

KFK-114

# KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

August 1962

KFK 114

Meß- und Regeltechnische Abteilung

Leistungsschwingungen eines Reaktors im prompt kritischen Gebiet

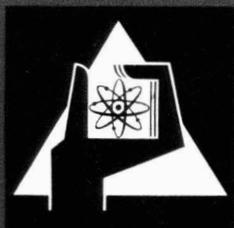
bei rampenförmigen Reaktivitätsstörungen

<sup>edit</sup>  
P. Dosch

Die Beschreibungsfunktion des überkritischen Reaktors

H. Uhrig

**KERNREAKTOR**  
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
Verwaltung der Zentralabteilung



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESellschaft M. B. H.

KARLSRUHE

**Leistungsschwingungen eines Reaktors im prompt kritischen Gebiet  
bei rampenförmigen Reaktivitätsstörungen**

Von **P. DOSCH**

(Aus dem Kernforschungszentrum Karlsruhe)

Mit 9 Textabbildungen

(Eingegangen am 14. Mai 1962)

**KERNREAKTOR**  
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
Verwaltung der Zentralbücherei

*Zusammenfassung.* Bei schnellen rampenförmigen Reaktivitätsstörungen in einem Reaktor und bei Vorliegen eines prompten negativen Temperaturkoeffizienten treten Leistungsschwingungen auf, die zu einem treppenförmigen Temperaturanstieg führen. Der Verlauf dieser Schwingungen hängt von vielen Reaktor-Parametern ab und ist analytisch nicht berechenbar.

Es wird eine Näherungsrechnung beschrieben, deren Ergebnisse mit wirklichen, auf einem Analogrechner berechneten Vorgängen verglichen werden. Weiterhin wird die Anwendung dieser Näherungsrechnung auf die Fragestellung beschrieben, unter welchen Bedingungen ein negativer Temperaturkoeffizient die Auslegung eines Sicherheitssystems erleichtert.

### 1. Einführung

Zur Beantwortung der Frage, wie gefährlich sich eine Reaktivitätsstörung in einem Reaktor auswirkt, ist die Kenntnis über den Temperaturverlauf in Abhängigkeit von den Parametern, die ihn beeinflussen, Voraussetzung. Erst mit dieser Kenntnis kann man entscheiden, welche Art von Reaktivitätsstörungen in einem Reaktor von seinem Sicherheitssystem aufgefangen werden können, oder umgekehrt wie das Sicherheitssystem eines Reaktors geartet sein muß, um bestimmten Reaktivitätsstörungen wirksam begegnen zu können.

Die Temperaturen in einem Reaktor werden wesentlich bestimmt durch die Reaktorleistung bzw. durch den Neutronenfluß im Reaktor, so daß dessen Zeitverlauf immer eine primär wichtige Größe zur Beurteilung der Auswirkungen von Reaktivitätsstörungen darstellt.

Es ist bekannt, daß sich schon für den einfachen Fall rampenförmiger positiver Reaktivitätsänderung der Anstieg des Neutronenflusses nicht explizit darstellen läßt. Noch schwieriger werden die Verhältnisse, wenn die Einwirkung eines Temperaturkoeffizienten auf den zeitlichen Flußverlauf berücksichtigt werden soll. In diesem Fall sind nicht nur die neutronenphysikalischen Größen, speziell die Lebensdauer der prompten Neutronen, der Anteil  $\beta$  der verzögerten Neutronen, die Art der Reaktivitätsstörung und der Temperaturkoeffizient, sondern auch die thermischen Größen des Reaktors wie die spezifische Leistung, die spezifische Wärme und die Betriebstemperatur von bedeutendem Einfluß.

Wendet man sich speziell schnellen positiven rampenförmigen Reaktivitätsstörungen zu, so sieht man, daß ohne Vorhandensein eines Temperaturkoeffizienten die Temperatur zunächst nur wenig, plötzlich jedoch sehr rasch ansteigt. Der plötzliche Temperaturanstieg findet normalerweise in der Nähe des prompt kritischen Zustandes statt. Lediglich in extremen Fällen — bei sehr großen Lebensdauern und sehr schnellen Reaktivitätsstörungen — steigt die Temperatur erst wesentlich nach Überschreiten des prompt kritischen Zustandes merklich an.

Grundsätzlich anders liegen die Verhältnisse beim Vorhandensein eines prompten negativen Temperaturkoeffizienten. Der rasch einsetzende Temperaturanstieg in der Nähe des prompt kritischen Zustandes führt unter Umständen zu sehr raschem Anwachsen der negativen Reaktivität und wirkt damit der positiven Reaktivitätsstörung zunächst spürbar entgegen.

Der Anstieg des Neutronenflusses wird dadurch nicht nur vermindert, es kann zu einer Abnahme der Reaktorleistung und damit zunächst zu einer Begrenzung des Temperaturanstieges kommen. Bei weiterem Andauern der positiven Reaktivitätsstörung erfolgt dann wiederum ein Anstieg der Reaktorleistung. Es treten Neutronenflußschwingungen auf, die einen treppenförmigen Anstieg der Temperatur zur Folge haben.

Die Kenntnis des Verlaufs des Temperaturanstieges und die Abhängigkeit von den einzelnen Reaktorparametern ist für die Analyse von schnellen Reaktivitätsstörungen und für die Auslegung von Sicherheitssystemen gegen solche Störungen von besonderer Bedeutung. Durch die Einwirkung des Temperaturkoeffizienten entsteht unter Umständen eine Verlängerung der Zeit, die bis zum Überschreiten der kritischen Temperaturen vergeht. Diese Verlängerung kann eine wesentliche Erleichterung für die Auslegung des Sicherheitssystems bedeuten bzw. umgekehrt dazu führen, daß schnellere Störungen von einem gegebenen Sicherheitssystem aufgefangen werden können. Im folgenden wird eine Näherungsrechnung beschrieben, die es erlaubt, einen Überblick über den Einfluß der Reaktorparameter auf die Leistungsoszillationen bei schnellen Reaktivitätsstörungen zu erhalten.

### 2. Mathematische Beschreibung des Neutronenfluß- und Temperaturverlaufes für schnelle Reaktivitätsstörungen

Für die Beschreibung des Neutronenflußverlaufes seien die reaktorkinetischen Gleichungen in der Form

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\delta k - \beta}{l} \cdot \Phi + \sum \lambda_i C_i \quad (1)$$

und

$$\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i + \frac{\beta_i}{l} \cdot \Phi \quad (2)$$

angenommen.

Dabei bedeuten

$\Phi$  = Neutronenfluß,

$\delta k$  = Reaktivität,

$\beta_i$  = Anteil der  $i$ -ten Gruppe der verzögerten Neutronen,

$\beta$  =  $\sum \beta_i$  = Anteil der verzögerten Neutronen,

$\lambda_i$  = Zerfallskonstante der  $i$ -ten Gruppe der verzögerten Neutronen,

$C_i$  = Konzentration der Neutronenvorläufer der  $i$ -ten Gruppe.

Beschränkt man sich auf schnelle Störungsvorgänge, die innerhalb einiger zehntel Sekunden ablaufen, so kann man ohne großen Fehler in Gl. (2) den Zerfallsterm  $-\lambda_i C_i$  vernachlässigen und erhält dann mit

$$Y = l \sum \lambda_i C_i \tag{3}$$

die vereinfachten kinetischen Gleichungen

$$l \cdot \frac{d\Phi}{dt} = (\delta k - \beta) \Phi + Y \tag{4}$$

und

$$\frac{dY}{dt} = \sum \lambda_i \beta_i \cdot \Phi. \tag{5}$$

Gl. (4) kann man in der Form

$$\frac{l}{\beta} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \left( \frac{\delta k}{\beta} - 1 \right) \Phi + \frac{Y}{\beta} \tag{6}$$

schreiben. Der Term  $Y/\beta$  wird nach Gl. (5) bestimmt durch die Größe

$$\sum \lambda_i \frac{\beta_i}{\beta},$$

deren Zahlenwerte für verschiedene Brennstoffe in Tabelle 1 dargestellt sind. Man sieht, daß sie nicht mehr

Tabelle 1. Zahlenwerte für die Größe  $\sum \lambda_i \frac{\beta_i}{\beta}$

Brennstoff	Th <sup>232</sup>	U <sup>233</sup>	U <sup>235</sup>	U <sup>238</sup>	Pu <sup>239</sup>
$\sum \lambda_i \frac{\beta_i}{\beta} \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right]$	0,507	0,319	0,439	0,788	0,407

als um den Faktor 2 differieren. Bei den hier betrachteten schnellen Reaktivitätsstörungen wird der Zeitverlauf des Neutronenflusses außerdem nur wenig von  $Y$  bestimmt. In den nachfolgenden Rechnungen ist deshalb für  $\sum \lambda_i \frac{\beta_i}{\beta}$  der Zahlenwert für Pu<sup>239</sup> eingesetzt und

$$\Phi = \Phi \left( \frac{l}{\beta}, \frac{dk}{\beta}, t \right)$$

angenommen.

Für den Temperaturverlauf im Brennelement kann man die vereinfachende Annahme treffen, daß die zu Beginn der Störung vorliegende Leistung auch während des Störungsverlaufes über die Brennelementoberfläche abgegeben werde. Die sie übersteigende Leistung, im folgenden die Überlast genannt, führe zur adiabatischen Aufheizung des Brennelementes.

Untersuchungen haben gezeigt, daß diese Annahmen auch für Brennelemente mit hohen Leistungsdichten für die Innenzone praktisch ohne Fehler während einiger Zehntel Sekunden gültig sind.

Unter dieser Annahme kann man schreiben

$$c \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = c \cdot \frac{d(T - T_b)}{dt} = q - q_N \tag{7}$$

mit den Bedeutungen

- $\vartheta$  = Übertemperatur während der Störung,
- $T$  = absolute Temperatur während der Störung,
- $T_b$  = Temperatur zu Beginn der Störung,
- $q_N$  = spezifische Leistung bei Beginn der Störung,
- $c$  = spezifische Wärme des Brennstoffes.

Mit dem trivialen Zusammenhang

$$\frac{q}{q_N} = \frac{\Phi}{\Phi_N}$$

$\Phi_N$  = Neutronenfluß zu Beginn der Störung

erhält man aus (7)

$$\vartheta = \frac{q_N}{c} \int \left( \frac{\Phi}{\Phi_N} - 1 \right) dt. \tag{8}$$

Als spezifische Größe eines Reaktors sei der Wert des Integrals definiert zu dem Zeitpunkt, zu dem die Maximaltemperatur gerade erreicht wird

$$\int_0^{\vartheta(\vartheta_{\max})} \left( \frac{\Phi}{\Phi_N} - 1 \right) dt = \vartheta_{\max} \cdot \frac{c}{q_N} = \Theta. \tag{9}$$

Diese Kenngröße  $\Theta$  hat für bekannte Reaktoren Werte zwischen 0,1 und 10 sec (s. Tabelle 2). Sie wird im folgenden mit „zulässige Überlastdauer“ bezeichnet, da man unter ihr die Zeit verstehen kann, die bei einfacher Überlast bis zum Erreichen der Maximaltemperatur vergeht.

Die Reaktivitätswirkung, die durch einen prompten Temperaturkoeffizienten  $\Gamma_p$  hervorgerufen wird ist definiert als

$$\delta k_T = \Gamma_p \cdot \vartheta$$

oder mit dem Ausdruck für die Übertemperatur nach Gl. (8)

$$\delta k_T = G \int \left( \frac{\Phi}{\Phi_N} - 1 \right) dt \tag{10}$$

mit der Abkürzung

$$G = \Gamma_p \cdot \frac{q_N}{c}. \tag{11}$$

Die Kenngröße  $G$  wird im folgenden mit „Überlastkoeffizient der Reaktivität“ bezeichnet, da sie die Reaktivitätswirkung in Abhängigkeit von der momentan im Reaktor vorliegenden Überlast (normiert) darstellt. Sie hat für bekannte Reaktortypen Werte in der Größenordnung zwischen  $-10^{-3}/\text{sec}$  und  $-10^{-2}/\text{sec}$  (s. Tabelle 2).

Tabelle 2. Zulässige Überlastdauer  $\Theta$  und Überlastkoeffizient  $G$  für bekannte Reaktortypen (Richtwerte)

Reaktor	$\Theta$ sec	$-G$ sec <sup>-1</sup>
Leistungsreaktoren		
Calder Hall . . . . .	6,66	0,4 · 10 <sup>-3</sup>
G 3 . . . . .	5,26	0,47 · 10 <sup>-3</sup>
Dresden . . . . .	0,96	0,93 · 10 <sup>-3</sup>
NPD-2 . . . . .	8,7	0,24 · 10 <sup>-3</sup>
Kahl . . . . .	9,1	0,63 · 10 <sup>-3</sup>
OMR . . . . .	7,69	1,72 · 10 <sup>-3</sup>
EBR-2 . . . . .	0,2	8,35 · 10 <sup>-3</sup>
Enrico Fermi . . . . .	0,23	7,9 · 10 <sup>-3</sup>
Forschungsreaktoren		
FR-2 . . . . .	11,9	0,6 · 10 <sup>-3</sup>
NRU . . . . .	1,97	4,8 · 10 <sup>-3</sup>
EL-3 . . . . .	0,54	3,6 · 10 <sup>-3</sup>
Dido . . . . .	0,32	127 · 10 <sup>-3</sup>
Merlin . . . . .	0,89	16,3 · 10 <sup>-3</sup>
FRM . . . . .	4,0	12,7 · 10 <sup>-3</sup>
ORR . . . . .	0,38	18,5 · 10 <sup>-3</sup>

### 3. Rechenbeispiel

Der prinzipielle Verlauf von Neutronenfluß und Temperatur, beschrieben durch die oben erläuterten Gleichungen, bei rampenförmigen Reaktivitätsstörungen der Form  $\delta k_s = r_s \cdot t$  sei an einigen speziellen Beispielen demonstriert.

Die Abb. 1 und 2 zeigen den Zeitverlauf von Neutronenfluß und Temperatur, wie sie auf einem Analogrechner ermittelt wurden. Dabei sind für alle Vorgänge die Parameter: Störungsgeschwindigkeit  $r_s$ , Überlastkoeffizient  $G$  und die zulässige Überlastdauer  $\Theta$  konstant gehalten. Variiert wurde die Neutronenlebensdauer  $l$ .

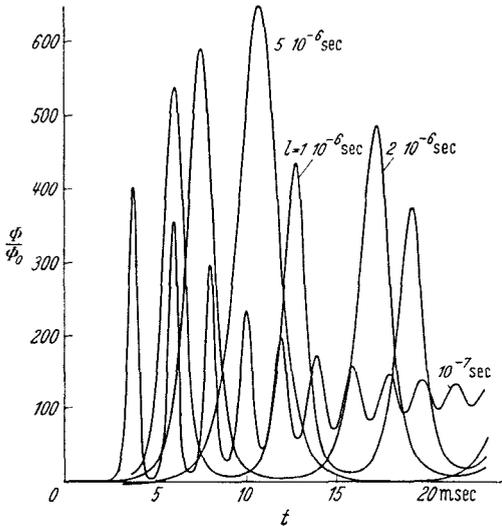


Abb. 1. Neutronenflußverlauf über der Zeit für verschiedene Neutronenlebensdauern  $l$ . Parameter:  $G = -10^{-2} \text{ sec}^{-1}$ ;  $\Theta = 1 \text{ sec}$ ;  $r_s = 400 \text{ \$/sec}$

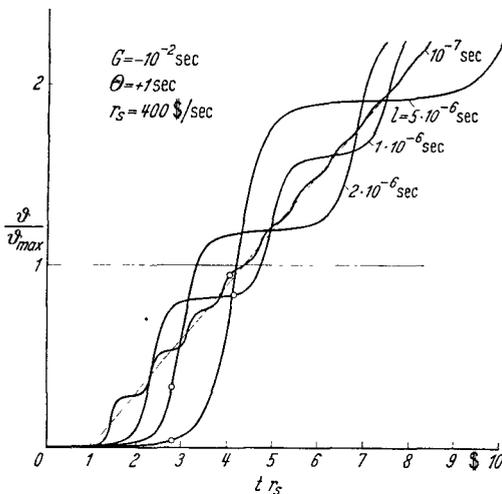


Abb. 2. Temperaturverlauf über der Zeit für verschiedene Neutronenlebensdauern  $l$

Dabei liegt der Ausgangspunkt der Störung scheinbar beim Erreichen des prompt kritischen Zustandes. Dieses Verhalten legte nahe, den Vorgang unter der Annahme zu beschreiben, daß vor Erreichen des prompt kritischen Zustandes keine Änderungen des Neutronenflusses und damit der Temperatur erfolgen. Nach Erreichen des prompt kritischen Zustandes kann der Neutronenflußverlauf ohne Berücksichtigung der verzögerten Neutronen beschrieben werden.

4. Näherungsrechnung für die Schwingungen im prompt kritischen Bereich

Unter den oben geschilderten Annahmen gilt für den Neutronenflußverlauf die einfache Beziehung

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\delta k(t)}{l} \cdot \Phi, \tag{13}$$

wobei der Zeitpunkt  $t=0$  das prompt Kritischwerden des Reaktors bedeutet. Für den Reaktivitätsverlauf muß man annehmen

$$\delta k(t) = r_s \cdot t + \delta k_T$$

oder mit Gl. (8)

$$\delta k(t) = r_s \cdot t + G \int \left( \frac{\Phi}{\Phi_N} - 1 \right) dt. \tag{14}$$

Mit der Abkürzung

$$y = \frac{\Phi}{\Phi_N}$$

und nach Differentiation geht Gl. (14) über in

$$y'' = \frac{y'}{y} + a \cdot y + b \cdot y^2$$

mit den Abkürzungen

$$a = \frac{r_s - G}{l} \quad \text{und} \quad b = \frac{G}{l}. \tag{15}$$

Diese Gleichung läßt sich durch Substitution von

$$u = y'^2$$

in eine Bernoullische Differentialgleichung überführen, deren Lösung nach Wiedereinsetzen von  $y$  und mit der Anfangsbedingung  $dy/dt=0$  für  $t=0$  die Form

$$y' = y \sqrt{2a \ln y + 2b(y-1)}$$

annimmt. Normiert man auf die dimensionslose Zeit

$$x = t \cdot \sqrt{2a}, \tag{16}$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = y \sqrt{\ln y + \frac{b}{a}(y-1)}. \tag{17}$$

Die Differentialgleichung ist jetzt nur noch von einem Parameter  $b/a$  abhängig.

Die Anfangsbedingung lautet

$$y = 1 \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Eine geschlossene Lösung dieser Differentialgleichung ist nicht bekannt. Man kann jedoch erkennen, daß  $dy/dx$  gleich Null wird für zwei Werte von  $y$ , nämlich für

$$\left. \begin{aligned} y = 1 & \quad (\text{Anfangsbedingung}) \\ \frac{y-1}{\ln y} = -\frac{a}{b} & \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Man sieht aus den Abbildungen den treppenförmigen Charakter des Temperaturverlaufes, hervorgerufen durch Oszillationen des Neutronenflusses. Es ist zu erkennen, daß bei sonst festgehaltenen Parametern mit kleiner werdender Neutronenlebensdauer die Amplituden und Perioden der Neutronenflußschwingung und damit die Höhe der Temperaturstufen kleiner werden. Die Temperaturschwingungen verlaufen, wie Abb. 1 erkennen läßt, um ein und dieselbe ansteigende Gerade. Sie hat ihren Ursprung etwa bei einem Wert von 1 \$, ihr Anstieg wird durch die Bedingung beschrieben, daß die Störungsreaktivität jeweils gerade durch den Temperaturkoeffizienten kompensiert wird, d.h.

$$\delta k_s + \delta k_T = 0 = r_s \cdot t + \Gamma_p \cdot \vartheta$$

bzw. mit Gln. (9) und (11)

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{\max}} = \frac{r_s}{G \cdot \Theta} \cdot t. \tag{12}$$

Eine genauere Betrachtung zeigt, daß diese beiden Gleichungen die Minima und Maxima der gesuchten Neutronenflußschwingungen beschreiben. Ihre zeitliche Lage kann der Gl. (17) nicht entnommen werden.

Der Zeitverlauf der Schwingung wurde für einen weiten Parameterbereich auf einem Analogrechner

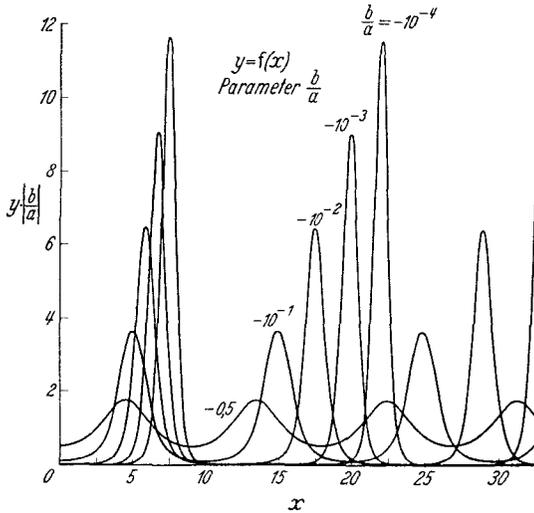


Abb. 3. Verlauf der Näherung  $y = \Phi/\Phi_0$  über der normierten Zeit  $x$  für verschiedene Parameterwerte  $b/a$ . Bei  $x=0$  wird der Reaktor prompt kritisch

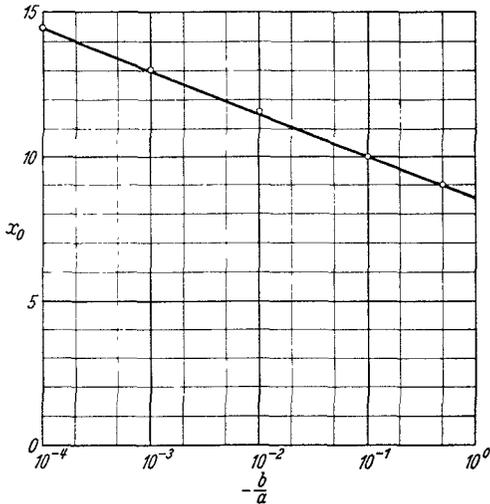


Abb. 4. Abhängigkeit der Periodendauer  $x_0$  der Neutronenflußschwingungen der Abb. 3 in Abhängigkeit von  $b/a$

bestimmt. Der Parameter  $b/a$  nach Gl. (15) hat die Form

$$\frac{b}{a} = \frac{G}{r_s - G} \quad (19)$$

Bei negativem Temperaturkoeffizienten wird  $G < 0$  und  $b/a$  damit immer negativ und dem Betrage nach kleiner als 1, also

$$-1 \leq \frac{b}{a} < 0.$$

Abb. 3 zeigt  $y$  über  $x$  für einen Parameterbereich  $b/a$  zwischen  $-0,5$  und  $-10^{-4}$ . Man erkennt, daß sich die Periodendauer  $x_0$  trotz des weiten Parameterbereiches nur sehr wenig ändert. Abb. 4 zeigt die Abhängigkeit der Periodendauer  $x_0$  von  $b/a$ . Sie liegt im hier gezeigten Parameterbereich zwischen  $x_0=9$  und  $x_0=14,5$ .

Abb. 5 zeigt den Wert des Integrales

$$J = \int (y - 1) dx.$$

Unter Heranziehung der Gln. (8), (9), (15) und (16) kann man zeigen, daß sich daraus der Temperaturverlauf bestimmen läßt nach

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{\max}} = \frac{1}{\Theta} \cdot \sqrt{\frac{l}{2(r_s - G)}} \cdot J. \quad (20)$$

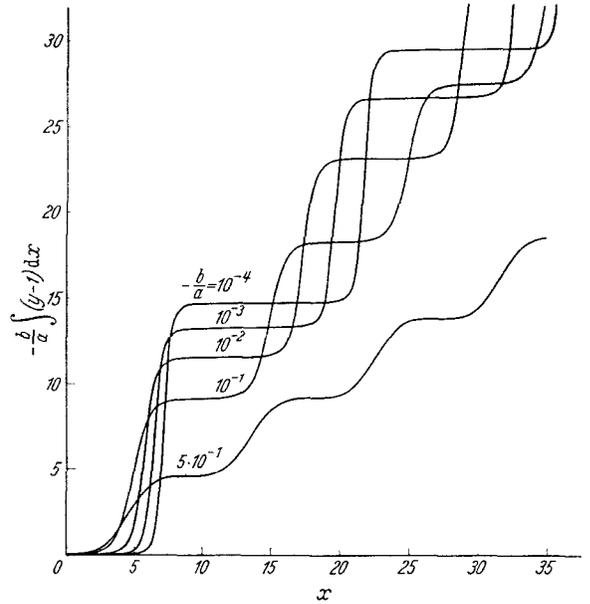


Abb. 5. Wert des Integrales  $J = \int (y - 1) dx$  über der normierten Zeit  $x$  für verschiedene Parameterwerte  $b/a$

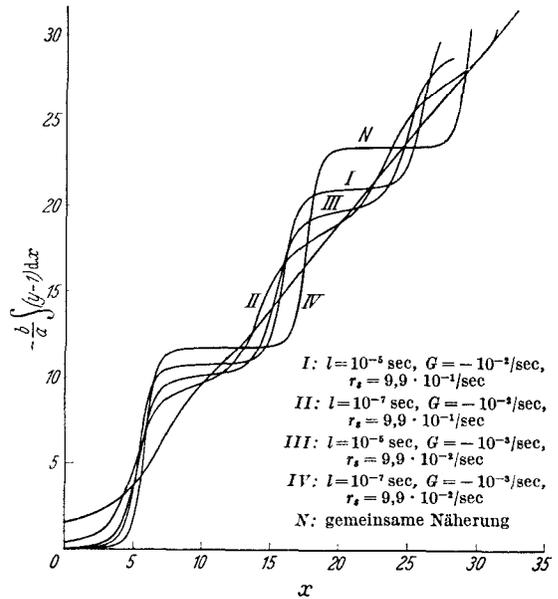


Abb. 6. Vergleich des Temperaturanstieges bei vier verschiedenen Störungsfällen mit der gemeinsamen Näherung N. Bei  $x=0$  wird der Reaktor prompt kritisch

### 5. Vergleich der Näherung mit dem wahren Temperaturverlauf

In Abb. 6 ist der Temperaturverlauf für vier verschiedene Störungsfälle dargestellt. Sie sind so ausgewählt, daß die Größe  $b/a$  für alle vier Fälle konstant ist und  $-10^{-2}$  beträgt. Sie werden also alle durch ein und dieselbe Näherung nach Gl. (17) beschrieben, obwohl die einzelnen Parameter sehr stark variieren. So unterscheiden sich diese Störungsfälle in der Neutronenlebensdauer  $l$  um den Faktor 100, in der angenommenen Störungsgeschwindigkeit  $r_s$  und im

Überlastkoeffizienten  $G$  jeweils um den Faktor 10. Aufgetragen ist in Abb. 6 jeweils der Wert des Integralen  $\int (y-1) dx$  über der normierten Zeit  $x = t \sqrt{2a}$ , wobei  $x=0$  die Zeit beim prompt Kritischwerden des Reaktors bedeutet. Man sieht, daß die vier Störungsfälle tatsächlich sehr ähnlichen Verlauf aufweisen. Die Näherung selbst beschreibt einen etwas zu raschen

6. Eine spezielle Anwendung der Ergebnisse

Die Einwirkung eines negativen Temperaturkoeffizienten auf den Temperaturverlauf zu kennen ist, wie eingangs schon erwähnt, von besonderer Bedeutung für die Frage der Auslegung eines Sicherheitssystems gegen schnelle Reaktivitätsstörungen. Wirkt der Temperaturkoeffizient nämlich wesentlich ver-

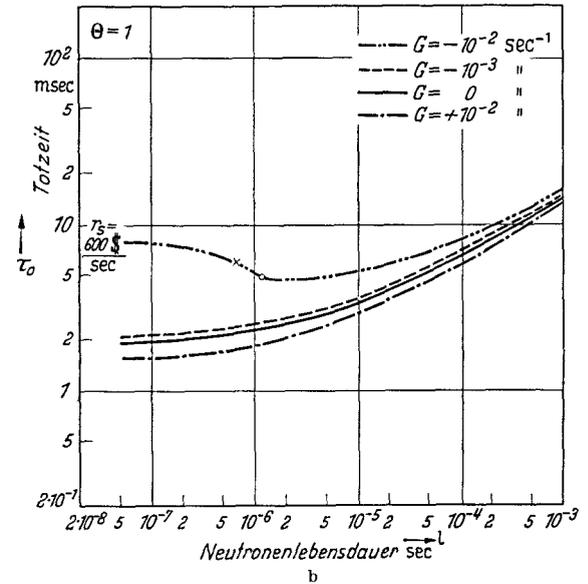
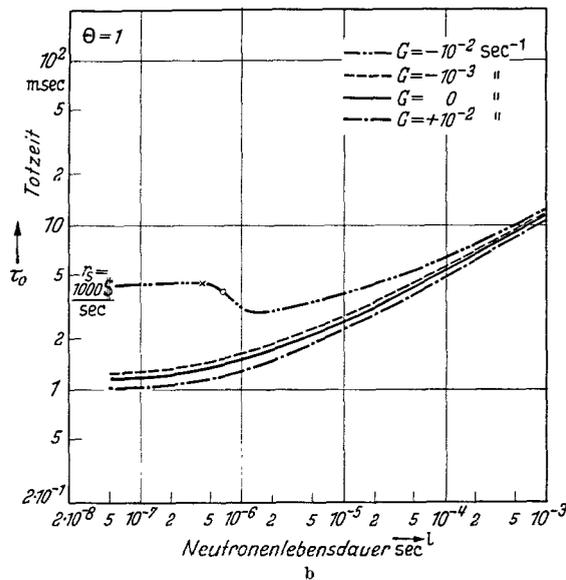
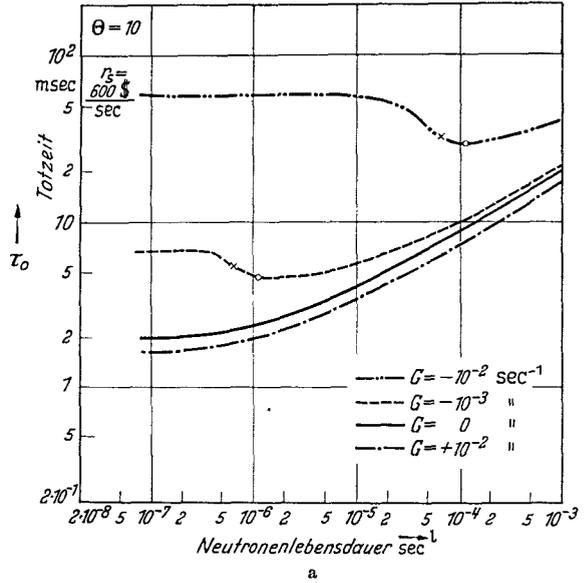
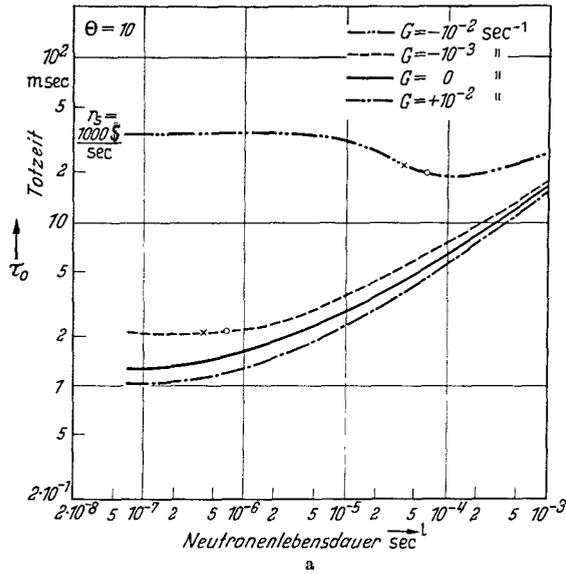


Abb. 7 a u. b. Einfluß des Überlastkoeffizienten (Temperaturkoeffizienten) auf die maximal zulässige Totzeit  $\tau_0$  eines Sicherheitssystems. Annahme:  $r_a = 1,1 \cdot r_s$ ; 0 = Lebensdauer nach Gl. (22) unter der Annahme  $x_0 = 10$ ;  $x =$  unter der Annahme  $x_0 = 13$

Abb. 8 a u. b. Einfluß des Überlastkoeffizienten (Temperaturkoeffizienten) auf die maximal zulässige Totzeit  $\tau_0$  eines Sicherheitssystems. Annahme:  $r_a = 1,1 \cdot r_s$ ; 0 = Lebensdauer nach Gl. (22) unter der Annahme  $x_0 = 10$ ;  $x =$  unter der Annahme  $x_0 = 13$

Temperaturanstieg, was aus den gemachten Annahmen und Vernachlässigungen verständlich ist. Dadurch, daß der Temperaturanstieg vor dem prompt Kritischwerden vernachlässigt wurde, kommt in der Näherungsrechnung der Temperaturkoeffizient etwas zu spät zur Wirkung. Daraus erklärt sich der höhere Wert der Temperaturschwingung.

Es ist zu erkennen, daß zum Gewinnen eines ersten Überblickes die dargestellte Näherung recht gute Ergebnisse liefert. Vor allem geht aus der Normierung hervor, welchen Einfluß die einzelnen Parameter auf den Verlauf der Störung ausüben.

zögernd auf den Temperaturanstieg, so wird die maximal zulässige Totzeit, die das Sicherheitssystem besitzen darf, vergrößert. Eine Vergrößerung der maximalen Totzeit bedeutet aber eine Erleichterung bei der technischen Realisierung eines Sicherheitssystems, das bestimmte Reaktivitätsstörungen beherrschen soll. Wird dagegen das schnellstmögliche technische System bei einem Reaktor vorgesehen, so kann dieses System um so schnellere Reaktivitätsstörungen auffangen, um so mehr ein negativer prompter Temperaturkoeffizient eine Verzögerung des Temperaturanstieges bewirkt.

Untersucht man die Zusammenhänge genauer, so sieht man, daß positive Überlastkoeffizienten und in gewissen Bereichen auch negative Überlastkoeffizienten wenig Einfluß auf die maximal zulässige Totzeit eines Sicherheitssystems ausüben. Dagegen gibt es Bereiche, in denen ein negativer Überlastkoeffizient eine wesentliche Vergrößerung dieser zulässigen Totzeit bewirkt.

Die Abb. 7 bis 9 zeigen einige Beispiele für den Einfluß der Überlastkoeffizienten auf die zulässige Totzeit. Das sprunghafte Ansteigen der zulässigen Totzeit bei bestimmten Parameterkonstellationen läßt sich aus den vorangehenden Betrachtungen leicht erklären. Es erfolgt offensichtlich dann, wenn die erste Treppenstufe der Temperaturschwingung unter die maximal zulässige Temperatur zu liegen kommt. Betrachtet man Abb. 1, so sieht man, daß dies offensichtlich dann der Fall ist, wenn die Periodendauer  $x_0$  kürzer wird als die Zeit  $t^*$ , die im schwingungsfreien Grenzfall des Temperaturanstieges vergeht, bis die Maximaltemperatur erreicht wird. Dieser Grenzfall wird durch Gl. (12) beschrieben und man erhält aus ihr für  $\vartheta = \vartheta_{\max}$  die Zeit

$$t^* = - \frac{G \cdot \Theta}{r_s} \tag{21}$$

Nimmt man für die Periodendauer  $x_0$  in erster Näherung

$$x_0 \approx 10 = \text{const}$$

an (s. Abb. 4), so erhält man für eine Verlängerung der notwendigen Totzeit durch die Einwirkung des negativen Überlastkoeffizienten unter Berücksichtigung der Gl. (16) die Bedingung

$$l \leq \frac{G^2 \cdot \Theta^2}{50 r_s} \left( 1 - \frac{G}{r_s} \right) \tag{22}$$

oder da der Klammerausdruck lediglich einen Korrekturfaktor  $\approx 1$  darstellt und unter Verwendung der Gln. (9) und (11) angenähert

$$l \leq \frac{\Gamma_p^2 \cdot \vartheta_{\max}^2}{50 r_s} \tag{23}$$

In den Abb. 7 bis 9 sind die Ergebnisse der Näherungsgleichung (22), aus der die Bedingung für das plötzliche Ansteigen der zulässigen Totzeit hervorgeht, eingetragen. Die mit Kreisen gekennzeichneten Lebensdauern ergeben sich bei der Annahme  $x_0 = 10$ , die mit Kreuzen gekennzeichneten bei  $x_0 = 13$ .

Man sieht, daß die wirklichen Verhältnisse durch Anwendung der oben dargestellten Näherungsrechnung recht gut beschrieben werden.

Damit lassen sich die Parameterkonstellationen bestimmen, unter denen ein negativer prompter Temperaturkoeffizient zur größeren Sicherheit eines Reaktors bei schnellen Reaktivitätsstörungen beiträgt.

Die Wirkung erfolgt unstetig, so daß zwischen einem kleinen negativen und einem positiven Koeffizienten kaum ein Unterschied besteht. Erst ab einer bestimmten Größe des negativen Temperaturkoeffizienten, die

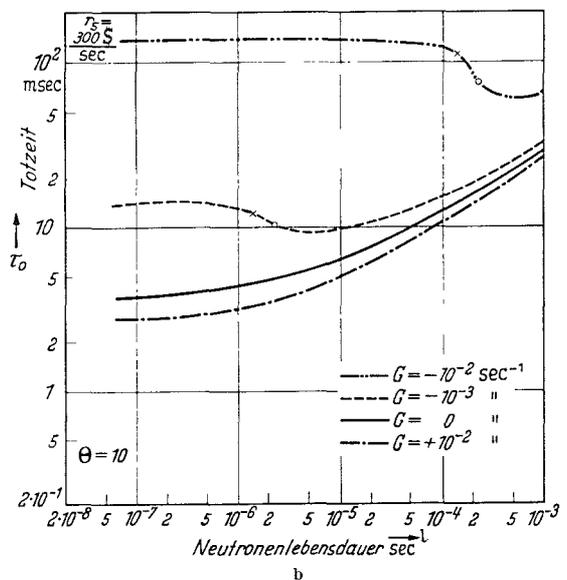
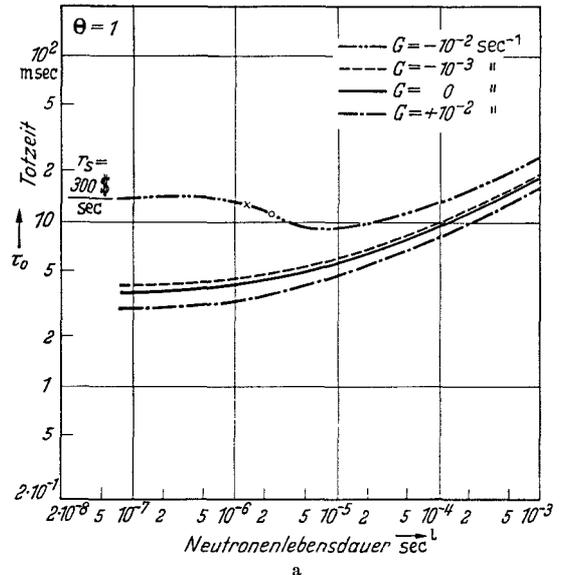


Abb. 9 a u. b. Einfluß des Überlastkoeffizienten (Temperaturkoeffizienten) auf die maximal zulässige Totzeit  $\tau_0$  eines Sicherheitssystems. Annahme:  $\tau_a = 1,1 \cdot \tau_s$ ; 0 = Lebensdauer nach Gl. (22) unter der Annahme  $x_0 = 10$ ;  $x =$  unter der Annahme  $x_0 = 13$

von den anderen Parametern abhängt, ergibt sich ein wesentlicher Einfluß auf die Sicherheit des Reaktors bei schnellen Reaktivitätsstörungen.

Der Einfluß des Temperaturkoeffizienten auf die regeltechnischen Eigenschaften eines Reaktors ist in diesen Betrachtungen nicht enthalten.

**KERNREAKTOR**  
 Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
 Verwaltung der Zentralbücherei

## Die Beschreibungsfunktion des überkritischen Reaktors

Von **H. UHRIG**

(Aus dem Kernforschungszentrum Karlsruhe)

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 14. Mai 1962)

*Zusammenfassung.* Es wird die Beschreibungsfunktion eines überkritischen Reaktors abgeleitet und durch Einführung eines „Ersatzreaktors“ mit der des gerade kritischen Reaktors verglichen. Das Ergebnis zeigt, daß der Ersatzreaktor mit kleineren relativen Anteilen an verzögerten Neutronen arbeitet, deren Mutterkern-Zerfallskonstanten größer sind, verglichen mit dem gerade kritischen Reaktor.

Die Abschätzung der Stabilität eines Reaktors mit einer Rückführung, sei sie thermischer Natur, wie z. B. Ausdehnungseffekte oder Doppler-Effekt oder in Form eines äußeren Regelkreises erfolgt zweckmäßigerweise mit Hilfe der sog. Beschreibungsfunktion. Unter Beschreibungsfunktion versteht die Regelungstechnik den Quotienten:

$$F(A, j\omega) = \frac{\text{Grundschiwingung der Ausgangsgröße nach Betrag und Phase}}{\text{sinusförmige Eingangsgröße nach Betrag und Phase}}$$

Bei einem Reaktor ist die Ausgangsgröße der Neutronenfluß oder die rez. Periode, die Eingangsgröße ist die Reaktivität. Die Beschreibungsfunktion für den gerade kritischen Reaktor ist aus der Literatur bekannt [1]. Soll jedoch z. B. die Stabilität einer Reaktorperiodenregelung berechnet werden, die es gestattet, den Reaktor von einer Leistung auf eine andere höhere Leistung zu bringen und während des Überganges auf eine konstante Periode zu regeln, muß auch die Beschreibungsfunktion des überkritischen Reaktors bekannt sein. Diese wird im folgenden abgeleitet und mit der des gerade kritischen Reaktors verglichen.

Ausgehend von den reaktorkinetischen Gleichungen:

$$l_0 \frac{d\Phi}{dt} = (\rho - \beta) \Phi + l_0 \sum_i \lambda_i C_i, \quad (1)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i + \frac{\beta_i}{l_0} \Phi, \quad (2)$$

in der die Buchstaben die bekannten Bedeutungen haben:

- $\rho$  = Reaktivität,
- $\Phi$  = Neutronenfluß,
- $\beta_i$  = relativer Anteil der verzögerten Neutronen der  $i$ -ten Gruppe an der Gesamtneutronenzahl,
- $\beta = \sum \beta_i$ ,
- $\lambda_i C_i$  = Quellfluß der  $i$ -ten verzögerten Neutronengruppe,

$\lambda_i$  = Zerfallskonstante der Mutterkerne der  $i$ -ten Gruppe,

$l_0$  = mittlere Lebensdauer der prompten Neutronen bei  $k_{\text{eff}} = 1$

ergibt sich mit der Substitution,

$$\varphi = \ln \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (3a)$$

d. h.  $\varphi$  ist gleich Logarithmus des Neutronenflusses,

$$X_i = \frac{l_0 C_i}{\Phi}, \quad (3b)$$

d. h.  $X_i$  ist demnach im wesentlichen das Verhältnis der verzögerten Neutronen-Mutterkerne zum Neutronenfluß, das folgende nichtlineare Gleichungssystem für den Logarithmus des Neutronenflusses:

$$l_0 \frac{d\varphi}{dt} = \rho - \beta + \sum \lambda_i X_i, \quad (4)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = -\left(\lambda_i + \frac{d\varphi}{dt}\right) X_i + \beta_i. \quad (5)$$

Jetzt soll ein quasistationärer Zustand angenommen werden, um den herum die zeitabhängigen Größen  $d\varphi/dt = \dot{\varphi}$ ,  $X_i$  und  $\rho$  schwanken. Diese Größen werden als lineare Mittelwerte definiert und mit dem Index 0 bezeichnet, die kleinen Änderungen mit dem Zeichen  $\Delta$ , so daß geschrieben werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \dot{\varphi}_0 + \Delta \dot{\varphi}(t) \\ &\text{mit } \varphi_0 = \text{rez. stat. Reaktorperiode} \\ X_i(t) &= X_{i,0} + \Delta X_i(t) \\ &\text{mit } X_{i,0} = \text{linearer Mittelwert von } X_i \\ \text{und} \\ \rho(t) &= \rho_0 + \Delta \rho(t) \\ &\text{mit } \rho_0 = \text{linearer Mittelwert von } \rho. \end{aligned} \right\} (6)$$

Die Einführung dieser Definitionen in die Gln. (4) und (5) und ihre Aufspaltung in zeitlich konstante

und zeitlich veränderliche Anteile führt zu den folgenden vier Gleichungen:

$$l_0 \dot{\varphi}_0 = \varrho_0 - \beta + \sum \lambda_i X_{i0}, \quad (7a)$$

$$X_{i0} = \frac{\beta_i}{\lambda_i + \dot{\varphi}_0} - \frac{\Delta \dot{\varphi} \cdot \Delta X_i}{\lambda_i + \dot{\varphi}_0}. \quad (7b)$$

Der Ausdruck  $\overline{\Delta \dot{\varphi} \cdot \Delta X_i}$  möge den linearen Mittelwert der Größe  $\Delta \dot{\varphi} \cdot \Delta X_i$  bezeichnen, der auftritt, wenn

für sinusförmig schwankende rez. Periode gelöst werden, und zwar in komplexer Schreibweise:

$$\overrightarrow{\Delta X_i} = - \frac{X_{i0}}{j\omega + \lambda_i + \dot{\varphi}_0} \cdot \overrightarrow{\Delta \dot{\varphi}}. \quad (10)$$

Die Pfeile sollen den Vektorcharakter der Größen andeuten. Daraus ergibt sich

$$\overline{\Delta \dot{\varphi} \cdot \Delta X_i} = -0,5 \frac{X_{i0}(\lambda_i + \dot{\varphi}_0) |\overrightarrow{\Delta \dot{\varphi}}|^2}{(\dot{\varphi}_0 + \lambda_i) + \omega^2}. \quad (11)$$

Das wird zusammen mit Gl. (7b)

$$X_{i0} = \frac{\beta_i}{(\lambda_i + \dot{\varphi}_0)} \left[ 1 - 0,5 \frac{|\overrightarrow{\Delta \dot{\varphi}}|^2}{(\lambda_i + \dot{\varphi}_0)^2 + \omega^2} \right]^{-1}. \quad (12)$$

Diese Gl. (12) ergibt mit den Gln. (10) und (8) die Beschreibungsfunktion:

$$F_{\dot{\varphi}}(A, j\omega) = \frac{\overrightarrow{\Delta \dot{\omega}}}{\overrightarrow{\Delta \varrho}} = \quad (13)$$

$$\frac{1}{l_0 \left( 1 + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i}{l_0 (j\omega + \lambda_i + \dot{\varphi}_0) (\lambda_i + \dot{\varphi}_0) (1 - 0,5 |\overrightarrow{\Delta \dot{\varphi}}|^2 [(\lambda_i + \dot{\varphi}_0)^2 + \omega^2]^{-1})} \right)}.$$

Diese Gleichung beschreibt die Übertragungseigenschaften des Reaktors bei einem stationären Zustand mit konstanter mittlerer rez. Periode  $\dot{\varphi}_0$ . Dieser allgemeine Fall läßt sich mit Hilfe neuer Definitionen auf den bekannten Spezialfall, der für  $\dot{\varphi}_0 = 0$  gilt zurückführen.

Die neu einzuführenden Größen sind:

$$\lambda_i^* = (\lambda_i + \dot{\varphi}_0) \quad (14a)$$

und

$$\beta_i^* = \beta_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \dot{\varphi}_0} = \beta_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i^*}. \quad (14b)$$

Damit schreibt sich Gl. (13) in folgender Form:

$$F_{\dot{\varphi}}(A, j\omega) = \frac{1}{l_0 \left( 1 + \sum_i \frac{\beta_i^*}{l_0 (j\omega + \lambda_i^*) (1 - 0,5 |\overrightarrow{\Delta \dot{\varphi}}|^2 \cdot [\lambda_i^{*2} + \omega^2]^{-1})} \right)}. \quad (15)$$

Die Gl. (13) hat für den Spezialfall  $\dot{\varphi}_0 = 0$  die gleiche Form wie die eben angeschriebene, wobei allerdings die „gesterneten“ Größen durch solche ohne Stern ersetzt sind. Das bedeutet aber, daß ein Reaktor, dessen Reaktivität von Null verschieden ist, so daß sich eine konstante mittlere Periode einstellt, sich bei kleinen Reaktivitätsstörungen  $\Delta \varrho$  bezüglich der Änderungen  $\Delta \dot{\varphi}$  genau so verhält, wie ein gerade kritischer Reaktor, dessen verzögerte Neutronen-Mutterkerne die Zerfallskonstanten  $\lambda_i^*$  haben und dessen verzögerten Neutronen mit den relativen Anteilen  $\beta_i^*$  innerhalb der gesamten Spaltneutronenzahl auftreten. Mit anderen Worten, der Reaktor kann durch einen „Ersatz“-Reaktor beschrieben werden, der die Werte  $\beta_i^*$  und  $\lambda_i^*$  besitzt.

Die Abhängigkeit der  $\beta_i^*$  von der mittleren rez. Periode  $\dot{\varphi}_0$  ist in der Abb. 1 für U 235 aufgetragen. Es ist ersichtlich, was schon aus den Gleichungen zu entnehmen ist, daß die  $\beta_i^*$ -Werte mit wachsendem  $\dot{\varphi}_0$  abnehmen. Außerdem ist noch die Summe aller  $\beta_i^*$  aufgetragen, die angibt mit welchem Gesamtanteil an verzögerten Neutronen der Ersatzreaktor arbeitet. In

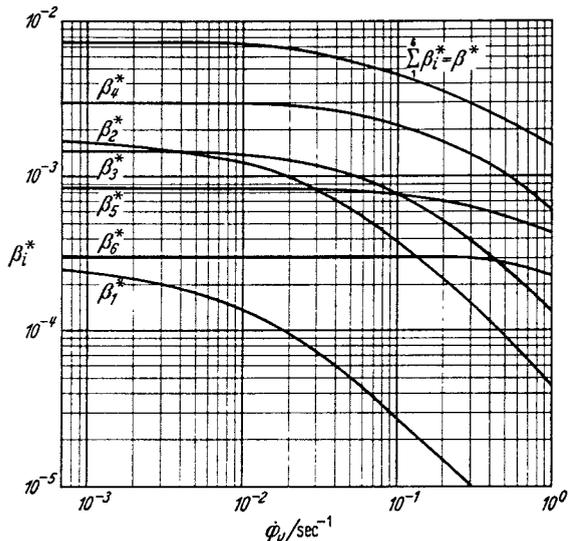


Abb. 1. Die Relativanteile  $\beta_i^*$  der verzögerten Neutronen im Ersatzreaktor über der stationären reziproken Periode  $\dot{\varphi}_0$ .

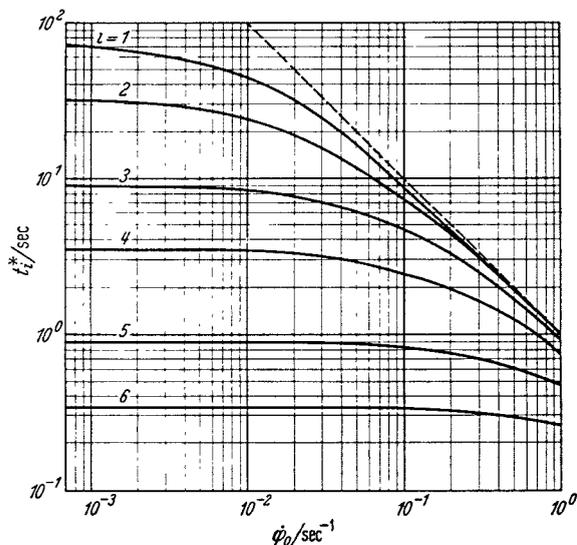


Abb. 2. Die Zeitkonstanten  $l_i^*$  der verzögerten Neutronen im Ersatzreaktor über der stationären reziproken Periode  $\dot{\varphi}_0$ .

$\Delta \dot{\varphi}$  mit kleiner aber endlicher Amplitude schwankt. Für die zeitlich veränderlichen Anteile ergibt sich:

$$l_0 \Delta \dot{\varphi} = \varrho_0 + \sum_i \lambda_i \Delta X_i, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{X}_i &= -(\lambda_i + \dot{\varphi}_0) \Delta X_i - \Delta \dot{\varphi} X_{i0} \\ &\quad - \Delta \dot{\varphi} \Delta X_i + \overline{\Delta \dot{\varphi} \cdot \Delta X_i}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die letzte Gleichung ist wegen des Terms  $\Delta \dot{\varphi} \cdot \Delta X_i$ , nicht linear. Solange  $\Delta X_i \ll X_{i0}$  kann dieses Glied vernachlässigt werden, d.h. aber, solange  $\Delta \dot{\varphi} / \dot{\varphi}_0$  hinreichend klein ist. Für diesen Fall möge die Gl. (9)

Abb. 2 ist der Verlauf der rez. Zerfallskonstanten  $\lambda_i^*$  d.h. also die entsprechenden Zeitkonstanten  $t_i^*$  aufgetragen. Die Zeitkonstanten nehmen ebenfalls mit wachsendem  $\dot{\varphi}_0$  ab.

Beide Charakteristika, nämlich die Abnahme von  $\beta_i^*$  und die Zunahme von  $\lambda_i^*$  bei größer werdender mittlerer rez. Periode, bedeuten eine Vergrößerung der Beschreibungsfunktion [Gl. (15)] für wachsende mittlere rez. Periode  $\dot{\varphi}_0$ . Das zeigt sich mathematisch in der Abnahme des Nenners der Gl. (15).

Abb. 3 bringt die Beschreibungsfunktion eines Reaktors bei zwei verschiedenen mittleren rez. Perioden und verschwindender Amplitude der Reaktivitätsänderung; aufgetragen sind allerdings nicht direkt die Beschreibungsfunktionen, sondern ihr negativer rez. Wert, was zur Stabilitätsbetrachtung günstig ist. Die entsprechenden Beschreibungsfunktionen für den Logarithmus des Neutronenflusses sind außerdem auch eingezeichnet. Aus den Kurvenverläufen wird evident, daß der Betrag der Beschreibungsfunktion für einen überkritischen Reaktor stark zunimmt. (Man beachte, daß Abb. 3 den reziproken Wert der Beschreibungsfunktion angibt!) Der Grenzwert dem sie für  $\dot{\varphi}_0 \rightarrow +\infty$  zustrebt ist  $1/l_0$  d.h. gleich der Beschreibungsfunktion eines Reaktors ohne verzögerte Neutronen.

Gl. (15) gibt auch in der ersten Näherung an, wie durch das Auftreten von endlichen Amplituden in  $\Delta\dot{\varphi}$  die Beschreibungsfunktionen sich ändern. Sie werden durch die endlichen Amplituden verkleinert, da sich der Nenner vergrößert. Der physikalische Hintergrund für dieses Verhalten wird in Gl. (12) sichtbar. Dort ergibt sich, daß die  $X_{i0}$  mit wachsender Amplitude  $|\Delta\dot{\varphi}|$  bei konstanter rez. stat. Periode  $\dot{\varphi}_0$  größer werden. Damit aber  $\dot{\varphi}_0$  konstant bleibt, muß die rechte Seite von Gl. (7a) konstant bleiben, was bei größer werdenden  $X_{i0}$  nur dadurch erreicht wird, daß  $\varrho_0$  kleiner wird. Der Reaktor ist dann weniger kritisch. Seine Beschreibungsfunktion wird kleiner.

Die Verkleinerung der Amplitude der Beschreibungsfunktion, die zumindest für kleine Amplituden der Reaktivität richtig ist, ist wesentlich, da es damit genügt, die Stabilität für gegen Null gehende Amplituden zu beweisen, um auch sicher zu sein, daß die Stabilität für kleine, aber endliche Amplituden gewährleistet ist. Voraussetzung dafür ist natürlich, daß

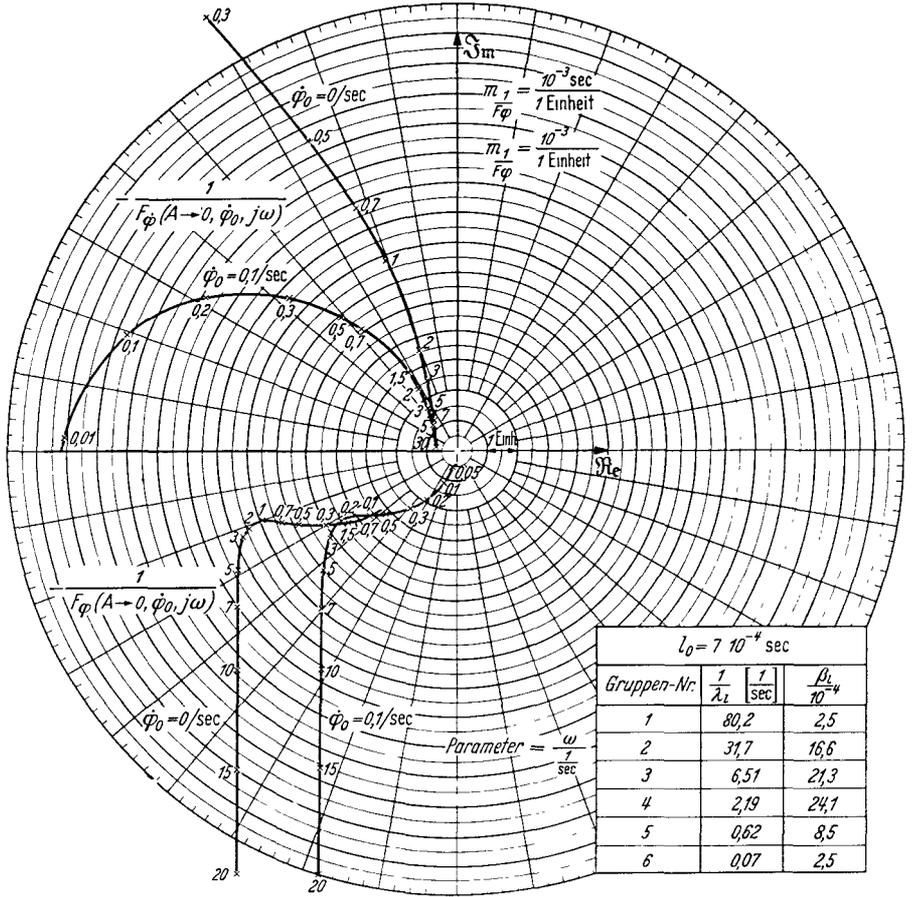


Abb. 3. Negative reziproke Beschreibungsfunktionen eines Reaktors für zwei stationäre reziproke Perioden  $\dot{\varphi}_0$ .

die zugehörige Regeleinrichtung keine den ganzen Regelkreis majorisierenden gegenteiligen Eigenschaften hat, was aber immer vermieden werden kann.

Das oben dargelegte Rechnungsverfahren wurde beim Entwurf der Regelung für den Karlsruher Forschungsreaktor FR 2 verwendet und hat sich dort bestätigt.

**Literatur:** [1] SMETS, H. B.: Non-linear analytical methods in nuclear power reactor kinetics. (Ein Bericht der beim Symposium über „Reactivity Feedback Mechanismus and Nuclear Reactor Stability“ der European Nuclear Agency in Zürich vorgelegt wurde.) Der Bericht enthält auch sehr viele weitere Literaturangaben.