

KFK-40

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

NOVEMBER 1960

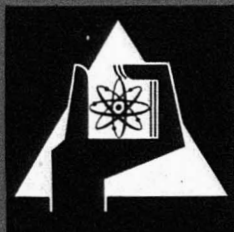
KFK 40

INSTITUT FÜR NEUTRONENPHYSIK UND REAKTORTECHNIK

NEUTRONENSPEKTREN IN HETEROGENEN PLATTENREAKTOREN II

W. HÄFELE

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
Zentralbücherei



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

TA 8023

**KERNREAKTOR**  
**Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.**  
**Zentralbücherei**

# Neutronenspektren in heterogenen Plattenreaktoren. II\*

Von WOLF HÄFELE

(Aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik des Kernforschungszentrums Karlsruhe)

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 25. August 1960)

*Zusammenfassung.* Es wird eine Verallgemeinerung der Resultate von HURWITZ, NELKIN und HÄBETLER sowie E. R. COHEN gegeben, die das Neutronenspektrum eines unendlich großen, homogenen Reaktors unter Verwendung des sog. Schwergasmodells gegeben haben. Die Verallgemeinerung betrifft den Übergang vom unendlichen homogenen Medium auf den endlichen, heterogenen Plattenreaktor. Es ist möglich, die Spektren bis zu einem bestimmten Wert des Absorptionsparameters der Brennstoffplatten anzugeben.

## I. Einleitung

Die hier vorliegende Untersuchung schließt direkt an eine frühere Arbeit des Verfassers an, in der das Bremspektrum eines ebenen, heterogenen, endlich großen Plattenreaktors behandelt worden war [1]. In der Einleitung zu dieser Arbeit war dargelegt worden, daß Neutronenspektren in Kernreaktoren aus verschiedenen Gründen von großem Interesse sind. Einmal interessiert die Kenntnis der Neutronenspektren für die wirklich saubere Berechnung von solchen Kernreaktoren, zum anderen ist das Studium der Wechselwirkung langsamer Neutronen mit den Moderator-molekülen von grundsätzlichem Interesse.

Die meisten der bisherigen Arbeiten [2], die die Neutronenthalermalisation zum Thema haben, befassen sich mit unendlich ausgedehnten homogenen Medien. Bei dieser Betrachtungsweise tritt die Wechselwirkung der Neutronen mit den Moderator-molekülen in den Vordergrund. Das einfachste Modell ist das sog. Schwergasmodell, bei dem die Moderator-moleküle als schwer im Vergleich zur Masse des Neutrons und als kugelförmig gedacht werden. Im Rahmen dieses Modells reduziert sich der Integraloperator für den Transport in Energierrichtung auf einen einfachen Differentialoperator zweiter Ordnung [3]. Spezifische Einflüsse, wie sie z. B. die chemische Bindung in einem Wassermolekül oder die kristalline Struktur des Graphits mit sich bringen, bedingen selbstverständlich genauere Betrachtungen. In solchen unendlich ausgedehnten homogenen Medien, von denen die Rede war, treten keinerlei Diffusions- bzw. Transporteffekte in Ortsrichtung auf. Bei heterogenen Anordnungen dagegen spielen solche Diffusionseffekte eine große Rolle. Will man den Einfluß speziell dieser Diffusionseffekte auf die Ausbildung des Neutronenspektrums untersuchen, so bietet das Schwergasmodell besondere Vorteile, weil es im Hinblick auf die übrigen Zusammenhänge das einfachste Modell ist. In der Näherung hoher Neutronenenergien führt das Schwergasmodell asymptotisch auf die „Fermi-Alter“-Theorie. In dieser

\* Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit wurde während eines einjährigen Aufenthalts im Oak Ridge National Laboratorium, Oak Ridge, Tennessee, USA. fertiggestellt.

Näherung hatte die Arbeit [1] das Problem der Neutronenspektren in heterogenen Plattenreaktoren behandelt. Von dieser Spezialisierung soll nun in dieser Arbeit abgesehen werden.

## II. Grundgleichungen und Randbedingungen

In dem Abschnitt II der Arbeit [1] sind die Ausgangsgleichungen für das allgemeine Problem der Neutronenspektren in heterogenen Plattenreaktoren aufgestellt worden. Dort wurde durchgängig die Lethargie  $u$  als freie Variable verwendet. Hier wollen wir wieder die Energie  $E$  als freie Variable einführen. Wir beziehen die Neutronenenergie auf die in eV gemessene Temperatur des Moderators, d. h. wir benützen schließlich die Variable  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{E}{T} \quad (1)$$

$T$  = Temperatur des Moderators in eV,  
 $E$  = Energie des Neutrons in eV.

Dann haben wir [s. [1], Gl. (7), (8), (10) und (11)]:

$$D \frac{\partial^2 \Phi(x, \varepsilon)}{\partial x^2} + L(\Phi(x, \varepsilon)) + f_- = 0 \quad (2)$$

mit den folgenden Abkürzungen:

$$L(\Phi) = - \frac{\partial q(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \int \Sigma(\varepsilon' \rightarrow \varepsilon) \Phi(\varepsilon') d\varepsilon' - \Sigma_s(\varepsilon) \cdot \Phi(\varepsilon), \quad (3)$$

$$f_- = - 2a \Sigma_a(\varepsilon) \cdot \sum_{k=-N}^{+N} \delta(x - kd) \cdot \Phi(kd, \varepsilon), \quad (4)$$

$$D = \frac{1}{3 \Sigma_s(\varepsilon)}. \quad (5)$$

$x$  ist die Ortskoordinate unseres Problems,  $\Phi$  ist der Neutronenfluß und  $q$  ist die Bremsdichte. Gl. (4) bedeutet, daß wir es mit einem Plattenreaktor zu tun haben, bei dem

$$N_0 = 2N + 1 \quad (6)$$

Platten der Dicke  $2a$  im Abstand  $d$  angeordnet sind. Die Anordnung der Platten erfolgt so, daß bei  $x=0$  die Platte 0 sitzt. Die volle Breite des Reaktors betrage

$$2l = N_0 d. \quad (7)$$



Damit ergibt sich eine Anordnung, wie sie in Abb. 1 wiedergegeben ist.

In (4) sind die Platten zu  $\delta$ -Funktionen zusammengezogen, deren Absorptionsfähigkeit mittels des als effektive Größe zu denkenden Absorptionsquerschnittes  $\Sigma_a(\epsilon)$  an die Absorptionsfähigkeit der Platten angepaßt ist.

Bei  $\epsilon = \epsilon_s$  ( $\epsilon_s$  ist die diskret gedachte Energie eines Spaltneutrons) gilt die Randbedingung:

$$q(x, \epsilon_s) = 2a v \sum_{k=-N}^{+N} \delta(x - kd) \int_{\epsilon=0}^{\epsilon=\epsilon_s} \Phi(kd, \tilde{\epsilon}) \cdot \Sigma_f(\tilde{\epsilon}) d\tilde{\epsilon}. \quad (8)$$

$v$  ist dabei die Zahl der schnellen Neutronen pro Spaltung.

An den übrigen Rändern verlangen wir:

$$\Phi(\pm l, \epsilon) = 0 \quad \text{für alle } \epsilon, \quad (9)$$

$$q(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } x. \quad (10)$$

Die Bedingung (10) bringt die Bedingung (13) in [1] mit sich, hat aber den Vorteil, etwas anschaulicher und — wie sich herausstellen wird — etwas einfacher anwendbar zu sein. Zur Lösung der Gl. (2) war der folgende Ansatz gemacht worden:

$$\Phi = \sqrt{l} \cdot \sum_p \varphi_p(\epsilon) \cdot v_p(x). \quad (11)$$

Dabei galt:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \alpha_p x, \quad (12)$$

$$\alpha_p = \frac{\pi}{2l} (2p + 1). \quad (13)$$

Die besondere Symmetrie unseres Plattenreaktors bringt nun die folgende Frequenzwahl [4], [5] mit sich:

$$p = N_0 m \quad m = -\infty \dots 0 \dots +\infty. \quad (14)$$

Dann erhalten wir als Gleichungssystem für die Komponenten  $\varphi_p(\epsilon)$  den folgenden Satz von Gleichungen:

$$-\alpha_{N_0 r}^2 D \varphi_{N_0 r} + L(\varphi_{N_0 r}) - \frac{2a \Sigma_a(\epsilon)}{d} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_{N_0 m} = 0. \quad (15)$$

Für den Fall des Schwergasmodells gilt nun [3]:

$$L(\varphi) = 2\mu \Sigma_0 \left( \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \epsilon^2} + \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} + \varphi \right) + O(\mu^2), \quad (16)$$

$$q(\varphi) = 2\mu \Sigma_0 \left( \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} + (\epsilon - 1) \varphi \right) + O(\mu^2), \quad (17)$$

$$\Sigma_s(\epsilon) = \Sigma_0 + O(\mu); \quad \Sigma_0 = \text{constans}. \quad (18)$$

Dabei ist  $\mu$  das Verhältnis von der Neutronenmasse zur Masse des Moderatoratoms (Moleküls),  $\Sigma_0$  ist der nullte Entwicklungskoeffizient des Streuquerschnitts nach  $\mu$ .

Somit entsteht aus (15) und (10) mit (16) und (17):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \frac{d^2 \varphi_{N_0 r}}{d\epsilon^2} + \epsilon \frac{d\varphi_{N_0 r}}{d\epsilon} + \varphi_{N_0 r} (1 - \alpha_{N_0 r}^2 x_0^2) - \\ - p(\epsilon) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_{N_0 m}(\epsilon) = 0 \quad r = -\infty \dots +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\epsilon \frac{d\varphi_{N_0 r}}{d\epsilon} + (\epsilon - 1) \varphi_{N_0 r} = 0 \quad \text{für } \epsilon = 0. \quad (20)$$

Dabei haben wir die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$x_0^2 = \frac{D}{2\mu \Sigma_0}, \quad (21)$$

$$p(\epsilon) = \frac{\Sigma_a(\epsilon) \cdot 2a}{2\mu \Sigma_0 \cdot d}. \quad (22)$$

Das Einsetzen des Ansatzes (11) in die Randbedingung (8) führt auf die Bedingung:

$$\varphi_{N_0 r}(\epsilon_s) = S_0, \quad (8a)$$

$$S_0 = \frac{2a \cdot v}{2\mu \Sigma_0 d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{N_0 m}, \quad (8b)$$

$$\chi_{N_0 m} = \int_0^{\epsilon_s} \varphi_{N_0 m}(\epsilon) \Sigma_f(\epsilon) d\epsilon. \quad (8c)$$

Indessen werden wir nicht mehr wie in der ersten Arbeit [1] mit (8) als Randbedingung arbeiten. Es hat sich nämlich in dieser Arbeit gezeigt, daß ein

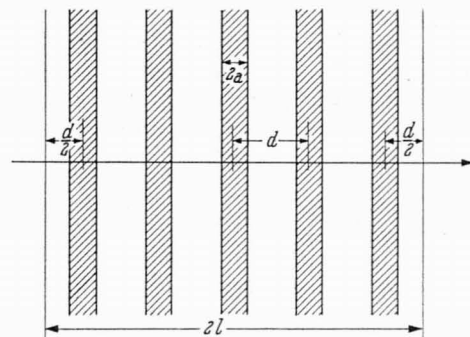


Abb. 1. Geometrie des heterogenen Plattenreaktors

Bereich mittlerer Energien existiert, für den eine einfache glatte  $\cos$ -Verteilung vorliegt; die Anfangsverteilung (8) hat sich  $\Theta$ -funktionsartig ausgeglichen und die Absorption hat praktisch noch nicht eingesetzt; wir haben eine Entkopplung der beiden Einflüsse, die eine Feinstruktur bedingen. Da wir hier bei der Untersuchung der thermischen und epithermischen Spektren ausschließlich an Energiebereiche gebunden sind, die wesentlich kleiner als jene mittleren Energien sind, bei denen die einfache  $\cos$ -Verteilung vorliegt, werden wir diese als Randbedingung vorschreiben. Für den mittleren Energiebereich, für den diese einfache  $\cos$ -Verteilung vorliegt, gilt aber

$$\epsilon \approx 10^6,$$

d.h. diese Energien sind groß genug, um sie von thermischen Energien ( $\epsilon \approx 1$ ) aus als unendlich groß zu betrachten. Wir fordern somit die folgende Anfangsverteilung

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^{1-\alpha_0^2 x_0^2} \varphi_0(\epsilon) \rightarrow \text{constans} \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \infty \\ \epsilon^{1-\alpha_0^2 x_0^2} \varphi_{N_0 r}(\epsilon) \rightarrow 0, \quad r \neq 0, \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die Bedingung für  $r=0$  entspricht dem Glied  $m=0$  in Formel (69) der Arbeit [1], das bei jenen oben erwähnten mittleren Energien ( $u \approx 5$ ) allein einen Beitrag liefert und somit zu dem einfachen  $\cos$ -Verhalten führt, wie es im Anschluß an Formel (75) aus [1] diskutiert ist. (23) ist zu fordern, damit eben dieses einfache  $\cos$ -Verhalten zustande kommt. Mit (19), (20) und (23) ist aber unser zu behandelndes Problem formuliert.

### III. Eine grundsätzliche Klassifizierung des Thermalisationsproblems

Der Ausdruck  $L(\Phi)$  hat für das Modell des schweren Moderator-gases die Form [s. (16) und (17)]

$$L(\Phi) = 2\mu \Sigma_0 \left( \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} + \Phi \right). \quad (24)$$

Diese Form von  $L$  ergibt in (2) eine in  $(x, E)$  elliptische partielle Differentialgleichung für  $\Phi$ . Das gilt im Prinzip für alle Energien  $E$ . Man erkennt den Charakter des Ausdrucks  $L(\Phi)$  recht gut, wenn man nach Lösungen der willkürlich angesetzten Differentialgleichung

$$L(\Phi) = 0 \quad (25)$$

fragt. Wir haben zwei Lösungen. Erstens gilt:

$$\Phi = \Phi_1 = \varepsilon e^{-\varepsilon}. \quad (26)$$

(26) ist eine Maxwell-Verteilung und entspricht in ihrem Charakter völlig dem elliptischen Charakter von (2), der auf eine Beschreibung von Gleichgewichtszuständen hinausläuft. Lösungen von Thermalisationsproblemen, die diesen Charakter haben, werden wir Lösungen von Typ A nennen. Neben (26) gibt es aber noch eine zweite Lösung, deren asymptotische Darstellung hier angegeben sei

$$\Phi = \Phi_2 = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^N n! \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{n-1} + O(e^{-\varepsilon}) \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

Für hinreichend große Werte von  $\varepsilon$  hat (27) den Charakter  $1/\varepsilon$ ,  $\Phi_2$  approximiert die Lösung der Differentialgleichung

$$\bar{L}(\Phi) = 2\mu \Sigma_0 \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} + \Phi \right) = 0. \quad (28)$$

Die Differentialgleichung

$$x_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2\mu \Sigma_0} \bar{L}(\Phi) + f = 0 \quad (29)$$

hat aber in  $(x, \varepsilon)$  parabolischen Charakter. Lösungen von Thermalisationsproblemen, die diesen Charakter haben, werden wir Lösungen von Typ B nennen.

Die von uns gesuchte Lösung des Problems (19) bis (23) hat für große Energien parabolischen (Typ B) und für Energien vergleichbar mit  $T$  elliptischen Charakter (Typ A). Die verfügbaren Methoden der mathematischen Physik sind aber darauf abgestimmt, entweder elliptische oder parabolische Probleme zu beschreiben. Somit entstehen bei der von uns gesuchten Lösung Schwierigkeiten grundsätzlicher Art. Interessiert man sich allein für den Teil der Lösung, für den  $\varepsilon \gg 1$  gilt (Typ B), so wird die Laplace-Transformation das geeignete Handwerkszeug sein, für Energiebereiche, wo  $E$  vergleichbar mit  $T$  ist, bietet sich eine Orthogonalentwicklung nach assoziierten Laguerre-Polynomen erster Art an. Diese sind Eigenfunktionen zu  $L(\Phi)$  und der Randbedingung  $q(x, 0) = 0$ ;  $q(x, \infty) = 0$ . Bei einer willkürlichen Energie in der Gegend von  $E = \alpha T$  ( $\alpha \approx 8$ ) wird man dann die Lösungen vom Typ B und A künstlich zusammensetzen müssen. Diese künstliche Auftrennung der Energieskala durch ein „cut off“ ist das Hauptkonzept der bisherigen Arbeiten über Neutronenthalisation. Als repräsentativ für diese Arbeitsrichtung sei die Arbeit von WESTCOTT [12] genannt. Es zeigt sich aber, daß die Stelle  $\alpha$  unter Umständen empfindlich die Resultate beeinflusst, so

daß durchgehende Lösungen erwünscht sind. Für das Problem des unendlich ausgedehnten Mediums ist das zumindest für das Modell des schweren Moderator-gases bereits geschehen [3], [6].

Die von uns gesuchte Lösung im Bereich hoher Energien ist vom Verfasser in [1] als Lösung vom Typ B behandelt worden. Die Theorie des Diffusionskühlungseffektes in heterogenen Plattenanordnungen führt auf den Typ A und ist in einer anderen Arbeit des Verfassers [7] behandelt worden. Hier wollen wir unser eigentliches Problem (19) bis (23) lösen, welches vom gemischten Typus ist, ohne eine Zerschneidung vorzunehmen, d. h. wir werden das heterogene Analogon zu den Arbeiten, die das unendlich ausgedehnte homogene Problem in der Näherung des Schwergasmodells behandeln [3], [6], geben.

### IV. Das thermische und epithermische Spektrum eines heterogenen Plattenreaktors

Vorgelegt sind die Gln. (19) bis (23) des Abschnitts II. Dabei ist die Größe  $p(\varepsilon)$  noch offen. Zunächst behandeln wir den Fall  $p = p_0$ .

Der Fall  $p = p_0$

Wie in Arbeit [1], so können wir auch hier im Falle eines konstanten  $p$  eine analytische Lösung angeben. Wir haben lediglich die Funktion  $e^{-\omega^2 u}$  des Ansatzes (35) aus [1] durch  $T_{\omega^2}(\varepsilon)$  zu ersetzen. Dabei ist  $T_{\omega^2}(\varepsilon)$  durch die folgende Gleichung gegeben:

$$T_{\omega^2}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon e^{-\varepsilon} M(\omega^2, 2, \varepsilon)}{\varepsilon_S e^{-\varepsilon_S} M(\omega^2, 2, \varepsilon_S)} \quad (30)$$

$M(\omega^2, 2, \varepsilon)$  ist die konfluente hypergeometrische Funktion in der Schreibweise von JAHNKE und EMDE [8]. Sie hängt unmittelbar mit der Kummerschen Funktion zusammen und zeigt am Nullpunkt ein reguläres Verhalten und erfüllt somit (20). Indem wir völlig analog zu [1] (35) bis (46) vorgehen und noch einmal die Anfangsbedingung (8) bzw. (8a) vorschreiben, erhalten wir:

$$\Phi(x, \varepsilon) = S_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{\omega_i^2}(\varepsilon)}{1 - \cos \frac{\pi}{N_0} \cos \frac{d}{x_0} \omega_i} \times \left. \begin{aligned} & \left. \frac{1}{\sin^2 \frac{d}{x_0} \omega_i} + p_0 \frac{1}{2\omega_i^2} \right\} \quad (31) \\ & \times \frac{\sin \frac{x'}{x_0} \omega_i \cos \frac{k+1}{N_0} \pi - \sin \frac{x'-d}{x_0} \omega_i \cos \pi \frac{k}{N_0}}{\sin \frac{d}{x_0} \omega_i} \end{aligned} \right.$$

Dabei gilt die folgende Gleichung zur Bestimmung der  $\omega_i$

$$1 + p_0 \cdot h(-\omega_i^2) = 0, \quad (32)$$

wo für die Abkürzung  $h$  gilt:

$$h(s) = \left. \begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s + \alpha_{N_0, m}^2 x_0^2} \\ & = \frac{d}{2x_0 \sqrt{s}} \frac{\text{Si} \frac{d}{x_0} \sqrt{s}}{\left( \text{Co} \frac{d}{x_0} \sqrt{s} - \cos \frac{\pi}{N_0} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

(31) stimmt mit (46) aus [1] genau überein, lediglich  $e^{-\omega_i^2 u}$  ist durch  $T_{\omega_i^2}(\varepsilon)$  ersetzt. Für die konfluente hypergeometrische Funktion gilt die asymptotische Entwicklung:

$$\varepsilon e^{-\varepsilon} M(\alpha, 2, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \varepsilon e^{-\varepsilon} \left( 1 + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\varepsilon} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)^2(3-\alpha)}{\varepsilon^2} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)^2(3-\alpha)^2(4-\alpha)}{\varepsilon^3} + \dots \right) + O(e^{-\varepsilon}). \quad (34)$$

Unter Beachtung von (34) und (30) erkennt man, daß für hinreichend große Energien (31) in (46) aus [1] übergeht.

Hätten wir statt unserer alten Anfangsverteilung (8) bzw. (8a) einfach (23) gefordert, so wäre in (31) einfach der Term  $i=0$  übrig geblieben, der Fall des konstanten Absorptionsquerschnitts  $\Sigma_a^{\text{eff}}$ , d.h.  $p=p_0$ , führt für (23) auf ein separables Problem, das Spektrum ist dann ortsunabhängig.

$$\text{Der Fall } p = p_t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Dieser Fall entspricht dem Fall  $\gamma = \frac{1}{2}$  der Arbeit [1]. Hier ist es möglich, eine asymptotische Lösung des vorgelegten Problems anzugeben. Wir machen dann folgenden Ansatz:

$$\varphi_{N_0 r} = \sum_{\nu=0}^N \frac{g_{N_0 r}^{\nu}}{\beta + 1 + \frac{\nu}{2}} \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

Setzen wir (35) in (19) ein, so erhalten wir Rekursionsgleichungen für die  $g_{N_0 r}^{\nu}$ . Für  $\nu=0$  haben wir

$$g_{N_0 r}^0 (\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 + \beta) = 0. \quad (36)$$

Alle  $g_{N_0 r}^0$  müssen null sein, es sei denn  $\beta$  ist gleich einem der unendlich vielen Werte  $-\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2$ , für diesen Wert ist  $g_{N_0 r}^0 \neq 0$ . (23) hat zur Folge

$$\beta = -\alpha_0^2 x_0^2. \quad (37)$$

Wenn wir die Abkürzung

$$G = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{N_0 m}^{\nu} \quad (38)$$

verwenden und (35) in (19) einsetzen und (37) und (38) beachten, erhalten wir

$$g_{N_0 r}^{\nu} = -p_t \frac{G^{\nu-1}}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + \frac{\nu}{2}} + \frac{\left(\frac{\nu}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) \left(\frac{\nu}{2} + 1 - \alpha_0^2 x_0^2\right)}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + \frac{\nu}{2}} g_{N_0 r}^{\nu-2}. \quad (39)$$

Unter Beachtung von (33) erhalten wir dann die folgenden Gleichungen für die ersten Glieder in (35):

$$\left. \begin{aligned} g_{N_0 r}^0 &= \delta_{r0} G^0 \\ g_{N_0 r}^1 &= -p_t \frac{G}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + \frac{1}{2}} \\ G &= -p_t h \left(\frac{1}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) G^0 \\ g_{N_0 r}^2 &= -p_t \frac{G}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + 1} + \frac{(1 - \alpha_0^2 x_0^2)(2 - \alpha_0^2 x_0^2)}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + 1} \delta_{r0} G^0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} G &= -p_t G^1 h (1 - \alpha_0^2 x_0^2) + (1 - \alpha_0^2 x_0^2) (2 - \alpha_0^2 x_0^2) G^0 \\ g_{N_0 r}^3 &= -p_t \frac{G^2}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + \frac{3}{2}} + \left(\frac{3}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) \left(\frac{5}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) p_t G^0 \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + \frac{3}{2}} - \frac{1}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + \frac{1}{2}} \right) \\ G &= -p_t G^2 h \left(\frac{3}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) + \left(\frac{3}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) \left(\frac{5}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) p_t G^0 \times \\ &\quad \times \left( h \left(\frac{3}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) - h \left(\frac{1}{2} - \alpha_0^2 x_0^2\right) \right) \\ g_{N_0 r}^4 &= -p_t \frac{G^3}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + 2} + (3 - \alpha_0^2 x_0^2) (2 - \alpha_0^2 x_0^2) p_t G^1 \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + 2} - \frac{1}{\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + 1} \right) + \frac{(3 - \alpha_0^2 x_0^2) (2 - \alpha_0^2 x_0^2) (1 - \alpha_0^2 x_0^2)}{(\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + 2) (\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + 1)} \delta_{r0} G^0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Die Form der höheren Glieder ist nun leicht zu erkennen. Die Reihe (35) mit den Gliedern (40) stellt nun die asymptotische Entwicklung der Lösung von (19), (20) und (23) dar, weil jede der Differentialgleichungen (19) bei unendlich eine wesentlich singuläre Stelle vom Rang 2 hat. Passen wir (69) in [1] an die Bedingung (23) an, so heißt das, daß nur die einfache Summe über  $\lambda$  für  $m=0$  zu berücksichtigen ist. Die Glieder  $m=0$ ,  $\lambda=0$  und  $m=0$ ,  $\lambda=1$  stimmen mit den ersten zwei Gliedern von (35), (40) überein. Für Energien, die klein genug sind, daß Glieder mit  $1/\varepsilon^2$  zu berücksichtigen sind, ergeben sich Abweichungen, in diesem Fall ist dann (35), (40) anstatt (69) in [1] zu benutzen.

Außer der eben untersuchten Entwicklung (35), (40) gibt es noch eine zweite. Sie hat die Form

$$\varphi_{N_0 r} = \varepsilon e^{-\varepsilon} \sum_{\mu=0}^M \frac{g_{N_0 r}^{\mu}}{\varepsilon^{\frac{\mu}{2} + \alpha_0^2 x_0^2}} \quad M = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Die von uns gesuchte Lösung ist eine lineare Kombination der Lösungsanteile, deren asymptotische Entwicklung durch (35) und (41) gegeben ist. Indessen ist der minimale Fehler der asymptotischen Entwicklung (35) gegenüber dem durch sie dargestellten Lösungsanteil von der Größenordnung der Reihe (41), so daß es nutzlos ist, nach der richtigen Kombination der Entwicklungen (35) und (41) zu fragen.

Um nun schließlich zu der eigentlichen Lösung zu kommen, verfahren wir folgendermaßen:

Wir betrachten die beiden Systeme von Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 \varphi_{N_0 r}}{d\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{d\varphi_{N_0 r}}{d\varepsilon} + \varphi_{N_0 r} (1 - \alpha_{N_0 r}^2 x_0^2) - p(\varepsilon) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_{N_0 m} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 \varphi_{N_0 r}^0}{d\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{d\varphi_{N_0 r}^0}{d\varepsilon} + \varphi_{N_0 r}^0 (1 - \alpha_{N_0 r}^2 x_0^2) &= 0 \\ r &= -\infty \dots + \infty. \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$



Obwohl wir besonders den Fall  $p(\varepsilon) = p_t \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  weiterhin im Auge behalten, ist es im folgenden nicht erforderlich, diese spezielle Form von  $p(\varepsilon)$  anzunehmen.

Wir multiplizieren nun (19) mit  $\varphi_{N_0r}^0$ , (19a) mit  $\varphi_{N_0r}$  und subtrahieren. Indem wir die Abkürzung

$$\omega_{N_0r} = \varphi_{N_0r}^0 \varphi'_{N_0r} - \varphi_{N_0r} \varphi_{N_0r}^{\prime 0}; \quad \left( \varphi' = \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right) \quad (42)$$

verwenden, erhalten wir

$$\frac{d\omega_{N_0r}}{d\varepsilon} + \omega_{N_0r} - p(\varepsilon) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_{N_0m}(\varepsilon) \frac{\varphi_{N_0r}^0(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0. \quad (43)$$

Wir unterwerfen die Funktion  $\varphi_{N_0r}^{(0)}$  der Bedingung (20), d.h. aber, daß wir die einfache Form

$$\varphi_{N_0r}^{(0)} = \varepsilon e^{-\varepsilon} M(\alpha_{N_0r}^2, x_0^2, 2, \varepsilon) \quad (44)$$

haben, wo  $M(\alpha, 2, \varepsilon)$  wieder die konfluente hypergeometrische Funktion ist, die am Nullpunkt  $\varepsilon = 0$  ein reguläres Verhalten zeigt und mit der Kummer'schen Funktion in Beziehung steht. Die zweite mögliche Lösung hat eine logarithmische Singularität, so daß weder sie noch eine Linearkombination mit (44) der Bedingung (20) genügen würde.

Indem wir bei der Integration von (43), (20) jetzt auf  $\varphi_{N_0r}$  anwenden, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{N_0r} - \varphi_{N_0r} \frac{\varphi_{N_0r}^{\prime 0}}{\varphi_{N_0r}^0} \\ = \frac{e^{-\varepsilon}}{\varphi_{N_0r}^0(\varepsilon)} \int_0^\varepsilon p(\zeta) \Sigma \varphi_{N_0m}(\zeta) e^\zeta \cdot \frac{\varphi_{N_0r}^{\prime 0}(\zeta)}{\zeta} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Bei der Anwendung der Bedingung (20) auf die möglichen Lösungen von (19a) und (19) haben wir stillschweigend angenommen, daß die Differentialgleichungen auch für beliebig kleine Energiewerte gelten. Bei Gl. (16) stellten wir aber fest, daß das nicht der Fall ist. J.E. WILKINS [9] hat untersucht, wie groß der Fehler z.B. der Lösung (44) gegenüber der physikalisch richtigen Lösung ist und hat gefunden, daß er nur wenige Prozent groß ist. Somit verbleiben wir bei der Regularitätsforderung (20) für die Lösungen von (19) und (19a), d.h. bei (44) und (45).

(45) kann ebenfalls leicht integriert werden, und wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{N_0r} = c_{N_0r} \varphi_{N_0r}^0 + \int_0^\varepsilon \frac{\varphi_{N_0r}^0(\varepsilon)}{\varphi_{N_0r}^0(\eta)} d\eta \int_0^\eta p(\zeta) \Sigma \varphi_{N_0m}(\zeta) \times \\ \times \frac{\varphi_{N_0r}^0(\zeta)}{\varphi_{N_0r}^0(\eta)} e^{-(\eta-\zeta)} \frac{1}{\zeta} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Wir haben jetzt die Größen  $c_{N_0r}$  und  $a_{N_0r}$  zu bestimmen, die Teile einer Integrationskonstanten sind, die bei der Integration von (45) zustande kommt. Dazu unterscheiden wir zwischen den Fällen  $r \neq 0$  und  $r = 0$ . Für  $r \neq 0$  erhalten wir durch Anwendung von (23)

$$\left. \begin{aligned} c_{N_0r} = 0 \\ a_{N_0r} = \infty, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

denn  $\varphi_{N_0r}$  muß für  $\varepsilon \rightarrow \infty$  hinreichend stark verschwinden. Indem wir für einen Augenblick einmal annehmen

$$p(\varepsilon) = p_t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (48)$$

prüfen wir (47). Wir gehen mit (23) als Approximation nullter Ordnung in (46) ein. Ähnlich unserem Vorgehen in [1] fordern wir vorübergehend  $r < R$ , wobei  $R$  eine beliebig große, aber nicht variable Zahl ist. Das gibt uns die Möglichkeit, von der asymptotischen Entwicklung (34) Gebrauch zu machen. Für sehr große Werte von  $\varepsilon$  gilt dann (48) und (23).

$$p_t \frac{\Sigma \varphi_{N_0m}(\zeta)}{\sqrt{\zeta} \cdot \zeta} \sim p_t \zeta^{\alpha_0^2 x_0^2 - \frac{1}{2}}.$$

Für hinreichend große Werte von  $\varepsilon$  ist aber im zweiten Integral von (46) der Faktor  $e^{-(\eta-\zeta)}$  die einzige stark veränderliche Variable, so daß wir den übrigen Integranden bei  $\zeta = \eta$  herausziehen können. Wegen

$$\int_0^\eta e^{-(\eta-\zeta)} d\zeta = 1 + O(e^{-\eta})$$

erhalten wir mit (34)

$$\begin{aligned} \varphi_{N_0r}(\varepsilon) &= - p_t \int_\varepsilon^\infty \frac{\varepsilon^{\alpha_{N_0r}^2 x_0^2 - 1}}{\eta^{\alpha_{N_0r}^2 x_0^2 - 1}} \eta^{\alpha_0^2 x_0^2 - \frac{1}{2}} d\eta \\ &= - p_t \frac{\varepsilon^{\alpha_0^2 x_0^2 - \frac{1}{2}}}{\alpha_{N_0r}^2 x_0^2 - \alpha_0^2 x_0^2 + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

das aber ist genau das erste Glied in (40) für  $G = 1$ . Ähnlich wie in [1] lassen wir jetzt  $r$  wieder frei.

Für  $r = 0$  können wir nicht das Verschwinden bei unendlich fordern. Vielmehr ist es so, daß die eine Integrationskonstante der Gleichung für  $r = 0$  die offene Konstante unseres Problems ist, wobei wir die Amplitude der Anfangsverteilung durch (8a), (8b) und (8c) an die Amplitude des Flusses  $\Phi$  gekoppelt haben. Wir können also irgendwelche Zahlen für  $c_0$  und  $a_0$  einsetzen. Indem wir für  $\varphi_0$  bei  $\varepsilon = 0$  die einfache Entwicklung

$$\varphi_0(\varepsilon) = \varepsilon + (\text{höhere Glieder})$$

fordern, haben wir

$$\left. \begin{aligned} c_0 = 1 \\ a_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

damit heißt die Lösung unseres Problems

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\varepsilon) = \frac{\varphi_0(\varepsilon)}{\varphi_0(\varepsilon)} + \int_0^\varepsilon \frac{\varphi_0(\varepsilon)}{\varphi_0(\eta)} d\eta \int_0^\eta p(\zeta) \times \\ \times \sum_m \varphi_{N_0m}(\zeta) \frac{\varphi_0(\zeta)}{\varphi_0(\eta)} e^{-(\eta-\zeta)} \frac{1}{\zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{N_0r}(\varepsilon) = - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi_{N_0r}(\varepsilon)}{\varphi_{N_0r}(\eta)} d\eta \int_0^\eta p(\zeta) \times \\ \times \sum_m \varphi_{N_0m}(\zeta) \frac{\varphi_{N_0r}(\zeta)}{\varphi_{N_0r}(\eta)} e^{-(\eta-\zeta)} \frac{1}{\zeta} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Der Fall  $\alpha_0^2 x_0^2 = 0$  erlaubt eine besonders einfache Schreibweise von (50). Wir sind in allererster Linie an der Verschiebung des Spektrums interessiert, die über eine Wigner-Seitz-Zelle zustande kommt, so daß die endliche Größe des Reaktors und der Einfluß dieser endlichen Größe auf das Spektrum kaum interessieren. Somit hat der Fall  $\alpha_0^2 x_0^2 = 0$  auch großes praktisches Interesse. Dort haben wir, indem wir die Relation

$$M(0, 2, \varepsilon) = 1$$



beachten

$$\varphi_0 = \varepsilon e^{-\varepsilon} \left[ 1 + \int_0^\varepsilon \frac{e^\eta}{\eta^2} d\eta \int_0^\eta p(\zeta) \Sigma \varphi_{N_0 m}(\zeta) d\zeta \right]. \quad (52)$$

(52) hat die lange bekannte Form, die von den Arbeiten von HURWITZ, NELKIN und HABETLER [3] einerseits und E.R. COHEN [6] andererseits her geläufig ist. Lediglich die Summe in (52) ist durch  $\varphi_0$  ersetzt. Damit sind wir aber in der größtmöglichen Nachbarschaft zur Behandlung des homogenen Problems.

Indessen besteht doch ein ganz außerordentlich großer Unterschied gegenüber dem homogenen Problem. Betrachten wir nämlich einmal die Lösung (50), (51) für kleine Werte von  $\varepsilon$ . Wir finden

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \varepsilon \\ \varphi_{N_0 r} &= \varepsilon \cdot B_{N_0 r}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{N_0 r} &= - \int_0^\infty \frac{1}{\varphi_{N_0 r}(\eta)} d\eta \int_0^\eta p(\zeta) \times \\ &\times \Sigma \varphi_{N_0 m}(\zeta) \frac{\varphi_{N_0 m}(\zeta)}{\varphi_{N_0 r}(\eta)} e^{-(\eta-\zeta)} \frac{1}{\zeta} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Um die Entwicklung (53) angeben zu können, muß das gesamte Spektrum  $\Sigma \varphi_{N_0 m}$  bekannt sein, denn (54) ist ein Integral von null bis unendlich. Im homogenen Fall, wo nur die nullte Komponente  $\varphi_0$  überhaupt existiert, haben wir es statt dessen mit einem Integral von null bis  $\varepsilon$  zu tun. Ein Iterationsverfahren der Gleichung

$$(\varphi_0)_{\text{hom}} = \varepsilon e^{-\varepsilon} \left[ 1 + \int_0^\varepsilon \frac{e^\eta}{\eta^2} d\eta \int_0^\zeta p(\zeta) (\varphi_0)_{\text{hom}} d\zeta \right] \quad (55)$$

liefert die Reihenentwicklung am Nullpunkt, die wir auch unmittelbar aus der entsprechenden Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2(\varphi_0)_{\text{hom}}}{d\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{d(\varphi_0)_{\text{hom}}}{d\varepsilon} + \\ + (\varphi_0)_{\text{hom}} - p(\varepsilon) (\varphi_0)_{\text{hom}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

hätten erhalten können. Zu dieser Reihenentwicklung am Punkt  $\varepsilon = 0$  brauchen wir aber keineswegs die Kenntnis des gesamten Verlaufs  $(\varphi_0)_{\text{hom}}$ . Der Umstand, daß in (54) der volle Spektralverlauf  $\Sigma \varphi_{N_0 m}$  erforderlich ist, weist darauf hin, daß das System (19) letzten Endes den Charakter einer Integralgleichung hat. Somit sind wir grundsätzlich nicht in der Lage, das Analogon der Reihenentwicklung bei  $\varepsilon = 0$  zum homogenen Fall anzugeben.

Es ist nicht schwer, die eine Integralgleichung anzugeben, die mit (19) in Verbindung steht. Dazu betrachten wir einmal die verallgemeinerte Laplace-Transformation

$$\varphi_{N_0 r}(\varepsilon) = \int_W \varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon) g_{N_0 r}(s) ds. \quad (57)$$

$W$  ist ein Integrationsweg, den wir hier nicht näher zu spezifizieren brauchen. Setzen wir (57) in (19) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} - \int_W \varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon) (s + \alpha_{N_0 r}^2 x_0^2) g_{N_0 r}(s) ds \\ = \int_W p(\varepsilon) \varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon) \sum_m g_{N_0 m}(s) ds. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Die rechte Seite hängt nicht von  $r$  ab, deshalb muß  $g_{N_0 r}(s)$  die folgende Form haben

$$g_{N_0 r}(s) = \frac{G(s)}{s + \alpha_{N_0 r}^2 x_0^2}. \quad (59)$$

Indem wir (59) und (33) verwenden, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \int_W \varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon) G(s) ds + \\ + \int_W p(\varepsilon) \varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon) G(s) h(s) ds = 0. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

(60) ist die Integralgleichung für  $G(s)$  in dem Sinne, daß  $G(s)$  so zu bestimmen ist, daß beide Integrationsausdrücke bis auf ein Minuszeichen dieselbe Funktion von  $\varepsilon$  darstellen. Für  $p = p_0$  ergibt sich aus (60) sofort die Bedingung (32) und mit ihr die Lösung (31). Ersetzen wir  $\varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon)$  durch das erste Glied der asymptotischen Entwicklung (34) und  $p(\varepsilon)$  durch (48), so ergibt sich durch Anwendung einer Parallelverschiebung und (8a) bis (8c) sofort die Gl. (53) der Arbeit [1].

(57) mit (59) setzen wir jetzt in (11) unter Beachtung von (14) ein und erhalten

$$\Phi(x, \varepsilon) = \int_W \varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon) G(s) h(s) F(x, s) ds. \quad (61)$$

(61) erkennen wir als Verallgemeinerung von (56) aus [1]. Wir hätten (61) auch unmittelbar als Lösungsansatz für (2) ansetzen können. Bei offener Funktion  $G(s)$  erfüllt (61) die partielle Differentialgleichung (2) für  $x \neq kd$ . Für  $x = kd$  ist dann noch ein Knick in der Flußverteilung entsprechend der Absorptionsstärke der Platten bei der Energie  $E$  zu fordern [s. (47) in [1]], d.h. wir bestimmen  $G(s)$ , indem wir (61) in die Knickbedingung einsetzen und erhalten:

$$\int_W \varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon) G(s) ds + \int_W p(\varepsilon) \varepsilon e^{-\varepsilon} M(-s, 2, \varepsilon) G(s) h(s) ds = 0.$$

Das ist aber unsere Integralgleichung (60).

Die verallgemeinerte Laplace-Transformation mit ihrer inversen Transformation (57) ist aber noch so gut wie garnicht untersucht [10], [11], so daß wir das eigentliche Thermalisationsproblem (19) nicht so elegant und explizit behandeln können wie das Problem der asymptotischen Flußverteilung, das in [1] behandelt wurde. Wir können keine explizite analytische Lösung von (19) angeben und müssen (50), (51) numerisch durch einen Iterationsprozeß lösen.

In den Abb. 2a und 2b liegt das Ergebnis einer numerischen Auswertung der Formeln (50) und (51) vor. Bei diesem Verfahren wurde die Funktion  $\Sigma \varphi_{N_0 m}$  geschätzt und die Gln. (50), (51) einem Iterationsprozeß unterworfen. Mittels der ersten Schätzung gewinnt man einen Satz  $\varphi_{N_0 r}(\varepsilon)$ , den man nach Summation über  $r$  als verbesserte Schätzung verwenden kann. Man erkennt aus Formel (59), daß auch hier wieder so viele Komponenten mitzunehmen sind, daß  $[\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2]^{-1} \approx 10^2$  ist, wie es auch schon in [1], Fall  $\bar{p} = p_0 e^{u\gamma}$ , geschehen ist. Es wurde angenommen:

$$\left. \begin{aligned} p_t &= 0,12 \\ \frac{d}{x_0} &= 3,8 \\ N_0 &= \infty \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{die Reihe wurde bei } r=6 \text{ wegen} \\ &\alpha_{N_0 r}^2 x_0^2 \approx 10^2 \text{ abgebrochen.} \end{aligned}$$

Man erkennt bei der unteren Kurve, die das Spektrum an den Platten  $x = kd$  wiedergibt, ein Maximum, das etwas in Richtung höherer Energien verschoben ist,

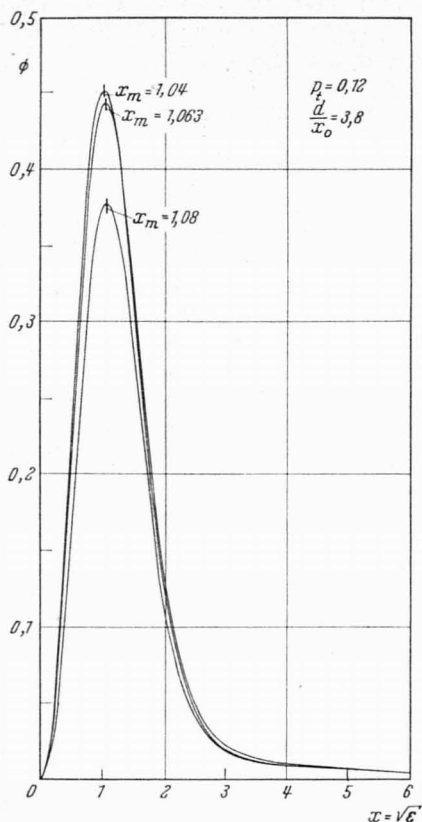


Abb. 2a. Das Neutronenspektrum eines heterogenen Plattenreaktors mit Lage der Maxima ( $x_m$ ) als Funktion von  $x = \sqrt{E}/T$ . Obere Kurve: Mitte des Moderators. Untere Kurve: Oberfläche der Brennstoffplatten. Mittlere Kurve: Vergleichsspektrum eines homogenen Reaktors, bei dem die Brennstoffplatten homogenisiert sind

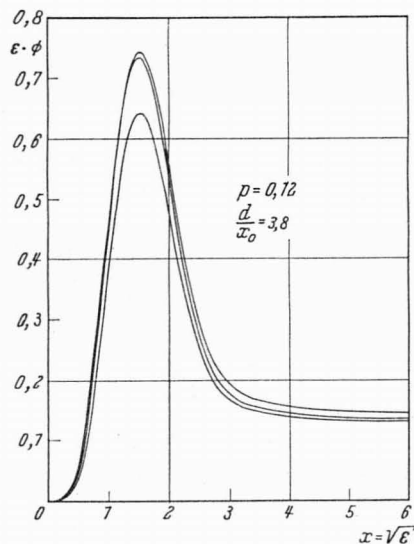


Abb. 2b. Das mit  $\epsilon$  multiplizierte Neutronenspektrum eines heterogenen Plattenreaktors (s. Abb. 2a)

wenn man es mit der mittleren Kurve vergleicht, die den Spektralverlauf in einem homogenen Reaktor wiedergibt, bei dem die Brennstoffplatten gleichmäßig über den Reaktor homogenisiert sind. Die obere

Kurve, die das Spektrum an den Punkten  $x = kd + \frac{d}{2}$ , die in der Mitte des Moderatorvolumens liegen, wiedergibt, hat gegenüber dem Spektrum für den homogenisierten Reaktor, ein etwas zu tieferen Energien verschobenes Maximum. Der Absolutwert im Moderator ist jeweils größer als an den Platten, so daß ein Dichtegradient zustande kommt, der die Neutronen in die Brennstoffplatten diffundieren läßt. Abb. 2a gibt den Flußverlauf selbst wieder, in Abb. 2b ist die Größe  $\epsilon \Phi$  aufgetragen. Man erkennt den Übergang in das Gebiet hoher Energien, wo  $\Phi \sim 1/\epsilon$  ist. Für höhere Werte von  $p_1$  divergiert der Iterationsprozeß, so daß man schon dann anders vorgehen muß. Hierüber wird in Kürze berichtet werden.

## VII. Schlußbemerkung

Das hier behandelte Modell für das Problem der Neutronenthalmalisation stellt eine starke Idealisierung dar. Man wird bei genauer Erfassung aller physikalischer Einzelheiten weder mit dem Modell des schweren Gases noch mit der Diffusionsnäherung rechnen dürfen. Indessen werden die erhaltenen Resultate für sehr viele Anwendungspunkte ausreichend genau sein. Man wird als nächsten Schritt den entwickelten Formalismus jetzt auf zweidimensionale Strukturen, wie sie z. B. bei zylindrischen Brennstoffstäben gegeben sind, verallgemeinern und eventuell den Streuprozeß durch explizite Berücksichtigung der Integralgleichungsform (3) sauberer beschreiben. Dabei wird man immer wieder auf die Schwierigkeiten stoßen, die in Kapitel III erläutert sind, nämlich, daß das Thermalisationsproblem ein Gleichgewichtsproblem an ein Ausgleichsproblem koppelt. Die weitgehende analytische Behandlung des hier vorgelegten Thermalisationsmodells erlaubt indessen ein tiefergehendes Verständnis des dabei wirksamen mathematischen Mechanismus, so daß man Konvergenzschwierigkeiten usw. wird leichter beheben können. Neben dem Bereitstellen von Spektrumsverläufen, die bei praktischen Anwendungen oft ausreichend sein werden, war die Durchleuchtung des oben erwähnten mathematischen Mechanismus Hauptziel dieser Arbeit.

Den Damen bzw. Herren H. STITGEN, H. CARTER<sup>1</sup>, A. DÖDERLEIN und J. WEHE<sup>1</sup> bin ich für wertvolle Hilfe bei der Bewältigung der umfangreichen numerischen Rechnungen dankbar.

**Literatur:** [1] HÄFELE, W.: Nukleonik 1, 197—208 (1959). — [2] Proceedings of the Neutron Thermalization Conference, ORNL-2739 April 28—30, 1958, Gatlingburg, Tennessee. — [3] HURWITZ, H., M. S. NELKIN and G. J. HARBETLER: Nucl. Sci. and Engng. 1, 280—312 (1956). — [4] MEETZ, K.: Z. Naturforsch. 12a, H. 9 (1957). — [5] DRESNER, L.: Nukleonik 2, 45—47 (1960). — [6] COHEN, E. R.: Nucl. Sci. and Engng. 2, 227—245 (1957). — [7] HÄFELE, W., and L. DRESNER: Nucl. Sci. and Engng. 7, 304—312 (1959). — [8] JAHNKE-EMDE: Tafeln höherer Funktionen, S. 271. Leipzig: B. G. Teubner 1948. — [9] WILKINS jr., J. E.: CP-2481 (unclassified). — [10] TRICOMI, G.: Private Mitteilung vom 29. 8. 1959. — [11] ERDELY, A.: Private Mitteilung vom 9. 12. 1959. — [12] WESTCOTT, CH.: Effective Cross Section Values for well moderated Thermal Reactor Spectra, Chalk River, Ontario, August 1, 1958, CRRP-787 (AECL-670).

<sup>1</sup> Oak Ridge, National Laboratorium.

N11<05394663085