

KFK - 13

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.

-Karlsruhe-

KBB

12.1.1959

Institut für Neutronenphysik
und Reaktortechnik

Bericht Nr. 13

Über die Wirksamkeit von Abschaltstäben
thermischer Reaktoren nach der Zweigruppentheorie

von

R. Fröhlich⁺⁾

⁺⁾ delegiert von der Firma Interatom-GmbH. Bensberg

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft mbH.

TA 7.005

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.

-Karlsruhe-

12.1.1959

Institut für Neutronenphysik
und Reaktortechnik

Bericht Nr. 13

Über die Wirksamkeit von Abschaltstäben
thermischer Reaktoren nach der Zweigruppentheorie

von

R. Fröhlich⁺⁾

⁺⁾ delegiert von der Firma Interatom-GmbH. Bensberg

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

K E R N R E A K T O R

Bau- und Betriebs-Gesellschaft mbH.

Zusammenfassung

Betrachtet wird ein zylindrischer Reaktor, in den man parallel zur Achse eine Anzahl von Abschaltstäben ganz einführt. Zur Bestimmung der hierdurch bewirkten Reaktivitätsänderung leiten wir im Rahmen der sogenannten Zweigruppentheorie für beliebige Abschaltstabkonfigurationen Eigenwertgleichungen ab. Im Falle der Abschaltstabkonfiguration des FR 2 wurden diese Gleichungen für luftgefüllte, H_2O -gefüllte und D_2O -gefüllte Cadmiumstäbe in Abhängigkeit vom einheitlichen Stabradius ausgewertet. Für die luftgefüllten Cadmiumstäbe des FR 2 ergab sich eine bemerkenswerte Abhängigkeit der Abschaltwirkung vom Fermialter der thermischen Neutronen. Schließlich sind zum Vergleich die Reaktivitätsänderungen im Falle eines einzigen konzentrischen Abschaltstabes mit Hilfe von Eigenwertgleichungen ermittelt worden, die innerhalb der Zweigruppentheorie exakt gültig sind. Einem Vergleich der numerischen Ergebnisse mit entsprechenden, innerhalb der Eingruppentheorie gewonnenen Ergebnissen wurde besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	3
I. Mathematische Formulierung des Problems	5
II. Allgemeiner Lösungsansatz für die Gleichungen der Zweigruppentheorie	7
III. Bestimmung der allgemeinen Lösung durch Separation in Zylinderkoordinaten	8
IV. Zusammenstellung von einigen wichtigen Formeln für Besselfunktionen	10
V. Der ungestörte Reaktor	11
VI. Die Extrapolationslängen für den schnellen und thermischen Fluß innerhalb der Abschaltstäbe	12
VII. Ein konzentrischer Abschaltstab	13
VIII. Ein Kranz von n gleichberechtigten Abschaltstäben	15
IX. N Kränze von Abschaltstäben; die allgemeinste Anordnung der Abschaltstäbe	19
X. Numerische Auswertung	24

Einleitung

Lassen Sie uns einen zylindrischen Reaktor betrachten, dessen Radius mit R und dessen Höhe mit H bezeichnet seien. Führt man in einen solchen homogenen Reaktor parallel zur Achse eine Anzahl von zylindrischen Abschaltstäben ein, die den Reaktor in seiner ganzen Höhe durchsetzen, so bewirkt dies einen Reaktivitätsverlust, der von uns ermittelt werden soll.

Wir wollen diese Frage als Randwertproblem der Diffusionsgleichungen für zwei Gruppen von Neutronen behandeln. Dabei betrachten wir den Reaktor aus Gründen der Einfachheit ohne Reflektor; wir können uns jedoch vorstellen, daß durch geeignete Wahl von R und H eine Reflektorersparnis berücksichtigt ist. Bezeichnet k_0 den kritischen Multiplikationsfaktor (Eigenwert) für den ungestörten Reaktor und k den entsprechenden Wert für den Reaktor mit ganz eingefahrenen Abschaltstäben, so ist der Reaktivitätsverlust Δk gegeben durch

$$\Delta k = k - k_0$$

Insbesondere liegt uns daran, geeignete Formeln zur numerischen Auswertung für die praktisch wichtigen Abschaltstabkonfigurationen bereitzustellen. Man könnte das hier gewählte Verfahren zur Bestimmung der Reaktivitätsänderung als ein analytisches Kennzeichnen. Im Gegensatz dazu stehen die rein numerischen Verfahren, die unmittelbar an die Differentialgleichungen der Zweigruppentheorie anknüpfen.

L.W. Nordheim und R. Scalettar¹⁾ haben wohl erstmals im Rahmen der Eingruppentheorie eine Singularitätenmethode für besondere Konfigurationen von Abschaltstäben entwickelt. W. Häfele²⁾ greift diese Methode von allgemeineren Gesichtspunkten her auf, gibt eine tiefergehende Begründung und erzielt sehr umfangreiche numerische Ergebnisse, die insbesondere Licht auf eine optimale Stabanordnung werden. Nordheim und Scalettar beschäftigen sich auch mit einer Übertragung der Singularitätenmethode auf die Zweigruppentheorie. Die entscheidende Frage bei einem solchen Vorhaben ist die Auswahl geeigneter Randbedingungen für den schnellen Fluß auf der Oberfläche der Abschaltstäbe. Nordheim und Scalettar fordern als einen Ersatz für diese Randbedingungen die Endlichkeit des schnellen Flusses in den Zentren der Abschaltstäbe. Dies führt aber, wie

1) Literaturverzeichnis (4)
2) " (3)

R.L. Murray und J.W. Niestlie¹⁾ gezeigt haben, zu einer Überschätzung der Abschaltwirkung. Die beiden letzteren Autoren behandeln in der genannten Arbeit sehr ausführlich den Fall eines konzentrischen Abschaltstabes; dabei wird auch die Frage geeigneter Randbedingungen für den schnellen Fluß auf der Oberfläche des konzentrischen Abschaltstabes im einzelnen erörtert. Außerdem enthält diese Arbeit interessante Vergleiche mit experimentellen Untersuchungen. J. Codd und C.A. Rennie²⁾ behandeln mit Hilfe der Zweigruppentheorie einige wichtige Abschaltstabkonfigurationen. Im Anschluß an diese Untersuchungen hat T. Auerbach in einer ausführlichen Arbeit mit dem Titel "Control Rod Theory", die er uns freundlicher Weise im Manuskript zur Verfügung stellte, für sehr allgemeine Konfigurationen die Eigenwertgleichungen aufgestellt. Ich kann die Arbeit von T. Auerbach leider nicht näher zitieren, da ich nicht weiß, ob sie inzwischen erschienen ist.

In der vorliegenden Arbeit habe ich für beliebige Abschaltstabkonfigurationen mit Hilfe einer zweigruppentheoretischen Singularitätenmethode allgemeine Formeln zur Bestimmung der Reaktivitätsänderung abgeleitet. Diese gestatten, die Abschaltwirkung mit erheblich größerer Genauigkeit zu ermitteln, als das mit Hilfe der Eingruppentheorie möglich war. Darüber hinaus habe ich Wert darauf gelegt, die Formeln so allgemein aufzuschreiben, daß z.B. die Verbesserung der Abschaltwirkung bestimmt werden kann, die durch Füllung der Cadmiumrohre mit einem Moderator (etwa D_2O oder H_2O) bewirkt wird. Solche Feinheiten können innerhalb der Eingruppentheorie natürlich nicht berücksichtigt werden.

Die Hauptschwierigkeit war die Auswahl geeigneter Randbedingungen für den schnellen Fluß auf der Oberfläche exzentrischer Abschaltstäbe. Ich habe den Eindruck, daß die von mir verwendeten Integralbedingungen der Sache sehr angemessen sind.

Das konkrete Ziel dieser Arbeit war, die durch das Einfahren der Abschaltstäbe des FR 2 bewirkte Reaktivitätsänderung nach den Methoden der Zweigruppentheorie zu ermitteln. Es ergab sich, daß die ganz eingefahrenen 16 Abschaltstäbe des FR 2 folgende Reaktivitätsänderung bewirken:

1) Literaturverzeichnis (8)

2) " (6)

$$\Delta k_{\text{Zweigruppentheorie}} = 0,1546$$

Der von W. Häfele ermittelte, von vornherein nur als untere Schranke gedachte Eingruppenwert liegt wesentlich darunter:

$$\Delta k_{\text{Eingruppentheorie}} = 0,1141$$

Die numerische Auswertung der angegebenen Formeln ist selbst für kompliziertere Abschaltstabkonfigurationen mit Hilfe einer kleineren elektronischen Rechenanlage ohne weiteres möglich. Einzelheiten zur numerischen Auswertung können im Abschnitt X nachgelesen werden.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. W. Häfele für die Anregung zu dieser Arbeit und seine mir sehr wertvollen Ratschläge während ihrer Abfassung.

I. Mathematische Formulierung des Problems

Bezeichnet man mit ϕ_S den schnellen und mit ϕ_T den thermischen Neutronenfluß, so lauten die Gleichungen der Zweigruppentheorie folgendermaßen:

$$D_S \Delta \phi_S - \frac{D_S}{\tau} \phi_S + k \frac{D_T}{L^2} \phi_T = 0 \quad (1)$$

$$D_T \Delta \phi_T - \frac{D_T}{L^2} \phi_T + \frac{D_S}{\tau} \phi_S = 0 \quad (2)$$

Diese beiden Differentialgleichungen stellen in bekannter Weise die Bilanzen für die schnellen und thermischen Neutronen dar. Dabei sind D_S und D_T die Diffusionskonstanten der schnellen bzw. thermischen Neutronen, L^2 das Quadrat der Diffusionslänge der thermischen Neutronen, τ das Fermialter der thermischen Neutronen und k der Vermehrungsfaktor.

Die Aufgabe besteht nun darin, das folgende Randwertproblem zu lösen: Es ist der kleinste positive Eigenwert k zu ermitteln, für den es innerhalb des mit den zylindrischen Abschaltstabaussparungen versehenen Reaktortopfes nichttriviale (positive) Lösungen ϕ_S und ϕ_T von (1) und (2) gibt, die folgende Randbedingungen befriedigen:

1. $\phi_S = \phi_T = 0$ auf dem oberen und unteren Deckel und auf der äußeren Mantelfläche des Reaktortopfes. Wir wollen dabei annehmen, daß R und H effektive Abmessungen des Reaktortopfes sind, bei denen also schon eine Extrapolationslänge berücksichtigt ist. Damit machen wir implizit die keineswegs richtige Annahme, daß schneller und thermischer Fluß dieselbe Extrapolationslänge haben; bei größeren Reaktoren ist diese Annahme jedoch statthaft.

2. Die Randbedingungen für den schnellen und thermischen Fluß auf der Oberfläche der Abschaltstäbe sind nicht ganz so einfach zu formulieren. Wir betrachten zunächst den Fall eines konzentrischen Abschaltstabes: Für den thermischen Fluß muß auf der Oberfläche der Cadmium-Abschaltstäbe gelten:

$$\frac{\partial \phi_T}{\partial n} = \frac{\phi_T}{d_T} .$$

Dabei ist n die vom Abschaltstab weggerichtete Normale seiner zylindrischen Oberfläche. d_T bezeichnet die Extrapolationslänge der thermischen Neutronen für schwarze, zylindrische Absorber. d_T findet sich als Funktion des Abschaltstabradius etwa im Reaktorhandbuch II, Seite 395. Die Randbedingung für den schnellen Fluß hängt davon ab, ob der konzentrische Abschaltstab schnelle Neutronen absorbiert. Zum Beispiel wirkt ein mit D_2O oder H_2O gefülltes Cadmium-Rohr in diesem Sinn als ein Absorber, da die schnellen Neutronen abgebremst werden und als thermische Neutronen innerhalb des Rohres verloren sind. Wir fordern für den schnellen Fluß auf der Oberfläche des Abschaltstabes

$$\frac{\partial \phi_S}{\partial n} = \frac{\phi_S}{d_S} .$$

d_S bezeichnet die Extrapolationslänge für den schnellen Fluß. Zur Bestimmung von d_S und ebenso von d_T wird in einem besonderen Abschnitt noch einiges zu sagen sein.

Für exzentrische Abschaltstäbe liegen die Verhältnisse nicht so einfach. Die Randbedingungen sind im allgemeinen nicht zentralsymmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt eines solchen Stabes. Auch müßte man sich für volle Cadmium-Stäbe, luftgefüllte oder mit einem Moderator gefüllte Cadmium-Rohre genauere Vorstellungen über den Flußverlauf in der Nähe der Abschaltstäbe machen. Wir umgehen diese Schwierigkeiten, indem wir

in der von uns gewählten Näherung anstelle der lokalen Randbedingungen Integralbedingungen, erstreckt über die Oberflächen der Abschaltstäbe, verwenden. Wir setzen:

$$\int \frac{\partial \phi_T}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{d_T} \int \phi_T d\sigma, \quad \int \frac{\partial \phi_S}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{d_S} \int \phi_S d\sigma$$

d_T und d_S sind dabei die Extrapolationslängen des thermischen und schnellen Flusses für einen konzentrischen Abschaltstab gleicher Dicke.

II. Allgemeiner Lösungsansatz für die Gleichungen der Zweigruppentheorie

Wir machen wir üblich den Ansatz

$$\Delta \phi_S + B^2 \phi_S = 0, \quad \Delta \phi_T + B^2 \phi_T = 0.$$

Geht man damit in (1) und (2) ein, so erhält man die Gleichungen

$$-(D_S B^2 + \frac{D_S}{\tau}) \phi_S + k \frac{D_T}{L^2} \phi_T = 0 \quad (1')$$

$$\frac{D_S}{\tau} \phi_S - (D_T B^2 + \frac{D_T}{L^2}) \phi_T = 0 \quad (2')$$

Da ϕ_S und ϕ_T nicht beide identisch verschwinden sollen, muß B^2 der folgenden quadratischen Gleichung genügen

$$B^4 + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right) B^2 - \frac{k-1}{\tau L^2} = 0$$

Die mit μ^2 und $-\nu^2$ bezeichneten Wurzeln dieser Gleichung lauten:

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k-1)}{\tau L^2}} \right]$$

$$-\nu^2 = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} \right)^2 + \frac{4(k-1)}{\tau L^2}} \right]$$

Bezeichnen wir mit X und Y die Lösungen der beiden Gleichungen

$$\Delta X + \mu^2 X = 0, \quad \Delta Y - \nu^2 Y = 0 \quad (3)$$

so ergibt sich

$$\phi_S = X_S + Y_S, \quad \phi_T = X_T + Y_T$$

Durch Einsetzen in (2') erhält man schließlich die Bedingungen

$$X_T = S_1 X_S \quad \text{mit} \quad S_1 = \frac{D_S}{\tau D_T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L^2} + \mu^2}$$

$$Y_T = S_2 Y_S \quad \text{mit} \quad S_2 = \frac{D_S}{\tau D_T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L^2} - \nu^2}$$

so daß man jetzt einfach schreiben kann

$$\phi_S = X + Y, \quad \phi_T = S_1 X + S_2 Y$$

Zur späteren Verwendung notieren wir uns schließlich noch die Relation

$$k = (\mu^2 \tau + 1) (\mu^2 L^2 + 1).$$

III. Bestimmung der allgemeinen Lösung durch Separation
in Zylinderkoordinaten

Nehmen wir an, daß sich der Ursprung unseres Koordinatensystems im Mittelpunkt des zylindrischen Reaktortopfes befindet und die z-Achse mit dessen Achse zusammenfällt, so können wir das Verschwinden des schnellen und des thermischen Flusses auf dem oberen und unteren Deckel des Reaktortopfes durch folgenden Separationsansatz für die Lösungen der Gleichungen (3) erreichen:

$$X = X_r (r, \varphi) \cos \left(\frac{\pi}{H} z \right), \quad Y = Y_r (r, \varphi) \cos \left(\frac{\pi}{H} z \right).$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Gleichungen (3) ein, so ergeben sich für X_r und Y_r die Differentialgleichungen

$$\Delta_r X_r + \mu_r^2 X_r = 0 \quad (4) \quad \Delta_r Y_r - \nu_r^2 Y_r = 0 \quad (5)$$

Dabei ist

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\mu_r^2 = \mu^2 - \left(\frac{\pi}{H} \right)^2, \quad \nu_r^2 = \nu^2 + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2.$$

Die allgemeinen Lösungen von (4) und (5) lauten:

$$X_r (r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ A_m J_m (\mu_r r) + B_m N_m (\mu_r r) \right\} e^{im\varphi}$$

$$Y_r (r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ C_m I_m (\nu_r r) + D_m K_m (\nu_r r) \right\} e^{im\varphi}$$

J_m , N_m , I_m und K_m sind die bekannten Besselfunktionen m-ter Ordnung. Anstelle von N_m (Neumann'sche Funktion m-ter Ordnung) findet man gelegentlich auch die Bezeichnung Y_m .

IV. Zusammenstellung von einigen wichtigen Formeln für Besselfunktionen

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x), \quad N_{-m}(x) = (-1)^m N_m(x)$$

$$I_{-m}(x) = I_m(x), \quad K_{-m}(x) = K_m(x)$$

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad N'_0(x) = -N_1(x), \quad I'_0(x) = I_1(x), \quad K'_0(x) = -K_1(x)$$

Verhalten für kleine Werte von x :

$$J_m(x) = \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m + O(x^{m+2}) \quad \text{für } m \cong 0$$

$$N_m(x) = -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} + O(x^{-m+1}) \quad \text{für } m > 0$$

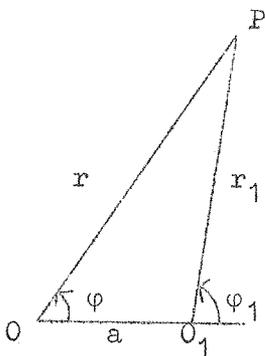
$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) + O(x) \quad \gamma \text{ ist die Eulersche Konstante}$$

$$I_m(x) = \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m + O(x^{m+2}) \quad \text{für } m \cong 0$$

$$K_m(x) = \frac{(m-1)!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} + O(x^{-m+1}) \quad \text{für } m > 0$$

$$K_0(x) = -\log\left(\frac{\gamma x}{2}\right) + O(x) \quad \gamma \text{ ist die Eulersche Konstante}$$

Additionstheoreme:



Figur 1

Für $r > a$ gelten die folgenden Theoreme, die nebenstehende Bezeichnungen verwenden.

$$e^{im\varphi_1} J_m(kr_1) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J_{\nu-m}(ka) J_{\nu}(kr) e^{i\nu\varphi}$$

$$e^{im\varphi_1} N_m(kr_1) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J_{\nu-m}(ka) N_{\nu}(kr) e^{i\nu\varphi}$$

$$e^{im\varphi_1} I_m(kr_1) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu-m} I_{\nu-m}(ka) I_{\nu}(kr) e^{i\nu\varphi}$$

$$e^{im\varphi_1} K_m(kr_1) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} I_{\nu-m}(ka) K_{\nu}(kr) e^{i\nu\varphi}$$

Für $r < a$ gelten entsprechende Additionstheoreme, die wir jedoch nicht benötigen werden.

Bemerkung: Die aufgeschriebenen Additionstheoreme für J_m und I_m bleiben auch für $r \leq a$ richtig (m ganzzahlig!).

V. Der ungestörte Reaktor

Wir verwenden für den von z unabhängigen Anteil des schnellen und thermischen Flusses die Bezeichnungen φ_S und φ_T , d.h. wir setzen

$$\phi_S = \varphi_S(r, \varphi) \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right), \quad \phi_T = \varphi_T(r, \varphi) \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right)$$

Mit dem Ansatz

$$\varphi_S = A J_0(\mu_r r) + B I_0(\nu_r r)$$

$$\varphi_T = AS_1 J_0(\mu_r r) + BS_2 I_0(\nu_r r)$$

ergibt sich aus $\varphi_S(R) = \varphi_T(R) = 0$

$$B = 0 \quad \text{und} \quad J_0(\mu_r R) = 0$$

d.h.

$$\mu_r = \frac{2,405}{R}$$

Die Flußverteilung lautet also

$$\phi_S = A J_0\left(\frac{2,405}{R} r\right) \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right), \quad \phi_T = S_1 \phi_S$$

Insbesondere ergibt sich folgender Ausdruck für k_0 (k_0 ist der Eigenwert k für den ungestörten Reaktor)

$$k_0 = \left\{ \left[\left(\frac{2,405}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 \right] \tau + 1 \right\} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{2,405}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 \right] L^2 + 1 \right\}$$

Z.B. erhält man mit den Werten

$$\tau = 119 \text{ cm}^2, L^2 = 133 \text{ cm}^2, R = 153,28 \text{ cm}, H = 255,83 \text{ cm}$$

folgenden Wert für k_0 :

$$k_0 = 1,1025$$

VI. Die Extrapolationslängen für den schnellen und thermischen Fluß innerhalb der Abschaltstäbe

Die Extrapolationslänge der thermischen Neutronen für schwarze Zylinder ist von mehreren Autoren auf Grund der Transporttheorie ermittelt worden. Den Zusammenhang zwischen der linearen Extrapolationslänge und dem Radius des Zylinders haben wir im Anhang (Abbildung 1) dargestellt. Und zwar sind beide Größen in Einheiten der mittleren Transportweglänge λ_{tr} des den Zylinder umgebenden Mediums aufgetragen.

Die Extrapolationslänge für die schnellen Neutronen kann in erster Näherung folgendermaßen ermittelt werden:

Innerhalb des konzentrischen Abschaltstabes mit dem Radius ρ gelte für den radialen Anteil des schnellen Flusses $\tilde{\varphi}_S$ die Diffusionsgleichung

$$\Delta \tilde{\varphi}_S - \alpha_r^2 \tilde{\varphi}_S = 0, \quad \alpha_r^2 = \frac{1}{\tau_i} + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2$$

τ_i ist das Quadrat der Diffusionslänge oder auch das Fermialter der thermischen Neutronen innerhalb des Abschaltstabes. Die (reguläre) Lösung dieser Diffusionsgleichung lautet

$$\tilde{\varphi}_S = C I_0(\alpha_r \rho),$$

Ist φ_S der schnelle Neutronenfluß außerhalb des Abschaltstabes und sind D_S und \tilde{D}_S die Diffusionskonstanten der schnellen Neutronen außerhalb und innerhalb des Abschaltstabes, so gelten für $r = \rho$ die Stetigkeitsbedingungen

$$\tilde{\varphi}_S(\rho) = \varphi_S(\rho)$$

$$\tilde{D}_S \tilde{\varphi}'_S(\rho) = D_S \varphi'_S(\rho)$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$d_S = \frac{\varphi_S(\rho)}{\varphi'_S(\rho)} = \frac{D_S}{\tilde{D}_S} \cdot \frac{I_0(\alpha_r \rho)}{I_1(\alpha_r \rho)} \quad (7)$$

Für ein nichtabsorbierendes Medium ist $\frac{1}{d_S} = 0$. Für genauere Bestimmungen von d_S vergleiche man Literaturverzeichnis (2), (5) und (7) und die dort zu findenden weiteren Hinweise.

VII. Ein konzentrischer Abschaltstab

Der Radius des konzentrischen Abschaltstabes sei ρ . Die allgemeine rotationssymmetrische Lösung der von z unabhängigen Gleichungen der Zweigruppentheorie lautet:

$$\begin{aligned} \varphi_S(r) &= A J_0(\mu_r r) + B N_0(\mu_r r) + C I_0(\nu_r r) + D K_0(\nu_r r) \\ \varphi_T(r) &= S_1 A J_0(\mu_r r) + S_1 B N_0(\mu_r r) + S_2 C I_0(\nu_r r) + S_2 D K_0(\nu_r r) \end{aligned} \quad (8)$$

Die Randbedingungen

$$\varphi_S(R) = \varphi_T(R) = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial r} \right|_{r=\rho} = \frac{1}{d_S} \varphi_S(\rho), \quad \left. \frac{\partial \varphi_T}{\partial r} \right|_{r=\rho} = \frac{1}{d_T} \varphi_T(\rho)$$

liefern ein lineares, homogenes Gleichungssystem für A , B , C und D . Durch Nullsetzen der Determinante bekommen wir die gewünschte Bestimmungsgleichung für den Eigenwert k , der sich in μ_r und ν_r verbirgt:

$$\text{Det } (k) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0$$

Die b_{ik} haben die folgende Bedeutung:

$$b_{11} = J_0(\mu_r R), \quad b_{12} = N_0(\mu_r R), \quad b_{13} = b_{14} = 0$$

$$b_{21} = b_{22} = 0, \quad b_{23} = I_0(\nu_r R), \quad b_{24} = K_0(\nu_r R)$$

$$b_{31} = \mu_r J_1(\mu_r \rho) + \frac{1}{d_S} J_0(\mu_r \rho), \quad b_{32} = \mu_r N_1(\mu_r \rho) + \frac{1}{d_S} N_0(\mu_r \rho)$$

$$b_{33} = -\nu_r I_1(\nu_r \rho) + \frac{1}{d_S} I_0(\nu_r \rho), \quad b_{34} = \nu_r K_1(\nu_r \rho) + \frac{1}{d_S} K_0(\nu_r \rho)$$

$$b_{41} = S_1(\mu_r J_1(\mu_r \rho) + \frac{1}{d_T} J_0(\mu_r \rho)), \quad b_{42} = S_1(\mu_r N_1(\mu_r \rho) + \frac{1}{d_T} N_0(\mu_r \rho))$$

$$b_{43} = S_2(-\nu_r I_1(\nu_r \rho) + \frac{1}{d_T} I_0(\nu_r \rho)), \quad b_{44} = S_2(\nu_r K_1(\nu_r \rho) + \frac{1}{d_T} K_0(\nu_r \rho))$$

Hat man den kleinsten Eigenwert k bestimmt, so kann man durch Lösung des genannten Gleichungssystems die Koeffizienten A, B, C und D ermitteln.

Die Formeln (8) geben dann die von z unabhängigen Anteile der Flußverläufe an.

Ist $\mu_r \rho \ll 1$ und auch $\nu_r \rho \ll 1$, so erhält man leicht eine Näherungsformel für $\Delta k = k - k_0$, die sich für den Fall $\frac{1}{d_S} = 0$ bei Glasstone und Edlund¹⁾ findet.

Es werde hier nur angemerkt, daß sich Δk nach der sog. korrigierten Eingruppentheorie folgendermaßen bestimmen läßt:

$$\Delta k = L^2 (\beta_r^2 - \beta_{r0}^2)$$

Dabei ist $\beta_{r0} = \frac{2,405}{R}$ und β_r ist der kleinste Eigenwert der Gleichung

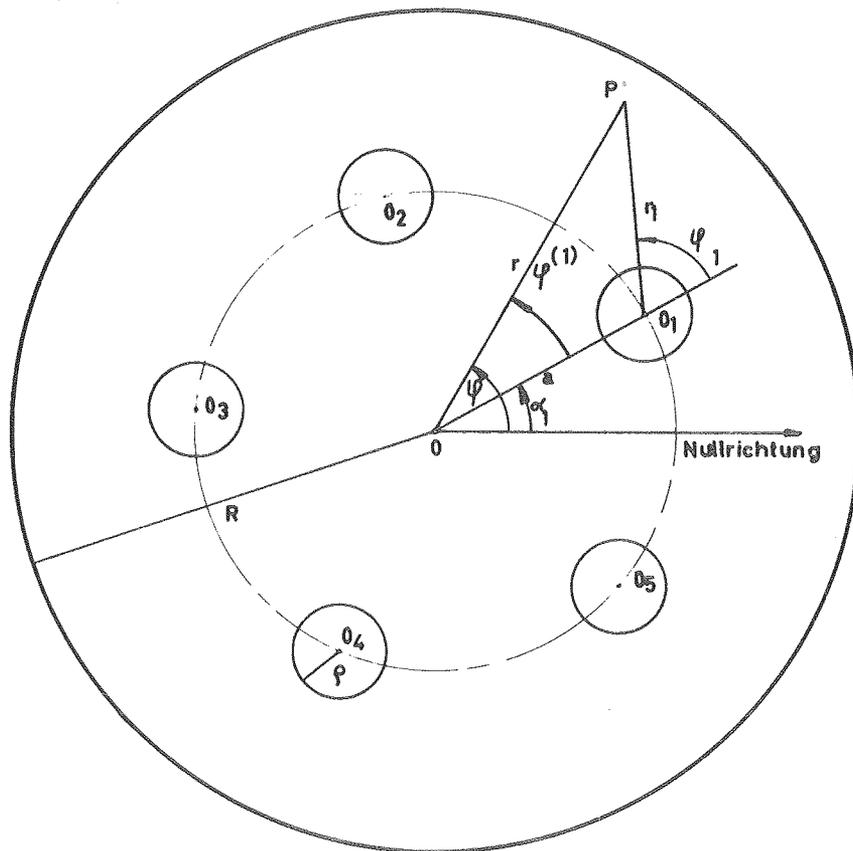
$$J_0(\beta_r R) N_0(\beta_r \rho_0) - J_0(\beta_r \rho_0) N_0(\beta_r R) = 0$$

Der effektive Radius ρ_0 hängt dabei folgendermaßen mit dem wirklichen Radius ρ des Abschaltstabes zusammen:

$$\rho_0 = \rho \left(1 - \frac{d_r}{\rho} \right)$$

1) Literaturverzeichnis (1)

VIII. Ein Kranz von n gleichberechtigten Abschaltstäben



Figur 2

Wir betrachten zunächst einmal den Fall, daß die Abschaltstäbe in den Eckpunkten eines regelmäßigen n -Ecks angebracht sind; wir machen jedoch schon jetzt darauf aufmerksam, daß die hierbei abgeleitete Eigenwertgleichung eine allgemeinere Gültigkeit besitzt. Zum Beispiel können die Abschaltstäbe in den Eckpunkten eines beliebigen Rechtecks angebracht sein, dessen Mittelpunkt mit dem Zentrum des Reaktors zusammenfällt. Wir werden am Ende dieses Abschnittes darauf zurückkommen.

Die von z unabhängigen Flüsse φ_S und φ_T gestatten die folgende Darstellung:

$$\varphi_S = \sum_{j=1}^n X_r(r_j, \varphi_j) + \sum_{j=1}^n Y_r(r_j, \varphi_j); \quad \varphi_T = S_1 \sum_{j=1}^n X_r(r_j, \varphi_j) + S_2 \sum_{j=1}^n Y_r(r_j, \varphi_j)$$

$$X_r(r_j, \varphi_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ A_m J_m(\mu_r r_j) + B_m N_m(\mu_r r_j) \right\} e^{im\varphi_j}$$

$$Y_r(r_j, \varphi_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ C_m I_m(\nu_r r_j) + D_m K_m(\nu_r r_j) \right\} e^{im\varphi_j}$$

Da die n Stäbe in den Eckpunkten eines regelmäßigen n -Ecks angebracht sind, brauchen die Koeffizienten A_m , B_m , C_m und D_m nicht mit einem Index j versehen werden. Die Bedeutung der Größen r_j und φ_j erkennt man aus der beigefügten Figur, in der der Fall $n = 5$ dargestellt ist.

Man kann nun durch genauere Betrachtung der Randbedingungen auf der Oberfläche der Abschaltstäbe und mit Hilfe der Darstellungen der Besselfunktionen für kleine Argumente zeigen, daß die Koeffizienten B_m und D_m für $m \neq 0$ klein gegenüber A_m und C_m und auch klein gegenüber B_0 und D_0 sind, sofern nur

$$\frac{\mu_r a}{2} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{\nu_r a}{2} \ll 1$$

gilt. Man kann sich auch etwas anschaulicher so ausdrücken: Für kleine Radien der Abschaltstäbe (bezogen auf die Abmessungen des Reaktors) kann der Singularitätsterm eines jeden Abschaltstabes als rotationssymmetrisch bezüglich der Achse des betreffenden Stabes angenommen werden. Wir werden aus diesem Grunde künftig voraussetzen

$$B_m = D_m = 0 \quad \text{für } m \neq 0$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme schreiben wir jetzt φ_S und φ_T auf Polarkoordinaten bezüglich O um. Dabei verwenden wir die Abkürzungen

$$\bar{A}_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m J_{1-m}(\mu_r a), \quad \bar{C}_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{1-m} C_m I_{1-m}(\nu_r a)$$

und beachten, daß $\varphi^{(j)} = \varphi - \alpha_j$ ist. Es ergibt sich damit:

$$\varphi_S = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\bar{A}_1 J_l(\mu_r r) + \bar{C}_1 I_l(\nu_r r) + B_0 J_l(\mu_r a) N_l(\mu_r r) + D_0 I_l(\nu_r a) K_l(\nu_r r) \right] \delta_l \right\} e^{il\varphi}$$

$$\varphi_T = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[S_1 \bar{A}_1 J_l(\mu_r r) + S_2 \bar{C}_1 I_l(\nu_r r) + S_1 B_0 J_l(\mu_r a) N_l(\mu_r r) + S_2 D_0 I_l(\nu_r a) K_l(\nu_r r) \right] \delta_l \right\} e^{il\varphi}$$

wobei δ_l folgende Summe darstellt:

$$\delta_l = \sum_{j=1}^n e^{-il\alpha_j}$$

Z.B. gilt für die Anordnung in einem regelmäßigen n -Eck und $\alpha_1 = 0$:

$$\delta_l = \begin{cases} n & \text{für } l = g n \\ 0 & \text{für } l \neq g n \end{cases}, \quad g \text{ ganze Zahl}$$

Aus $\varphi_S(R, \varphi) = \varphi_T(R, \varphi) = 0$ ergibt sich, daß für jedes l in den zuletzt aufgeschriebenen Darstellungen für φ_S und φ_T die geschweiften Klammern verschwinden müssen. Daraus folgt: Ist $\delta_l \neq 0$, d.h. tritt das betreffende Glied in der Summe faktisch auf, so muß gelten

$$\bar{A}_l = -B_0 \frac{N_l(\mu_r R)}{J_l(\mu_r R)} J_l(\mu_r a), \quad \bar{C}_l = -D_0 \frac{K_l(\nu_r R)}{I_l(\nu_r R)} I_l(\nu_r a)$$

Beschreiben wir jetzt die bei den O_j singulären Terme wieder von dort aus, so ergibt sich

$$\varphi_S = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\bar{A}_l J_l(\mu_r r) + \bar{C}_l I_l(\nu_r r) \right] \delta_l \right\} e^{il\varphi} + \sum_{j=1}^n \left[B_0 N_0(\mu_r r_j) + D_0 K_0(\nu_r r_j) \right] \quad (9)$$

$$\varphi_T = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[S_1 \bar{A}_l J_l(\mu_r r) + S_2 \bar{C}_l I_l(\nu_r r) \right] \delta_l \right\} e^{il\varphi} + \sum_{j=1}^n \left[S_1 B_0 N_0(\mu_r r_j) + S_2 D_0 K_0(\nu_r r_j) \right]$$

Wir gehen jetzt daran, die beiden folgenden Integralbedingungen zu befriedigen

$$a.) \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial r_j} \right|_{r_j = \rho} d\varphi_j = \frac{1}{d_S} \int_0^{2\pi} \varphi_S \Big|_{r_j = \rho} d\varphi_j$$

$$b.) \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial \varphi_T}{\partial r_j} \right|_{r_j = \rho} d\varphi_j = \frac{1}{d_T} \int_0^{2\pi} \varphi_T \Big|_{r_j = \rho} d\varphi_j$$

Ist $\rho \ll r_{j1}$, wobei r_{j1} der Abstand von O_j und O_1 bedeutet, so gilt in sehr guter Näherung

$$a.) \quad B_0 \mu_r N_0'(\mu_r \rho) + D_0 \nu_r K_0'(\nu_r \rho) = \frac{1}{d_S} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l \left[\bar{A}_l J_l(\mu_r a) + \bar{C}_l I_l(\nu_r a) \right] e^{il\alpha_1} + B_0 N_0(\mu_r \rho) + D_0 K_0(\nu_r \rho) + \sum_{j=2}^n \left[B_0 N_0(\mu_r r_{j1}) + D_0 K_0(\nu_r r_{j1}) \right] \right\}$$

$$b.) \quad S_1 B_0 \mu_r N'_0(\mu_r \rho) + S_2 D_0 \nu_r K'_0(\nu_r \rho) = \frac{1}{d_T} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l \left[S_1 \bar{A}_l J_l(\mu_r a) + S_2 \bar{C}_l I_l(\nu_r a) \right] e^{il\alpha_1} \right. \\ \left. + S_1 B_0 N_0(\mu_r \rho) + S_2 D_0 K_0(\nu_r \rho) + \sum_{j=2}^n \left[S_1 B_0 N_0(\mu_r r_{j1}) + S_2 D_0 K_0(\nu_r r_{j1}) \right] \right\}$$

Dabei haben wir a.) und b.) jeweils nur für $j = 1$ aufgeschrieben, da die übrigen j keine neuen Bedingungen ergeben.

Drücken wir in den beiden letzten Bedingungen \bar{A}_l und \bar{C}_l durch B_0 und D_0 aus, so erhalten wir für B_0 und D_0 ein lineares homogenes Gleichungssystem. Durch Nullsetzen der Determinante erhalten wir schließlich die gewünschte Bestimmungsgleichung für den Eigenwert k , der sich in μ_r und ν_r verbirgt. Wir haben dabei von den Reaktionen $N'_0 = -N_1$ und $K'_0 = -K_1$ Gebrauch gemacht.

$$\begin{aligned} & S_2 \left[\mu_r N_1(\mu_r \rho) + \frac{1}{d_S} F(n, R, a) \right] \cdot \left[\nu_r K_1(\nu_r \rho) + \frac{1}{d_T} G(n, R, a) \right] \\ - & S_1 \left[\mu_r N_1(\mu_r \rho) + \frac{1}{d_T} F(n, R, a) \right] \cdot \left[\nu_r K_1(\nu_r \rho) + \frac{1}{d_S} G(n, R, a) \right] = 0 \end{aligned}$$

Dabei bedeuten die verwendeten Abkürzungen folgendes:

$$F(n, R, a) = N_0(\mu_r \rho) + \sum_{j=2}^n N_0(\mu_r r_{j1}) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{N_1(\mu_r R)}{J_1(\mu_r R)} J_1^2(\mu_r a) \delta_l e^{il\alpha_1}$$

$$G(n, R, a) = K_0(\nu_r \rho) + \sum_{j=2}^n K_0(\nu_r r_{j1}) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{K_1(\nu_r R)}{I_1(\nu_r R)} I_1^2(\nu_r a) \delta_l e^{il\alpha_1}$$

Bei der numerischen Auswertung braucht von den in F bzw. G auftretenden unendlichen Summen, falls a nicht zu sehr in der Nähe von R liegt, nur das Glied für $l = 0$ berücksichtigt zu werden, zumal bei Anordnung der Abschaltstäbe in einem regelmäßigen n -Eck nur jedes n -te Glied der Summe von Null verschieden sein kann.

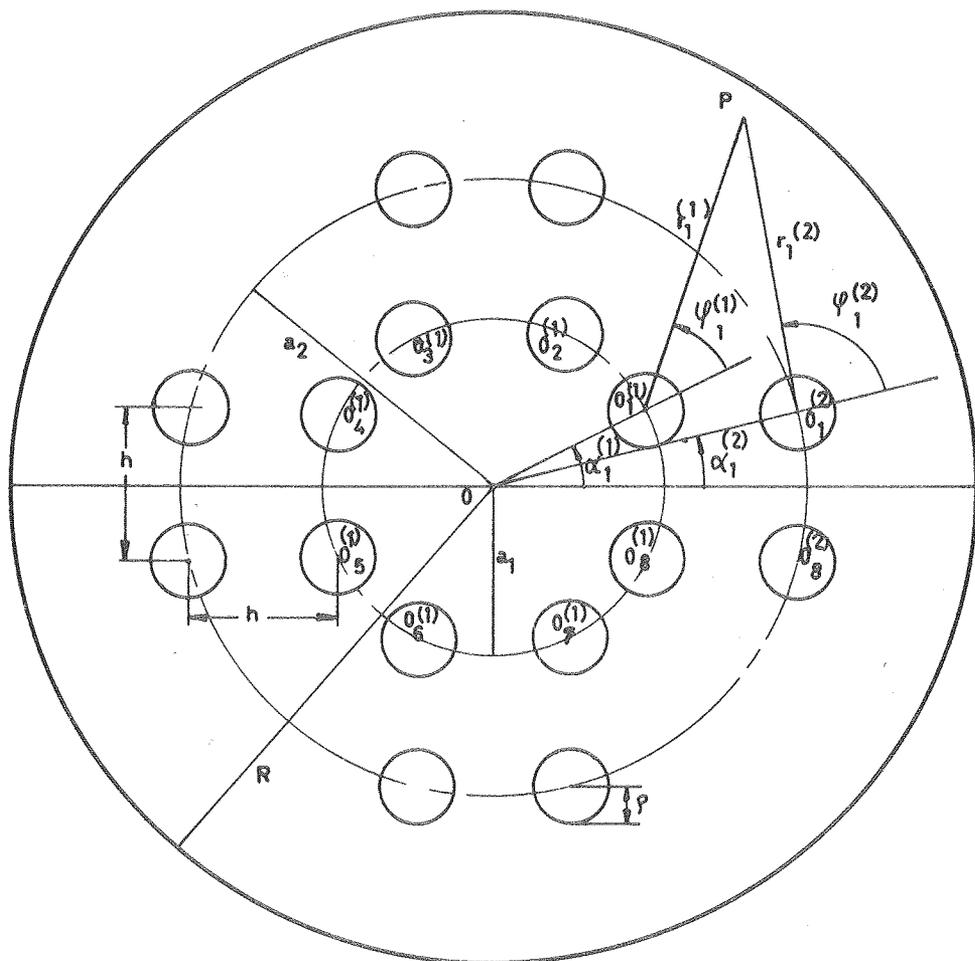
Die Ausdrucksweise "gleichberechtigte" Abschaltstäbe bedeutet nicht notwendig, daß die Stäbe in den Eckpunkten eines regelmäßigen n -Ecks angebracht sein müssen. Man kann sich besonders einfach von Hand der Formeln (9) überzeugen, daß die eingerahmte Eigenwertgleichung auch für andere wichtige Konfigurationen gilt. Allgemein bedeutet die Ausdrucksweise "gleichberechtigt", daß die Gruppe der direkten und indirekten Decktransformationen

der Abschaltstabkonfiguration transitiv bezüglich dieser Stäbe sein muß.

IX. N Kränze von Abschaltstäben; die allgemeinste Anordnung der Abschaltstäbe.

Die n_p Abschaltstäbe des p -ten Kranzes mögen bezüglich der Gesamtkonfiguration gleichberechtigt sein; sie haben also insbesondere den gleichen Abstand a_p von 0 und den gleichen Radius ρ_p .

In der Figur 3 ist der Typus der Abschaltstabkonfiguration des FR 2 dargestellt. Es handelt sich dabei um 2 Kränze von Abschaltstäben mit dem einheitlichen Radius ρ . n_1 und n_2 sind beide gleich acht. Einige weitere im folgenden gebrauchte Bezeichnungen sind der Figur 3 zu entnehmen. Die 16 Abschaltstäbe sind ersichtlich in vier Vierergruppen angeordnet, so daß die vier Stäbe einer Gruppe in den Eckpunkten eines Quadrates der Seitenlänge h angebracht sind.



Figur 3

Im Anschluß an die Formeln (9) lassen sich auch hier der schnelle und der thermische Fluß nach Berücksichtigung der Randbedingungen $\varphi_S(R, \varphi) = 0$, $\varphi_T(R, \varphi) = 0$ folgendermaßen darstellen:

$$(10) \quad \varphi_S = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[\bar{A}_l J_l(\mu_r r) + \bar{C}_l I_l(\nu_r r) \right] e^{il\varphi} + \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^{n_p} \left[B_o^{(p)} N_o(\mu_r r_j^{(p)}) + D_o^{(p)} K_o(\nu_r r_j^{(p)}) \right]$$

$$\varphi_T = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[S_1 \bar{A}_l J_l(\mu_r r) + S_2 \bar{C}_l I_l(\nu_r r) \right] e^{il\varphi} + \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^{n_p} \left[S_1 B_o^{(p)} N_o(\mu_r r_j^{(p)}) + S_2 D_o^{(p)} K_o(\nu_r r_j^{(p)}) \right]$$

\bar{A}_l und \bar{C}_l sind folgendermaßen erklärt:

$$\bar{A}_l = - \frac{N_l(\mu_r R)}{J_l(\mu_r R)} \sum_{p=1}^N \delta_l^{(p)} B_o^{(p)} J_l(\mu_r a_p)$$

$$\bar{C}_l = - \frac{K_l(\nu_r R)}{I_l(\nu_r R)} \sum_{p=1}^N \delta_l^{(p)} D_o^{(p)} I_l(\nu_r a_p)$$

$$\delta_l^{(p)} = \sum_{j=1}^{n_p} e^{-il\alpha_j^{(p)}}$$

Wir gehen jetzt daran, jeweils auf der Oberfläche des ersten Stabes eines jeden Kranzes die folgenden Integralbedingungen zu erfüllen.

$$a) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi_S}{\partial r_1} \Big|_{r_1 = \rho_q} d\varphi_1^{(q)} = \frac{1}{d_S} \int_0^{2\pi} \varphi_S \Big|_{r_1 = \rho_q} d\varphi_1^{(q)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi_T}{\partial r_1} \Big|_{r_1 = \rho_q} d\varphi_1^{(q)} = \frac{1}{d_T} \int_0^{2\pi} \varphi_T \Big|_{r_1 = \rho_q} d\varphi_1^{(q)}$$

Bezeichnen wir den Abstand der beiden Zentren $O_j^{(p)}$ und $O_l^{(q)}$ mit $r_{jl}^{(p)(q)}$ und gilt $\rho_m \ll r_{jl}^{(p)(q)}$ für $O_j^{(p)}$ verschieden von $O_l^{(q)}$, so gilt in sehr guter Näherung

$$\begin{aligned}
 \text{a) } B_0^{(q)} \mu_r N_0(\mu_r \rho_q) + D_0^{(q)} \nu_r K_0(\nu_r \rho_q) &= \frac{1}{d_S(q)} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_l J_l(\mu_r a_q) + \bar{C}_l I_l(\nu_r a_q) \right\} e^{il\alpha_1^{(q)}} \\
 &+ B_0^{(q)} N_0(\mu_r \rho_q) + D_0^{(q)} K_0(\nu_r \rho_q) + \sum_{j=2}^{n_q} \left[B_0^{(q)} N_0(\mu_r r_j^{(q)}(q)) + D_0^{(q)} K_0(\nu_r r_j^{(q)}(q)) \right] \\
 &+ \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^N \sum_{j=1}^{n_p} \left[B_0^{(p)} N_0(\mu_r r_j^{(p)}(q)) + D_0^{(p)} K_0(\nu_r r_j^{(p)}(q)) \right] \Big\}
 \end{aligned}$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich aus den Bedingungen b). q läuft dabei jeweils von 1 bis N .

Die so gewonnenen $2N$ Gleichungen stellen ein homogenes, lineares Gleichungssystem für die $2N$ Koeffizienten $B_0^{(p)}$ und $D_0^{(p)}$ dar. Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante erhalten wir schließlich die gewünschte Eigenwertgleichung für k :

$$\text{Det}(k) \equiv \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,2N} \\ \cdot & & \cdot \\ b_{2N,1} & \dots & b_{2N,2N} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$b_{qp} = \delta_{qp} \mu_r N_1(\mu_r \rho_q) + \frac{1}{d_S(q)} (f_{qp} - F_{qp})$$

$$b_{q,N+p} = \delta_{qp} \nu_r K_1(\nu_r \rho_q) + \frac{1}{d_S(q)} (g_{qp} - G_{qp})$$

(12)

$$b_{N+q,p} = S_1 \left[\delta_{qp} \mu_r N_1(\mu_r \rho_q) + \frac{1}{d_T(q)} (f_{qp} - F_{qp}) \right]$$

$$b_{N+q,N+p} = S_2 \left[\delta_{qp} \nu_r K_1(\nu_r \rho_q) + \frac{1}{d_T(q)} (g_{qp} - G_{qp}) \right]$$

q und p laufen von 1 bis N, δ_{qp} ist das Kronecker-Symbol und f_{qp} , g_{qp} , F_{qp} und G_{qp} haben folgende Bedeutung:

$$f_{qp} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_p} N_0(\mu_{rj}^{(p)}(q)) & \text{für } q \neq p \\ N_0(\mu_{rj}^{(q)}(q)) + \sum_{j=2}^{n_q} N_0(\mu_{rj}^{(q)}(q)) & \text{für } q = p \end{cases} \quad (13)$$

$$g_{qp} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_q} K_0(\nu_{rj}^{(p)}(q)) & \text{für } q \neq p \\ K_0(\nu_{rj}^{(q)}(q)) + \sum_{j=2}^{n_q} K_0(\nu_{rj}^{(q)}(q)) & \text{für } q = p \end{cases}$$

$$F_{qp} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l^{(p)} \frac{N_l(\mu_r R)}{J_l(\mu_r R)} J_l(\mu_r a_q) J_l(\mu_r a_p) e^{il\alpha_1^{(q)}} \quad (14)$$

$$G_{qp} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l^{(p)} \frac{K_l(\nu_r R)}{I_l(\nu_r R)} I_l(\nu_r a_q) I_l(\nu_r a_p) e^{il\alpha_1^{(q)}}$$

Liegen a_q und a_p nicht zu sehr in der Nähe von R, so kann man die unendlichen Summen F_{qp} und G_{qp} schon nach dem nullten Gliede abbrechen. Die a_q werden im allgemeinen nicht so sehr in der Nähe von R liegen, da man die Abschaltstäbe nicht zu weit außen anbringt. Hinzu kommt, daß beispielsweise beim FR 2 nur die $\delta_l^{(p)}$ von Null verschieden sind, für die l ein ganzzahliges Vielfaches von 4 ist. Bricht man die unendlichen Summen nach dem nullten Gliede ab, so gilt

$$F_{qp} = n_p \frac{N_0(\mu_r R)}{J_0(\mu_r R)} J_0(\mu_r a_q) J_0(\mu_r a_p) \quad (15)$$

$$G_{qp} = n_p \frac{K_0(\nu_r R)}{I_0(\nu_r R)} I_0(\nu_r a_q) I_0(\nu_r a_p)$$

Es mag vielleicht überraschen, daß wir mit den Formeln (11) bis (15) praktisch jede Abschaltstabkonfiguration beherrschen. Man braucht nämlich nur die Abschaltstäbe in Gruppen gleichberechtigter Stäbe bezüglich der Gesamtkonfiguration aufzuteilen, und jede solche Gruppe als einen Kranz zu wählen. Bei extrem geringer Symmetrie der Abschaltstabkonfiguration besteht jeder Kranz nur aus wenigen Stäben (eventuell nur aus einem Stab).

Schwierigkeiten scheint nur noch das Vorkommen eines konzentrischen Stabes zu bereiten. Aber auch dies steckt *cum grano salis* schon in unseren Formeln drin. Nehmen wir nämlich an, daß etwa der erste Kranz aus dem konzentrischen Stab allein bestehe, und setzen wir dementsprechend $a_1 = 0$, $n_1 = 1$ und z.B. $r_j^{(2)}(1) = a_2$, $r_j^{(3)}(1) = a_3$ usw., so erhalten wir in derselben Näherung, die wir in diesem und dem vorigen Abschnitt immer gewählt haben, die gewünschte Eigenwertgleichung bei Vorhandensein eines konzentrischen Stabes.

Es soll schließlich noch erwähnt werden, daß in diesem letzteren Falle die von uns gewählte Näherung bei Erfüllung der Randbedingungen auf der Oberfläche des konzentrischen Stabes zwanglos etwas verbessert werden kann. Hat der konzentrische Stab einen größeren Radius, so könnte das sogar von erheblichem Interesse sein. Diese Verbesserung steht in engem Zusammenhang mit der exakten Zweigruppentheorie für einen einzelnen konzentrischen Stab. Besteht der erste Kranz aus einem konzentrischen Stab, so sind b_{1p} , $b_{1,N+p}$, $b_{N+1,p}$ und $b_{N+1,N+p}$ durch folgende Ausdrücke zu ersetzen:

$$\tilde{b}_{1p} = b_{1p} + \frac{N_o(\mu_r R)}{J_o(\mu_r R)} \left[-\mu_r J_o(\mu_r a_p) J_1(\mu_r \rho_1) + \frac{n_p}{d_S(1)} (1 - J_o(\mu_r a_p) J_o(\mu_r \rho_1)) \right]$$

$$\tilde{b}_{1,N+p} = b_{1,N+p} + \frac{K_o(\nu_r R)}{I_o(\nu_r R)} \left[\nu_r I_o(\nu_r a_p) I_1(\nu_r \rho_1) + \frac{n_p}{d_S(1)} (1 - I_o(\nu_r a_p) I_o(\nu_r \rho_1)) \right]$$

$$\tilde{b}_{N+1,p} = b_{N+1,p} + S_1 \left\{ \frac{N_o(\mu_r R)}{J_o(\mu_r R)} \left[-\mu_r J_o(\mu_r a_p) J_1(\mu_r \rho_1) + \frac{n_p}{d_T(1)} (1 - J_o(\mu_r a_p) J_o(\mu_r \rho_1)) \right] \right\}$$

$$\tilde{b}_{N+1,N+p} = b_{N+1,N+p} + S_2 \left\{ \frac{K_o(\nu_r R)}{I_o(\nu_r R)} \left[\nu_r I_o(\nu_r a_p) I_1(\nu_r \rho_1) + \frac{n_p}{d_T(1)} (1 - I_o(\nu_r a_p) I_o(\nu_r \rho_1)) \right] \right\}$$

Damit sind wir in der Lage, unter folgenden, praktisch nicht so sehr erheblichen Einschränkungen jede beliebige Abschaltstabkonfiguration zu behan-

deln; Die Singularitätenmethode ist umso genauer, je kleiner $\frac{\mu_r}{2} \varrho_q$ und $\frac{\nu_r}{2} \varrho_q$ gegenüber eins sind, die Radien ϱ_q der Abschaltstäbe müssen klein im Vergleich mit den gegenseitigen Abständen der Abschaltstäbe sein. Liegen Kränze von Abschaltstäben sehr weit außen, d.h. sind einige a_q annähernd gleich R, so kann nicht ohne weiteres das Formelpaar (15) benutzt werden, sondern man muß auf die Formeln (14) zurückgreifen.

X. Numerische Auswertung

Die Formeln (11), (12), (13) und (15) wurden für die Abschaltstabkonfiguration des FR 2 für verschiedene Stabradien ϱ ausgewertet. Und zwar:

1. Für luftgefüllte Cadmiumrohre oder auch volle Cadmiumstäbe, die im wesentlichen keine schnellen Neutronen absorbieren.
2. Für D_2O -gefüllte Cadmiumrohre, die für die schnellen Neutronen wie schwache Absorber wirken, da die schnellen Neutronen innerhalb der Rohre moderiert werden, und die entstehenden thermischen Neutronen von dem Cadmiummantel absorbiert werden.
3. Für H_2O -gefüllte Cadmiumrohre, die für die schnellen Neutronen einen stärkeren Absorber darstellen.
4. Zum Vergleich wurden die entsprechenden Δk Werte nach den von W.Häfele im Rahmen der sogenannten korrigierten Eingruppentheorie abgeleiteten Formeln ermittelt. Die Unterscheidung der obigen drei Fälle ist hier nicht möglich.

Wir wollen einige Bemerkungen zur Bezeichnung einfügen: Unter "modifizierter Eingruppentheorie" verstehen wir eine Eingruppentheorie, bei der L^2 durch $M^2 = L^2 + \tau$ ersetzt wird. Bekanntlich besteht dann zwischen k und dem Buckling B^2 in sehr guter Näherung die Relation

$$k - 1 = M^2 \cdot B^2$$

Nimmt man an, daß der schnelle Fluß von den eingefahrenen Abschaltstäben nicht gestört wird, so gilt für eine Reaktivitätsänderung

$$\Delta k = L^2 \Delta \beta^2$$

(Vergleichen Sie bitte die bereits genannte Arbeit von W. Häfele).

Wir sprechen in dem letztgenannten Falle, nur um eine kurze Bezeichnung zu haben, von "korrigierter Eingruppentheorie".

Im Anhang (Abbildung 2) ist die Abhängigkeit der Abschaltwirkung Δk vom Radius ξ - für ξ zwischen 0 und 8 Zentimetern - in den genannten vier Fällen aufgetragen. Für $\xi > 4$ dürften die Kurven etwas unsicher sein. Insbesondere ergab sich für den beim FR 2 verwendeten Radius $\xi = 3,15$ cm

	Eingruppentheorie korrigiert	Zweigruppentheorie		
		Luftgefüllte Stäbe	D ₂ O-gefüllte Stäbe	H ₂ O-gefüllte Stäbe
Δk	0,11406	0,15461	0,16409	0,18452

Der kleinste Eigenwert k der Gleichung (11) wurde jeweils mit Hilfe der Z 22 (Zuse, Bad Hersfeld) bei neunstelligem Rechnen im gleitenden Komma mit einer Genauigkeit von 10^{-6} bis 10^{-8} ermittelt, so daß die angegebenen fünf Stellen nach dem Komma im Rahmen der verwendeten Formeln exakt sind. Für die Ermittlung eines Eigenwertes waren etwa 30 Minuten Rechenzeit erforderlich.

Sicher ist es nützlich, wenn hier zunächst einige allgemeine Bemerkungen Platz finden: Die Wirkung eines Abschaltstabes in homogenen Reaktoren ist von zweierlei Art. Einmal absorbiert der Abschaltstab selbst Neutronen, zum anderen verdrängt er den Fluß und vergrößert damit den Ausfluß aus der Oberfläche des Reaktors. Das sollte man sich bei vielen Betrachtungen vor Augen halten. - Ermittelt man die Abschaltwirkung Δk nach der modifizierten Eingruppentheorie ($M^2 = L^2 + \tau$ anstelle von L^2), so erhält man eine viel zu große Abschaltwirkung. Das ist verständlich, da ja die falsche Annahme gemacht wird, daß der schnelle Fluß durch die Abschaltstäbe proportional zum thermischen Fluß verbeult wird. Bei der korrigierten Eingruppentheorie wird dagegen angenommen, daß der schnelle Fluß durch den Abschaltstab überhaupt nicht in Mitleidenschaft gezogen wird. Das entspricht sicher besser den Tatsachen. So kommt es, daß man unter der Annahme, es gäbe gar

keine schnellen Neutronen ($\tau = 0$), wesentlich bessere Werte für die Abschaltwirkung bekommt. Natürlich ist der aus der korrigierten Eingruppentheorie gewonnene Wert für Δk wieder etwas zu klein, denn es findet eine im Rahmen der Zweigruppentheorie berücksichtigte Rückwirkung des thermischen Flusses auf den schnellen Fluß statt, die insbesondere doch zu einer Verbeulung des schnellen Flusses führt. Daher liegt der Zweigruppenwert wieder etwas oberhalb des korrigierten Eingruppenwertes für Δk . Der Zweigruppenwert für Δk dürfte dem wahren Wert schon recht nahe kommen.

Damit verstehen wir auch die gute Übereinstimmung der Messungen von K.H.Beckurts¹⁾ mit den von W. Häfele im Rahmen der korrigierten Eingruppentheorie ermittelten Δk Werten, denn bei diesen Messungen waren keine schnellen Neutronen vorhanden.

Für die Abschaltstabkonfiguration des FR 2 haben wir für $\rho = 3,15$ cm die Abschaltwirkung nach der Zweigruppentheorie in Abhängigkeit von τ ermittelt. Die Ergebnisse sind im Anhang (Abbildung 5) dargestellt. Für τ gegen Null mündet die Kurve, wie es sein muß, bei dem nach der korrigierten Eingruppentheorie ermittelten Δk -Wert. Die Genauigkeit dieses Einmündens ist nicht zuletzt eine schöne Bestätigung für die Richtigkeit der von uns gewählten Näherung im Rahmen der Zweigruppentheorie.

Darüber hinaus habe ich die im Abschnitt VII hergeleitete, im Rahmen der Zweigruppentheorie exakt gültige Eigenwertgleichung für einen einzelnen konzentrischen Abschaltstab ausgewertet. Zum Vergleich wurden auch hier die entsprechenden Δk -Werte nach der korrigierten Eingruppentheorie bestimmt. Es wurden dieselben Materialkonstanten verwendet wie bei der Abschaltstabkonfiguration des FR 2. Die Ergebnisse sind im Anhang (Abbildung 3) dargestellt.

Wir ermitteln, wie das schon W. Häfele²⁾ getan hat, eine Funktion $\lambda(\rho)$ in folgender Weise: Für einen einzelnen konzentrischen Abschaltstab vom Radius ρ dividieren wir den mit Hilfe der Zweigruppentheorie gewonnenen Δk -Wert durch den entsprechenden, aus der korrigierten Eingruppentheorie erhaltenen Δk -Wert und bezeichnen den Quotienten mit $\lambda(\rho)$. Multiplizieren wir jetzt die für die Abschaltstabkonfiguration des FR 2 aus der korrigierten Eingruppentheorie ermittelten Δk -Werte mit $\lambda(\rho)$, so erhalten wir eine im Anhang (Abbildung 4) dargestellte Schätzkurve.

1) Literaturverzeichnis (9)

2) " (3)

Diese Schätzkurve stimmt für $\rho < 3$ cm sehr gut mit der aus der Zweigruppentheorie gewonnenen Kurve überein, ja, sie liegt, wie das W. Häfele vorausgesagt hat, etwas oberhalb der Zweigruppentheorie-Kurve. Für $\rho > 3$ cm erhält man andererseits nach der Zweigruppentheorie schon etwas größere Werte als nach dieser Schätzung. Das liegt meiner Meinung nach daran, daß bei der Behandlung des Problems nach der korrigierten Eingruppentheorie die gegenseitige Beschattung der Stäbe bei diesen schon etwas größeren Radien ρ überschätzt wird. Für größere ρ -Werte wird natürlich auch die Zweigruppen-Kurve etwas unsicher, da dann ρ nicht mehr klein gegenüber den gegenseitigen Abständen ist.

Eine andere interessante Frage drängte sich auf: Ist die Anordnung der Abschaltstäbe für den FR 2 optimal? Sicher wird das nicht der Fall sein, denn aus technischen Gründen ist man ja von der regelmäßigen Anordnung der Stäbe auf den beiden Kreisen abgegangen, die sicher etwas mehr bringt. Immerhin interessierte uns, um wieviel die Abschaltwirkung besser wird, wenn man die Stäbe auf denselben Kreisen regelmäßig, und zwar die Stäbe des einen Kranzes um $\frac{\pi}{8}$ gegenüber denen des anderen Kranzes versetzt anordnet. Schließlich wählten wir für den inneren Kranz noch einen etwas kleineren Radius ($a_1 = 40$ cm). Die Ergebnisse sind in folgender kleinen Tabelle dargestellt:

	FR 2 $a_1 = 53,13$ cm	regelmäßige Anordnung $a_1 = 53,13$ cm	regelmäßige Anordnung $a_1 = 40$ cm
Δk	0,1546	0,1635	0,1742

Es wurde dabei angenommen, daß die Abschaltstäbe keine schnellen Neutronen absorbieren.

Im einzelnen wurden folgende Werte für die Parameter und Materialkonstanten bei der numerischen Auswertung zugrunde gelegt:

Die Formeln (11), (12), (13) und (15) spezialisierten wir für zwei Kränze von je acht Abschaltstäben mit einheitlichen ρ , d_S und d_T , d.h. $N = 2$, $n_1 = n_2 = 8$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $d_S^{(1)} = d_S^{(2)} = d_S$, $d_T^{(1)} = d_T^{(2)} = d_T$.

R = 153,28 cm	$\tau = 119 \text{ cm}^2$
H = 255,83 cm	$L^2 = 133 \text{ cm}^2$
$a_1 = 53,13 \text{ cm}$	$D_S = 1,12 \text{ cm}$
$a_2 = 85,66 \text{ cm}$	$D_T = 0,8 \text{ cm}$
$h = 33,6 \text{ cm}$	

und die sich aus a_1 , a_2 und h ergebenden gegenseitigen Abstände der Abschaltstäbe (Figur 3). φ variierte zwischen 0 und 8 Zentimetern.

Mit Hilfe von Abbildung 1 (Anhang) wurde unter Zugrundelegung von $\lambda_{tr} = 2,4 \text{ cm}$

die Extrapolationslänge d_T für die verschiedenen Werte von φ ermittelt, und daraus wiederum der effektive Radius φ_0 . (Vergleichen Sie bitte Abschnitt VII). Mit Hilfe von Formel (7) aus Abschnitt VI wurde für D_2O -gefüllte und für H_2O -gefüllte Stäbe die Extrapolationslänge d_S für die verschiedenen Werte von φ berechnet. Dabei verwendeten wir folgende Materialkonstanten:

$$\text{für } D_2O : \quad \tilde{D}_S = 1,305 \text{ cm}, \quad \tau_1 = 120 \text{ cm}^2$$

$$\text{für } H_2O : \quad \tilde{D}_S = 1,423 \text{ cm}, \quad \tau_1 = 32,29 \text{ cm}^2$$

Für luftgefüllte Cadmiumrohre wurde $\frac{1}{d_S} = 0$ gesetzt.

Vergleichen Sie bitte für die numerischen Ergebnisse auch die Tafeln 1 bis 4 des Anhanges.

T a f e l 1

Abschaltwirkung der Konfiguration des FR 2 in Abhängigkeit vom Stabradius ξ .

ξ [cm]	Δk	Δk		
	korrigierte Eingruppen- theorie	luftgefüllte Stäbe	Zweigruppentheorie D_2O -gefüllte Stäbe	H_2O -gefüllte Stäbe
8	0,16360		0,30	
7		0,25369	0,27821	0,30660
5		0,20711	0,22490	0,25348
3,15	0,11406	0,15461	0,16409	0,18452
2	0,09089	0,11506	0,11963	0,13120
1	0,06056	0,07105	0,07239	0,07544
0,5	0,03778	0,04221	0,04258	0,04367
0,1			0,01067	0,01072

T a f e l 2

Abschaltwirkung eines konzentrischen Abschaltstabes in
Abhängigkeit von ξ .

ξ [cm]	Δk	Δk		
	korrigierte Eingruppen- theorie	luftgefüllte Stäbe	Zweigruppentheorie D ₂ O-gefüllte Stäbe	H ₂ O-gefüllte Stäbe
8	0,01876	0,02779	0,03068	0,03404
7	0,01749	0,02558	0,02805	0,03131
5	0,01484	0,02086	0,02249	0,02523
3,5	0,01179	0,01587	0,01673	0,01858
2	0,00942	0,01212	0,01254	0,01362
1	0,00645	0,00777	0,00791	0,00821
0,5	0,00416	0,00476	0,00480	0,00491
0,1		0,00124	0,00124	0,00125

T a f e l 3

Die Extrapolationslängen für den thermischen und den schnellen Fluß innerhalb der Abschaltstäbe in Abhängigkeit von ϱ ; der effektive Radius ϱ_0 eines Abschaltstabes für den thermischen Fluß in Abhängigkeit von ϱ .

ϱ [cm]	d_T [cm]	ϱ_0 [cm]	D ₂ O-gefüllter Stab d_S [cm]	H ₂ O-gefüllter Stab d_S [cm]
8	1,896	6,312	26,968	7,871
7	1,925	5,317	30,376	8,523
5	2,016	3,391	41,526	11,070
3,15	2,150	1,592	64,900	16,670
2	2,280	0,639	101,585	25,682
1	2,520	0,080	202,527	60,265
0,5	2,712	0,002	404,729	101,264
0,1	2,976		2023,15	505,844

T a f e l 4

Die Abschaltwirkung der Stäbe des FR 2 ($\varphi = 3,15$ cm) in Abhängigkeit von r .

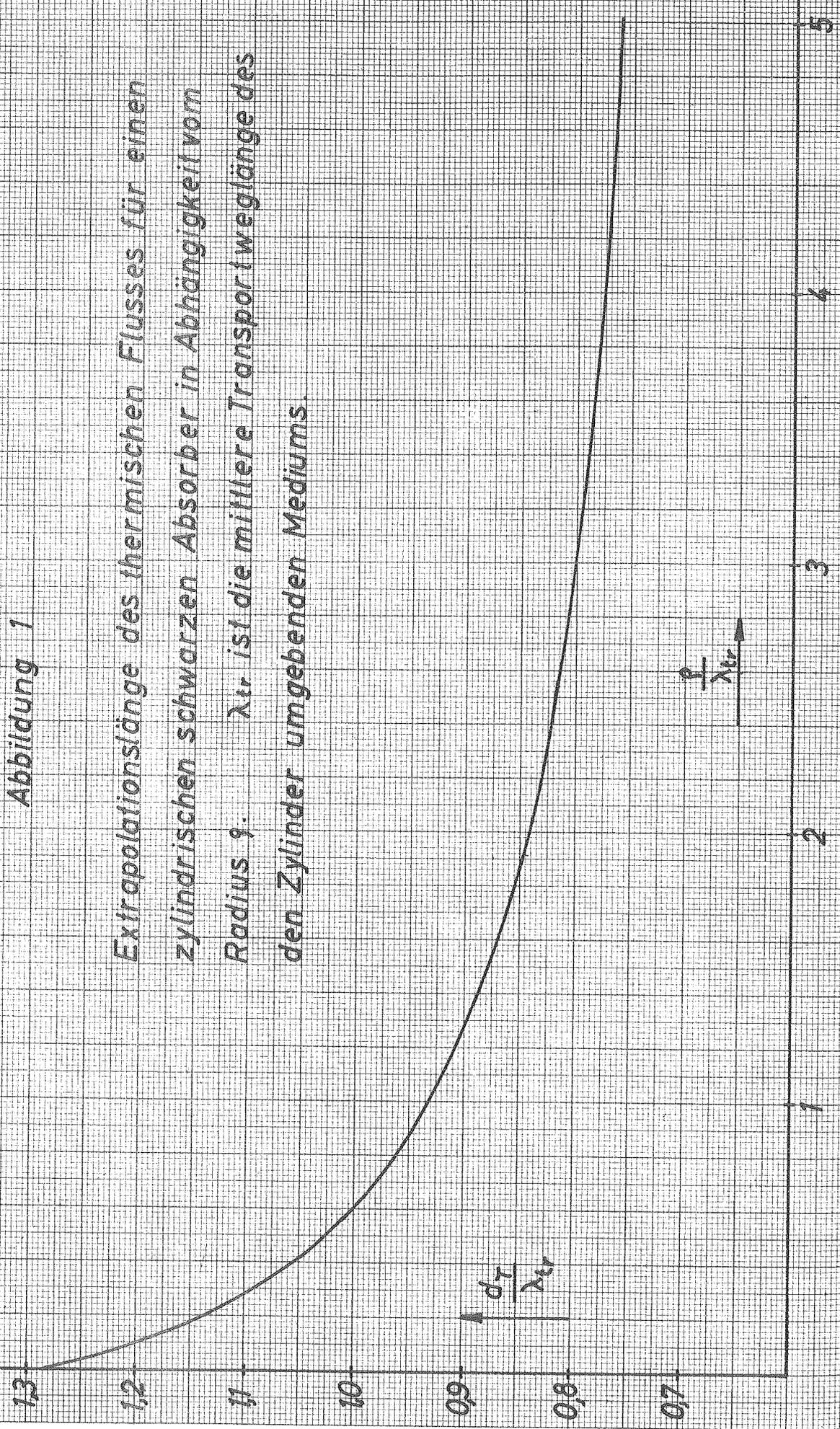
$r[\text{cm}^2]$	Δk
5	0,11737
10	0,12047
30	0,13023
60	0,14078
90	0,14860
119	0,15462

Literaturverzeichnis

- (1) S.Glasstone, M.C.Edlund: The Elements of Nuclear Reactor Theory,
D.van Norstrand Company, Inc
- (2) M.Weinberg, E.P.Wigner: The Physical Theory of Neutron Chain
Reactors,
The University of Chicago Press (1958)
- (3) W.Häfele: Über die Wirksamkeit von Abschaltstäben
thermischer Reaktoren im Hinblick auf
deren Durchmesser, Anzahl und Anordnung,
Zeitschrift für Naturforschung Band 12
(1957), S. 368
- (4) L.W.Nordheim,
R.Scalettar: Theory of Pile Control Rods,
MDDC - 42 (1946)
- (5) F.Stummel: On the Theory of Cylindrical Air Gaps,
A/Conf. 15/P/967
- (6) J.Codd, C.A.Rennie: Two Group Theory of Control Rods in
a Thermal Reactor,
AERE - R/R - 818
- (7) S.A.Kushneriuk, C.Mc Kay: Neutron Density in an Infinite, Non-
Capturing Medium Surrounding a Long
Cylindrical Body which Scatters and
Captures Neutrons,
CRT - 566
- (8) R.L.Murray, J.W.Niestlie: Reactor Control-Rod Theories,
Nucleonics 13, Nr. 2, (1955, S. 18
- (9) K.H.Beckurts: Measurements with a Pulsed Neutron Source,
Nuclear Science and Engeneering 2, (1957),
S. 516
- (10) H.L.Garabedian: Control Rod Theory of a Cylindrical Reactor,
WAPD - 18 (1950)

Abbildung 1

Extrapolationslänge des thermischen Flusses für einen zylindrischen schwarzen Absorber in Abhängigkeit vom Radius ρ . λ_{tr} ist die mittlere Transportweglänge des den Zylinder umgebenden Mediums.



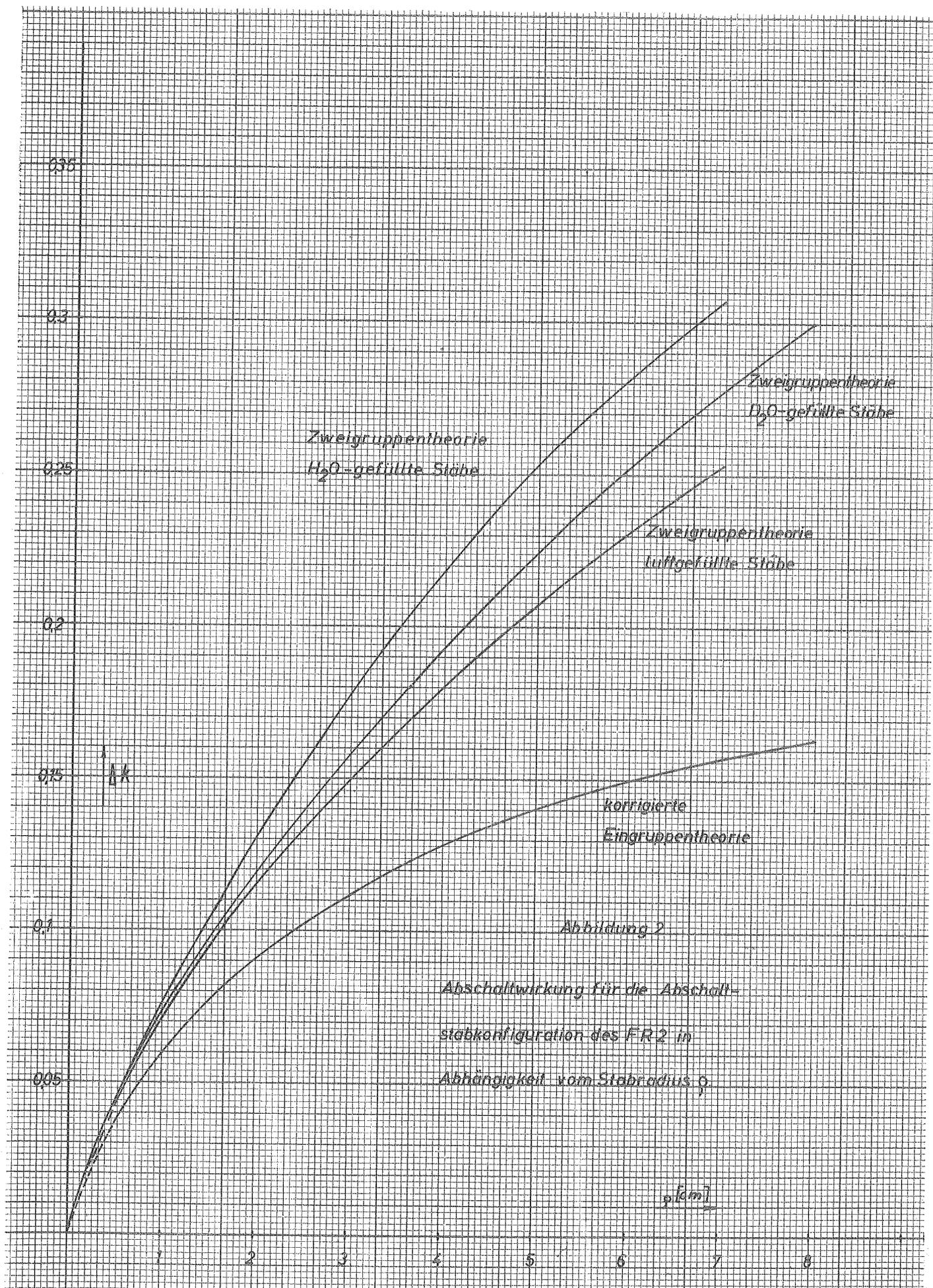


Abbildung 2
 Abschaltwirkung für die Abschalt-
 stabkonfiguration des FR2 in
 Abhängigkeit vom Stabradius p .

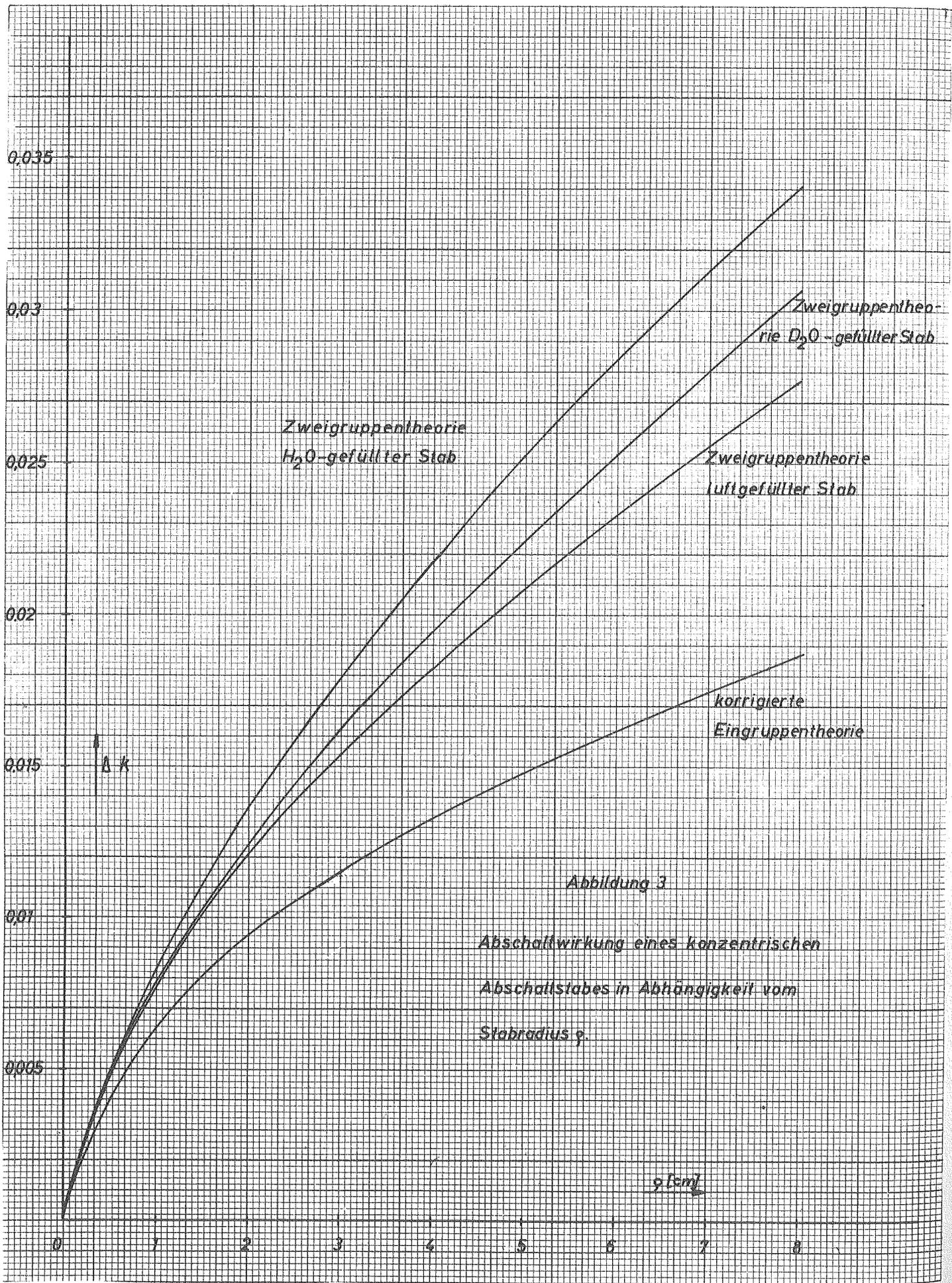
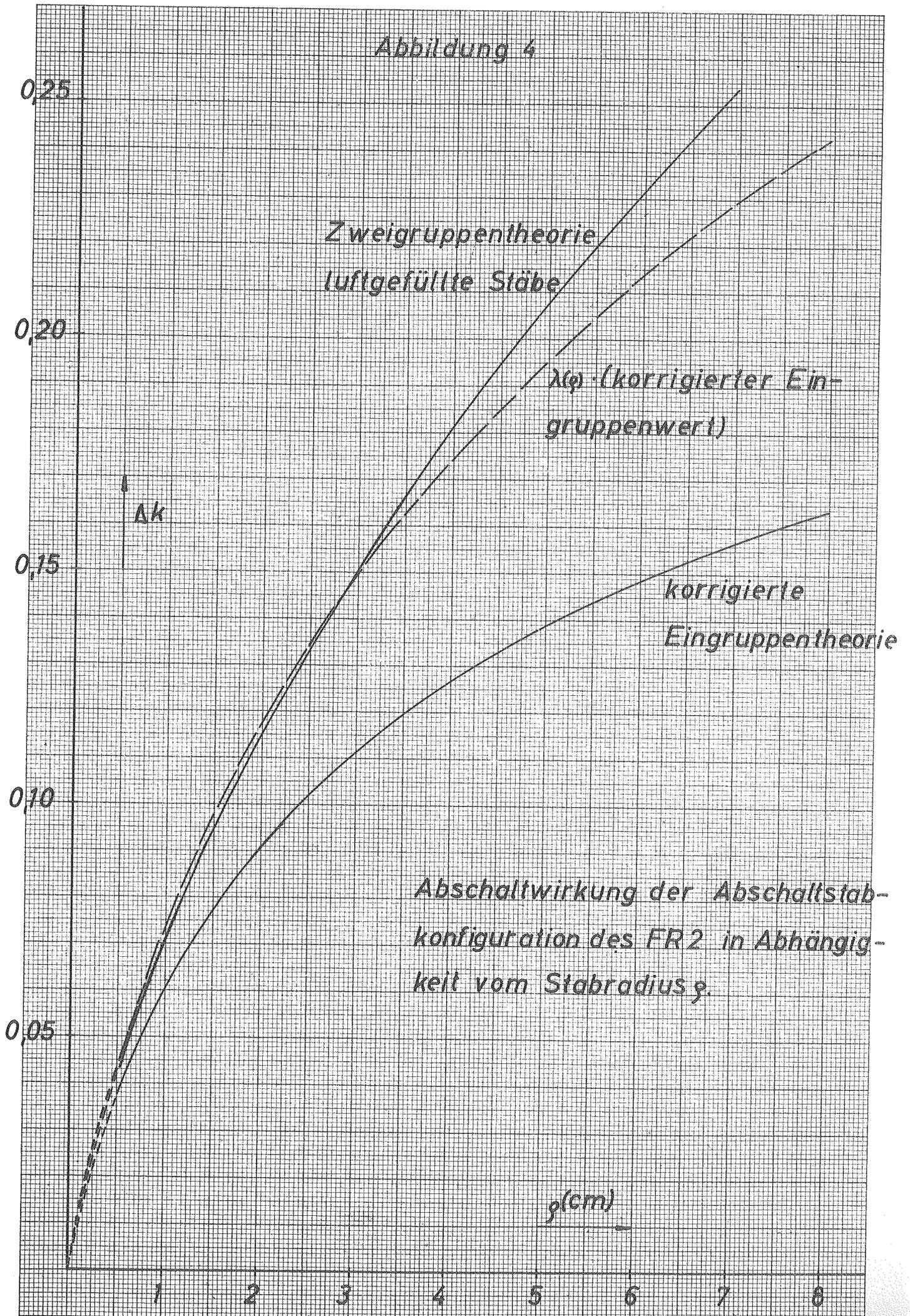


Abbildung 3

Abschattwirkung eines konzentrischen
Abschaltstabes in Abhängigkeit vom
Stabradius ρ .

Abbildung 4



Zweigruppentheorie
luftgefüllte Stäbe

$\lambda(\varphi)$ (korrigierter Ein-
gruppenwert)

korrigierte
Eingruppentheorie

Abschaltwirkung der Abschaltstab-
konfiguration des FR2 in Abhängig-
keit vom Stabradius g .

Δk

g (cm)

Abbildung 5
Abschwellwirkung der Stäbe des FR2
in Abhängigkeit von τ nach der
Zweigruppentheorie

