganze Zahlen in einem geeigneten Intervall durchlaufen. Sei ferner für Punkte $P_{i,k}$ im Moderator $\phi^{(i,k)} = \phi(x_k, y_i)$ und für Punkte $P_{i,k}$, die Mittelpunkte eines Stabquerschnitts sind, $\phi^{(i,k)} = \phi_o^{(i,k)}(a)$. Dann lassen sich die Mittelwertgleichungen (3.4), (3.5) und (3.24) für den schnellen und thermischen Fluß der (j+1)-ten Eigenwertnäherung in die Gestalt bringen

$$(5.7) \quad \phi^{(i,k)} = a_{ik} \phi^{(i,k+1)} + b_{ik} \phi^{(i-1,k)} + c_{ik} \phi^{(i,k-1)} + d_{ik} \phi^{(i+1,k)} + S^{(i,k)} .$$

Im einzelnen wird also für Punkte $P_{i,k}$ im Moderator, für die die Gleichung (3.4) gilt

$$(5.8) \quad a_{ik} = b_{ik} = c_{ik} = d_{ik} = \frac{1}{4I_o \left(\frac{h}{L} \right)_+} ,$$

für Punkte $P_{i,k}$, die Mittelpunkte eines Stabquerschnitts sind,

$$(5.9) \quad a_{ik} = b_{ik} = c_{ik} = d_{ik} = \frac{1}{4} \mathcal{S}_o ,$$

mit \mathcal{S}_o aus den Gleichungen (2.22). Ist schließlich $P_{i,k}$ ein Punkt im Moderator und zum Beispiel der Punkt $P_{i,k+1}$ Mittelpunkt eines Stabquerschnitts, dann wird gemäß Gleichung (3.24)

$$(5.10) \quad a_{ik} = \phi_o , \quad b_{ik} = c_{ik} = d_{ik} = \frac{1}{4I_o \left(\frac{h}{L} \right)_+} ,$$

³⁾ vgl. [8]

mit ϕ_0 aus (3.23). Der Quellterm $S^{(i,k)}$ faßt jeweils alle übrigen Glieder der eben genannten Mittelwertgleichungen zusammen. Die in $S^{(i,k)}$ enthaltenen Flußwerte werden der j -ten Näherung bzw., soweit sie schon berechnet sind, der $(j+1)$ -ten Näherung des äußeren Iterationszyklus entnommen.

Schreibt man nun die Flußwerte $\phi^{(i,k)}$ in der Form eines Vektors mit den Komponenten ϕ_p , $p = 1, \dots, M$, dann lauten die Gleichungen (5.7) auch

$$(5.11) \quad \phi_p = \sum_{q=1}^M R_{pq} \phi_q + S_p, \quad p = 1, \dots, M.$$

Die Matrix R_{pq} wird also durch die Koeffizienten a_{ik}, \dots, d_{ik} bestimmt. Das beschleunigte Liebmannsche Überrelaxationsverfahren für eine Folge von Vektoren $\phi_p^{(t)}$, $t = 0, 1, \dots$, die gegen eine Lösung der Gleichung (5.11) konvergieren, wird jetzt definiert durch

$$(5.12) \quad \phi_p^{(t+1)} = \alpha \left(\sum_{q=p+1}^M R_{pq} \phi_q^{(t)} + \sum_{q=1}^{p-1} R_{pq} \phi_q^{(t+1)} + S_p \right) + (1-\alpha) \phi_p^{(t)},$$

wenn man beachtet, daß $R_{ip} = 0$ ist für $p = 1, \dots, M$. Den Parameter α kann man noch geeignet wählen. Für den Fall einer symmetrischen Matrix R_{pq} gibt es ein α , das eine optimale Konvergenz der Folge $\phi_p^{(t)}$ ergibt, und welches sich bestimmt aus der Gleichung

$$(5.13) \quad \alpha = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}},$$

wenn $\lambda = \lambda_1$ der größte Eigenwert der Matrix R_{pq} ist. Wählt man $\alpha = 1$, so erhält man das gewöhnliche, unbeschleunigte, Liebmannsche Überrelaxationsverfahren.

In jedem Schritt des äußeren Iterationszyklus ist damit ein innerer Iterationszyklus definiert, der die näherungsweise Lösung der inhomogenen Gleichungen ermöglicht.

Da die Berechnung des größten Eigenwerts λ_1 der Matrix im allgemeinen schwierig ist, haben wir uns in den Beispielen mit einer Abschätzung dieser Größen begnügt, und zwar mit der maximalen Zeilensumme der

Matrix R_{pq} . Sei λ also erklärt durch

$$(5.14) \quad \lambda = \text{Max}_{i,k} (a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik}) .$$

Mit dieser Wahl von λ ergibt sich ein α , welches größer ist als das optimale α , so daß die Konvergenz der Relaxationen $\phi^{(t)}$ dadurch verschlechtert wird. Um dem entgegenzuwirken, wurden stets die beiden ersten Näherungen $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ unbeschleunigt, d.h. mit $\alpha = 1$ berechnet und erst die folgenden $\phi^{(3)}$, $\phi^{(4)}$, ... mit der aus (5.14) folgenden Beschleunigungskonstanten α . In allen Beispielen wurden stets neun Näherungen berechnet. Als Ausgangsnäherung $\phi^{(0)}$ im $(j+1)$ -ten Schritt des äußeren Iterationszyklus wurde die letzte Näherung $\phi^{(9)}$ des vorhergehenden j -ten Schritts des äußeren Iterationszyklus gewählt, also $\phi_{j+1}^{(0)} = \phi_j^{(9)}$. Zu Beginn der Rechnung, im ersten Schritt des äußeren Zyklus, war $\phi^{(0)} = 0$.

In den angegebenen Beispielen ist der Reaktorquerschnitt so beschaffen, daß man auf Grund der vorhandenen Symmetrien den Fluß nur in einem Viertel des Querschnitts zu berechnen braucht. In diesem Fall gibt es Gitterlinien, auf denen die Randbedingung $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ besteht. Liegen zum Beispiel die Punkte P_{i,k_0} mit einem festen k_0 auf einer Symmetriegeraden, dann gilt

$$\phi^{(i,k_0-1)} = \phi^{(i,k_0+1)}$$

Man vergrößert also die Anzahl der Punkte, in diesem Beispiel um die Spalte P_{i,k_0+1} . Nachdem man die Flußwerte $\phi^{(i,k)}$ in der Näherung $(t+1)$ berechnet hat an allen Punkten, an denen die Gleichungen (5.12) gelten, bestimmt man anschließend $[\phi^{(i,k_0+1)}]^{(t+1)}$ durch die Gleichungen

$$(5.15) \quad [\phi^{(i,k_0+1)}]^{(t+1)} = [\phi^{(i,k_0-1)}]^{(t+1)}$$

Einen guten Einblick in das Konvergenzverhalten der Näherungen $\phi^{(t)}$ vermitteln bei der Durchführung der numerischen Rechnungen die Größen

$$(5.16) \quad M^{(t+1)} = \text{sgn} (\phi_{p_m}^{(t+1)} - \phi_{p_m}^{(t)}) \text{Max}_p |\phi_p^{(t+1)} - \phi_p^{(t)}| , \quad p_m ,$$

für $t = 0, 1, \dots$, wenn p_m denjenigen Index bezeichnet, für den das Maximum

angenommen wird.

§ 6. Beispiele

In diesem Paragraphen sollen diejenigen Daten angegeben werden, mit denen die folgenden Beispiele berechnet wurden. Die Resultate der Rechnungen sind zum größeren Teil im Anhang aufgeführt. Und zwar sind im Anhang 1 für einige Reaktoren gemittelte Wirkungsquerschnitte zusammengestellt, wie sie sich mit den Methoden des § 4 ergeben. Im Anhang 2 befindet sich eine Anzahl von Kurven, die Flußverläufe in Reaktoren illustrieren. In allen Beispielen wurden sechs bis sieben Eigenwertnäherungen des äußeren Iterationszyklus berechnet, womit die relative Genauigkeit des berechneten Eigenwertes besser als $1 \cdot 10^{-4}$ wird. Um die Genauigkeit der Approximation durch die angenäherten Mittelwertgleichungen zu testen, wurden zwei Reaktoren, FR o/1 und FR o/6 mit zwei verschiedenen Maschenweiten h berechnet. Es ergibt sich, daß bei einer Verfeinerung des Gitters, die etwa zur doppelten Anzahl von Gitterpunkten führt, der Eigenwert sich in beiden Beispielen um etwa 5% ändert.

Es wurden zwei Typen von Reaktoren berechnet, bezeichnet durch F bzw. FR o, deren Materialzusammensetzung durch die folgenden Größen definiert ist:

$$\begin{array}{ll} D_2O: & D_{1+} = 1,12 \text{ cm}, & D_{2+} = 0,8 \text{ cm}, \\ & \Sigma_{1+} = 9,33333 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}, & \Sigma_{2+} = 8,0 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}, \end{array}$$

(F)

$$\begin{array}{ll} \text{Uran:} & D_{1-} = 1,0024 \text{ cm}, & D_{2-} = 0,716 \text{ cm}, \\ & \Sigma_{1-} = 0, & \Sigma_{2-} = 0,36014 \text{ cm}^{-1}, \\ & \Sigma_f = 0,189 \text{ cm}^{-1}, & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} D_2O: & D_{1+} = 1,12 \text{ cm}, & D_{2+} = 0,83 \text{ cm}, \\ & \Sigma_{1+} = 1,01818 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}, & \Sigma_{2+} = 6,73646 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}, \end{array}$$

(FRo)

Uran: $D_{1-} = 1,0024 \text{ cm}, \quad D_{2-} = 0,716 \text{ cm},$
 $\Sigma_{1-} = 0, \quad \Sigma_{2-} = 0,314 \text{ cm}^{-1},$
 $\Sigma_f = 0,189 \text{ cm}^{-1}.$

Für einen Abschaltstab vom Radius 3,15 cm haben wir die Extrapolationslängen

$$\lambda_1 = \infty,$$

$$\lambda_2 = 2,15 \text{ cm}$$

angenommen.

Der Radius der Brennelementquerschnitte ist in allen Fällen $a = 1,6 \text{ cm}$. Die Schnittweite h wurde stets so gewählt, daß der kürzeste Abstand d zwischen zwei Brennelementen ein ganzes Vielfaches von h ist, $d = 4 h$ oder $d = 6 h$, so daß Stabpositionen stets auf Gitterlinien liegen.

Mit Hilfe der Wirkungsquerschnitte und der Werte für a und h lassen sich die Koeffizienten der Mittelwertgleichungen $\delta_n, \delta'_n, \delta''_n$ und $\sigma_n, \sigma'_n, \sigma''_n$ sowie die durch Gleichungen (5.13) und (5.14) erklärte Beschleunigungskonstante α berechnen. Zum Beispiel erhält man für α mit den Wirkungsquerschnitten (F) und für $a = 1,6 \text{ cm}, h = 4,2 \text{ cm}$

$$\alpha^{(1)} = 1,66704,$$

$$\alpha^{(2)} = 1,94238.$$

Der Grundriß Γ für die Reaktoren Fo, F1 ist gegeben durch

$$\Gamma: |x| \leq \frac{H}{2}, \quad |y| \leq \frac{H}{2}, \quad H = 3 d = 50,4 \text{ cm},$$

und für die Reaktoren F5, F6 durch

$$\Gamma: |x| \leq \frac{H}{2}, \quad |y| \leq \frac{H}{2}, \quad H = 13 d = 218,4 \text{ cm}.$$

Brennelemente befinden sich in diesen Reaktoren an den Positionen mit Koordinaten (x_i, y_k) , wenn x_i, y_k gegeben sind durch

$$x_i = i \cdot d, \quad y_k = k \cdot d, \quad i, k = 0, \pm 1, \dots$$

und mit $d = 16,8$ cm. Für die genannten Reaktoren gilt im einzelnen, wenn ν_j die j -te Eigenwertnäherung bezeichnet:

- 1) F₀. $a = 1,6$ cm, $h = 4,2$ cm, $d = 16,8$ cm, 9 Brennelemente.
Grundriß in Abb. 1a), Flußverlauf in Abb. 2, Abb. 3,

$$\begin{array}{ll} \nu_1 = 8,43867, & \nu_4 = 8,37947, \\ \nu_2 = 8,38251, & \nu_5 = 8,37898, \\ \nu_3 = 8,38076, & \nu_6 = 8,37885. \end{array}$$

- 2) F₁. $a = 1,6$ cm, $h = 4,2$ cm, $d = 16,8$ cm. Grundriß wie für den Reaktor F₀, aber ohne das zentrale Brennelement an der Stelle $x = y = 0$, also mit 8 Brennelementen. Flußverlauf in Abb. 4, Abb. 5,

$$\nu_6 = 11,74880.$$

- 3) F₅. $a = 1,6$ cm, $h = 4,2$ cm, $d = 16,8$ cm, 169 Brennelemente.
Grundriß in Abb. 1b), Flußverlauf in Abb. 6 und Abb. 7,

$$\begin{array}{ll} \nu_1 = 2,31843, & \nu_4 = 2,16570, \\ \nu_2 = 2,18165, & \nu_5 = 2,16532, \\ \nu_3 = 2,16818, & \nu_6 = 2,16528. \end{array}$$

- 4) F₆. $a = 1,6$ cm, $h = 4,2$ cm, $d = 16,8$ cm. Grundriß wie für den Reaktor F₅, aber ohne das zentrale Brennelement an der Stelle $x = y = 0$, also mit 168 Brennelementen. Flußverteilung in Abb. 8, Abb. 9,

$$\begin{array}{ll} \nu_1 = 2,33033, & \nu_4 = 2,17082, \\ \nu_2 = 2,18441, & \nu_5 = 2,17031, \\ \nu_3 = 2,17359, & \nu_6 = 2,17022. \end{array}$$

Die Reaktoren FRO sind unterkritische Anordnungen. Der Grundriß Γ ist hier in allen Fällen definiert durch

$$\Gamma: \quad x^2 + y^2 \leq R, \quad R = 70 \text{ cm}.$$

Positionen von Brennelementen haben in diesen Reaktoren FRO die Koordinaten x_i, y_k mit

$$x_i = (i + \frac{1}{2})d, \quad y_k = (k + \frac{1}{2})d$$

für alle $i, k = 0, \pm 1, \dots$, für die der Punkt (x_i, y_k) in Γ liegt. Da sich der kreisförmige Querschnitt Γ in dem quadratischen Punktnetz nur angenähert durch einen Polygonzug durch Gitterpunkte beschreiben läßt, werden wir in jedem Beispiel einen effektiven Radius R_{eff} angeben, der so bestimmt ist, daß man mit $\pi \cdot R_{\text{eff}}^2$ den Flächeninhalt unter dem Polygonzug erhält. An Stelle des Eigenwertes ν wurde in den folgenden Beispielen die Größe $\eta = \nu \cdot \frac{\Sigma_f}{\Sigma_{2-}}$ eingeführt. Ist dementsprechend η_j die j -te Eigenwertnäherung, so wird im einzelnen:

- 5) FRO/1. $a = 1,6 \text{ cm}, \quad h = 4,2 \text{ cm}, \quad d = 16,8 \text{ cm}, \quad R_{\text{eff}} = 70,05 \text{ cm},$
52 Brennelemente. Grundriß in Abb. 1c), Flußverlauf in Abb. 10, Abb. 11, Abb. 12 und Abb. 13,

$$\begin{array}{ll} \eta_1 = 1,46574, & \eta_4 = 1,38716, \\ \eta_2 = 1,39918, & \eta_5 = 1,38754, \\ \eta_3 = 1,38970, & \eta_6 = 1,38775. \end{array}$$

- 6) FRO/2. $a = 1,6 \text{ cm}, \quad h = 2,8 \text{ cm}, \quad d = 16,8 \text{ cm}, \quad R_{\text{eff}} = 70,116 \text{ cm},$
52 Brennelemente,

$$\eta_7 = 1,38159.$$

- 7) FRO/3. $a = 1,6 \text{ cm}$, $h = 4,2 \text{ cm}$, $d = 16,8 \text{ cm}$, $R_{\text{eff}} = 70,05 \text{ cm}$,
48 Brennelemente. Grundriß wie für den Reaktor FRO/1, aber
ohne die 4 zentralen Brennelemente mit den Koordinaten
 $(x_i, y_k) = (\pm \frac{d}{2}, \pm \frac{d}{2})$. Flußverlauf in Abb. 14, Abb. 15,
Abb. 16 und Abb. 17,

$$\eta_6 = 1,48489 .$$

- 8) FRO/4. $a = 1,6 \text{ cm}$, $h = 4,2 \text{ cm}$, $d = 16,8 \text{ cm}$, $R_{\text{eff}} = 70,05 \text{ cm}$,
44 Brennelemente. Grundriß wie für den Reaktor FRO/1, aber
ohne die acht randnächsten Stäbe mit den Koordinaten
 $(x_i, y_k) = (\pm \frac{3}{2} d, \pm \frac{7}{2} d)$ und $(x_i, y_k) = (\pm \frac{7}{2} d, \pm \frac{3}{2} d)$,

$$\eta_6 = 1,39000 .$$

- 9) FRO/5. $a = 1,6 \text{ cm}$, $h = 4,2 \text{ cm}$, $d = 16,8 \text{ cm}$, $R_{\text{eff}} = 70,05 \text{ cm}$,
52 Brennelemente. Grundriß wie für den Reaktor FRO/1, aber
mit einem Abschaltstab an der Stelle $x = y = 0$. Flußverlauf
in Abb. 18, Abb. 19, Abb. 20, Abb. 21,

$$\eta_1 = 1,51979 ,$$

$$\eta_4 = 1,50131 ,$$

$$\eta_2 = 1,51843 ,$$

$$\eta_5 = 1,50415 ,$$

$$\eta_3 = 1,49850 ,$$

$$\eta_6 = 1,50467 .$$

Nimmt man an, daß der f-Faktor für diesen Reaktor gleich dem f-Faktor für den Reaktor FRO/1 ist, dann können wir die Abschaltwirkung $\frac{\Delta k}{k}$ des Abschaltstabes berechnen, mit $k = \eta f$. Mit Hilfe der gemittelten Wirkungsquerschnitte aus Anhang 1 für den Reaktor FRO/1 läßt sich die Abschaltstabwirkung auch nach der homogenen Zwei-Gruppen-Theorie berechnen. Man erhält die beiden Werte

$$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{\text{het}} = 8,43\% ,$$

$$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{\text{hom}} = 9,18\% .$$

- 10) FRO/6. $a = 1,6 \text{ cm}$, $h = 4,5 \text{ cm}$, $d = 18,0 \text{ cm}$, $R_{\text{eff}} = 70,36 \text{ cm}$,
44 Brennelemente. Grundriß in Abb. 1d), Flußverlauf in
Abb. 22, Abb. 23, Abb. 24, Abb. 25,

$$\eta_6 = 1,42695 .$$

- 11) FRO/7. $a = 1,6 \text{ cm}$, $h = 3,6 \text{ cm}$, $d = 18,0 \text{ cm}$, $R_{\text{eff}} = 69,91 \text{ cm}$,
44 Brennelemente,

$$\eta_7 = 1,42592 .$$

- 12) FRO/8. $a = 1,6 \text{ cm}$, $h = 3,6 \text{ cm}$, $d = 21,6 \text{ cm}$, $R_{\text{eff}} = 69,71 \text{ cm}$,
32 Brennelemente. Grundriß in Abb. 1e), Flußverlauf in
Abb. 26, Abb. 27, Abb. 28, Abb. 29,

$$\eta_7 = 1,57162 .$$

- 13) FRO/9. $a = 1,6 \text{ cm}$, $h = 4,0 \text{ cm}$, $d = 24,0 \text{ cm}$, $R_{\text{eff}} = 69,70 \text{ cm}$,
24 Brennelemente. Grundriß in Abb. 1f), Flußverlauf in
Abb. 30, Abb. 31, Abb. 32, Abb. 33,

$$\eta_7 = 1,68840 .$$

Literatur

- [1] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Kap. V. Berlin (1955).
- [2] Courant, R. - Methoden der mathematischen Physik, D. Hilbert: Bd. II, Kap. IV. Berlin (1937).
- [3] Feinberg, S.M.: Heterogeneous methods for calculating reactors. Int.Conf.Atom.Energy, P/669. Genf (1955).
- [4] Galanin, A.D.: The thermal coefficient in a heterogeneous reactor. Int.Conf.Atom.Energy, P/666. Genf (1955).
- [5] Galanin, A.D.: Critical size of a heterogeneous reactor with small number of rods. Int.Conf.Atom.Energy, P/663. Genf (1955).
- [6] Hassitt, A.: Methods of calculation for heterogeneous reactors. Progress in Nuclear Energy I, Vol. 2, page 271. London (1958).
- [7] Meetz, K.: Exact treatment of heterogeneous core structures. Int.Conf.Atom.Energy, P/968. Genf (1958).
- [8] Wachspress, E.L.: Iterative methods for solving elliptic-type differential equations with application to two-space-dimension multigroup analysis. KAPL-1333 (1955).

Die numerische Berechnung der Beispiele wurde auf einer Zuse Z22 durchgeführt. Fräulein R. Kuhn und Fräulein Chr. Koppitz danke ich für wertvolle Hilfe bei der Vorbereitung der Rechnungen und beim Zeichnen der Kurven.

Anhang I

Gemittelte Wirkungsquerschnitte und f-Faktoren

Fo: $B_{\text{geo}} = 8,81523 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$

$D_1 = 1,11610 \text{ cm}$,

$D_2 = 0,79807 \text{ cm}$,

$\Sigma_1 = 8,84217 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$,

$\Sigma_2 = 5,22758 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$,

$\bar{\tau} = 126,224 \text{ cm}^2$,

$L^2 = 152,665 \text{ cm}^2$,

$\eta = 4,39718$,

$f = 0,98492$.

F5: $B_{\text{geo}} = 2,03428 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$,

$D_1 = 1,11635 \text{ cm}$,

$D_2 = 0,79800 \text{ cm}$,

$\Sigma_1 = 8,95203 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$,

$\Sigma_2 = 5,15691 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$,

$\bar{\tau} = 124,703 \text{ cm}^2$,

$L^2 = 154,744 \text{ cm}^2$,

$\eta = 1,13632$,

$f = 0,98471$.

FRo/1: $B_{\text{geo}} = 3,43301 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$,

$D_1 = 1,11652 \text{ cm}$,

$D_2 = 0,82738 \text{ cm}$,

$\Sigma_1 = 9,74836 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$,

$\Sigma_2 = 4,74286 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$,

$\bar{\tau} = 114,534 \text{ cm}^2$,

$L^2 = 174,446 \text{ cm}^2$,

$\eta = 1,38775$,

$f = 0,98601$.

FRo/2: $B_{\text{geo}} = 3,42978 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$,
 $D_1 = 1,11655 \text{ cm}$, $D_2 = 0,82734 \text{ cm}$,
 $\Sigma_1 = 9,75454 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, $\Sigma_2 = 4,84317 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$,
 $\hat{\Gamma} = 114,465 \text{ cm}^2$, $L^2 = 170,827 \text{ cm}^2$,
 $\eta = 1,38158$, $f = 0,98630$.

FRo/6: $B_{\text{geo}} = 3,41789 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$,
 $D_1 = 1,11700 \text{ cm}$, $D_2 = 0,82785 \text{ cm}$,
 $\Sigma_1 = 9,77387 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, $\Sigma_2 = 4,05912 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$,
 $\tilde{\Gamma} = 114,284 \text{ cm}^2$, $L^2 = 203,948 \text{ cm}^2$,
 $\eta = 1,42694$, $f = 0,98362$.

FRo/7: $B_{\text{geo}} = 3,43989 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$,
 $D_1 = 1,11699 \text{ cm}$, $D_2 = 0,82780 \text{ cm}$,
 $\Sigma_1 = 9,77970 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, $\Sigma_2 = 4,15008 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$,
 $\hat{\Gamma} = 114,215 \text{ cm}^2$, $L^2 = 199,465 \text{ cm}^2$,
 $\eta = 1,42591$, $f = 0,98398$.

FRo/8:

$$B_{\text{geo}} = 3,44976 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1},$$

$$D_1 = 1,11759 \text{ cm},$$

$$D_2 = 0,82837 \text{ cm},$$

$$\Sigma_1 = 9,82655 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1},$$

$$\Sigma_2 = 2,80611 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1},$$

$$\tilde{\nu} = 113,732 \text{ cm}^2,$$

$$L^2 = 295,202 \text{ cm}^2,$$

$$\eta = 1,57161,$$

$$f = 0,97620.$$

FRo/9:

$$B_{\text{geo}} = 3,45025 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1},$$

$$D_1 = 1,11803 \text{ cm},$$

$$D_2 = 0,82882 \text{ cm},$$

$$\Sigma_1 = 9,84485 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1},$$

$$\Sigma_2 = 2,22880 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1},$$

$$\tilde{\nu} = 113,565 \text{ cm}^2,$$

$$L^2 = 371,865 \text{ cm}^2,$$

$$\eta = 1,68839,$$

$$f = 0,96998.$$

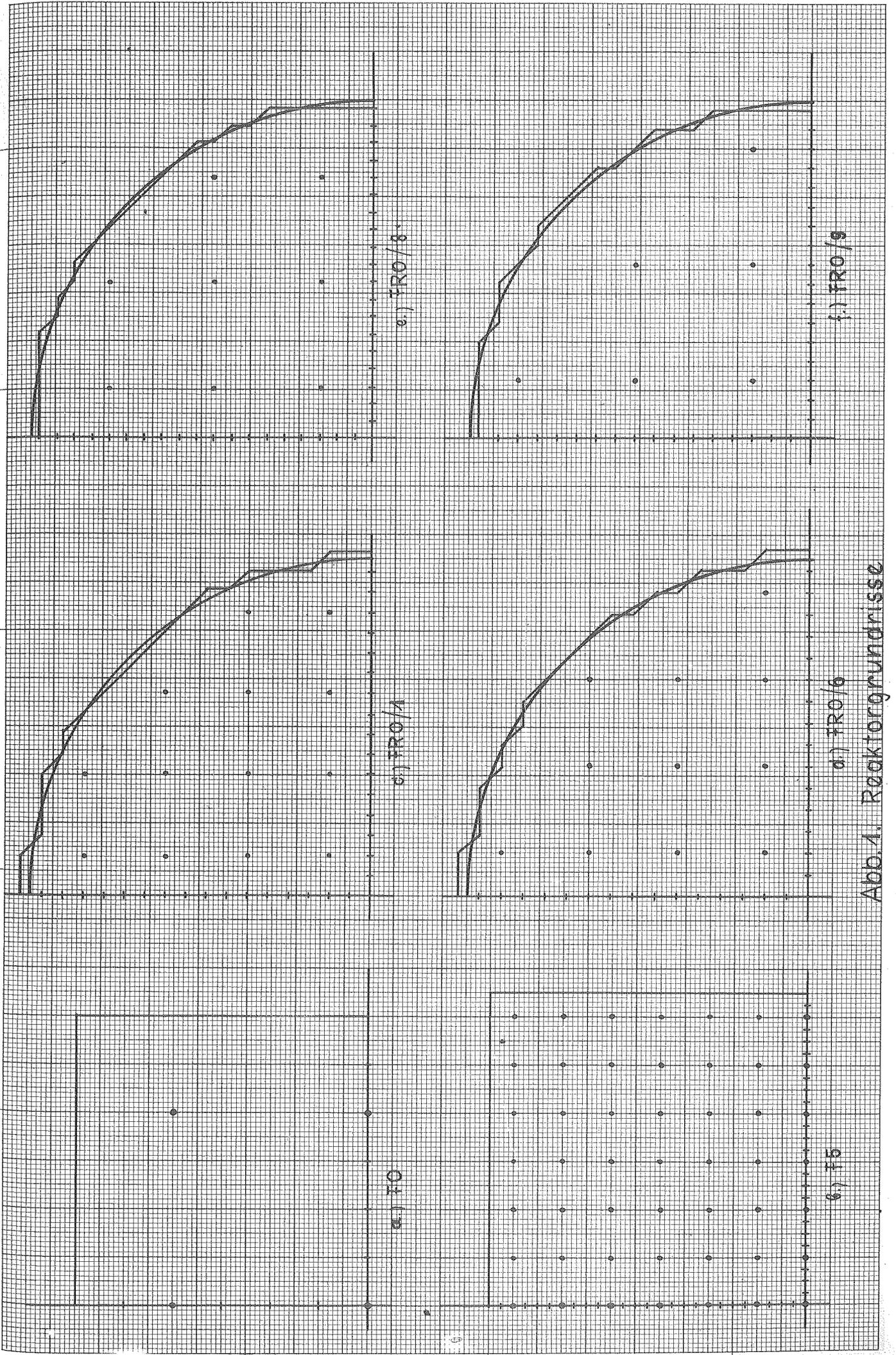


Abb. 4. Reaktorgrundrisse

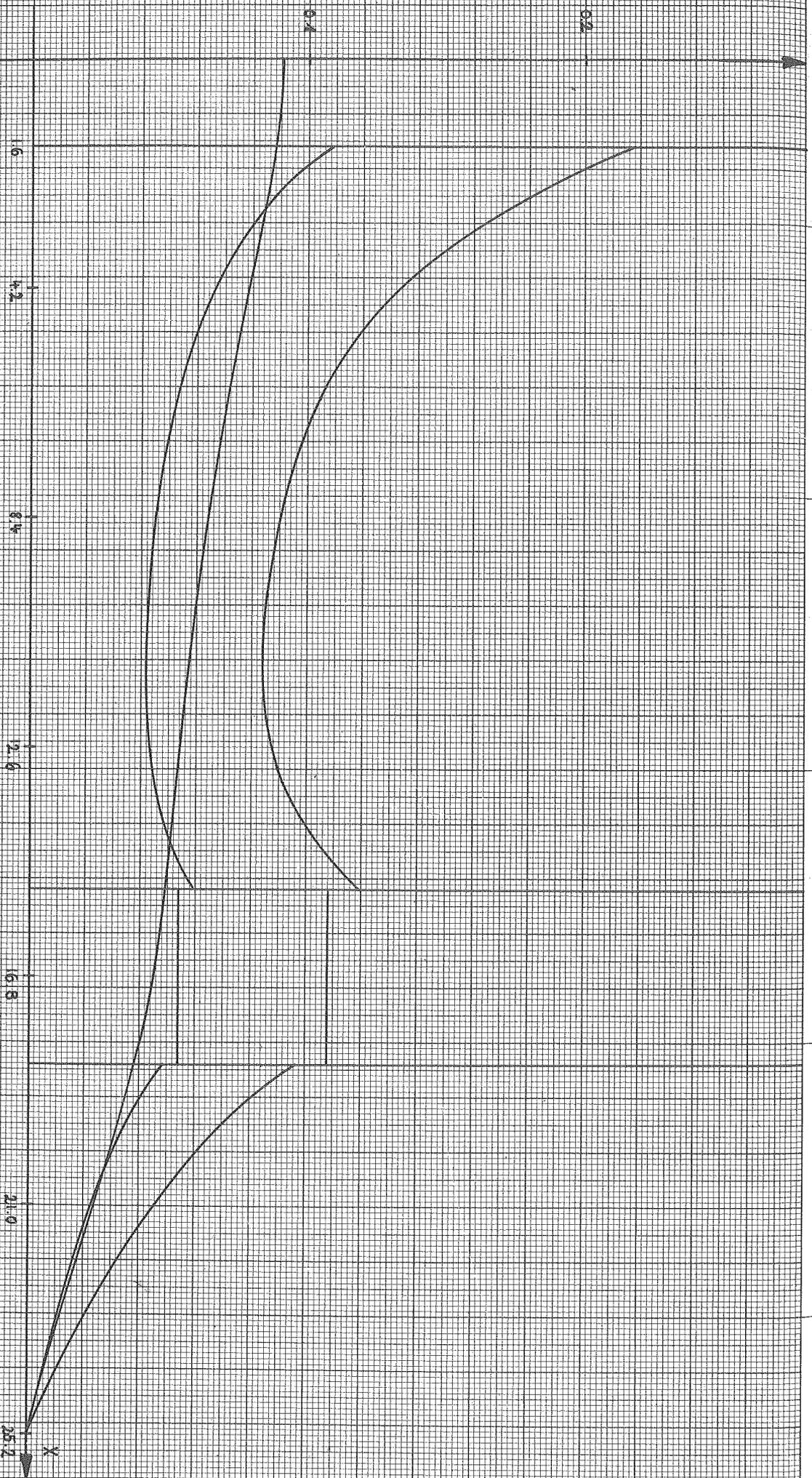


Abb. 2. F_0 , Schneller Fluss $\phi(x, y)$ $y = 0, d/2, d$.

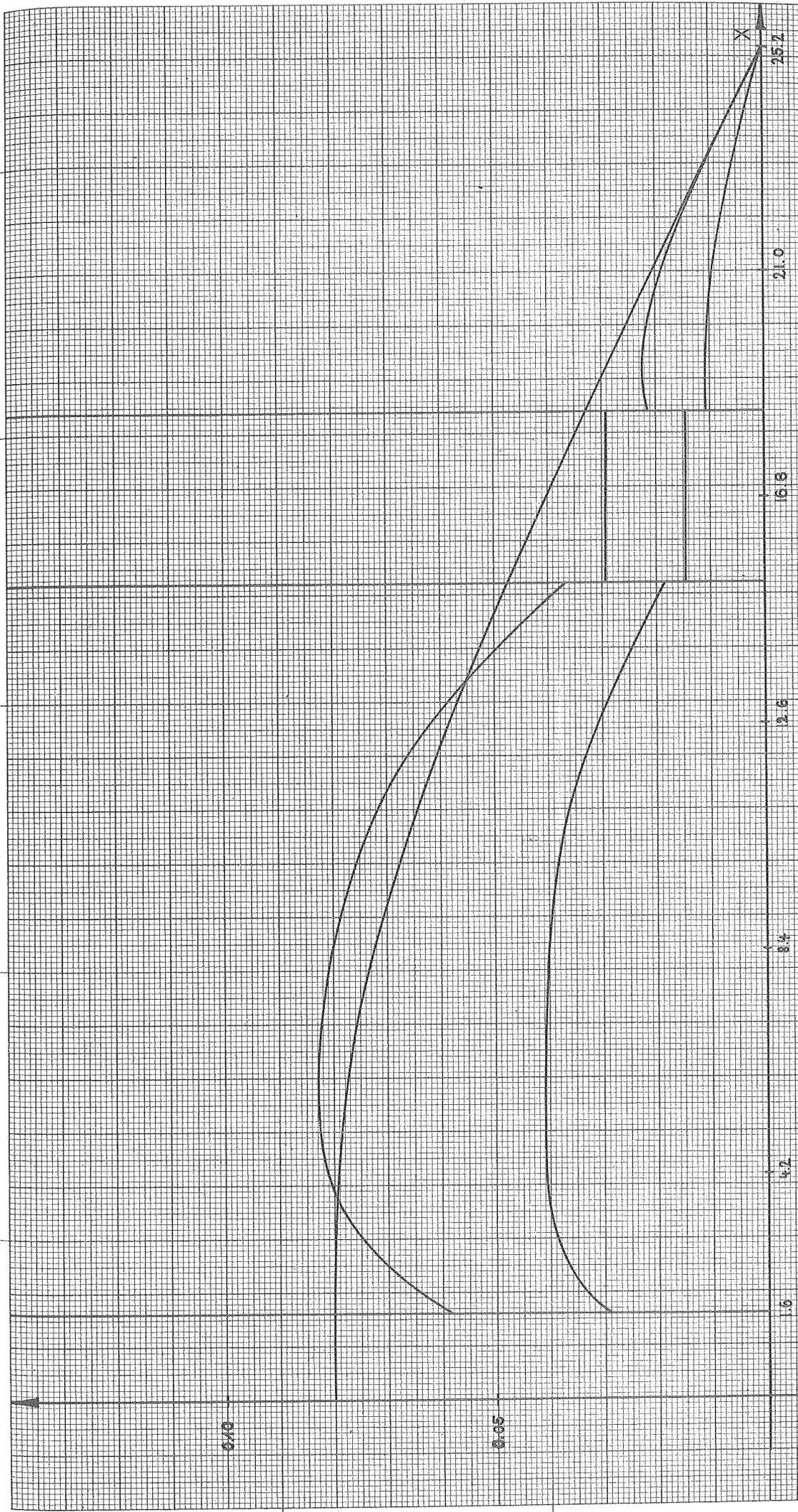


Abb. 3. Φ_0 , Thermischer Fluss, $\Phi^{\text{th}}(x,y)$ für $y=0, \frac{1}{2}, d$.

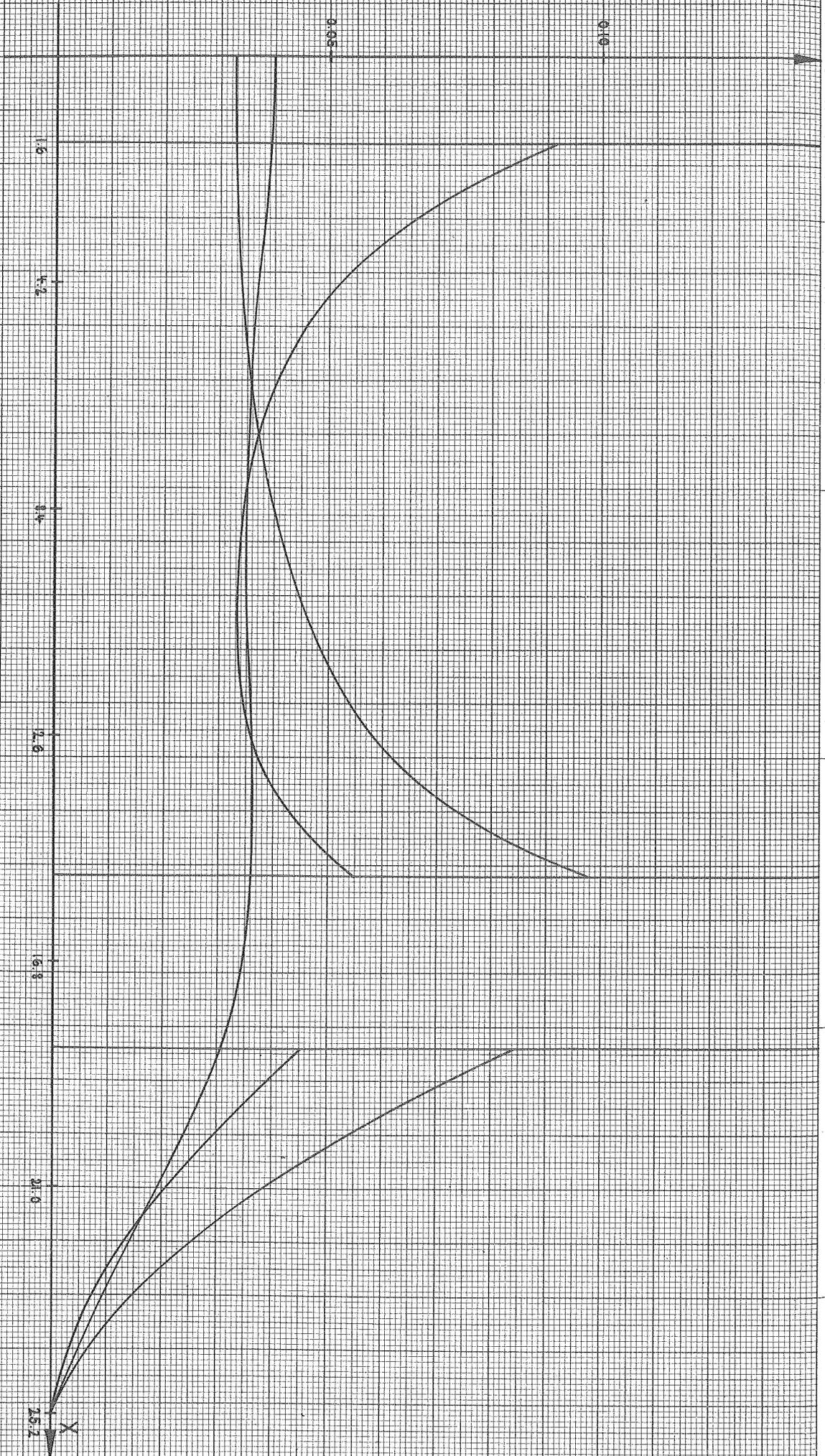


Abb. 4. T1, Schneller Fluss $q(x, y)$ für $y = 0, 1/2, d$.

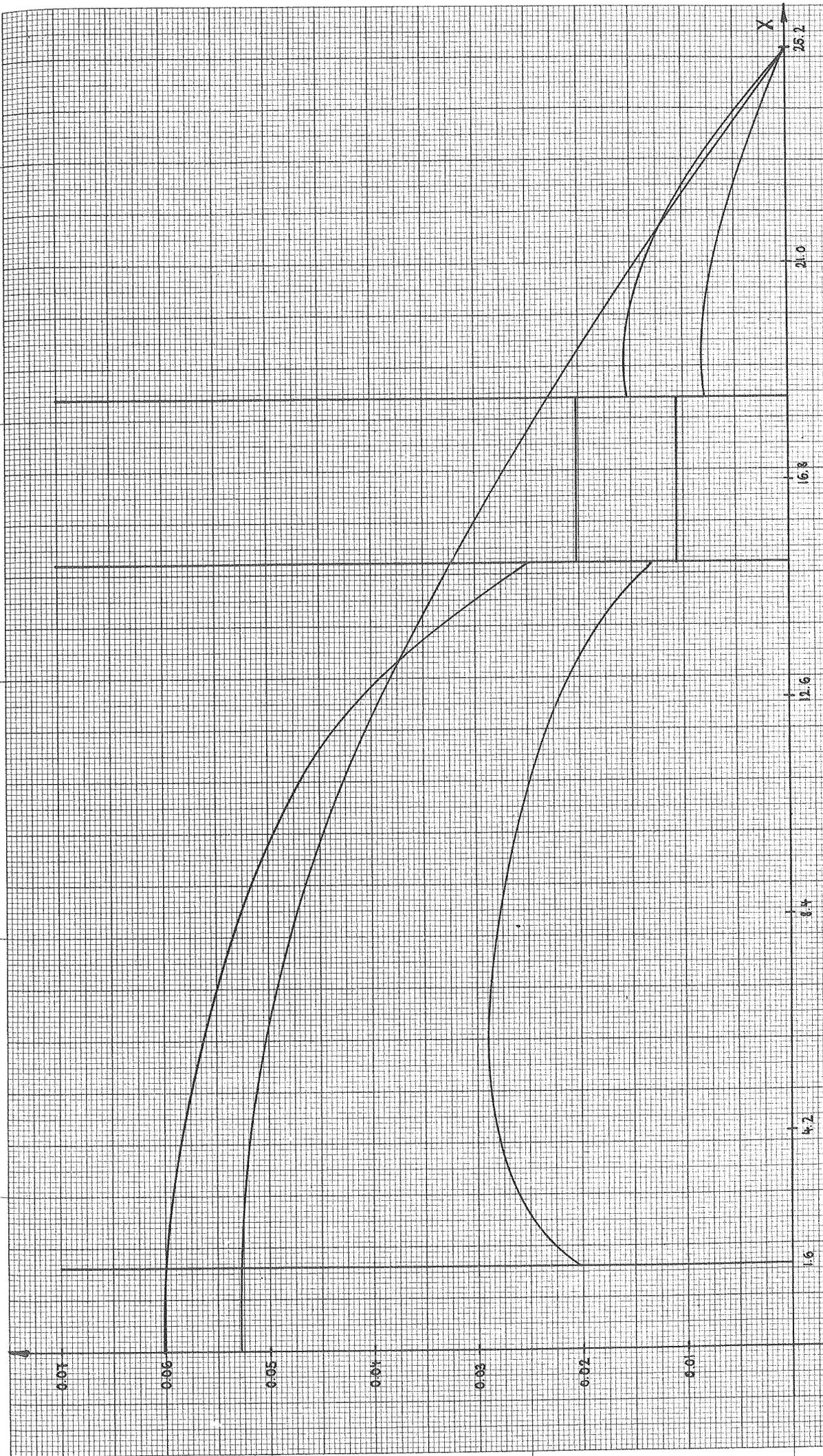
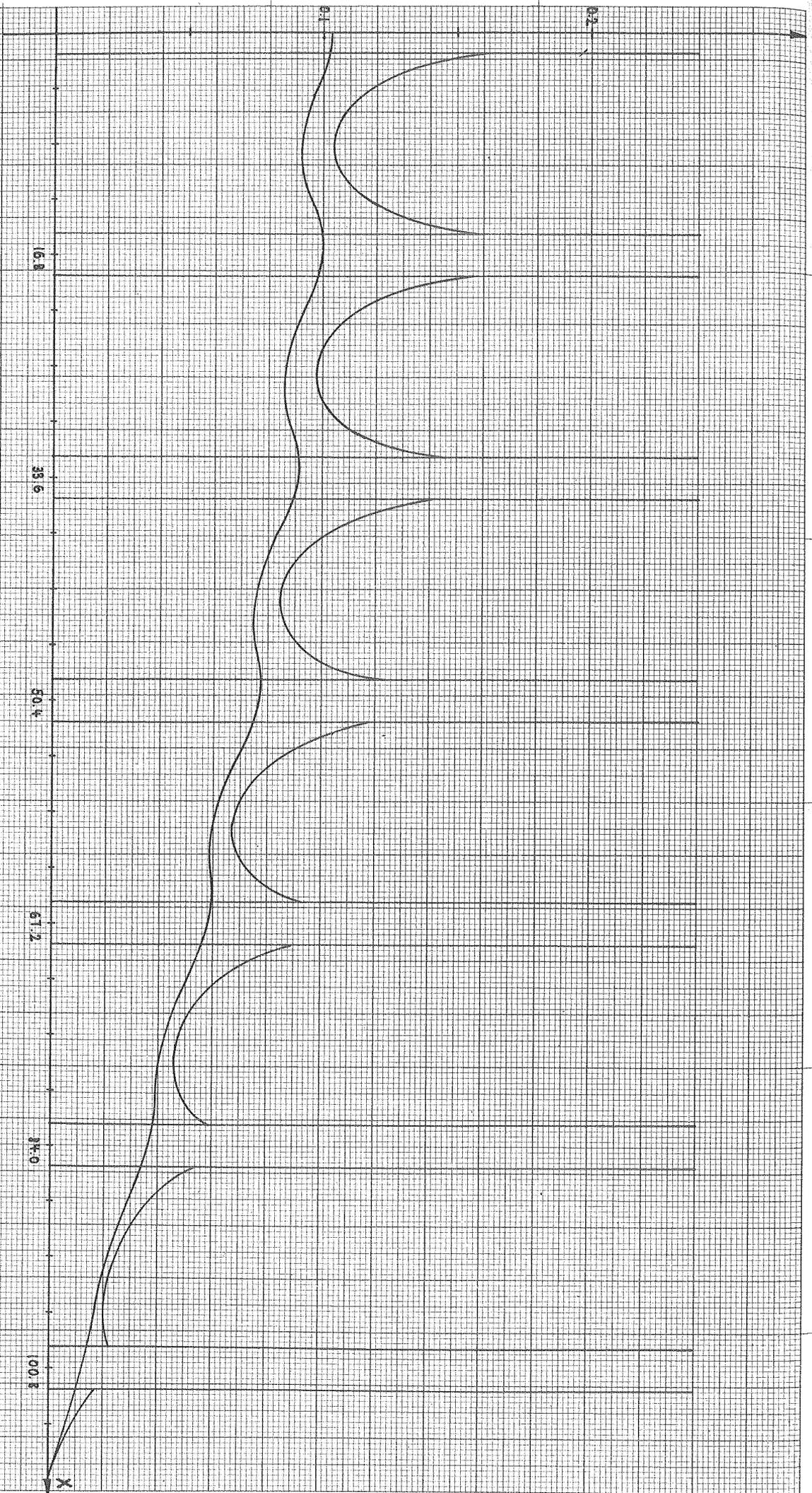


Abb. 5. F1 Thermischer Fluss $\phi(x, y)$ für $y = 0, d/2, d$

Abb. 6. 15, Schneller Fluss $\phi^{(1)}(x, y)$ für $y=0, \frac{d}{2}$.



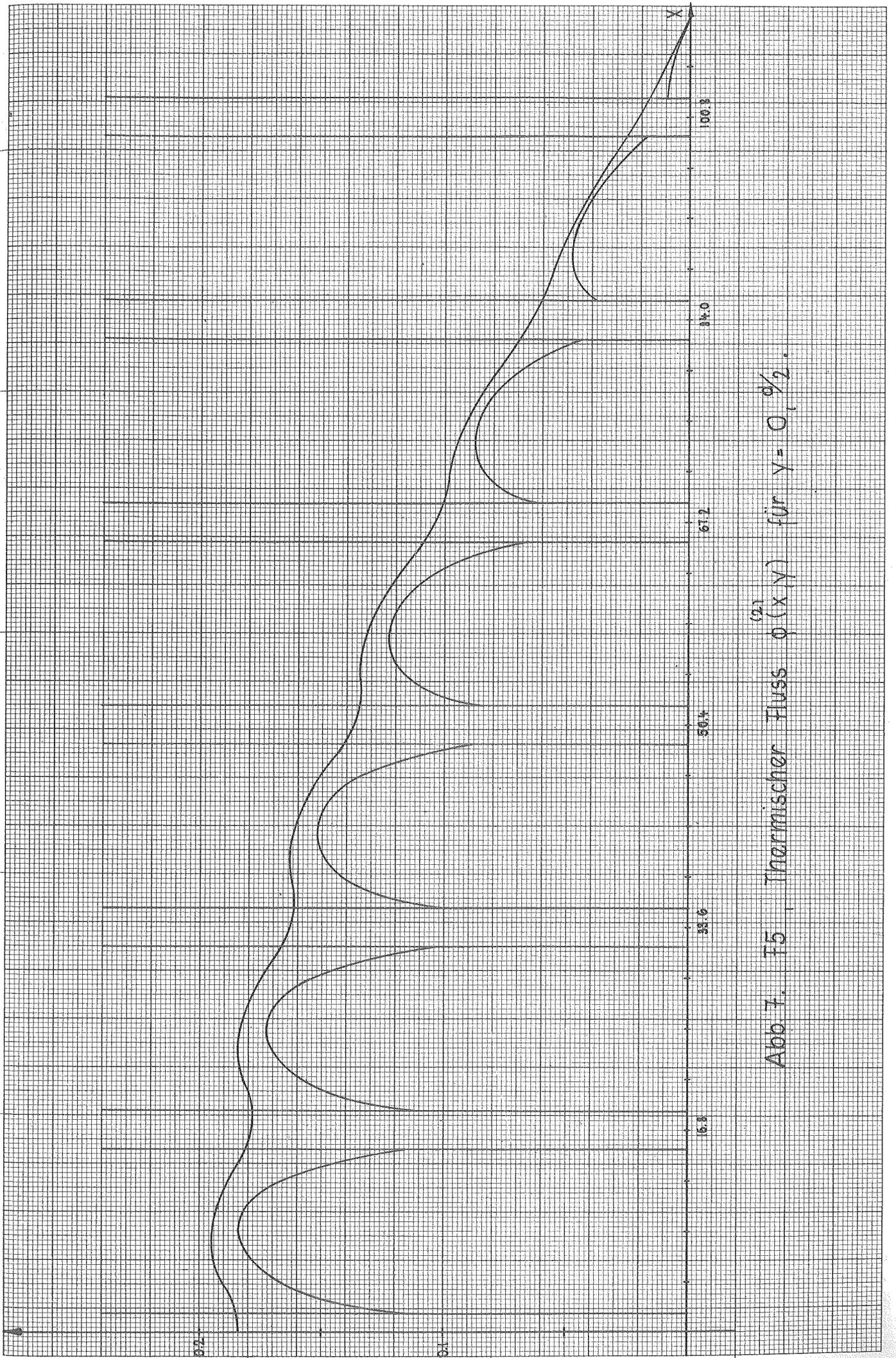


Abb. 7. F5, Thermischer Fluss $\phi^{(2)}$ für $y = 0, \frac{1}{2}$.

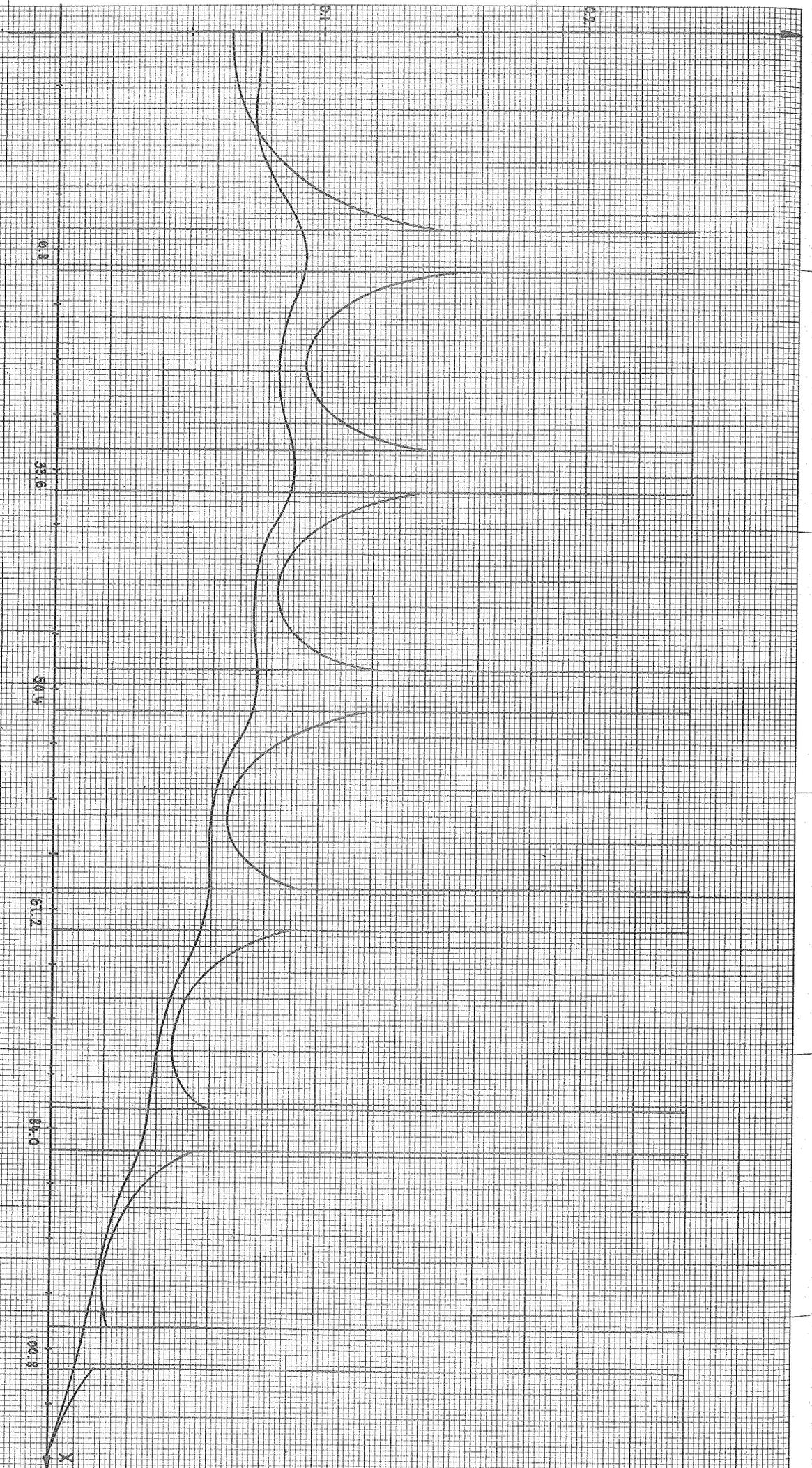


Abb. 8. ϕ_0 , Schneller Fluss $\phi(x, y)$ für $y = 0.9/2$

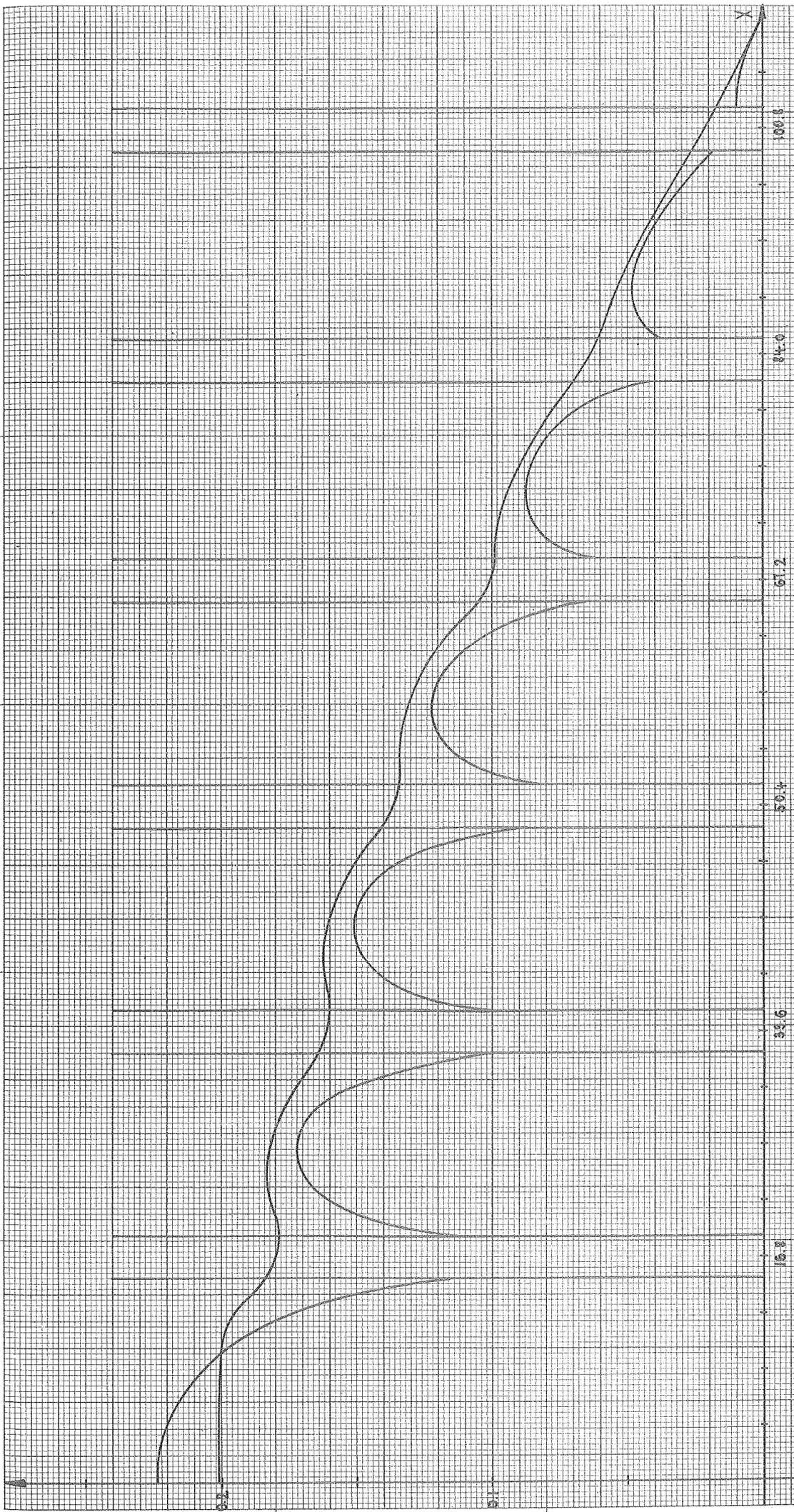
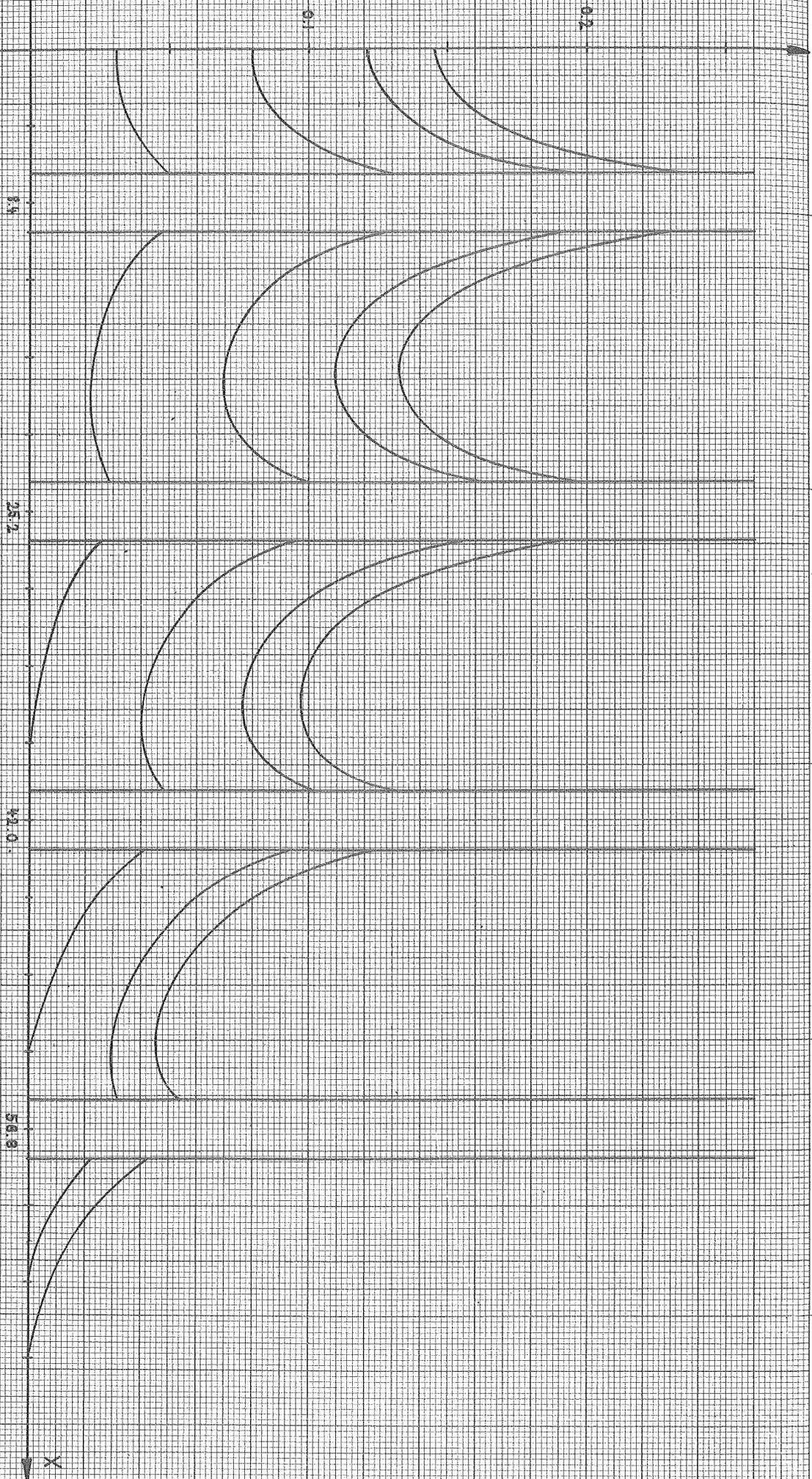


Abb. 9. Fö, Thermischer Fuss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $y = 0, \frac{1}{2}$.

Abb. 10. FRO/1. Schneller Fluss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $y = 0/2, 30/2, 50/2, 70/2$.



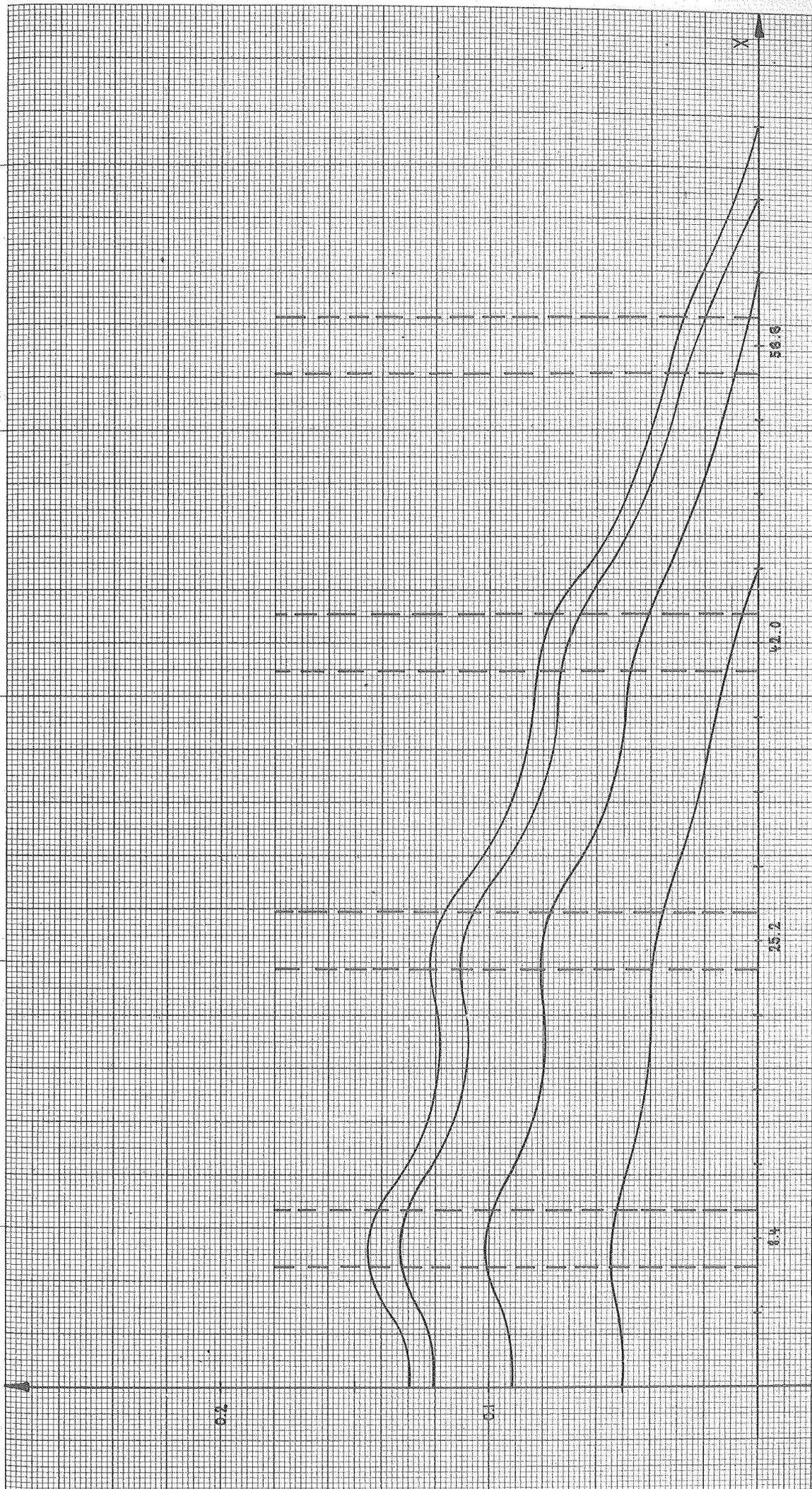
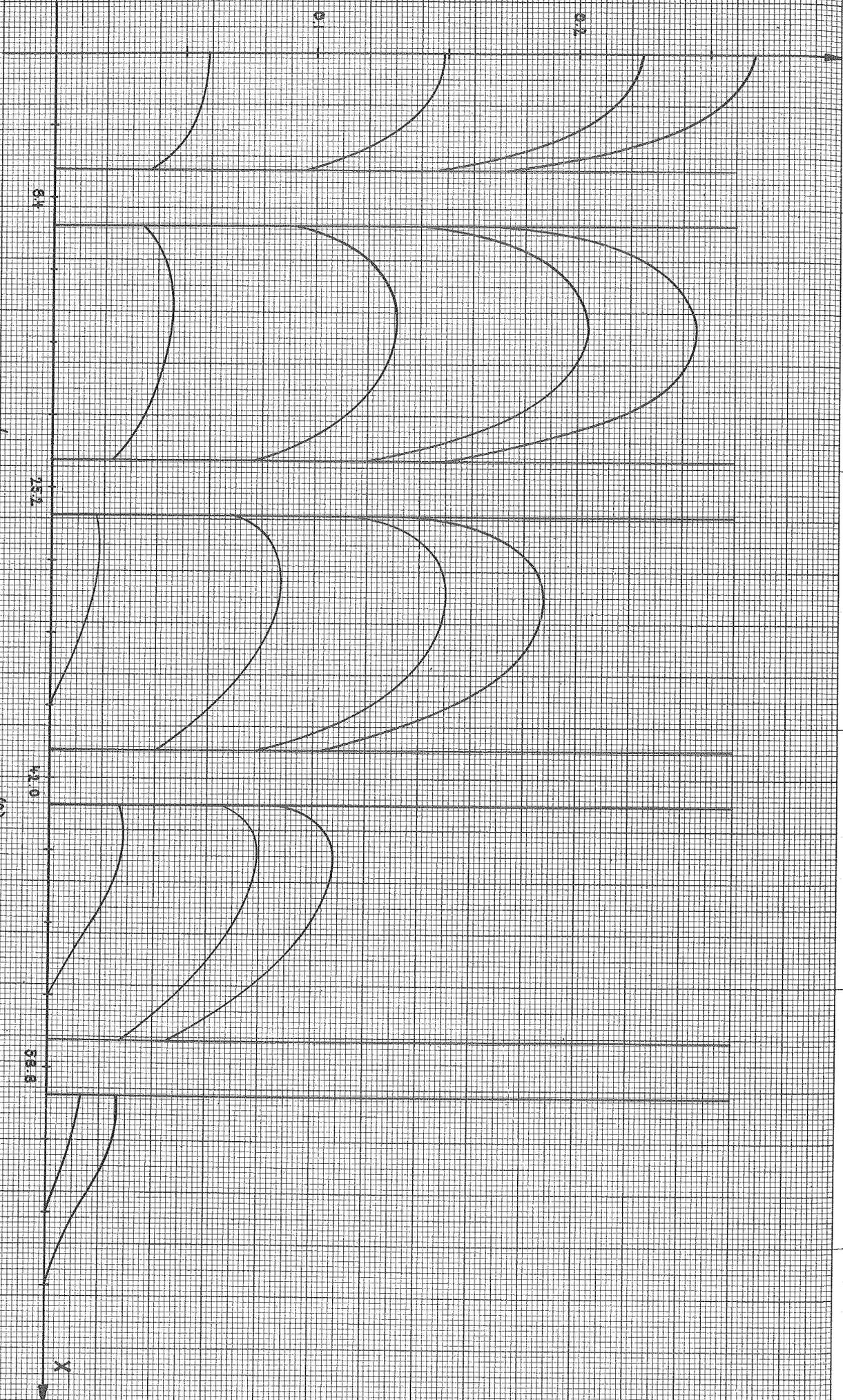


Abb. 11. FR0/1. Schneller Fluss $\phi^{(n)}(x, y)$ für $y = 0, d, 2d, 3d$.

Abb. 12. FRO/1. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $y = 0/2, 30/2, 50/2, 70/2$.



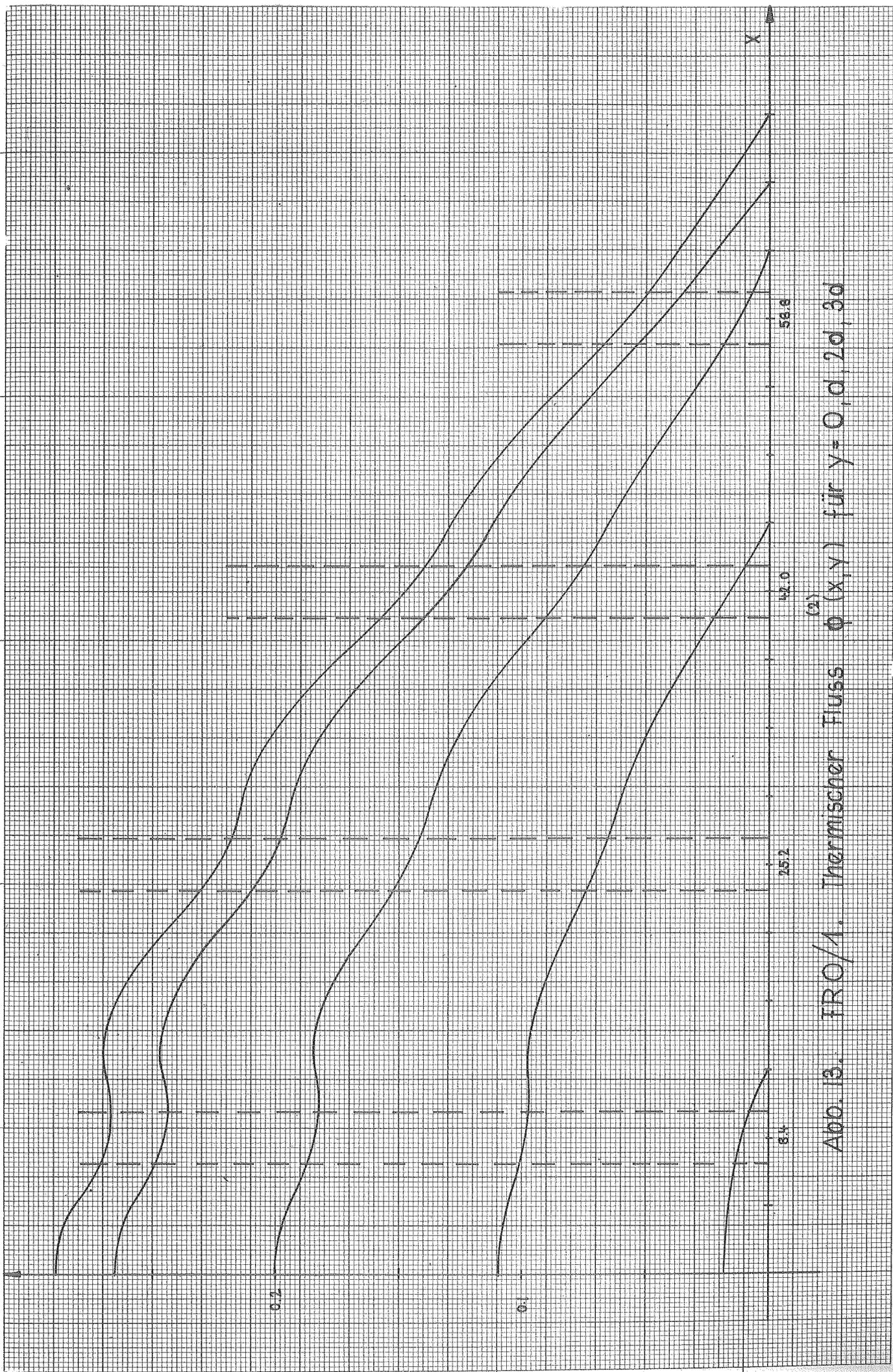
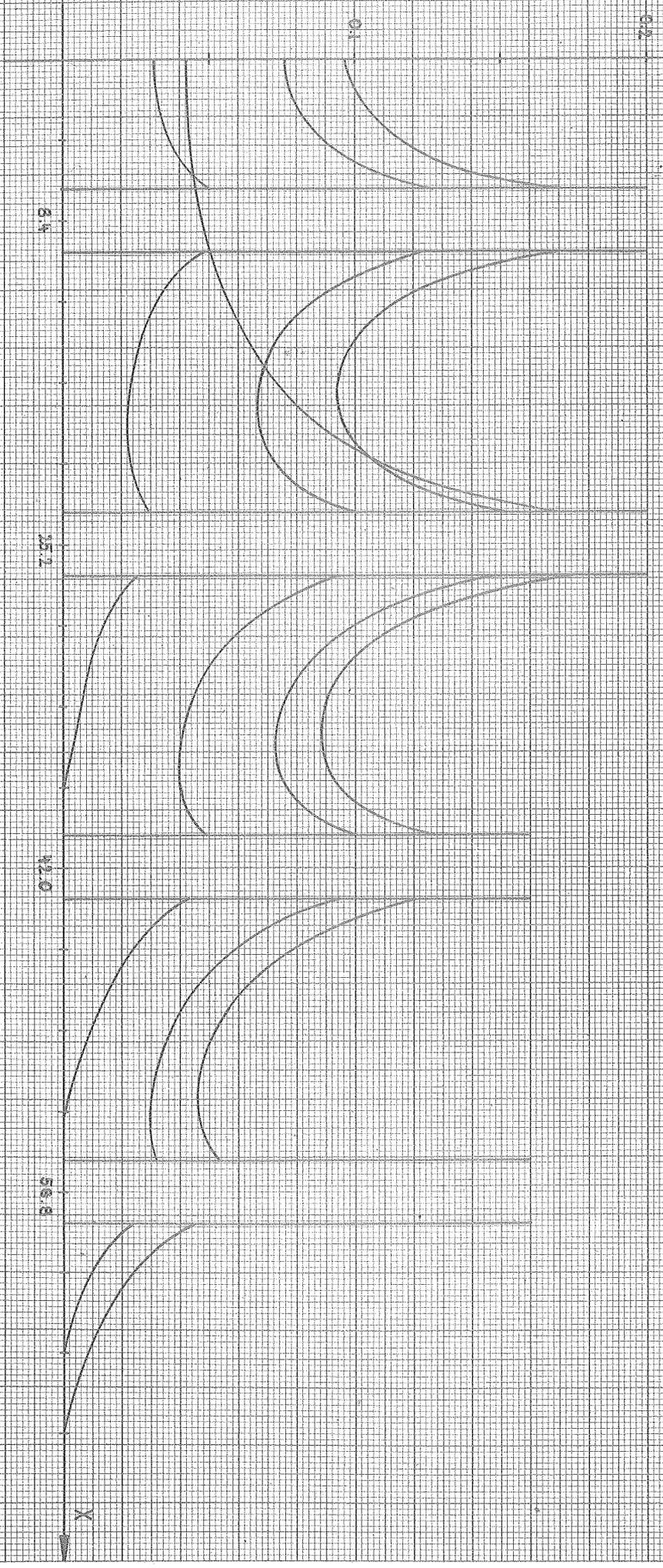


Abb. 13. FRO/1. Thermischer Fluss $\phi(x, \gamma)$ für $\gamma = 0, d, 2d, 3d$

Abb. 14. FRO/3, Schneller Fluss $\phi^{(n)}(x, y)$ für $y = 0/2, 30/2, 50/2, 70/2$.



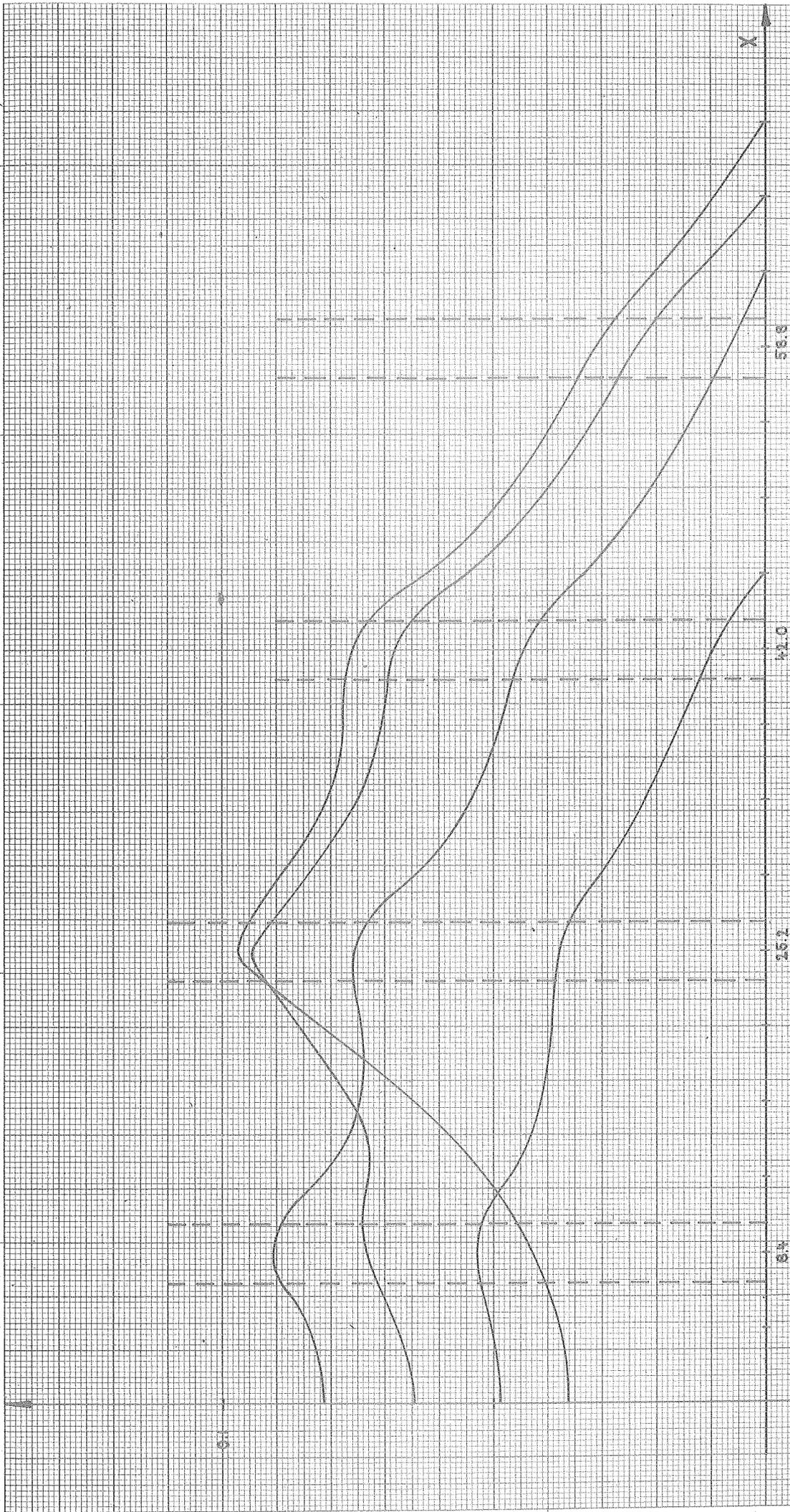
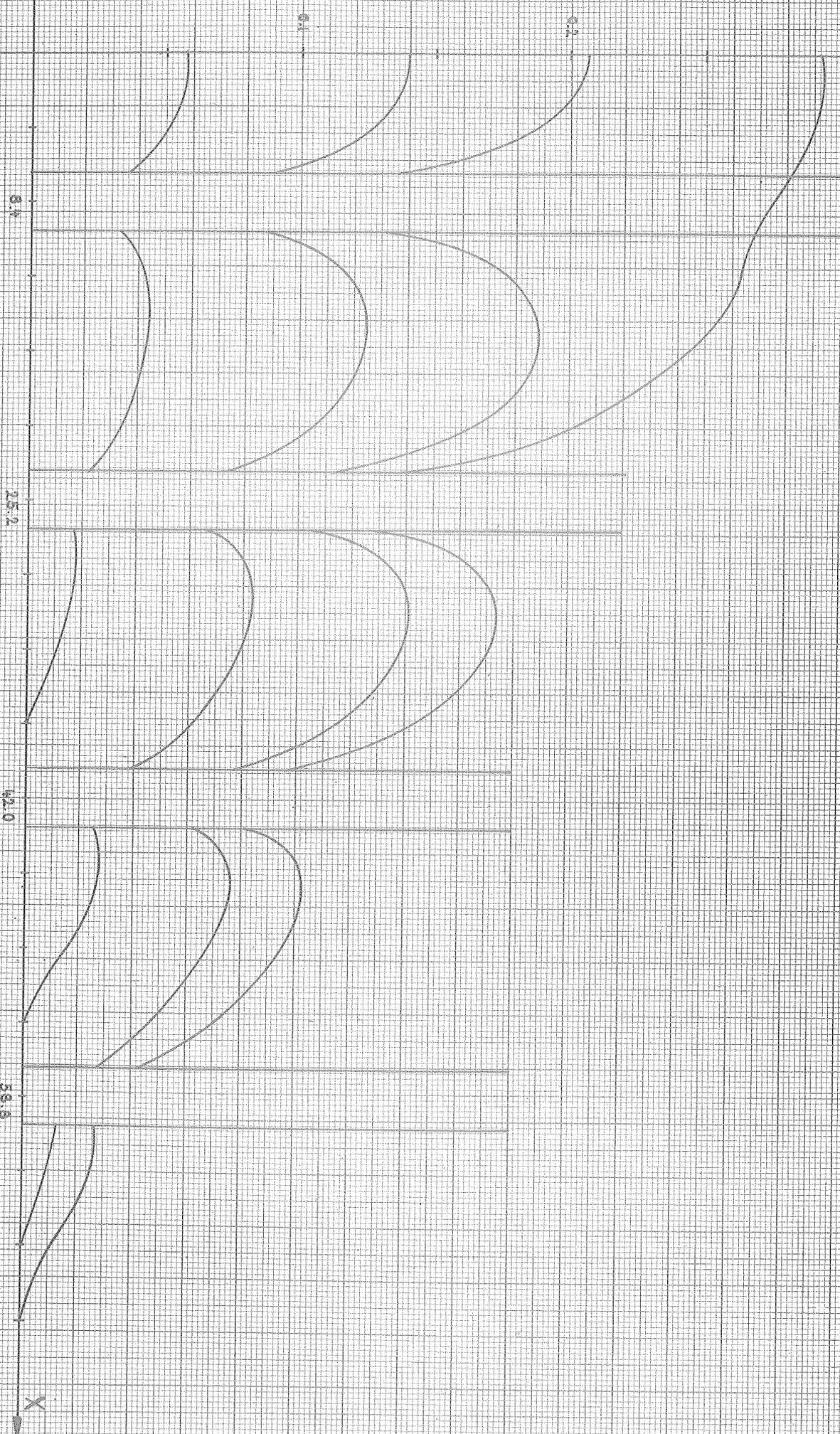


Abb. 15. FRO/3. Schneller Fluss $\phi(x, y)$ für $y=0, 20, 30$.

Abb. 16. IRO/3. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}$ (x, y) für $y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$.



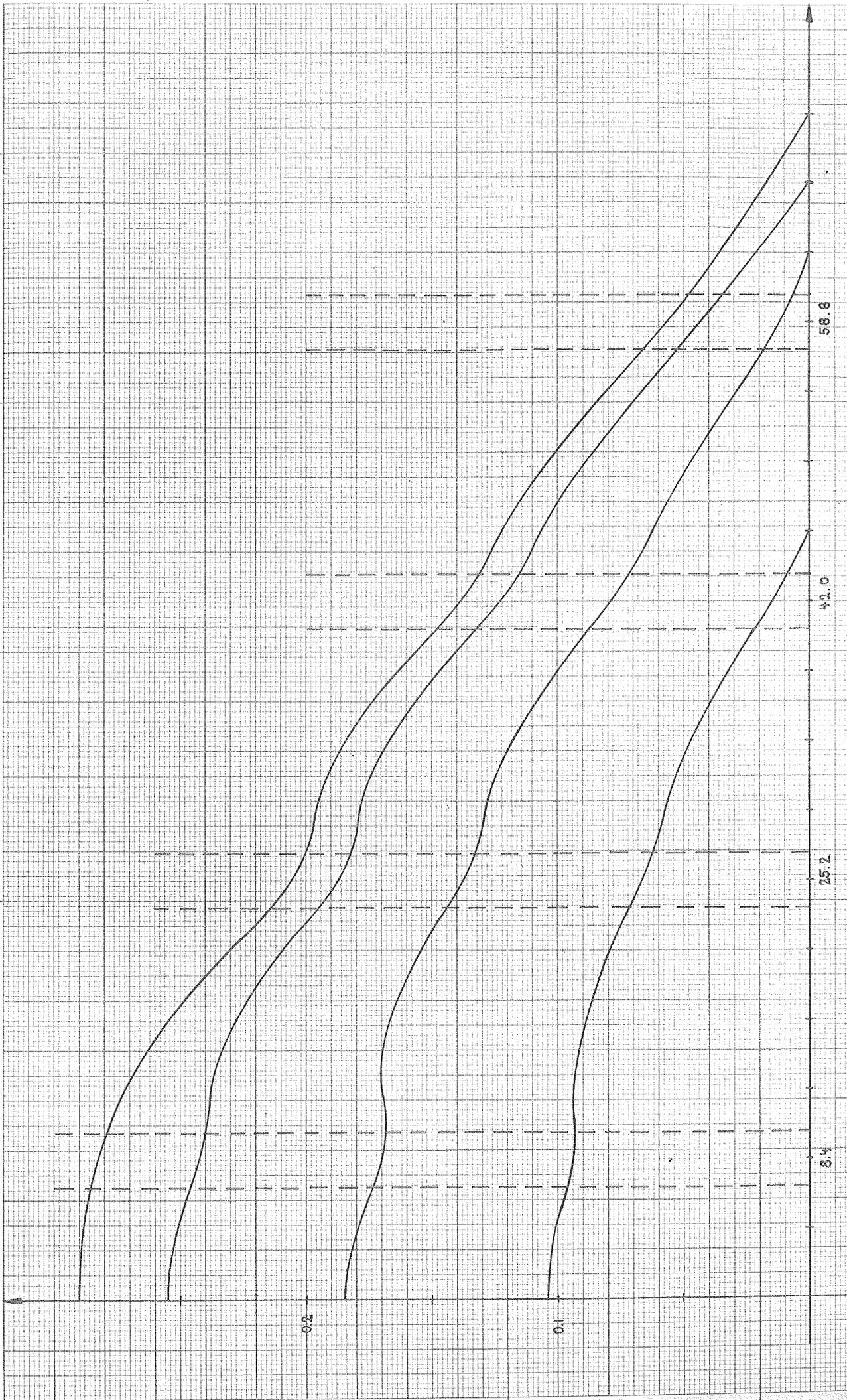
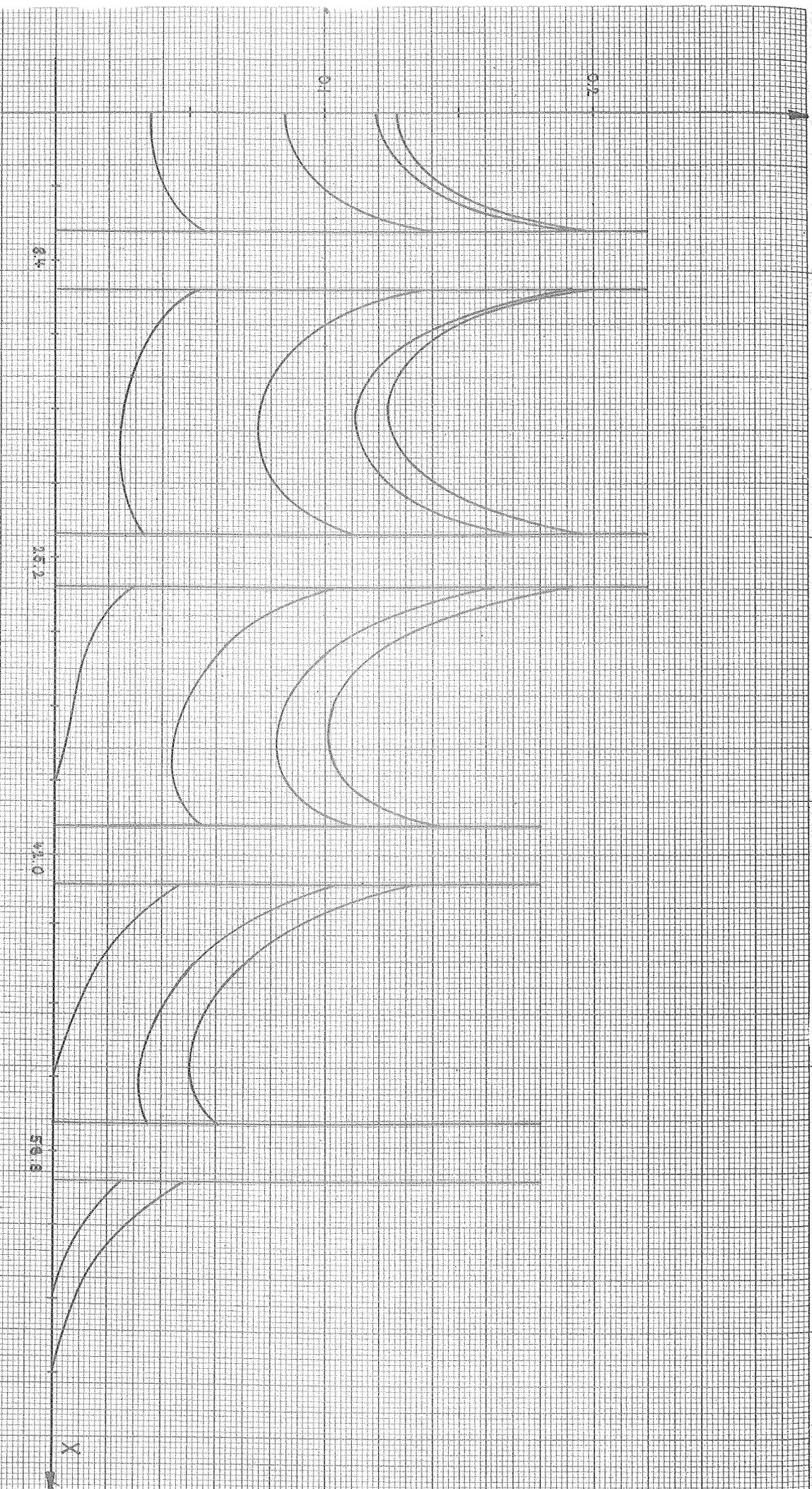


Abb. 17. FRO/3. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $y = 0, d, 2d, 3d$.

Abb. 18. IRO/5. Schneller Fluss $\phi(x, y)$ für $y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$.



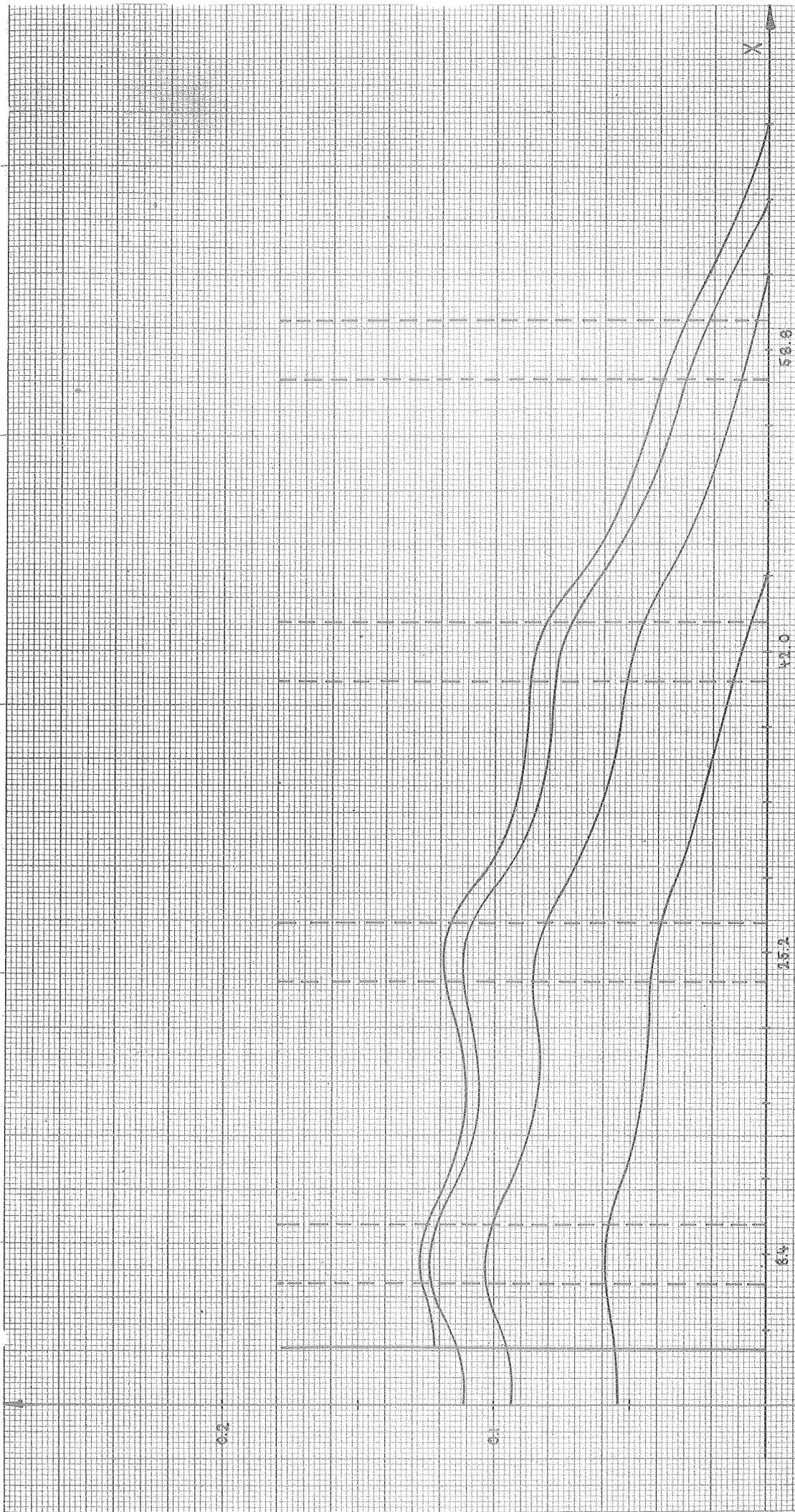
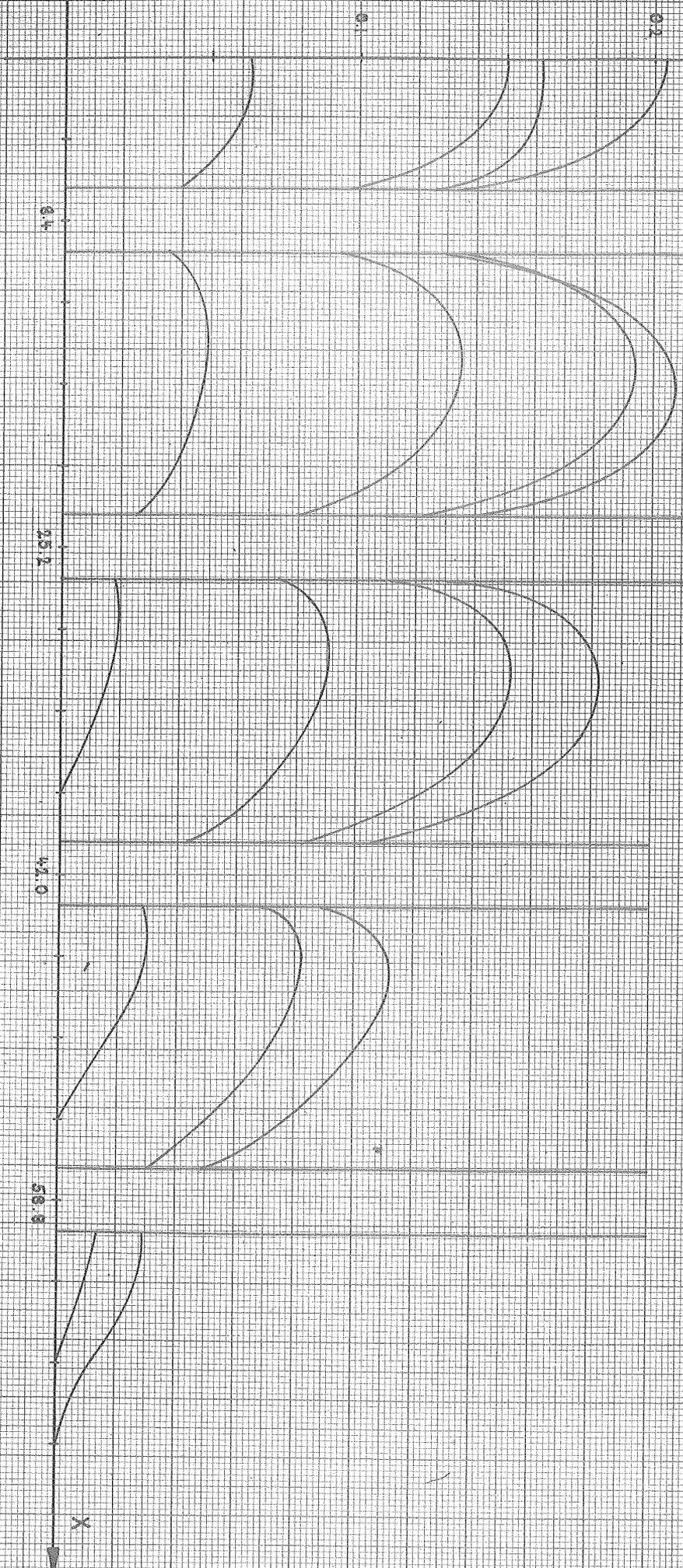


Abb. 19. FRO/5. Schneller Fluss $\phi(x, y)$ für $y = 0, d, 2d, 3d$.

Abb. 20. PRO/5. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}$ für $y = \frac{0}{2}, \frac{30}{2}, \frac{50}{2}, \frac{70}{2}$.



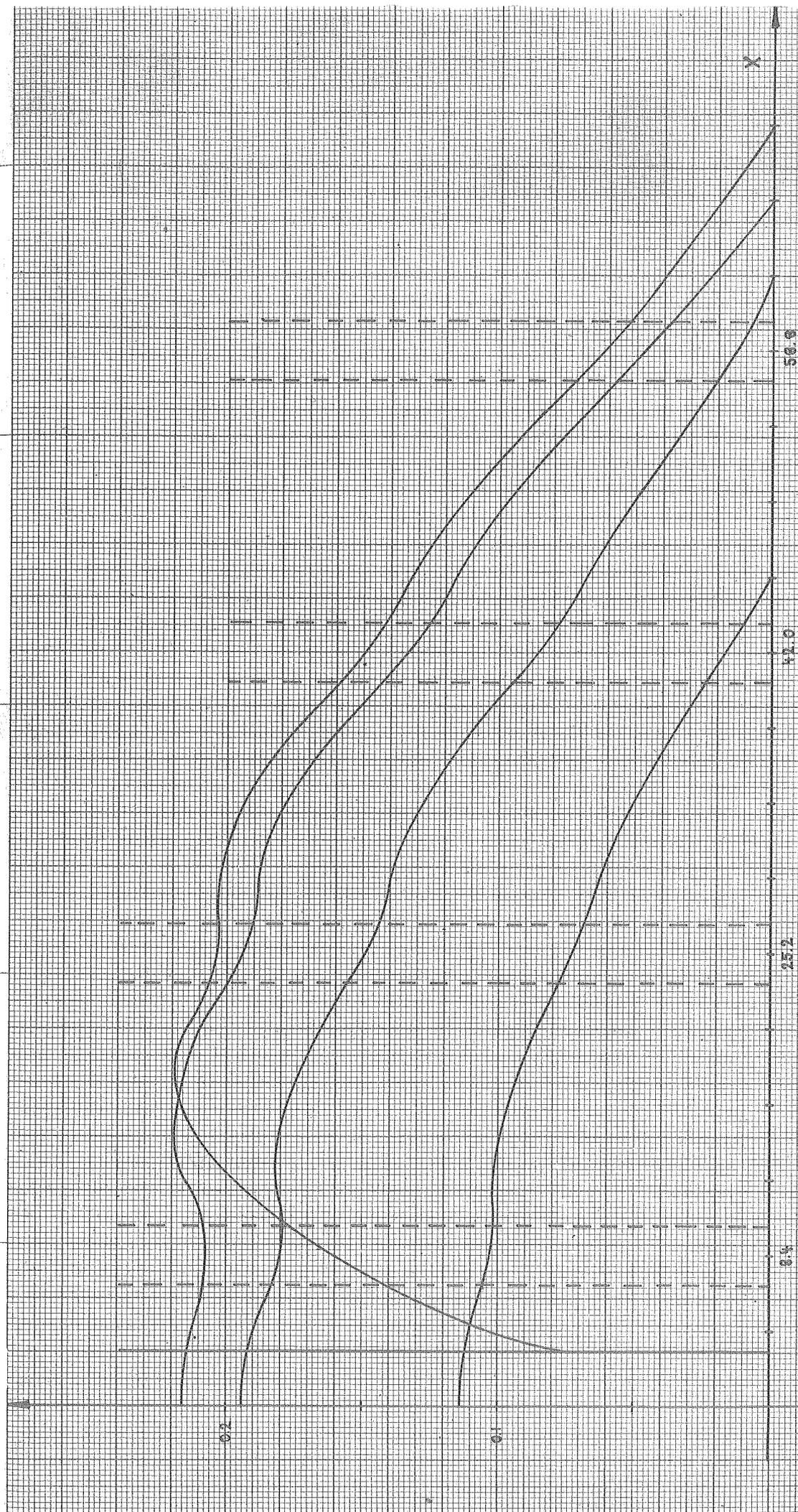
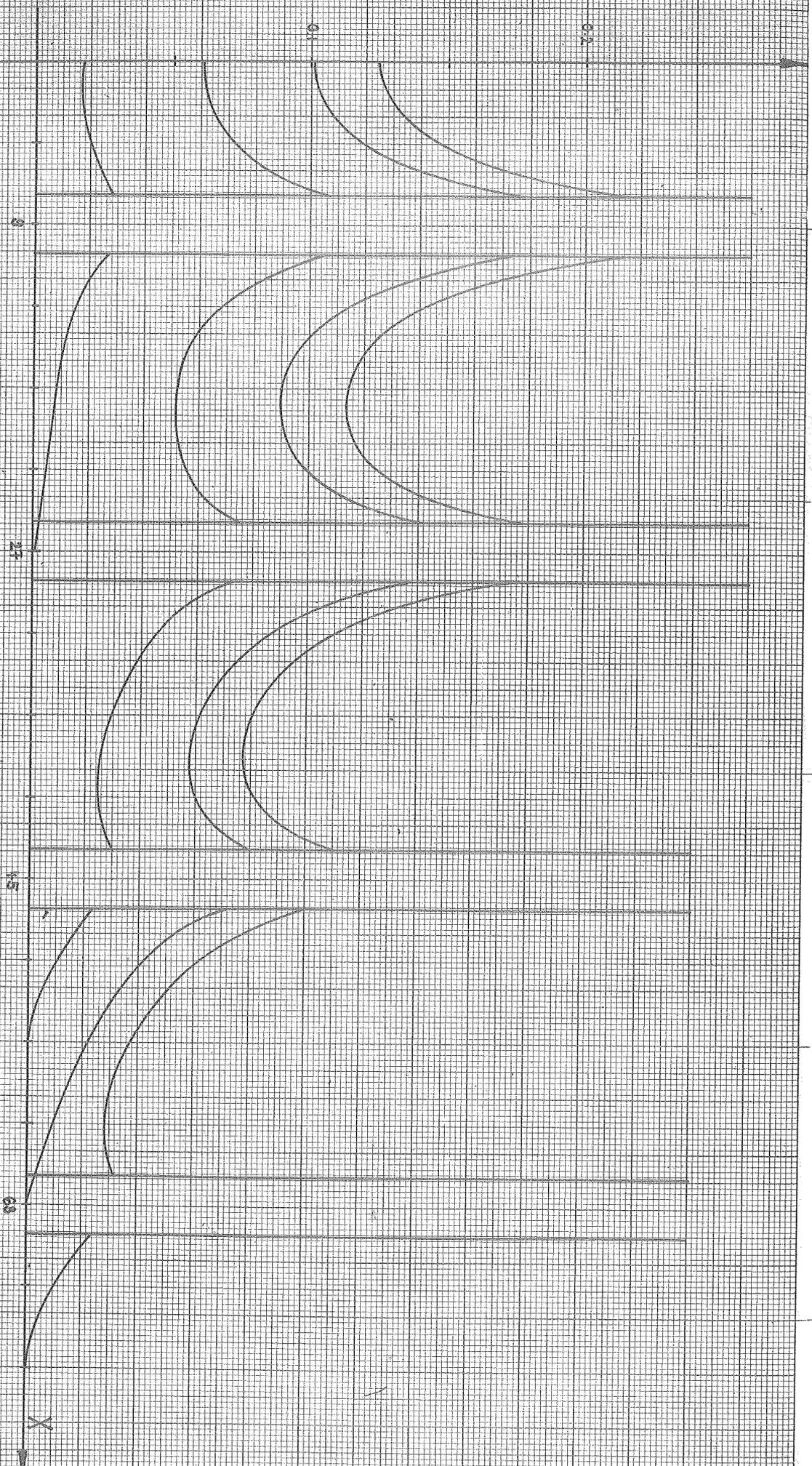


Abb. 21. FRO/5. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $y = 0, d, 2d, 3d$.

Abb. 22. IR 0/6. Schneller Fluss $\phi^{(1)}(x, y)$ für $y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$.



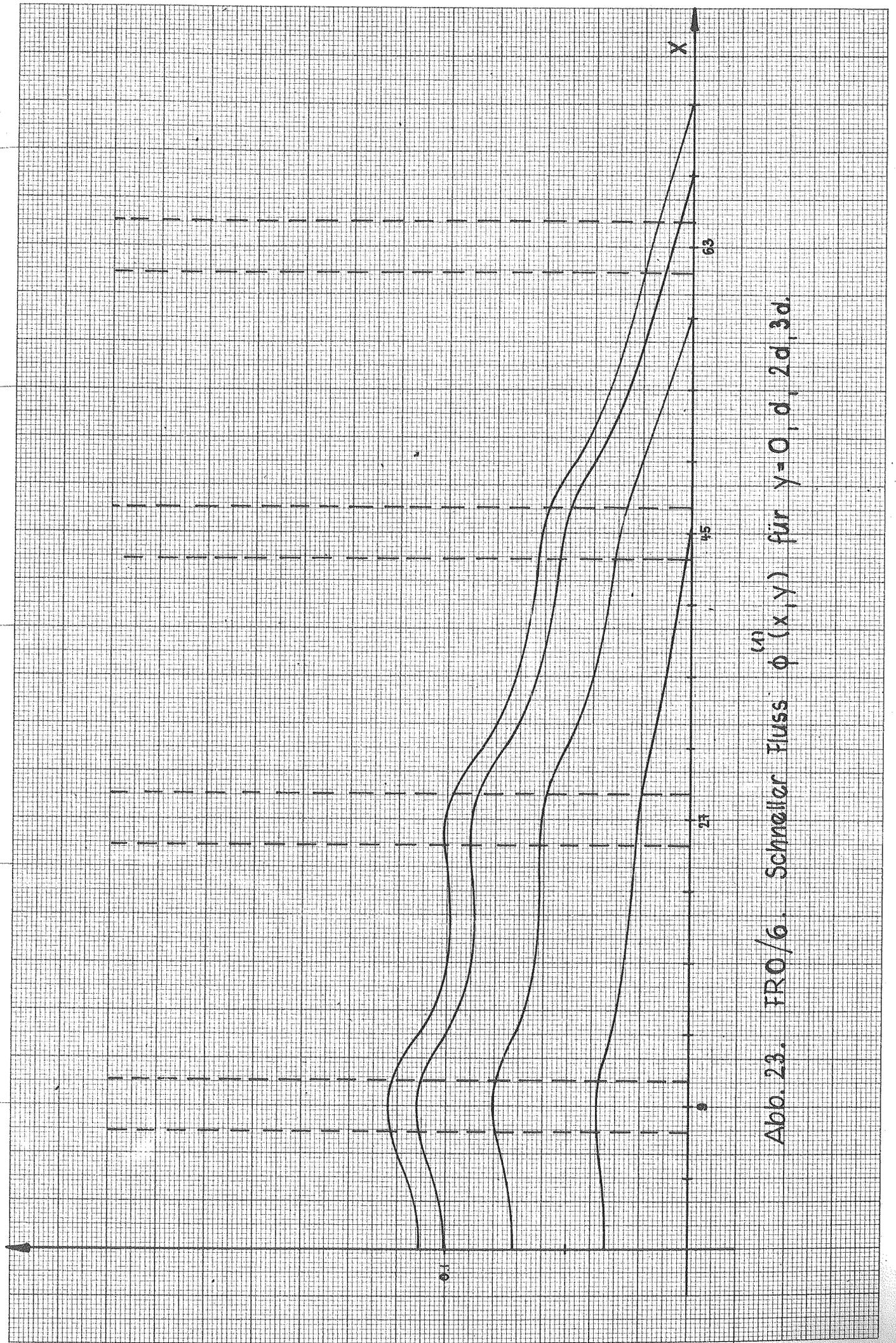


Abb. 23. FRO/6. Schneller Fluss $\phi^{(1)}(x, y)$ für $y=0, d, 2d, 3d$.

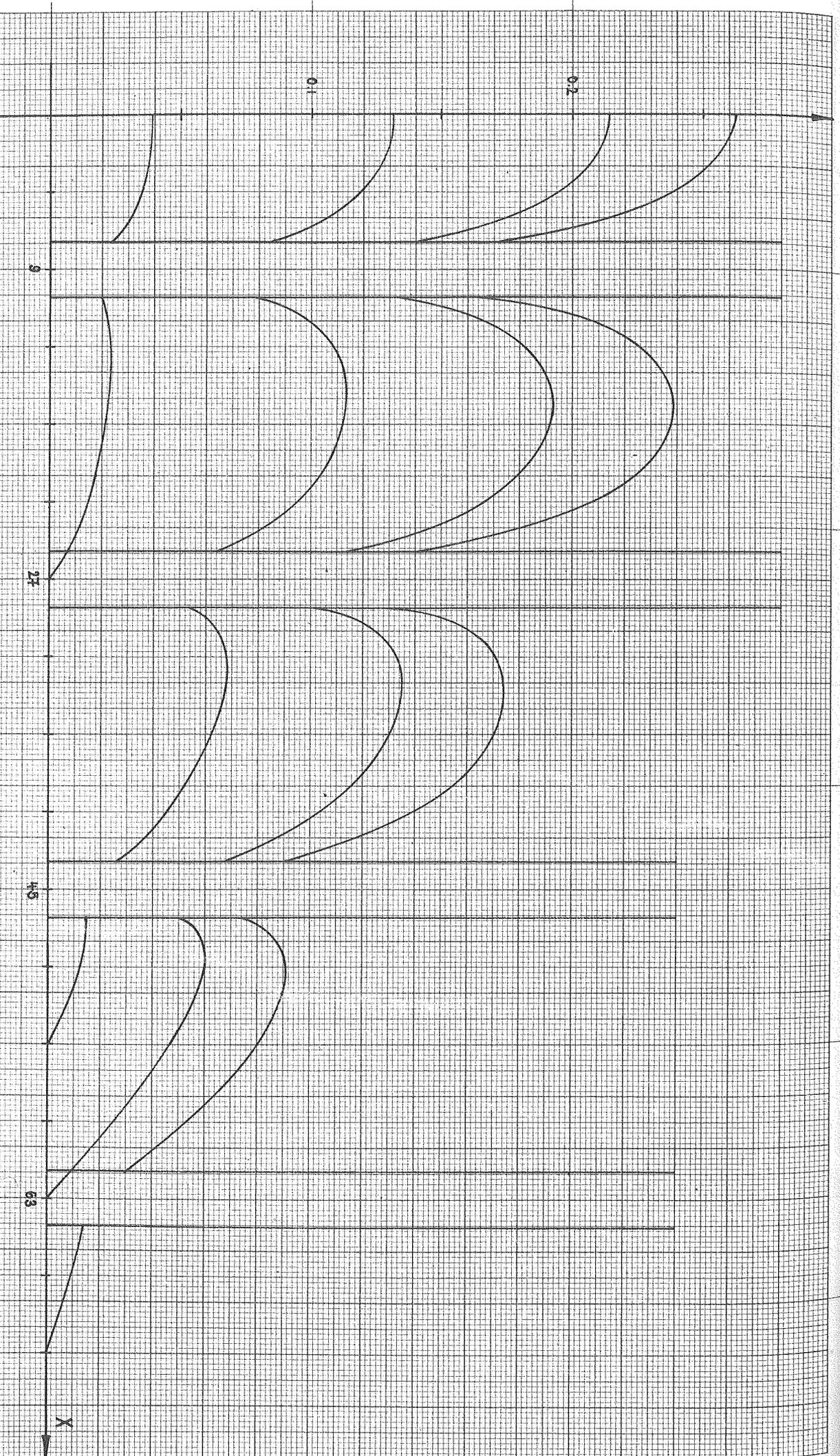


Abb. 24. FRO/G. Thermischer Fluss $\phi(x, y)$ für $y = 0/2, 30/2, 50/2, 70/2$.

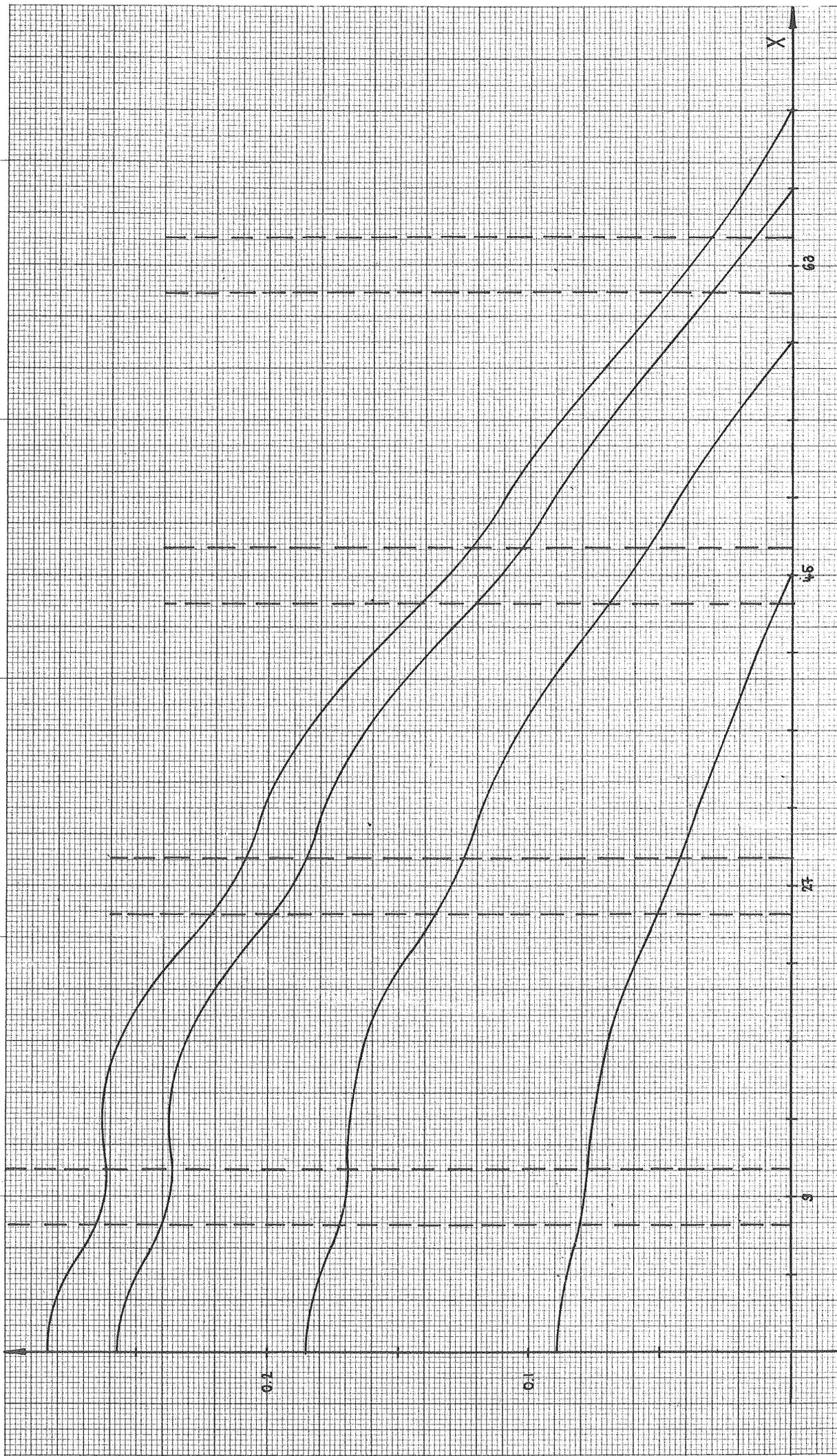
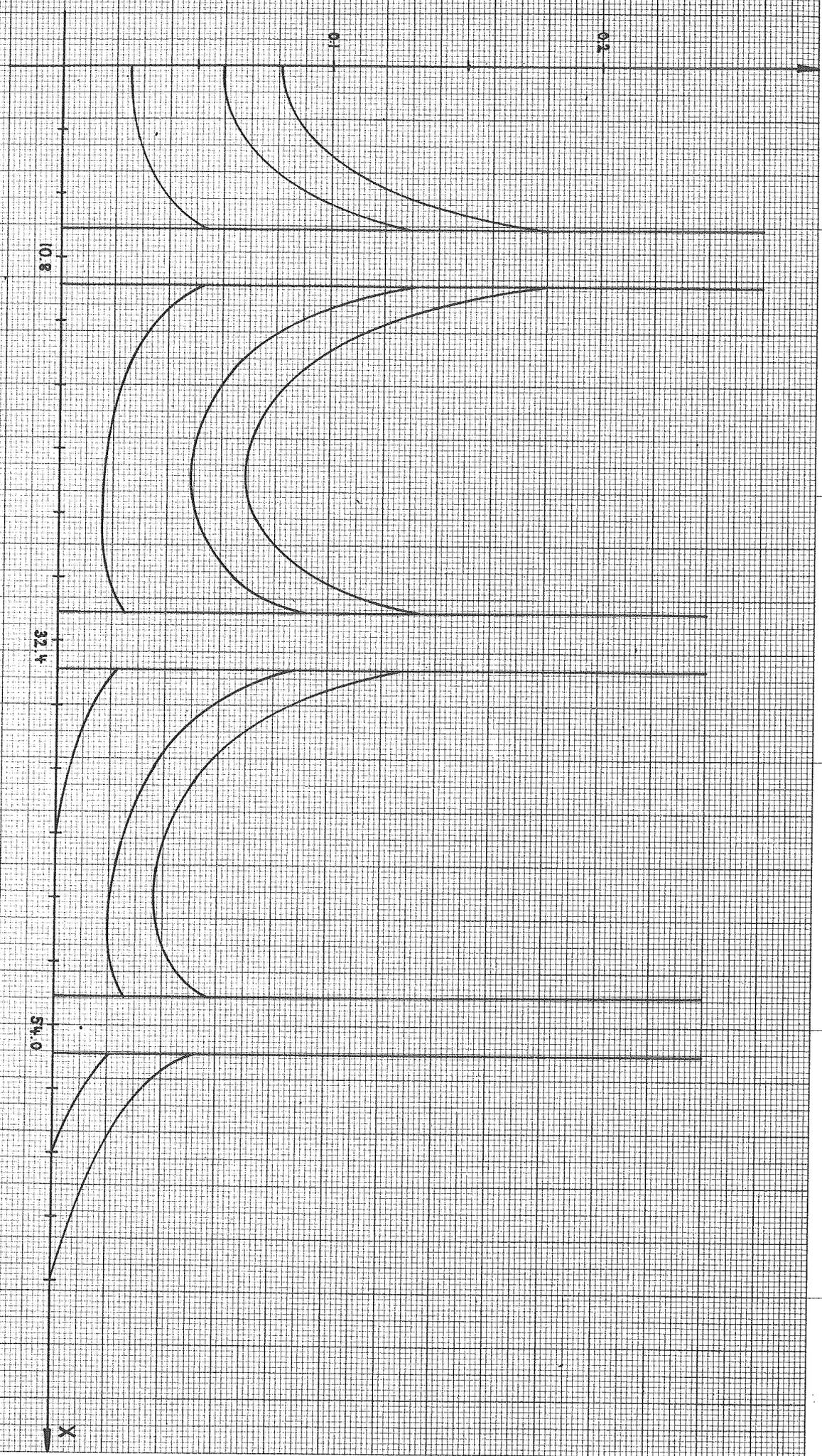


Abb. 25. FRO/6. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $y = 0, d, 2d, 3d$.

Abb. 26. IRO/8. Schneller Fluss $\phi^{(u)}$ (x, y) für $y = \frac{d}{2}, \frac{3d}{2}, \frac{5d}{2}, \frac{7d}{2}$.



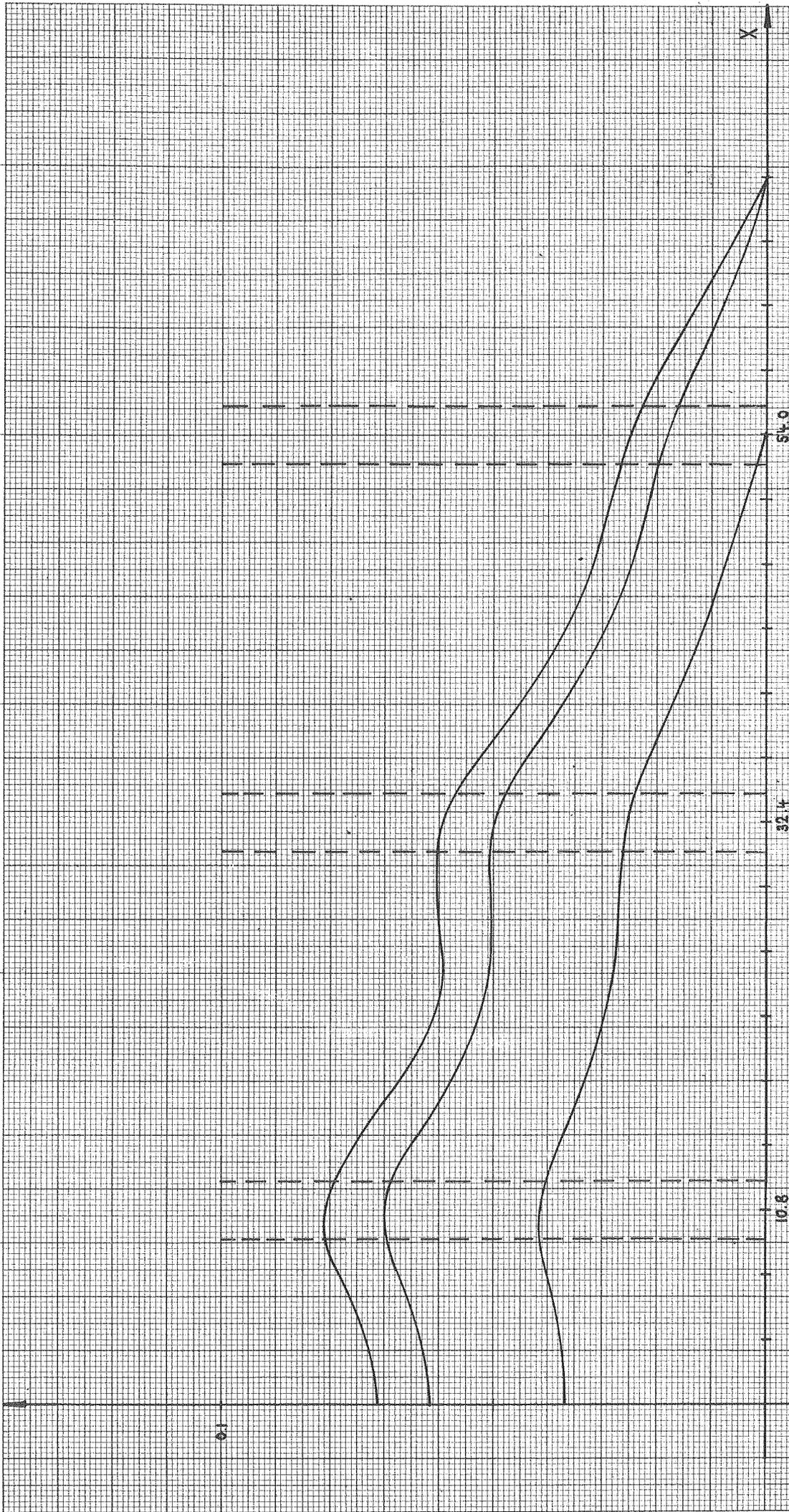
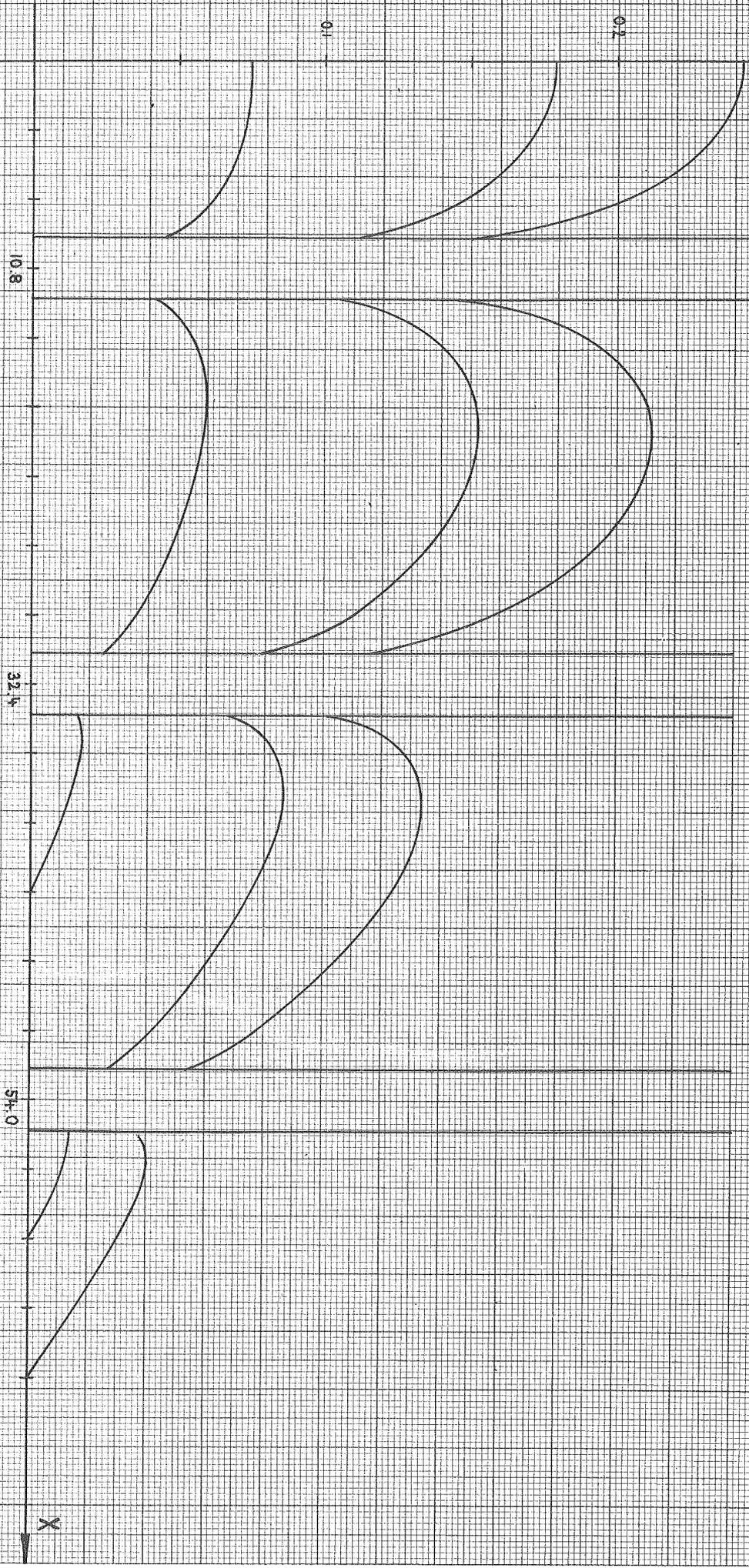


Abb. 27. FRO/8. Schneller Fluss $\phi(x, y)$ für $y = 0, d, 2d$.

Abb. 28. FRO/8. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}$ für $y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$.



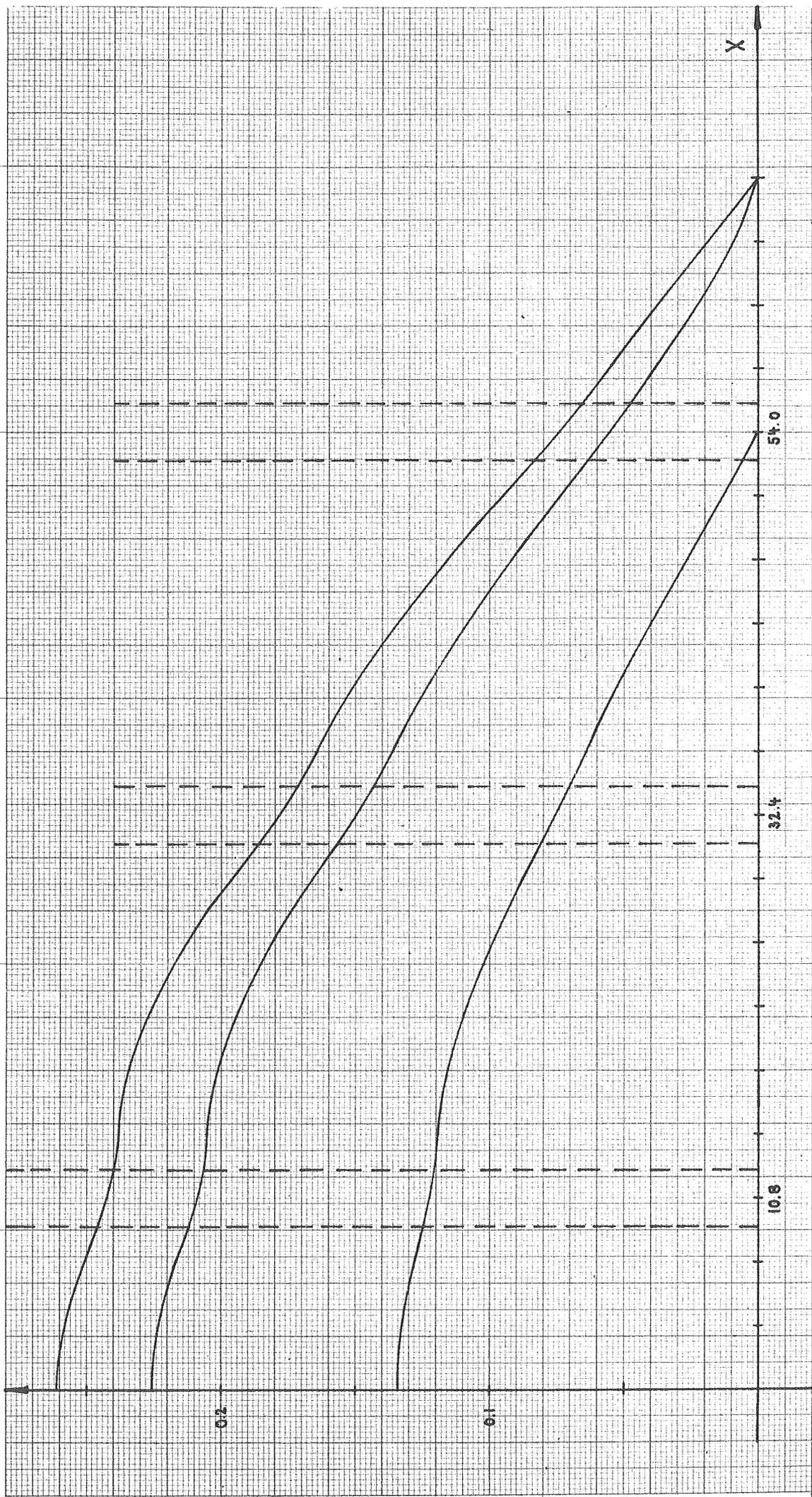
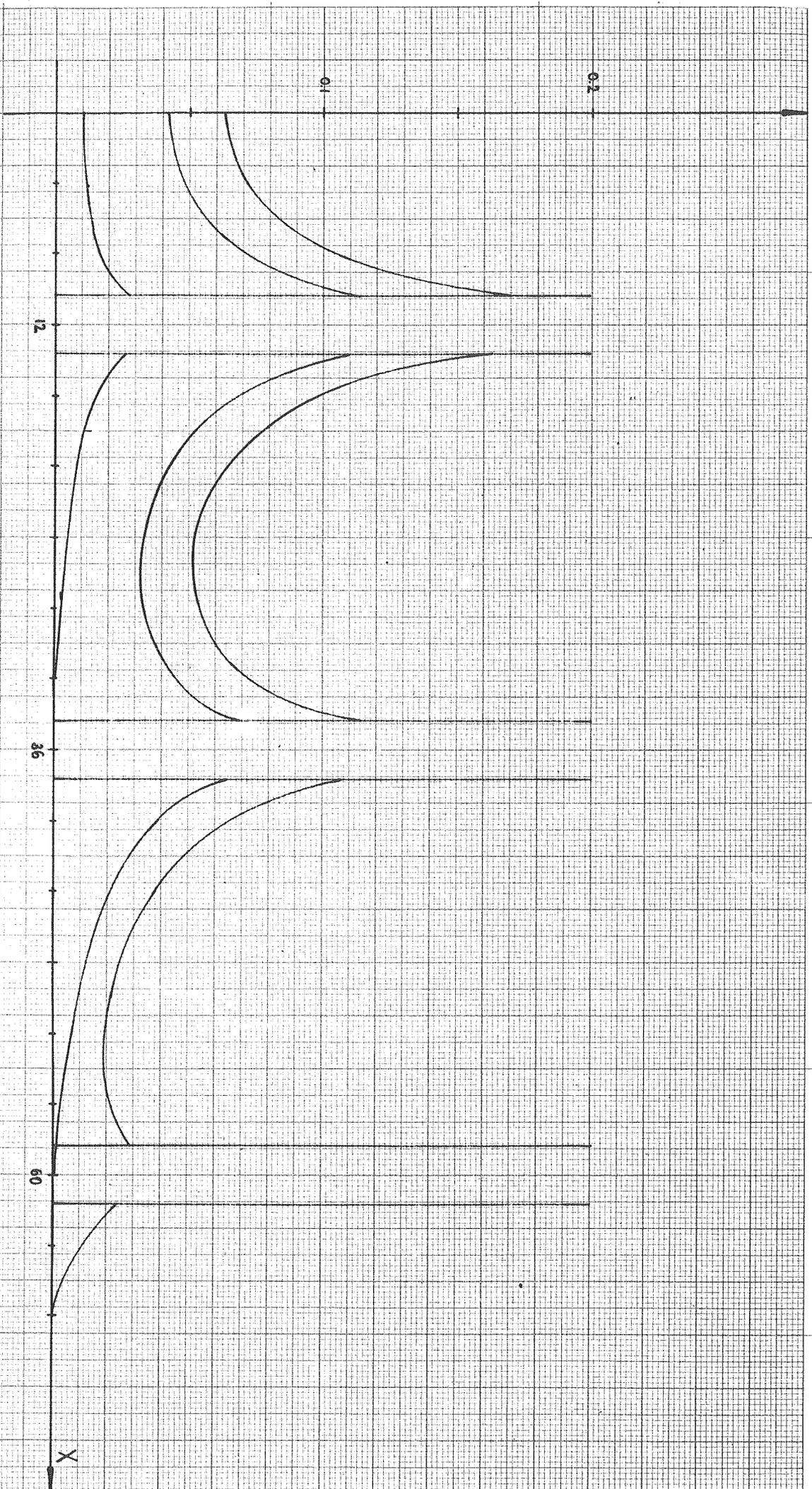


Abb. 29. TRO/8 Thermischer Fluss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $y = 0, d, 2d$

Abb. 30. FRO/9. Schneller Fluss $\phi^{(1)}(x, y)$ für $y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$.



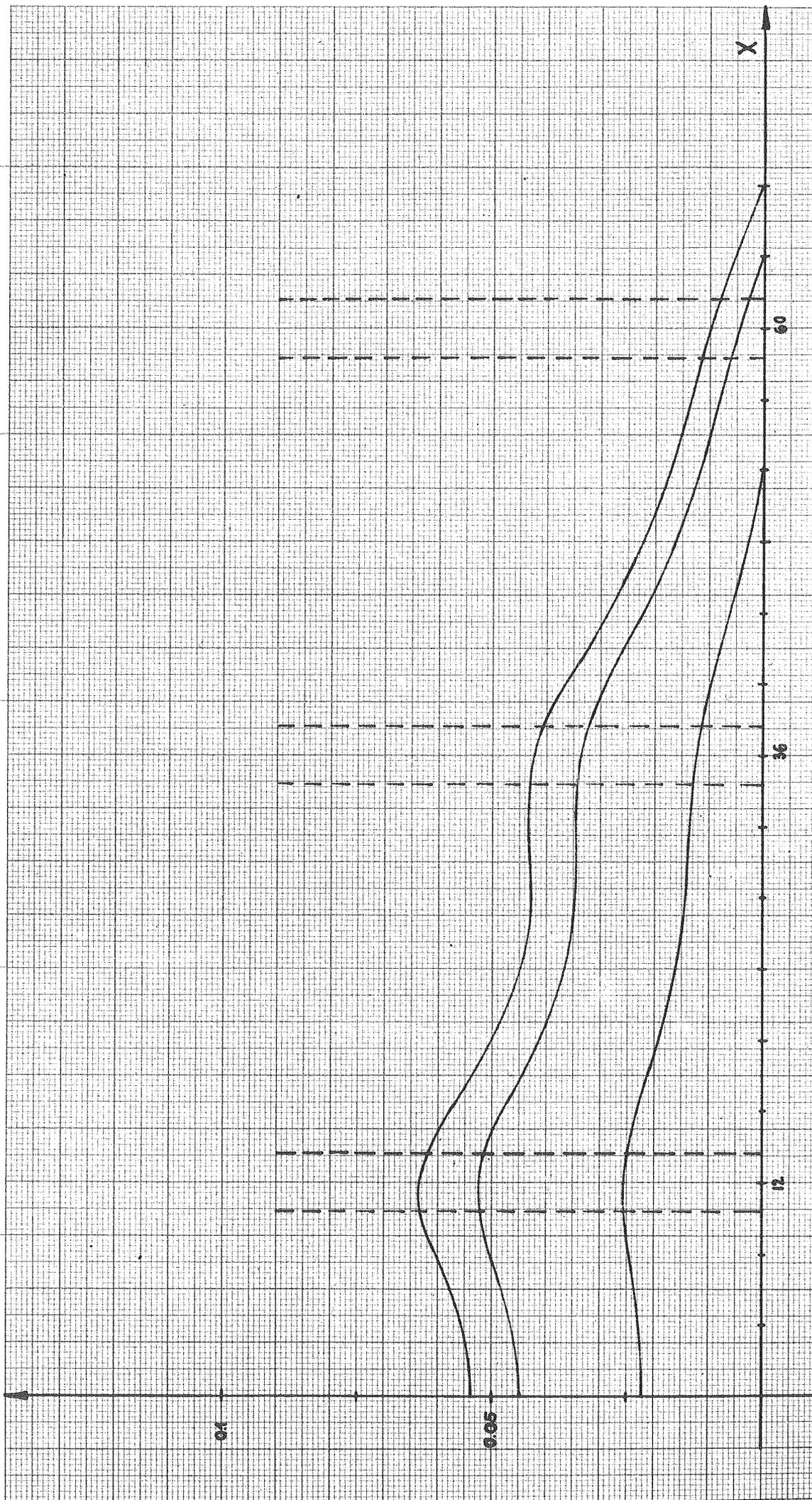


Abb. 31. FRO/9. Schneller Fluss $\phi^{(1)}(x, \gamma)$ für $\gamma = 0,1, 0,05$.

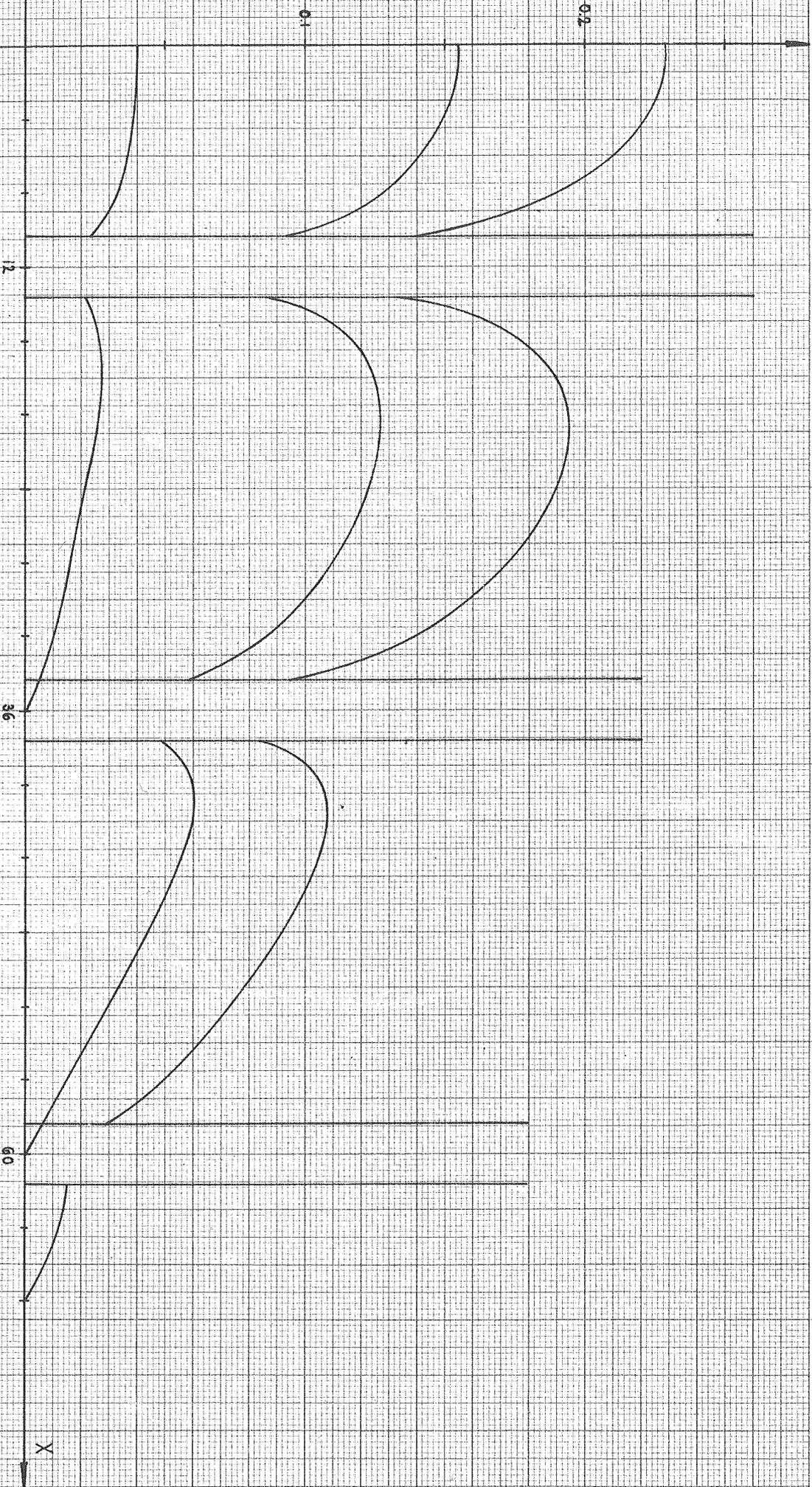


Abb.32. FRO/9. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $y = \frac{d}{2}, \frac{3d}{2}, \frac{5d}{2}$.

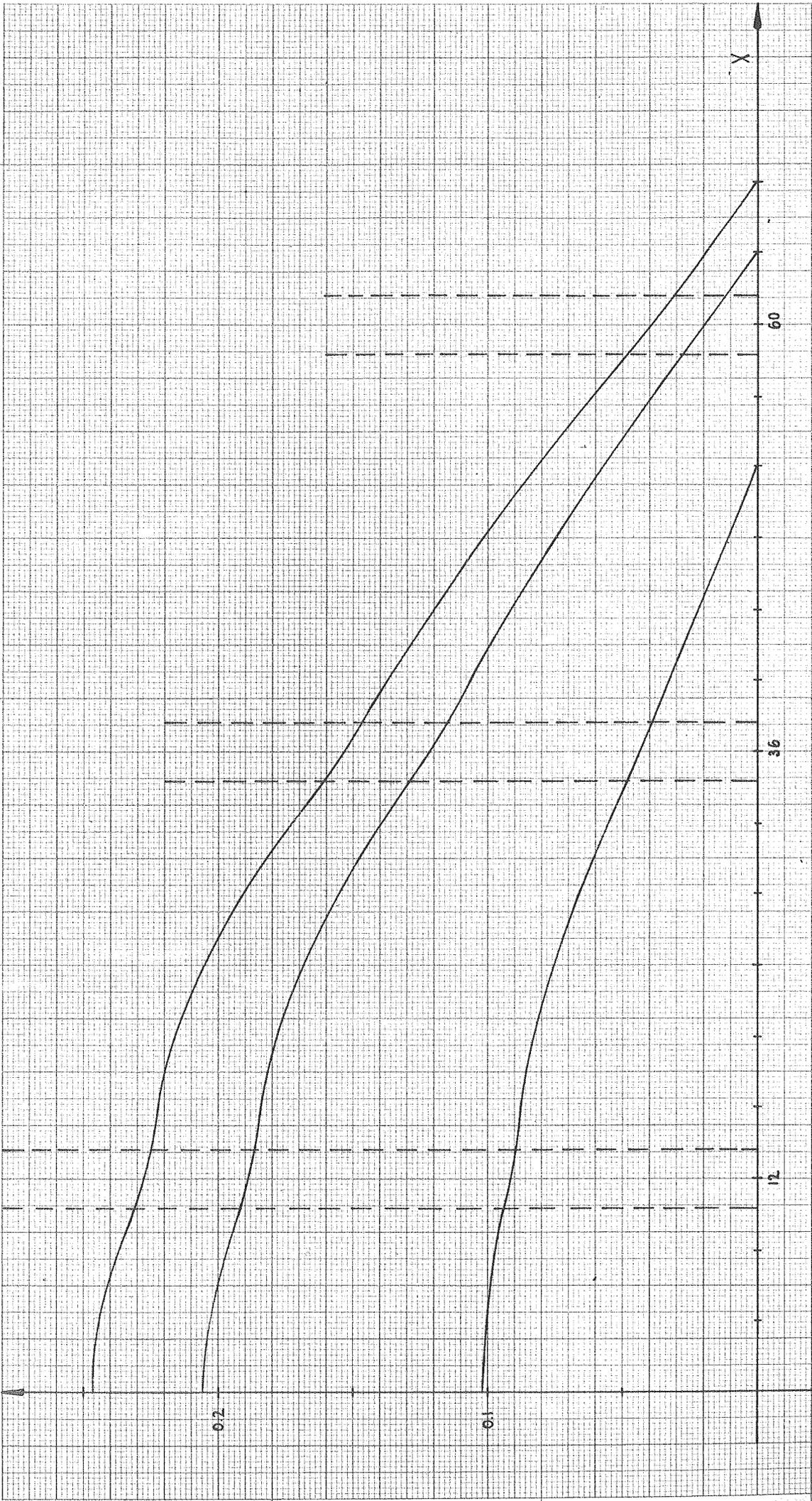


Abb. 33. FRO/9. Thermischer Fluss $\phi^{(2)}(x, y)$ für $\gamma = 0,1, 2d$.