

KFK-104

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

März 1962

KFK 104

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Theoretische Untersuchungen zur Reaktivitätsmessung an einem Reaktor
mit Reflektor mit Hilfe einer gepulsten Neutronenquelle

A. Fraude

KERNREAKTOR
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.
Verwaltung der Zentralbücherei

27. Aug 1962



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

**Theoretische Untersuchungen zur Reaktivitätsmessung an einem Reaktor mit Reflektor
mit Hilfe einer gepulsten Neutronenquelle**

Von A. FRAUDE

(Aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik des Kernforschungszentrums Karlsruhe)

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 29. November 1961)

KERNREAKTOR
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.
Verwaltung der Zentralbibliothek

Zusammenfassung. Für einen mit D_2O moderierten Reaktor mit Reflektor (FR 2) wird auf Grund der Lösung der zeitabhängigen Zwei-Gruppen-Diffusionsgleichungen der Zusammenhang zwischen der Reaktivität und dem zeitlichen Verhalten des thermischen Neutronenflusses nach einem einmaligen Quellimpuls schneller Neutronen angegeben, wobei der Flußverlauf durch eine zeitabhängige Entwicklung nach den stationären Eigenfunktionen beschrieben wird. Trotz der Erhöhung der effektiven Neutronen-Lebensdauern durch den Reflektor klingen die Oberwellen dieser Entwicklung noch so rasch ab, daß in einem bestimm- baren Zeitintervall nach dem Impuls praktisch nur die Grundwelle in die Messung eingeht. Ihre Abklingkonstante ergibt dann unmittelbar ein Maß für die Reaktivität.

I. Einleitung

Führt man einem unterkritischen Reaktor aus einer zusätzlichen Neutronenquelle in einem kurzen Impuls schnelle Neutronen zu, so steigt der Neutronenfluß zunächst sehr rasch auf einen Maximalwert an und klingt dann exponentiell wieder ab. Dieses Zeitverhalten läßt sich im allgemeinen nur durch eine Vielzahl von Exponentialfunktionen beschreiben, wobei die Größe der einzelnen Abklingkonstanten von der jeweiligen Reaktivität abhängt. Eine experimentelle Messung des Neutronenflusses gestattet jedoch nur dann eine eindeutige Aussage über die Reaktivität, wenn in die Messung nur eine einzige zeitliche Exponentialfunktion eingeht, nämlich die der Grundwelle

der Neutronenflußeigenfunktionen. Daher ist außer der Bestimmung des Zusammenhangs der Abklingkonstanten der Grundwelle mit der Reaktivität auch zu untersuchen, ob nach dem Abklingen der Oberwellen noch ein genügend großes Meßzeitintervall übrig bleibt, bis die verzögerten Neutronen einen wesentlichen Beitrag liefern.

Für einen Leichtwasser-Reaktor ohne Reflektor ist das Verfahren von SIMMONS und KING [1] beschrieben worden. In der vorliegenden Arbeit wird seine Anwendbarkeit bei einem reflektierten Natururan- D_2O -Reaktor untersucht. Die nachfolgend aufgeführten numerischen Ergebnisse beziehen sich auf den Karlsruher Reaktor FR 2.

II. Die Zwei-Gruppen-Diffusionsgleichungen

Der erste Schritt zur Lösung des Problems besteht in der Bestimmung des zeitlichen und räumlichen Flußverlaufs, der sich anschließend an einen Neutronenimpuls an beliebiger Stelle im Reaktor einstellt. Zur Vereinfachung der hierfür verwendeten Zwei-Gruppen-Diffusions-Rechnung wird an Stelle der inhomogenen Anordnung des Spaltstoffs in einzelnen Brennelementen eine homogene Verteilung in einem zylindrischen Core mit dem Radius R_c angenommen; k_∞ sei dann der Multiplikationsfaktor des unendlich ausgedehnt gedachten homogenisierten Cores.

Ferner wird der Reflektor explizit nur in radialer Richtung (Außenradius R) berücksichtigt; in axialer Richtung wird für die Rechnung das eigentliche Core um den Betrag der Reflektor-Ersparung vergrößert (Gesamthöhe H).

Bei der Darstellung der Diffusionsgleichungen und ihrer weiteren Behandlung erweist sich die Matrix-Schreibweise als zweckmäßig, wobei der schnelle Neutronenfluß $\Phi_1(r, t)$ und der thermische Fluß $\Phi_2(r, t)$ in dem Flußvektor

$$\Phi(r, t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(r, t) \\ \Phi_2(r, t) \end{pmatrix} \quad (1a)$$

zusammengefaßt werden. Außerdem sei

$$\mathcal{C}_i(r, t) = \begin{pmatrix} C_i(r, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1b)$$

der Vektor für die Vorläufer der verzögerten Neutronen in der i -ten Gruppe. Für den Ortsvektor r werden im folgenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z) benutzt.

Die Neutronenverluste in den beiden Energiegruppen durch Ausfluß, Bremsung und Absorption sowie die Neutronenproduktion werden durch die beiden Matrix-Operatoren \mathfrak{S} und \mathfrak{R} wiedergegeben

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} D_1 \Delta - \Sigma_1 & 0 \\ p \Sigma_1 & D_2 \Delta - \Sigma_a \end{pmatrix}, \quad (2a)$$

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2b)$$

Hierin sind D_1 und D_2 die Diffusionskonstanten der schnellen bzw. thermischen Gruppe, Σ_1 und Σ_a die Brems- bzw. Absorptionsquerschnitte, p die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit und Δ der Laplace-Operator.

Für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Neutronen in den beiden Energiegruppen wird die Matrix

$$v^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_2} \end{pmatrix} \quad (2c)$$

eingeführt.

Bezeichnet man noch mit β_i die Bruchteile der verzögerten Neutronen in der i -ten Gruppe, mit $\sum_i \beta_i = \beta$ und mit λ_i ihre Zerfallskonstanten, so kann man die zeitabhängigen Diffusionsgleichungen in folgender Form anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{S} + k_\infty(1 - \beta) \mathfrak{R}) \Phi(r, t) + \sum_i \lambda_i \mathcal{C}_i(r, t) + \\ + \Sigma_0 \Phi_0(r, t) = v^{-1} \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

$$- \lambda_i \mathcal{C}_i(r, t) + k_\infty \beta_i \mathfrak{R} \Phi(r, t) = \frac{\partial \mathcal{C}_i(r, t)}{\partial t}. \quad (3b)$$

Der in Gl. (3a) auftretende Quellterm $\Sigma_0 \Phi_0$ mit dem Quellflußvektor

$$\Phi_0(r, t) = \begin{pmatrix} \Phi_0(r, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

stellt nicht unmittelbar die den Impuls abgebende Neutronenquelle dar. Da im Experiment diese Quellneutronen eine Energie von 14 MeV haben, gehören sie nicht mehr in die schnelle Gruppe der Zwei-Gruppen-Theorie, sondern gelangen erst nach einigen Bremsstößen dorthin. Dieser Vorgang soll hier in ausreichender Näherung ebenfalls durch eine Diffusionsgleichung beschrieben werden mit D_0 und Σ_0 als Diffusionskonstante und mittlerem Abbremsquerschnitt:

$$(D_0 \Delta - \Sigma_0) \Phi_0(r, t) + S(r, t) = \frac{1}{v_0} \frac{\partial \Phi_0(r, t)}{\partial t}. \quad (5)$$

Hierin ist nun $S(r, t)$ die eigentliche Quelle, die räumlich und zeitlich als δ -Quelle mit der Quellstärke S_0 [Neutronen] angenommen wird

$$S(r, t) = S_0 \delta(r - r_s) \delta(t) \quad (6)$$

r_s ist der Ortsvektor zum Quellpunkt.

Als Randbedingungen zu den Gln. (3) und (5) kommt die Forderung nach dem Verschwinden aller Flußvektoren auf dem Rande des Reaktors ($r=R$, $z = \pm H/2$).

Die Gln. (3a, b) gelten formal für den ganzen Reaktor; es ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Operatoren \mathfrak{S} und \mathfrak{R} an der Grenzfläche Core-Reflektor einen Sprung haben. Im Reflektor ist $\mathfrak{R} \equiv 0$ und $p = 1$ zu setzen. Der Flußvektor Φ setzt sich dann aus zwei Anteilen zusammen, die jeweils nur im Core oder im Reflektor definiert sind und die an der Grenzfläche Core-Reflektor die Bedingungen erfüllen müssen

$$\Phi_{\text{core}}(R_c) = \Phi_{\text{refl}}(R_c), \quad (7a)$$

$$D_c \left(\frac{\partial \Phi_c}{\partial r} \right)_{r=R_c} = D_R \left(\frac{\partial \Phi_R}{\partial r} \right)_{r=R_c} \quad (7b)$$

mit $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$.

Die Zeitabhängigkeit in den obigen Differentialgleichungen läßt sich am einfachsten durch Anwendung der Laplace-Transformation beseitigen mit

$$\bar{\Phi}(r, q) = \int_0^\infty e^{-qt} \Phi(r, t) dt \quad (8a)$$

und

$$\bar{\mathcal{C}}_i(r, q) = \int_0^\infty e^{-qt} \mathcal{C}_i(r, t) dt, \quad (8b)$$

sowie den Anfangsbedingungen

$$\Phi(r, 0) = \mathcal{C}_i(r, 0) = 0. \quad (8c)$$

Damit folgt aus den Gln. (3a, b) die Differentialgleichung

$$\left(\mathfrak{S} - q v^{-1} + k_\infty \left[1 - \beta + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + q} \right] \mathfrak{R} \right) \bar{\Phi} = - \Sigma_0 \bar{\Phi}_0 \quad (9)$$

und aus Gl. (5)

$$\left(D_0 \Delta - \Sigma_0 - \frac{q}{v_0}\right) \bar{\Phi}_0 = -S_0 \delta(r - r_s). \quad (10)$$

Die transformierten Flußfunktionen müssen die gleichen Randbedingungen erfüllen wie die ursprünglichen.

III. Formale Lösung des inhomogenen Randwertproblems der transformierten Flußfunktionen

Die Lösung der Differentialgleichung (9) gewinnt man am zweckmäßigsten durch eine Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen Φ_l des stationären Zustandes, wie sie durch die zeitunabhängige homogene Differentialgleichung (3a)

$$(\mathfrak{H} + k_l \mathfrak{R}) \Phi_l = 0 \quad (11)$$

und die genannten Randbedingungen bestimmt sind.

Zu den Eigenfunktionen Φ_l gibt es adjungierte Eigenfunktionen (Einflußfunktionen) Φ_l^* , die — bei gleichen Randbedingungen und Eigenwerten k_l — die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{H} + k_l \mathfrak{R})^* \Phi_l^* = 0 \quad (12)$$

erfüllen müssen. (Mit * wird hier der transponierte Matrix-Operator bzw. Vektor bezeichnet.) Die Funktionen Φ_l und Φ_l^* bilden zusammen ein biorthogonales Eigenfunktionensystem mit der Orthogonalitätsrelation (s. [2])

$$(\Phi_i^*, \mathfrak{R} \Phi_j) = a_{ij} \delta_{ij}^{-1}. \quad (13)$$

Bei Verwendung der stationären Eigenfunktionen Φ_l zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (9) ist zu berücksichtigen, daß die Entwicklung nach den Φ_l wegen des Auftretens der singulären Matrix \mathfrak{R} im Core-Bereich unvollständig ist. Der vollständige Lösungsansatz lautet daher

$$\bar{\Phi} = \sum_l \bar{A}_l \Phi_l + \psi, \quad (14)$$

wobei ψ ein noch zu bestimmender Vektor der Form $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, für dessen Core-Anteil $\mathfrak{R} \psi = 0$ gelten muß². Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung (9) ein, so erhält man zunächst

$$\left. \begin{aligned} \sum_l \bar{A}_l \left[\left(k_\infty \left(1 - \beta + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + q} \right) - k_l \right) \mathfrak{R} - q v^{-1} \right] \Phi_l + \\ + (\mathfrak{H} - q v^{-1}) \psi = -\Sigma_0 \bar{\Phi}_0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Den Core-Anteil (Index c) dieser Gleichung kann man auch in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \sum_l \bar{A}_l \left[\left(k_\infty \left(1 - \beta + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + q} \right) - k_l \right) \begin{pmatrix} \Sigma_{ac} \Phi_{2c} \\ p \\ 0 \end{pmatrix} - \right. \\ \left. - q \begin{pmatrix} \frac{1}{v_1} \Phi_{1c} \\ \frac{1}{v_2} \Phi_{2c} \end{pmatrix} \right] + \left(\begin{pmatrix} D_{1c} \Delta - \Sigma_{1c} - \frac{q}{v_1} \\ p \Sigma_{1c} \end{pmatrix} \psi_{1c} \right) \\ = -\Sigma_0 \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

¹ Unter dem skalaren Produkt zweier Vektoren (Φ_i^*, Φ_j) ist im folgenden die Integration des Produktes $\Phi_i^* \cdot \Phi_j$ über das Grundgebiet der Differentialgleichung, d.h. über das Reaktorvolumen zu verstehen.

² Wie sich leicht zeigen läßt, haben zwei beliebige Vektoren, die sich nur durch einen Vektor ψ der obigen Form

Daraus folgt als Bestimmungsgleichung für ψ_{1c}

$$\psi_{1c} = \frac{q}{p \Sigma_{1c}} \sum_l \bar{A}_l \frac{1}{v_2} \Phi_{2c}$$

und mit $l_{1c} = \frac{1}{\Sigma_{1c} v_1}$ und $l_{2c} = \frac{1}{\Sigma_{ac} v_2}$

$$\psi_c = \frac{l_{2c} q}{\Sigma_{1c}} \sum_l \bar{A}_l \mathfrak{R} \Phi_{c_l}. \quad (16)$$

Ferner ist dann

$$q v^{-1} \psi_c = l_{1c} l_{2c} q^2 \sum_l \bar{A}_l \mathfrak{R} \Phi_{c_l}.$$

Die Bestimmung von ψ_R für den Reflektor erfordert einigen zusätzlichen Aufwand, den man sich jedoch sparen kann: da das im weiteren Verlauf der Rechnung auftretende Skalarprodukt $(\Phi_{c_k}^{+*}, \mathfrak{H} \psi_c) \sim (\Phi_{c_k}^{+*}, \mathfrak{H} \mathfrak{R} \Phi_{c_l}) = 0$ ist, resultiert der Beitrag von ψ_c im Core-Bereich letztlich in einem zusätzlichen Term $-l_{1c} l_{2c} q^2$ in der eckigen Klammer von Gl. (15), der aber für alle später in Frage kommenden Werte von q vernachlässigbar klein ist. Da nun aber auch die Funktionen ψ die Anschlußbedingungen Core-Reflektor erfüllen müssen, kann man mit ψ_c auch den Beitrag von ψ_R vernachlässigen.

Multipliziert man nun zur Beseitigung der Ortsabhängigkeit in Gl. (15) von links skalar mit der adjungierten Eigenfunktion Φ_k^+ , wobei die Integration wieder über das ganze Reaktorvolumen erfolgt, so zeigt sich, daß die Orthogonalitätsbeziehung Gl. (13) nicht ausreicht, um damit die Entwicklungskoeffizienten \bar{A}_l explizit zu bestimmen; man erhält vielmehr ein (formal zunächst dreidimensional) unendliches Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_k \left[k_\infty \left(1 - \beta + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + q} \right) - k_k \right] (\Phi_k^{+*}, \mathfrak{R} \Phi_k) - \\ - q \sum_l \bar{A}_l (\Phi_k^{+*}, v^{-1} \Phi_l) = -\Sigma_0 (\Phi_k^{+*}, \bar{\Phi}_0). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Dieses Gleichungssystem ist nur näherungsweise lösbar. Eine vollkommen strenge Lösung läßt sich bei dem vorliegenden Problem nicht erzielen, da in der gesuchten Flußfunktion $\Phi(r, t)$ der Orts- und Zeitanteil nicht separierbar sind³.

IV. Eigenfunktionen und Eigenwerte

Vor der Auflösung des obigen Gleichungssystems und der Rücktransformation der Entwicklungskoeffizienten $\bar{A}_l(q)$ sollen zunächst kurz für die bisher nur formal eingeführten Eigenfunktionen einige Beziehungen angegeben werden. Die ausführliche Rechnung hierfür ist bekannt und z.B. in [3], [4], [5] dargestellt.

unterscheiden, die gleichen Entwicklungskoeffizienten. Daraus folgt, daß die Entwicklung dieser Vektoren nach den stationären Eigenfunktionen unvollständig ist.

³ Das obige unendliche Gleichungssystem läßt sich zwar vermeiden, wenn man mit den „dynamischen“ Eigenfunktionen zufolge $(\mathfrak{H} - q v^{-1} + k_l \mathfrak{R}) \bar{\Phi}_l = 0$ rechnet; wobei man für die Entwicklungskoeffizienten \bar{A}_l einen geschlossenen Ausdruck erhält. Nur läßt sich dann die Rücktransformation nicht mehr durchführen. Die Eigenfunktionen sind dann auch zeitabhängig, d.h. es ist $\bar{\Phi}_l = \bar{\Phi}_l(q)$ und ebenfalls ist auch $k_l = k_l(q)$. Diese Abhängigkeit von q ist im allgemeinen nicht explizit darstellbar, so daß man auch hier wieder auf eine Näherung zurückgreifen müßte.

Im Bereich des Cores haben die stationären Eigenfunktionen die Form

$$\left. \begin{aligned} \Phi_c(r, \varphi, \zeta) \\ = \begin{pmatrix} 1 & C_l \\ S_{1l} & S_{2l} C_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m(\mu_l r) \\ J_m(\nu_l r) \end{pmatrix} \cos(m\varphi) \sin(n\zeta)^1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Mit $\zeta = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2z}{H}\right)$ sind hierin die Randbedingungen $\Phi_c = 0$ für $z = \pm \frac{H}{2}$ stets erfüllt und es ist ferner $\Phi(r, \varphi, \zeta) = \Phi(r, -\varphi, \zeta)$, wenn man die Quelle bei $r_s = (r_s, 0, \zeta_s)$ annimmt.

S_{1l} und S_{2l} sind Kopplungsfaktoren; mit $D/\Sigma = L^2$ ist

$$S_{1l} = \frac{p \Sigma_{1c}}{k_l \Sigma_{ac}} (1 + L_{1c}^2 B_{1l}^2), \quad (19a)$$

$$S_{2l} = \frac{p \Sigma_{1c}}{k_l \Sigma_{ac}} (1 + L_{1c}^2 B_{2l}^2). \quad (19b)$$

Ferner ist

$$\left. \begin{aligned} \mu_l^2 = -B_{1l}^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \\ \nu_l^2 = B_{2l}^2 - \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{1}{L_{1c}^2} - \frac{1}{L_{2c}^2}\right)^2 + \frac{4k_l}{L_{1c}^2 L_{2c}^2}} \pm \left(\frac{1}{L_{1c}^2} + \frac{1}{L_{2c}^2} + 2\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\right) \right]. \quad (20)$$

Für den Fluß im Reflektor gilt mit $a^2 = \frac{1}{L^2} + \left(\frac{n}{\pi H}\right)^2$ und

$$Z_m(ar) = I_m(ar) - \frac{I_m(aR)}{K_m(aR)} K_m(ar) \quad (21)$$

die Gleichung

$$\Phi_{Rl}(r, \varphi, \zeta) = \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ S_3 E_l & F_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_m(a_1 r) \\ Z_m(a_2 r) \end{pmatrix} \cos(m\varphi) \sin(n\zeta). \quad (22)$$

Darin ist

$$S_3 = \frac{D_{1R}}{\Sigma_{aR}} \frac{1}{L_{1R}^2 - L_{2R}^2}. \quad (23)$$

Mit Gl. (21) ist die Randbedingung $\Phi(R, \varphi, \zeta) = 0$ erfüllt. Aus den Anschlußbedingungen an der Grenzfläche Core-Reflektor Gl. (7a, b) ergibt sich zur Bestimmung der Konstanten C_l, E_l, F_l und der Eigenwerte k_l das homogene algebraische Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc} I_m(\mu_l R_c) & J_m(\nu_l R_c) \\ S_{1l} I_m(\mu_l R_c) & S_{2l} J_m(\nu_l R_c) \\ D_{1c} \mu_l I'_m(\mu_l R_c) & D_{1c} \nu_l J'_m(\nu_l R_c) \\ D_{2c} S_{1l} \mu_l I'_m(\mu_l R_c) & D_{2c} S_{2l} \nu_l J'_m(\nu_l R_c) \\ -Z_m(a_1 R_c) & 0 \\ -S_3 Z_m(a_1 R_c) & -Z_m(a_2 R_c) \\ -D_{1R} a_1 Z'_m(a_1 R_c) & 0 \\ -D_{2R} S_3 a_1 Z'_m(a_1 R_c) & -D_{2R} a_2 Z'_m(a_2 R_c) \end{array} \right) \times \quad (24)$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 \\ C_l \\ E_l \\ F_l \end{pmatrix} = 0.$$

Hierbei bedeutet ' jeweils die Ableitung nach dem ganzen Argument.

Mit den gleichen Lösungsfunktionen, nur mit anderen Koeffizienten, schreiben sich die Flußvektoren der adjungierten Eigenfunktionen für Core und Reflektor:

$$\Phi_{c_l}^+(r, \varphi, \zeta) = \begin{pmatrix} 1 & C_l^+ \\ S_{1l}^+ & S_{2l}^+ C_l^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m(\mu_l r) \\ J_m(\nu_l r) \end{pmatrix} \cos(m\varphi) \sin(n\zeta), \quad (25a)$$

$$\Phi_{R_l}^+(r, \varphi, \zeta) = \begin{pmatrix} E_l^+ & S_3^+ F_l^+ \\ 0 & F_l^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_m(a_1 r) \\ Z_m(a_2 r) \end{pmatrix} \cos(m\varphi) \sin(n\zeta). \quad (25b)$$

Das Randwertproblem für den Quellfluß Φ_0 hat, wie sich leicht zeigen läßt, mit

$$\delta(r - r_s) = \frac{1}{r} \delta(r - r_s) \delta(\varphi) \delta(\zeta - \zeta_s)$$

die Lösung

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(r, t) = \frac{4v_0 S_0}{\pi R^2 H} \sum_{\nu, m, n} \frac{J_m\left(j_{m,\nu} \frac{r_s}{R}\right) \sin(n\zeta_s)}{(1 + \delta_{0m}) J_m^2(j_{m,\nu})} \times \\ \times J_m\left(j_{m,\nu} \frac{r}{R}\right) \cos(m\varphi) \sin(n\zeta) \cdot e^{q_{\nu, m, n} t}. \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

Dabei ist

$$J_m(j_{m,\nu}) = 0$$

und

$$q_{\nu, m, n} = -\frac{1}{l_0} \left[1 + L_0^2 \left(\left(\frac{j_{m,\nu}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \right) \right]. \quad (26b)$$

Da zur Abbremsung der Quellneutronen von 14 auf 2 MeV (obere Grenze der schnellen Gruppe) nur wenige Stöße erforderlich sind, haben diese Neutronen nur eine sehr kleine Lebensdauer ($l_0 = \frac{1}{v_0 \Sigma_0} \approx 8,3 \cdot 10^{-9} \text{sec}$); der Quellfluß ist $\approx 0,06 \mu\text{sec}$ nach dem Impuls auf 1⁰/₁₀₀ des Anfangswertes abgefallen.

Mit den soeben dargestellten Eigenfunktionen lassen sich die in Gl. (17) enthaltenen Skalarprodukte bilden; auf die Wiedergabe der sehr umfangreichen Ausdrücke kann hier jedoch verzichtet werden. Es sei lediglich bemerkt, daß alle Eigenfunktionen das Produkt $\cos(m\varphi) \cdot \sin(n\zeta)$ enthalten, wodurch sie in den Koordinatenrichtungen φ und ζ stets orthogonal sind. Dadurch reduziert sich das Gleichungssystem Gl. (17) auf ein einfach unendliches.

V. Die Auflösung des Gleichungssystems für die Entwicklungskoeffizienten \bar{A}_l und deren Rücktransformation

Zur Verringerung des weiteren Aufwandes sei angenommen, daß im Experiment die Meßsonde auf der Achse des Reaktors liegt. Da für $r = 0$ nur die Besselfunktionen 0-ter Ordnung einen Beitrag liefern, bleibt von der Summation über m nur $m = 0$ übrig; die Entwicklungskoeffizienten haben dann nur noch die Indizierung l, n . Mit den Bezeichnungen

$$a_{kl, n} = \frac{(\Phi_k^{+*}, v^{-1} \Phi_l)_n}{(\Phi_k^{+*}, \bar{\Phi}_k)_n}, \quad (27)$$

wobei speziell $a_{kk, n} = \bar{l}_{k, n}$ gesetzt wird, und

$$\bar{l}_{k, n}(q) = \frac{(\Phi_k^{+*}, \bar{\Phi}_0)_n}{(\Phi_k^{+*}, \bar{\Phi}_k)_n} \quad (28)$$

¹ Der Index l steht hier für die dreidimensionale Indizierung mit l, m, n .

ist dann für jedes feste $n = 1, 2, 3 \dots$ das einfach unendliche Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{k,n} \left[k_{\infty} \left(1 - \beta + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + q} \right) - k_{k,n} \right] - \\ - q \sum_{l=1}^{\infty} \bar{A}_{l,n} \cdot a_{kl,n} = - \Sigma_0 \bar{f}_{k,n}(q) \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} (29)$$

zu lösen. Die Lösung spaltet man zweckmäßigerweise in zwei Anteile auf, die jeweils kleinen bzw. großen Werten von q entsprechen. Bei kleinen Werten von q kann man den Summenterm in Gl. (29) praktisch vernachlässigen. Man erkennt dies unmittelbar aus der Differentialgleichung (9). Der Operator

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} - q v^{-1} &= \begin{pmatrix} D_1 \Delta - \Sigma_1 - \frac{q}{v_1} & 0 \\ p \Sigma_1 & D_2 \Delta - \Sigma_a - \frac{q}{v_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1 \Delta - \Sigma_1 (1 + l_1 q) & 0 \\ p \Sigma_1 & D_2 \Delta - \Sigma_a (1 + l_2 q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

enthält in den Hauptelementen Terme mit $(1 + l_1 q)$ bzw. $(1 + l_2 q)$. Vernachlässigt man bei kleinen Werten von q die Produkte $l_1 q$ und $l_2 q$ als klein gegenüber 1, so fällt in Gl. (29) der Summenterm ganz fort. Eine bessere Näherung erhält man jedoch, wenn man von dieser Summe noch das Glied $q \cdot l_{i,n}$ verwendet, aber die Glieder $q \cdot a_{kl,n} \ll q l_{i,n}$ vernachlässigt. Das Gleichungssystem zerfällt dann in jeweils eine Gleichung für $\bar{A}_{l,n}$:

$$\bar{A}_{l,n}(q) = - \Sigma_0 \frac{\bar{f}_{l,n}(q)}{k_{\infty} \left(1 - \beta + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + q} \right) - k_{l,n} - q l_{i,n}} \quad (30)$$

Hierbei kann dann auch in $\bar{f}_{l,n}(q)$ mit $q \ll q_{v,n}$ die Abhängigkeit von q vernachlässigt werden.

Bezeichnet man mit $q_{j,n}$ die Nullstellen des Nenners von Gl. (30), so ergibt die Rücktransformation unter Verwendung des Residuensatzes (bei sechs Gruppen verzögerter Neutronen)

$$A_{l,n}(t) = \Sigma_0 \bar{f}_{l,n}(0) \sum_{j=1}^7 \frac{e^{q_{j,n} t}}{k_{\infty} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i \lambda_i}{(\lambda_i + q_{j,n})^2} + l_{i,n}} \quad (31)$$

Diese Näherungsformel gilt für diejenigen Wurzeln $q_{j,n}$, deren Betrag in der Größenordnung der λ_i liegt. Damit ist bei allen (l, n) der Anteil der verzögerten Neutronen erfaßt. Für die Grundwelle (1,1) gilt die Formel bei nahezu kritischem Reaktor auch für die prompten Neutronen.

Bei größeren q -Werten gelten die vorigen Überlegungen nicht mehr; man kann dann jedoch in Gl. (29)

den Term $\sum_{i=1}^6 \beta_i \lambda_i / (\lambda_i + q)$ vernachlässigen.

Verwendet man zur näherungsweisen Lösung der Gleichungssysteme die ersten s Gleichungen, so erhält man z.B. für $s=3$ die Gleichung

$$\left(\begin{array}{cc} (k_{\infty}(1-\beta) - k_1 - q l_1) & -q a_{12} \\ -q a_{21} & (k_{\infty}(1-\beta) - k_2 - q l_2) \\ -q a_{31} & -q a_{32} \\ -q a_{13} & \\ -q a_{23} & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{pmatrix} = - \Sigma_0 \begin{pmatrix} \bar{f}_1(q) \\ \bar{f}_2(q) \\ \bar{f}_3(q) \end{pmatrix} \quad (32)$$

(Der Index n ist hier fortgelassen.)

Es ist nun zu berücksichtigen, daß auch die $\bar{f}_{l,n}(q)$ Unterfunktionen sind; sie mögen zufolge den Gln. (28) und (26a) in der Form

$$\bar{f}_{l,n}(q) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{Q_{l,v,n}}{q - q_{v,n}}$$

geschrieben werden mit $q_{v,n} = q_{v,0,n}$ nach Gl. (26b).

Bezeichnet man nun noch mit $\Delta(q)$ die Determinante des Gleichungssystems (32) und mit $P_{r,l,n}(q)$ die Unterdeterminante, die zum Element r, l von $\Delta(q)$ gehört, so ist

$$\bar{A}_{l,n}(q) = - \Sigma_0 \sum_{r=1}^s (-1)^{r+l} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{Q_{r,v,n}}{q - q_{v,n}} \right) \frac{P_{r,l,n}(q)}{\Delta(q)} \quad (33)$$

$\Delta(q)$ ist ein Polynom s -ten Grades in q , dessen Koeffizienten alle das gleiche Vorzeichen haben (Hurwitz-Polynom), so daß die Nullstellen $q = \lambda_{\mu,n}$ alle negativ sind. $P_{r,l,n}$ ist ein Polynom vom Grade $(s-1)$ mit Nullstellen $\neq \lambda_{\mu,n}$. Die Rücktransformation von Gl. (33) ergibt dann unmittelbar

$$\left. \begin{aligned} A_{l,n}(t) \\ = - \Sigma_0 \sum_{r=1}^s (-1)^{r+l} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{Q_{r,v,n} \cdot P_{r,l,n}(q_{v,n})}{\Delta(q_{v,n})} e^{q_{v,n} t} + \right. \\ \left. + \sum_{\mu=1}^s \frac{f_{r,n}(\lambda_{\mu,n}) P_{r,l,n}(\lambda_{\mu,n})}{\Delta'(\lambda_{\mu,n})} e^{\lambda_{\mu,n} t} \right) \end{aligned} \right\} (34)$$

' bedeutet die Ableitung nach q .

Damit sind in dem Ansatz

$$\Phi(\zeta, t) = \sum_{l,n} A_{l,n}(t) \Phi_{l,n}(\zeta) \quad (35)$$

die Entwicklungskoeffizienten bestimmt. Ordnet man die Reihenentwicklung in Gl. (34) und (35) etwas um, so erhält man schließlich zusammen mit Gl. (31)

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta, t) = - \Sigma_0 \sum_{v=1; n=1}^{\infty; \infty} \left(\sum_{l=1}^s \left[\sum_{r=1}^s (-1)^{r+l} Q_{r,v,n} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times P_{r,l,n}(q_{v,n}) \right] \Phi_{l,n}(\zeta) \right) \frac{e^{q_{v,n} t}}{\Delta(q_{v,n})} - \\ - \Sigma_0 \sum_{\mu=1; n=1}^{s; \infty} \left[\frac{1}{\Delta'(\lambda_{\mu,n})} \sum_{l=1}^s \left(\sum_{r=1}^s (-1)^{r+l} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \bar{f}_{r,n}(\lambda_{\mu,n}) P_{r,l,n}(\lambda_{\mu,n}) \right) \Phi_{l,n}(\zeta) \right] e^{\lambda_{\mu,n} t} + \\ + \Sigma_0 \sum_{l=1; n=1}^{s; \infty} \bar{f}_{l,n}(0) \Phi_{l,n}(\zeta) \times \\ \times \sum_{j=1}^6 \frac{e^{q_{j,n} t}}{k_{\infty} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i \lambda_i}{(\lambda_i + q_{j,n})^2} + l_{i,n}} \end{aligned} \right\} (36)$$

Mit dieser Gleichung ist der zeitabhängige schnelle und thermische Fluß auf der Achse des Reaktors vollständig beschrieben. Die erste Reihe mit den Zeitfaktoren $\exp(q_{v,n} t)$ stellt den unmittelbar von den Quellneutronen herrührenden Anteil dar. Da er schon nach wenigen Mikrosekunden abgeklungen ist, geht er im Zeitraum der Flußmessung, die erst einige Millisekunden nach dem Impuls beginnt, nicht mehr in die Meßwerte ein.

Die zweite Zeile enthält den Anteil der prompten Neutronen und ist nach den Zeitfunktionen $\exp(\lambda_{\mu,n}t)$ geordnet. Der Inhalt der eckigen Klammer ist dabei als eine abgebrochene Entwicklung der dynamischen Eigenfunktion nach den stationären $\Phi_{l,n}$ aufzufassen, die für $s \rightarrow \infty$ streng wird.

Die dritte Reihenentwicklung, die nach den stationären Eigenfunktionen geordnet ist, ergibt die nur langsam abklingenden Beiträge der verzögerten Neutronen.

VI. Abklingkonstanten $\lambda_{\mu,n}$ und Meßzeitgrenzen

Die Zerfallskonstanten $\lambda_{\mu,n}$ des prompten Flusses sind die Nullstellen der Gleichungsdeterminante $\Delta(q)$ des Gleichungssystems Gl. (32). Diese Determinante enthält nur die in der Zwei-Gruppen-Rechnung in Core und Reflektor auftretenden physikalischen und geometrischen Daten; irgendwelche Größen der Quellflußgruppe gehen hier – wie leicht einzusehen – nicht ein.

In den Elementen der Hauptdiagonalen der Determinante erscheint jeweils der im 1. Abschnitt eingeführte Multiplikationsfaktor k_∞ des unendlich ausgedehnten, homogenisierten Cores. Um die Schwierigkeiten zu vermeiden, die sich aus einer Berücksichtigung von zusätzlichen Absorberstäben im Core ergeben, sei für die folgenden Betrachtungen angenommen, daß deren Wirkung in der Größe von k_∞ mit enthalten ist.

Im Falle des kritischen Reaktors existiert zeitlich konstant nur die Grundwelle $\Phi_{1,1}$ der stationären Eigenfunktionen, und es ist daher sinnvoll, k_∞ zu ihrem Eigenwert $k_{1,1}$ in Beziehung zu setzen. Das ergibt den effektiven Multiplikationsfaktor

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_\infty}{k_{1,1}} \tag{37}$$

Mit der üblichen Definition der Reaktivität

$$\rho = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} \tag{38}$$

ist dann

$$k_\infty = \frac{k_{1,1}}{1 - \rho} \tag{39}$$

Damit ist über

$$\Delta(\lambda_{\mu,n}(\rho)) = 0 \tag{40}$$

der Zusammenhang zwischen den Zerfallskonstanten $\lambda_{\mu,n}$ der einzelnen dynamischen Eigenfunktionen und der Reaktivität ρ hergestellt.

Bei einer numerischen Berechnung der Abklingkonstanten $\lambda_{\mu,n}(\rho)$ zeigt sich nun jedoch, daß sie im wesentlichen durch die Diagonalelemente von $\Delta(q)$ bestimmt werden, während die Nebenelemente nur geringfügige Korrekturen ergeben. Dies bedeutet, daß man speziell bei den niedrig indizierten $\bar{A}_{l,n}$ praktisch mit jeweils nur einer Gleichung von (32) auskommt. Für die letztlich allein interessierende Grundwelle führt dies dann wieder auf die Gln. (30) und (31) zurück, wobei sich die sieben Abklingkonstanten $q_{j,1}$ für den prompten und verzögerten Fluß aus der bekannten Inhour-Gleichung

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i q}{\lambda_i + q} + q \frac{l_{1,1}}{k_{1,1}} (1 - \rho) - \rho = 0 \tag{41}$$

bestimmen lassen.

Die Abklingkonstanten $\lambda_{\mu,n}$ des prompten Flusses werden lediglich zur Abschätzung des Zeitpunktes benötigt, nach dem die Oberwellen abgeklungen sind, so daß in die Flußmessung praktisch nur noch die Grundwelle eingeht. Hierfür genügt in guter Näherung die aus den Diagonalelementen von $\Delta(q)$ folgende Beziehung

$$\lambda_{\mu,n}(\rho) \approx \frac{1}{l_{1,n}} \left[k_{1,1} \frac{1 - \beta}{1 - \rho} - k_{l,n} \right] \tag{42}$$

Nach Gl. (36) läßt sich der zeitabhängige thermische prompte Neutronenfluß in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \Phi_2(\zeta, t) = & \varphi_{1,1}(\zeta) e^{\lambda_{1,1}t} + \varphi_{2,1}(\zeta) e^{\lambda_{2,1}t} + \dots \\ & + \varphi_{1,2}(\zeta) e^{\lambda_{1,2}t} + \dots \\ & + \varphi_{1,3}(\zeta) e^{\lambda_{1,3}t} + \dots, \end{aligned}$$

wobei die $\varphi_{\mu,n}(\zeta)$ die thermischen Komponenten der dynamischen Eigenfunktionen darstellen. Es wird nun nach dem Zeitpunkt $t_{\mu,n}^{(1)}$ gefragt, in dem der Betrag der Eigenfunktionen (μ, n) auf einen Bruchteil ε der Grundwelle abgeklungen ist. Es soll also sein

$$\varepsilon |\varphi_{1,1}| e^{\lambda_{1,1}t_{\mu,n}^{(1)}} = |\varphi_{\mu,n}| e^{\lambda_{\mu,n}t_{\mu,n}^{(1)}}$$

Daraus folgt

$$t_{\mu,n}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{\mu,n} - \lambda_{1,1}} \cdot \ln \left| \varepsilon \frac{\varphi_{1,1}}{\varphi_{\mu,n}} \right| \tag{43}$$

In ähnlicher Weise läßt sich ein Zeitpunkt $t^{(2)}$ angeben, von dem an die verzögerten Neutronen der Grundwelle – näherungsweise durch eine mittlere Gruppe dargestellt – mehr als einen Bruchteil ε der prompten Neutronen ausmachen. Sofern das durch $t^{(2)} - t^{(1)}$ gebildete Meßzeitintervall zu klein ist, kann man auch über den Zeitpunkt t hinaus messen; man muß dann aber bei der Auswertung eine Korrektur für die verzögerten Neutronen anbringen.

Hierzu formt man Gl. (31) um, indem man mit

$$a_j = \frac{1}{1 + \frac{k_{1,1}}{l_{1,1}(1 - \rho)} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i \lambda_i}{(\lambda_i + q_j)^2}} \tag{44}$$

zunächst schreibt

$$A_{1,1}(t) = \sum_0 \frac{\bar{f}_{1,1}(0)}{l_{1,1}} \sum_{j=1}^7 a_j e^{q_j t} \tag{45}$$

Bezeichnet man mit q_1 die Abklingkonstante des prompten Flusses und berücksichtigt $\sum_{j=1}^7 a_j = 1$, so ist

$$A_{1,1}(t) = \sum_0 \frac{\bar{f}_{1,1}(0)}{l_{1,1}} e^{q_1 t} \cdot F(t, \rho) \tag{46}$$

mit

$$F(t, \rho) = 1 + \sum_{j=1}^7 a_j (e^{(q_j - q_1)t} - 1) \tag{47}$$

Damit ist das zeitliche Verhalten der Grundwelle dargestellt als Produkt der gesuchten Funktion $e^{q_1 t}$ mit einem Korrekturfaktor, der mit $t \rightarrow 0$ gegen 1 strebt, wobei der Zusammenhang zwischen q_1 und ρ durch Gl. (41) oder näherungsweise durch Gl. (42) gegeben ist. Da es bei der Flußmessung nicht auf den Absolutbetrag ankommt, sind die in $\sum_0 \cdot \bar{f}_{1,1}(0)$ zufolge Gl. (26) und (28) enthaltenen Annahmen für den Quellfluß hier ohne Bedeutung.

VII. Numerische Ergebnisse

Zur Beurteilung der Wirkung des Reflektors und der im vorigen Abschnitt eingeführten Näherung wurden mit den physikalischen und geometrischen Daten des FR 2 (s. Tabelle 1) eine Reihe numerischer Rechnungen durchgeführt. Zunächst wurden die Eigenwerte $k_{l,n}$ der stationären Eigenfunktionen nach Gl. (24) und damit dann die in den Gln. (27) und (28) auftretenden Flußintegrale berechnet und zwar a) für variablen Coreradius bei voller Reaktorhöhe $H=256$ cm und b) für variable Reaktorhöhe (D_2O -Absenkung) bei maximalem Coreradius $R_c=130$ cm.

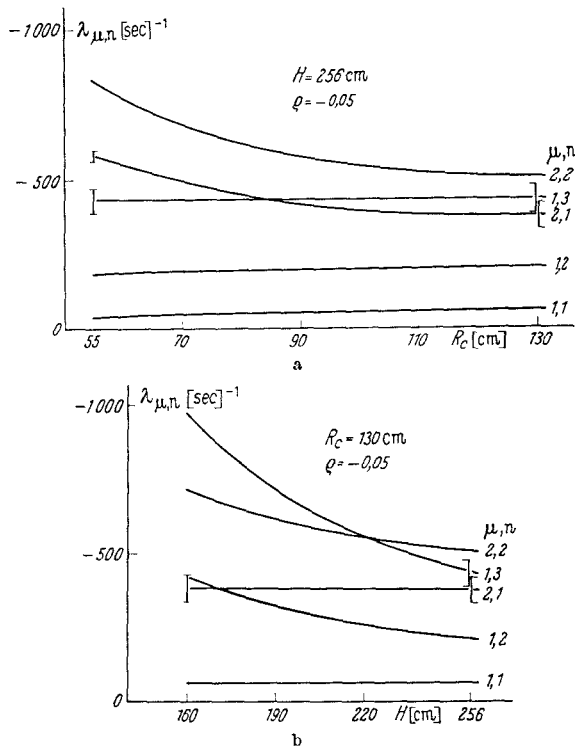


Abb. 1a u. b. Abklingkonstanten $\lambda_{\mu,n}$ für $q = -0,05$. a Bei variablem Coreradius; b bei variabler Reaktorhöhe

Für die Grundwelle und die nächst höheren Oberwellen sind in Tabelle 2 die Eigenwerte $k_{l,n}$ und in Tabelle 3 die einflußgewichteten effektiven Lebensdauern $l_{l,n}^* = l_{l,n}/k_{l,n}$ angegeben.

Diese Zahlenwerte zeigen sehr deutlich den Einfluß des radialen Reflektors. Bei kleinem R_c , also großer Reflektordicke, ist die effektive Lebensdauer in allen Wellenformen am größten. Ihre Änderung bei variabler Reaktorhöhe geht bei kleinem radialem Reflektor praktisch nur auf die Änderung der axialen Flußwölbung zurück. Trotz Verkleinerung der Höhe von 256 auf 160 cm verringert sich $l_{1,1}^*$ (linear mit $1/H^2$) nur um 4%.

Mit den Werten für $k_{l,n}$ und $l_{l,n}$ sind sodann für $q = -0,05$ die Abklingkonstanten $\lambda_{\mu,n}$ nach Gl. (42) berechnet worden. Ihre Darstellung in Abb. 1a, b zeigt, daß lediglich die erste axiale Oberwelle ($\lambda_{1,2}$) eine gegenüber $\lambda_{1,1}$ relativ kleine Abklingkonstante hat, während die anderen Oberwellen wesentlich schneller abklingen. Die Oberwelle (1,2) kann man jedoch bei der Messung durch Anordnung der Meßsonde im Mittelpunkt des Reaktors ($r=0; \zeta=\pi/2$) unterdrücken und braucht dann nur die Eigenfunktionen (2,1) und (1,3) für die auch die Grenzwerte für

Tabelle 1

Diffusionskonstanten:	Diffusionslängen:
$D_{1c} = D_{1R} = 1,12$ cm	$L_{1c}^2 = L_{1R}^2 = 112$ cm ²
$D_{2c} = D_{2R} = 0,806$ cm	$L_{2c}^2 = 180$ cm ² $L_{2R}^2 = 10^4$ cm ²
Lebensdauern	
$l_{1c} = l_{1R} = 0,77 \cdot 10^{-7}$ sec;	$l_{2c} = 0,90 \cdot 10^{-3}$ sec; $l_{2R} = 0,050$ sec
Neutronengeschwindigkeiten	
Schnelle Gruppe	$v_1 = 1,30 \cdot 10^9$ cm/sec
thermische Gruppe	$v_2 = 2,48 \cdot 10^5$ cm/sec
Resonanzentkommwahrscheinlichkeit $p = 0,937$	
Reaktorradius	$R = 155$ cm
Reaktorhöhe	$H = 256$ cm
Coreradius	$R_c = 70 \dots 130$ cm

Tabelle 2. Stationäre Eigenwerte $k_{l,n}$

R_c (cm)	$k_{1,1}$	$k_{1,2}$	$k_{1,3}$	$k_{2,1}$	$k_{2,2}$
70	1,17808	2,28852	1,35736	1,65670	1,58312
90	1,14264	1,79850	1,30393	1,54314	1,52267
110	1,12542	1,57766	1,27604	1,52267	
130	1,11851	1,47870	1,26323	1,52267	
$H = 256$ cm					
H (cm)					
160	1,19274	1,56589	1,59054	2,37319	1,94477
190	1,15703	1,52399	1,42938	1,94477	1,69999
220	1,13516	1,49829	1,33440	1,69999	1,52267
256	1,11851	1,47870	1,26323	1,52267	
$R_c = 130$ cm					

Tabelle 3. Einflußgewichtete effektive Lebensdauern $l_{l,n}^*$

R_c (cm)	$l_{1,1} \cdot 10^3$	$l_{1,2} \cdot 10^3$	$l_{1,3} \cdot 10^3$	$l_{2,1} \cdot 10^3$ (sec)	$l_{2,2} \cdot 10^3$ (sec)
70	1,18965	1,04582	0,947458	0,760378	0,737893
90	1,01853	0,959627	0,876243	0,721503	0,706305
110	0,911986	0,853379	0,826258	0,706305	
130	0,855013	0,756818	0,792307	0,706305	
$H = 256$ cm					
H (cm)					
160	0,821188	0,728838	0,686833	0,542056	0,609598
190	0,836982	0,741920	0,734224	0,660704	0,660704
220	0,847083	0,750274	0,765854	0,660704	0,660704
256	0,855013	0,756818	0,792307	0,706305	0,706305
$R_c = 130$ cm					

$q=0$ und $q=-0,1$ eingezeichnet sind, durch geeignete Wahl der unteren Meßzeitgrenze zu eliminieren. Hierfür genügen nach Gl. (43) mit $\epsilon=1\%$ etwa 12 ... 15 msec Wartezeit nach dem Impuls. Die höheren Oberwellen sind dann in jedem Falle auf einen Bruchteil $\ll \epsilon$ abgeklungen, zumal auch ihre Amplituden mit steigendem Index (l, n) kleiner werden.

Je nach der Größe von R_c und q wächst der Anteil des verzögerten Flusses 40 ... 50 msec nach dem Impuls auf 1% des prompten Flusses an.

Für $q = -0,05$, $H = 256$ cm und $R_c = 130 \dots 70$ cm weichen die Werte von $\lambda_{2,1}$ und $\lambda_{1,3}$ aus dem Diagonalelement und der dreizeiligen Determinante $\Delta(q)$ um 0,2 ... $\approx 6\%$ voneinander ab. Diese Unterschiede sind vernachlässigbar klein, da sie die untere Meßzeitgrenze praktisch nicht beeinflussen. Bei $\lambda_{1,1}$ ist die Genauigkeit größer; die Abweichung beträgt hier bei $R_c=130$ cm nur $-0,35\%$ bei und $R_c=70$ cm $-2,0\%$.

VIII. Schlußbemerkung

Die im vorigen eingeführten Näherungen gelten um so besser, je kleiner die Reflektordicke ist. Im Grenzfall $R_c=R$ sind die Eigenfunktionen auch in radialer Richtung orthogonal, das Gleichungssystem Gl. (29)

tritt dann gar nicht auf, und die Gln. (30) und (31) gelten streng, auch für den prompten Fluß und alle Werte von ρ .

Wie sich aus den numerischen Rechnungen ergab, kann man bei nahezu oder ganz aufgefülltem Core ($R_c = 90 \dots 130$ cm) ohne wesentlichen Fehler mit jeweils nur einer Gleichung des Gleichungssystems Gl. (29) rechnen, wodurch die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens sehr erleichtert wird.

Der Verfasser möchte nicht versäumen, den Herren Dr. MEETZ und Dr. HÄFELE für klärende Diskussionen und Fräulein R. KUHN für ihre mühevollen Program-

mierungsarbeit bei den numerischen Rechnungen seinen besten Dank zu sagen.

Literatur: [1] SIMMONS, B.E., and J.S. KING: A pulsed Neutron Technique for Reactivity Determination. *Nuclear Sci. Eng.* **3**, 595 (1958). — [2] MORSE-FESHBACH, S.: *Methods of theoretical physics*, Kap. 6,7. New York: McGraw-Hill 1953. — [3] GLASSTONE-EDLUND: *The Elements of Nuclear Reactor Theory*. New York: Van Nostrand 1957. — [4] GRÜMM, H., u. K.H. HÖCKER: *Lineare Reaktorkinetik und Störungstheorie*. In: *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, Bd. 30. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958. — [5] GRÜMM, H.: Die Einflußfunktion des Reaktors mit Reflektor nach der Zweigruppen-Diffusionsmethode. *Z. angew. Physik* **9**, 335 (1957).