

KFK-122

# KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

September 1962

KFK 122

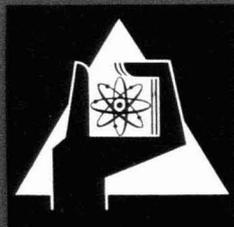
Institut für Kernverfahrenstechnik

Gasdynamische Berechnung der Trenndüsenentmischung

F. Zigan

**KERNREAKTOR**  
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
Verwaltung der Zentralbücherei

4. Mrz 1963



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

## Gasdynamische Berechnung der Trenndüsenentmischung

Von F. ZIGAN  
[Franz]

**KERNREAKTOR**

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
Verwaltung der Zentrallbücherei

# Gasdynamische Berechnung der Trenndüsenentmischung

Von F. ZIGAN

Aus dem Kernforschungszentrum Karlsruhe, Institut für Kernverfahrenstechnik  
der Technischen Hochschule

(Z. Naturforschg. 17 a, 772—778 [1962]; eingegangen am 14. Juni 1962)

In einer expandierenden Überschallströmung tritt eine teilweise räumliche Entmischung verschieden schwerer Gase ein. Es wird untersucht, welche Entmischungseffekte sich bei einer idealen, isentrop verlaufenden Expansion des Strahls infolge der Druckdiffusion unter Vernachlässigung der Thermodiffusion und der Konzentrationsdiffusion im Fall der Argonisotope ergeben würden. Insbesondere interessiert dabei der Einfluß einer Überexpansion sowie einer mechanischen Umlenkung des Strahls. Dazu werden die Stromflächen verschiedener Strahltypen nach dem Charakteristikenverfahren mit den interessierenden Randbedingungen berechnet. Mit den theoretisch gewonnenen Stromflächenverteilungen werden die zu erwartenden Entmischungseffekte nach einer bereits beschriebenen Methode ermittelt. Die wesentlichen Züge des Trenneffektes werden von der Theorie richtig wiedergegeben. Systematische Abweichungen zwischen der Theorie und dem Experiment ergeben sich erwartungsgemäß bei kleinen Einlaßdrücken, bei denen sich die von der Theorie nicht berücksichtigten Einflüsse der Reibung und des Übergangs zu molekularen Verhältnissen bemerkbar machen.

Von E. W. BECKER und Mitarbeitern wurde ein Verfahren zur Gas- und Isotopentrennung entwickelt, das auf der teilweisen räumlichen Entmischung verschieden schwerer Gase in einer expandierenden Überschallströmung beruht<sup>1-5</sup>. Der als Trenndüsen-effekt bezeichnete Entmischungsvorgang wurde in der Zwischenzeit auch von anderen Autoren untersucht<sup>6-8</sup>.

In einer theoretischen Arbeit haben wir gezeigt<sup>2,9</sup>, daß die Entmischung unter gasdynamischen Bedingungen im wesentlichen mit der Druckdiffusion in dem bei der freien Expansion des Überschallstrahls auftretenden Druckgefälle erklärt werden kann. Zu diesem Ergebnis kommen auch NARDELLI und REPANAI<sup>10</sup>. Unter Bedingungen, unter denen die Expansion des freien Strahls im wesentlichen molekular verläuft, kann man das Auftreten einer Entmischung qualitativ auch auf Grund der Annahme verstehen, daß der leichtere Partner, bei gleicher Schwerpunktschwindigkeit wie der schwere, eine schnellere ungeordnete Molekularbewegung ausführt<sup>1, 10-12</sup>.

Sowohl in unserer oben erwähnten Untersuchung, wie in der von NARDELLI und REPANAI, wurden die

Entmischungseffekte unter Benutzung der experimentell gewonnenen Stromflächenverteilungen berechnet. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, welche Entmischungseffekte sich bei einer idealen, isentrop verlaufenden Expansion des Strahls infolge der Druckdiffusion, unter Vernachlässigung der Thermodiffusion und der Konzentrationsdiffusion, im Fall der Argonisotope ergeben würden. Insbesondere interessiert dabei der Einfluß einer Überexpansion sowie einer mechanischen Umlenkung des Strahls. Dazu werden die Stromflächen verschiedener Strahltypen nach dem Charakteristikenverfahren mit den interessierenden Randbedingungen berechnet. Mit den theoretisch gewonnenen Stromflächenverteilungen werden die zu erwartenden Entmischungseffekte nach der bereits beschriebenen Methode ermittelt.

## Formeln zur Berechnung des Trenneffekts

In der früheren Arbeit wurde gezeigt, daß sich im Fall kleiner Konzentrationsverschiebungen, wie sie bei Isotopen mit kleiner relativer Massendifferenz vorliegen, der Elementareffekt  $\epsilon_A$  der Trennung

<sup>1</sup> E. W. BECKER, K. BIER u. H. BURGHOFF, Z. Naturforschg. 10 a, 565 [1955].

<sup>2</sup> E. W. BECKER, W. BEYRICH, K. BIER, H. BURGHOFF u. F. ZIGAN, Z. Naturforschg. 12 a, 609 [1957].

<sup>3</sup> E. W. BECKER u. R. SCHÜTTE, Z. Naturforschg. 15 a, 336 [1960].

<sup>4</sup> K. BIER, Z. Naturforschg. 15 a, 714 [1960].

<sup>5</sup> E. W. BECKER, H. BURGHOFF u. J. GSPANN, Z. Naturforschg. 16 a, 955 [1961].

<sup>6</sup> J. W. EERKENS, B. SEHGAL u. L. GROSSMANN, Univ. of California, HE 150—162, Series No. 110-4, June 2 [1958].

<sup>7</sup> P. C. WATERMAN u. S. A. STERN, J. Chem. Phys. 31, 405 [1959]. — S. A. STERN, P. C. WATERMAN u. T. F. SINCLAIR, J. Chem. Phys. 33, 805 [1960].

<sup>8</sup> R. R. CHOW, AEC-Report HE-150-175, Series No. 110-5, Nov. 4 [1959].

<sup>9</sup> F. ZIGAN, Dissertation, Marburg 1958.

<sup>10</sup> G. NARDELLI u. A. REPANAI, Energia Nucleare 5, 247 [1958].

<sup>11</sup> E. E. GOSE, Amer. Inst. Chem. Engrs. J. 6, 168 [1960].

<sup>12</sup> H. MIKAMI u. Y. OYAMA, Nihon Genshiryoku gakkai shi, Heft 5, 291 [1960].

darstellen läßt durch

$$\varepsilon_A \equiv \frac{n_M(1-n_K)}{n_K(1-n_M)} - 1 \approx \frac{B}{n_0(1-n_0)\vartheta(1-\vartheta)L} \cdot \quad (1)$$

Darin bedeuten  $n_M$ ,  $n_K$  und  $n_0$  den Molenbruch der leichten Komponente eines binären Gemisches im Mantel-, Kern- bzw. Ausgangsgas,  $L$  bedeutet den Molstrom durch die Düse,  $\vartheta$  das „Abschälverhältnis“, d. h. das Verhältnis des molaren Mantelstromes zum Gesamtstrom  $L$ ,  $B$  ist der Diffusionsstrom durch die zwischen Abschälerschneide und der Düsenmündung liegende Stromfläche  $S$ <sup>13, 14</sup>. Wenn man die Konzentrationsdiffusion und die Thermodiffusion vernachlässigt, ergibt sich für  $B$  unter den obigen Voraussetzungen

$$B = -n_0(1-n_0) \frac{\Delta m}{m} \int_S \nu D \frac{1}{p} \text{grad}_n p \, dS. \quad (2)$$

Darin bezeichnet  $\nu$  die Moldichte,  $D$  den Diffusionskoeffizienten,  $p$  den Druck und

$$\Delta m/m = (m_2 - m_1) / [n_0 m_1 + (1 - n_0) m_2]$$

die relative Massendifferenz der Gemischkomponenten ( $m_1, m_2 = \text{Molmassen}$ ).

Die Normalkomponente  $\text{grad}_n p$  des Druckgradienten substituieren wir aus ihrem Zusammenhang mit der Stromlinienkrümmung  $d\varphi/ds$ :

$$(1/p) \text{grad}_n p = -\kappa M^2 (d\varphi/ds), \quad (3)$$

worin  $s$  die Bogenlänge der Stromlinie,  $\varphi$  den Tangentenwinkel gegen die  $x$ -Achse,  $M$  die MACH-Zahl und  $\kappa$  den Adiabatenexponenten bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen dem Stromflächenelement  $dS$  und dem Stromlinienelement  $ds$  hängt von der Geometrie des Strahls ab: In einem frei expandierenden ebenen Strahl, erzeugt durch eine Schlitzdüse der Länge  $h$ , besteht die Stromfläche aus zwei zueinander symmetrischen Teilen (Abb. 1 a); hier ist  $dS = 2h \, ds$ . Für einen einseitig geführten ebenen Strahl (Abb. 1 b) gilt  $dS = h \, ds$ . In einer achsensymmetrischen Strömung hat ein ringförmiges Element mit dem Radius  $y$  die Oberfläche  $dS = 2\pi y \, ds$ .

Wenn das Expansionsverhältnis größer als das kritische ist, ist der Durchsatz

$$L = \left\{ \begin{array}{l} 2h \\ h \\ \pi w \end{array} \right\} w p_0 \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \sqrt{\frac{\kappa}{m R T_0}}. \quad (4)$$

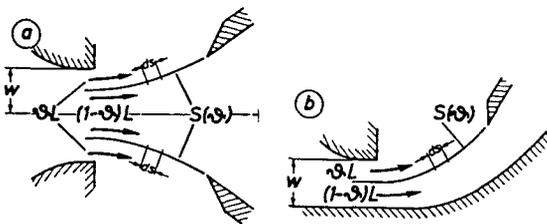


Abb. 1. Schema der Trenndüse: a) Frei expandierender ebener oder achsensymmetrischer Strahl; b) Einseitig geführter ebener Strahl. Bezeichnungen:  $L = \text{Moldurchsatz der Düse}$ ,  $\vartheta = \text{Abschälverhältnis}$ ,  $S(\vartheta) = \text{Stromfläche}$ ,  $ds = \text{Stromlinienelement}$ ,  $w = \text{halbe (a) bzw. ganze (b) Düsenweite}$ .

Hier bezeichnet  $w$  im Falle des freien Strahls die halbe, im Fall des einseitig geführten Strahls die ganze Düsenweite (vgl. Abb. 1),  $p_0$  den Druck,  $T_0$  die Temperatur im Ruhezustand vor der Düse und  $R$  die Gaskonstante. Die drei Zeilen in der geschweiften Klammer beziehen sich auf die drei oben diskutierten Geometrien.

Durch Kombination von (1) bis (4) ergibt sich

$$\varepsilon_A = \vartheta(1-\vartheta)^{-\frac{\gamma}{\kappa-1}} p_0 w \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^{\varphi'} \nu D M^2 \, d\varphi \\ \int_0^{\varphi'} (y/w) \nu D M^2 \, d\varphi \end{array} \right. \quad (5)$$

mit 
$$\gamma = 2 \left( \frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \frac{\Delta m}{m} \sqrt{\kappa R T_0}.$$

Die obere Zeile rechts der geschweiften Klammer gilt sowohl für den frei expandierenden wie auch für den einseitig geführten ebenen Strahl, die zweite für den achsensymmetrischen.  $\varphi'$  bezeichnet den Wert von  $\varphi$  an der Abschälerschneide.

Das unter den Integralen in Gl. (5) auftretende Produkt  $\nu D M^2$  läßt sich bei vorgegebener Gasart und vorgegebenem  $T_0$  als eine von dem speziellen gasdynamischen Problem unabhängige Funktion der kritischen MACH-Zahl  $M^*$  darstellen<sup>15</sup>. Für die ebene Strömung reduziert sich daher das gasdynamische Problem auf die Ermittlung des Zusammenhanges zwischen  $M^*$  und  $\varphi$  längs der durch  $\vartheta$  gekennzeichneten Stromlinie. Für die achsensymmetrische Strö-

jedoch in den hier betrachteten Fällen gering und wird deshalb vernachlässigt.

<sup>15</sup> Die kritische MACH-Zahl  $M^*$  ist das Verhältnis der örtlichen Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit im engsten Strahlquerschnitt.

<sup>13</sup> Dabei wird entsprechend der experimentellen Erfahrung vorausgesetzt, daß das Gas die Düse praktisch ohne Entmischung verläßt.

<sup>14</sup> Streng genommen muß man beim Auftreten von Diffusion zwischen den Stromflächen des Massenstromes und des Molstromes unterscheiden. Der betreffende Unterschied ist

mung muß außerdem der Verlauf von  $y/w$  bekannt sein<sup>16</sup>.

### Berechnung der Funktion $M^*(\varphi)$

Zur Bestimmung der Funktion  $M^*(\varphi)$  längs einer Stromlinie muß der Verlauf des Geschwindigkeitsvektors längs dieser Stromlinie ermittelt werden. Dazu wurden von der Mündungsebene aus die Stromlinien gleichzeitig im Orts- und Geschwindigkeitsraum konstruiert.

Das für die Konstruktion erforderliche Charakteristikennetz<sup>17</sup> der Strömung wurde nach dem Gitterpunktverfahren gewonnen: bei der ebenen Strömung als Verfahren zweiter Ordnung, bei der achsensymmetrischen Strömung als Verfahren erster Ordnung für die Zustände und als Verfahren zweiter Ordnung für den Ort, wobei als erste Näherung das Verfahren zweiter Ordnung der ebenen Strömung gewählt wurde<sup>18</sup>.

Bei den in der Praxis verwendeten konvergenten Düsen tritt das Gas aus der Düsenmündung mit der MACH-Zahl 1 aus. Da das Charakteristikenverfahren auf Überschallströmungen beschränkt ist, mußte die MACH-Zahl in der Düsenmündung etwas größer als 1 angenommen werden (1,035). Es wurde vorausgesetzt, daß das Gas die Mündung als homogene Parallelströmung verläßt und daß der Strahl außerhalb der Düse von ruhendem Gas mit dem Druck  $p_M$  umgeben ist. Auf dem freien Strahlrand ist  $M^*$  konstant und durch das Expansionsverhältnis  $p_0/p_M$  vorgegeben. Im geführten Strahl liegt darüber hinaus der Verlauf des Winkels  $\varphi$  längs der Führungsfläche fest.

### Beispiele

Die folgenden Beispiele wurden für das natürliche Gemisch der Argonisotope 36/40 berechnet, für das

die umfangreichsten experimentellen Erfahrungen vorliegen. Dementsprechend ist  $\kappa=5/3$ ,  $m=40$  g pro Mol,  $\Delta m/m=0,10$ . Die Temperaturabhängigkeit des Produktes  $\nu D$  wurde durch  $\nu D \sim T^\zeta$  angenähert, mit  $\zeta=0,816$  (vgl.<sup>19</sup>) und

$$\nu_0 D_0 = (1/R) \cdot 0,460 \text{ Torr cm}^2/\text{Grad sec} \quad (\text{vgl. }^{20})$$

als Anfangswert bei  $T_0=293$  °K.

#### 1. Frei expandierender ebener Strahl

Abb. 2 a zeigt Stromlinien und Charakteristiken eines frei expandierenden ebenen Strahls für die Expansionsverhältnisse 16,3 und 30. Die Stromlinien sind von der Düsenmündung an zunächst nach außen, in größerem Abstand jedoch nach innen gekrümmt. Die Krümmung nach innen ist eine Folge davon, daß das Gas in den betreffenden Gebieten „überexpandiert“ ist, d. h. den gegebenen Gegen-  
druck  $p_M$  unterschreitet.

Die Stromlinienwendepunkte liegen auf der äußersten der vom Mündungsrand ausgehenden Charakteristiken, die im folgenden Grenzcharakteristik genannt wird. Die Strömung zwischen Grenzcharakteristik und Düsenmündung bleibt unverändert, wenn das Expansionsverhältnis vergrößert wird. Deshalb ist in Abb. 2 eine eigene Konstruktion für das größere Expansionsverhältnis nur in dem gestrichelt gezeichneten Teil des Charakteristikennetzes erforderlich. Im Punkt V schneiden sich Charakteristiken derselben Schar, so daß hier ein Verdichtungsstoß beginnt.

Abb. 2 b gibt den Verlauf des Trenneffekts auf verschiedenen Stromlinien in Abhängigkeit vom Abstand  $x$  wieder. Durch die Wahl des Produktes  $\varepsilon_A p_0 w$  als abhängiger Variablen wird die Darstellung unabhängig von  $p_0$  und  $w$ . Die durch die Überexpansion des Strahles bewirkte Stromlinien-

<sup>16</sup> Auf der Symmetrieachse eines Strahls wird die rechte Seite von Gl. (5) unbestimmt ( $\varphi=0$ ;  $\vartheta=1$ ). Berücksichtigt man, daß auf einer achsenahen Stromlinie  $\varphi \approx dy/dx$ , und beachtet die Kontinuitätsgleichung für den durch diese Stromlinie festgelegten Stromfaden, so erhält man aus (5)

$$\varepsilon_A = \frac{\gamma}{p_0 w} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x'} \nu D M^2 d \frac{d(j_*/j)}{d(x/w)} \\ \int_{x=0}^{x'} \sqrt{\frac{j_*}{j}} \nu D M^2 d \frac{d\sqrt{j_*/j}}{d(x/w)} \end{cases}$$

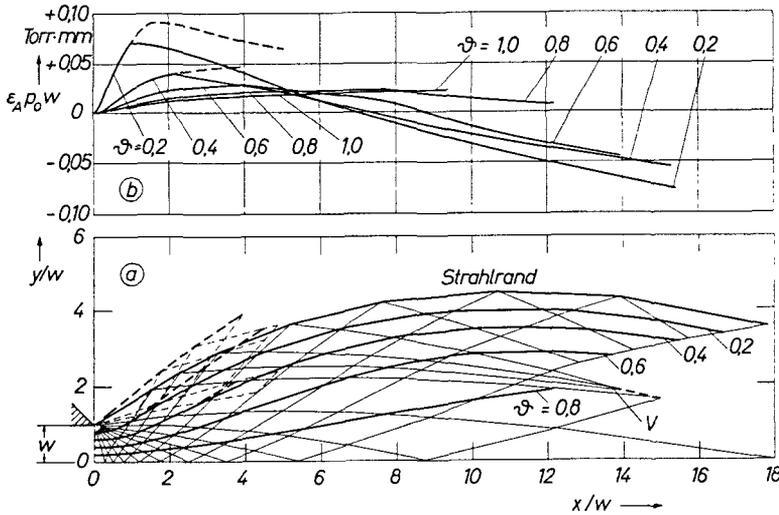
Darin ist  $j$  die örtliche Stromdichte,  $j_*$  ihr Wert in der Mündung. Mit diesem Ausdruck läßt sich  $\varepsilon_A$  auf der Symmetrieachse berechnen, wenn dort  $M^*$  bekannt ist.

<sup>17</sup> Zum Charakteristikenverfahren vgl. z. B.: K. OSWATITSCH, Z. angew. Math. Mech. 25/27, 195, 264 [1947]; K. OSWATITSCH, Gasdynamik, Springer-Verlag, Wien 1952; R. COURANT u. K. O. FRIEDRICHS, Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers, New York 1948.

<sup>18</sup> Methode 4 in Teil II des in Anm. <sup>17</sup> zitierten Berichtes von K. OSWATITSCH.

<sup>19</sup> Vgl. z. B. S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press, London 1952, S. 223, 248.

<sup>20</sup>  $D = 0,156$  cm<sup>2</sup>/sec unter Normalbedingungen. Vgl. z. B. Handbuch der Physik, Bd. XII (1958), S. 427.



KERNFAKTOR  
 Bau- und Verwaltung der Zentralforschung  
 m. i. d. Zentralforschung

Abb. 2. Stromlinien- und Charakteristikenbild (a) und räumlicher Verlauf der Entmischung (b) für einen frei expandierenden ebenen Argonstrahl. Mündungs-Mach-Zahl  $M_m=1,035$ , Expansionsverhältnis  $p_0/p_M=16,3$ , (gestrichelt: 30), Einlaßtemperatur  $T_0=293^\circ\text{K}$ .  $x, y$ =rechtwinklige Ortskoordinaten.

krümmung nach innen äußert sich in einer Wiederabnahme des Trenneffektes vom Stromlinienwende- punkt an. Der Knick der  $\epsilon_A$ -Kurven im Maximum entsteht dadurch, daß die Stromlinien an den Wende- punkt von beiden Seiten her mit endlichem Krüm- mungsradius heranlaufen. In dem stromabwärts vom Wendepunkt gelegenen Gebiet erreicht  $\epsilon_A$  schließlich negative Werte. Der Nulldurchgang liegt dabei für alle  $\vartheta$ -Werte noch vor dem Punkt mit achsenparal- leler Stromlinientangente.

### 2. Einseitig geführter ebener Strahl

Die in Abb. 3 und 4 dargestellten einseitig ge- führten ebenen Strahlen sind für das Expansions- verhältnis 30 konstruiert. Die Führungsfläche ist in beiden Fällen vom Punkt O an kreisbogenförmig gekrümmt, mit den Radien  $\varrho=10w$  (Abb. 3) und  $\varrho=5w$  (Abb. 4).

Bemerkenswert ist zunächst die angenäherte Sym- metrie der geführten Strahlen um einen Radius der Führungsfläche<sup>21</sup>. In Abb. 3 fügt sich das Spiegel- bild des linken Strahlteils, das gestrichelt eingezeich- net ist, so gut in die von links her weitergeführte Konstruktion ein, daß es als deren Fortsetzung an- gesehen werden kann. Bei einer weiteren Fortsetzung nach rechts würde sich die Strahlstruktur angenähert periodisch wiederholen.

<sup>21</sup> Eine solche Quasisymmetrie ist auch bei frei expandieren- den Strahlen bekannt. Allerdings tritt sie dort nur bei wesentlich kleineren Expansionsverhältnissen auf.

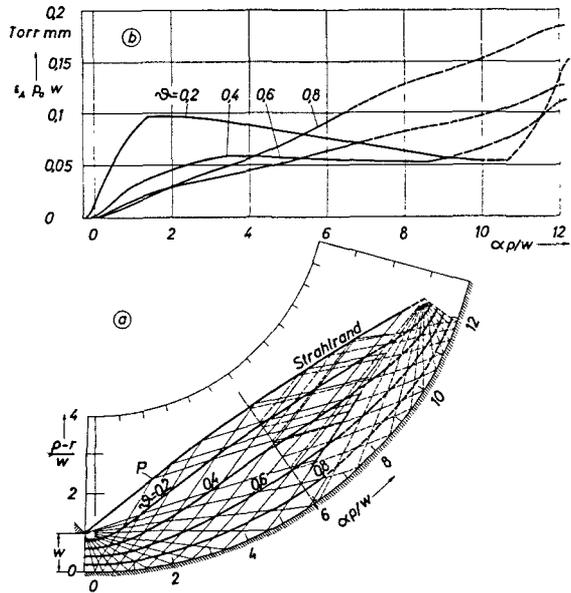


Abb. 3. Strömung (a) und Entmischung (b) für einen ein- seitig geführten ebenen Argonstrahl. Krümmungsradius der Führungsfläche  $\varrho=10w$ , Expansionsverhältnis  $p_0/p_M=30$ , sonstige Daten wie bei Abb. 2.  $r, \alpha$ =Polarkoordinaten mit dem Krümmungszentrum der Führungsfläche als Pol.

Die Stromlinien werden rechts der Charakteristik OP durch die Führungsfläche stärker als im frei expandierenden Strahl nach außen gekrümmt. Trotz- dem haben die Stromlinien  $\vartheta=0,2$  und  $0,4$  in Abb. 3 von der Grenzcharakteristik an noch eine Krümmung nach innen. Erst bei kleinerem Verhält- nis des Radius der Umlenkfläche zur Düsenweite

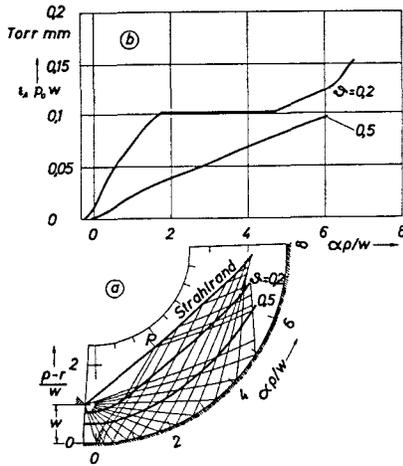


Abb. 4. Wie Abb. 3, jedoch  $q=5w$ .

– wie in Abb. 4 – ist der Einfluß der Führungsfläche so stark, daß auch die äußeren Stromlinien in ihrem ganzen Verlauf nach außen gekrümmt sind.

Die Wirkung der Strahlführung auf die Entmischung ist aus Abb. 3 b und 4 b erkennbar. Auf denjenigen Stromlinien, deren Krümmung überall nach außen weist, nimmt  $\epsilon_A$  naturgemäß mit dem Abstand von der Düse monoton zu. Auf den anderen Stromlinien nimmt der Trenneffekt hinter der Grenzcharakteristik nur noch wenig ab und steigt in größerem Abstand wieder an. Durch Fortsetzung des geführten Strahls nach rechts wäre bei reibungsfreier Strömung im Prinzip eine weitere Steigerung des Trenneffekts möglich, bis die Entmischung durch die hier nicht berücksichtigte Konzentrationsdiffusion begrenzt wird. Die Maximalwerte von  $\epsilon_A p_0 w$ , die in der ersten Strahlperiode erreicht werden, sind bei den einseitig geführten Strahlen größer als bei den frei expandierenden. Der Unterschied nimmt mit steigendem  $\vartheta$  und mit kleiner werdendem Verhältnis  $q/w$  zu.

### 3. Frei expandierender achsensymmetrischer Strahl

In Abb. 5 ist ein frei expandierender achsensymmetrischer Strahl mit dem Expansionsverhältnis 16,3 dargestellt. Gegenüber dem ebenen Strahl mit gleichem Expansionsverhältnis ist der achsensymmetri-

sche Strahl schmaler und erreicht seinen größten Querschnitt bei kleinerem  $x/w$ . Auf der Grenzcharakteristik beginnt relativ nahe an der Mündung (in Abb. 5 gestrichelt eingezeichnet) ein Verdichtungsstoß<sup>22</sup>. Die Grenzcharakteristik und der Verdichtungsstoß scheiden den Strahl in Gebiete entgegengesetzter Stromlinienkrümmung. Auf dem Verdichtungsstoß werden außerdem die Stromlinien zur

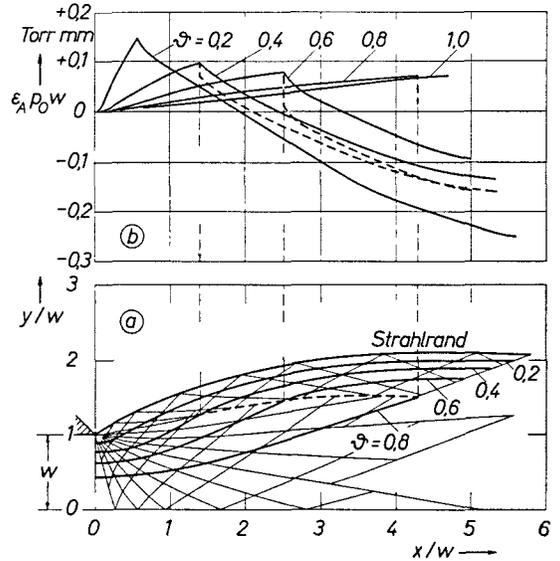


Abb. 5. Strömung (a) und Entmischung (b) für einen frei expandierenden achsensymmetrischen Argonstrahl. Sonstige Daten wie bei Abb. 2 ( $p_0/p_M=16,3$ ). Der Übersichtlichkeit halber ist nur etwa ein Drittel aller zur Konstruktion verwendeten Charakteristiken eingezeichnet.

Strahlachse hin geknickt. Grenzcharakteristik und Stoß begrenzen gemeinsam diejenige Umgebung der Düsenmündung, die von einer Vergrößerung des Expansionsverhältnisses nicht beeinflusst wird.

Den zugehörigen Verlauf des Trenneffekts zeigt Abb. 5 b. Die Wirkung des Verdichtungsstoßes auf den Trenneffekt läßt sich mit der hier entwickelten Methode nicht exakt angeben, denn die den Gl. (3) bis (5) zugrunde liegende erste Näherung der Gaskinetik ist zur Beschreibung der Vorgänge in einem Verdichtungsstoß nicht mehr ausreichend. Wäre Gl. (5) anwendbar, so würde  $\epsilon_A$  beim Durchgang der Stromlinie durch den Verdichtungsstoß un stetig abnehmen und dem in Abb. 5 b gestrichelt eingezeichneten Verlauf folgen. Als sicher darf man annehmen, daß auch im Verdichtungsstoß die leichte Gemischkomponente in Richtung des Druckgefälles bzw. zur Seite der positiven Stromlinienkrümmung diffundiert<sup>4</sup>. Der Verlauf von  $\epsilon_A$  hinter dem Stoß

<sup>22</sup> Der Verdichtungsstoß wurde unter Verwendung der Stoßpolaren in einem Verfahren zweiter Ordnung konstruiert. Bei der Konstruktion der Strömung hinter dem Stoß wurde die durch den Stoß entstehende  $\vartheta$ -Abhängigkeit der spezifischen Entropie berücksichtigt.

liegt also mit Sicherheit unter demjenigen Verlauf, den man unter gänzlicher Vernachlässigung der Wirkung des Stoßes erhält und der in Abb. 5 b durch die durchgezogenen stetigen Kurven dargestellt ist.

$\varepsilon_A p_0 w$  erreicht im achsensymmetrischen Strahl größere Absolutbeträge als bei gleichem Expansionsverhältnis für gleiches  $\vartheta$  im ebenen Strahl. Im Grenzfall  $\vartheta \rightarrow 0$  unterscheiden sich die positiven Maximalwerte von  $\varepsilon_A p_0 w$  in beiden Strahlen um den Faktor 2.

Durch den zusätzlichen Faktor  $y/w$  in der unteren Zeile von Gl. (5), der mit zunehmendem Abstand von der Düsenmündung anwächst, erhält der negative Anteil des Integrals ein größeres Gewicht. Es ist daher verständlich, daß der negative Trenneffekt im achsensymmetrischen Strahl nicht nur größere Absolutbeträge erreicht, sondern auch relativ zum maximalen positiven Trenneffekt stärker als im ebenen Strahl ausgeprägt ist.

### Vergleich mit dem Experiment

Charakteristische qualitative Ergebnisse der Theorie, die mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmen, sind

1. die umgekehrte Proportionalität des Trenneffekts zum Produkt  $p_0 w$ , wenn dieses hinreichend groß ist<sup>23</sup>,

2. der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der Krümmung und der Zu- oder Abnahme des Trenneffekts auf einer Stromlinie<sup>24</sup>,

3. die Existenz eines Strömungsgebietes, in dem Strömung und Trenneffekt bei Vergrößerung des Expansionsverhältnisses konstant bleiben<sup>25</sup>,

4. die stärkere Ausprägung des negativen Trenneffektes im achsensymmetrischen Strahl<sup>4</sup>,

5. die Vergrößerung des positiven Trenneffektes für große  $\vartheta$ -Werte durch verstärkte Umlenkung im einseitig geführten Strahl<sup>5</sup>.

Ein *qualitativer Unterschied* zwischen den Aussagen der Theorie und den Ergebnissen der Experi-

mente besteht bei kleineren Werten von  $p_0 w$  darin, daß der Betrag des Trenneffektes mit abnehmendem  $p_0 w$  nicht immer weiter ansteigt, sondern ein Maximum durchläuft und dann wieder abnimmt<sup>26</sup>. Dieses Verhalten kann mit den von der Theorie nicht erfaßten Einflüssen der Reibung und des Übergangs zu molekularen Verhältnissen erklärt werden<sup>2</sup>.

Ein weiterer qualitativer Unterschied besteht darin, daß bei den der obigen Rechnung zugrunde gelegten Expansionsverhältnissen der Trenneffekt im Experiment noch keine negativen Werte erreicht<sup>4</sup>. Diese treten erst bei größeren Expansionsverhältnissen und dann nur im achsensymmetrischen Strahl auf<sup>27</sup>. Das dürfte hauptsächlich darauf beruhen, daß die Strahlgebiete mit negativem Beitrag zum Druckdiffusionsstrom durch die von der Theorie nicht erfaßten Effekte stärker beeinflusst werden als die weiter stromauf liegenden Gebiete mit positivem Beitrag. Für diese Erklärung spricht die Tatsache, daß das im Experiment bei einer Variation von  $p_0 w$  beobachtete Maximum des negativen Trenneffektes bei einem um reichlich eine Größenordnung höheren Wert von  $p_0 w$  liegt als das Maximum des positiven Trenneffektes. Da die zum negativen Trenneffekt führende Umlenkung der Stromlinien zu einem erheblichen Teil in Verdichtungsstößen erfolgt, sind für den negativen Trenneffekt die Vorgänge in den Verdichtungsstößen von besonderer Bedeutung, worauf K. BIER hingewiesen hat<sup>4</sup>.

Bei einem *quantitativen* Vergleich zwischen der Theorie und dem Experiment ist zu berücksichtigen, daß bei den meisten Experimenten  $p_0 w$  nur wenig größer war als der zum Maximum der Entmischung führende Wert. Unter diesen Bedingungen muß noch mit einem merklichen Einfluß der von der Theorie nicht erfaßten Störeffekte gerechnet werden. Es ist daher verständlich, daß im Experiment kleinere Entmischungen gefunden werden. Die experimentellen Werte des positiven Trenneffektes liegen im Mittel etwa bei 50% der theoretischen.

Bei einer Erweiterung der Theorie müßten neben der Reibung und den Abweichungen vom gasdyna-

<sup>23</sup> Zum positiven Trenneffekt vgl. z. B. Abb. 7 der in Anm. <sup>2</sup> zitierten Arbeit, zum negativen Trenneffekt z. B. Abb. 9 der in Anm. <sup>4</sup> zitierten Arbeit.

<sup>24</sup> Vgl. z. B. Abb. 4 der in Anm. <sup>2</sup> zitierten Arbeit.

<sup>25</sup> Diese Eigenschaft äußert sich im Experiment darin, daß bei fester Abschälstellung und konstantem Einlaßdruck Abschälverhältnis und Trenneffekt vom Gegendruck unabhängig sind, wenn dieser unterhalb eines bestimmten Wertes liegt. Vgl. z. B. Abb. 5 der in Anm. <sup>2</sup> zitierten Arbeit.

<sup>26</sup> Vgl. z. B. Abb. 5 und 6 der in Anm. <sup>1</sup> zitierten Arbeit.

<sup>27</sup> Auch im Rahmen der obigen Theorie wird die Ausbildung des negativen Trenneffektes durch Vergrößerung des Expansionsverhältnisses besonders gefördert, denn das Verhältnis des negativen Anteils zum positiven Anteil des Druckdiffusionsstromes nimmt dort — insbesondere beim achsensymmetrischen Strahl — mit steigendem Expansionsverhältnis zu.

mischen Verhalten auch die Konzentrationsdiffusion und die Thermodiffusion berücksichtigt werden. Beide Effekte können vor allem am Strahlrand, d. h. bei kleinen  $\vartheta$ -Werten, Bedeutung erlangen. Bei der Konzentrationsdiffusion ergibt sich im Fall der isentropen Expansion das überraschende Ergebnis, daß sie in bestimmten Strahlgebieten die Druckdiffusion unterstützen, d. h. die Entmischung verstärken kann<sup>28</sup>. Mit zunehmendem Wert von  $p_0 w$  wird das Verhältnis des Konzentrationsdiffusionsstromes zum Druckdiffusionsstrom kleiner, denn die primär durch Druckdiffusion entstehenden Konzen-

trationsgradienten nehmen mit wachsendem  $p_0 w$  ab, während die relativen Druckgradienten bei Vernachlässigung der Störeffekte von  $p_0 w$  unabhängig sind. Man wird daher bei genügend großen Werten von  $p_0 w$  nicht nur die Einflüsse der Reibung und des nichtgasdynamischen Verhaltens, sondern auch den Einfluß der Konzentrationsdiffusion vernachlässigen können.

Herrn Prof. Dr. E. W. BECKER danke ich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr. G. FALK danke ich für wertvolle Diskussionen.

<sup>28</sup> So erhält man z. B. in Abb. 2 für  $p_0/p_M=30$ ,  $p_0 w=1,5$  Torr·mm auf der Stromlinie  $\vartheta=0,3$  einen um ca. 25% größeren Maximalwert von  $\varepsilon_A$ , wenn man die Konzentrationsdiffusion durch ein Näherungsverfahren berücksichtigt,

bei dem man den Konzentrationsdiffusionsstrom aus der Molenbruchverteilung berechnet, die man zuvor unter Vernachlässigung der Konzentrationsdiffusion ermittelt hat.