

KFK-106

# KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

März 1962

KFK 106

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Monoenergetische Behandlung des Neutronen-Transportproblems  
in Brennstoffproben und Wigner-Seitz-Zellen

H. Küsters und K. Ott

**KERNREAKTOR**  
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. B. H.  
Verwaltung der Zentralbücherei

27. Aug 1962



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

## KERNREAKTOR

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
Verwaltung der Zentraibücherei

### Monoenergetische Behandlung des Neutronen-Transportproblems in Brennstoffproben und Wigner-Seitz-Zellen

Von H. <sup>[ein Z]</sup>KÜSTERS und K. <sup>[StC]</sup>OTT

(Aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik des Kernforschungszentrums Karlsruhe)

Mit 13 Textabbildungen

(Eingegangen am 27. November 1961)

#### Einleitung

Bei theoretischen Untersuchungen des Neutronenflusses in Substanzen mit kleinen geometrischen Abmessungen, in denen die Diffusionstheorie bekanntlich sehr ungenaue Ergebnisse liefert, wurden bisher im wesentlichen drei Wege beschritten:

1. Die  $P_n$ -Methode [1], [2], bei der die Winkelverteilung der Neutronen nach Kugelfunktionen entwickelt wird. Diese Reihe, die nach der Kugelfunktion  $n$ -ter Ordnung abgebrochen wird, liefert mit wachsendem  $n$  eine sukzessive Verbesserung der Diffusionstheorie. Daraus folgt, daß diese Methode bei kleinem  $n$  nur dann zu einem genauen Ergebnis führt, wenn die Abweichung von der Diffusionstheorie nicht allzu groß ist. Für  $n > 5$  wird eine  $P_n$ -Approximation bei zylindrischer Geometrie jedoch so aufwendig, daß sie für praktische Berechnungen nicht mehr in Frage kommt. Andererseits müßte man aber bis zu Kugelfunktionen von höherer Ordnung als fünf entwickeln, wenn man den Neutronenfluß in kleinen, relativ stark absorbierenden Medien beschreiben will [3].

2. Die Vielfachstoßmethode [4] bis [7], bei der sukzessive die Neutronenverteilung nach dem  $n$ -ten Stoß und daraus durch Überlagerung der Neutronenfluß berechnet werden. Diese Methode liefert insbesondere dann gute Ergebnisse, wenn der Fluß sich aus Neutronen zusammensetzt, die in dem betrachteten Medium nur wenige Stöße machen. Flußberechnungen in ausgedehnten Moderatorbereichen sind nach dieser Methode nicht möglich. Die zitierten Autoren berechnen deshalb im Moderator den Fluß nach der Diffusionstheorie.

3. Die  $S_n$ -Methode [8], bei der die differentielle Form der Transportgleichung total-numerisch gelöst wird. Die Winkelverteilung wird dabei in  $n$  Abschnitte eingeteilt. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß mit ihr das Mehr-Medienproblem verglichen mit dem Zwei-Medienproblem ohne großen Aufwand behandelt werden kann. Die Konvergenz dieser Methode (bei festem  $n$ ) ist jedoch sehr schlecht, so daß sie für kleinere Rechenmaschinen praktisch nicht in Frage kommt.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Flußberechnung in Medien mit zylindrischer, sphärischer und ebener Geometrie ähnlich wie in der Vielfachstoßtheorie durchgeführt, wobei jedoch nicht nach der Ordnung der Stöße entwickelt, sondern der unter dem Streuintegral auftretende Neutronenfluß durch eine Reihe in  $r^2$  beschrieben wird, wodurch formal Stöße bis zu unendlich hoher Ordnung berücksichtigt werden. Dabei geht die Boltzmannsche Integralgleichung in ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der  $r^2$ -Entwicklung über. Als inhomogenes Glied tritt in diesem Gleichungssystem der Flußbeitrag der unmittelbar von außen einlaufenden Neutronen auf, der der Einfachstoßverteilung entspricht. Die Berechnung dieses Anteils ist nach der hier entwickelten Methode für beliebige Anisotropie des einlaufenden Neutronenstromes möglich und für Zylindersymmetrie in Abschnitt I dargestellt.

Die hohe Genauigkeit der Berechnung des Neutronenflusses im Brennstoff kann jedoch nicht voll ausgenutzt werden, wenn der einlaufende Strom nach der Vorschrift der Diffusionstheorie aus dem Gradienten des Neutronenflusses am Stabrand berechnet wird, wie dies bei allen Anwendungen der Vielfachstoßtheorie geschieht. Daher wird in dieser Arbeit der einlaufende Strom aus dem strengen transporttheoretischen Integral berechnet (II,1). Der Neutronenfluß im Moderator wird durch eine verbesserte Diffusionslösung beschrieben (II,2). Die Krümmung am Rand der Wigner-Seitz-Zelle wird durch direkte numerische Integration der Boltzmann-Gleichung geprüft (II,3). In den Abschnitten III bzw. IV wird diese Methode auf ebene und kugelsymmetrische Probleme angewandt.

#### I. Der Neutronenfluß in einem Kreiszyylinder

##### 1. Umformung der Transportgleichung

Die allgemeinere Form der Boltzmannschen Transportgleichung monoenergetischer Neutronen läßt sich erheblich vereinfachen, wenn man über die Geometrie

und die Neutronenstreuung die folgenden Voraussetzungen macht:

1. Geometrie sei unabhängig von  $z$  und  $\varphi$ , den Koordinaten längs der Zylinderachse und dem zugehörigen Azimutwinkel.

2. Der betrachtete Zylinder sei homogen.

3. Die Neutronenstreuung sei isotrop im Laborsystem (was an Brennstoffkernen gut erfüllt ist).

Die Substanz des Kreiszylinders wird im folgenden mit Uran bezeichnet. Den Uranzylinder denken wir uns in ein Moderatorvolumen beliebiger radialer Ausdehnung eingebettet, was die Gültigkeit der Abschnitte I.1 bis I.3 jedoch nicht beeinflusst.

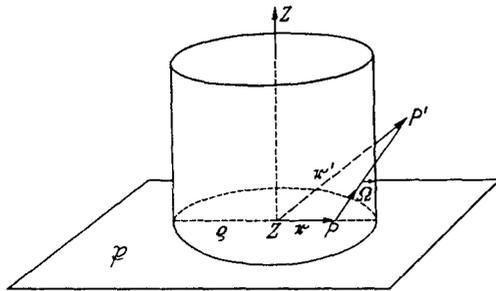


Abb. 1

Bezeichnet man die Neutronenflußdichte mit  $\Phi(r)$  und den Streu- bzw. den totalen Wirkungsquerschnitt mit  $\Sigma_s(r)$  bzw.  $\Sigma(r)$ , dann schreibt sich die Transportgleichung für den Neutronenfluß im „Uran“ in der Form:

$$\Phi_U(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} \Sigma_s(r') \Phi(r') e^{-\int_0^{r'} \Sigma(r+\vec{\Omega}\lambda) d\lambda} \frac{dr'}{|r-r'|^2} + \left. \begin{aligned} &+ \int_{(V)} Q(r') e^{-\int_0^{r'} \Sigma(r+\vec{\Omega}\lambda) d\lambda} \frac{dr'}{|r-r'|^2}, \end{aligned} \right\} (1)$$

worin beide Integrationen über das gesamte Volumen  $V$  auszuführen sind. Da nach Voraussetzung die Be-  
randung des Uran- und des Moderatormediums von der Koordinate  $z$  nicht abhängen, braucht  $\Phi_U(r)$  nur in einer zur Stabachse senkrechten Ebene berechnet zu werden. Diese Aufpunktebene wird im folgenden mit  $\mathfrak{P}$  bezeichnet (vgl. Abb. 1)

In Abb. 1 ist  $Z$  der Schnittpunkt von  $\mathfrak{P}$  mit der Stabachse,  $P$  der Aufpunkt,  $P'$  der Quellpunkt,  $r$  der Vektor  $\vec{ZP}$ ,  $r' = \vec{ZP}'$ ,  $r = |r|$  und  $r' = |r'|$ . Mit  $\rho$  ist der Stabradius bezeichnet und mit  $\vec{\Omega}$  der von  $P$  nach  $P'$  weisende Einheitsvektor ( $-\vec{\Omega}$  ist dann die Flugrichtung der Neutronen im Aufpunkt  $P$ ). Aus Abb. 1 folgt:

$$r' = r + \vec{\Omega}l', \quad (2a)$$

wenn  $l'$  den Abstand von Quell- und Aufpunkt angibt:

$$l' = |r' - r|. \quad (2b)$$

$Q(r', \Omega)$  ist die winkelabhängige Intensität der Queldichte der thermischen Neutronen, für die in guter Näherung die folgenden Annahmen erfüllt sind:

$$Q(r', \Omega) = Q(r') \text{ ist isotrop, d. h. unabhängig von } \vec{\Omega}, \quad (3a)$$

$$Q(r') = Q, \text{ d. h. unabhängig vom Ort im Moderator}^1, \quad (3b)$$

$$Q(r') = 0 \text{ im Uran.} \quad (3c)$$

<sup>1</sup> Die Quellverteilung der thermischen Neutronen ist der Verteilung der epithermischen (nicht der schnellen) Neutronen proportional, deren Dichte wegen der geringen Flußdepression praktisch unabhängig ist vom Ort.

Damit ist

$$\int Q(r', \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = 4\pi Q(r') = Q_0(r'), \quad (4)$$

worin  $Q_0(r')$  die Neutronendivergenz pro Sekunde bezeichnet und die Abhängigkeit von  $r'$  nur noch zur Unterscheidung von Moderator und Uran gebraucht wird.

Zur Umformung der Integrale (1) spalten wir zunächst den Integrationsbereich in die beiden mit „U“ und „M“ unterschiedenen Medien auf:

$$\int_0^{r'} \Sigma(r + \vec{\Omega}\lambda) d\lambda = \left. \begin{aligned} &\Sigma^U l', && \text{wenn } P' \text{ im Uran} \\ &\Sigma^U l + \Sigma^M (l' - l), && \text{wenn } P' \text{ im Moderator liegt.} \end{aligned} \right\} (5)$$

Darin bezeichnet  $l$  den Abstand des Aufpunktes vom Stabrand in der durch  $\vec{\Omega}$  angegebenen Richtung.

Aus (1) wird damit:

$$\Phi_U(r) = \left. \begin{aligned} &\frac{\Sigma_s^U}{4\pi} \int_{(U)} \Phi_U(r') e^{-\Sigma^U l'} \frac{dr'}{l'^2} + \\ &+ \frac{\Sigma_s^M}{4\pi} \int_{(M)} \Phi_M(r') e^{-\Sigma^U l - \Sigma^M (l' - l)} \frac{dr'}{l'^2} + \\ &+ \frac{Q_0}{4\pi} \int_{(M)} e^{-\Sigma^U l - \Sigma^M (l' - l)} \frac{dr'}{l'^2}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Um den Aufpunkt  $P$  werden Kugelkoordinaten eingeführt:

$\vartheta'$  bezeichne den Winkel zwischen der Stabachse (bzw. deren Parallele in  $P$ ) und dem Vektor  $\vec{\Omega}$  und  $\varphi'$  den Winkel, den die Projektion von  $\vec{\Omega}$  in die Aufpunktebene mit der  $r$ -Achse einschließt.

Damit wird aus (6):

$$\Phi_U(r) = \left. \begin{aligned} &\frac{\Sigma_s^U}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \int_0^l \Phi_U(r + \vec{\Omega}l') \times \\ &\times e^{-\Sigma^U l'} + \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' e^{-\Sigma^U l} \times \\ &\times \int_l^\infty dl' e^{-\Sigma^M (l' - l)} \left[ \frac{\Sigma_s^M}{4\pi} \Phi_M(r + \vec{\Omega}l') + \frac{Q_0}{4\pi} \right]. \end{aligned} \right\} (7)$$

Der Neutronenfluß im Uranstab setzt sich nach (7) aus zwei Termen zusammen, von denen der erste Beitrag der im Uran mindestens einmal gestreuten Neutronen beschreibt ( $\Phi_{Str}$ ), der Zweite dagegen den Beitrag derjenigen Neutronen, die unmittelbar aus dem Moderatorraum kommen ( $\Phi_J$ ):

$$\Phi_U(r) = \Phi_{Str}(r) + \Phi_J(r), \quad (8)$$

mit

$$\Phi_{Str}(r) = \left. \begin{aligned} &= \frac{\Sigma_s^U}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \int_0^l \Phi_U(r + \vec{\Omega}l') e^{-\Sigma^U l'} dl', \end{aligned} \right\} (9a)$$

$$\Phi_J(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' J(\vartheta', \varphi') e^{-\Sigma^U l}. \quad (9b)$$

Darin gibt  $J(\vartheta', \varphi')$  den durch die Mantelfläche des Uranstabes einlaufenden Strom an:

$$J(\vartheta', \varphi') = J_\phi(\vartheta', \varphi') + J_Q(\vartheta', \varphi'), \quad (10a)$$

$$J_\phi(\vartheta', \varphi') = \frac{\Sigma_s^M}{4\pi} \int_0^\infty \Phi_M(r + \vec{\Omega}l + \vec{\Omega}\lambda') e^{-\Sigma^M \lambda'} d\lambda', \quad (10b)$$

$$J_Q(\vartheta', \varphi') = \frac{Q_0}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\Sigma^M \lambda'} d\lambda'. \quad (10c)$$

In (10b) und (10c) ist  $\lambda' = l' - l$  und  $r + \vec{\Omega}l$  ein Vektor vom Aufpunkt  $P$  zum Stabrand. [Zur oberen Grenze der beiden Integrale in (10) vgl. Abschn. II.1.).

Die Integration über  $\vartheta'$  in beiden Integralen (9) transformiert man am besten in eine solche über den Abstand  $l$  des Aufpunktes von einem Punkt des Zylindermantels:

$$l(\vartheta', \varphi') = \frac{l_0(\varphi')}{\sin \vartheta'}, \quad (11)$$

wenn  $l_0(\varphi')$  die Projektion von  $l$  in die Aufpunktebene angibt.

Damit wird aus (9):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\text{Str}}(r) = 2 \frac{\Sigma_s^U}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{l_0}^\infty \frac{l_0^2 dl}{l^2 \sqrt{l^2 - l_0^2}} \times \\ \times \int_0^l \Phi_U(r + \vec{\Omega}l') e^{-\Sigma^U l'} dl', \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

$$\Phi_J(r) = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{l_0}^\infty \frac{l_0^2 J(l, \varphi')}{l^2 \sqrt{l^2 - l_0^2}} e^{-\Sigma^U l} dl. \quad (12b)$$

Für den einlaufenden Neutronenstrom  $J$  verwenden wir hier und im folgenden der Einfachheit halber dasselbe Funktionszeichen, unabhängig von den Variablen, in denen  $J$  gerade ausgedrückt wird.

### 2. Der Flußanteil der ungestreuten Neutronen

Der Flußanteil der ungestreuten Neutronen berechnet sich nach (9b) allein aus dem einlaufenden Neutronenstrom  $J(\vartheta', \varphi')$ , da wir in (3c) angenommen haben, daß in dem betrachteten Zylinder keine thermischen Neutronen „entstehen“. Ist (3c) nicht erfüllt, dann ist der Beitrag der unmittelbar von dieser Quelle emittierten Neutronen in (9b) zu addieren.

Zur Darstellung der Winkelabhängigkeit des einlaufenden Neutronenstroms ist das Kugelkoordinatensystem im Aufpunkt  $P$  ungeeignet. Der einlaufende Strom wird am besten in einem Koordinatensystem beschrieben, dessen Ursprung ( $P''$ ) auf dem Stabrand liegt, da dann  $J$  von  $P''$  unabhängig wird. Um  $P''$  führen wir wieder Kugelkoordinaten ein, wobei der Höhenwinkel  $\vartheta''$  und der Azimutwinkel  $\varphi''$  so definiert sind, daß  $(\vartheta', \varphi')$  in  $(\vartheta'', \varphi'')$  übergeht, wenn  $P$  zum Randpunkt wird ( $P \rightarrow P''$ ).

Den in den Koordinaten  $\vartheta''$  und  $\varphi''$  dargestellten einlaufenden Strom  $J(\vartheta'', \varphi'')$  entwickeln wir nach Kugelflächenfunktionen. Diese Entwicklung wird sehr viel schneller konvergieren als die entsprechende Entwicklung des ein- und auslaufenden Stromes zusammen, da die letztere Winkelverteilung in jeder den Uranstab tangierenden Richtung unsteig ist und

Unstetigkeiten der zu entwickelnden Funktion die Konvergenz verlangsamen (wie dies bei der  $P_n$ -Methode der Fall ist).

$J(\vartheta'', \varphi'')$  muß um die beiden Ebenen, die durch  $\varphi'' = 0$  und durch  $\vartheta'' = \pi/2$  definiert werden, spiegelsymmetrisch sein. Dies hat zur Konsequenz, daß in allen Kugelflächenfunktionen mit ungeradem  $l$  die Glieder mit geradem  $m$  und in denen mit geradem  $l$  diejenigen mit ungeradem  $m$  verschwinden [die doppelte Bedeutung von „ $l$ “ in (5) etc. als Länge und im folgenden als Index zur Bezeichnung der Ordnung der Kugelflächenfunktionen kann wohl nicht zu Verwirrungen Anlaß geben].

$$J(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=0}^l \alpha_{lm} P_{lm}(\vartheta'', \varphi'') \quad (13a)$$

mit  $l + m = \text{gerade}$ .

Da im folgenden von der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen kein Gebrauch gemacht wird (vgl. Abschn. II), ist es einfacher, die Entwicklung in der Form (13b) anzusetzen:

$$\left. \begin{aligned} J(\vartheta'', \varphi'') = \alpha_{00} + \alpha_{11} \sin \vartheta'' \cos \varphi'' + \\ + \alpha_{20} \sin^2 \vartheta'' + \alpha_{22} \sin^2 \vartheta'' \cos^2 \varphi'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

(Zur Berechnung der  $\alpha_{lm}$  vgl. Abschn. II.1).

Der unmittelbare Beitrag der Neutronenquelle zum einlaufenden Strom ist wegen (3) isotrop und deshalb in  $\alpha_{00}$  enthalten:

$$\alpha_{00} = \alpha_{00}(\Phi) + \alpha_{00}(Q). \quad (13c)$$

Nach (10a) ist

$$\alpha_{00}(Q) = J_Q.$$

In dem Integral (9b) für  $\Phi_J(r)$  wird der einlaufende Strom nicht in der Form (13b), sondern in den Variablen  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  gebraucht. Der Winkel  $\vartheta''$  stimmt mit  $\vartheta'$  überein.  $\varphi''$  ergibt sich aus  $\varphi'$  durch Projektion des entsprechenden Vektorgerüsts in die Aufpunktebene.

Aus Abb. 2 folgt:

$$\varrho^2 = r^2 + l_0^2 + 2rl_0 \cos \varphi', \quad (14a)$$

$$r^2 = \varrho^2 + l_0^2 - 2\varrho l_0 \cos \varphi'', \quad (14b)$$

woraus sich durch elementare Umformung ergibt:

$$l_0(\varphi') = -r \cos \varphi' + \sqrt{\varrho^2 - r^2 \sin^2 \varphi'}, \quad (15a)$$

$$\cos \varphi'' = \frac{1}{\varrho} \sqrt{\varrho^2 - r^2 \sin^2 \varphi'}. \quad (15b)$$

Im folgenden benutzen wir als Abkürzung

$$s(\varphi') = \Sigma^U \cdot l_0(\varphi'). \quad (16a)$$

Mit

$$\sin \vartheta'' = \sin \vartheta' = \frac{l_0}{l}. \quad (16b)$$

erhält man den einlaufenden Neutronenstrom in der für die Integration (12b) erforderlichen Form:

$$\left. \begin{aligned} J(l, \varphi') = \alpha_{00} + \alpha_{11} \frac{l_0}{l} \cos \varphi'' + \alpha_{20} \left( \frac{l_0}{l} \right)^2 + \\ + \alpha_{22} \left( \frac{l_0}{l} \right)^2 \cos 2\varphi'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

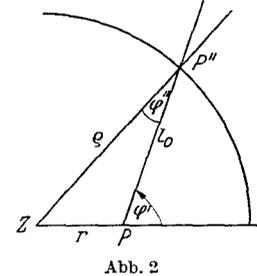


Abb. 2

worin  $\cos \varphi''$  mit Hilfe von (15b) durch  $\varphi'$  auszudrücken ist. Damit wird aus (12b), wenn wir noch  $l/l_0$  mit  $v$  bezeichnen:

$$\Phi_J(r) = \alpha_{00} F_{00}(r) + \alpha_{11} F_{11}(r) + \alpha_{20} F_{20}(r) + \left. \begin{aligned} &+ \alpha_{22} F_{22}(r) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

mit

$$F_{00}(r) = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_1^{\infty} \frac{e^{-sv} dv}{v^2 \sqrt{v^2-1}}, \quad (19a)$$

$$F_{11}(r) = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \cos \varphi'' \cdot \int_1^{\infty} \frac{e^{-sv} dv}{v^2 \sqrt{v^2-1}}, \quad (19b)$$

$$F_{20}(r) = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_1^{\infty} \frac{e^{-sv} dv}{v^4 \sqrt{v^2-1}}, \quad (19c)$$

$$F_{22}(r) = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos 2\varphi'' \int_1^{\infty} \frac{e^{-sv} dv}{v^4 \sqrt{v^2-1}}. \quad (19d)$$

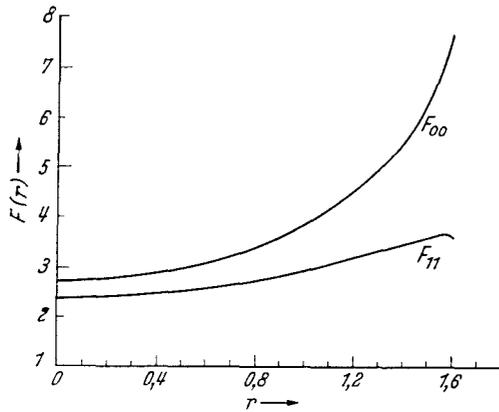


Abb. 3. Vergleich der Funktionen  $F_{00}$  und  $F_{11}$

Alle in  $\Phi_J$  auftretenden inneren Integrale haben die Form:

$$H_n(s) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-sv} dv}{v^n \sqrt{v^2-1}}. \quad (20)$$

Aus (19) wird damit allgemein:

$$F_{lm}(r) = 4 \int_0^{\pi} \cos m \varphi'' \cdot H_{2+l}(s(\varphi')) d\varphi' \quad (21)$$

mit  $\cos m \varphi''$  nach (15b). Für die vollständige Entwicklung von  $\Phi_J$  ergibt sich dann:

$$\Phi_J(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_{lm} F_{lm}(r), \quad (22)$$

worin die  $\alpha_{lm} = 0$  sind, wenn  $l+m$  ungerade ist.

Die Integrale  $H_n(s)$  werden im Anhang auf elementare Funktionen zurückgeführt. Dagegen muß die Integration über  $\varphi'$  in (19) bzw. (21) numerisch ausgeführt werden.

Mit (22) und (21) ist die transport-theoretisch exakte Berechnung des unmittelbar von einem gegebenen einlaufenden Strom herrührenden Neutronenflusses in einem zylindrischen Medium auf eine sehr gut konvergente Reihe eindimensionaler Integrale über bekannte Funktionen zurückgeführt.

In Abb. 3 ist der isotrope Anteil ( $F_{00}$ ) mit dem durch die Kugelflächenfunktion 1. Ordnung be-

schriebenen anisotropen Anteil ( $F_{11}$ ) verglichen. Das absorbierende Medium ist in diesem Beispiel Natururan und der Radius des Zylinders beträgt  $\rho = 1,6$  cm.

### 3. Der Flußanteil der gestreuten Neutronen

Zur Berechnung des Beitrags der gestreuten Neutronen denken wir uns in (12a) den Fluß  $\Phi_U(r)$  nach Potenzen von  $r^2$  entwickelt:

$$\Phi_U(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n}. \quad (23)$$

Die Entwicklung nach  $r^2$ -Potenzen bietet sich an, da  $\Phi_U(r)$  für Zylindergeometrie im wesentlichen von der Form  $I_0(\kappa r)$  bzw. in höherer  $P_n$ -Approximation eine Überlagerung mehrerer Bessel-Funktionen nullter Ordnung ist und die entsprechenden Taylor-Reihen nur Potenzen mit geradem Exponenten enthalten.

Bezeichnen wir mit  $G_n(r)$  den Anteil der Potenz  $r^{2n}$  zum Fluß der gestreuten Neutronen, dann schreibt sich (9a) in der Form:

$$\Phi_{\text{Str}}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n(r). \quad (24)$$

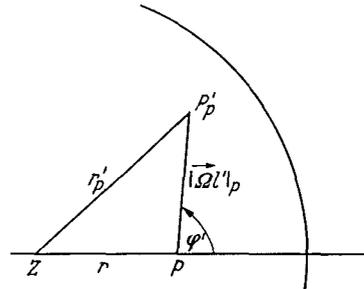


Abb. 4

Bezeichnet man mit  $r'_p$  den Betrag der Projektion des Vektors  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \vec{\Omega}l'$  in die Aufpunktebene, dann gilt:

$$G_n(r) = \frac{\Sigma_s^U}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{l_0}^{\infty} \frac{l_0^2 dl}{l^2 \sqrt{l^2 - l_0^2}} \int_0^l (r'_p)^{2n} e^{-\Sigma^U l} dl'. \quad (25)$$

In Abb. 4 ist die Projektion des zur Berechnung von  $r'_p$  erforderlichen Vektorgerüsts in die Aufpunktebene dargestellt. Daraus ergibt sich:

$$(r'_p)^2 = r^2 + (\vec{\Omega}l')_p^2 + 2r |\vec{\Omega}l'|_p \cos \varphi'. \quad (26)$$

Die Länge der Projektion des Vektors  $\vec{\Omega}l'$  ist nach (16b) gegeben durch:

$$|\Omega l'|_p = \frac{l'}{\sin \vartheta'} = l_0 \frac{l'}{l}. \quad (27)$$

Alle bei der Berechnung von  $G_n(r)$  auftretenden Integrale haben damit die Form:

$$g_n(l_0) = \int_{l_0}^{\infty} \frac{l_0^{2+n} dl}{l_0^{2+n} \sqrt{l^2 - l_0^2}} \int_0^l (l')^n e^{-\Sigma^U l} dl'. \quad (28)$$

Bezeichnet man wie in (19)  $l/l_0$  mit  $v$  und verwendet die Abkürzung (16a), dann wird aus (28):

$$g_n(s) = l_0^{n+1} \int_1^{\infty} \frac{dv}{v^{2+n} \sqrt{v^2-1}} \int_0^v v'{}^n e^{-\Sigma^U v'} dv'. \quad (29)$$

Nach Ausführung der inneren Integration haben alle Integranden die Form (20), so daß sich die  $g_\nu$  auf die Integrale  $H_n(s)$  zurückführen lassen:

$$g_\nu(s) = \frac{\nu!}{(\Sigma^U s)^{\nu+1}} \left[ H_{\nu+2}(0) - \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{s^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} H_{\mu+2}(s) \right]. \quad (30)$$

Damit ergibt sich für die ersten drei Funktionen  $G_n(r)$ :

$$G_0(r) = \frac{\Sigma^U}{\pi} \int_0^\pi g_0(s) d\varphi', \quad (31a)$$

$$G_1(r) = \frac{\Sigma^U}{\pi} \int_0^\pi (r^2 g_0 + 2 r g_1 \cos \varphi' + g_2) d\varphi', \quad (31b)$$

$$G_2(r) = \frac{\Sigma^U}{\pi} \int_0^\pi [r^4 g_0 + 4 r^3 g_1 \cos \varphi' + r^2 g_2 (4 \cos^2 \varphi' + 2) + 4 r g_3 \cos \varphi' + g_4] d\varphi'. \quad (31c)$$

Zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  in (23) müßte an sich der Neutronenfluß im Uranzylinder bekannt sein. Man braucht jedoch die Entwicklung (23) nur im Integranden von (9a). Eventuelle Fehler dieser Entwicklung mitteln sich bei der dreifachen Integration in (9a) im wesentlichen heraus. Der davon herrührende Fehler wird noch weiter reduziert, wenn man den nach (22) praktisch streng berechenbaren Flußanteil der ungestreuten Neutronen addiert:

$$\Phi_U(r) = \Phi_J(r) + \sum_n a_n G_n(r). \quad (32)$$

Durch die Forderung der kleinsten quadratischen Abweichung der Entwicklung (23) von  $\Phi_U(r)$  nach (32) lassen sich die  $a_n$  und damit nach (32) der Fluß mit beliebiger Genauigkeit berechnen:

$$\int_0^e [\Phi_U(r) - \sum a_n r^{2n}]^2 r dr = \text{minimal}. \quad (33)$$

Differentiation nach den  $a_n$  liefert das folgende inhomogene Gleichungssystem zur Bestimmung der  $a_n$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{\rho^{2(\nu+1+n)}}{2(\nu+1+n)} - \overline{G_n^{(\nu)}} \right) = \overline{\Phi_J^{(\nu)}} \quad \nu=0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

mit den Momenten:

$$\overline{\Phi_J^{(\nu)}} = \int_0^e \Phi_J(r) r^{2\nu+1} dr, \quad (35a)$$

$$\overline{G_n^{(\nu)}} = \int_0^e G_n(r) r^{2\nu+1} dr, \quad (35b)$$

die sich durch numerische Integration hinreichend genau berechnen lassen. Da der Fehler der Entwicklung (23) die Genauigkeit von  $\Phi_U(r)$  nur wenig beeinflusst, ist es im allgemeinen ausreichend, die Folge der Indizes  $n$  und  $\nu$  in (34) mit dem Wert  $N=1$  oder  $N=2$  abzubrechen.

In Abb. 5 ist der Neutronenfluß im Uran und die Abweichung der  $r^2$ -Entwicklung für  $N=2$  aufgetragen.

Bei vorgegebenem einfallenden Strom kann also nach (32) der Fluß im „Uran“ beliebig genau berechnet werden. Wichtig ist, daß die geschilderte Methode im Gegensatz zu Diffusions- und  $P_n$ -Rechnungen an Genauigkeit gewinnt, wenn man zu stark absorbierenden Anordnungen mit kleiner Geometrie übergeht (Sonden, Brennstoffproben von einigen Millimetern Durchmesser

im Bestrahlungskanal usw.). In vielen dieser Fälle ist es außerdem ausreichend, den einfallenden Strom isotrop anzunehmen [nur  $\alpha_{00} \neq 0$  in (13)], so daß die Rechnung sich weiter vereinfacht. In Abb. 6 sind drei charakteristische Flußverteilungen in hoch angereicherten  $UO_2$ -Zylindern aufgetragen (einfallender Strom-isotrop). Die Daten sind:

- $\rho = 0,30 \text{ cm} : \Sigma_{\text{tot}} = 5,822 \text{ cm}^{-1}; \quad \Sigma_a = 5,576 \text{ cm}^{-1}$
- $\rho = 0,25 \text{ cm} : \Sigma_{\text{tot}} = 7,664 \text{ cm}^{-1}; \quad \Sigma_a = 7,419 \text{ cm}^{-1}$
- $\rho = 0,20 \text{ cm} : \Sigma_{\text{tot}} = 9,506 \text{ cm}^{-1}; \quad \Sigma_a = 9,261 \text{ cm}^{-1}.$

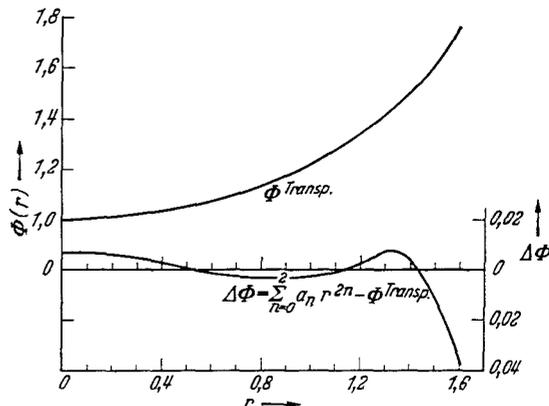


Abb. 5. Abweichung der  $r^2$ -Entwicklung vom transporttheoretisch berechneten Fluß im Brennstoff

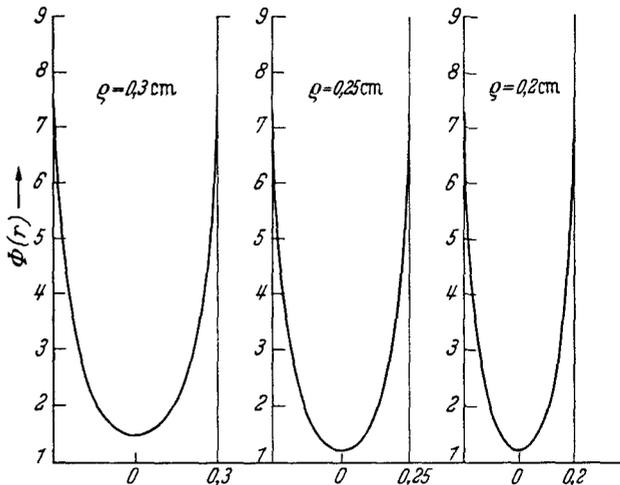


Abb. 6. Flußverteilung in zylindrischen Brennstoffproben, berechnet mit isotrop einfallendem Strom

## II. Berechnung des einlaufenden Neutronenstromes

### 1. Entwicklung des einlaufenden Neutronenstromes nach Kugelflächenfunktionen

Zur Berechnung des in den Stab einlaufenden Neutronenstromes ist die Kenntnis des Neutronenflusses in der Umgebung des Stabes erforderlich. Legt man die Diffusionshypothese: „der Strom berechnet sich an jeder Stelle aus dem Gradienten des Flusses“ zugrunde, dann kann man bei Kenntnis des Flusses am Stabrand den einlaufenden Strom als Funktion der beiden Winkelvariablen berechnen:  $J(\vartheta'', \varphi'')$ . Dabei benutzt man die Diffusionshypothese jedoch an der Stelle, an der sie am schlechtesten erfüllt ist, nämlich an einem „Rand“. Die davon herrührenden Fehler können erheblich sein, insbesondere wird die Größe des einlaufenden Stromes falsch wiedergegeben werden

Einen verbesserten einlaufenden Strom erhält man aus einer genaueren Winkelverteilung und den transport-theoretisch strengen Integralen (10). Da das Integral (10b) im allgemeinen numerisch ausgeführt werden muß und dann der Strom nur bei diskreten Winkeln vorliegt, kann man die Koeffizienten der Entwicklung (13a) nicht mehr in der üblichen Weise, d.h. durch Benutzung der integralen Orthogonalitätsrelationen, berechnen. Deshalb wurden in (13b) die Kugelflächenfunktionen nicht in ihrer orthonormierten Form eingesetzt, sondern als einfache Produkte von trigonometrischen Funktionen. Damit entfällt auch die Notwendigkeit, in (13b) jeweils nur nach einer kompletten Kugelflächenfunktion abzurechnen, wenn sich ein anderes Vorgehen als besser erweisen sollte.

Die Berechnung des einlaufenden Stromes hängt von der speziellen Struktur der Stabumgebung ab. Wir behandeln im folgenden den Fall einer zylindrischen Wigner-Seitz-Zelle vom Radius  $R$ , die in der üblichen Weise durch die Zellrandbedingung

$$J(R, \vec{\Omega}) = J(R, -\vec{\Omega}) \quad (36)$$

abgeschlossen wird. (36) besagt, daß in jeder Richtung der einlaufende Neutronenstrom gleich dem auslaufenden ist. In den von 0 bis  $\infty$  auszuführenden Integralen (10) kehrt sich danach am Zellrand die Integrationsrichtung um und läuft durch das Innere der Zelle bis zum gegenüberliegenden Zellrand usw. Bei jedem Durchqueren der ganzen Zelle wird dabei der Neutronenstrom um den gleichen (jedoch winkelabhängigen) Faktor geschwächt, so daß die Integrale (10) sich in eine geometrische Reihe in den „Schwächungsfaktoren“ umschreiben und aufsummieren lassen. Bezeichnet man den Abstand des auf dem Stabrand gelegenen Aufpunkt vom Zellrand in Richtung  $\vec{\Omega}$  mit  $x$  und die Dicke des Stabes in derselben Richtung mit  $2x'$ , dann ergibt sich für (10b):

$$J_{\Phi}(\vartheta'', \varphi'') = \frac{J_M(\vartheta'', \varphi'') + J_U(\vartheta'', \varphi'') \cdot e^{-2\Sigma^M x}}{1 - e^{-2(\Sigma^M x + \Sigma^U x')}} \quad (37a)$$

und daraus unter Beachtung von (3) oder auch unmittelbar aus (10c):

$$J_Q(\vartheta'', \varphi'') = \frac{Q_0}{4\pi \Sigma^M} \cdot \frac{1 - e^{-2\Sigma^M x}}{1 - e^{-2(\Sigma^M x + \Sigma^U x')}} \quad (37b)$$

Aus einfachen geometrischen Überlegungen folgt:

$$x = \frac{1}{\sin \vartheta''} (-\rho \cos \varphi'' + \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi''}), \quad (38a)$$

$$x' = \rho \frac{\cos \varphi''}{\sin \vartheta''}. \quad (38b)$$

Die in (37a) auftretenden Integrale über den Neutronenfluß im Moderator bzw. Uranvolumen sind gegeben durch:

$$J_M(\vartheta'', \varphi'') = \frac{\Sigma_s^M}{4\pi} \int_0^x (e^{-\Sigma^M \lambda'} - e^{-\Sigma^M (2x - \lambda')}) \times \left. \begin{array}{l} \\ \times \Phi_M(\tau + \vec{\Omega}l + \vec{\Omega}\lambda') d\lambda', \end{array} \right\} \quad (39a)$$

$$J_U(\vartheta'', \varphi'') = \frac{\Sigma_s^U}{4\pi} \int_0^{x'} (e^{-\Sigma^U \lambda'} - e^{-\Sigma^U (2x' - \lambda')}) \times \left. \begin{array}{l} \\ \times \Phi_U(\tau + \vec{\Omega}l - \vec{\Omega}\lambda') d\lambda'. \end{array} \right\} \quad (39b)$$

Da der Neutronenfluß nur von dem Absolutbetrag der Projektion des Argumentvektors in die Aufpunktebene (= senkrechter Abstand von der Stabachse) abhängt, sind die Argumente von  $\Phi$  in (39) entsprechend umzurechnen. Bezeichnen wir mit  $r_M$  das Argument von  $\Phi_M$  in (39a) und mit  $r_U$  die entsprechende Größe in (39b), dann ergibt sich:

$$r_M = \sqrt{\rho^2 + 2\rho \lambda' \sin \vartheta'' \cos \varphi'' + \lambda'^2 \sin^2 \vartheta''}, \quad (40a)$$

$$r_U = \sqrt{\rho^2 - 2\rho \lambda' \sin \vartheta'' \cos \varphi'' + \lambda'^2 \sin^2 \vartheta''}. \quad (40b)$$

Damit sind die Integrale (39) (im allgemeinen numerisch) auszuführen. (39b) liefert zu (37a) wegen des Faktors  $e^{-2\Sigma^M x}$  nur einen sehr kleinen Beitrag, so daß man für den Fluß im Uranstab die Entwicklung (23) nach  $r^2$ -Potenzen verwenden kann, mit der sich die Integration in (39b) elementar ausführen läßt. Man erhält:

$$J_U(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n(\vartheta'', \varphi''). \quad (41)$$

Im allgemeinen ist es ausreichend, die ersten drei Glieder in (41) zu berücksichtigen:

$$S_0 = \bar{S}_0, \quad (42a)$$

$$S_1 = \bar{S}_0 \rho^2 - 2\rho \sin \vartheta'' \cos \varphi'' \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \sin^2 \vartheta'', \quad (42b)$$

$$S_2 = \bar{S}_0 \rho^4 - 4\rho^3 \bar{S}_1 \sin \vartheta'' \cos \varphi'' + 2\rho^2 \bar{S}_2 \sin^2 \vartheta'' (2 \cos^2 \varphi'' + 1) - 4\rho \bar{S}_3 \sin^3 \vartheta'' \cos \varphi'' + \bar{S}_4 \sin^2 \vartheta''. \quad (42c)$$

Mit

$$\gamma = \Sigma^U \cdot x' \quad (43)$$

gilt:

$$\bar{S}_n = \frac{\Sigma_s^U}{4\pi} \int_0^{x'} (\lambda')^n \{e^{-\Sigma^U \lambda'} + e^{-\Sigma^U (2x' - \lambda')}\} d\lambda'. \quad (44)$$

Speziell ist:

$$\bar{S}_0 = \frac{\Sigma_s^U}{4\pi \Sigma^U} \cdot (1 - e^{-2\gamma}), \quad (44a)$$

$$\bar{S}_1 = \frac{\Sigma_s^U}{4\pi (\Sigma^U)^2} (1 - e^{-\gamma})^2, \quad (44b)$$

$$\bar{S}_2 = \frac{2\Sigma_s^U}{4\pi (\Sigma^U)^3} (1 - 2\gamma e^{-\gamma} - e^{-2\gamma}), \quad (44c)$$

$$\bar{S}_3 = \frac{6\Sigma_s^U}{4\pi (\Sigma^U)^4} (1 - 2e^{-\gamma} - \gamma^2 e^{-\gamma} + e^{-2\gamma}), \quad (44d)$$

$$\bar{S}_4 = \frac{24\Sigma_s^U}{4\pi (\Sigma^U)^5} \left(1 - 2\gamma e^{-\gamma} - \frac{\gamma^3}{3} e^{-\gamma} - e^{-2\gamma}\right). \quad (44e)$$

Nach (37) bis (44) kann man den einlaufenden Strom in jeder gegebenen Richtung berechnen. Da man mit den ersten drei Entwicklungsgliedern in (13b) die Anisotropie im allgemeinen hinreichend genau beschreiben kann, ist die Berechnung des Stromes nur in drei Richtungen erforderlich. Wir haben speziell gewählt:

$$J_{\perp} = J\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$J_t = J\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$J_{\parallel} = J(0, \varphi'') = \text{unabhängig von } \varphi''.$$

Damit ergibt sich für die ersten drei Entwicklungskoeffizienten in (13b):

$$\alpha_{00} = J_{||} \quad \alpha_{11} = J_{\perp} - J_t \quad \alpha_{20} = J_t - J_{||} \quad (46)$$

In Abb. 7 ist die entsprechende Winkelverteilung dargestellt.

### 2. Der Neutronenfluß im Moderator

Der Neutronenfluß in der Umgebung des betrachteten Zylinders hängt von der Absorption und damit vom Fluß im Innern des Zylinders ab, zu dessen Berechnung aber der Fluß in der Umgebung erforderlich ist. Dieser Sachverhalt legt eine iterative Behandlung des Problems nahe, die in Abschnitt II.3 ausführlich besprochen wird.

Die Umgebung des stark absorbierenden oder multiplizierenden Zylinders besteht im allgemeinen aus einer oder mehreren Schichten moderierender und schwach absorbierender Substanz, in der die Form des Neutronenflusses in brauchbarer Näherung nach der Diffusionstheorie berechnet werden kann. Daraus bestimmt sich der in den Stab einlaufende Neutronenstrom nach II.1 durch einfache Integration. In den meisten der in der Praxis interessierenden Fällen kann man die betrachteten Medien als Wigner-Seitz-Zelle idealisieren. Aus der differentiellen Form der Boltzmann-Gleichung und der Verknüpfungsbedingung der Zelle mit ihrer Umgebung ergibt sich die jeweilige Zell-Randbedingung für den Neutronenfluß. Zum Beispiel folgt aus (36):

$$\left[ \frac{d\Phi(r)}{dr} \right]_{r=R} = 0. \quad (47)$$

Die Diffusionsgleichung in dem moderierenden Medium, das wir im folgenden der Einfachheit halber als homogen annehmen, lautet:

$$-D_M \Delta \Phi_M + \Sigma_a^M \Phi_M = Q_0. \quad (48)$$

Darin bezeichnet  $D_M$  die Diffusionskonstante im Moderator. Für zylindrische Geometrie erhält man aus (48) unter Benutzung der Randbedingung (47) die Lösung

$$\Phi_M(r) = \frac{Q_0}{\Sigma_a^M} \{A f(r) + 1\}, \quad (49)$$

worin

$$f(r) = I_0(\kappa r) + \frac{I_1(\kappa R)}{K_1(\kappa R)} K_0(\kappa r) \quad (50a)$$

mit

$$\kappa = \sqrt{\frac{\Sigma_a^M}{D_M}}. \quad (50b)$$

$I_n(x)$  und  $K_n(x)$  sind die modifizierten Bessel-Funktionen erster bzw. zweiter Art.

In (49) ist noch eine und nur eine Konstante frei, um den Neutronenfluß des moderierenden mit demjenigen des absorbierenden Mediums zu verknüpfen. Dies ändert sich auch nicht, wenn das moderierende Medium in mehreren Schichten aufgeteilt ist. Die Transporttheorie liefert jedoch zwei Verknüpfungsbedingungen:

1. Die Stetigkeit der Flüsse an der Mediengrenze:

$$\Phi_M(\varrho) = \Phi_U(\varrho). \quad (51)$$

2. Die Neutronenbilanz, die wir wegen (36) bzw. (47) für eine abgeschlossene Zelle zu benutzen haben:

$$Q_0 V_M = \Sigma_a^U \bar{\Phi}_U V_U + \Sigma_a^M \bar{\Phi}_M V_M, \quad (52)$$

worin durch Querstriche die entsprechende Flußmittelung angedeutet ist.

In der reinen Diffusionstheorie wird durch Lösung einer (48) analogen Differentialgleichung die Form des Neutronenflusses im Brennstoff bestimmt. Der Absolutwert ist dagegen noch offen und wird zusammen mit  $A$  [aus (49)] zur Befriedigung der beiden Forderungen (51) und (52) benutzt. Die Neutronenbilanz (52) führt im Rahmen der Diffusionstheorie auf die Gleichung

$$D_M \Delta \Phi_M = D_U \Delta \Phi_U, \quad (52)$$

die im allgemeinen an Stelle von (52) verwendet wird. Bei einer transport-theoretischen Berechnung des Neutronenflusses im Brennstoff aus dem ebenfalls transport-theoretisch bestimmten einlaufenden Strom erhält man jedoch außer der Form auch den in Strenge zu dem Neutronenfluß im Moderator gehörenden

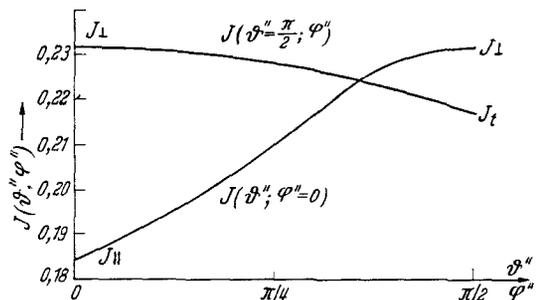


Abb. 7. Winkelverteilung des einlaufenden Stromes für  $\vartheta'' = \pi/2$  und  $\varphi'' = 0$  am Stabrand

Absolutwert des Flusses im Brennstoff. Da damit der Absolutwert als freie Konstante entfällt, hat man keine Möglichkeit, die beiden Bedingungen (51) und (52) gleichzeitig zu erfüllen. Der Vorteil der transport-theoretischen strengen Verknüpfungen des gesamten Moderatormediums mit dem gesamten Brennstoffmedium über den einlaufenden Strom hat, verglichen mit der Diffusionstheorie, den Verlust einer freien Konstanten zur Folge. Welcher der beiden Bedingungen (51) und (52) man den Vorzug zu geben hat, hängt von dem gestellten Problem ab: Zu einer möglichst genauen Berechnung des Flußverlaufs im Brennstoff und in dessen unmittelbarer Umgebung (Can etc.) ist die Stetigkeitsforderung (51) die wichtigere, da wegen der exponentiellen Schwächung eines jeden Neutronenstrahls die dem Uran benachbarten Bereiche den größten Beitrag zum Fluß im Brennstoff liefern. Die so berechnete Lösung wird im folgenden als Lösung I bezeichnet. Bei der Lösung II dagegen wird die freie Konstante  $A$  aus der für die ganze Zelle geltenden Neutronenbilanzgleichung (52) bestimmt, wodurch man wegen des integralen Charakters von (52) in ausgedehnten moderierenden Gebieten eine genauere Lösung erhält als nach I. Zum Beispiel wird sich der bei der Berechnung von  $f$ -Faktoren auftretende Quotient  $\bar{\Phi}_M/\bar{\Phi}_U$  nach II genauer berechnen lassen als nach I. Dagegen wird das Verhältnis  $\Phi_U(\varrho)/\bar{\Phi}_U$  von der Lösung I besser wiedergegeben. In II.5 werden die Ergebnisse quantitativ diskutiert und mit denen anderer Methoden verglichen.

Aus (49) und (51) ergibt sich:

$$A_I = - \frac{Q_0 - \Sigma_a^M \bar{\Phi}_U V_U}{Q_0 f(\varrho)} \quad (54)$$

mit  $f(\varrho)$  nach (50a) und entsprechend aus (52):

$$A_{II} = - \frac{\Sigma_a^U \bar{\Phi}_U V_U}{Q_0 \bar{f} \cdot V_M}, \quad (55)$$

worin sich  $\bar{f}$  durch Mittelung über das Moderatorvolumen bestimmt:

$$\bar{f} = \frac{2}{\kappa(R^2 - \varrho^2)} \left\{ R I_1(\kappa r) - \varrho I_1(\kappa \varrho) + \frac{I_1(\kappa R)}{K_1(\kappa R)} [\varrho K_1(\kappa \varrho) - R K_1(\kappa R)] \right\}. \quad (56)$$

Da die Stetigkeitsbedingung (51) bei der Lösung II nicht erfüllt ist, unterscheiden sich die Randwerte

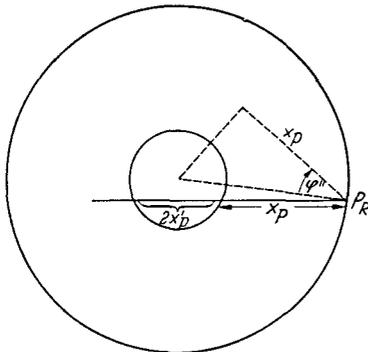


Abb. 8

des Neutronenflusses an der Brennstoffoberfläche um einen endlichen Betrag

$$S = \Phi_M(\varrho) - \Phi_U(\varrho), \quad (57)$$

der um so kleiner wird, je genauer der Fluß in der Brennstoffumgebung bekannt ist.

### 3. Der Iterationszyklus

Die Berechnung des Neutronenflusses im Moderator mit Hilfe der Konstanten  $A$  aus (54) oder (55) ist, wie mehrfach erwähnt, als Teil eines Iterationszyklus aufzufassen: Bei willkürlich vorgegebener Quellstärke  $Q_0$  lösen wir zuerst das Diffusionsproblem für die gesamte Zelle. Aus dem sich dabei ergebenden Neutronenfluß im Moderator ist der in das Uran einlaufende Strom nach (37) bis (40) für die in (45) angegebenen speziellen Richtungen zu bestimmen. Die Koeffizienten  $\alpha_{lm}$  der Entwicklung (13b) nach trigonometrischen Funktionen ergeben sich dann aus (46), so daß nach Abschnitt I der Neutronenfluß im Uran berechnet werden kann. Über (54) oder (55) gewinnt man den für den nächsten Iterationsschritt erforderlichen Neutronenfluß im Moderator. Zur Berechnung der Lösung I ist das angegebene Iterationsverfahren in jedem Falle anwendbar, bei der Lösung II dagegen nur, wenn eine hinreichend genaue Anfangsnäherung bekannt ist<sup>1</sup>. Dies führt nach der Konvergenz zu einem eindeutigen Zusammenhang zwischen  $Q_0$  und dem „Sprung“  $S$ . Man kann deshalb in der Methode II das Verfahren umkehren, d. h. einen „Sprung“  $S'$

<sup>1</sup> Der von einer Ungenauigkeit des Flusses im Moderator herrührende kleine Fehler in  $\Phi_U$  hat wegen der scharfen Kompensation auf der linken Seite von  $Q_0 - \Sigma_a^U \bar{\Phi}_U \frac{V_U}{V_M} = \Sigma_a^M \bar{\Phi}_M$  einen sehr großen Effekt auf  $\bar{\Phi}_M$  (d. h. den Neutronenfluß im Moderator für den nächsten Iterationsschritt), da  $\Sigma_a^M$  bei den meisten Moderatoren extrem klein ist.

vorgeben und die eindeutig dazugehörige Quellstärke  $Q'_0$  durch die Iteration berechnen. Durch Umnormierung gewinnt man daraus die Lösung für die Quellstärke  $Q_0$ , wobei dann  $S'$  in  $S$  übergeht. Der Vorteil der genannten Umkehrung der Methode II liegt darin, daß das Verfahren dann unabhängig von der Genauigkeit der Ausgangsnäherung konvergiert. An Stelle von (55) und (57) erhalten wir in jedem Iterationsschritt  $Q'_0$  und  $A'_{II}$  aus

$$Q'_0 = \Sigma_a^M [\Phi_U(\varrho) + S'] + \frac{\varrho^2 f(\varrho)}{(R^2 - \varrho^2) \bar{f}} \Sigma_a^U \bar{\Phi}_U, \quad (58a)$$

$$A'_{II} = \frac{1}{f(\varrho)} \left[ \frac{\Sigma_a^M \Phi_U(\varrho) + S'}{Q'_0} - 1 \right]. \quad (58b)$$

### 4. Konsistenzrechnung am Zellrand

Setzt man den durch die Iteration gewonnenen Fluß in den Integranden der Transportgleichung (1) ein und berechnet daraus den entsprechenden Flußwert am Zellrand [im folgenden mit  $\Phi_{Tr}(R)$  bezeichnet], so erhält man eine Aussage über die Krümmungsverhältnisse des Flusses in dem Zellrandbereich. Wegen des Schwächungsfaktors  $e^{-\Sigma^M V}$  wird die nähere Umgebung des Randgebietes den Hauptbeitrag liefern. Bei gegenüber der Wirklichkeit zu starker Krümmung des Flußverlaufs bei  $r = R$  werden demnach von dort zu wenig Neutronen ankommen, der transport-theoretische Wert  $\Phi_{Tr}(R)$  wird also kleiner sein als der durch Iteration berechnete Randwert  $\Phi_{ii}$ . Umgekehrt wird bei zu schwacher Krümmung  $\Phi_{Tr}(R) > \Phi_{ii}(R)$  sein. Verträglichkeit (Konsistenz) des Randwertes mit dem Fluß in der Randumgebung wird  $\Phi_{Tr}(R) = \Phi_{ii}(R)$  zur Folge haben. Wenn wir (1) so umformen, daß die am Zellrand ankommenden Neutronenströme ( $J^{(R)}$ ) explizit auftreten, erhält man für  $\Phi_{Tr}(R)$

$$\Phi_{Tr}(R) = \int_0^{2\pi} d\vartheta'' \int_0^\pi d\vartheta''' \sin \vartheta''' \times \left. \begin{aligned} & \times \{ J_\Phi^{(R)}(\vartheta'', \vartheta''') + J_Q^{(R)}(\vartheta'', \vartheta''') \}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Aus einer ähnlichen Überlegung wie im Abschnitt II.1 ergibt sich:

$$J_\Phi^{(R)}(\vartheta'', \vartheta''') = \frac{J_M(\vartheta'', \vartheta''') + J_U(\vartheta'', \vartheta''') e^{-\Sigma^M x}}{1 - e^{-2(\Sigma^M x + \Sigma^U x)}}, \quad (60a)$$

$$J_Q^{(R)}(\vartheta'', \vartheta''') = \frac{Q_0}{4\pi \Sigma^M} \frac{(1 - e^{-\Sigma^M x})(1 + e^{-(\Sigma^M x + 2\Sigma^U x)})}{1 - e^{-2(\Sigma^M x + \Sigma^U x)}}. \quad (60b)$$

$x$  bezeichnet wieder den Abstand vom Aufpunkt  $P_R$  zum Stabrand, wenn die Integrationsrichtung durch den Brennstab läuft bzw. die Hälfte des im Moderator durchlaufenen Weges bei einer Integrationsrichtung, die den Stab nicht trifft:  $2x'$  ist die Dicke des Stabes in der betrachteten Richtung.

In Abb. 8 ist die Projektion (Index  $p$ ) der Vektoren in die Aufpunktebene gezeichnet. Ist  $\varphi_0$  der halbe Öffnungswinkel, unter dem von  $P_R$  der Stab erscheint, so ergibt sich:

$$x = \frac{1}{\sin \vartheta''} \left\{ R \cos \vartheta'' - \sqrt{\varrho^2 - R^2 \sin^2 \vartheta''} \right\} \quad \text{für } \varphi < \varphi_0, \quad (61a)$$

$$x = R \frac{\cos \vartheta''}{\sin \vartheta''} \quad \text{für } \varphi \geq \varphi_0, \quad (61b)$$

$$x' = \frac{1}{\sin \vartheta''} \sqrt{\varrho^2 - R^2 \sin^2 \vartheta''} \quad \text{für } \varphi < \varphi_0, \quad (61c)$$

$$x' = 0 \quad \text{für } \varphi \geq \varphi_0. \quad (61d)$$

Weiter ist:

$$J_M(\vartheta'', \varphi'') = \left. \begin{aligned} & \frac{\Sigma_s^M}{4\pi} \int_0^x \{ e^{-\Sigma^M \lambda'} + \\ & + e^{-\Sigma^M(2x-\lambda') - 2\Sigma^U x'} \} \Phi_M(\vec{R} - \lambda' \vec{\Omega}) d\lambda', \end{aligned} \right\} (62a)$$

$$J_U(\vartheta'', \varphi'') = \left. \begin{aligned} & \frac{\Sigma_s^U}{4\pi} \int_0^{x'} \{ e^{-\Sigma^U \lambda'} + e^{-\Sigma^U(2x'-\lambda')} \} \times \\ & \times \Phi_U(\vec{Q} - \lambda' \vec{\Omega}) d\lambda'. \end{aligned} \right\} (62b)$$

Die (40a) und (40b) entsprechenden Argumente der Flußfunktionen sind jetzt gegeben durch

$$r_M = \sqrt{R^2 - 2R\lambda' \sin \vartheta'' \cos \varphi'' + \lambda'^2 \sin^2 \vartheta''}, \quad (63a)$$

$$r_U = \sqrt{\varrho^2 - 2\lambda' x' \sin^2 \vartheta'' + \lambda'^2 \sin^2 \vartheta''}. \quad (63b)$$

Für den Fluß im Uran verwenden wir wieder die Entwicklung (23) nach  $r^2$ -Potenzen und erhalten:

$$J_U(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n^R(\vartheta'', \varphi''). \quad (64)$$

Hierbei sind die drei ersten Terme gegeben durch

$$S_0^R = \bar{S}_0, \quad (65a)$$

$$S_1^R = \varrho^2 \bar{S}_0 - 2x' \sin^2 \vartheta'' \bar{S}_1 + \sin^2 \vartheta'' \bar{S}_2, \quad (65b)$$

$$S_2^R = \varrho^4 \bar{S}_0 - 4\varrho^2 x' \bar{S}_1 \sin^2 \vartheta'' + \left. \begin{aligned} & + 2\bar{S}_2 \sin^2 \vartheta'' (\varrho^2 + 2x'^2 \sin^2 \vartheta'') - \\ & - 4x' \bar{S}_3 \sin^4 \vartheta'' + \bar{S}_4 \sin^4 \vartheta''. \end{aligned} \right\} (65c)$$

Die Größen  $\bar{S}_n$  sind in (44) angegeben.

Für die Winkelverteilung ist eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen nicht mehr geeignet, da diese die auf dem kleinen Winkelbereich  $\varphi < \varphi_0$  beschränkte Absenkung des Stromes  $J(\vartheta'', \varphi'')$  erst in sehr hoher Näherung wiedergeben kann. Deshalb wurde nach (60a) und (60b) der Strom  $J(\vartheta'', \varphi'') = J_\varphi + J_Q$  für eine Reihe von Winkelpaaren  $(\vartheta'', \varphi'')$  berechnet und durch diese Stützpunkte eine Polynomkurve über kleinste quadratische Abweichung gelegt. Für die numerische Rechnung erweist es sich als zweckmäßig, die Differenz

$$J(\vartheta'', \varphi'') - J_{||} = \bar{J}(\vartheta'', \varphi'')$$

zu entwickeln mit

$$J_{||} = J(0, \varphi'') = \frac{\Sigma_s^M \Phi_M(R) + Q_0}{4\pi \Sigma^M}.$$

Mit

$$\bar{J}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{k=0}^2 \delta_k(\vartheta'') \varphi^{2k} \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \quad (66a)$$

$$\bar{J}(\vartheta'', \varphi'') = \sum_{k=1}^4 \beta_k(\vartheta'') \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} \quad \text{für } \varphi_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (66b)$$

läßt sich die Winkelverteilung für jedes  $\vartheta''$  sehr genau darstellen. In Abb. 9 ist eine solche charakteristische Verteilung für  $\vartheta'' = \pi/2$  angegeben.

### 5. Diskussion der Ergebnisse

Die in Abb. 10, 11 und 12 dargestellten Neutronenflüsse sind für eine zylindrische Wigner-Seitz-Zelle aus natürlichem Uran als Brennstoff (Radius 1,6 cm) und

schwerem Wasser als Moderator gerechnet; der Zellradius beträgt 9,5 cm.

Folgende Wirkungsquerschnitte liegen der Rechnung zugrunde:

$$\text{Uran: } \Sigma^U = 0,744 \text{ [cm}^{-1}\text{]} \quad \text{D}_2\text{O: } \Sigma^M = 0,4168 \text{ [cm}^{-1}\text{]}$$

$$\Sigma_s^U = 0,386 \quad \Sigma_s^M = 0,41672$$

$$\Sigma_a^U = 0,358 \quad \Sigma_a^M = 8 \cdot 10^{-5}$$

und

$$\kappa_{D,0} = \frac{1}{L} = 0,01 \text{ [cm}^{-1}\text{]}.$$

In Abb. 10 sind die im Stabzentrum auf Eins normierten Neutronenflüsse im Brennstoff, berechnet nach

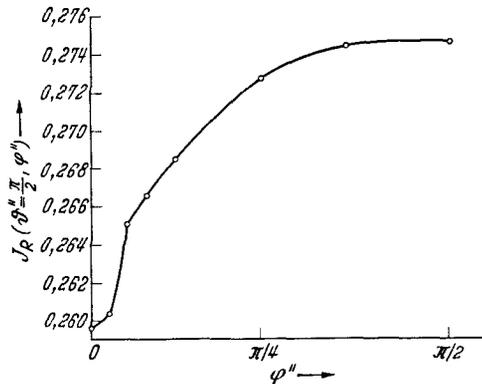


Abb. 9. Winkelverteilung am Zellrand für  $\vartheta'' = \pi/2$ .  $\circ$  Stützpunkte; — Reihe (66)

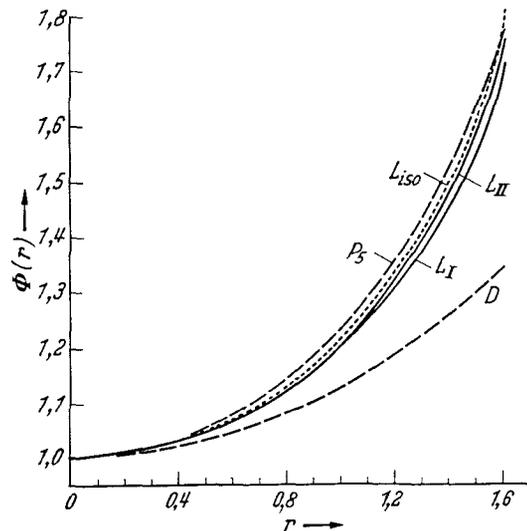


Abb. 10. Flußverteilung in einem Brennelement aus natürlichem Uran ( $\varrho = 1,6$  cm)

fünf verschiedenen Methoden, eingetragen. Man erkennt, daß die nach der Diffusionstheorie ( $D$ ) mit  $\kappa_u = 0,707$  berechnete Flußverteilung deutlich abweicht von den Flußkurven  $L_I$ ,  $L_{II}$ ,  $L_{iso}$  (berechnet mit isotrop einfallendem Strom) und  $P_5$ , welche nur im Stabrandgebiet merkliche Unterschiede aufweisen. Um eine Aussage über die Genauigkeit der von den einzelnen Methoden gelieferten Lösungen machen zu können, berechnen wir einen Neutronenfluß im Uran, der erheblich genauer ist als alle in Abb. 10 dargestellten Lösungen. Dazu gehen wir von der Tatsache aus, daß der mit isotrop einlaufendem Strom berechnete Fluß ( $L_{iso}$ ) sich um weniger als 6,2% von der  $L_I$ -Lösung unterscheidet. Berücksichtigt man die

Anisotropie des einlaufenden Stromes wie bei  $L_I$ , so wird der Neutronenfluß im Uran um sehr viel weniger als 6,2% von der exakten Lösung abweichen. Eine noch genauere Neutronenverteilung ergibt sich, wenn man die Anisotropie des einfallenden Stromes statt aus einer Diffusionstheorie ( $L_I$ ) aus einer  $P_5$ - oder  $S_4$ -Rechnung bestimmt und dazu nach Abschnitt I

(s. oben). Es muß besonders hervorgehoben werden, daß sogar die mit isotrop einfallenden Strom berechnete Flußverteilung  $L_{iso}$  bis auf die direkte Stabumgebung genauer ist als  $P_5$ , insbesondere auch der Mittelwert. Den gesamten Anisotropieeffekt des einlaufenden Stromes auf die Flußverteilung im Brennstoff findet man als Differenz von  $L_{iso}$  und  $P_5^*$ . Er beträgt weniger als 5,1%.

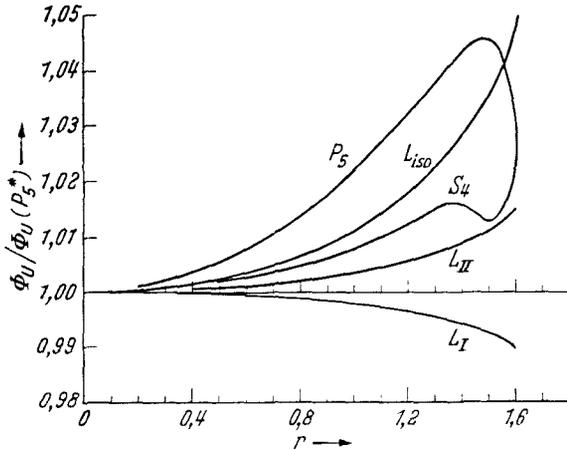


Abb. 11. Abweichung der Flußverteilungen von der  $P_5^*$ -Lösung im Brennstoff

den zugehörigen Fluß im Brennstoff,  $P_5^*$  bzw.  $S_4^*$  ausrechnet. Es ist nur  $P_5^*$  von uns ermittelt worden, da  $S_4^*$  sich von  $P_5^*$  beliebig wenig unterscheiden wird.

In Abb. 11 wurden alle Flußwerte der in Abb. 10 benachbarten Kurven durch die entsprechenden Flußwerte der  $P_5^*$ -Lösung dividiert, um die Unter-

Das Verhalten der Lösungen im Moderatorvolumen ist aus Abb. 12 zu entnehmen. Die Lösung  $L_{II}$  liefert über weite Bereiche  $P_5$  oder  $S_4$ -Genauigkeit, besonders im Hinblick auf Mittelwertbildungen. Am Stabrand erscheint der effektive Sprung  $S$  relativ groß. Der Grund hierfür ist die „Steifheit“ der Diffusionsform im Moderator, die wegen des kleinen Wertes von  $\kappa_{D_2O} = 0,01$  stärkere Krümmung in Stabnähe nicht beschreiben kann. Der transporttheoretisch berechnete Konsistenzpunkt am Zellrand  $\Phi_{Tr}(R)$  ist um  $1,5\%_{00}$  größer als  $\Phi_{it}(R)$  (vgl. II.4). Dies bedeutet, daß die Krümmung von  $L_{II}$  am Zellrand etwas zu schwach ist. Bei der Lösung  $L_I$  ist  $\Phi_{Tr}(R)$  um  $4,5\%_{00}$  kleiner als  $\Phi_{it}(R)$ , die Krümmung am Zellrand ist also viel zu groß. Nach Abb. 12 sollte  $P_5$  etwa die richtige Krümmung am Zellrand besitzen. Die Lösung  $L_I$  ist natürlich nur in der Stabumgebung sinnvoll zu verwenden (vgl. II.2) und liefert dort den genaueren Flußverlauf als  $L_{II}$ . Das ist dann von besonderer Bedeutung, wenn man den Neutronenfluß im Brennstoff-Can, Kühlpalt oder Führungsrohr möglichst gut kennen will. Dazu kann man in allen diesen Medien die Flußform aus der Diffusionstheorie berechnen, die üblichen Randbedingungen der Diffusionstheorie an den Mediengrenzen benutzen und die übrigbleibende freie Konstante der so gewonnenen Mehrmedienlösung durch die Stetigkeitsforderung (51) am Uran-Rand bestimmen.

Ein interessantes Ergebnis ist das Verhältnis  $\bar{\Phi}_M / \bar{\Phi}_U$  für  $L_{iso}$ . Berechnet man aus dem isotrop einfallenden Strom den konstanten Flußwert im Moderator, so ergibt sich unter Vernachlässigung der

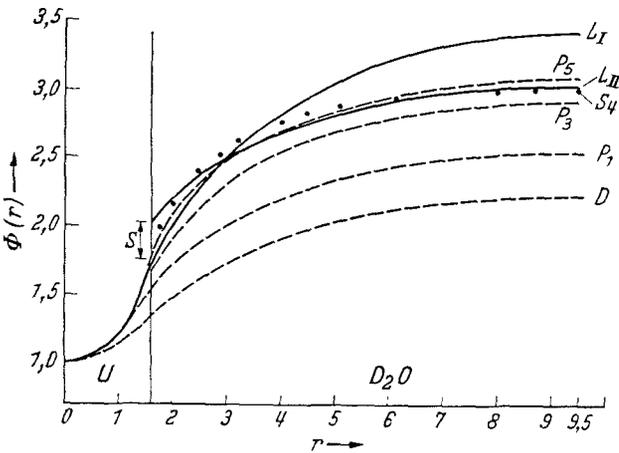


Abb. 12. Flußverteilungen in der Wigner-Seitz-Zelle mit Natururan als Brennstoff ( $e = 1,6$  cm) und  $D_2O$  als Moderator (Zellradius  $R = 9,5$  cm)

schiede besser darstellen zu können. Man entnimmt diesem Bild, daß  $L_I$  die genaueste der nach den verschiedenen Methoden ermittelte Flußverteilung im Brennstoff darstellt. Der Flußwert am Stabrand nach  $L_I$  ist um 1%, der Mittelwert um 0,4% kleiner als die entsprechenden Werte der  $P_5^*$ -Lösung. Lösung II liefert etwas höhere Flußwerte als  $P_5^*$  und hat praktisch die Genauigkeit einer  $S_4$ -Rechnung.  $P_5$  liefert eine Flußverteilung, die im ganzen Brennstoffbereich über  $L_I$  und  $L_{II}$  liegt. Die Tatsache, daß die Kurven  $P_5^*$  und  $P_5$  nicht zusammenfallen, weist auf die schlechte Konvergenz der bei der  $P_n$ -Methode für das gesamte Winkelintervall ausgesetzten Entwicklung der Winkelverteilung nach Kugelflächenfunktionen hin

Tabelle 1. Flußwerte für die Wigner-Seitz-Zelle aus Natururan und  $D_2O$  (Zylinderradius  $\rho = 1,6$  cm, Zellradius  $R = 9,5$  cm)

Methode	$\bar{\Phi}_U$	$\Phi_U(e) = \Phi_U^{max}$	$\Phi_U(e) / \bar{\Phi}_U$	$\bar{\Phi}_M$	$\Phi_M^{max}$	$\bar{\Phi}_M / \bar{\Phi}_U$
$D$	1,1687	1,3464	1,1521	2,0973	2,2383	1,7945
$P_1$	1,2784	1,5806	1,2364	2,4024	2,5566	1,8791
$P_3$	1,3030	1,6637	1,2769	2,7568	2,9426	2,1158
$P_5$	1,3369	1,7757	1,3282	2,9193	3,0990	2,1836
$S_4$	1,3150	1,7747	1,3496	2,8972	3,0150	2,2032
$L_I$	1,2935	1,7146	1,3256	(3,1646)	(3,4372)	(2,4466)
$L_{II}$	1,3068	1,7594	1,3464	2,8816	3,0395	2,2051
$L_{iso}$	1,3249	1,8206	1,3742	2,4900	2,4900	1,8794
$P_5^*$	1,2989	1,7326	1,3339	—	—	—

Absorption im Moderator und des geringen Beitrags von der Quelle  $Q_0$   $\Phi_{iso} = 4\pi J_{iso}$ . In diesem Falle, wo also im Moderator überhaupt nichts gerechnet wird, ergibt sich für  $(\bar{\Phi}_M / \bar{\Phi}_U)_{iso}$  fast genau der Wert der  $P_1$ -Näherung.

In Tabelle 1 sind für Natururan als Brennstoff (Zylinderradius  $\rho = 1,6$  cm; Zellradius  $R = 9,5$  cm) die interessierenden Flußgrößen für die verschiedenen Methoden zusammengestellt. Die sich bei der  $P_n$ - und

$S_n$ -Methode ergebenden Werte sind einer früheren Arbeit von H. KÜSTERS [3] entnommen.

In Tabelle 2 ist die prozentuale Abweichung (bezogen auf  $P_5^*$ ) der Flußmittelwerte im Brennstoff der hinsichtlich ihrer Genauigkeit geordneten Lösungen eingetragen.

Tabelle 2. Prozentuale Abweichung der Flußmittelwerte im Brennstoff, bezogen auf  $P_5^*$

Methode	$L_I$	$L_{II}$	$S_4$	$L_{iso}$	$P_5$
$\frac{\bar{\Phi}_U - \bar{\Phi}_U(P_5^*)}{\bar{\Phi}_U(P_5^*)}$	-0,42%	0,61%	1,24%	2,00%	2,92%

Die Rechenzeiten betragen auf der Rechenmaschine vom Typ Zuse (Z 22) für  $L_I$  oder  $L_{II}$  etwa  $1\frac{1}{2}$  Std (zum Vergleich;  $P_5$  benötigt 3 Std,  $S_4$  sogar 14 Std). Eine Berechnung von  $L_{II}$  mit sofort nachfolgender Berechnung von  $L_I$  beträgt weniger als 2 Std, da nur der Iterationszyklus in veränderter Form nochmal zu durchlaufen ist.

### III. Der ebene Fall

Da das Vorgehen analog den Abschnitten I und II ist, beschränken wir uns auf die Angabe der wesentlichsten Formeln für die Berechnung des Flusses in der Brennelementplatte. Auf die Darstellung der Moderatorlösung wollen wir verzichten, da lediglich die Bessel-Funktionen durch Exponentialfunktionen ersetzt werden müssen, an dem iterativen Lösungsverfahren sich jedoch nichts ändert. Ist  $\vartheta'$  der Winkel zwischen der  $x$ -Achse und der Integrationsrichtung  $\vec{\Omega}$  (= negative Flugrichtung der Neutronen), so lautet die Transportgleichung für eine in zwei Richtungen unendlich ausgedehnte Platte ( $l$  = Abstand vom Aufpunkt zum Plattenrand in der betrachteten Richtung):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_U(x) = & \frac{1}{2} \Sigma_s^U \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \int_0^l \Phi_U(x+l'\vec{\Omega}) \times \\ & \times e^{-\Sigma^U l'} dl' + \frac{1}{2} \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' e^{-\Sigma^U l} \int_0^\infty \times \\ & \times \{ \Sigma_s^M \Phi_M(x+(l+l')\vec{\Omega}) + Q_0 \} e^{-\Sigma^M l'} dl'. \end{aligned} \right\} (67)$$

Ist  $l_0$  die Projektion von  $l$  auf die  $x$ -Achse (s. Abb. 13), so gilt:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta' = \frac{l_0}{l} = \frac{d-x}{l} \quad & \text{für } 0 \leq \vartheta' \leq \pi/2 \\ \cos \vartheta' = \frac{l_0}{l} = -\frac{d+x}{l} \quad & \text{für } \pi/2 < \vartheta' \leq \pi \end{aligned} \right\} x < 0. \quad (68a, 68b)$$

Wir verzichten bei der Entwicklung des einfallenden Stromes ( $\vartheta'' = \vartheta'$ )

$$J(\vartheta') = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \{ \Sigma_s^M \Phi_M(x+(l+l')\vec{\Omega}) + Q_0 \} e^{-\Sigma^M l'} dl' \quad (69)$$

wieder auf die Orthogonalität der Kugelfunktionen und schreiben:

$$\left. \begin{aligned} J(\vartheta') = & \alpha_0 + \alpha_1 \cos \vartheta' + \alpha_2 \cos^2 \vartheta' + \dots \\ = & \alpha_0 \pm \frac{l_0}{l} + \alpha_2 \left( \frac{l_0}{l} \right)^2 \pm \dots, \end{aligned} \right\} (70)$$

wobei das obere Vorzeichen für  $l_0 = d - x$ , das untere Vorzeichen für  $l_0 = d + x$  gilt. Dann ergibt sich für

den Anteil  $\Phi_J$  der nicht gestreuten Neutronen

$$\Phi_J = 2\pi \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \{ E_{n+2}(s_1) + (-1)^n E_{n+2}(s_2) \}. \quad (71)$$

Dabei ist:

$$s_1 = \Sigma^U (d - x), \quad s_2 = \Sigma^U (d + x), \quad (72)$$

$$E_n(s) = \int_1^\infty \frac{e^{-sv}}{v^n} dv. \quad (73a)$$

Von den Integralen (73) ist speziell

$$E_1(s) = -Ei(-s) = \int_s^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv; \quad (73b)$$

die Integrale höherer Ordnung lassen sich rekursiv berechnen aus

$$E_n(s) = \frac{1}{n-1} \{ e^{-s} - s E_{n-1} \}. \quad (73c)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_i$  werden wie im Zylinderfalle in jedem Iterationsschritt aus dem entsprechenden Moderatorfluß für diskrete Richtungen ausgerechnet.

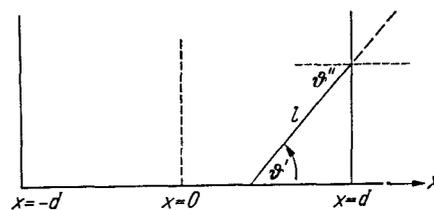


Abb. 13

Zur Berechnung des Flußanteils  $\Phi_{Str}$  der gestreuten Neutronen läßt sich eine Entwicklung des Uranflusses nach  $x^2$ -Potenzen angeben, da die strenge Lösung sich im Sinne einer  $P_n$ -Entwicklung aus hyperbolischen Cosinus zusammensetzt:

$$\Phi_U(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{2n}. \quad (74)$$

Man erhält:

$$\Phi_{Str} = \sum_{n=0}^\infty a_n \Gamma_n. \quad (75)$$

Hierbei ist:

$$\Gamma_n = G_n(s_1) + G_n(s_2). \quad (76a)$$

Die ersten drei Glieder lauten:

$$\left. \begin{aligned} G_0(s_1) &= g_0(s_1) \\ G_1(s_1) &= x^2 g_0(s_1) + 2x g_1(s_1) + g_2(s_1) \\ G_2(s_1) &= x^4 g_0(s_1) + 4x^3 g_1(s_1) + 6x^2 g_2(s_1) + \\ & \quad + 4x g_3(s_1) + g_4(s_1), \end{aligned} \right\} (76b)$$

$$\left. \begin{aligned} G_0(s_2) &= g_0(s_2) \\ G_1(s_2) &= x^2 g_0(s_2) - 2x g_1(s_2) + g_2(s_2) \\ G_2(s_2) &= x^4 g_0(s_2) - 4x^3 g_1(s_2) + 6x^2 g_2(s_2) - \\ & \quad - 4x g_3(s_2) + g_4(s_2). \end{aligned} \right\} (76c)$$

Dabei ist

$$g_n(s) = \frac{\Sigma_s^U}{2} \frac{n!}{(\Sigma^U)^{n+1}} \left\{ E_{n+2}(0) - \sum_{\nu=0}^n \frac{s^{n-\nu}}{(n-\nu)!} E_{\nu+2}(s) \right\}. \quad (77)$$

Die Koeffizienten  $a_n$  in (74) und (75) werden wieder über die Forderung der kleinsten quadratischen

Abweichung bestimmt. Der Neutronenfluß in der Brennelementplatte ergibt sich dann also aus

$$\Phi_U(x) = \Phi_J + \Phi_{\text{Str}}. \quad (78)$$

#### IV. Der kugelsymmetrische Fall

Auch hier beschränken wir uns auf die Angabe der Formeln zur Berechnung des Flusses in der Brennelementkugel. Die Transportgleichung lautet:

$$\begin{aligned} \Phi_U(r) = & \frac{1}{2} \sum_s^U \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \int_0^l \Phi_U(r + l' \vec{\Omega}) e^{-\Sigma^U l'} dl' + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' e^{-\Sigma^U l} \int_0^\infty \times \\ & \times \{ \Sigma_s^M \Phi_M(r + (l + l') \vec{\Omega}) + Q_0 \} e^{-\Sigma^M l'} dl' \\ = & \Phi_{\text{Str}} + \Phi_J. \end{aligned}$$

$\vartheta'$  ist der Winkel zwischen  $r$ -Achse und der betrachteten Richtung  $\vec{\Omega}$ ,  $l$  der Abstand vom Aufpunkt zum Kugelrand in der betrachteten Richtung. Die Entwicklung des einfallenden Stromes schreiben wir wie im ebenen Fall:

$$J(\vartheta'') = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \vartheta'' + \alpha_2 \cos^2 \vartheta'' + \dots \quad (80)$$

Es ist [vgl. (15a) und (15b)]

$$\cos \vartheta'' = \frac{1}{\varrho} \sqrt{\varrho^2 - r^2 \sin^2 \vartheta'}, \quad (81a)$$

$$l(\vartheta') = -r \cos \vartheta' + \sqrt{\varrho^2 - r^2 \sin^2 \vartheta'}. \quad (81b)$$

Dann wird

$$\Phi_J = 2\pi \sum_i \alpha_i \int_0^\pi \cos^i \vartheta' \sin \vartheta' e^{-\Sigma^U l} d\vartheta'. \quad (82)$$

Die in (82) auftretenden Integrale lassen sich nur numerisch ausführen (sie entsprechen der ebenfalls numerisch auszuführenden  $\varphi'$ -Integration im Zylinderfall).

Die Entwicklung des Uranflusses nach  $r^2$ -Potenzen liefert für den Beitrag der gestreuten Neutronen:

$$\Phi_{\text{Str}} = \sum_n a_n G_n. \quad (83)$$

Die ersten Glieder sind

$$G_0 = \int_0^\pi g_0 [l(\vartheta')] \sin \vartheta' d\vartheta', \quad (84a)$$

$$G_1 = \int_0^\pi \{ r^2 g_0 + 2r \cos \vartheta' \cdot g_1 + g_2 \} \sin \vartheta' d\vartheta', \quad (84b)$$

$$\begin{aligned} G_2 = & \int_0^\pi \{ r^4 g_0 + 4r^3 \cos \vartheta' \cdot g_1 + \\ & + (4r^2 \cos^2 \vartheta' + 2r^2) g_2 + 4r \cos \vartheta' \cdot g_3 + g_4 \} \times \\ & \times \sin \vartheta' d\vartheta'. \end{aligned} \quad (84c)$$

Dabei ist jetzt

$$g_n [l(\vartheta')] = \frac{\Sigma_s^U}{2} \frac{n!}{(\Sigma^U)^{n+1}} \left\{ 1 - e^{-\Sigma^U l} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \right\}. \quad (85)$$

Die Größe  $l$  in (84) und (85) ist durch (81b) bestimmt.

Fräulein R. KUHN danken wir sehr für die Durchführung der numerischen Rechnung.

#### Anhang

Die in Abschnitt I und II auftretenden Integrale  $H_n(s)$  sind bereits von G. W. BICKLEY [10] untersucht worden und werden hier noch einmal zusammen-

gestellt:

$$H_n(s) = \int_1^\infty \frac{e^{-sv}}{v^n \sqrt{v^2 - 1}} dv, \quad (A.1)$$

$$H_{n-2} - H_n = \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1) e^{-sv}}{v^n \sqrt{v^2 - 1}} dv. \quad (A.2)$$

Durch partielle Integration von (A.2) erhält man die Rekursionsformel

$$H_{n+1}(s) = \frac{1}{n} \{ (n-1) H_{n-1} + s(H_{n-2} - H_n) \}. \quad (A.3)$$

Speziell ist:

$$H_0(s) = K_0(s), \quad (A.4)$$

wobei  $K_0(s)$  die modifizierte Bessel-Funktion zweiter Art ist. Durch partielle Differentiation nach  $s$  erhält man

$$H_{-1}(s) = \int_1^\infty \frac{v e^{-sv}}{\sqrt{v^2 - 1}} dv = -\frac{d}{ds} I_0(s) = K_1(s). \quad (A.5)$$

Für  $H_1$  erhält man nach einiger Rechnung:

$$H_1(s) = \frac{\pi}{2} - s \{ K_0(s) \cdot R_0^{(1)}(s) + s \cdot K_1(s) R_0^{(2)}(s) \} \quad (A.6)$$

wobei die Größen  $R_0^{(1)}$  und  $R_0^{(2)}$  mit den Lommel-Funktionen verknüpft sind über

$$R_0^{(1)}(s) = \frac{\pi}{2} L_1(s) + 1; \quad s \cdot R_0^{(2)}(s) = \frac{\pi}{2} \cdot L_0(s) \quad (A.7)$$

und folgende rasch konvergente Entwicklungen besitzen:

$$\left. \begin{aligned} R_0^{(1)} &= 1 + \frac{s^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{s^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} + \\ &+ \frac{s^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9} + \dots \\ R_0^{(2)} &= 1 + \frac{s^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + \frac{s^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \\ &+ \frac{s^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (A.8)$$

Für  $n \geq 2$  sind also sämtliche Integrale  $H_n$  über die Rekursionsformel (A.3) berechenbar.

Für  $s = 0$  ergibt

$$H_n(0) = 2^{n-2} \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{n-1}{2} - 1 \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \pi \\ & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \\ & \frac{\left( \frac{n-1}{2} - 1 \right)! \left( \frac{n-1}{2} \right)!}{(n-1)!} \\ & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \right\} \quad (A.9)$$

**Literatur:** [1] MARK, C.: The Spherical Harmonics Method. CRT-338, 1957. — [2] DAVISON, B.: Canad. J. Phys. **35** (1957). — [3] KÜSTERS, H.: KFK Ber. 15, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1959. — [4] AMOUYAL, A., et P. BONOIST: J. Nucl. En. **6**, CEA-571 (1957/58). — [5] STUART, G. W.: Nucl. Sci. En. **2**, 617 (1957). — [6] WOODRUFF, R. W.: Nucl. Sci. En. **3**, 339 (1958). — [7] ANGELOPOLUS, M.: Atomkernenergie **4**, 437 (1959). — [8] CARLSON, B. E.: Solution of the Transp. Equation by  $S_N$  Approximations, LA 1891, 1955. — [9] CASE, M., F. DE HOFFMANN and G. PLACZEK: Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. Los Alamos Scientific Laboratory, 1953, p. 134; — DAVISON, B.: Neutron Transport Theory, p. 70. Oxford 1958. — [10] BICKLEY, G. W.: Phil. Mag. **20** (1935).