

KFK-132

# KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Januar 1963

KFK 132

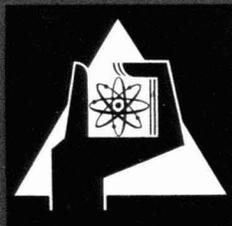
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Bestimmung der Extrapolationslänge schneller Reaktoren  
in der Mehrgruppen- $P_1$ -Näherung

Horst Borgwaldt

KARLSRUHE  
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.  
Verwaltung der Zentralbücherei

2 Apr. 1963



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

Bau- und  
Verwaltung der Zentralbücherei

## Bestimmung der Extrapolationslänge schneller Reaktoren in der Mehrgruppen- $P_1$ -Näherung

Von HORST BORGWALDT

(Aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Kernforschungszentrum Karlsruhe)

(Eingegangen am 17. September 1962)

*Zusammenfassung.* Die für die Berechnung der kritischen Abmessungen des Cores eines schnellen Reaktors benötigte Extrapolationslänge wird untersucht unter den Voraussetzungen, daß im Inneren des eindimensionalen homogenen Cores die konsistenten Gleichungen der  $P_1$ -Näherung gelten und auf der Begrenzung eine gemischte Randbedingung vorliegt. Dabei wird die kritische Größe des Cores näherungsweise aus der Reihenentwicklung dieser Randbedingung nach einem Störparameter bestimmt.

Das erste Reihenglied liefert eine Verallgemeinerung der von INÖNÜ [1] angegebenen Extrapolationslängen-Mittelung. Hierfür müssen lediglich die persistenten Spektren der Fluß- und Einflußfunktion bekannt sein. Die rekursive Ermittlung der höheren Reihenglieder erfordert pro Glied die Auflösung eines Randwertproblems.

### *Ausgangsgleichungen der $P_1$ -Näherung*

Die stationäre Neutronenflußverteilung  $f(x, E, \Omega)$  im Core eines kritischen Reaktors genügt der Boltzmann-Gleichung

$$\left. \begin{aligned} -\bar{\Omega} \operatorname{grad} f(E, \Omega) - (\Sigma_S(E) + \Sigma_a(E)) f(E, \Omega) + \\ + \iint \Sigma_S(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) f(E', \Omega') dE' d\Omega' + \\ + \frac{1}{4\pi} \chi(E) \iint \nu(E') \Sigma_f(E') f(E', \Omega') dE' d\Omega' = 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

$f$  bezeichnet den von allen Koordinaten des Phasenraums abhängigen Neutronenfluß; in (1) ist die Ortsabhängigkeit von  $f$  nicht ausdrücklich geschrieben, um die Übersicht zu verbessern. Die Wirkungsquerschnitte, die  $\nu(E)$ -Werte und das Spaltspektrum  $\chi(E)$  dagegen sind nicht ortsabhängig; es soll nur der Neutronenfluß in einem homogenen Bereich und der Einfluß der für diesen Bereich geltenden Randbedingungen betrachtet werden. Die positiven und negativen Beiträge in der Neutronenbilanzgleichung (1)

betreffen der Reihe nach Strömung, Streuung und Absorption aus dem  $(E, \Omega)$ -Volumen, Streuung in dieses Volumen, Spaltung [2].

Die  $P_1$ -Gleichungen ergeben sich in bekannter Weise durch Einsetzen der Näherung

$$4\pi f(E, \Omega) = \varphi(E) + 3 j(E) \vec{\Omega} \quad (2)$$

in (1). Hier bedeuten  $\varphi$  und  $j$  konventionellen Neutronenfluß und -strom, bezogen auf das Energieintervall.

Die  $P_1$ -Gleichungen (3) erhält man dann durch Integration der einfachen sowie der mit  $\vec{\Omega}$  multiplizierten Gl.(1) nach  $d\Omega$  über  $4\pi$ :

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} j(E) - (\Sigma_S(E) + \Sigma_a(E)) \varphi(E) + \\ + \int \Sigma_S(E' \rightarrow E) \varphi(E') dE' + \\ + \chi(E) \int \nu(E') \Sigma_f(E') \varphi(E') dE' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{3} \operatorname{grad} \varphi(E) - (\Sigma_S(E) + \Sigma_a(E)) j(E) + \\ + \int \Sigma_S(E' \rightarrow E) \mu(E' \rightarrow E) j(E') dE' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

In (3b) ist

$$\mu(E' \rightarrow E) = \frac{\int \vec{\Omega}_0 \vec{\Omega} \Sigma_S(E' \rightarrow E, \Omega_0 \rightarrow \Omega) d\Omega}{\int \Sigma_S(E' \rightarrow E, \Omega_0 \rightarrow \Omega) d\Omega} \quad (4)$$

der mittlere Cosinus des Streuwinkels für Neutronen, deren Energie beim Stoß von  $E'$  auf  $E$  geändert wird.

Bezeichnet man schließlich mit den Indizes  $i, k$  die auf Energieintervalle  $(E_i, E_{i-1})$ ,  $(E_k, E_{k-1})$  bezogenen Größen, so gewinnt man aus (3a, b) als weitere Näherung die konsistenten Mehrgruppen- $P_1$ -Gleichungen ( $i=1, 2, \dots, G$ ;  $G$ =Zahl der Gruppen):

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} j_i - (\Sigma_{s,i} + \Sigma_{a,i}) \varphi_i + \\ + \sum_{k \neq i} \Sigma_s(k \rightarrow i) \varphi_k + \chi_i \sum_k (\nu \Sigma_f)_k \varphi_k = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

$$-\frac{1}{3} \operatorname{grad} \varphi_i - \Sigma_{tr,i} j_i + \sum_{k \neq i} \Sigma_s(k \rightarrow i) \mu(k \rightarrow i) j_k = 0. \quad (5b)$$

$\varphi_i, j_i, \chi_i$  sind die über das Energieintervall  $(E_i, E_{i-1})$  integrierten Größen  $\varphi(E), j(E), \chi(E)$ . Die Wirkungsquerschnitte sind passend gemittelt. Insbesondere bedeuten  $\Sigma_s(k \rightarrow i)$  der Querschnitt für die Streuung von Neutronen aus der  $k$ -ten in die  $i$ -te Gruppe,  $\mu(k \rightarrow i)$  der dazugehörige mittlere Cosinus des Streuwinkels, ferner

$$\Sigma_{s,i} = \sum_{k \neq i} \Sigma_s(i \rightarrow k), \quad (6a)$$

$$\Sigma_{tr,i} = \Sigma_s(i \rightarrow i) (1 - \mu(i \rightarrow i)) + \Sigma_{a,i} + \Sigma_{s,i}. \quad (6b)$$

Ohne auf die praktische Ermittlung der in (5a, b) enthaltenen Konstanten [2], [3], [4] weiter einzugehen, betrachten wir diese Gleichungen von nun an als gegeben. Durch die Einführung einiger Abkürzungen,

$$a_{ik} = \Sigma_s(k \rightarrow i) + \chi_i (\nu \Sigma_f)_k \quad \text{für } i \neq k, \quad (7a)$$

$$a_{ii} = -(\Sigma_{s,i} + \Sigma_{a,i}) + \chi_i (\nu \Sigma_f)_i, \quad (7b)$$

$$b_{ik} = -3 \cdot \Sigma_s(k \rightarrow i) \mu(k \rightarrow i) \quad \text{für } i \neq k, \quad (7c)$$

$$b_{ii} = 3 \cdot \Sigma_{tr,i}, \quad (7d)$$

gelangen wir zu einer im folgenden benutzten, etwas praktischeren Schreibweise, nämlich

$$-\operatorname{div} j_i + \sum_k a_{ik} \varphi_k = 0, \quad (8a)$$

$$\operatorname{grad} \varphi_i + \sum_k b_{ik} j_k = 0. \quad (8b)$$

Die zugehörigen adjungierten Gleichungen, die man analog aus der adjungierten Boltzmann-Gleichung ableitet oder aber direkt zu (8a, b) bildet, lauten

$$\operatorname{div} j_i^* + \sum_k a_{ki} \varphi_k^* = 0, \quad (9a)$$

$$-\operatorname{grad} \varphi_i^* + \sum_k b_{ki} j_k^* = 0. \quad (9b)$$

Randbedingungen

Wir setzen voraus, daß die zu  $\mathfrak{B} = (b_{ik})$  inverse Matrix

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{B}^{-1} \quad (10)$$

existiert. Dies gilt für schnelle Reaktoren sowie immer dann, wenn keine Aufwärtsstreuung von Neutronen in Gruppen höherer Energie möglich ist. Denn in diesem Fall ist  $\mathfrak{B}$  eine Dreiecksmatrix mit nichtverschwindenden Diagonalelementen  $b_{ii}$ . Nunmehr lassen sich die Unbekannten  $j_i, j_i^*$  aus (8b), (9b) eliminieren,

$$j_i = - \sum_k d_{ik} \operatorname{grad} \varphi_k, \quad (11a)$$

$$j_i^* = \sum_k d_{ki} \operatorname{grad} \varphi_k^*. \quad (11b)$$

Einsetzen dieser Größen in (8a), (9a) führt zu

$$\mathfrak{D} \Delta \vec{\varphi} + \mathfrak{A} \vec{\varphi} = 0, \quad (12a)$$

$$\mathfrak{D}^* \Delta \vec{\varphi}^* + \mathfrak{A}^* \vec{\varphi}^* = 0. \quad (12b)$$

$\mathfrak{D}^*$  und  $\mathfrak{A}^*$  bezeichnen die transponierten Matrizen zu  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ ,  $\vec{\varphi}$  und  $\vec{\varphi}^*$  die vektoriell aufgefaßten Mehrgruppen-Fluß- und Einflußfunktionen.

Nach dieser Verallgemeinerung der Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen benötigen wir eine allgemeine Darstellung der Randbedingung des Cores. Für einen unreflektierten Reaktor verwendet man meist die Marshaksche Bedingung [2]. Danach soll an der Oberfläche der über den nach innen weisenden  $\Omega$ -Halbraum integrierte Neutronenstrom senkrecht zur Oberfläche verschwinden.

Ist  $n(R)$  die in einem Randpunkt  $R$  nach außen weisende Flächennormale vom Betrag 1, so gilt nach MARSHAK

$$(j_i(R) n(R)) = \frac{1}{2} \varphi_i(R). \quad (13)$$

Eliminieren wir  $j_i$  durch (11a), so geht (13) über in

$$\varphi_i(R) = -2 \sum_k d_{ik} \frac{\partial}{\partial n} \varphi_k(R). \quad (14a)$$

$\partial/\partial n$  bezeichnet die Differentiation in Richtung der äußeren Normalen  $n$ . (14a) geht, wie man leicht sieht, im Fall der Mehrgruppen-Diffusionsgleichungen (gekennzeichnet durch  $b_{ik} = d_{ik} = 0$  für  $k \neq i$ ,  $d_{ii} = D_i = \frac{1}{3} \lambda_{tr,i} = \frac{1}{3} \Sigma_{tr,i}^{-1}$ ) über in den bekannten Ausdruck

$$\varphi_i(R) = -\frac{2\lambda_{tr,i}}{3} \frac{\partial}{\partial n} \varphi_i(R). \quad (14b)$$

Die Marshaksche Randbedingung für den Fluß und die ähnlich abzuleitende Bedingung für die Einflußfunktion schreiben sich vektoriell

$$\vec{\varphi}(R) = -2 \mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial n} \vec{\varphi}(R), \quad (15a)$$

$$\vec{\varphi}^*(R) = -2 \mathfrak{D}^* \frac{\partial}{\partial n} \vec{\varphi}^*(R). \quad (15b)$$

Im folgenden betrachten wir (15a) nur als einen speziellen Fall aus einer Klasse von Randbedingungen

$$\vec{\varphi}(R) = -\mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial n} \vec{\varphi}(R). \quad (16)$$

Dabei kann  $\mathfrak{M}$  irgendeine Matrix sein, welche in allgemeiner Form den am Rand gegebenen Fluß und seine Ableitung aus den verschiedenen Gruppen verknüpft.  $\mathfrak{M}$  erfaßt so die Rückwirkung irgendeines äußeren Mediums auf den hier allein betrachteten Core-Bereich.

*Kritikalität in einfachen Geometrien*

Der betrachtete Reaktor ist kritisch, wenn das System der Differentialgleichungen (12a) eine im Inneren, positive, der Randbedingung (16) genügende Lösung hat.

In den einfachsten Geometrien, auf die wir uns jetzt beschränken, können wir die allgemeinen Lösungen der Gl. (12) in der Form

$$\vec{\varphi}(r) = \xi f(\mu r) + \sum_{2 \leq i \leq G} \alpha_i \eta_i f(v_i r), \quad (17a)$$

$$\vec{\varphi}^*(r) = \xi^* f(\mu r) + \sum_{2 \leq i \leq G} \beta_i \eta_i^* f(v_i r) \quad (17b)$$

ansetzen. Hierin ist  $f(v_i r)$  eine der Geometrie angepaßte, für  $r=0$  reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta f + v_i^2 f = 0. \quad (18)$$

$$f(v_i r) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos v_i r & \text{für ebene Geometrie,} \\ J_0(v_i r) & \text{für Zylindergeometrie,} \\ \frac{\sin v_i r}{v_i r} & \text{für Kugelgeometrie.} \end{array} \right\} \quad (19)$$

Die Buckling-Werte  $v_i^2, v_k^2$  sind dabei Eigenwerte zu

$$\mathfrak{A} \eta_i - v_i^2 \mathfrak{D} \eta_i = 0, \quad (20a)$$

$$\mathfrak{A}^* \eta_k^* - v_k^2 \mathfrak{D}^* \eta_k^* = 0. \quad (20b)$$

Die Beziehungen (18), (19), (20a, b) gelten mit den Gleichsetzungen

$$v_1 = \mu, \quad \eta_1 = \xi, \quad \eta_1^* = \xi^*$$

für alle  $i=1, 2, \dots, G$ .

Multiplikation von (20a) bzw. (20b) von links mit  $\eta_k^*$  bzw.  $\eta_i$  und anschließende Subtraktion führt in bekannter Weise über

$$(v_i^2 - v_k^2) \eta_k^* \mathfrak{D} \eta_i = 0 \quad (21)$$

zu der im folgenden herangezogenen Orthogonalitätsbeziehung

$$\eta_k^* \mathfrak{D} \eta_i = 0 \quad \text{für } i \neq k. \quad (22)$$

Auf Sonderfälle, wie mehrfache Eigenwerte, soll hier nicht eingegangen werden, da sich auf sie alles Wesentliche durch entsprechenden Grenzübergang überträgt.

Unter dem (reellen) Fundamental-Buckling  $\mu^2 = v_1^2$  verstehen wir den Eigenwert der Gl. (20) mit dem positivsten Realteil. Die durch die Bezeichnungen  $\mu, \xi, \xi^*$  hervorgehobenen Anteile der Lösungen (17) sind sogenannte persistente Eigenlösungen von (12), alle anderen Beiträge beschreiben räumliche Transienten. Es ist, auch bei einer großen Zahl  $G$  der Gruppen, relativ einfach, dieses Fundamental-Buckling  $\mu^2$  mit

den Eigenvektoren  $\xi, \xi^*$  zu ermitteln. Im folgenden gelten  $\mu^2, \xi, \xi^*$  als bekannt und unveränderlich.

Die kritische Reaktordimension  $R$  — für ebene Geometrie die Halbdicke, sonst der Radius — ist dadurch bestimmt, daß für ihn die Randbedingung (16) durch den Ansatz (17a) mit passend bestimmten  $\alpha_i$  zu erfüllen ist. Die hierin angedeutete direkte Lösung erfordert jedoch die Ermittlung aller Eigenwerte  $v_i^2$  von (20) und die anschließende Auflösung eines ausgedehnten Systems transzendenter Gleichungen. Dies ist für viele Gruppen praktisch nicht durchführbar.

Man wird daher, sobald die Transienten in (17) wesentlich beitragen, eine direkte numerische Behandlung der Differentialgleichung (12a) in der gewählten Geometrie vorziehen.

Sind diese Transienten jedoch, was für unreflektierte Reaktoren eher zutrifft, als Korrekturterme zu betrachten, so bieten sich Näherungsverfahren an.

INÖNÜ [1] hat für die Mehrgruppen-Diffusionstheorie eine Vorschrift angegeben, wie die Marshaksche Randbedingung bei gruppenabhängiger Transportweglänge  $\lambda_{tr,i} = \Sigma_{tr,i}^{-1}$  in 1. Ordnung zu berücksichtigen ist. Im folgenden wird auf einem anderen Weg ein allgemein gültiger Ausdruck abgeleitet, der im Spezialfall der Diffusionstheorie mit der Inönüschen Vorschrift verträglich ist.

*Störungstheoretische Behandlung*

Ein Sonderfall der Randbedingung (16) liegt vor, wenn  $\mathfrak{M}$  Vielfaches der Einheitsmatrix ist

$$\mathfrak{M} = l \mathfrak{E}. \quad (23)$$

$l$  ist die (nicht mehr gruppenabhängige) Extrapolationslänge. In diesem Trivialfall ergeben (17a), (16)

$$\vec{\varphi}(r) = \xi f(\mu r), \quad (24)$$

$$\mu l = - \frac{f(\mu R)}{f'(\mu R)}. \quad (25)$$

Der ' bezeichnet die Ableitung nach dem vollständigen Argument  $(\mu r)$ . (25) ist leicht exakt zu lösen. Ist nun  $\mu R_0$  die erste Nullstelle von  $f(\mu r)$ , so gilt bis auf Glieder 2. Ordnung

$$f(\mu R) \approx f'(\mu R) \mu (R - R_0), \quad (26a)$$

$$R \approx R_0 - l. \quad (26b)$$

Der einfachste, nie realisierte Fall liegt vor, wenn  $l=0$  und damit  $R=R_0$  ist. Von diesem Fall als 0-ter Näherung gehen wir im folgenden aus.

Wir multiplizieren die Randbedingung (16) rechts mit einem Störparameter  $c$ , der Werte zwischen 0 und 1 annimmt.  $c=1$  entspricht der gesuchten, wahren Lösung.

$$\vec{\varphi}(R, c) = -c \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial r} \vec{\varphi}(R, c). \quad (27a)$$

Die räumliche Flußverteilung  $\vec{\varphi}(r, c)$  und die kritische Größe  $R(c)$  werden Funktion von  $c$  und sind nach  $c$  zu entwickeln,

$$\vec{\varphi}(r, c) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^{\nu}}{\partial c^{\nu}} \vec{\varphi}(r, 0) \right) \frac{c^{\nu}}{\nu!}, \quad (27b)$$

$$R(c) = R_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{d^{\nu}}{d c^{\nu}} R(0) \right) \frac{c^{\nu}}{\nu!} \quad (27c)$$

$\vec{\varphi}(r, c)$  normieren wir durch die Vorschrift, daß der Beitrag der persistenten Lösung,  $\xi f(\mu r)$ , nicht von  $c$  abhängt, sondern nur die  $\alpha_i = \alpha_i(c)$  in (17a). Durch die Orthogonalitätsbeziehung (22) läßt sich dies wie folgt ausdrücken:

$$\left( \xi^* \mathfrak{D} \frac{\partial}{\partial c} \vec{\varphi}(r, c) \right) = \frac{\partial}{\partial c} \left( \xi^* \mathfrak{D} \xi f(\mu r) \right) \equiv 0. \quad (28)$$

Nun liegt für  $c=0$  der oben angeführte Trivialfall vor, mit  $R=R_0$ ,  $f(\mu R)=0$ ,  $\vec{\varphi} = \xi f(\mu r)$ .

Wir entwickeln deshalb die Randbedingung (27a) an der Stelle  $c=0$ , hier bis zu Gliedern 2. Ordnung in  $c$ :

$$\left. \begin{aligned} & \vec{\varphi} + \left( \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \frac{dR}{dc} + \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial c} \right) c + \left( \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial r^2} \left( \frac{dR}{dc} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial r \partial c} \frac{dR}{dc} + \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \frac{d^2 R}{dc^2} + \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial c^2} \right) \frac{c^2}{2} + \dots \\ & = - \mathfrak{M} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} c - 2 \mathfrak{M} \left( \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial r^2} \frac{dR}{dc} + \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial r \partial c} \right) \frac{c^2}{2} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Bei den speziellen Argumenten  $r=R_0$ ,  $c=0$ , die in (29) für sämtliche Funktionen einzusetzen sind, gilt

$$\Delta \vec{\varphi} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \vec{\varphi} = -\mu^2 \vec{\varphi} = 0. \quad (30)$$

Die Geometrie-Kennzahl  $g$  im transformierten  $\Delta$ -Operator ist 0 für ebene, 1 für Zylinder- und 2 für Kugelgeometrie. Nach den aus (30) folgenden Umformungen in (29) ergibt der Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \frac{dR}{dc} + \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial c} + \mathfrak{M} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} = 0, \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \frac{d^2 R}{dc^2} - \frac{g}{R_0} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \left( \frac{dR}{dc} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial r \partial c} \frac{dR}{dc} + \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial c^2} + \\ & \quad + 2 \mathfrak{M} \left( \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial r \partial c} - \frac{g}{R_0} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \frac{dR}{dc} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(31), (32) und die entsprechenden, höhere Ableitungen nach  $c$  enthaltenden Gleichungen gelten, wie oben ausgeführt, nur für die Argumente  $c=0$ ,  $r=R_0$ .

Multipliziert man (31) von links mit  $\xi^* \mathfrak{D}$ , so erhält man bei Ausnutzung von (28) zur Elimination von  $\partial \vec{\varphi} / \partial c$

$$\left( \frac{dR}{dc} \xi^* \mathfrak{D} + \xi^* \mathfrak{D} \mathfrak{M} \right) \xi \mu f'(\mu R_0) = 0, \quad (33)$$

$$\boxed{\frac{dR(0)}{dc} = - \frac{\xi^* \mathfrak{D} \mathfrak{M} \xi}{\xi^* \mathfrak{D} \xi}} \quad (34)$$

Diese Gl. (34) gestattet die praktische Berechnung der Extrapolationslänge des Reaktors in 1. Ordnung, denn nach (27c) ist ja die kritische Größe  $R$  in 1. Ordnung

$$R = R(1) \approx R_0 + \frac{dR(0)}{dc}. \quad (27d)$$

Setzen wir in (34) für  $\mathfrak{M}$  den Sonderfall (23) ein, so bestätigen wir die Näherung (26b), da in diesem Fall gilt

$$\frac{dR(0)}{dc} = -l. \quad (35)$$

Von größerer Bedeutung ist, daß mit  $\frac{dR(0)}{dc}$  alle Größen in (31) bis auf  $\frac{\partial}{\partial c} \vec{\varphi}(R_0, 0)$  bekannt sind. Diese Größe ist also aus (31) ebenfalls elementar zu ermitteln.

Die hieran anschließende Möglichkeit, höhere Korrekturen der kritischen Größe  $R$  zu berechnen, soll im folgenden Absatz nur skizziert werden.

#### Höhere Korrekturen der kritischen Größe $R$

Die für  $r < R_0$  reguläre Funktion  $\frac{\partial}{\partial c} \vec{\varphi}(r, c)$  genügt offenbar der Differentialgleichung (12a),

$$\mathfrak{D} \Delta \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial c} + \mathfrak{M} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial c} = 0, \quad (12a')$$

speziell auch für  $c=0$ . Für diesen Parameter kennen wir nach obigem den Randwert für  $r=R_0$ . Somit reduziert sich das Problem, die von der Randbedingung (16) im Inneren des Reaktors hervorgerufene Abweichung 1. Ordnung des Flusses von der persistenten Lösung  $\xi f(\mu r)$ , das ist  $\frac{\partial}{\partial c} \vec{\varphi}(r, 0)$ , zu berechnen, auf die Lösung einer Randwertaufgabe (12a'). Wenngleich dies praktisch wohl nur durch numerische Integration erfolgen kann, erscheint diese Aufgabe doch wesentlich einfacher als das ursprünglich vorliegende Eigenfunktionsproblem.

Setzen wir voraus, daß  $\frac{\partial}{\partial c} \vec{\varphi}(r, 0)$  ermittelt wurde, so kennen wir den in (32) auftretenden Term  $\frac{\partial^2}{\partial r \partial c} \vec{\varphi}(R_0, 0)$ . Multiplizieren wir nun (32) von links mit  $\xi^* \mathfrak{D}$ , ziehen die Beziehungen (28) und (34) heran, so gelangen wir durch einfache Umformungen zu

$$\frac{d^2 R(0)}{dc^2} = - \frac{2 \xi^* \mathfrak{D} \mathfrak{M} \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial r \partial c}(R_0, 0)}{\mu f'(\mu R_0) \xi^* \mathfrak{D} \xi} - \frac{g}{R_0} \left( \frac{dR(0)}{dc} \right)^2. \quad (36)$$

Der zweite Term in (36) liefert mit  $g=1$  bzw. 2 eine rein geometrische Korrektur für Zylinder- bzw. Kugelprobleme.

Nunmehr ist  $\frac{\partial^2}{\partial c^2} \vec{\varphi}(R_0, 0)$  aus (32) elementar zu berechnen, woran der nächste, vollkommen analoge Schritt anschließen könnte. Nach diesem Hinweis auf die mögliche Gewinnung höherer Korrekturen der kritischen Größe  $R$  wenden wir uns wieder der praktischen Formel (34) zu.

#### MARSHAKs Randbedingung, INÖNÜs Vorschrift

Setzen wir MARSHAKs Bedingung (15a) in (34) ein, so erhalten wir in 1. Ordnung die Extrapolationslänge

$$\boxed{l = \frac{2 \xi^* \mathfrak{D} \xi}{\xi^* \mathfrak{D} \xi}} \quad (37a)$$

In der Diffusionstheorie, vgl. (14b), vereinfacht sich (37a) zu

$$l = \frac{2}{3} \frac{\sum_i \varphi_i^* \lambda_{tr, i}^2 \varphi_i}{\sum_i \varphi_i^* \lambda_{tr, i} \varphi_i} \quad (37b)$$

bzw. zur entsprechenden Formel mit 0,71 statt  $\frac{2}{3}$  als Faktor. Da Mißverständnisse hier ausgeschlossen sind, bezeichnen wir die Komponenten von  $\xi$ ,  $\xi^*$  wie üblich mit  $\varphi_i$ ,  $\varphi_i^*$ .

INÖNÜ [1] beweist, daß in der Diffusionstheorie die Kritikalität in 1. Ordnung richtig herauskommt, wenn man in jeder Gruppe das Buckling konstant gleich  $B_i^2$  setzt

$$B_i^2 = \left( \frac{a}{R_{eff, i}} \right)^2. \quad (38a)$$

Die Konstante  $a$  hängt von der Geometrie ab und interessiert hier nicht weiter. Die effektive Core-Größe  $R_{\text{eff},i}$  für Neutronen der  $i$ -ten Gruppe ist dabei

$$R_{\text{eff},i} = R + 0,71 \lambda_{\text{tr},i}, \quad (38b)$$

wenn  $R$  die wahre Größe ist. Wir erinnern uns daran, daß

$$R + l = R_0 \quad (39a)$$

gilt und

$$\mu^2 = \left(\frac{a}{R_0}\right)^2 \quad (39b)$$

Eigenwert zu (20a) ist. Die Einführung der effektiven Gruppen-Bucklings  $B_i^2$  durch INÖNÜ kann aufgefaßt werden als Änderung der Diagonalelemente  $a_{ii}$  von  $\mathfrak{A}$  in (20a) um

$$\delta a_{ii} = D_i(\mu^2 - B_i^2). \quad (40)$$

Wenn diese Variation keinen Einfluß 1. Ordnung auf die Kritikalität hat, so muß nach der Störungstheorie

$$\sum_i \varphi_i^* \delta a_{ii} \varphi_i = \sum_i \varphi_i^* \frac{\lambda_{\text{tr},i}}{3} (\mu^2 - B_i^2) \varphi_i = 0 \quad (41)$$

gelten. Nun ist

$$\mu^2 - B_i^2 = \left(\frac{a}{R_0}\right)^2 \frac{(R + 0,71 \lambda_{\text{tr},i})^2 - (R + l)^2}{(R + 0,71 \lambda_{\text{tr},i})^2} \quad (42a)$$

und bei Streichung von Gliedern 2. Ordnung in  $\lambda_{\text{tr},i}/R_0$  — wie dies INÖNÜ in seinem Beweis ebenfalls tut —

$$\mu^2 - B_i^2 \approx \frac{2}{R_0} \left(\frac{a}{R_0}\right)^2 (0,71 \lambda_{\text{tr},i} - l). \quad (42b)$$

(42b) in (41) eingesetzt, liefert

$$\sum_i \varphi_i^* \lambda_{\text{tr},i} (0,71 \lambda_{\text{tr},i} - l) \varphi_i = 0, \quad (43)$$

was mit unserem Ausdruck (37b) bis auf den Faktor 0,71 übereinstimmt.

Damit ist gezeigt, daß für die Diffusionstheorie INÖNÜs Vorschrift im Sinne der Störungstheorie 1. Ordnung mit der obigen, allgemeiner geltenden Formel (34) übereinstimmt.

Abschließend sei vermerkt, daß bei fehlender Energieabhängigkeit der Einflußfunktion  $\varphi^*$  die Gl. (37b) übergeht in den im Lehrbuch von WEINBERG-WIGNER [2], S. 475, angeführten Ausdruck.

**Literatur:** [1] INÖNÜ, E.: Proc. of the 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1958, vol. 16, p. 701. — [2] WEINBERG, A.M., and E.P. WIGNER: The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. Chicago: University Press 1958. — [3] HUMMEL, H.H., and A.L. RAGO: IAEA-Seminar on the Physics of Fast and Intermediate Reactors, Wien 1961, SM-18/45. — [4] JOANOU, G.D., and I.S. DUDEK: US-Report GA-1850 (1961).