KFK-113

KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

September 1962

KFK 113

Institut für Experimentelle Kernphysik

Untersuchungen über Auflösungsvermögen
und Raumwinkel von einlinsigen
Teilchen-Spektrometern
(Teil I.)

S. Galster und G. Hartwig

KERNREAKTOR
BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M.B.H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

September 1962 KFK 113

Institut für
Experimentelle Kernphysik

Untersuchungen über Auflösungsvermögen und Raumwinkel von einlinsigen Teilchen-Spektrometern

(Teil I)

S. Galster und G. Hartwig

Kernreaktor Bau- und Betriebs-Gesellschaft mbH
Karlsruhe

INHALTSVERZEICHNIS

I Einleitung

Bei hohen Teilchenimpulsen (Elektronimpuls ≈ 1 GeV/c) werden magnetische Spektrometer mit großem Raumwinkel schwer und teuer. Dies umsomehr, wenn gleichzeitig ein gutes Impulsauflösungsvermögen erreicht werden soll.

In dieser Untersuchung soll daher gezeigt werden, welche Spektrometertypen und welche geometrische Anordnung für ein bestimmtes Impulsauflösungsvermögen ($\frac{\Delta p}{p} \approx 1$ %) bei fester Magnetöffnung den größten Raumwinkel liefert und umgekehrt. Es werden nur einlinsige Spektrometer behandelt, da diese im allgemeinen das geringste Gewicht und gegenüber mehrlinsigen Systemen geringere Korrekturen hinsichtlich der Randfelder besitzen.

Spezielle Spektrometer wurden bereits in verschiedenen Arbeiten z.B. [1] bis [4] beschrieben und diskutiert. Im Gegensatz dazu sollen in der vorliegenden Arbeit Spektrometereigenschaften mittels allgemeiner Formeln für Raumwinkel und Impulsauflösungsvermögen für gerade Quadrupole und für gekrümmte Magnete in linearer Theorie diskutiert werden.

1) Siegbahn K. Beta-and-Gamma-Ray Spectroscopy
2) Hand L. N. und W. K. Panofsky: Rev. Sc. Instr. 30, 927 (1959)
3) Wilson R. R. et al.: Nature 188, 94 (1960)
4) Snyder C. W. et al.: Rev. Sc. Instr. 21, 852 (1950)

II Magnetfeld und Teilchentrajektorien

Die Bahnen von Elektronen, die aus verschiedenen Targetpunkten mit verschiedenen Anfangssteigungen emittiert werden und ein Magnetfeld und feldfreien Raum durchlaufen, sollen berechnet werden.

Für die Bewegungsgleichung von Elektronen in einem Quadrupolfeld (konstanter Feldgradient) ist in linearer Theorie eine analytische Lösung möglich.

Bei Ablenkmagneten mit einem Magnetfeld der Form: $B = B_o \left(\frac{\varrho}{\varrho_o}\right)^{-n}$ kann man in der Nähe des Sollkreises ϱ_o ebenfalls eine analytische Lösung der Bewegungsgleichung angeben.[5] Dabei ist B_o die Feldstärke am Sollkreis und n der Feldindex.

$n = o$ bedeutet ein homogenes Feld

$1 > n > o$ bedeutet ein vertikal und horizontal fokussierendes Feld

$n < o$ bedeutet ein Feld, das in einer Richtung fokussiert und senkrecht dazu defokussiert.

Zur Beschreibung der Teilchenbahnen wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt, dessen z-Achse beim geraden Quadrupol mit der Magnetachse identisch ist. Bei Ablenkmagneten wird die z-Achse so mitgedreht, daß sie stets mit dem Mittelstrahl des Sollimpulses p_o zusammenfällt. (vergl. Fig. 1 und 2)

Die y-Achse liegt in der Ablenkebene (Fokussierungsebene) senkrecht zur z-Achse.

---

[5] Kerst und Serber Phys. Rev. 60, 771 (1942)

Die x-Achse (beim Quadrupol defokussierende Richtung) steht senkrecht auf der Fokussierungsebene.

Innerhalb der oben beschriebenen Magnetfelder (gerader Quadrupol, gekrümmter Magnet) erhält man in der Nähe der z-Achse für die voneinander linear unabhängigen x- und y-Komponenten der Trajektorien Gleichungen von gleichem Typus. [6]

$$x_e = x_a \cos ß_x L + x_a' ß_x^{-1} \sin ß_x L \qquad (2,3)$$

$$y_e = y_a \cos ß_y L + y_a' ß_y^{-1} \sin ß_y L \qquad (2,4)$$

Bei geradem Quadrupol ist:

$$iß_x = ß_y = \sqrt{\frac{\text{grad } B}{P}}\, . \qquad (2,5)$$

Für Ablenkmagnete, bei denen in y-Richtung die Krümmung berücksichtigt werden muß, gilt:

$$ß_x = \frac{\sqrt{n}}{\varrho} \qquad (2,6a)$$

$$ß_y = \frac{\sqrt{1-n}}{\varrho}\, . \qquad (2,6b)$$

Die gestrichenen Größen sind Ableitungen nach z (Steigungen der Teilchenrichtung zur Magnetachse). Der Index a bezeichnet die Koordinaten bzw. Steigungen am Magnetanfang, der Index e am Magnetende, L ist die effektive Magnetlänge am Sollkreis, die wegen der Randfelder etwas größer ist, als die wirkliche Magnetlänge L_g. [+)]

---

[6] Penner, S. Internal Report, NBS 1958

[+)] $L \cong L_g + 0{,}3d$ (d ist der Polschuhabstand).

Obige Gleichungen sind gute Näherungen für achsennahe Trajektorien, d.h.

1) x'_a und $y'_a \ll 1$

2) $\frac{x_a}{\varrho}$ und $\frac{y_a}{\varrho} \ll 1$ bei Ablenkmagneten mit Krümmungsradius ϱ.

Befinden sich Target und Zähler außerhalb des Magnetfeldes, so lassen sich die Gesamttrajektorien aus den Trajektorien im feldfreien Raum und im Magnetfeld mit Hilfe von Matrizen [6] berechnen (Siehe Anhang).

Für einen festen Impuls p_o lauten die Komponenten der Gesamttrajektorien für Teilchen aus dem Targetpunkt $(x_1 \, , \, y_1)$ mit den Steigungen $(x'_1, \, y'_1)$:

$$x_2 = Ax_1 + Bx'_1 \qquad (2,7a)$$

$$y_2 = ay_1 + by'_1 \qquad (2,7b)$$

x_2, y_2 sind die Koordinaten in der Zählerebene (siehe Abb. 1). Die Koeffizienten A, B, a und b enthalten den Impuls p_o, die effektive Magnetlänge L, die Magnetparameter $ß_x$, $ß_y$ und die feldfreien Strecken s_1 und s_2.[+)]

$$A = \cos ß_x L - s_2 ß_x \sin ß_x L \qquad (2,8)$$

$$B = (s_1+s_2) \cos ß_x L - (s_1 s_2 ß_x - \frac{1}{ß_x}) \sin ß_x L \qquad (2,9)$$

$$a = \cos ß_y L - s_2 ß_y \sin ß_y L \qquad (2,1o)$$

$$b = (s_1+s_2) \cos ß_y L - (s_1 s_2 ß_y - \frac{1}{ß_y}) \sin ß_y L \qquad (2,11)$$

+) Die Koeffizienten gelten für Sektorfelder ohne Anstellwinkel

Für einen vom Sollimpuls p_o abweichenden Impuls $(p_o \pm \Delta p)$ lauten Gleichung (2,7a) und (2,7b), wenn man sie nach Taylor bis zum 1. Glied entwickelt:

$$x_2\,(p_o \pm \Delta p) = [A(p_o) \pm \frac{dA}{dp}\,\Delta p]\; x_1 + [B(p_o) \pm \frac{dB}{dp}\Delta p]\; x_1' \qquad (2,12a)$$

$$y_2\,(p_o \pm \Delta p) = [a(p_o) \pm \frac{da}{dp}\,\Delta p]\; y_1 + [b(p_o) \pm \frac{db}{dp}\Delta p]\; y_1' \pm c\Delta p \qquad (2,12b)$$

Der Term $c\,\Delta p$ beschreibt bei Ablenkmagneten die impulsabhängige Dispersion des Mittelstrahles mit einem Impuls $p \neq p_o$ von der z-Achse in y-Richtung.

$$c = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{1}{1-n}\,[\varrho_o\,(1-\cos \beta_y\, L) + s_2 \sin \beta_y\, L] \qquad (2,13)$$

Der Koeffizient c wächst stark mit wachsendem Ablenkwinkel $\alpha = \frac{L}{\varrho_o}$ +), sodaß bei gekrümmten Spektrometern mit großem Ablenkwinkel die achsensymmetrischen Terme $\frac{da}{dp}\Delta p\, Y_1$ und $\frac{db}{dp}\,\Delta p\, y_1'$ gegen $c\,\Delta p$ zu vernachlässigen sind. Dagegen ist beim geraden Quadrupol mit $\alpha = o$ auch stets $c = o$.

III Der Raumwinkel

Kennt man die Gleichung der Trajektorien, so kann man mit Hilfe der extremen Bahnen der Teilchen, die gerade noch durch das Spektrometer gelangen, den Raumwinkel als Funktion der Spektrometerparameter berechnen.

Die Spektrometerparameter sollen dann so gewählt

+) Das Argument $\beta_y L$ läßt sich mit Gleichung (2,6) umschreiben: $\beta_y L = \sqrt{1-n}\,.\,\frac{L}{\varrho_o} = \sqrt{1-n}\,\alpha$.

werden, daß der Raumwinkel bei vorgegebener Magnetöffnung möglichst groß ist.

Für die verschiedenen Spektrometertypen (gerader Quadrupol, gekrümmte Magnete) läßt sich ein einheitlicher Ausdruck für den Raumwinkel Ω angeben, für den Fall, daß

1) das Target viel kleiner als die Magnetöffnung ist,
2) die Steigungen x_1', $y_1' \ll 1$ sind und
3) der Zähler mindestens so groß wie das Targetbild ist.

$$\Omega = 4\, X_1' \cdot Y_1' \qquad (3,1)$$

X_1' und Y_1' sind die größten Steigungen der Trajektorien, die man aus Gl. (2,7 a-b) für die extremen durch die Polschuhabstände bzw. Blenden d_x, d_y +) begrenzten Bahnen erhält.

$$2\, X_1' = \frac{d_x}{s_1 \cos \beta_x L_{(x)} + \frac{1}{\beta_x} \sin \beta_x L_{(x)}} \qquad (3,2a)$$

$$2\, Y_1' = \frac{d_y}{s_1 \cos \beta_y L_{(y)} + \frac{1}{\beta_y} \sin \beta_y L_{(y)}} \qquad (3,2b)$$

In einer Fokussierungsebene ist $L_{(x)}$ bzw. $L_{(y)}$ die Strecke vom Magnetanfang bis an die Stelle, wo die Steigung der Trajektorien Null wird. $y' = \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dL} = 0$ ist gleichbedeutend mit der Beziehung :

+) Um später das Impulsauflösungsvermögen übersichtlich berechnen zu können, wird eine rechteckige wirksame Spektrometeröffnung angenommen.

$$\operatorname{tg} \beta_y L_y = \frac{1}{s_1\ \beta_y} \qquad (3,3)$$

die man aus Gleichung (2,7b) erhält für $s_2=0$ und $y_1=0$.

In einer nicht fokussierenden oder defokussierenden Ebene ist $L_{(x)}$ bzw. $L_{(y)}$ identisch mit der Magnetlänge L.

Bei der Betrachtung des Raumwinkels mögen drei Spektrometertypen unterschieden werden:

α)	Doppelfokussierende Spektrometer:	$1 > n > o$
ß)	homogene Magnete:	$n = o$
γ)	Synchrotronmagnete und Quadrupole:	$n < o$

Für $n < o$ wird $\beta_x = \sqrt{\frac{n}{\varsigma}}$ imaginär, d.h. die Winkelfunktionen in Gl. (3,2a) werden hyperbolisch. Rechnet man Gl. (3,1) mittels der Gleichungen (3,2a) und (3,2b) für die drei obigen Fälle aus, so erhält man nach Umformung:

$$\text{zu } \alpha)\ \Omega = \frac{d_x\ \beta_x}{\sqrt{s_1^2\ \beta_x^{\ 2}+1}} \cdot \frac{d_y\ \beta_y}{\sqrt{s_1^{\ 2}\ \beta_y^{\ 2}+1}} \qquad (3,4a)$$

$$\text{zu } \beta)\ \Omega = \frac{d_x}{(s_1 + L)} \cdot \frac{d_y\ \beta_y}{\sqrt{s_1^{\ 2}\ \beta_y^{\ 2}+1}} \qquad (3,4b)$$

$$\text{zu } \gamma)\ \Omega = \frac{2 d_x\ \beta_x\ e^{-\beta_x L}}{s_1\ \beta_x + 1} \cdot \frac{d_y\ \beta_y}{\sqrt{s_1^{\ 2} \beta_y^{\ 2}+1}} \qquad (3,4c)$$

+) Bei der Umformung der hyperbolischen Funktion in Exponentialfunktionen wurde $e^{-\beta_x L}$ gegenüber $e^{+\beta_x L}$ vernachlässigt, da $\beta_x L$ meist von der Größenordnung 1 ist.

Die Diskussion der Gln. (3,4) ergibt für einen festen Impuls p_o hinsichtlich der Optimalisierung des Raumwinkels:

a) Die Magnetöffnung $d_x \cdot d_y$ soll möglichst groß, der Targetabstand s_1 möglichst klein sein.

b) Die Magnetlänge L soll, wie Gl. (3,4b) und (3,4c) zeigen, klein gewählt werden.
Bei doppelfokussierenden Spektrometern spielt die Magnetlänge L keine Rolle. (3,4a)

c) Aus Gl. (3,4a,b) sieht man sofort, daß der Raumwinkel mit größer werdendem $ß_x$, $ß_y$ wächst.
Etwas schwieriger ist die Diskussion der Gl. (3,4c), da hier $ß_x$ zusätzlich im Exponenten steht. Explizite Rechnungen zeigen jedoch, daß unter Berücksichtigung der Bedingung für eine Punkt - Punktabbildung +) bei fest vorgegebenen Abständen s_1, s_2 das Argument $ß_x$ L bei Variation von $ß_x$ sich wenig ändert. Somit wächst auch hier der Raumwinkel mit größer werdendem $ß_x$, $ß_y$. Die Werte von $ß_x$, $ß_y$ sind bei einer bestimmten Magnetöffnung gegeben durch den Gradienten des Magnetfeldes, der umso größer ist, je höher die Feldstärke und je größer der negative Wert des Feldindex n ist. Die maximal erreichbare Feldstärke ist durch die Eisensättigung oder Generatorleistung beschränkt.

d) Bei Gl. (3,4c) ist noch der Fall interessant, daß der Raumwinkel bei einem vorgegebenem Magneten

---

+) Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß die Punkt-Punktabbildung bei kleinem Target günstig ist, wenn man einen großen Raumwinkel und gutes Impulsauflösungsvermögen erreichen will.

der Länge L optimalisiert werden kann. Durch Variation von ß (wobei angenommen wird, daß $|ß_x| \approx |ß_y| = ß$ sei) erhält man für $ß\, L \approx 1$ ein Maximum des Raumwinkels für die feste Magnetlänge L [7)]

IV Das Impulsauflösungsvermögen

Bei geraden Quadrupolen tritt eine longitudinale Impulsdispersion entlang der z-Achse auf.
Bei gekrümmten Spektrometern kommt dazu die transversale Impulsdispersion senkrecht zur z-Achse. Für gekrümmte und gerade Spektrometer kann man das Impulsauflösungsvermögen aus den Trajektoriengleichungen (2,12a,b) berechnen. Anhand von abgeleiteten Formeln und berechneten Kurven wird diskutiert, wie die Parameter eines Spektrometers zu wählen sind, um ein gutes Impulsauflösungsvermögen zu erreichen. Das Impulsauflösungsvermögen hängt ab von den Parametern s_1, s_2, ß ,bzw.(n, ϱ_c) und L, außerdem von der Targetgröße $2X_1 \cdot 2Y_1 \cdot 2Z_1$,
der Zählergröße $2X_2 \cdot 2Y_2 \cdot 2Z_2$ und den extremen Steigungen X_1', Y_1'.

a) Die Definition des Impulsauflösungsvermögens R

Die Figur 3 zeigt ein berechnetes, charakteristisches Impulsspektrum, das man erhält, wenn man das Magnetfeld konstant läßt und die Zählrate N(p) für eine monoenergetische Linie als Funktion des Impulses p mißt [+)]. Da die Zählrate um den Sollimpuls p_0 monoton auf Null absinkt,

---

7) Schopper, H. F. Internal Report, Cornell University 1961.

+) Eine kleine Blende soll (z. B. beim geraden Quadrupol) Mehrfachdurchgänge durch die Mittelebene und Direktstrahlung absorbieren.

darf man das Auflösungsvermögen durch die Halbwertsbreite p_H definieren, für die gilt:

$$N\left(p_o \pm \frac{\Delta p_H}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot N(p_o) \qquad (4,1)$$

Innerhalb eines Bereiches $\frac{\Delta p}{p}$ von wenigen Prozenten fällt die Zählrate um den Sollimpuls p_o linear ab. Bei den hier behandelten Spektrometern mit einem Impulsauflösungsvermögen $\frac{\Delta p_H}{p}$ von wenigen Prozenten genügt daher eine Taylor-Entwicklung von Gl. (4,1) um den Sollimpuls p_o bis zum 1. Glied. Man erhält dann nach Umformung und Division durch p_o:

$$R = \frac{\Delta p_H}{p_o} = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{N(p_o)}{(\partial N(p)/\partial p)_{p=p_o}} \qquad (4,2)$$

Das sei die Definitionsgleichung für das Impulsauflösungsvermögen.

b) <u>Die Berechnung des Impulsauflösungsvermögens bei räumlich ausgedehntem Zähler und Target</u>

Die Zählrate $N(p)$ läßt sich allgemein als Integral der Teilchendichte D schreiben, die den Zähler trifft:

$$N(p) = \int_{-X_2(Z_2)}^{+X_2(Z_2)} \int_{-Y_2(Z_2)}^{+Y_2(Z_2)} D[x_2(p), y_2(p)]\,dx_2\,dy_2 \,. \qquad (4,3)$$

x_2, y_2 und z_2 sind die Koordinaten des Zählers von dessen Mittelpunkt aus gerechnet. Die z-Ausdehnung des Zählers entspricht einer effektiv vergrößerten Zählerausdehnung in x- und y-Richtung.

Aus diesem Grunde wurde in Gl. (4,3) die Integration über die z-Ausdehnung des Zählers (bzw. Targets) durch erweiterte Integrationsgrenzen $X_2^{(Z_2)}$, $Y_2^{(Z_2)}$ ersetzt. Der Index (Z_2) soll die Berücksichtigung der z-Ausdehnung vom Zähler (bzw. Target) andeuten. Wegen der linearen Unabhängigkeit der x- und y-Komponenten der Teilchentrajektorien kann man Gl. (4,3) schreiben in der Form:

$$N(p) = \int_{-X_2^{(Z_2)}}^{+X_2^{(Z_2)}} D_x\,[x_2(p)]\,dx_2 \cdot \int_{-Y_2^{(Z_2)}}^{+Y_2^{(Z_2)}} D_y[y_2(p)]\,dy_2 =$$

$$= N_x^{(Z_2)}(p) \cdot N_y^{(Z_2)}(p) \qquad (4,4)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4,4) in (4,2) erhält man nach einfacher Rechnung für das gesamte Impulsauflösungsvermögen:

$$1/R = 1/R_x^{(Z_2)} + 1/R_y^{(Z_2)} \qquad (4,5)$$

Dabei ist:

$$R_x^{(Z_2)} = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{N_x^{(Z_2)}(p_o)}{\partial N_x^{(Z_2)}(p)/\partial p} = R_x + R_{zx} \quad (4,6)$$

$$R_y^{(Z_2)} = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{N_y^{(Z_2)}(p_o)}{\partial N_y^{(Z_2)}(p)/\partial p} = R_y + R_{zy} \quad (4,7)$$

R_x bzw. R_y ist das Impulsauflösungsvermögen in x-bzw. y-Richtung ohne Berücksichtigung der z-Ausdehnung von Target und Zähler. Diese wird in linearer Näherung durch die Glieder R_{zx} und R_{zy} ausgedrückt. Bei einlinsigen Spektrometern ist $R_x > R_y$, meist jedoch $R_x \gg R_y$.

Im Folgenden sollen nun die Größen R_y, R_x und R_{zy} (bzw. R_{zx}) einzeln berechnet werden.

c) Die Berechnung von R_y in linearer Näherung

Die Integration der Gl. (4,7) ist in allgemeiner Form schwierig durchführbar. Die Berechnung wird daher graphisch durchgeführt, indem man die Dichteverteilung $D_y[y_2(p)]$ in y-Richtung der Zählerfläche für verschiedene Impulse p aufträgt. Gesucht wird dann nach Gl. (4,1) diejenige Dichteverteilung $D_y[y_2(p)]$, die im Zähler gerade die Hälfte der Zählrate $N(p_o)$ beim Sollimpuls p_o ergibt.

Aus der Trajektoriengleichung (2,12b)

$$y_2=a(p_o)y_1+b(p_o)y_1'+(\frac{\partial a}{\partial p}\, y_1+ \frac{\partial b}{\partial p}\, y_1'+c)\,\Delta p \qquad (4,8)$$

sieht man, daß ein Zählerabschnitt y_2 bis y_2+dy_2 von Teilchen aus verschiedenen Targetpunkten y_1 mit jeweils verschiedenen Steigungen y_1' und unterschiedlichen Impulsen getroffen werden kann. Wählt man die Spektrometeranordnung so, daß einer der Koeffizienten $a(p_o)$ oder $b(p_o)$ Null wird, dann erhält man eine für den Sollimpuls p_o eindeutige Zuordnung von Targetpunkten y_1 bzw. Steigungen y_1' zu einer Zählerkoordinate y_2. Das bedeutet, daß die Dichte $D_y[y_2(p_o)]$ in linearer Theorie innerhalb der Targetabbildung $2a(p_o)Y_1$ bzw. $2b(p_o)Y_1'$ konstant ist, wenn außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Eine isotrope Teilchenemission von jedem Targetpunkt.
2) Eine homogene Teilchenemission von einem rechteckigen Target.+)
3) Eine rechteckige effektive Spektrometeröffnung.+)
4) Die Anfangssteigungen $y_1', (x_1')$ müssen $\ll 1$ sein.

Physikalisch bedeutet die Bedingung $a(p_o)=o$, daß gleiche Steigungen in einem Punkt fokussiert werden. Man benützt diese Forderung zur Fokussierung eines ausgedehnten, sehr schwach divergenten Strahls.

Im Fall $b(p_o)=o$ erhält man eine Punkt-Punkt-abbildung. Diese Bedingung benützt man zur Fokussierung eines divergenten Strahls von einem kleinen Target. Wie später gezeigt wird, liefert je nach Targetgröße und Strahldivergenz eine der beiden Bedingungen auch das beste erreichbare Auflösungsvermögen.

Da man den Fall $a(p_o)=o$ nur bei geringer Divergenz und großem Target wählt, kann man in Gl. (4,8) meist $\frac{\partial b}{\partial p} Y_1'$ gegen $\frac{\partial a}{\partial p} y_1$ vernachlässigen. Für den Fall $b(p_o)=o$ gilt eine ähnliche Überlegung für ein kleines Target und große Divergenz. $(\frac{\partial b}{\partial p} y_1' \gg \frac{\partial a}{\partial p} y_1)$

+) Eine nicht rechteckige Targetfläche und Spektrometeröffnung würde bewirken, daß die sonst unabhängigen x- und y-Komponenten der Teilchendichte D über die Begrenzungskurven von Targetfläche und Spektrometeröffnung gekoppelt werden.

Wie man aus Gl. (4,3) sieht, kann man die Impulsdispersion in einem Magnetfeld in zweifacher Weise zur Impulsanalyse benutzen:

1) Der Ablenkterm $c\Delta p$ beschreibt eine Verschiebung der Targetabbildung in y-Richtung bei Variation des Impulses p (transversale Dispersion).
2) Die achsensymmetrischen Terme $\frac{\partial a}{\partial p} y_1 \Delta p$ und $\frac{\partial b}{\partial p} y_1' \Delta p$ beschreiben eine Verschmierung des Targetbildes für Impulse $p \neq p_o$ in der Zählerebene (longitudinale Dispersion). Z.B. bei der Bedingung $b(p_o)=o$ (und $\frac{\partial a}{\partial p} Y_1 \ll \frac{\partial b}{\partial p} Y_1'$) wird ein Targetpunkt als Strich der Breite $2 \frac{\partial b}{\partial p} Y_1' \Delta p$ abgebildet. Die Abbildung des gesamten Targets ergibt dann in linearer Theorie eine trapezförmige Verteilung der Dichte D_y.

In Figur 4 werden beide Fälle für $b(p_o)=o$ gezeigt, wobei jeweils für den Sollimpuls p_o eine konstante Teilchendichte D_y in y-Richtung der Zählerebene angenommen wurde.
Außerdem wurde vorausgesetzt, daß die Teilchenemission für alle Impulse p gleich ist. Die Berechnung von R_y soll durchgeführt werden für Spektrometer mit reiner transversaler und reiner longitudinaler Impulsdispersion. Außerdem wird ein Ausdruck angegeben, der beide Dispersionen gleichzeitig enthält.

1) <u>Die transversale Dispersion</u>

Bei Spektrometern mit großem Ablenkwinkel trägt nur der Ablenkterm c zum Impulsauflösungsvermögen bei.
Die Dichteverteilung in y-Richtung ist für die Impulse p_o und $p_o \pm \frac{\Delta p_H}{2}$ rechteckig. Wie man aus Figur 4a sofort erkennt, fällt dann die Hälfte der Teilchenzahl $N(p_o + \frac{\Delta p_H}{2})$ in die Zählerhöhe $2\ Y_2$ wenn gilt:

$$c\frac{\Delta p_H}{2} = Y_2 \tag{4,9}$$

Dabei erhält man:

$$R_y = \frac{2Y_2}{p_o c}\ ; \quad \text{mit } Y_2 \geq aY_1 \text{ bzw. } bY_1' \tag{4,10}$$

Falls man die Zählerdimension Y_2 gerade gleich der Targetabbildung $a(p_o)Y_1$ bzw. $b(p_o)Y_1'$ für $b(p_o)=o$ bzw. $a(p_o)=o$ wählt, erhält man das beste mit diesen Spektrometer erreichbare Impulsauflösungsvermögen ohne Zählratenverlust. Ein kleinerer Zähler verbessert, wie man aus Figur 4a sieht, das Impulsauflösungsvermögen nicht, man verliert nur an Zählrate.

2) Die longitudinale Dispersion

Bei Spektrometern mit sehr kleinem Ablenkwinkel und beim geraden Quadrupol wird das Auflösungsvermögen durch die achsensymmetrischen Terme $\frac{\delta a}{\delta p}\, y_1 \Delta p$ und $\frac{\delta b}{\delta p}\, y_1' \Delta p$ bestimmt. Die Berechnung wird übersichtlich, wenn man die Fälle $a(p_o)=o$ bzw. $b(p_o)=o$ getrennt betrachtet mit der meist erfüllten Zusatzannahme:

$$\frac{\delta a}{\delta p}\, Y_1 \gg \frac{\delta b}{\delta p}\, Y_1' \quad \text{(breiter, schwach divergenter Strahl)}$$

bzw.

$$\frac{\delta b}{\delta p}\, Y_1' \gg \frac{\delta a}{\delta p}\, Y_1 \quad \text{(divergenter Strahl von einem kleinen Target).}$$

Die Dichte D_y hat wegen der achsensymmetrischen Terme für den Impuls $p \neq p_o$ eine trapezförmige Verteilung. Wie man aus Figur 4b sieht, fällt dann die Hälfte der Zählraten $N(p_o \pm \frac{\Delta p_H}{2})$ ausserhalb des Zählers $2Y_2$, wenn gilt:

$$\frac{\delta b}{\delta p} \cdot \frac{\Delta p_H}{2}\, Y_1' = 2Y_2 \tag{4,11}$$

für $b(p_o)=o$ und analog für $a(p_o)=o$.

Daraus erhält man für das Impulsauflösungsvermögen:

Für den Fall $a(p_o)=o$:

$$R_y = \frac{2Y_2}{0{,}5p_o \cdot \frac{\delta a}{\delta p} Y_1}^{+)} \qquad \text{mit } Y_2 \geq b(p_o)y_1' \qquad (4,12)$$

Für den Fall $b(p_o)=o$:

$$R_y = \frac{2Y_2}{0{,}5p_o \cdot \frac{\delta b}{\delta p} Y_1'}^{+)} \qquad \text{mit } Y_2 \geq a(p_o)Y_1 \qquad (4,13)$$

Die Ausdrücke für $\frac{\delta a}{\delta p} = \frac{\delta a}{\delta \beta} \cdot \frac{\delta \beta}{\delta p}$ bzw. $\frac{\delta b}{\delta p} = \frac{\delta b}{\delta \beta} \cdot \frac{\delta \beta}{\delta p}$

berechnet man aus den Gleichungen (2,10)(2,11)(2,5) und (2,6b).
Man erhält z. B. :

$$\frac{\delta b}{\delta p} = \left\{ \left[L\ (s_1 + s_2) + s_1 s_2 + \frac{1}{\beta^2} \right] \sin\beta L + L(s_1 s_2 \beta - \frac{1}{\beta})\cos\beta L \right\} \frac{\beta}{2p};$$

Für $Y_2 = b(p_o)Y_1'$ bzw. $a(p_o)Y_1$ erhält man wiederum das beste mit diesem Spektrometer erreichbare Impulsauflösungsvermögen ohne Zählratenverlust. Ein kleinerer Zähler verbessert, wie man aus Figur 4c sieht, das Impulsauflösungsvermögen nicht, man verliert nur an Zählrate.
Eine ausgedehnte Zentralblende verbessert das Impulsauflösungsvermögen geringfügig. Wird durch eine Zentralblende ein Strahlenbereich zwischen 0 und $Y_{1\ \mathrm{Blende}}$ ausgeblendet, dann ist Gl. (4,12) durch

+) Für die Gleichungen (4,12) und (4,13) wurden eine sehr dünne Zentralausblendung angenommen, die bewirkt, dass keine direkten Teilchenstrahlen und keine Teilchen, die im Magneten mehrfach durch die Mittelebene schwingen, den Zähler treffen.

folgenden Ausdruck zu ersetzen:

$$R_y = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{2Y_2}{0{,}5 \frac{\partial a}{\partial p} (Y_1 + Y_{1Blende})} , \quad Y_2 \geq b\, Y_1 \qquad (4{,}14)$$

und analog gilt statt Gl. (4,13), wenn ein Winkelbereich $Y'_{1Blende}$ bis Y'_1 durch das Spektrometer gelangt:

$$R_y = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{2Y_2}{0{,}5 \frac{\partial b}{\partial p} (Y'_1 + Y'_{1Blende})} , \quad Y_2 \geq a\, Y_1 \qquad (4{,}15)$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, daß sich das Impulsauflösungsvermögen höchstens um den Faktor 0,5 verbessert, selbst wenn man bis auf die Extremstrahlen alles ausblendet (Siehe Figur 5).

3) Die longitudinale und transversale Dispersion sind von gleicher Größenordnung

Für den Fall $b(p_o)=o$ soll eine Abschätzung durchgeführt werden. Für den Fall $a(p_o)=o$ gilt eine analoge Betrachtung. Aus Figur 6 sieht man, daß der achsensymmetrische Term nur dann das Impulsauflösungsvermögen beeinflußt, wenn:

$$|c|\Delta p < \left|\frac{\partial b}{\partial p} Y'_1\right| \Delta p \qquad (4{,}16)$$

ist, denn erst dann liegt das schraffierte Dreieck außerhalb des Zählers. Die Fälle, bei denen sowohl longitudinale, als auch transversale Dispersion das Impulsauflösungsvermögen bestimmen, lassen sich als Kombination der beiden behandelten Extremfälle mit nur einer Art von Impulsdispersion darstellen:

$$R_y = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{2Y_2}{f_1 \cdot \left|\frac{\partial a}{\partial p} Y_1\right| + f_2 \cdot \left|\frac{\partial b}{\partial p} Y'_1\right| + |c|} , \quad Y_2 \geq a\, Y_1 \qquad (4{,}17)$$

Für reine Transversaldispersion ist $f_1=f_2=o$, für reine Longitudinaldispersion mit c=o ist $f_2=0,5$ mit der meist erfüllten Zusatzbedingung $(\frac{\partial a}{\partial p} Y_1 \ll \frac{\partial b}{\partial p} Y_1')$.
Im allgemeinen Fall ist f_2 ein Faktor zwischen o und 0,5. Den genauen Wert erhält man aus einer graphischen Darstellung, wie z.B. Figur 6.
Aus obiger Gleichung, die für einen Teilcheneinschuß symmetrisch zum Sollkreis gilt, sieht man, daß durch den achsensymmetrischen Term $\frac{\partial b}{\partial p} \Delta p\, Y_1'$ das Impulsauflösungsvermögen eines Ablenkmagneten verbessert wird.

d) Die Berechnung des Impulsauflösungsvermögen R_x in linearer Näherung

Senkrecht zur Ablenkebene existiert stets nur longitudinale Impulsdispersion.
Bei Spektrometern mit einem Feldindex $n=0,5 \rightarrow (\beta_x=\beta_y)$ existiert, wie man aus Gl. (2,7a) und (2,7b) sieht, für den Sollimpuls p_o die gleiche Fokussierung in x- und y-Richtung. Man kann daher analog zu den Gleichungen (4,12) und (4,13) für das Impulsauflösungsvermögen bei longitudinaler Impulsdispersion schreiben:

$$R_x = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{2X_2}{0,5 \frac{\partial A}{\partial p} X_1} \quad X_2 \geq B(p_o)X_1' \quad \text{für } A(p_o)=a(p_o)=o \qquad (4,18)$$

$$R_x = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{2X_2}{0,5 \frac{\partial B}{\partial p} X_1'} \,, \quad X_2 \geq A(p_o)X_1 \quad \text{für } B(p_o)=b(p_o)=o \qquad (4,19)$$

Die Größen $\frac{\partial A}{\partial p}$ bzw. $\frac{\partial B}{\partial p}$ kann man aus den Gleichungen (2,8) bzw. (2,9) berechnen.

Für einen Feldindex $n \neq 0,5$ ist es schwierig einen allgemeinen Ausdruck von R_x anzugeben, da bei einer Abbildungsbedingung der y-Komponenten (z.B. $b(p_o)=o$) nicht gleichzeitig eine analoge Bedingung für die X-Komponenten (z.B. $B(p_o)=o$) erfüllt ist. Bei Spektrometertypen, deren Feldindex $n < o$ ist, bleibt R_x stets sehr gross, da die Trajektorien in dieser Ebene divergent sind.

c) Die Berechnung von R_z in linearer Näherung

In den vorherigen Abschnitten wurde angenommen, dass Zähler und Target in z-Richtung keine Ausdehnung besitzen. Es soll nur der Zusatzterm R_{zy} berechnet werden, dar bei einem Zähler der Dicke $2Z_2$ zum Impulsauflösungsvermögen R_y hinzugefügt werden muss. Der Term R_{zx} ist von untergeordneter Bedeutung für das gesamte Impulsauflösungsverrögen, da meist $R_x \gg R_y$ ist.

Die Ausdehnung des Zählers (oder Targets) in z-Richtung entspricht einer effektiven Vergrösserung des Zählers in y-(bzw. x-) Richtung. Eine umständliche Herleitung liefert näherungsweise folgendes Ergebnis:

α) für den geraden Quadrupol:

$$R_{zy} = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{2Z_2Y_2'}{0,5 \cdot \frac{\delta b}{\delta p} Y_1'} \tag{4,20}$$

bei der Bedingung $b(p_o)=o$ und analog für $a(p_o)=o$.

β) für gekrümmte Magnete:

$$R_{zy} = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{Z_2Y_2'}{c} \tag{4,21}$$

Der Zähler obiger zwei Gleichungen stellt die effektive Vergrößerung der Zählerfläche dar, die der Zählerdicke $2Z_2$ entspricht. Y'_2 ist die extreme Steigung der Trajektorien auf der Zählerseite.+)

$$Y'_2=(\beta_y \sin\beta_y L)Y_1 +(s_1 \beta_y \sin\beta_y L + \cos\beta_y L)Y'_1 \qquad (4,22)$$

Ferner wurde angenommen, daß das Zählervolumen jeweils gleichgroß dem Targetbild ist. Meistens gibt man dem Zähler einen solchen parallelogrammförmigen Querschnitt, daß die Zählerdicke kaum eine Rolle spielt. Dann bleibt jedoch immer noch der Einfluß der Targetdicke. Bei den Gleichungen (4,2o), (4,21) ist dann die Zählerdicke $2Z_2$ durch die Abbildung T der Targetdicke $2Z_1$ zu ersetzen:

$$T = \frac{ds_2}{ds_1} \cdot 2Z_1 \qquad (4,23)$$

Den Ausdruck $\frac{ds_2}{ds_1}$ erhält man aus der Fokussierungsbedingung (4,27).

f) <u>Die Wahl der Parameter eines Spektrometers im Hinblick auf gutes Impulsauflösungsvermögen</u>

Die Gleichungen für das Impulsauflösungsvermögen wurden dargestellt als Funktionen der Parameter s_1, s_2, ß (ϱ_c und n) und L. Es soll nun diskutiert werden, wie diese Parameter zu wählen sind, um ein möglichst gutes Impulsauflösungsvermögen zu erreichen. Dabei habe der Zähler immer die Größe der Targetabbildung. In diesem Fall erhält man die größte Zählrate beim bestmöglichen Impulsauflösungsvermögen, wie in Abschnitt IVc) 1 gezeigt wurde.

+) Siehe Anhang 1

Ausserdem wählt man je nach Targetgrösse und Strahldivergenz hinsichtlich des Impulsauflösungsvermögens die günstigste Fokussierungsbedingung. Dazu sollen 4 Fälle unterschieden werden:

1) Für den Fall $a(p_o)=o$ sieht man aus Gl. (4,10) und (4,12), dass das Impulsauflösungsvermögen umso besser wird, je kleiner die extreme Steigung Y_1' und je grösser die Breite $2Y_1$ des Strahls ist.

2) Für den Fall $b(p_o)=o$ sieht man aus Gl. (4,10) und (4,13), dass umgekehrt das Impulsauflösungsvermögen umso besser wird, je kleiner das Target $(2Y_1)$ und je grösser die extreme Steigung Y_1' ist.

3) Die gleichzeitige Forderung $a(p_o)=b(p_o)=o$ ist physikalisch mit einer endlichen, reellen Fokussierungslänge nicht realisierbar.

4) Der Fall $a(p_o)\neq o$, $b(p_o)\neq o$ liefert ein schlechteres Impulsauflösungsvermögen als $a(p_o)=o$ oder $b(p_o)=o$. Bei den Extremfällen eines breiten Parallelstrahls, bzw. eines divergenten Strahls von einem Punkttarget ist dies sofort einzusehen. Im Anhang wird für ein endliches Target und eine endliche Divergenz der Beweis am Beispiel eines Ablenkmagneten gebracht. Ist das Impulsauflösungsvermögen bei $a(p_o)=o$ und $b(p_o)=o$ gleichgut, dann wird man den Fall $a(p_o)=o$ wählen, der eine geringere Magnetlänge L erfordert. Die Diskussion der Magnetparameter s_1, s_2, β, bzw. (ϱ_o, n) und L wird für die beiden günstigen Fälle 1) und 2) durchgeführt:

1) $a(p_o)=o$

α) Transversale Dispersion

Mit der Bedingung $a(p_o)=o$, die explizit

$$\mathrm{tg}\beta_y L = \frac{1}{s_2\beta_y} \tag{4,24}$$

lautet, kann man Gl. (4,10) umschreiben in der Form:

$$R_y = \frac{2\sqrt{1-n}}{\varrho_o} \cdot \frac{\varrho_o^2 + s_2^2\,(1-n)}{s_2(1-\sqrt{1-n})+\sqrt{\varrho_o^2+s_2^2\,(1-n)}}\, Y_1' \qquad (4,25)$$

Wie man aus dieser Beziehung leicht nachrechnen kann, wird das Impulsauflösungsvermögen umso besser, je kleiner s_2 und n gewählt werden. Der Targetabstand s_1 geht weder in die Abbildungsbedingung (4,24) noch in das Impulsauflösungsvermögen (4,25) ein. Die Magnetlänge ergibt sich aus Gl. (4,24).

β) Longitudinale Dispersion

Für das Impulsauflösungsvermögen beim geraden Quadrupol, das durch den Term $\frac{\delta a}{\delta p} \cdot Y_1$ bestimmt ist, erhält man aus Gl. (4,12) und (4,26) folgende Darstellung:

$$R_y = \frac{8(1+s_2^2\beta^2)}{\beta^2[s_2+L(1+s_2^2\beta^2)]} \cdot \frac{Y_1'}{Y_1} \qquad (4,26)$$

Man sieht aus Gl. (4,26), dass das Impulsauflösungsvermögen umso besser wird, je kleiner der Zählerabstand s_2 und je grösser die Magnetlänge L und die Grösse β ist. Wiederum ist der Targetabstand s_1 nicht in Gl. (4,26) enthalten.

2) Bedingung $b(p_o)=o$

α) Transversale Dispersion

Die Diskussion der Gl. (4,10) für das Impulsauflösungsvermögen bei Ablenkmagneten wird unübersichtlich, da gleichzeitig die gegenüber $a(p_o)=o$ kompliziertere Bedingung für $b(p_o)=o$ gelten muss, die explizit lautet:

$$\mathrm{tg}\beta_y L = \frac{(s_1+s_2)\beta_y}{s_1\ s_2\beta_y^{\ 2}-1} \qquad (4{,}27)$$

Die Diskussion wird dann einfach, wenn man die Extremfälle $s_1=o$, $s_1\to\infty$, $s_2=o$ und $s_2\to\infty$ betrachtet. Eine explizite Rechnung zeigt, daß dieselben Aussagen auch für die Zwischenwerte gelten.
Man erhält dann aus Gl. (4,1o) und (4,27):

a) für $s_1=o$:

$$R_y = \frac{2(1-n)[\varrho_o^2+s_2^{\ 2}(1-n)]}{\varrho_o^2\sqrt{\varrho_o^2+s_2^{\ 2}(1-n)}-\varrho_o^3-s_2^{\ 2}\varrho_o\sqrt{1-n}} \cdot Y_1 \qquad (4{,}28a)$$

b) für $s_1\to\infty$ besteht dieselbe Abbildungsbedingung wie bei $a(p_o)=o$ (Parallelstrahl). Es gilt daher Gl. (4,25).

c) für $s_2=o$:

$$R_y = 2\,\frac{1-n}{\varrho_o^2+\ s_1^{\ 2}\ (1-n)+} \cdot Y_1 \qquad (4{,}28b)$$

d) für $s_2\to\infty$:

$$R_y = 2\ (1-n)\ \beta\ Y_1 = \frac{2\sqrt{(1-n)^3}}{\varrho_o} \cdot Y_1 \qquad (4{,}28c)$$

Aus allen 4 Gleichungen sieht man, daß das Impulsauflösungsvermögen umso besser wird, je kleiner (1-n) +) und je größer ϱ_o ist. Nach leichter Rechnung sieht man aus Gl. (4,28a), daß R_y mit kleiner werdenden Abstand s_2 besser wird. Ebenso zeigt

+) Es muß aber $n < 1$ sein.

Gl. (4,28b), dass R_y mit wachsendem Targetabstand s_1 kleiner wird. Die Magnetlänge L erhält man aus der Abbildungsbedingung (4,27). Dieselben Aussagen erhielt man auch für den Fall $a(p_o)=o$.
Die Diskussion der Gleichungen für das Impulsauflösungsvermögen wird jedoch anders, wenn man mehrere Parameter gleichzeitig festhält. Wie in Figur 7 dargestellt ist, wird z.B. R_y umso besser, je <u>kleiner</u> man ρ_o wählt, wenn s_1, s_2 und L festgehalten sind.
Weitere Kombinationen von festgehaltenen Parametern werden bei der Optimalisierung von Raumwinkel und Impulsauflösungsvermögen behandelt.

β) <u>Longitudinale Dispersion</u>

Die Gleichung für R_y ist beim geraden Quadrupol sehr kompliziert. Der Einfluss der Parameter s_1, s_2, β und L auf das Impulsauflösungsvermögen wird daher anhand von Kurven diskutiert. In den Kurven der Figur 8 ist R_y als Funktion von s_1, s_2 und β aufgetragen.

Man sieht daraus, dass das Impulsauflösungsvermögen umso besser wird, je grösser s_1 und je kleiner s_2 ist (Figur 8a). Ueber die Grösse β ist es schwierig, eine allgemeine Aussage zu machen. Wählt man die übrigen Parameter im Sinne obiger Aussagen möglichst günstig (kleiner Abstand s_2), dann kann man mit wachsendem β prinzipiell ein besseres Impulsauflösungsvermögen erreichen (siehe Figur 8b). Die Magnetlänge L ergibt sich aus der Abbildungsbedingung (4,27). Aehnliche Aussagen erhielt man ebenfalls im Fall $a(p_o)=o$.

Abschliessend muss noch bemerkt werden, dass diese Betrachtungen nur gelten für ein Impulsauflösungsvermögen der Grössenordnung 1%. Bei besserem Impulsauflösungsvermögen werden die hier nicht behandelten Abbildungsfehler zu gross.

V Die Optimalisierung der Parameter bezüglich des Impulsauflösungsvermögens und des Raumwinkels

In den beiden vorherigen Abschnitten wurden Spektrometer behandelt, die entweder einen grossen Raumwinkel erfassen oderein gutes Impulsauflösungsvermögen besitzen.

Dabei wurde gefunden, dass für einen grossen Raumwinkel s_1, ϱ_0, L klein, s_2 und n gross zu wählen sind. Im Hinblick auf gutes Impulsauflösungsvermögen lauten die Forderungen, mit Ausnahme der Grösse β beim Quadrupol, gerade umgekehrt. In diesem Abschnitt wird nun nach einem günstigen Kompromiss zwischen obigen Extremen gesucht und falls möglich ein Optimum angegeben.

Die Aufgabe soll darin bestehen ein Spektrometer zu entwerfen, das für ein bestimmtes Auflösungsvermögen bei einer vorgegebenen Magnetöffnung den grössten Raumwinkel erfasst oder umgekehrt.
Die Untersuchung wird übersichtlich, wenn man die Fälle $a(p_o)=o$ und $b(p_o)=o$ getrennt behandelt.

1) Bedingung $a(p_o)=o$

Die Gleichung für das Impulsauflösungsvermögen (4,10) und (4,12) zeigen, dass R_y und Y_1' in der Fokussierungsebene einander proportional sind. Somit erhält man zwischen Raumwinkel und Impulsauflösungsvermögen den einfachen Zusammenhang:

$$R_y = \frac{G(s_2, n, \varrho_o, L)}{X_1'} \qquad (5,1)$$

Da die Funktion G (siehe Gl. (4,10) und (4,12)) von der Grössenordnung 10 und $X_1' \ll 1$ ist, erhält man ein gutes Impulsauflösungsvermögen nur bei einem sehr kleinen Raumwinkel. Die Bedingung $a(p_o)=o$ wird man daher nicht verwenden, wenn es darauf ankommt, einen grossen Raumwinkel zu erfassen.

2) Bedingung $b(p_o)=o$

Spektrometer, die der Bedingung $b(p_o)=0$ genügen, haben die triviale Eigenschaft gemeinsam, dass ihr Auflösungsvermögen der Target- bzw. Zählergrösse und ihr Raumwinkel dem Spektrometerquerschnitt proportional ist. Diese drei Grössen werden daher für die Diskussion konstant gehalten.

α) Longitudinale Dispersion

Beim geraden Quadrupol hängen Raumwinkel und Impulsauflösungsvermögen von den 4 Parametern s_1, s_2, L und β ab, wovon nur 3 wegen der Abbildungsbedingung frei wählbar sind. Der Einfluss der Parameter auf das Impulsauflösungsvermögen und den Raumwinkel wird anhand von berechneten Kurven diskutiert. In den Kurven der Figur 9 wurde das Impulsauflösungsvermögen über dem Raumwinkel aufgetragen mit β, L und s_1 als freie Parameter.
Aus diesen Kurven sieht man sofort:

a) Mit wachsendem β wird ein besseres Impulsauflösungsvermögen möglich bei grösserem Raumwinkel. Man wird daher immer β so gross als möglich wählen, d.h. bei einem bestimmten Impuls und Magnetquerschnitt ein möglichst starkes Magnetfeld verwenden.
Ändert man ß nicht durch das Magnetfeld, sondern z.B. durch Vergrösserung der Magnetöffnung $d_x d_y$, dann kann man bei gleichem Auflösungsvermögen prinzipiell einen größeren Raumwinkel erreichen, wie sich aus den Kurven der Figur 9 leicht nachrechnen läßt. Dabei wählt man die Öffnung bzw. begrenzende Blende d_x d_y möglichst so, daß $d_y > d_x$ ist, da $R_y \sim \frac{1}{d_y}$ und $\Omega \sim d_x d_y$.

b) Je kleiner s_1 ist, desto grösseren Raumwinkel kann man bei einem bestimmten Impulsauflösungsvermögen erfassen und umgekehrt.

c) Als letzter Parameter ist noch die Magnetlänge L zu diskutieren. Lässt man die Magnetlänge L stetig wachsen, so wandern die Kurven mit konstantem L zuerst nach rechts und ab einem bestimmten L wieder zurück nach links. Das bedeutet, es existiert für ein bestimmtes L ein Maximum des Raumwinkels bei einem vorgegebenem Auflösungsvermögen und umgekehrt. Die nähere Untersuchung zeigt, dass man gerade das Maximum erhält, wenn das Argument $\beta \cdot L$ die Bedingung erfüllt.

$$\beta \cdot L \cong \pi/2 \qquad (5,2)$$

In den Kurven von Figur 9 ist das Auflösungsvermögen gegen den Raumwinkel aufgetragen für verschiedene Werte von β und $\beta \cdot L$+). Für den praktischen Fall genügt es, $\beta L < \pi/2$ zu wählen.

Obige Bedingungen sind relative Optima von Raumwinkel und Impulsauflösungsvermögen. Das absolute Optimum von Raumwinkel und Impulsauflösungsvermögen erhält man, wenn ausserdem für das Qaudrupolspektrometer je nach Magnetöffnung und Impuls der grösste Wert von β, d.h. bei vorgegebener Magnetöffnung das grösstmögliche Magnetfeld gewählt wurde.

β) <u>Transversale Dispersion</u>

Bei gekrümmten Spektrometern hängen Raumwinkel und Impulsauflösungsvermögen von den 5 Parametern s_1, s_2, L, ς und n ab, von denen wegen der Bedingung $b(p_0)=o$ nur 4 frei wählbar sind. Ungeachtet der übrigen Parameter sieht man aus dem Vergleich der

---

+) Der Zählerabstand s_2 wird jeweils durch die Abbildungsbedingung (4,27) bestimmt.

Gleichungen (3,4) und (4,28), dass der Raumwinkel mit kleiner werdendem Targetabstand s_1 viel stärker wächst, als das Impulsauflösungsvermögen verschlechtert wird. Man wird deshalb s_1 möglichst klein wählen.

Eine ähnliche Abhängigkeit gilt auch für den Krümmungsradius ρ_0. Aus dem Vergleich der oben zitierten Gleichungen sieht man, dass der Raumwinkel mit kleiner werdendem ρ_0 viel stärker wächst, als das Impulsauflösungsvermögen verschlechtert wird. Man wird daher ρ_0 so klein als möglich wählen.+)

Zur Diskussion der Parameter s_2 und n wurde in den Kurven der Figur 10 der Raumwinkel und das Impulsauflösungsvermögen gegen den Feldindex n aufgetragen mit verschiedenen, festgehaltenen Werten von s_1, L und ρ_0 . Der dazugehörige Zählerabstand s_2 ergibt sich aus der Abbildungsbedingung (Gl. 4,27). Es zeigen die Kurven, dass der Raumwinkel und das Impulsauflösungsvermögen sich wenig ändert, wenn man den Feldindex n gegen s_2 variiert; d.h. mit dem Feldindex n kann man den Abstand s_2 einstellen ohne wesentliche Aenderung von Raumwinkel und Impulsauflösungsvermögen.

Das geforderte Impulsauflösungsvermögen bzw. den angestrebten Raumwinkel kann man durch die Magnetlänge L festlegen. In Figur 1 sieht man, dass das Impulsauflösungsvermögen umso besser wird, je grösser man die Magnetlänge L wählt, der Raumwinkel wird dabei kleiner. Bei diesen Kurven wurde ρ_0 , s_1 und L als Parameter festgehalten.

+) Der Krümmungsradius muss aber noch gross gegen die Magnetöffnung sein, da sonst die Abbildungsfehler eine wesentliche Rolle spielen.

VI Die Zählerlänge

Wie man aus den Gleichungen (2,3) und (2,4) sieht, erhält man für Spektrometer mit Feldindizes $0<n<1$ sowohl für die x- als auch für die y-Komponente konvergente Trajektorien, das bedeutet, daß die Targetabbildung klein ist. Somit kann man auch den Zähler ohne Zählratenverlust klein machen.

Im Gegensatz zu den doppelfokussierenden Spektrometern wird bei solchen mit Feldindizes $n \leq 0$ wegen der divergenten x-Komponente die Targetabbildung in x-Richtung groß. Um keine Zählraten zu verlieren, muß man den Zähler ebenfalls groß machen.
Da jedoch ein großer Zähler bei intensitätsschwachen Experimenten großen Untergrund liefert, wird man bei Spektrometern mit Feldindizes $n \leq 0$ die große Zählerlänge durch einen weiteren Magneten (homogenen Magnet, Quadrupol) oder bei einem homogenen Magneten durch geeignete Anstellwinkel stets reduzieren müssen. Die in Figur 1 eingezeichneten Anstellwinkel ε_1 und ε_2 bewirken eine Fokussierung senkrecht zur Ablenkebene.

II Anhang

1) Teilchentrajektorien in Matrixschreibweise:

Die Transformation der Teilchenkoordinaten und - steigungen vom Target auf den Zähler lässt sich folgendermassen in Matrixschreibweise darstellen:[9]

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \underset{\mathrm{Ia}}{\begin{pmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathrm{IIa}}{\begin{pmatrix} \cos\beta_x L & \frac{1}{\beta_x}\sin\beta_x L \\ -\beta_x \sin\beta_x L & \cos\beta_x L \end{pmatrix}} \underset{\mathrm{IIIa}}{\begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathrm{IVa}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \\ \frac{\Delta p}{p_0} \end{pmatrix} = \underset{\mathrm{Ib}}{\begin{pmatrix} 1 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathrm{IIb}}{\begin{pmatrix} \cos\beta_y L & \frac{1}{\beta_y}\sin\beta_y L & \frac{\rho_0}{1-n}(1-\cos\beta_y L) \\ -\beta_y \sin\beta_y L & \cos\beta_y L & \frac{1}{1-n}\sin\beta_y L \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathrm{IIIb}}{\begin{pmatrix} 1 & s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathrm{IVb}}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \frac{\Delta p}{p_0} \end{pmatrix}}$$

Die Matrizen I und III beschreiben den feldfreien Raum.

Die Matrizen II enthalten die Lösungen der Kerstschwingungen und deren Ableitungen nach $z \hat{=} L$ sowie bei IIb die Transversaldispersion für gekrümmte Magnete.

Die Matrizen IV enthalten die Targetkoordinaten und Anfangssteigungen der Teilchen und die Abweichung vom Sollimpuls p_0.

---

[9] Owen Chamberlain: Ann. Rev. Nuclear Sci. 10/178(1960) Diese Arbeit bringt auch eine Literaturübersicht bis 1960.

2) Das Impulsauflösungsvermögen für $a(p_o) \neq 0$, $b(p_o) \neq 0$

Am Beispiel von Ablenkmagneten soll gezeigt werden, dass man mit einer der Bedingungen $a\,(p_o) = 0$ oder $b\,(p_o) = 0$ ein besseres Impulsauflösungsvermögen erreichen kann als mit $a\,(p_o) \neq 0$, $b\,(p_o) \neq 0$. Dazu geht man von einer dieser Bedingungen aus und verletzt sie z.B. durch Veränderung des Zählerabstandes s_2 um Δs_2. Der Teilchenstrahl, der an der Stelle s_2, wo $a = 0$ bzw. $b = 0$ erfüllt ist, eine Einschnürung erfährt, muss dann, um keine Zählraten zu verlieren, vergrössert werden um den Betrag:

$$2\,\Delta Y_2 = 2\,\frac{\delta Y_2}{\delta s_2}\,\Delta s_2 = 2\,\Delta s_2\left(\frac{\delta a}{\delta s_2}\left|Y_1\right| + \frac{\delta b}{\delta s_2}\left|Y_1'\right|\right) \qquad (7,1)$$

Ebenso ändert sich der Term C um den Betrag:

$$\Delta c = \frac{\delta c}{\delta s_2}\,\Delta s_2. \qquad (7,2)$$

Wenn bei $a = 0$ oder $b = 0$ das Impulsauflösungsvermögen besser ist, muss also folgende Relation erfüllt sein:

$$2\,\frac{(Y_2) + |\Delta Y_2|}{c + |\Delta c|} > 2\left|\frac{Y_2}{c}\right| \text{ oder gleichbedeutend} \qquad (7,3a)$$

$$\frac{\Delta Y_2}{\Delta c} > \left|\frac{Y_2}{c}\right| \qquad (7,3b)$$

Die rechte Seite von (7,3a) ist der Ausdruck für das Impulsauflösungsvermögen bei einer der Bedingungen $a = 0$ oder $b = 0$ (siehe Gl. 4, 10). Für diese beiden älle erhält man dann aus (7,1) (7,2) und (7,3b) folgende Ausdrücke:

$$\left|\sqrt{1-n}\,\frac{Y_1}{\varrho_o}\right| + \left|\operatorname{ctg}\beta_y L - s_1\beta_y\right|\left|Y_1'\right| > \begin{cases} \left|\dfrac{(s_1+s_2)\cos\beta_y L - (s_1 s_2\beta_y - \frac{1}{\beta_y})\sin\beta_y L}{\varrho_o(1-\cos\beta_y L)+s_2\sin\beta_y L}\,Y_1'\right| & \text{für } a(p_o) = 0 \qquad (7,4) \\[2ex] \left|\dfrac{\cos\beta_y L - s_2\beta_y\sin\beta_y L}{\varrho_o(1-\cos\beta_y L)+s_2\sin\beta_y L}\,Y_1\right| & \text{für } b(p_o) = 0. \qquad (7,5) \end{cases}$$

Berücksichtigt man, dass die Bedingung $a(p_0) = 0$ bei breitem, sehr schwach divergentem Strahl verwendet wird ($Y_1/\varrho_0 \gg Y_1'$) und die Bedingung $b(p_0) = 0$ bei einem divergeten Strahl emittiert von einem sehr kleinen Target ($Y_1' \gg Y_1/\varrho_0$), dann sieht man, dass die Ungleichungen (7,4) und (7,5) erfüllt sind;+) die Koeffizienten von Y_1' und $\frac{Y_1}{\varrho_0}$ sind für sinnvolle Fälle jeweils meist von der gleichen Grössenordnung.

Ist z.B. bei $s_2 = 0$ die Bedingung $a = 0$ oder $b = 0$ erfüllt, dann erhält man für (7,4) und (7,5), indem man die Winkelfunktionen aus den betreffenden Abbildungsbedingungen (4,27) (4,24) berechnet.

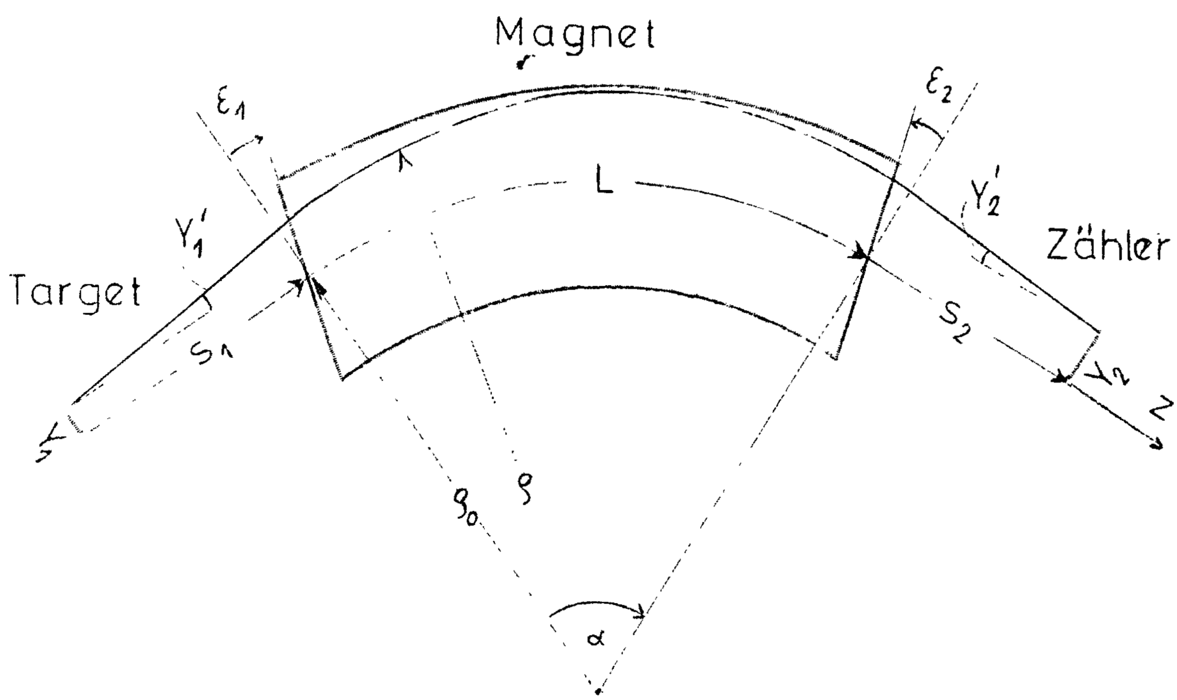
$$\left|\sqrt{1-n}\,\frac{Y_1}{\varrho_0}\right| + \left|\frac{s_1}{\varrho_0}\sqrt{1-n}\cdot Y_1'\right| > \left|\frac{1}{\sqrt{1-n}}\right| \left|Y_1'\right| \qquad \text{für } a = 0 \tag{7,6}$$

$$\left|\sqrt{1-n}\,\frac{Y_1}{\varrho_0}\right| + \left|\frac{1}{s_1\beta_y} + s_1\beta_y\right| \left|Y_1'\right| > \left|\frac{\cos\beta_y L}{1-\cos\beta_y L}\cdot\frac{Y_1}{\varrho_0}\right| \qquad \text{für } b = 0 \tag{7,7}$$

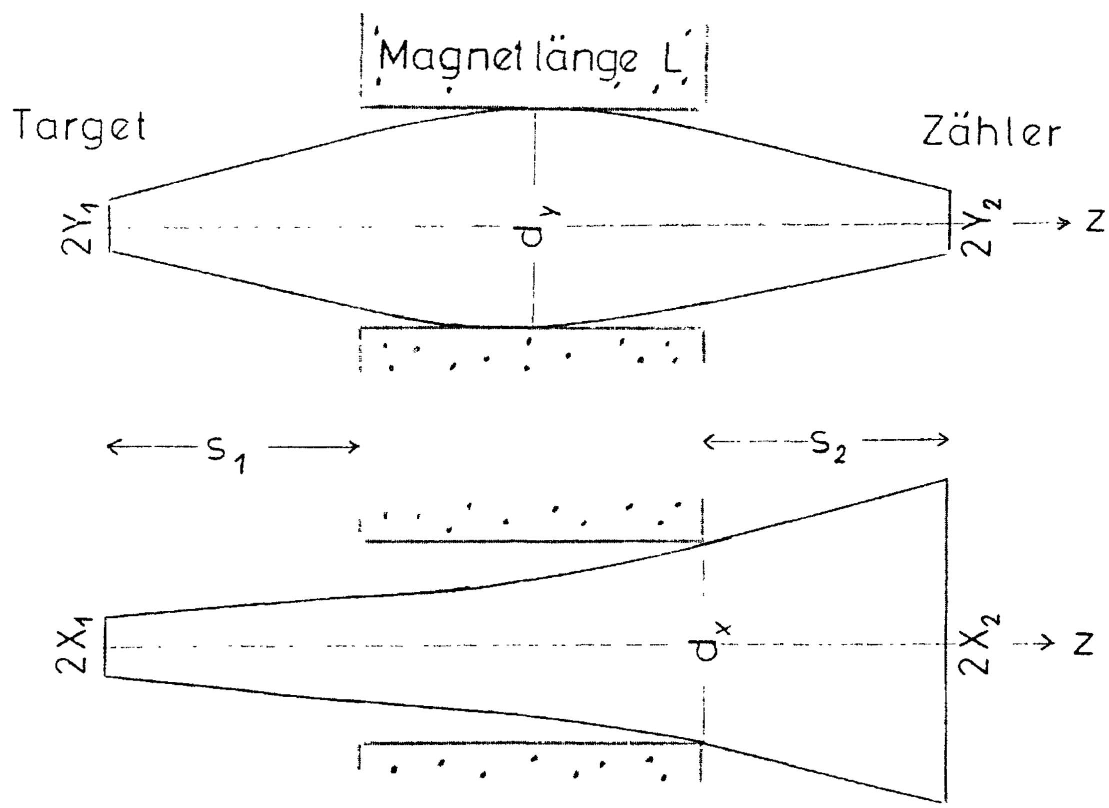
Für einen sehr grossen Zählerabstand s_2 ($s_2 \gg \varrho_0$) sieht man sofort, dass Ungleichung (7,5) erfüllt ist. Im Falle $a = 0$ ist ein grosser Abstand s_2 uninteressant, da kaum eine Fokussierung notwendig ist.

Selbstverständlich kann man eine der Abbildungsbedingungen statt durch Aenderung des Zählerabstandes s_2 auch durch Aenderung anderer Parameter, z.B. L, s_1 verletzen. Alle Aenderungen sind daher äquivalent und lassen sich ineinander überführen.

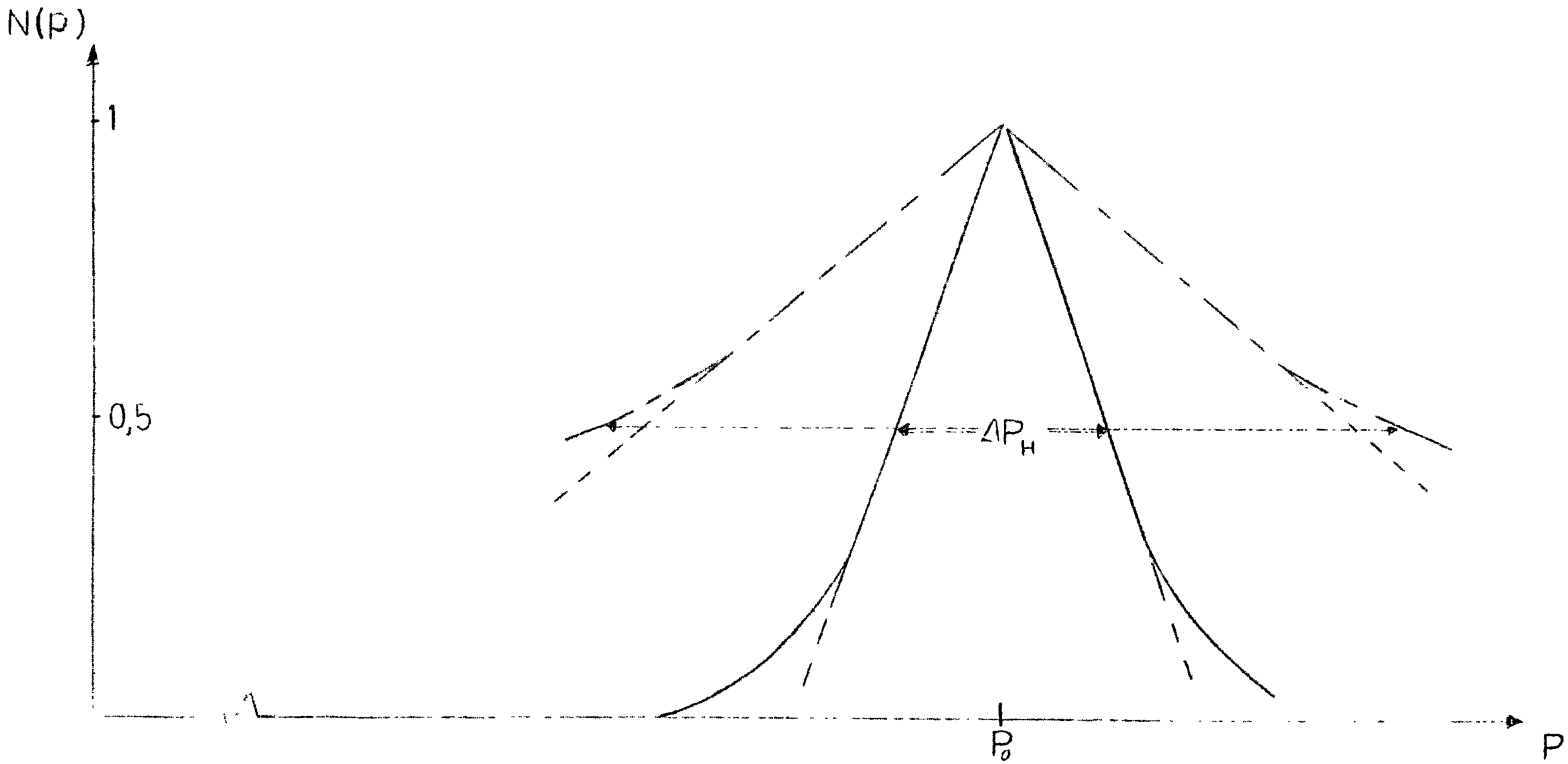
+) Sind Y_1' und Y_1/ϱ_0 von derselben Grössenordnung, dann ändert sich das Impulsauflösungsvermögen wenig innerhalb der Bedingungen $a = 0$ und $b = 0$.



Figur 1: Ablenkebene eines gekrümmten Magneten.



Figur 2: Fokussierende und defokussierende Ebene eines geraden Quadrupols.



Figur 3: Zählrate N (p) in Abhängigkeit vom Teilchenimpuls p. Die ausgezogene Kurve gilt für ein Spektrometer mit einem Impulsauflösungsvermögen $\frac{\Delta p_H}{p}$ von der Grössenordnung 1%; die gestrichelte Kurve für ein schlechteres.Auflösungsverrögen. Für die Rechnung wurde eine kleine Zentralblende angenommen.

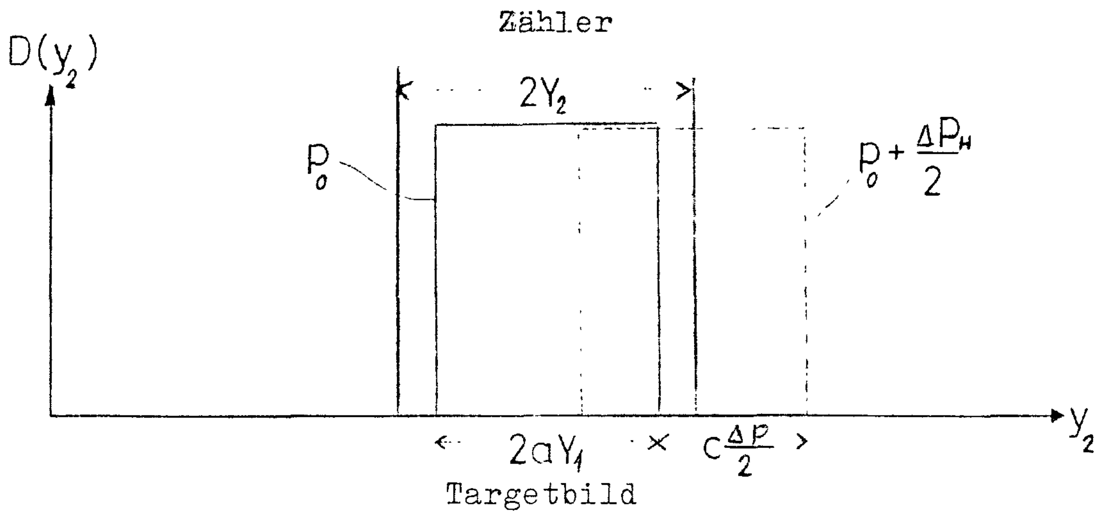


Fig.4a

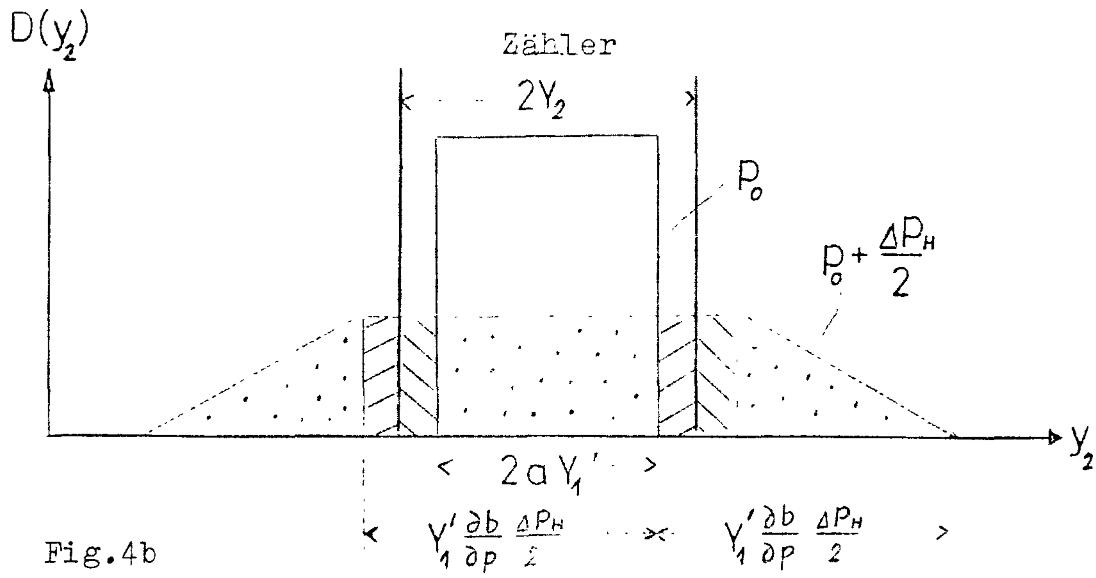


Fig.4b

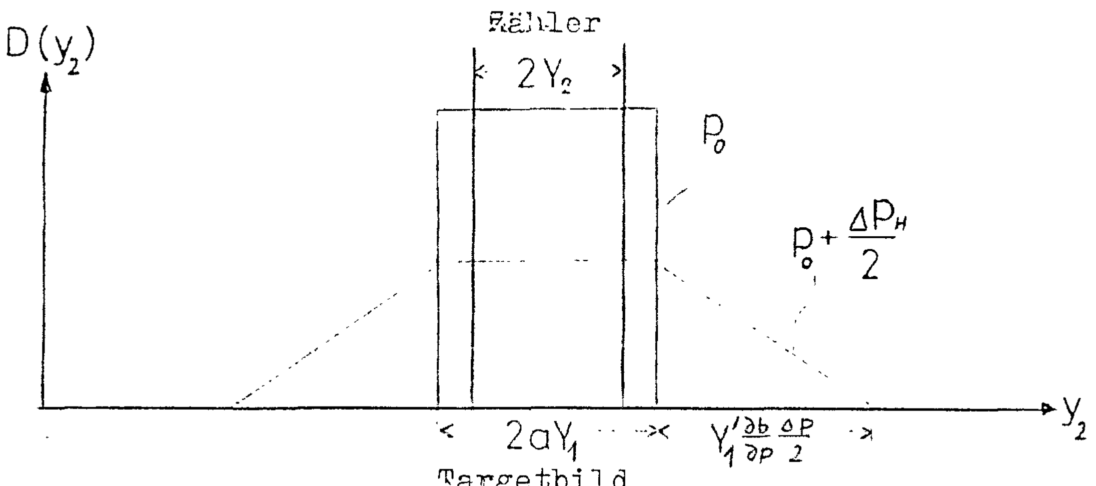
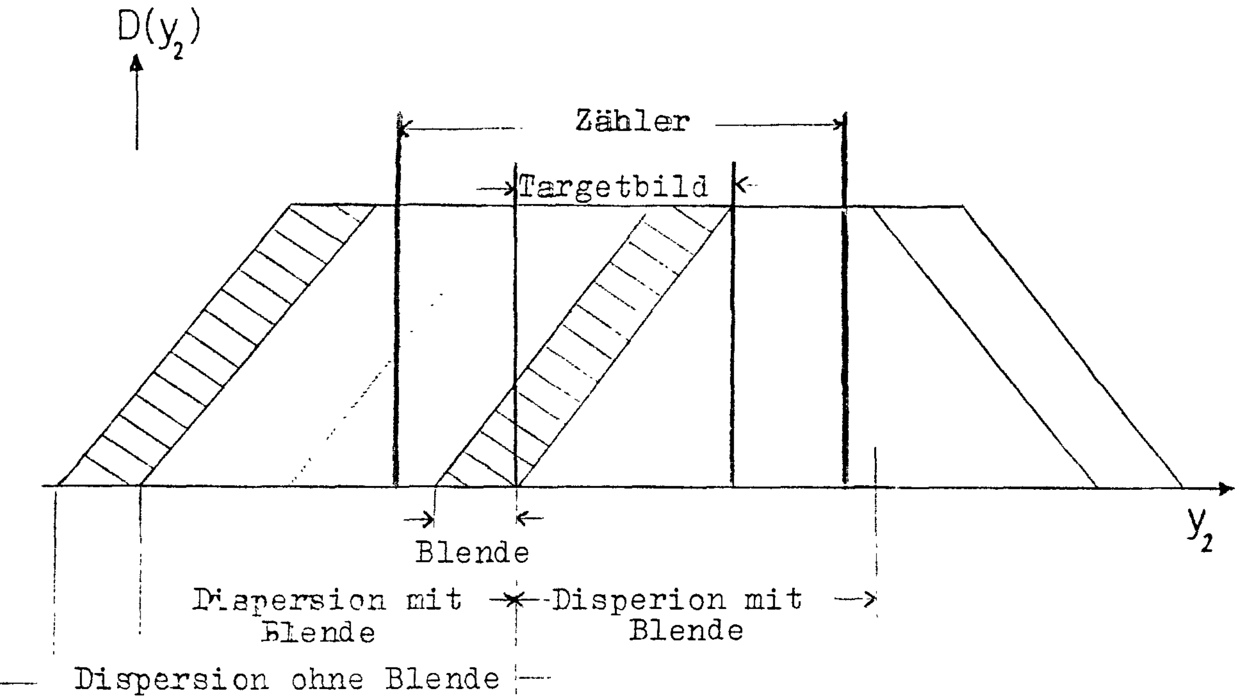


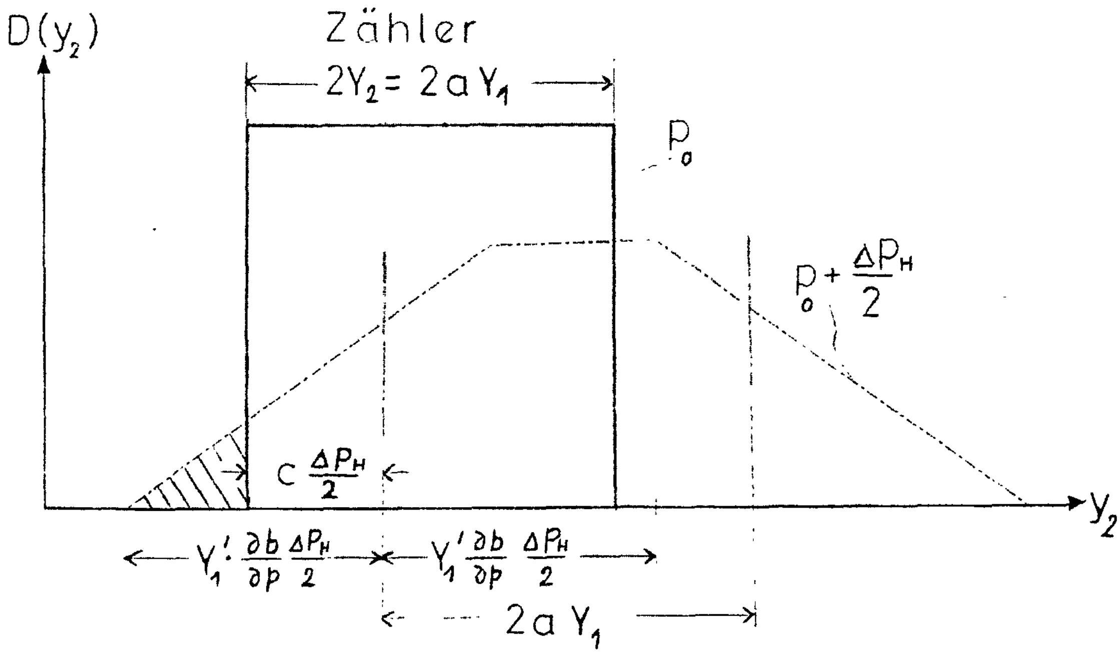
Fig.4c

Figur 4: Verteilung der Teilchendichte D in y-Richtung des Zählers

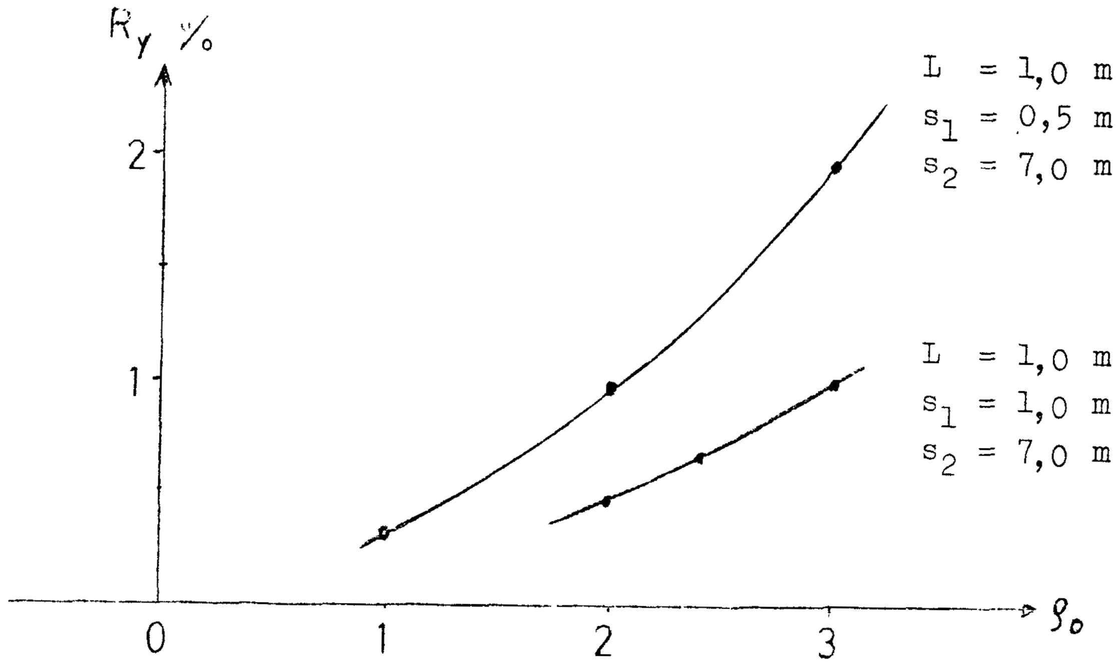
a) für einen Ablenkmagneten
b) für einen geraden Quadrupol mit einem Zähler größer als das Targetbild
c) für einen geraden Quadrupol mit einem Zähler kleiner oder gleichgroß als das Targetbild.



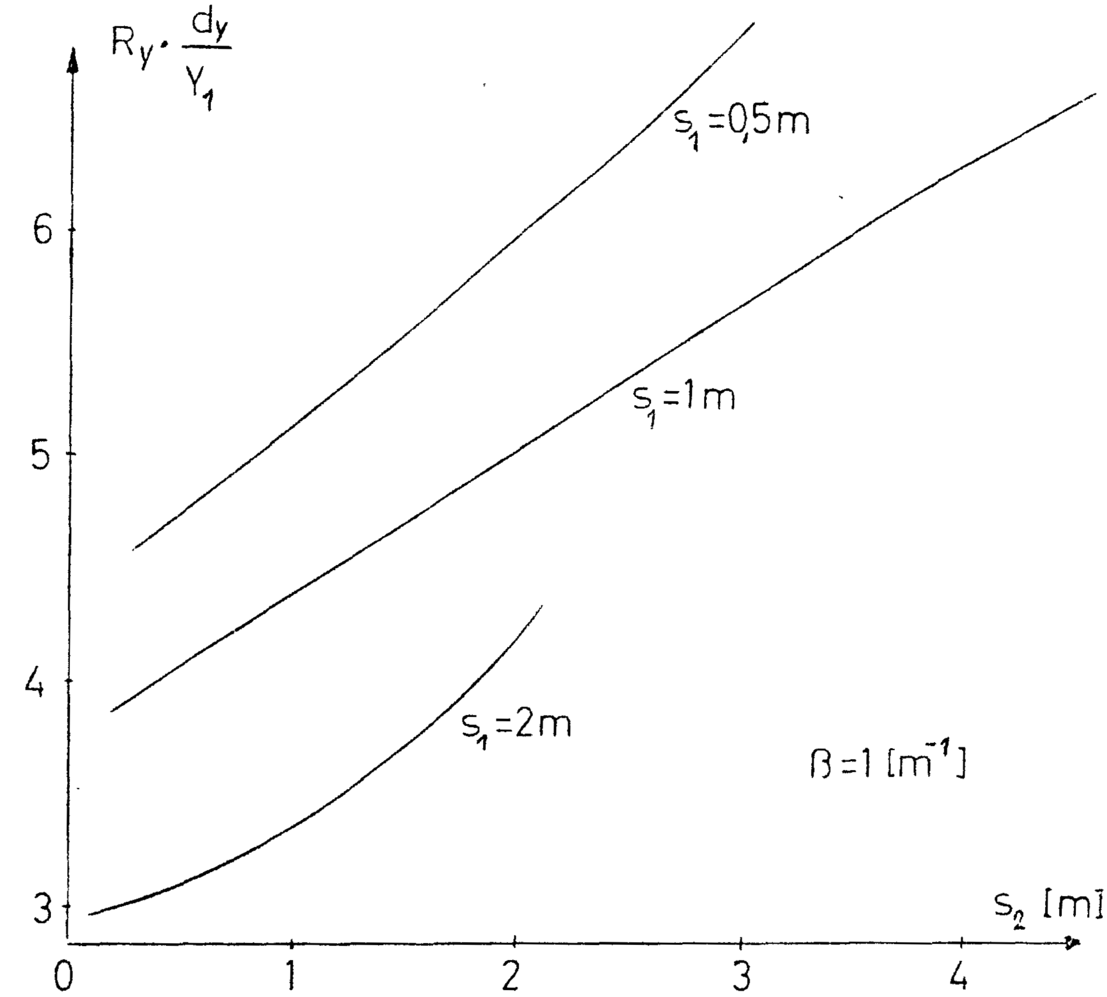
Figur 5: Verteilung der Teilchendichte D in y-Richtung des Zählers mit Blende. Die schraffierten Streifen sind flächengleich.



Figur 6: Verteilung der Teilchendichte D in y-Richtung des Zählers bei transversaler und longitudinaler Impulsdispersion.



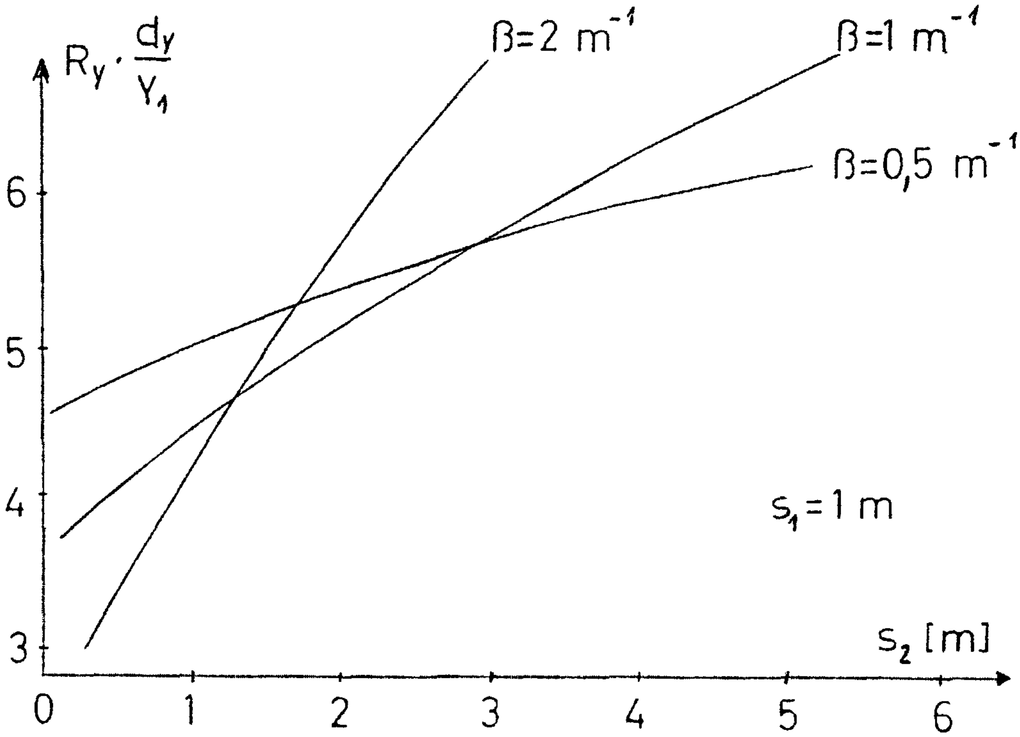
Figur 7: Impulsauflösungsvermögen von gekrümmten Magneten in Abhängigkeit vom Krümmungsradius ϱ_0 mit festgehaltenen Parametern s_1, s_2 und L. Targethöhe $2Y_1$ = 2 mm.



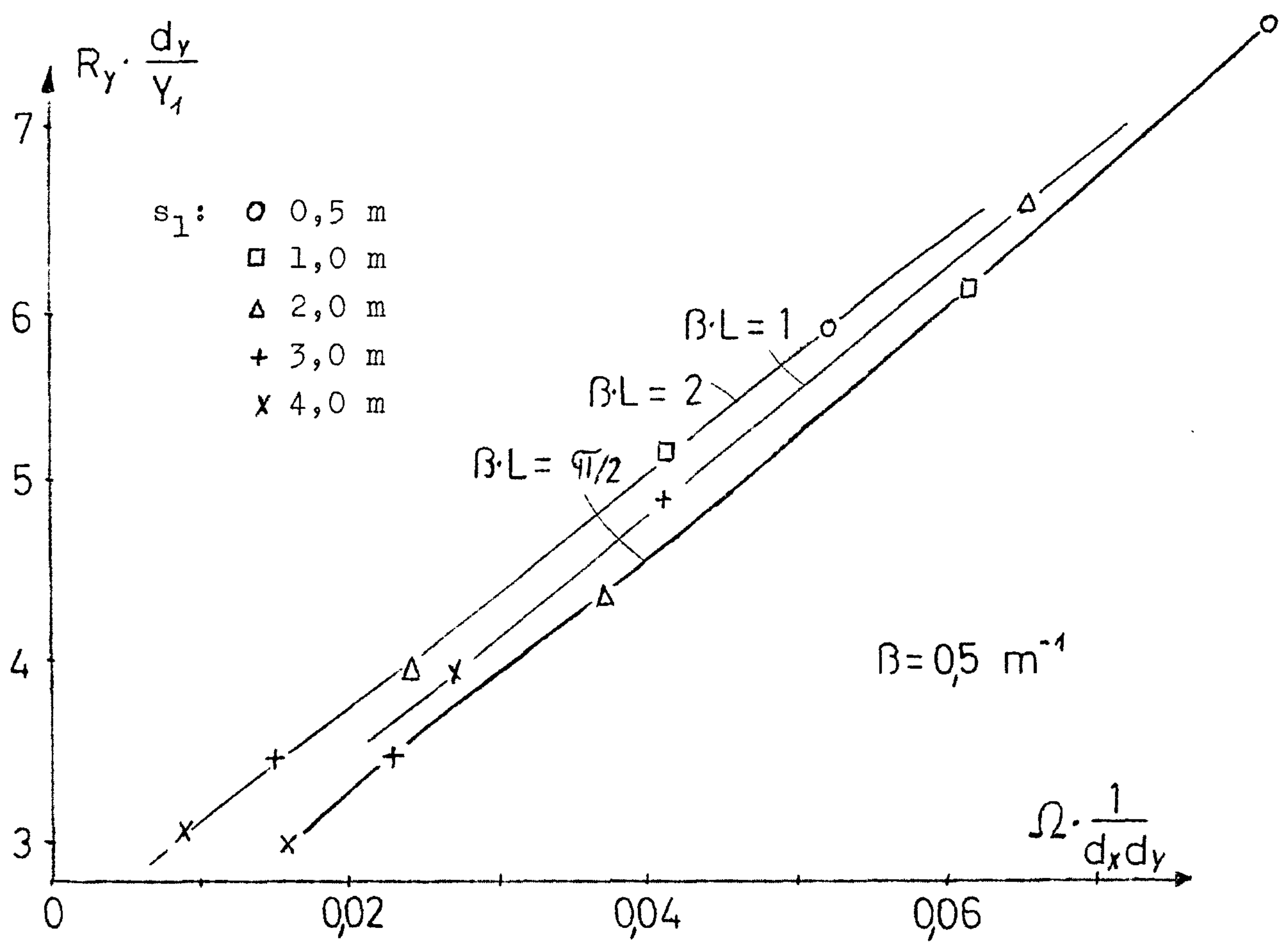
Figur 8a: Impulsauflösungsvermögen R_y in Abhängigkeit vom Zählerabstand s_2 mit s_1 als Parameter.

d_y ist die Magnetöffnung in y-Richtung,

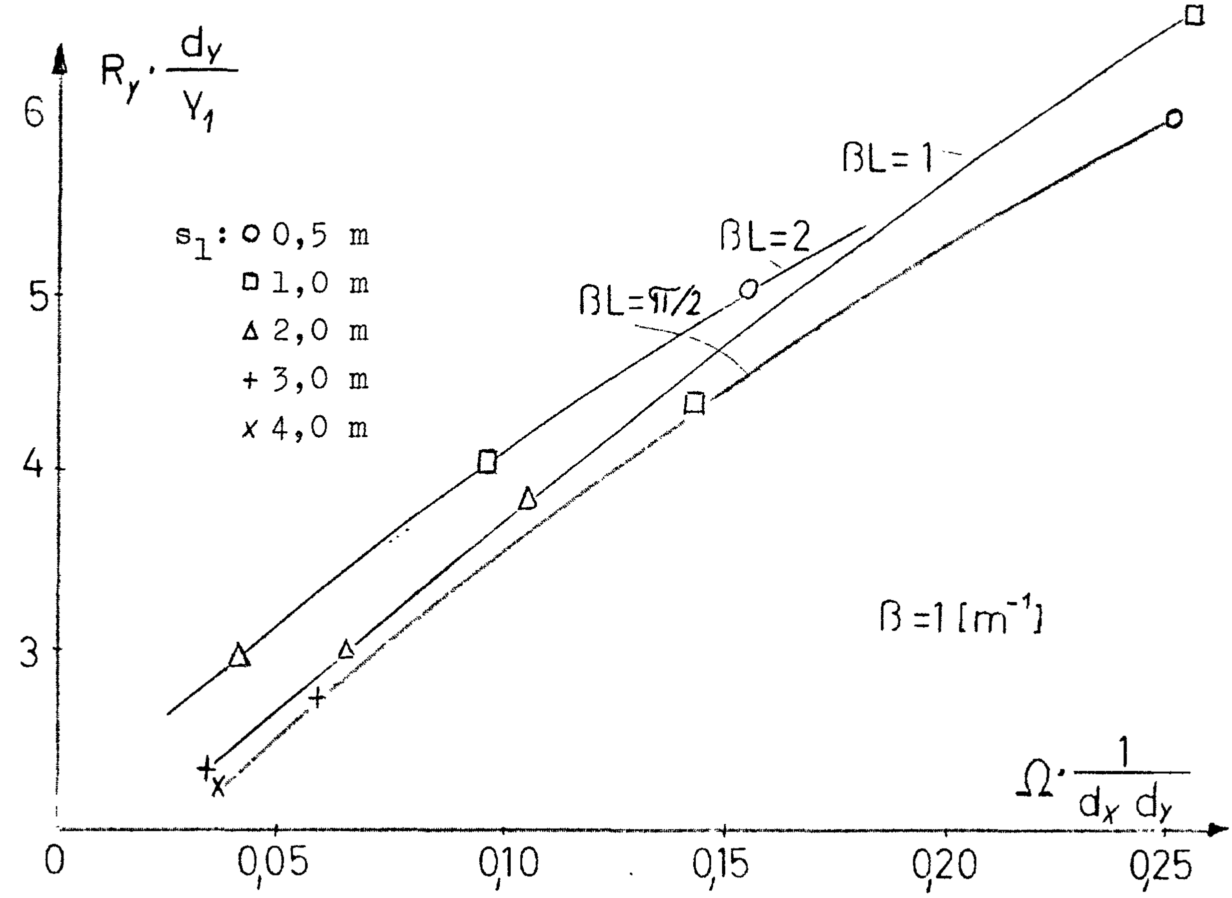
$2Y_1$ ist die Targethöhe.

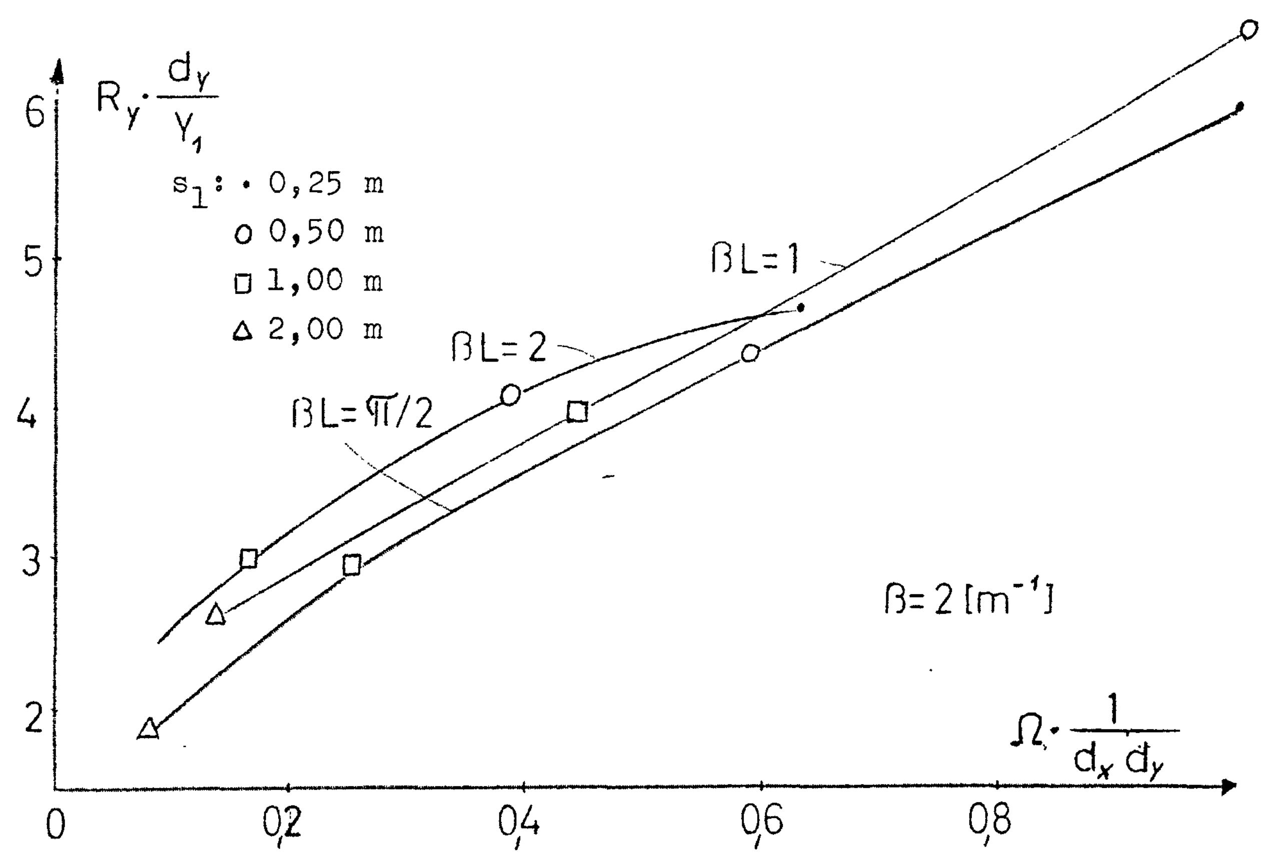


Figur 8b: Impulsauflösungsvermögen R_y in Abhängigkeit vom Zählerabstand s_2 mit dem Zählerabstand s_1 als Parameter.
d_y ist die Magnetöffnung in y-Richtung, $2Y_1$ ist die Targethöhe. (Für andere Werte von β ergeben sich ähnliche Kurven).

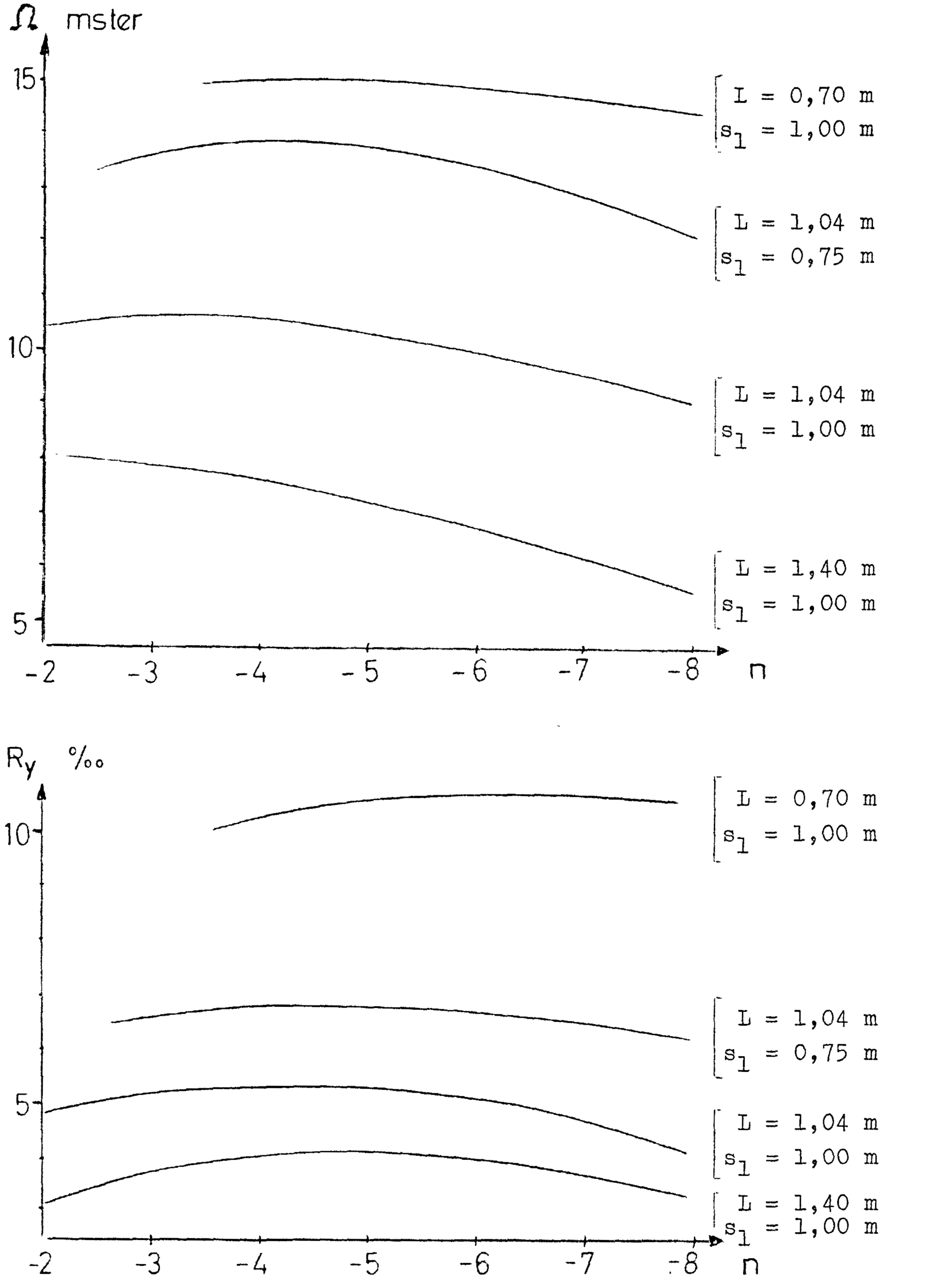


Figur 9a: Impulsauflösungsvermögen R_y über dem Raumwinkel Ω aufgetragen mit βL als Parameter. (siehe Fig. 9c).





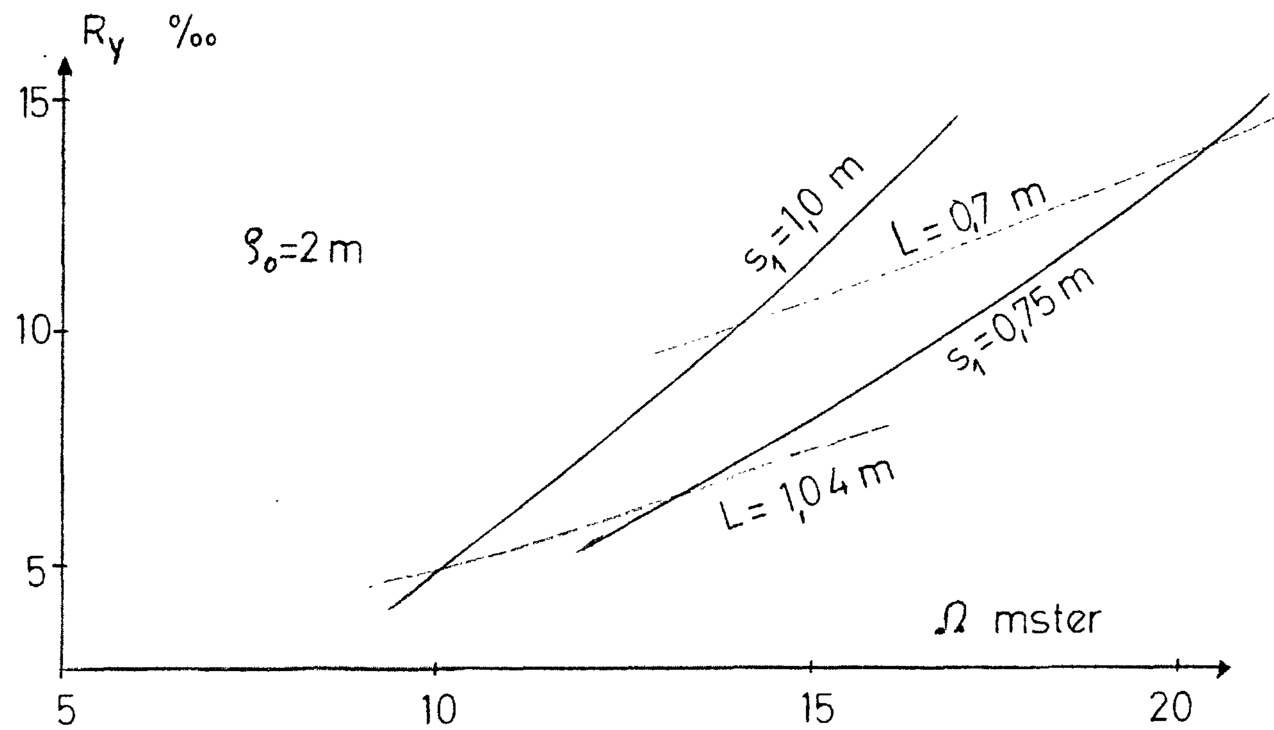
Figur 9b und 9c: Impulsauflösungsvermögen R_y über dem Raumwinkel Ω aufgetragen mit βL als Parameter. Magnetöffnung: $d_x \cdot d_y$; Targethöhe $2Y_1$.
Die dazugehörigen Werte von s_1 sind verschieden markiert.



Figur 10: Raumwinkel Ω und Impulsauflösungsvermögen R_y in Abhängigkeit vom Feldindex n. Magnetlänge L und Targetabstand s_1 sind Parameter.

Krümmungsradius ρ_o = 2 m; Targethöhe $2Y_2$ = 2 mm

Magnetöffnung: 20 x 20 cm^2.



Figur 11: Impulsauflösungsvermögen R_y über dem Raumwinkel Ω aufgetragen mit festgehaltenen Parametern L und s_1. Targethöhe $2Y_1$ = 2 mm. Für andere Werte von ρ_o ergeben sich ähnliche Kurven.