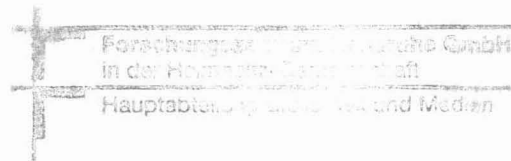


KFK-117

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Oktober 1962

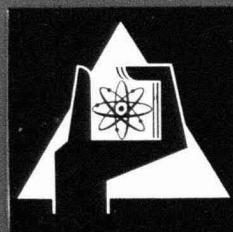


KFK 117

Institut für Radiochemie

Die mathematische Behandlung der Zerfalls- und Bildungsgesetze
der Radioaktivität mit grafisch gelösten Beispielen.

W. Seelmann-Eggebert, J. Flegenheimer, G. Pfennig
unter Mitarbeit von H. Schroeder



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Oktober 1962

KFK 117

Institut für Radiochemie

DIE MATHEMATISCHE BEHANDLUNG DER ZERFALLS-UND BILDUNGSGESETZE
DER RADIOAKTIVITÄT MIT GRAFISCH GELÖSTEN BEISPIELEN

W.Seelmann-Eggebert, J.Flegelheimer und G.Pfennig

unter Mitarbeit von H.Schroeder

Kernreaktor Bau- und Betriebs-Gesellschaft m.b.H.

Karlsruhe

V O R W O R T

Der Zusammenstellung liegen Vorlesungen und Seminare zugrunde, welche im Zusammenhang mit radiochemischen Praktikumskursen in Buenos Aires/Argentinien und in Mainz bzw. Karlsruhe gehalten wurden.

Die erste, inzwischen stark veränderte, Ausgabe wurde von Herrn J.Flegenhaimer in spanischer Sprache verfaßt.

Herrn H.Sorantin danke ich für Hinweise und Ergänzung des Abschnitt 3.

Karlsruhe im Oktober 1962 W.Seelmann-Eggebert

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Zerfall von Radionukliden	1
1.1 Zerfallsgesetz eines einfachen Radionuklids	1
1.2 Abnahme eines Radionuklids aufgrund zweier konkurrierender Zerfallsprozesse	3
1.3 Abfall einer Mischung mehrerer Radionuklide, die nicht in genetischem Zusammenhang stehen	4
1.4 Aktivitätsverlauf zweier Nuklide, die untereinander in genetischem Zusammenhang stehen	4
1.4.1 Dauerndes Gleichgewicht ($T_1 \gg T_2$)	5
1.4.2 Laufendes Gleichgewicht ($T_1 > T_2$)	6
1.4.3 Ähnliche Halbwertszeiten ($T_1 \cong T_2$)	7
1.4.4 Halbwertszeit der Mutter kürzer als die der Tochter ($T_1 < T_2$)	8
1.4.5 Aktivitätsverlauf des Enkelnuklids einer radioaktiven Familie	9
1.4.6 Aktivitätsverlauf des n-ten Gliedes einer radioaktiven Familie (Bateman-Gleichung)	11

	Seite
2. Bildung von Radionukliden durch Kernreaktionen	12
2.1 Aktivitätsanstieg eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)	12
2.2 Aktivitätsanstieg der Folgeprodukte eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)	14
2.3 Aktivitätsanstieg eines durch doppelten Einfangprozeß gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)	15
2.4 Kernprozeß, dem nach einem β -Zerfall ein weiterer Kernprozeß folgt (Zahl der Ausgangskerne konstant)	17
2.5 Aktivitätsanstieg eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids bei merklich abnehmender Zahl der Targetkerne	19
2.6 Aktivitätsanstieg des n-ten Gliedes eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (allgemeine Gleichung)	20
3. Grafische Darstellung des Aktivitätsverlaufs	24
3.1 Grafische Darstellung einer Zerfallsgeraden	24
3.2 Grafische Darstellung eines Radionuklids, dessen Abnahme aufgrund zweier konkurrierender Prozesse erfolgt	25
3.3 Grafische Darstellung des Aktivitätsverlaufes mehrerer Radionuklide, die nicht in genetischem Zusammenhang stehen	26
3.4 Grafische Darstellung des Aktivitätsverlaufes zweier Nuklide, die untereinander in genetischem Zusammenhang stehen	26
3.5 Grafische Darstellung des Aktivitätsverlaufes eines Enkelnuklids	28
3.6 Grafische Darstellung des Aktivitätsverlaufes des n-ten Gliedes einer radioaktiven Familie	29
4. Aufgaben zur grafischen Darstellung des Aktivitätsverlaufes verschiedener Systeme	30

1. Zerfall von Radionukliden

1.1 Zerfallsgesetz eines einfachen Radionuklids

Das Zeitgesetz des radioaktiven Zerfalls ist von 1. Ordnung und lautet:

$$\frac{dN}{dt} = - \lambda N \quad (1)$$

Dieses Gesetz sagt aus, daß die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Atomkerne proportional der Zahl der in jedem Augenblick vorhandenen Kerne des betreffenden Nuklids ist. Das Minuszeichen zeigt an, daß die Zahl der Atome N als Funktion der Zeit t abnimmt. Der Proportionalitätsfaktor λ ist eine jedem Nuklid eigene charakteristische Größe und wird Zerfallskonstante genannt. Sie gibt den Bruchteil der Kerne an, der in der Zeiteinheit von der jeweils vorhandenen Menge zerfällt. Durch Integration von Gleichung (1) gelangt man zur allgemeinen Zerfallsgleichung:

$$N(t) = N(o) \cdot e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome eines Nuklids bezeichnet man als Zerfallsrate (λN).

Die Einheit der Radioaktivität ist das Curie [c oder Ci]. (Mc, kc, mc, μ c, nc bzw. m μ c). Ein Radionuklid hat die Aktivität 1 Curie, wenn von ihm $3,7 \cdot 10^{10}$ Kerne pro Sekunde zerfallen. Die Aktivitätsangabe bezieht sich nur auf das angegebene Nuklid und ist von der Nachbildung von Folgeprodukten unabhängig.

Die experimentell gemessene Aktivität A ist meist geringer, jedoch stets der Zerfallsrate proportional.

$$A = F \lambda N \quad (3)$$

Der Faktor F ist gleich dem Quotienten aus der gemessenen Rate und der Zerfallsrate eines Radionuklids; die Aktivitätsrate hängt z.B. von der

Meßanordnung, der Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors, der Schichtdicke, der Unterlage und der Ausdehnung des Meßpräparates ab.

Die allgemeine Zerfallsgleichung für relative Aktivitäten lautet daher:

$$F\lambda N(t) = F\lambda N(o) \cdot e^{-\lambda t} \quad (4)$$

Ersetzt man $F\lambda N$ durch A , so erhält man Gleichung (5):

$$A(t) = A(o) \cdot e^{-\lambda t} \quad (5)$$

oder in logarithmischer Schreibweise:

$$\ln A(t) = \ln A(o) - \lambda t \quad (5a)$$

wobei $A(t)$ die Aktivität zur Zeit t und $A(o)$ die Aktivität zur Zeit $t = 0$ ist (Anfangsaktivität).

Wenn die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Atome $N(o)$ auf die Hälfte abgesunken ist, wird $N(t) = \frac{N(o)}{2}$ und $t = T$ (Halbwertszeit), so daß durch Umformung aus Gleichung (2) folgt:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{T}$$

Setzt man in Gleichung (5a) diesen Ausdruck für λ ein, so erhält man

$$\ln A(t) = \ln A(o) - \frac{t}{T} \ln 2 \quad (5b)$$

Die Verwendung der Halbwertszeit an Stelle der Zerfallskonstanten λ ist oft anschaulicher, so daß in den wichtigsten Endgleichungen λ durch $\frac{\ln 2}{T}$ ersetzt ist.

1.2. Abnahme eines Radionuklids aufgrund zweier konkurrierender Zerfallsprozesse - - - - -

Es kommt vor, daß ein Radionuklid durch verschiedenartige Umwandlungsprozesse zerfällt, z. B. sowohl durch Elektroneneinfang als auch durch Negatronenemission. Die Halbwertszeit bleibt jedoch auch in diesem Fall ihrer Definition gemäß eine charakteristische Konstante des Radionuklids, da es für seine Zerfallsgeschwindigkeit ohne Bedeutung ist, wie der Zerfall der einzelnen Kerne erfolgt. Dagegen kann man die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zahl der Atomkerne eines Radionuklids durch einen bestimmten Prozeß abnimmt, durch eine dieser Übergangsart eigene Zerfallskonstante ausdrücken (partielle Zerfallskonstante $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$). Die Zerfallskonstante λ des Nuklids ist dann gleich der Summe aller Zerfallswahrscheinlichkeiten.

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \quad (6)$$

Da die Aktivität $A = \lambda N$ ($F = 1$) ist, kann man die Gesamtaktivität als Summe aller Übergangswahrscheinlichkeiten ausdrücken.

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \lambda_1 N + \lambda_2 N + \dots + \lambda_n N \quad (7)$$

$$A(t) = \lambda_1 N(0) e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 N(0) e^{-\lambda_2 t} + \dots + \lambda_n N(0) e^{-\lambda_n t} \quad (8)$$

Die partiellen Aktivitäten sind proportional der Gesamtzahl der Atome N des betreffenden Nuklids, welche ihrerseits der Halbwertszeit des betreffenden Radionuklids entsprechend abnimmt.

Die Gesetze des radioaktiven Zerfalls gelten gleichfalls, wenn die Abnahme der Atomkerne eines Nuklids durch einen anderen, den statistischen Gesetzen gehorchenden Prozeß erfolgt; z. B. dann, wenn die Abnahme der Atomkerne einer Kernart durch Neutroneneinfang verursacht wird (s. unter 2).

1.3. Abfall einer Mischung mehrerer Radionuklide, die nicht in genetischem Zusammenhang stehen - - - - -

Die Gesamtaktivität einer Mischung mehrerer Radionuklide ist zu jeder Zeit der Summe der zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Einzelaktivitäten proportional.

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = A_1(o) e^{-\lambda_1 t} + A_2(o) e^{-\lambda_2 t} + \dots + A_n(o) e^{-\lambda_n t} \quad (9)$$

1.4. Aktivitätsverlauf zweier Nuklide, die untereinander in genetischem Zusammenhang stehen - - - - -

Entsteht beim Zerfall eines Nuklids ein radioaktives Tochternuklid, so werden im folgenden die Bezeichnungen Mutter- und Tochternuklid bzw. die Indices 1 und 2 verwendet.

Der Aktivitätsverlauf des Mutternuklids ist bereits durch Gleichung (5) beschrieben. Der Aktivitätsverlauf des Tochternuklids ist komplizierter, da es einerseits durch den Zerfall des Mutternuklids gebildet wird, andererseits mit eigener Zerfallskonstante λ_2 wieder zerfällt. Der Ansatz lautet daher:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (10)$$

Die Anzahl der Kerne des Tochternuklids zur Zeit t ergibt sich daraus zu:

$$N_2(t) = N_1(o) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_2(o) e^{-\lambda_2 t} \quad (11)$$

Nach entsprechender Umformung erhält man für den Aktivitätsverlauf des Tochternuklids Gleichung (11a):

$$A_2(t) = A_1(o) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + A_2(o) e^{-\lambda_2 t} \quad (11)$$

oder

$$A_2(t) = A_1(o) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right) + A_2(o) e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \quad (11b)$$

Sofern zur Zeit $t = 0$ kein Tochternuklid vorhanden ist, vereinfacht sich die Gleichung (11b) zu:

$$A_2(t) = A_1(o) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right) \quad (12)$$

1.4.1 Dauerndes Gleichgewicht ($T_1 \gg T_2$)

Wenn die Halbwertszeit des Mutternuklids sehr viel größer als die des Tochternuklids ist, kann T_2 im Verhältnis zu T_1 in Gleichung (12) vernachlässigt werden, so daß diese sich vereinfacht zu:

$$A_2(t) = A_1 \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right) \quad (13)$$

Wenn sowohl $T_1 \gg T_2$ als auch $t \ll T_1$ kann man Gleichung (13) in der vereinfachten Form verwenden:

$$A_2(t) = A_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right) \quad (14)$$

Aus der Gleichung ergibt sich, daß die Geschwindigkeit des Anstiegs der Tochteraktivität nur von T_2 abhängt.

Nach einer Zeit t etwa $6 - 7 T_2$ ist die Tochteraktivität etwa gleich der Aktivität des Mutternuklids geworden. Die Gesamtaktivität über Zeitintervalle, die klein im Vergleich zu T_1 sind, ist konstant und gleich $2 A_1$.

1.4.2 Laufendes Gleichgewicht ($T_1 > T_2$)

Wenn die Halbwertszeit des Mutternuklids zwar größer als die Halbwertszeit des Tochternuklids ist, aber beide von ähnlicher Größenordnung sind, dann gilt die Gleichung (12).

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t \ln 2}{T_1}} - e^{-\frac{t \ln 2}{T_2}} \right)$$

Für t größer als etwa $6-7 T_2$ vereinfacht sich Gleichung (12), da der Ausdruck

$$e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2}$$

mit der Zeit viel schneller abnimmt, als $e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2}$.

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} \quad (15)$$

Das System erreicht einen Gleichgewichtszustand, in welchem die Aktivität des Tochternuklids

$$A_2 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} A_1$$

ist und mit der Halbwertszeit des Mutternuklids abnimmt.

Die Aktivität des Tochternuklids A_2 ist für $t = 0$ gleich Null und strebt wieder gegen Null, wenn t sehr groß wird. Daraus ergibt sich, daß A_2 zu irgend einer Zeit t_m einen Maximalwert besitzt. Diese Zeit t_m findet man, wenn man die Gleichung (12) nach t differenziert, die Ableitung gleich Null setzt und nach t_m auflöst. Man erhält:

$$t_m = \frac{T_1 T_2}{(T_2 - T_1) \ln 2} \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (16)$$

In entsprechender Weise findet man das Aktivitätsmaximum für die Gesamtaktivitätskurve von Mutter- und Tochternuklid aus der Gleichung:

$$A_{\text{Gesamt}} = A_1 + A_2 = A_1(o) e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} + A_1(o) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right) \quad (17)$$

Man erhält dann:

$$t_m = \frac{T_1 T_2}{(T_1 - T_2) \ln 2} \cdot \ln \frac{T_1^2}{2T_1 T_2 - T_2^2} \quad (18)$$

1.4.3 Ähnliche Halbwertszeiten ($T_1 \cong T_2$)

Wenn die Halbwertszeiten von Mutter- und Tochternuklid sehr ähnlich sind, kann die Gleichung (12) nicht mehr verwendet werden. Durch Reihenentwicklung erhält man:

$$A_2(t) = A_1(o) \frac{t \ln 2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \left(1 + \frac{t(T_1 - T_2)}{2T_1 T_2} \ln 2 \right) \quad (19)$$

Der Ausdruck

$$\frac{t(T_1 - T_2)}{2T_1 T_2} \ln 2$$

kann für Werte $\ll 1$ vernachlässigt werden. Gleichung (19) kann dann in der folgenden Form verwendet werden:

$$A_2(t) = A_1(o) \frac{t \ln 2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \quad (20)$$

Für $\frac{t(T_1 - T_2)}{2T_1 T_2} \ln 2 \approx 1$ ist der Klammerausdruck der Gleichung (19) jedoch nicht mehr zu vernachlässigen.

Für $\frac{t(T_1 + T_2)}{2T_1 T_2} \ln 2 > 1$ muß anstelle von Gleichung (19) wieder Gleichung (12) verwendet werden.

Wird im Extremfall $T_1 = T_2$, dann erhält man die Gleichung:

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{t}{T} \ln 2 \cdot e^{-\frac{t}{T} \ln 2} \quad (20a)$$

die formal identisch ist mit Gleichung (20).

Differenziert man Gleichung (20a) nach t und setzt die Ableitung gleich Null, dann wird:

$$t_m = \frac{T}{\ln 2} = \frac{1}{\lambda} \quad (21)$$

Sofern das Mutternuklid zur Zeit $t = 0$ tochterfrei war, ist t_m außerdem noch der Zeitpunkt, zu dem die Tochteraktivität gleich der Mutteraktivität ist.

1.4.4. Halbwertszeit der Mutter kürzer als die der Tochter ($T_1 < T_2$)

Für den Fall $T_1 < T_2$ schreiben wir die Gleichung (12) in folgender Weise um:

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_2 - T_1} \left(e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} \right) \quad (22)$$

In dieser Gleichung ist $\frac{T_1}{T_2 - T_1}$ kleiner als 1, wenn $2 T_1 < T_2$.

Für Werte von $t \ll T_2$ hängt die Geschwindigkeit des Anstiegs der Tochteraktivität A_2 im Gegensatz zum dauernden und laufenden Gleichgewicht nur von der Halbwertszeit des Mutternuklids T_1 ab:

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_2 - T_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} \right) \quad (23)$$

Für Werte von $t > T_1$ fällt die Tochteraktivität mit der ihr eigenen Halbwertszeit ab:

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \quad (24)$$

Es existiert kein Gleichgewicht, weil das Aktivitätsverhältnis zwischen Tochter- und Mutternuklid als Funktion der Zeit laufend größer wird.

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \left(e^{\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} t \ln 2} - 1 \right) \quad (25)$$

Die Tochteraktivität durchläuft ein Maximum wie in den Fällen 1.4.2 und 1.4.3. Die zugehörige Zeit t_m kann ebenfalls mit der Gleichung (16) errechnet werden.

1.4.5. Aktivitätsverlauf des Enkelnuklids einer radioaktiven Familie

Wenn durch den Zerfall des Tochternuklids ein weiteres Radionuklid entsteht (Enkel), beschreibt die folgende Gleichung den Aktivitätsverlauf des Enkels, sofern zur Zeit $t = 0$ die Mutter sowohl tochter- als auch enkelfrei war.

$$A_3(t) = A_1(0) T_1 \left(\frac{T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} + \frac{T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} + \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_3} \ln 2} \right) \quad (26)$$

Wenn die Halbwertszeit des Mutternuklids viel größer ist als die des Tochternuklids und des Enkels, so vereinfacht sich die Gleichung (26) unter der zusätzlichen Bedingung, daß $t \ll T_1$ ist, zu:

$$A_3(t) = A_1(0) \left(1 - \frac{T_2}{T_2 - T_3} e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} + \frac{T_3}{T_2 - T_3} e^{-\frac{t}{T_3} \ln 2} \right) \quad (27)$$

Ist jedoch die Halbwertszeit des Tochternuklids größer als die des Mutternuklids und des Enkels, so sind unter den zusätzlichen Bedingungen $t \gg T_1$ und $t \gg T_3$ der erste und der dritte Summand der Gleichung (26) gegenüber dem zweiten sehr klein und können daher vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Gleichung für die Enkelaktivität vereinfachen und lautet dann:

$$A_3(t) = A_1(0) \frac{T_1 T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \quad (28)$$

Für die Bedingungen $T_1 < T_2$ und $T_3 \ll T_2$ läßt sich die Gleichung (28) weiter vereinfachen und in folgender Form schreiben:

$$A_3(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} = A_2(t) \quad (28a)$$

Diese Gleichung (28a) ist mit der Gleichung (24) für das System Mutter-Tochter identisch, was verständlich wird, da wegen des laufenden

Gleichgewichts zwischen Enkel und Tochter das Aktivitätsverhältnis durch folgenden Ausdruck gegeben ist :

$$\frac{A_2(t)}{A_3(t)} = \frac{T_2 - T_3}{T_2} \quad (29)$$

1.4.6. Aktivitätsverlauf des n-ten Gliedes einer radioaktiven Familie (Bateman-Gleichung) -----

Die allgemeine Gleichung, welche den Aktivitätsverlauf des n-ten Gliedes einer radioaktiven Familie oder Reihe beschreibt, wurde von Bateman (Proc. Camb. Phil. Soc. 15, 423, 1910) angegeben. Die Bateman-Gleichung beschreibt den Aktivitätsverlauf des n-ten Gliedes, wenn zur Zeit $t = 0$ die Mutter keine Folgeprodukte hatte:

$$A_n(t) = K_1 e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} + K_2 e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} + \dots + K_n e^{-\frac{t}{T_n} \ln 2} \quad (30)$$

Hierin bedeuten:

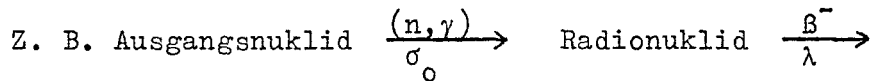
$$K_1 = A_1(0) T_1 \frac{T_1^{(n-2)}}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3) \dots (T_1 - T_n)}$$

$$K_2 = A_1(0) T_1 \frac{T_2^{(n-2)}}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3) \dots (T_2 - T_n)}$$

$$K_n = A_1(0) T_1 \frac{T_n^{(n-2)}}{(T_n - T_1)(T_n - T_2) \dots (T_n - T_{n-1})}$$

2. Bildung von Radionukliden durch Kernreaktionen

2.1 Aktivitätsanstieg eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)



Bei der Erzeugung eines Radionuklids durch Bestrahlung in einem gleichförmigen, zeitlich konstanten Partikelstrom ist die Bildungsrate, d. h. die Zahl P_0 der pro Zeiteinheit gebildeten Kerne des Radionuklids, folgenden Größen proportional:

1. der Zahl N_0 der Kerne des Ausgangsnuklids
2. dem die Kerne durchsetzenden Partikelfluß Φ und
3. dem Aktivierungsquerschnitt σ_0 des Ausgangsnuklids

$$P_0 = N_0 \Phi \sigma_0 \quad (31)$$

Die Zahl der Ausgangskerne erhält man durch die Beziehung

$$N_0 = \frac{m N_L H}{A}$$

Hierbei ist

- m die Menge des bestrahlten Elements in g
- N_L die Loschmidt'sche Zahl
- H die Isotopenhäufigkeit (in %/100)
- A das Atomgewicht des betreffenden Elements

In der Gleichung (31) wird vorausgesetzt, daß die Zahl der Ausgangskerne N_0 konstant bleibt, obwohl sie sich während der Bestrahlung durch Kernreaktionen laufend vermindert. Diese Abnahme ist jedoch meist so unbedeutend, daß man sie vernachlässigen kann.

Ein Teil der bei der Bestrahlung gebildeten Kerne des Radionuklids zerfällt bereits während der Bestrahlung wieder. Die Zahl der in der Zeiteinheit gebildeten und noch nicht wieder zerfallenen Atome ist daher:

$$\frac{dN_r}{dt^*} = P_0 - \lambda N_0 \quad (32)$$

Durch Integration der Gleichung (32) erhält man den Aktivitätsanstieg als Funktion der Bestrahlungszeit t^* :

$$A(t^*) = P_0 (1 - e^{-\lambda t^*}) \quad (33)$$

Diese Gleichung entspricht der des dauernden Gleichgewichts Gl. (14), also der Nachbildung des Tochternuklids durch radioaktiven Zerfall eines sehr langlebigen Mutternuklids.

Für $t^* \longrightarrow \infty$ wird $A(t^*) = P_0 = A_\infty$

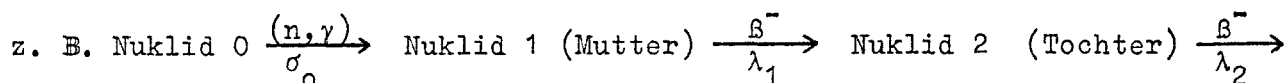
A_∞ ist die höchste Aktivität, die man bei unendlich langer Bestrahlungszeit erreichen kann (Sättigungsaktivität), d. h. sie ist dann erreicht, wenn die Zerfallsrate gleich der Bildungsrate geworden ist.

Die Aktivitätsabnahme nach Beendigung der Bestrahlung wird durch das Zusatzglied $e^{-\lambda t}$ berücksichtigt. Die zu irgendeiner Zeit t noch vorhandene Aktivität ist daher:

$$A(t) = P_0 (1 - e^{-\lambda t^*}) e^{-\lambda t} \quad (34)$$

wobei t die nach Ende der Bestrahlung verflossene Zeit ist.

2.2. Aktivitätsanstieg der Folgeprodukte eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)



In vielen Fällen bildet das durch einen Kernprozeß erzeugte Radionuklid ein gleichfalls radioaktives Tochternuklid nach. Bezeichnet man mit der Indexzahl 0 das Ausgangsnuklid und mit den Indexzahlen 1 bzw. 2 das radioaktive Mutter- bzw. Tochternuklid, so erhält man:

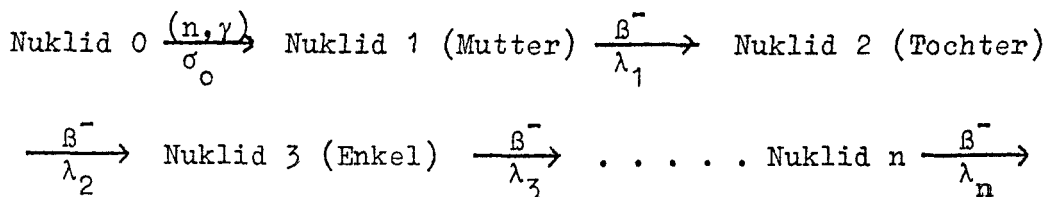
$$\frac{dN_1}{dt^*} = P_0 - \lambda_1 N_1 \quad (35)$$

$$\frac{dN_2}{dt^*} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (36)$$

Setzt man in die Gl. (36) den Wert von N_1 ein, den man durch Integration von Gl. (35) erhält und löst die Differentialgleichung, so folgt für den Aktivitätsverlauf des Tochternuklids während der Bestrahlungszeit t^* :

$$A_2(t^*) = P_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\lambda_1 t^*} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\lambda_2 t^*} \right) \quad (37)$$

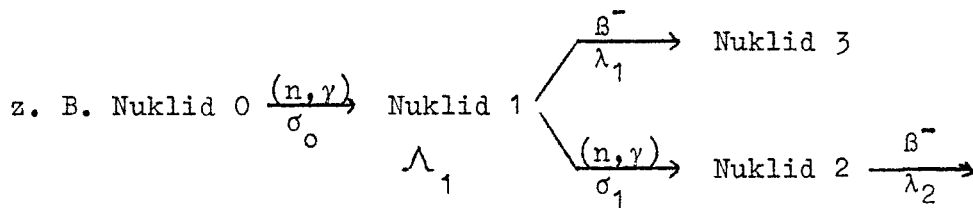
Falls das zweite Radionuklid beim Zerfall ein drittes Radionuklid (Indexzahl 3) nachbildet usw., so kann man eine Reihe von Gleichungen aufstellen, die den Gl. (35) und (36) entsprechen.



Die Aktivität des n-ten Nuklids - bei konstanter Zahl der Ausgangskerne - ist gegeben durch:

$$A_n(t^*) = P_0 \left(1 - \frac{T_1^{n-1} e^{-\lambda_1 t^*}}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3) \dots (T_1 - T_n)} - \frac{T_2^{n-1} e^{-\lambda_2 t^*}}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3) \dots (T_2 - T_n)} - \dots - \frac{T_n^{n-1} e^{-\lambda_n t^*}}{(T_n - T_1)(T_n - T_2) \dots (T_n - T_{n-1})} \right) \quad (38)$$

2.3. Aktivitätsanstieg eines durch doppelten Einfangprozeß gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)



Die bisherigen Gleichungen gelten nur dann, wenn die Abnahme der Zahl der gebildeten Kerne allein durch radioaktiven Zerfall erfolgt. Die Abnahme eines im Neutronenstrom gebildeten Radionuklids kann jedoch auch noch durch einen weiteren Neutroneneinfangprozeß bewirkt werden (doppelter Einfang).

Meist ist die Berücksichtigung dieses Sekundärprozesses nicht erforderlich; bei hohem Partikelfluß und sehr großem Wirkungsquerschnitt σ_1 kann er jedoch nicht mehr vernachlässigt werden. Die Gl. (32) muß dann durch folgende Beziehung ersetzt werden:

$$\frac{dN_1}{dt^*} = P_0 - \lambda_1 N_1 - N_1 \Phi \sigma_1 \quad (40)$$

umgeformt $\frac{dN_1}{dt^*} = P_0 - N_1 (\lambda_1 + \Phi \sigma_1)$ (40a)

setzt man $\left[\lambda_1 + \Phi \sigma_1 \right] = \Lambda_1$, so ergibt sich:

$$\frac{dN_1}{dt^*} = P_0 - \Lambda_1 N_1 \quad (40b)$$

Λ_1 erhält den Sinn einer "Zerfallskonstanten", deren Wert stets größer ist als die Zerfallskonstante λ des radioaktiven Zerfalls.

Durch Integration der Gl. (40a) ergibt sich:

$$A_1(t^*) = \frac{P_0 \lambda_1}{\Lambda_1} (1 - e^{-\Lambda_1 t^*}) \quad (41)$$

Die Bildungsgleichung eines durch doppelten Einfang erzeugten Radionuklids (Index 2) ist:

$$\frac{dN_2}{dt^*} = N_1 \Phi \sigma_1 - \lambda_2 N_2 \quad (42)$$

Diese Gl. (42) gilt unter der Voraussetzung, daß N_0 während der Bestrahlungsdauer unverändert bleibt und Nuklid 2 nur durch radioaktiven Zerfall abnimmt.

Wenn man N_1 einsetzt und die Differentialgleichung integriert, erhält man:

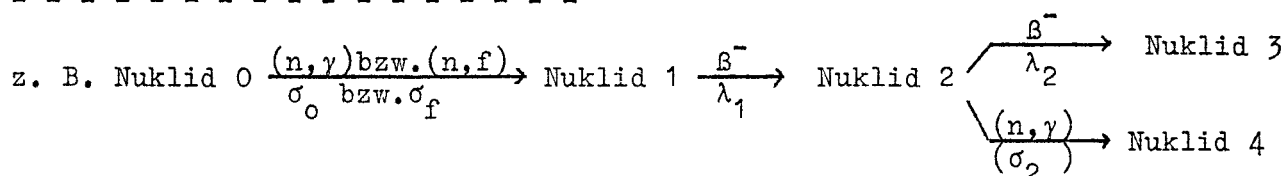
$$A_2(t^*) = \frac{N_0 \Phi^2 \sigma_0 \sigma_1}{\Lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \Lambda_1} e^{-\Lambda_1 t^*} + \frac{\Lambda_1}{\lambda_2 - \Lambda_1} e^{-\lambda_2 t^*} \right) \quad (43)$$

Man erkennt, daß die Aktivität des durch doppelten Einfang gebildeten Radionuklids dem Quadrat des Flusses proportional ist.

In den Gl. (41) und (43) geht der Wert der Klammer nach 1, wenn die Bestrahlungszeit sehr groß gegen die Halbwertszeit T_1 wird. Wenn das Sättigungsgleichgewicht für beide Radionuklide erreicht ist, nimmt das Aktivitätsverhältnis folgenden Wert an:

$$\frac{A_2(t^*)}{A_1(t^*)} (t^* \rightarrow \infty) = \Phi \frac{\sigma_1}{\lambda_1} = \Phi \frac{\sigma_1 T_1}{\ln 2} \quad (44)$$

2.4. Kernprozeß, dem nach einem β -Zerfall ein weiterer Kernprozeß folgt
(Zahl der Ausgangskerne konstant)



Bei einem Kernprozeß (z. B. bei der Uranspaltung) wird ein radioaktives Nuklid 1 gebildet, dessen Zerfallsprodukt (Nuklid 2) außer durch radioaktiven Zerfall zugleich durch Neutroneneinfang abnimmt.

Ein solches System wird für den Fall eines Neutroneneinfangprozesses in einer spaltisobaren Reihe berechnet.

Unter der Annahme, daß zu Beginn der Uranspaltung keine Spaltprodukte vorhanden waren, wird die Zahl der gebildeten Kerne des Nuklid 1 während der Bestrahlung durch die Gl. (35) beschrieben: (Bildung eines Nuklids durch Bestrahlung mit anschließendem β -Zerfall)

$$\frac{dN_1}{dt^*} = P_0 Y - \lambda_1 N_1 \quad (45)$$

$$N_1(t^*) = \frac{P_0 Y}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t^*}) \quad (46)$$

Für die Zahl der erzeugten Kerne des Nuklids 2 während der Bestrahlung gilt:

$$\frac{dN_2}{dt^*} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 - \Phi \sigma_2 N_2 \quad (47)$$

oder wenn $(\lambda_2 + \Phi \sigma_2)$ gleich Λ_2 gesetzt wird:

$$\frac{dN_2}{dt^*} = \lambda_1 N_1 - \Lambda_2 N_2 \quad (48)$$

Hieraus ergibt sich die Zahl der zu irgendeinem Zeitpunkt t^* während der Bestrahlung vorhandenen Kerne des Nuklids 2 zu:

$$N_2(t^*) = \frac{P_0 Y}{\Lambda_2} \left(1 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t^*} + \frac{\lambda_1}{\Lambda_2 - \lambda_1} e^{-\Lambda_2 t^*} \right) \quad (49)$$

Nachdem die Sättigungsaktivität erreicht ist, beträgt die Zahl der Kerne des Nuklids 1 bzw. 2:

$$N_1 = \frac{P_0 Y}{\lambda_1} ; \quad N_2 = \frac{P_0 Y}{\Lambda_2}$$

Wird die Bestrahlung unterbrochen, so wird die Abnahme der Kerne nur noch durch den radioaktiven Zerfall der Nuklide bestimmt. Die Zahl der Kerne des Nuklids 1 nimmt entsprechend dem allgemeinen Zerfallsgesetz (2) ab, die des Nuklids 2 entsprechend Gl. (11) (Mutter-Tochtersystem).

Unter der Voraussetzung, daß bei Bestrahlungsende Sättigungsaktivität erreicht war, gilt für die zeitliche Abnahme der Kerne des Nuklids 1 die Gleichung:

$$N_1(t) = \frac{P_o Y}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \quad (50)$$

und für die des Nuklids 2:

$$N_2(t) = \frac{P_o Y}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{P_o Y}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad (51)$$

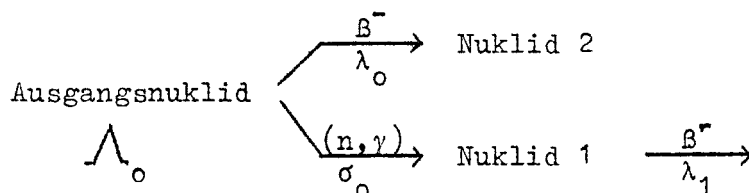
t ist in den Gl. (50) und (51) die Zeit vom Bestrahlungsende an gerechnet.

Die Aktivität des Nuklids 2 durchläuft ein Maximum, dessen Höhe vom Fluß und dem Verhältnis der Halbwertszeiten abhängt. Man kann das Maximum berechnen, wenn man Gl. (51) nach der Zeit differenziert, die Ableitung gleich 0 setzt und nach t_m auflöst.

$$t_m = \frac{\ln \frac{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (52)$$

2.5. Aktivitätsanstieg eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids bei merklich abnehmender Zahl der Targetkerne

z. B.



In den bisherigen Beispielen wurde angenommen, daß die Zahl der Ausgangskerne während der Bestrahlungszeit unverändert bleibt. Bestrahlt man ein Nuklid, dessen Abnahme während der Bestrahlung nicht mehr zu vernachlässigen ist, so ergibt sich der Aktivitätsverlauf für das gebildete Radionuklid durch folgende Gleichung:

$$A_1(t^*) = \frac{N_0 \lambda_1 \bar{\Phi} \sigma_0}{\lambda_1 - \Lambda_0} (e^{-\Lambda_0 t^*} - e^{-\lambda_1 t^*}) \quad (53)$$

wobei $\lambda_0 + \bar{\Phi} \sigma_0$ gleich Λ_0 gesetzt ist.

2.6. Aktivitätsanstieg des n-ten Gliedes eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (allgemeine Gleichung)

Diese allgemeine Gleichung beschreibt die Bildung des n-ten Gliedes eines bei einer Bestrahlung mit einem zeitlich konstanten Fluß gebildeten Radionuklids, wenn bei Beginn der Bestrahlung nur Kerne des Ausgangsnuklids vorlagen. Sie ist allgemein anwendbar und berücksichtigt sowohl radioaktiven Zerfall als auch Kernreaktionen aller Zwischenglieder.

Man muß bei Anwendung der Gleichung den Reaktionsweg beachten, den man rechnerisch verfolgen will.

Die allgemeine Gleichung für das n-te Glied lautet:

$$N_n = c_0 e^{-\Lambda_0 t} + c_1 e^{-\Lambda_1 t} + c_2 e^{-\Lambda_2 t} + \dots + c_n e^{-\Lambda_n t} \quad (54)$$

$$\text{wobei: } c_0 = \frac{\Lambda_0^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^*}{(\Lambda_1 - \Lambda_0)(\Lambda_2 - \Lambda_0) \dots (\Lambda_n - \Lambda_0)} N_0^0$$

$$c_1 = \frac{\Lambda_0^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^*}{(\Lambda_0 - \Lambda_1)(\Lambda_2 - \Lambda_1) \dots (\Lambda_n - \Lambda_1)} N_0^0$$

$$c_2 = \frac{\Lambda_0^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^*}{(\Lambda_0 - \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2) \dots (\Lambda_n - \Lambda_2)} N_0^0$$

$$\text{usw.} \\ c_n = \frac{\Lambda_0^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^*}{(\Lambda_0 - \Lambda_n)(\Lambda_1 - \Lambda_n) \dots (\Lambda_{n-1} - \Lambda_n)} N_0^0$$

hierin bedeuten:

Index 0 = Ausgangsnuklid

Index 1 = 1. Produkt

...

Index n = n-tes Produkt

Λ^* = Zerfallswahrscheinlichkeit, die zu einem bestimmten Produkt führt. Für Λ^* ist daher, je nachdem welcher Reaktionsweg verfolgt werden soll, λ oder $\Phi\sigma$ einzusetzen.

Λ = Wahrscheinlichkeit der Abnahme eines Nuklids. Sie ist gleich der Summe der partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten. Für Λ ist daher $\lambda + \Phi\sigma$ einzusetzen.

Für die Zahl der Kerne des n-ten Produktes zu irgend einem Zeitpunkt der Bestrahlung t folgt:

$$N_n(t) = \Lambda_0^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^* N_0^0 \left[\frac{e^{-\Lambda_0 t}}{(\Lambda_1 - \Lambda_0)(\Lambda_2 - \Lambda_0) \dots (\Lambda_n - \Lambda_0)} + \frac{e^{-\Lambda_1 t}}{(\Lambda_0 - \Lambda_1)(\Lambda_2 - \Lambda_1) \dots (\Lambda_n - \Lambda_1)} + \dots + \frac{e^{-\Lambda_n t}}{(\Lambda_0 - \Lambda_n)(\Lambda_1 - \Lambda_n) \dots (\Lambda_{n-1} - \Lambda_n)} \right] \quad (55)$$

Für die Aktivität des n-ten Gliedes folgt:

$$\Lambda_n(t) = \Lambda_0^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^* N_0^0 \cdot \lambda_n \left[\frac{e^{-\Lambda_0 t}}{(\Lambda_1 - \Lambda_0)(\Lambda_2 - \Lambda_0) \dots (\Lambda_n - \Lambda_0)} + \frac{e^{-\Lambda_1 t}}{(\Lambda_0 - \Lambda_1)(\Lambda_2 - \Lambda_1) \dots (\Lambda_n - \Lambda_1)} + \dots + \frac{e^{-\Lambda_n t}}{(\Lambda_0 - \Lambda_n)(\Lambda_1 - \Lambda_n) \dots (\Lambda_{n-1} - \Lambda_n)} \right] \quad (56)$$

Wird die Zahl der Ausgangskerne als konstant angenommen, so vereinfachen sich die Gleichungen (55) und (56).

$$N_n(t) = \frac{\Lambda_0^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^*}{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_n} N_0^o \left[1 - \frac{e^{-\Lambda_1 t} \Lambda_2 \Lambda_3 \dots \Lambda_n}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)(\Lambda_3 - \Lambda_1) \dots (\Lambda_n - \Lambda_1)} - \dots - \frac{e^{-\Lambda_n t} \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{n-1}}{(\Lambda_1 - \Lambda_n)(\Lambda_2 - \Lambda_n) \dots (\Lambda_{n-1} - \Lambda_n)} \right] \quad (57)$$

$$\Lambda_n(t) = \frac{\Lambda_0^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^*}{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_n} N_0^o \cdot \lambda_n \left[1 - \frac{e^{-\Lambda_1 t} \Lambda_2 \Lambda_3 \dots \Lambda_n}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)(\Lambda_3 - \Lambda_1) \dots (\Lambda_n - \Lambda_1)} - \dots - \frac{e^{-\Lambda_n t} \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{n-1}}{(\Lambda_1 - \Lambda_n)(\Lambda_2 - \Lambda_n) \dots (\Lambda_{n-1} - \Lambda_2)} \right] \quad (58)$$

3. Grafische Darstellung des Aktivitätsverlaufs

Die Gleichungen, welche den radioaktiven Zerfall bzw. die Bildung von Radionukliden beschreiben, sind exponentielle Gleichungen. Der Zerfall läßt sich daher auf halblogarithmischem Papier als Gerade darstellen, wenn die Aktivität auf der logarithmisch geteilten Ordinate gegen die Zeit auf der linear geteilten Abszisse aufgetragen wird.

Man muß sich jedoch immer darüber Klarheit verschaffen, was im einzelnen Falle unter "Aktivität" verstanden wird, wenn auch die Form der Einzelkurven von dem Zahlenwert der Aktivität unabhängig ist. Wird unter "Aktivität" die Zerfallsrate verstanden, so lassen sich die aufgrund der Gleichungen erhaltenen Einzelkurven direkt addieren. Wird unter "Aktivität" jedoch die Nettozählrate verstanden, so ist der Wirkungsgrad der verschiedenen Radionuklide eines Meßpräparates für eine Meßanordnung nicht gleich, so daß der jeweilige Wirkungsgrad bei der Konstruktion berücksichtigt werden muß.

Wenn bei den Beispielen der Wert des Wirkungsgrades nicht angegeben ist, wird er stets für alle beteiligten Radionuklide als gleich angenommen.

3.1 Grafische Darstellung einer Zerfallsgeraden

Das allgemeine Zerfallsgesetz eines Radionuklids

$$A(t) = A(o) \cdot e^{-\lambda t} \quad (5)$$

hat nach dem Logarithmieren die Form:

$$\log A(t) = -\lambda t \log e + \log A(o) \quad (5c)$$

Trägt man $\log A$ als Ordinate gegen t als Abszisse auf, so erhält man eine Gerade mit der Neigung $-\lambda \cdot \log e$, die zur Zeit $t = 0$ die Ordinate im Punkt $\log A(t)$ schneidet.

Bei Verwendung von halblogarithmischem Papier erübrigt sich das Logarithmieren. Die Aktivität zu einem beliebigen Zeitpunkt t kann direkt auf der logarithmisch geteilten Ordinate abgelesen werden.

Die Aktivität eines Nuklids kann aufgrund der Gleichung (5) beliebig kleine Werte annehmen, so daß sie neben der Nullrate des Detektors vernachlässigt werden kann, ohne jedoch den Wert Null zu erreichen.

Da λ gleich $\frac{\ln 2}{T}$ (Gleichung 5a - 5b) ist, genügt die Kenntnis der Halbwertszeit (T), um die Zerfallsgerade konstruieren zu können. Die Anfangsaktivität $A_{(0)}$ wird bei $t = 0$, oder eine beliebige Aktivität bei der entsprechenden Zeit t auf halblogarithmischem Papier aufgetragen und der Punkt ermittelt, in dem die Aktivität im Abszissenabstand von einer Halbwertszeit den halben Wert besitzt. Die Gerade durch diese beiden Punkte entspricht dem Aktivitätsverlauf. Zur Verringerung der Zeichengenauigkeit empfiehlt es sich häufig, bei einem Vielfachen der Halbwertszeit den entsprechenden Aktivitätsbruchteil aufzutragen.

3.2 Grafische Darstellung eines Radionuklids, dessen Abnahme aufgrund zweier konkurrierender Prozesse erfolgt

Die grafische Darstellung der Gleichung (8)

$$A(t) = \lambda_1 N_{(0)} e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 N_{(0)} e^{-\lambda_2 t} + \dots + \lambda_n N_{(0)} e^{-\lambda_n t}$$

ergibt auf halblogarithmischem Papier die Summe einiger paralleler Geraden mit der gemeinsamen Neigung $-\lambda$. Ihre relative Höhe hängt von der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Übergangs ab. Die Konstruktion der einzelnen Zerfallsgeraden erfolgt nach 3.1. Die Ordinatenausgangspunkte ergeben sich zu

$$\lambda_1 N_{(0)}, \lambda_2 N_{(0)}, \dots, \lambda_n N_{(0)}.$$

Um den Verlauf der Gesamtaktivität zu erhalten, verfährt man folgendermaßen:

1. Man konstruiert die Zerfallsgerade des Mutternuklids mit dem Ordinatenausgangspunkt $A_1(0)$ zur Zeit $t = 0$ (siehe 3.1).
2. Man errechnet den Ordinatenausgangspunkt $A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ der Hilfsgeraden H_1 und H_2 und zeichnet die beiden Hilfsgeraden. Ist T_2 größer als T_1 , so ergibt der Ausdruck $A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ einen negativen Wert. Der Wert der Klammer der Gleichung (11b) ist in diesem Fall gleichfalls negativ, so daß sich für die Aktivität des Tochter-nuklids wieder positive Werte ergeben.
3. Anschließend trägt man die zu verschiedenen Zeitpunkten abgelesenen Differenzwerte beider Hilfsgeraden in Abhängigkeit von der Zeit auf. Man erhält die Anstiegskurve des Tochter-nuklids, die zur Zeit $t = 0$ den Wert Null hat und ein Maximum aufweist.
4. Summiert man die Zerfallsgerade des Mutternuklids und die Anstiegskurve des Tochter-nuklids, so erhält man den Gesamtaktivitätsverlauf, wenn zur Zeit $t = 0$ kein Tochter-nuklid vorhanden war.

War zur Zeit $t = 0$ bereits eine Aktivität des Tochter-nuklids vorhanden, so muß die Zerfallsgerade des Tochter-nuklids mit dem Ordinatenausgangspunkt $A_2(0)$ gezeichnet werden. Der Gesamtaktivitätsverlauf ergibt sich als die Summe der Zerfallsgeraden von Mutter- und Tochter-nuklid und der Anstiegskurve des Tochter-nuklids.

3.4.1 Dauerndes Gleichgewicht ($T_1 \gg T_2$)

Ist $t \ll T_1$, so stellt die Zerfallsgerade des Mutternuklids eine Parallele zur Abszissenachse im Abstand A_1 dar. Konstruktion siehe 3.4.

3.4.2 Laufendes Gleichgewicht ($T_1 > T_2$)

Konstruktion siehe 3.4.

3.4.3 Ähnliche Halbwertszeiten ($T_1 \cong T_2$)

Zur grafischen Darstellung der Gleichung (20a) zeichnet man die Zerfallsgerade des Mutternuklids, welche durch $\Lambda_1(0) e^{-\lambda t}$ gegeben ist und multipliziert mehrere abgelesene Werte mit dem Produkt aus λ und den entsprechenden Zeitwerten t .

Der Gesamtaktivitätsverlauf ist die Summe dieser berechneten Anstiegs-
kurve des Tochternuklids und der Zerfallsgeraden des Mutternuklids.

3.4.4 Halbwertszeit der Mutter kürzer als die der Tochter ($T_1 < T_2$)

Für den Fall $2 T_1 < T_2$ nimmt der Bruch $\frac{T_1}{T_2 - T_1}$ der Gleichung (22) einen

Wert < 1 an, so daß der Ordinatenausgangspunkt der Hilfsgeraden unterhalb des Ordinatenausgangspunktes der Zerfallsgeraden des Mutternuklids liegt.

3.5 Grafische Darstellung des Aktivitätsverlaufs eines Enkelnuklids

Zur grafischen Darstellung des Aktivitätsanstiegs des Enkelnuklids nach Gleichung (26) berechnet man zunächst die Ordinatenausgangspunkte der Hilfsgeraden aus den Koeffizienten, deren Summe Null ergeben muß.

$$\Lambda_1(0) T_1 \frac{T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)}$$

$$\Lambda_1(0) T_1 \frac{T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}$$

$$\Lambda_1(0) T_1 \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$$

Man zeichnet mit Hilfe der Ordinatenausgangswerte und den entsprechenden Halbwertszeiten die drei Hilfsgeraden und bildet unter Beachtung der Vorzeichen ihre algebraische Summe. Die so erhaltene Kurve stellt den Aktivitätsanstieg des Enkelnuclids dar, wenn zur Zeit $t = 0$ das Ausgangsnuclid tochter- und enkelfrei war.

Der Gesamtaktivitätsverlauf des Systems ergibt sich als Summe der Zerfallsgeraden des Mutternuclids, der Anstiegskurve des Tochternuclids (konstruiert nach 3.4) und der Anstiegskurve des Enkelnuclids (konstruiert nach 3.5).

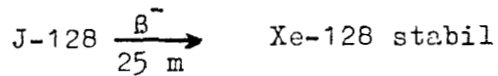
3.6 Grafische Darstellung des Aktivitätsverlaufs des n-ten Gliedes einer radioaktiven Familie

Entsprechend den vorangegangenen Beispielen addiert und subtrahiert man die Hilfsgeraden, die den Halbwertszeiten T_1, T_2, \dots, T_n entsprechen. Die relativen Ordinatenausgangspunkte für die Hilfsgeraden berechnet man aus den Werten der Konstanten K_1, K_2, \dots, K_n in der Bateman-Gleichung (30).

4. Aufgaben zur grafischen Darstellung des Aktivitätsverlaufs
verschiedener Systeme

Nr. 1

- a) Zeichne den Aktivitätsverlauf eines J-128-Präparates, das zur Zeit $t = 0$ eine Nettozählrate von 4000 Imp/min besitzt.



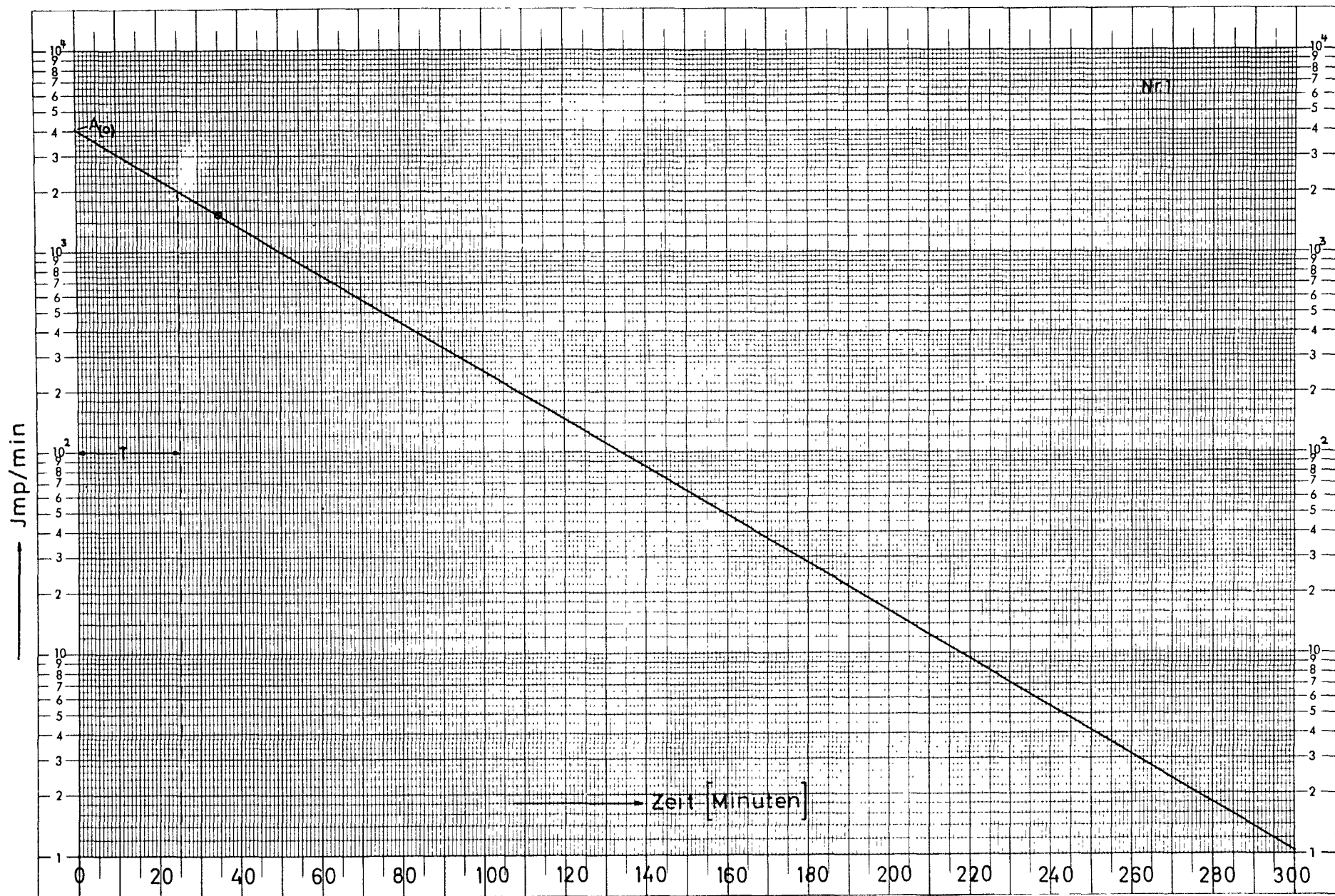
- b) Zeichne den Verlauf der β -Aktivität von J-128, wenn zur Zeit $t = 0$ 4000 Imp/min und zur Zeit $t_1 = 35$ min 1516 Imp/min gemessen wurden. Bestimme aus der erhaltenen Abfallsgeraden die Halbwertszeit von J-128.

Grafische Lösung:

Der Gesamtaktivitätsverlauf erfolgt nach Gleichung (5)

$$A(t) = A(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

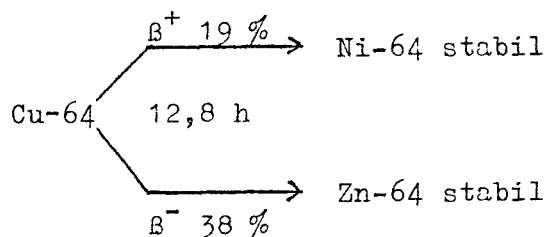
Konstruktion siehe 3.1



Zeitliche Abhängigkeit der Aktivität eines Radionuklids (J-128)

Nr. 2

1 μCi Cu-64 wird in zwei verschiedenen Detektoren mit je 7 % Wirkungsgrad gemessen. Der Wirkungsgrad beider Detektoren für die Röntgenlinien des Nickels des Übergangs durch Elektroneneinfang beträgt weniger als 0,1 %. Zeichne den Aktivitätsverlauf sowie den Verlauf der β -Gesamtaktivität.



Grafische Lösung:

Der Gesamtaktivitätsverlauf erfolgt nach Gleichung (8)

$$A(t) = \lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 N_2(0) e^{-\lambda_2 t} + \dots + \lambda_n N_n(0) e^{-\lambda_n t}$$

Konstruktion siehe 3.2

Die Ordinatenausgangspunkte für die jeweiligen Anfangsaktivitäten ergeben sich durch Multiplikation von $A(0)$ mit der entsprechenden Zerfallswahrscheinlichkeit.

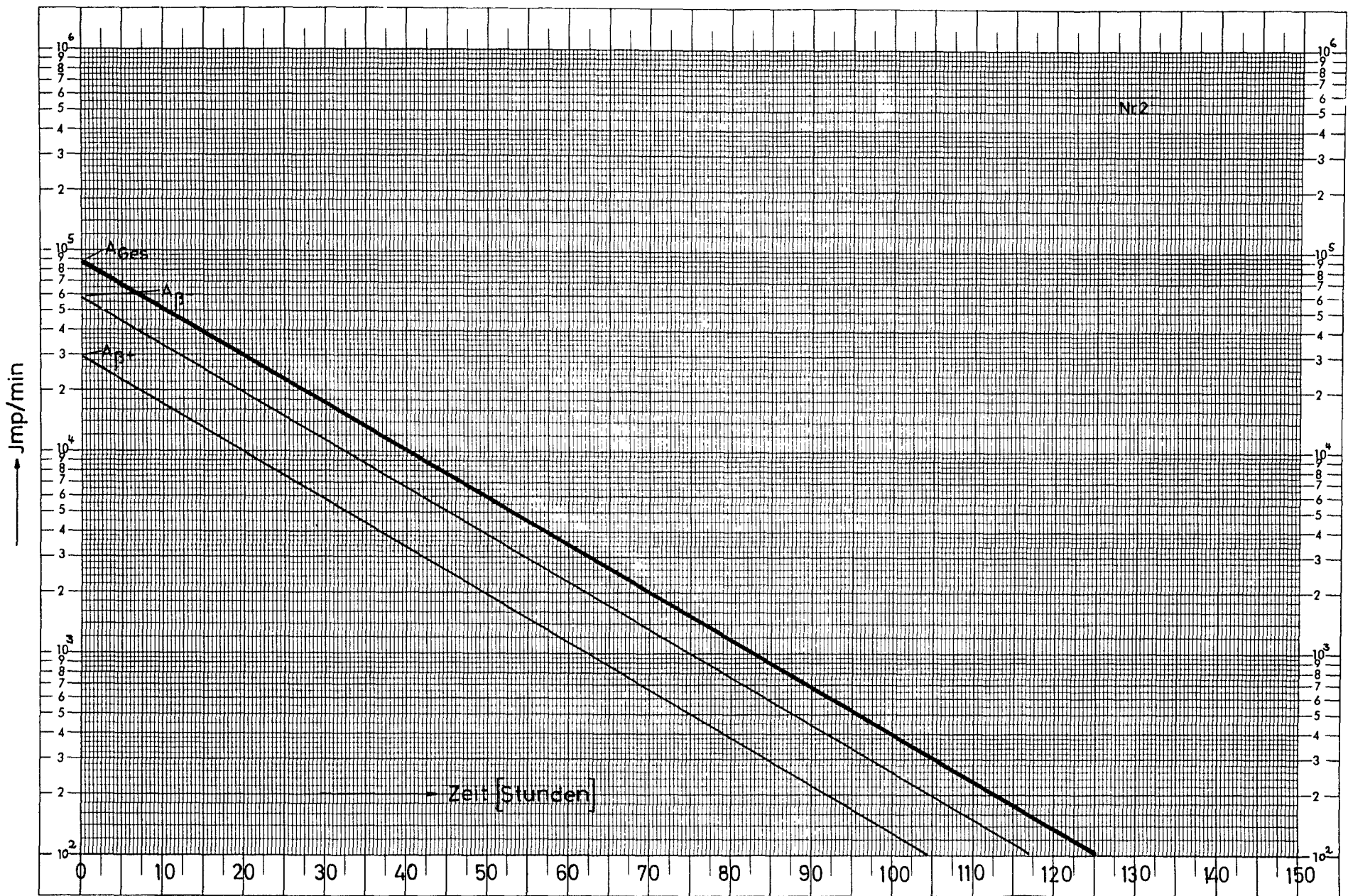
1 μCi entspricht $2,2 \cdot 10^6$ Zerfällen/min

$$A_{\beta^-} = 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,07 \cdot 0,38$$

$$A_{\beta^+} = 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,07 \cdot 0,19$$

A_{EE} = kann wegen des geringen Wirkungsgrades in der grafischen Darstellung nicht berücksichtigt werden

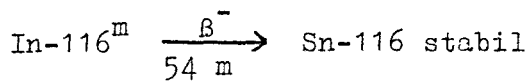
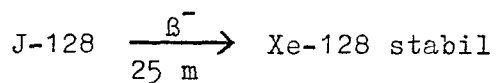
$$A_{\text{Ges}} = A_{\beta^-} + A_{\beta^+}$$



Aktivitätsverlauf eines Radionuklids, das sowohl Negatronen als auch Positronen emittiert (Cu-64)

Nr. 3

Nach der Bestrahlung eines Jod-Indium-Präparates mit einer Neutronenquelle ergibt sich zu Meßbeginn ($t = 0$) unter Berücksichtigung der Wirkungsgrade des Detektors ein Aktivitätsverhältnis von 4000:600. Zeichne den Gesamtaktivitätsverlauf des Präparates.



Grafische Lösung:

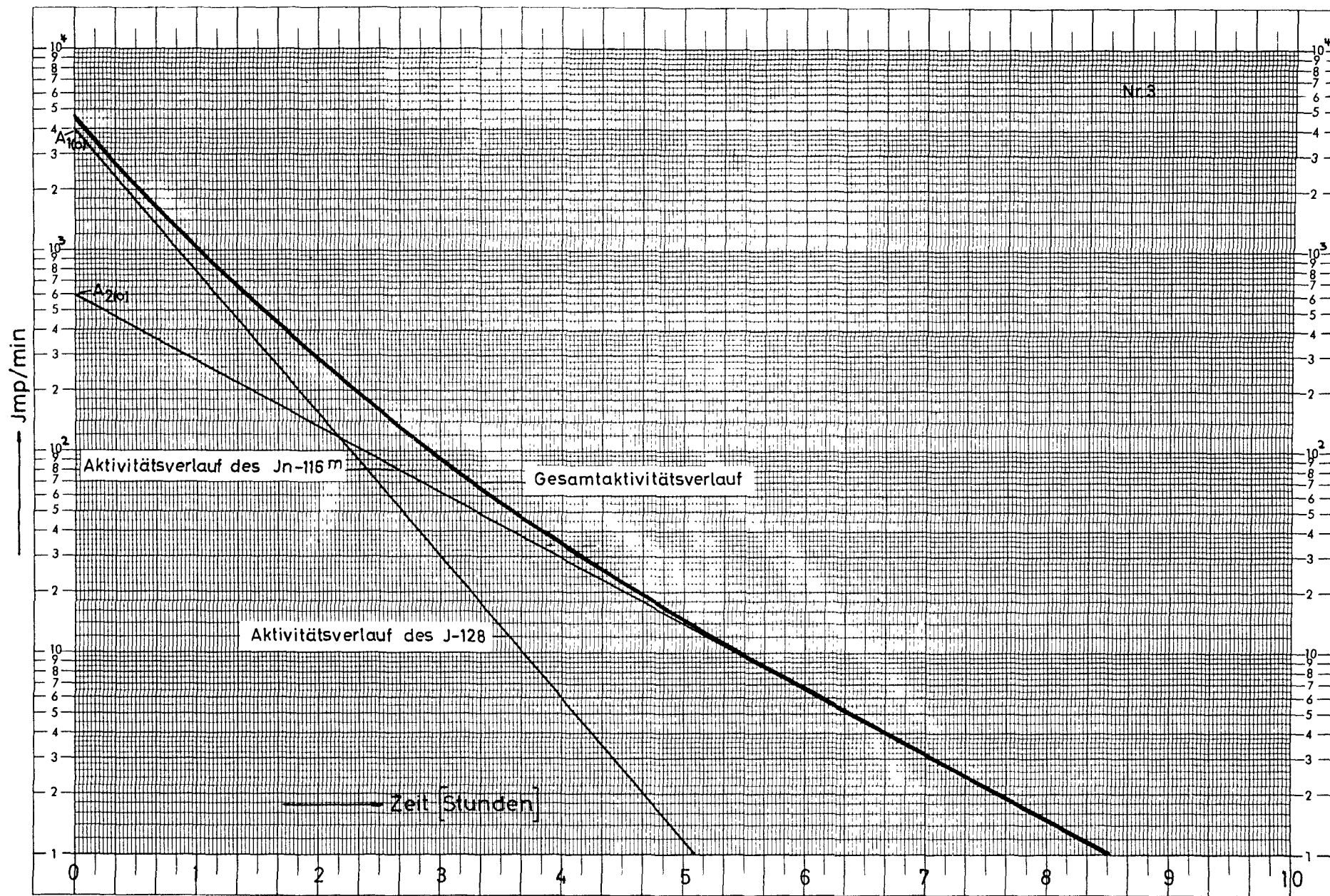
Der Aktivitätsverlauf der einzelnen Nuklide erfolgt nach Gleichung (5)

$$A(t) = A(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

Der Gesamtaktivitätsverlauf erfolgt nach Gleichung (9)

$$A_{\text{Ges}}(t) = A_1(0) \cdot e^{-\lambda_1 t} + A_2(0) \cdot e^{-\lambda_2 t} + \dots + A_n(0) \cdot e^{-\lambda_n t}$$

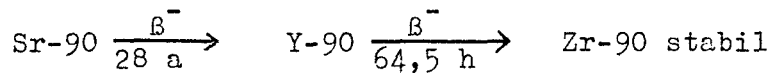
Konstruktion siehe 3.3



Verlauf der Einzelaktivitäten und der Gesamtaktivität zweier Radionuklide, die nicht in genetischem Zusammenhang stehen (J-128 und In-116^m)

Nr. 4

Zeichne den Aktivitätsverlauf eines Sr-90-Präparates, das zur Zeit $t = 0$ kein Y-90 enthält und dessen Nettozählrate zu diesem Zeitpunkt 1780 Imp/min beträgt. Die Empfindlichkeit des Zählrohres für die β -Strahlen des Sr-90 ist 0,038 und für Y-90 0,11.



Grafische Lösung:

Der Aktivitätsanstieg des Tochternuklids erfolgt nach Gleichung (14)

$$A_2(t) = A_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right)$$

Da A_1 für den betrachteten Zeitraum konstant ist, läßt sich der Gesamtaktivitätsverlauf durch folgende Gleichung darstellen:

$$A_{\text{Ges}}(t) = A_1 + A_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right)$$

Konstruktion siehe 3.4

Der Ordinatenausgangspunkt (P) der Hilfsgeraden ergibt sich unter Berücksichtigung der Wirkungsgrade für Sr-90 und Y-90 aus dem Ausdruck:

$$P = A_1 \cdot \frac{11}{3,8}$$

H_1 = Hilfslinie 1 (Parallele zur Abszisse durch P)

H_2 = Hilfslinie 2 mit der Neigung λ_2

Hinweis:

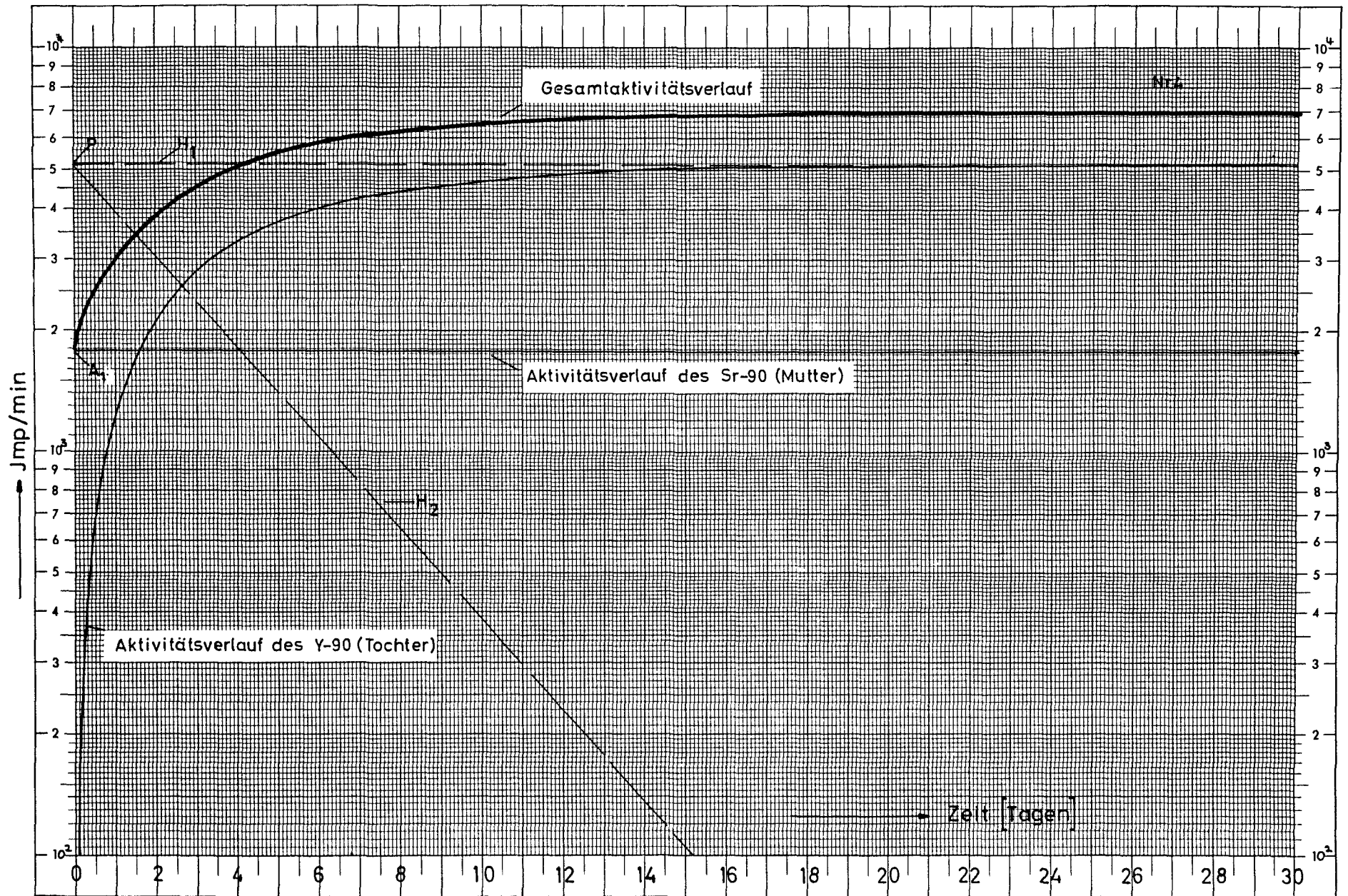
Die Konstruktion des Aktivitätsanstiegs des Tochternuklids in diesem Beispiel ist identisch dem ^{des} Aktivitätsverlaufs des durch Neutronenbestrahlung in Y-89 gebildeten Y-90, wenn bei gleichem Wirkungsgrad eine Sättigungsaktivität 46700 Imp/min angenommen wird.

Grafische Lösung:

Der Aktivitätsanstieg erfolgt nach der Gleichung

$$A(t) = A_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{T} \ln 2} \right)$$

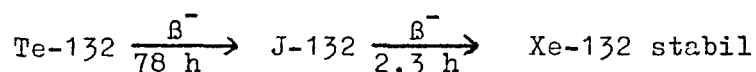
Der Koordinatenausgangspunkt (P) zur Konstruktion der Hilfsgeraden ist gleich $A_{\infty} \cdot W$ und beträgt im Beispiel 5140 Imp/min.



Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids sehr viel größer als die des Tochternuklids ist (Sr-90/Y-90). Der unterschiedliche Wirkungsgrad für die beiden Nuklide wird berücksichtigt.

Nr. 5

Zeichne den Aktivitätsverlauf eines Te-132-Präparates, dessen Nettozählrate zur Zeit $t = 0$, dem Augenblick der letzten Jodtrennung, 490 Imp/min betrug.



Grafische Lösung:

Der Aktivitätsanstieg des Tochternuklids erfolgt nach Gleichung (12)

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right)$$

Der Gesamtaktivitätsverlauf ergibt sich aus der Summe von Gleichung (5) und Gleichung (12)

$$A_{\text{Ges}}(t) = A_1(0) \left[e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} + \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right) \right]$$

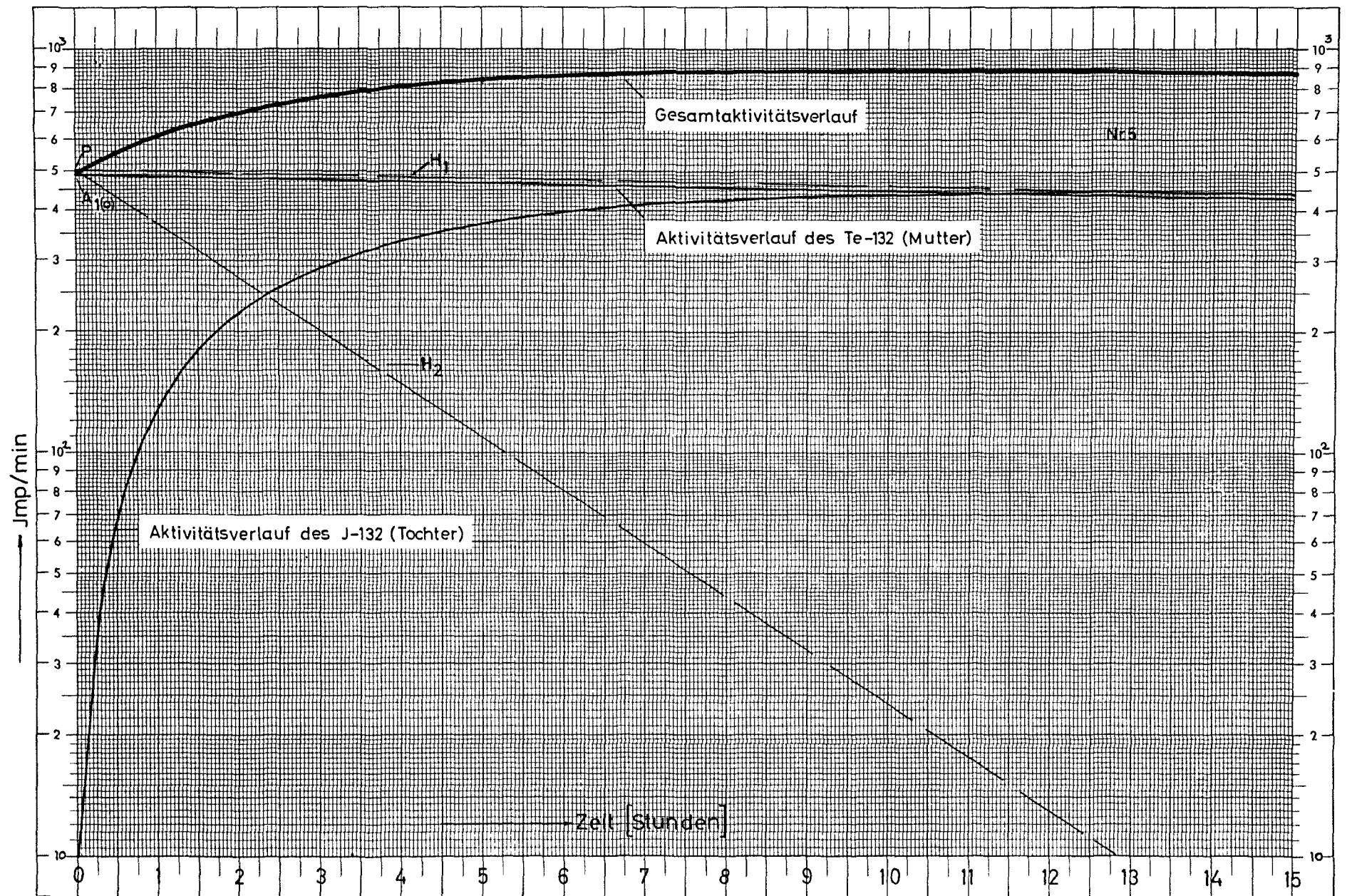
Konstruktion siehe 3.4

Der Ordinatenausgangspunkt P der Hilfsgeraden ergibt sich aus

$$P = A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

H_1 = Hilfslinie 1 mit der Neigung λ_1

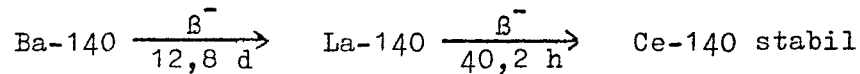
H_2 = Hilfslinie 2 mit der Neigung λ_2



Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids größer ist als die des Tochternuklids (Te-132/J-132)

Nr. 6

Zu einer tochterfreien Ba-140-Aktivität, deren Nettozählrate 2000 Imp/min beträgt, wird zur Zeit $t = 0$ eine La-140-Aktivität mit einer Nettozählrate von 6000 Imp/min gegeben. Wie ist der Gesamtaktivitätsverlauf?



Grafische Lösung:

Der Aktivitätsanstieg des Tochternuklids erfolgt nach Gleichung (12)

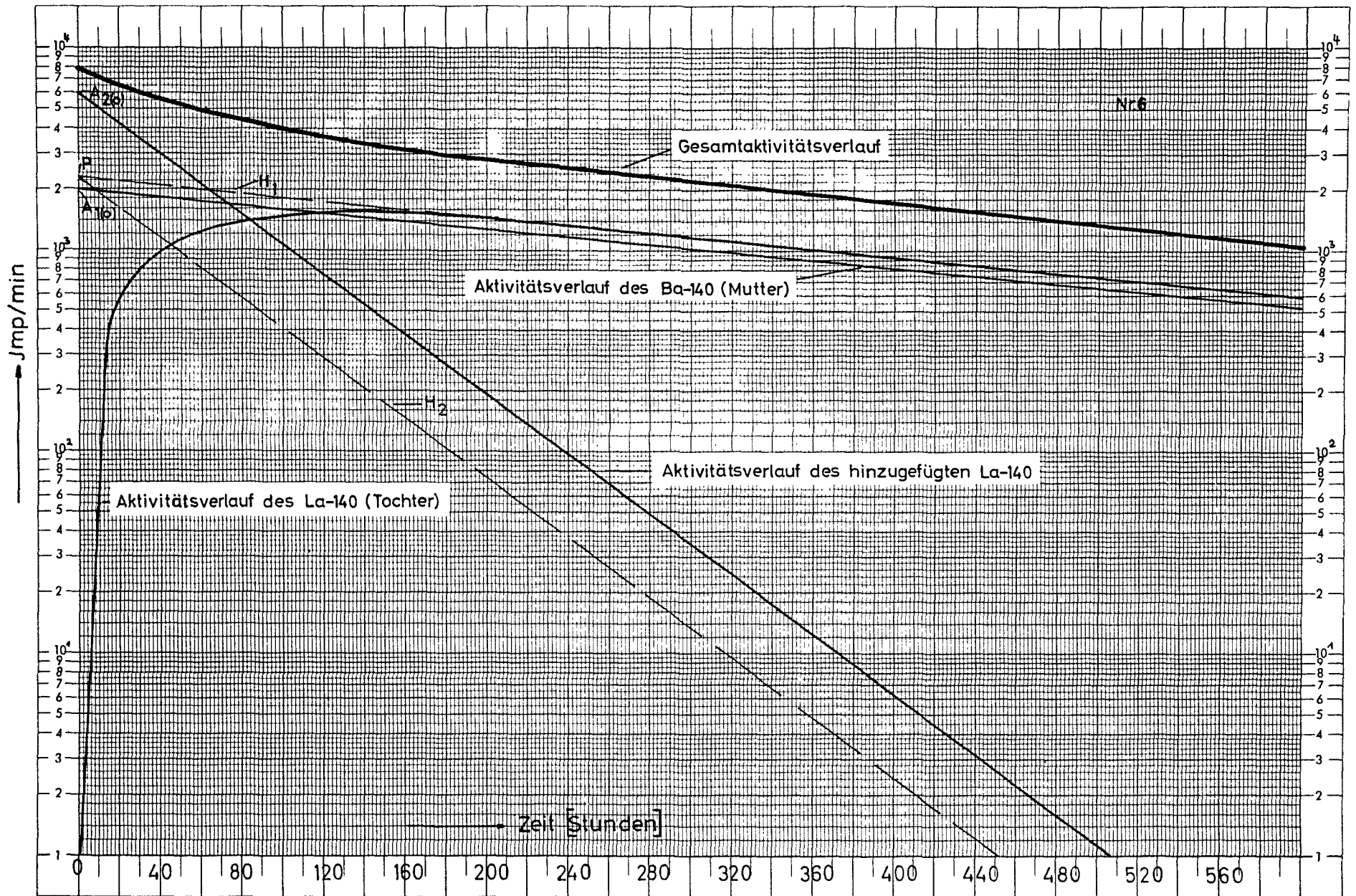
$$A_2(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right)$$

Der Gesamtaktivitätsverlauf ergibt sich aus der Summe von Gleichung (5), Gleichung (9) und Gleichung (12)

$$A_{\text{Ges}}(t) = A_1(0) \left[e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} + \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right) \right] + A_2(0) e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2}$$

Der Ordinatenausgangspunkt der Hilfsgeraden ergibt sich aus:

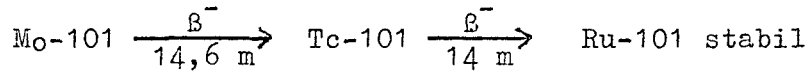
$$P = A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$



Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids größer ist als die des Tochternuklids und das zur Trennzeit zusätzliche Tochteraktivität enthielt (Ba-140/La-140)

Nr. 7

Zeichne den Aktivitätsverlauf eines Mo-101-Präparates, das zur Zeit $t = 0$ tochterfrei war. Zu diesem Zeitpunkt betrug die Nettozählrate für Mo-101 600 Imp/min.



Grafische Lösung:

Der Aktivitätsanstieg des Tochternuklids erfolgt nach Gleichung (20)

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{t}{T_2} \ln 2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2}$$

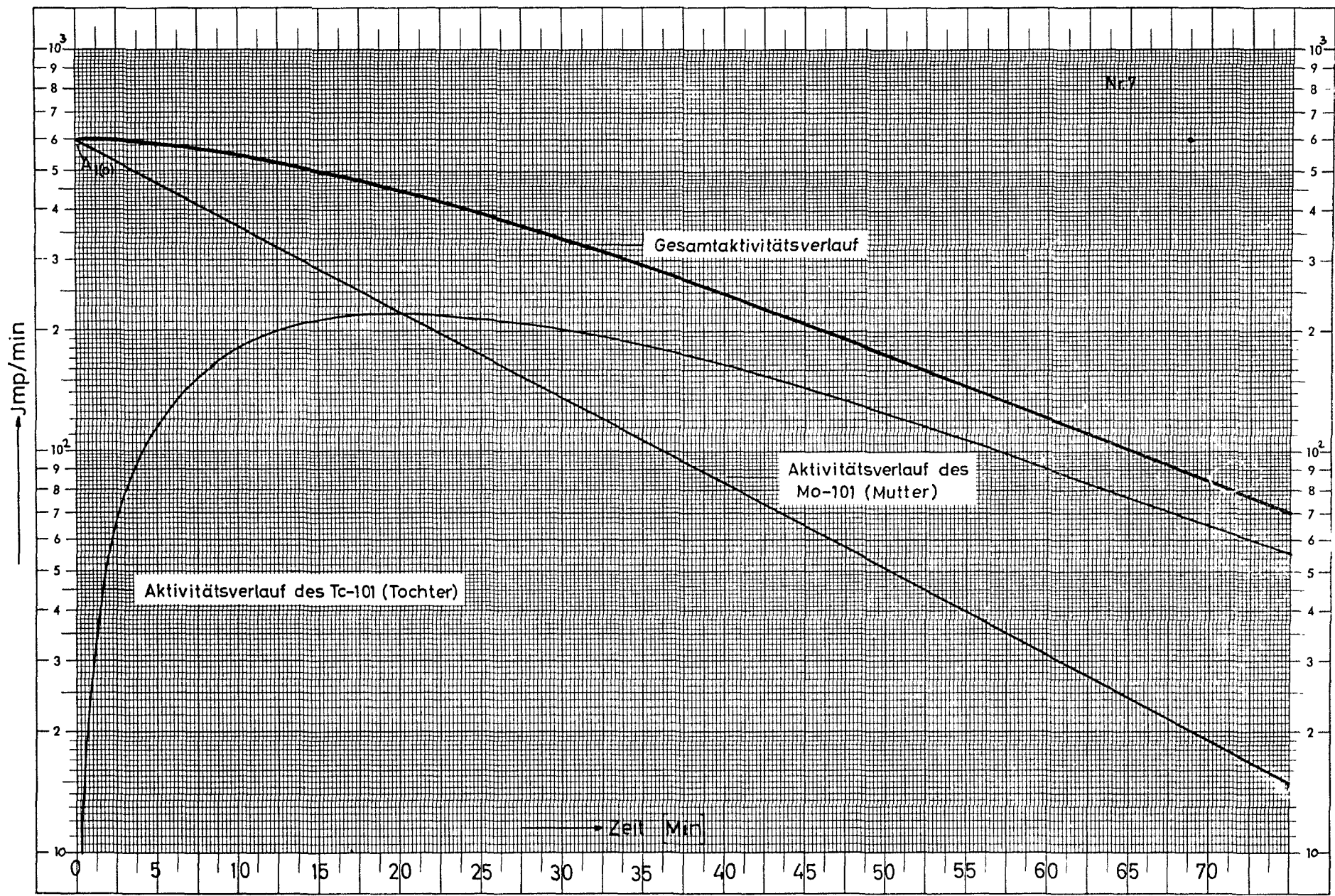
Der Gesamtaktivitätsverlauf ergibt sich aus der Summe von Gleichung (5) und Gleichung (20)

$$A_{\text{Ges}}(t) = A_1(0) \left(e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} + \frac{t}{T_2} \ln 2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} \right)$$

Konstruktion siehe 3.4.3

Nachfolgende Tabelle enthält Werte für A_2 in Abhängigkeit von t ($A(0) = 600$ Imp/min).

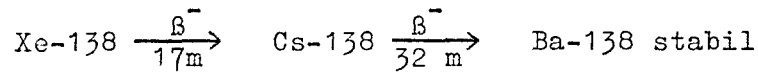
$t(\text{min})$	A_2 (Imp/min)	$t(\text{min})$	A_2 (Imp/min)
0,65	18,7	25	214
1,25	35	30	202
2,5	65,4	35	184
5,0	116	40	165
7,5	154	45	144
10	181	50	127
12,5	202	55	106
15	212	60	91
17,5	218	65	77
20	220	70	65
22,5	218	75	54,5



Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeiten der beiden Nuklide ähnlich sind (Mo-101/Tc-101)

Nr. 8

Zeichne den Aktivitätsverlauf von Xe-138 und Cs-138. Zur Zeit $t = 0$ werden im tochterfreien Xe-138-Präparat 600 Imp/min gezählt.



Grafische Lösung:

Der Aktivitätsanstieg des Tochternuklids ergibt sich aus Gleichung (22)

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{T_1}{T_2 - T_1} \left(e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} \right)$$

Der Gesamtaktivitätsverlauf ergibt sich aus der Summe von Gleichung (5) und Gleichung (22)

$$A_{\text{Ges}}(t) = A_1(0) \left[e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \left(e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} - e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} \right) \right]$$

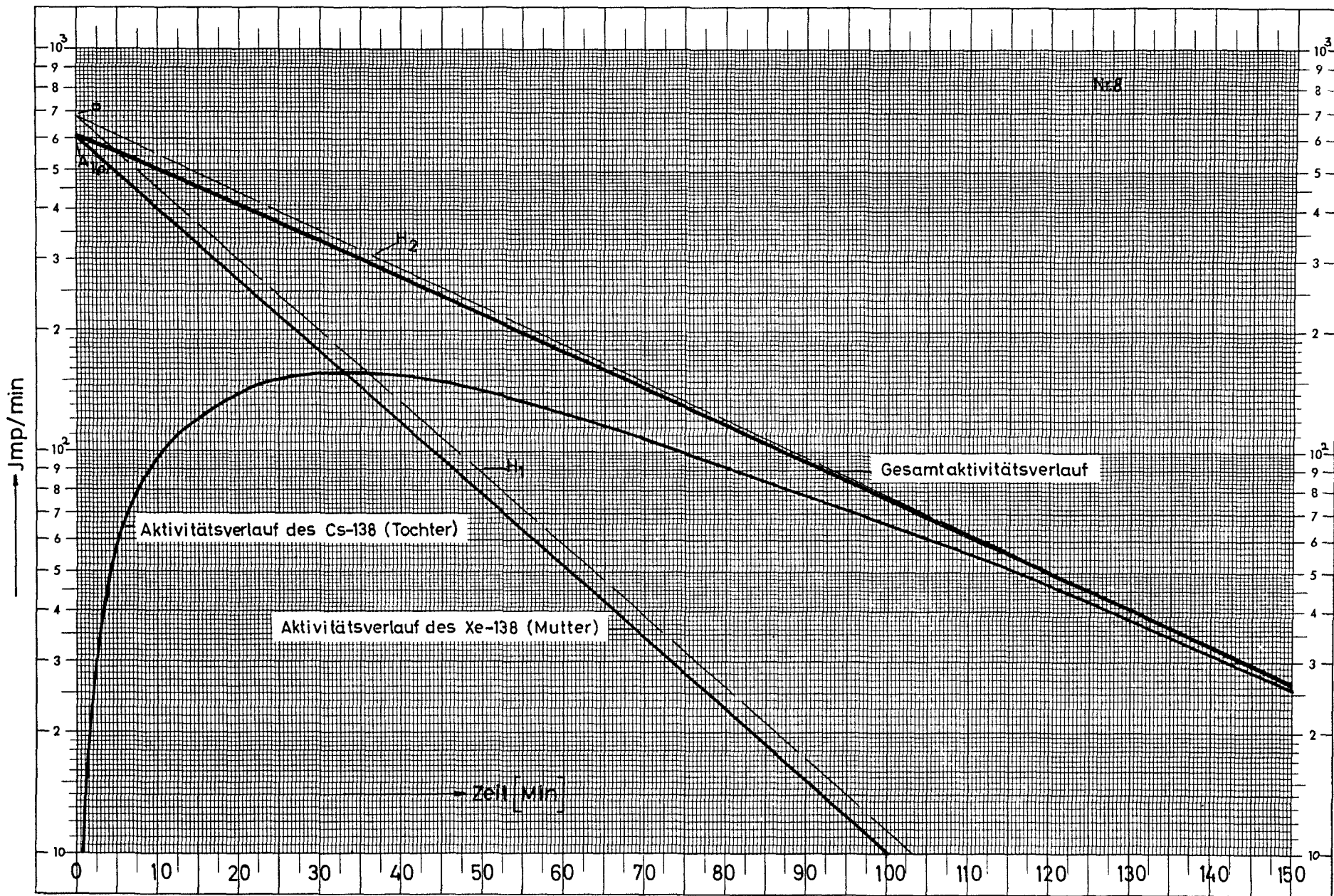
Konstruktion siehe 3.4.4

Der Koordinatenausgangspunkt für die Hilfsgeraden ergibt sich aus:

$$P = A_1(0) \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

H_1 = Hilfsgerade mit der Neigung λ_1

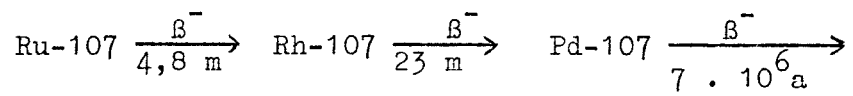
H_2 = Hilfsgerade mit der Neigung λ_2



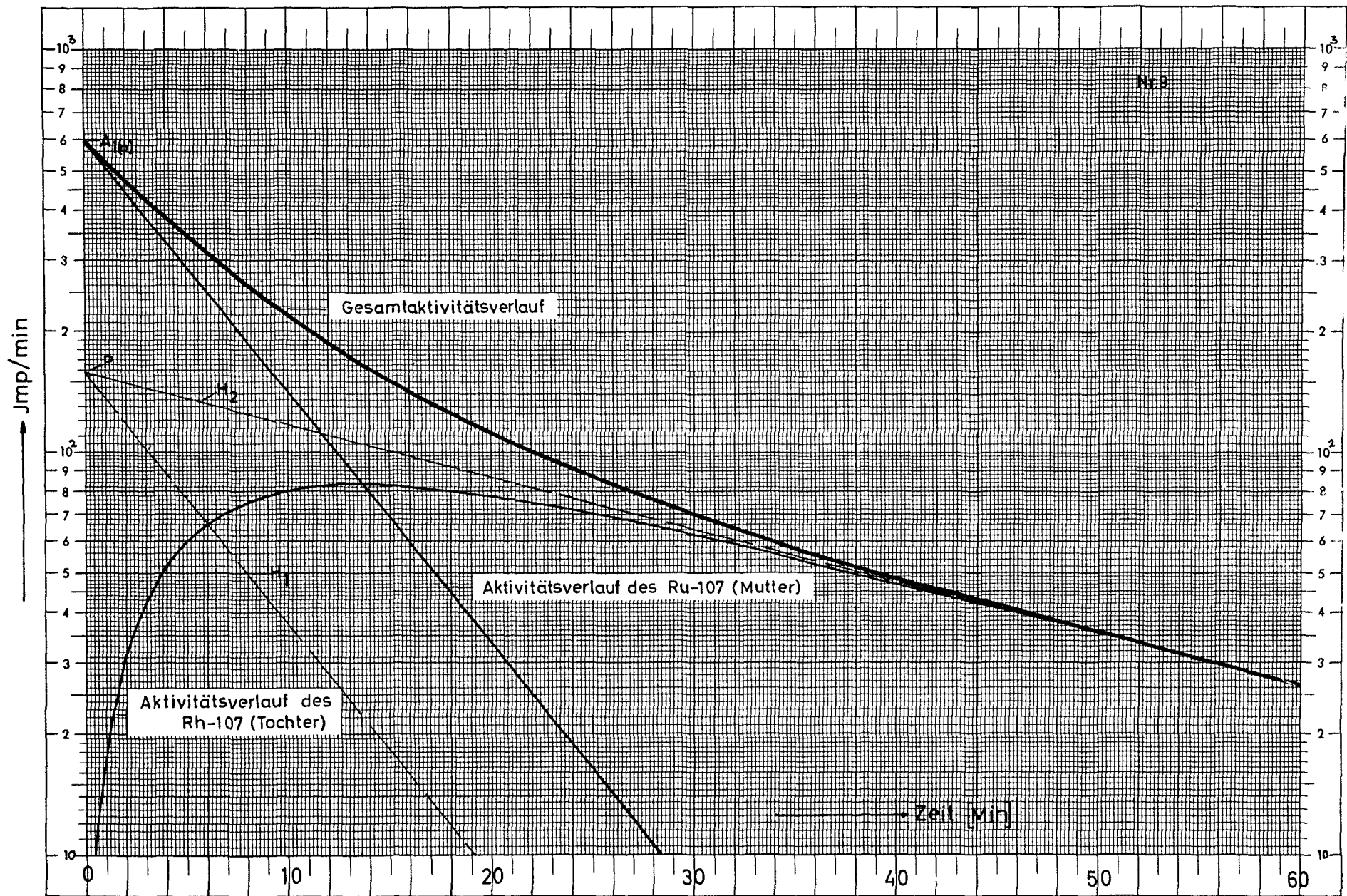
Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids kürzer ist als die des Tochternuklids (Xe-138/Cs-138)

Nr. 9

Zeichne den Aktivitätsverlauf eines Ru-107-Präparates, das zur Zeit $t = 0$ eine Nettozählrate von 600 Imp/min besitzt und tochter nuklidfrei ist.



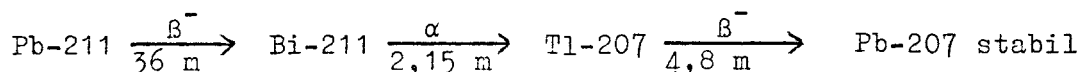
Konstruktion siehe 3.4.4 und Aufgabe Nr. 8



Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids wesentlich kürzer ist als die des Tochternuklids (Ru-107/Rh-107)

Nr. 10

Zeichne den Aktivitätsverlauf eines Pb-211-Präparates, das zur Zeit $t = 0$ frei von seinen Folgeprodukten ist und dessen Nettozählrate 3000 Imp/min beträgt, gemessen mit einem Proportionalzähler, dessen Wirkungsgrad für α - und β -Strahlen als gleich angenommen wird.



Grafische Lösung:

Der Aktivitätsverlauf des Enkelnuclids ergibt sich aus Gleichung (26)

$$A_3(t) = A_1(0) \left(\frac{T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} e^{-\frac{t}{T_1} \ln 2} + \frac{T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} e^{-\frac{t}{T_2} \ln 2} + \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_3} \ln 2} \right)$$

Der Gesamtaktivitätsverlauf ergibt sich aus der Summe der Gleichung (12) und der Gleichung (26).

Konstruktion siehe 3.5

Der Koordinatenausgangspunkt zur Konstruktion des Tochternuclids ergibt sich aus:

$$P_1(T) = A_1(0) \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Die jeweiligen Koordinatenausgangspunkte zur Konstruktion des Enkelnuclids ergeben sich aus:

$$P_1(E) = A_1(0) T_1 \frac{T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)}$$

$$P_2(E) = A_1(0) T_1 \frac{T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}$$

$$P_3(E) = A_1(0) T_1 \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}$$

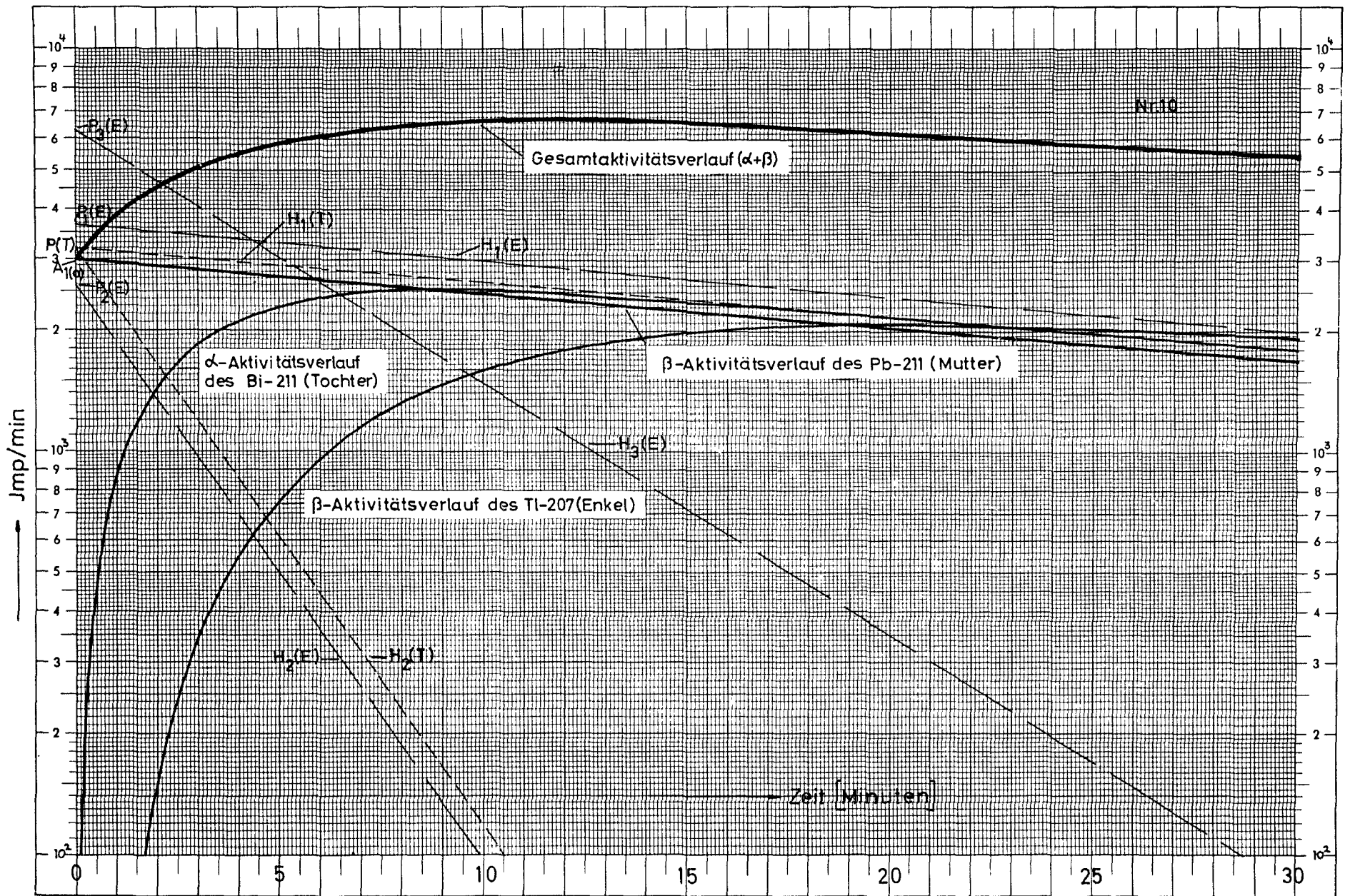
$H_1(T)$ = Hilfsgerade mit der Neigung λ_1 zur Konstruktion des Tochternuclids

$H_2(T)$ = Hilfsgerade mit der Neigung λ_2 zur Konstruktion des Tochternuclids

$H_1(E)$ = Hilfsgerade mit der Neigung λ_1 zur Konstruktion des Enkelnuclids

$H_2(E)$ = Hilfsgerade mit der Neigung λ_2 zur Konstruktion des Enkelnuclids

$H_3(E)$ = Hilfsgerade mit der Neigung λ_3 zur Konstruktion des Enkelnuclids



Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Enkel-Systems (Pb-211/Bi-211/Tl-207)