

KFK-133

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

Januar 1963

KFK 133

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Zur Definition einer geeigneten „mittleren“ Stoßzahl bei der
Abbremsung von Neutronen

H. Küsters

KERNREAKTOR
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.,
Verwaltung der Zentralbücherei

2. Apr 1963



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

KERNREAKTOR

Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.
Verwaltung der Zentrallbücherei

Zur Definition einer geeigneten „mittleren“ Stoßzahl bei der Abbremsung von Neutronen

Von H. KÜSTERS

(Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik des Kernforschungszentrums Karlsruhe)

Mit 5 Textabbildungen

(Eingegangen am 30. Juli 1962)

Zusammenfassung. Bei der Abbremsung von Neutronen einer bestimmten Anfangsenergie E_0 an ruhenden Moderatoratomen wird die mittlere Stoßzahl, die zur Bremsung unter eine Energie E_T führt, üblicherweise unter Benutzung des mittleren logarithmischen Energiedekrementes ξ berechnet. Mathematisch völlig äquivalent dieser Berechnung der Stoßzahl (aus der erreichten mittleren Lethargie nach n -Stößen) ist die Bestimmung aus der mittleren Energie nach n -Stößen. Diese Verfahren sind lediglich approximativ, da die so definierten Stoßzahlen nicht durch Mittelung über die entsprechenden Verteilungsfunktionen gewonnen werden. Die entstehenden Fehler werden in dieser Arbeit diskutiert. Es zeigt sich, daß die aus der erreichten mittleren Lethargie bestimmten Stoßzahlen für Streuer mit kleiner Massenzahl nur wenig von den exakten Werten abweichen. Dagegen sind die aus der Energiemittelung gewonnenen Werte stets zu groß. Im Grenzfall schwerer Streuzentren (große Massenzahl) gehen die aus der erreichten mittleren Lethargie gewonnenen Stoßzahlen über in die exakt berechneten mittleren Stoßzahlen. Durch statistische Betrachtungen gewinnt man daraus eine lineare Beziehung zwischen Lethargie und Stoßzahl für Streuungen an schweren Kernen.

Obwohl die grundsätzliche Begriffsbestimmung allgemein bekannt ist, findet man in der Literatur über Neutronenphysik [1] den in dieser Arbeit behandelten Vergleich nur unvollständig aufgeführt.

1. Streuung von Neutronen an Wasserstoff

Von Neutronen der Anfangsenergie E_0 wird nach dem ersten Stoß der Bruchteil dE/E_0 bei isotoper Streuung im Schwerpunktsystem im Intervall E bis

$E + dE$ liegen. Die Energieverteilungsfunktion ist also nach dem ersten Stoß:

$$f_1(E) dE = \frac{dE}{E_0}. \quad (1)$$

Durch den zweiten Stoß können nur Neutronen in das Intervall dE gelangen, deren Energie E' vorher zwischen E und E_0 lag. Die Zahl der Neutronen, die sich vor dem zweiten Stoß im Intervall dE' befanden, ist $f_1(E')dE'$; von diesen gelangt der Bruchteil dE/E' nach dE . Also folgt:

$$f_2(E)dE = dE \int_E^{E_0} \frac{f_1(E')dE'}{E'} = \frac{dE}{E_0} \ln \frac{E_0}{E}. \quad (2)$$

Die Anzahl der Neutronen vor dem n -ten Stoß im Intervall dE' ist gegeben durch $f_{n-1}(E')dE'$, so daß allgemein gilt:

$$f_n(E)dE = dE \int_E^{E_0} \frac{f_{n-1}(E')dE'}{E'}. \quad (3)$$

Sukzessive Berechnung liefert

$$f_n(E)dE = \frac{dE}{E_0(n-1)!} \left(\ln \frac{E_0}{E} \right)^{n-1}. \quad (4)$$

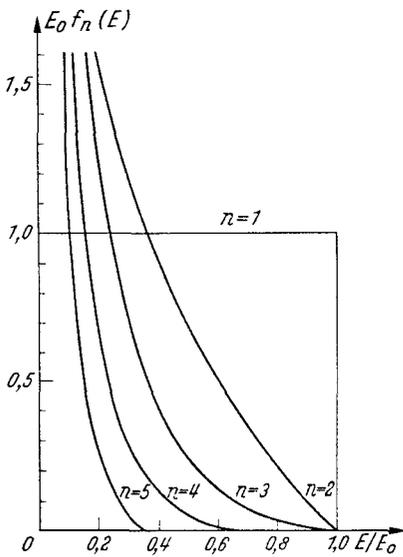


Abb. 1. Energieverteilung bei der Abbremsung von Neutronen durch Protonen

In Abb. 1 sind die Verteilungsfunktionen $E_0 \cdot f_n(E)$ für $n=1$ bis $n=5$ aufgetragen. Die wahrscheinlichste Energie E_n^w nach n -Stößen ergibt sich aus dem Maximum der Verteilungsfunktion $f_n(E)$, d.h. für alle $n > 1$ ist

$$E_n^w = 0. \quad (5)$$

Die mittlere Energie \bar{E}_n der Neutronen nach n -Stößen ist (im Sinne eines statistischen Erwartungswertes) gegeben durch

$$\bar{E}_n = \frac{\int_0^{E_0} E f_n(E) dE}{\int_0^{E_0} f_n(E) dE}. \quad (6)$$

Gl. (6) liefert zusammen mit Gl. (4)

$$\bar{E}_n = \frac{E_0}{2^n}. \quad (7)$$

Man erkennt aus (6), daß die große Zahl der Neutronen mit sehr kleiner Energie infolge Multiplikation mit E praktisch nicht ins Gewicht fallen, daß also der Wert von \bar{E}_n wesentlich bestimmt wird durch die wenigen Neutronen größerer Energie. Die meisten Neutronen

werden demnach eine kleinere Energie besitzen als Gl. (7) angibt. Die Differenz zwischen mittlerer und wahrscheinlichster Energie ist in diesem Falle groß und gegeben durch

$$\bar{E}_n - E_n^w = \frac{E_0}{2^n}. \quad (8)$$

Führt man als Variable die Lethargie

$$u = \ln \frac{E_0}{E} \quad (9)$$

ein, so erhält man statt (4):

$$f_n(u) du = \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du. \quad (10)$$

Diese Verteilungen sind in Abb. 2 für $n=1$ bis $n=4$ dargestellt. Die Lethargiedarstellung enthält im Gegensatz zur Energiedarstellung keine Singularität in der Verteilungsfunktion. Diese an sich triviale Feststellung hat aber zur Folge, daß die wahrscheinlichste Lethargie endlich ist und nicht $u_n^w = \infty$, wie man aus Gl. (5) und Gl. (9) schließen würde. Man erhält aus Gl. (10):

$$u_n^w = n - 1. \quad (11)$$

Der wahrscheinlichste Lethargiewert nimmt also mit der Anzahl der Stöße zu. Statt Gl. (7) ergibt sich:

$$\bar{u}_n = n. \quad (12)$$

Damit wird

$$\bar{u}_n - u_n^w = 1 \quad (13)$$

unabhängig von n .

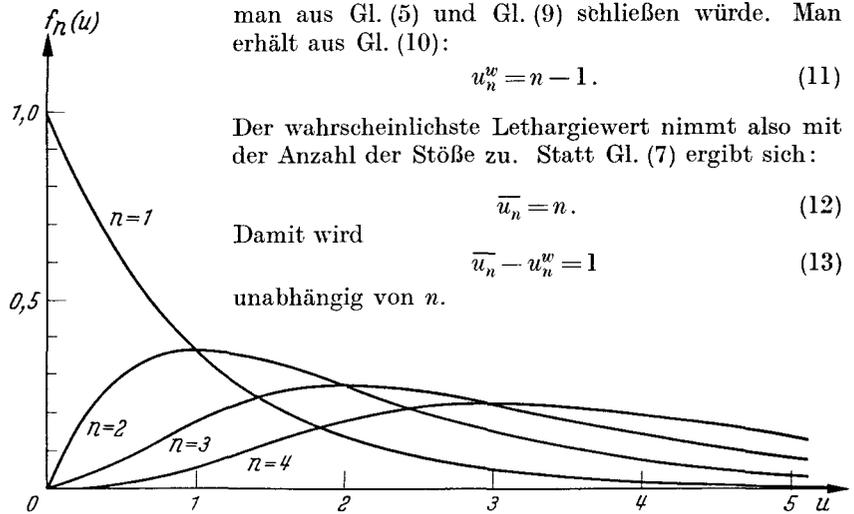


Abb. 2. Lethargieverteilung bei der Abbremsung von Neutronen durch Protonen

In der Regel führt man in der Abbremsstheorie das mittlere logarithmische Energiedekrement ξ pro Stoß ein:

$$\xi = \bar{u}_{r+1} - \bar{u}_r = 1. \quad (14)$$

Da ξ bei isotroper Streuung im Schwerpunktsystem nur von der Massenzahl abhängt, gilt allgemein:

$$\bar{u}_n = n\xi. \quad (15)$$

Gl. (15) wird allgemein dazu benutzt, um die mittlere Anzahl der Stöße \bar{n} zu bestimmen, die ein Neutron erleiden muß, um von einer Anfangsenergie E_0 (z.B. 2 MeV) auf irgendeine Energie E (z.B. $E = E_T = 0,025$ eV) abgebremst zu werden, indem man die in Gl. (15) oder Gl. (12) auftretende Stoßzahl n mit der mittleren Stoßzahl \bar{n} identifiziert. Durch Einführung dieser Identifizierung ($n = \bar{n}_L$, der Index L steht für „Lethargie“) folgt mit $\bar{u}_n = u_T = \ln \frac{E_0}{E_T}$

$$\bar{n}_L = \frac{u_T}{\xi} = \frac{18,2}{\xi}. \quad (16)$$

Für Wasserstoff ($\xi = 1$) wird also:

$$\bar{n}_L = 18,2. \quad (17)$$

Es ist selbstverständlich, daß Gl. (16) oder (17) nur eine näherungsweise Berechnung der mittleren Stoßzahl erlaubt, da nur die Lethargie gemittelt wurde. In derselben Weise und formal gleichberechtigt neben (16) kann man die Stoßzahl auch aus der erreichten mittleren Energie nach n -Stößen bestimmen, und zwar folgt aus Gl. (7) mit $\bar{E}_n = E_T$:

$$\bar{n}_E = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{E_0}{E_T} = 26,2. \quad (18)$$

Die Diskrepanzen zwischen den Zahlenwerten der Gln. (16) und (18) kommen von der verschiedenen Art des Mittelungsprozesses (einmal über den Logarithmus der Energie, zum anderen über die Energie selbst), die in den genannten approximativen Verfahren zur Bestimmung der mittleren Stoßzahlen benutzt werden.

Die Gln. (4) und (10) sind nicht nur als Verteilungen der Energie oder Lethargie der Neutronen nach n -Stößen anzusehen. Vielmehr sind diese Funktionen kombinierte Verteilungsfunktionen in n und E oder n und u . $f_n(u) du$ ist gleich der Anzahl der Neutronen in du im Stoßintervall $\Delta n = n + 1 - n = 1$. Das

Integral $\int_0^\infty f_n(u) du = f_n$ ist also die Gesamtzahl der Neutronen, die im Stoßintervall Δn liegen. Verfolgen wir nur ein Neutron bei der Abbremsung, so muß bei fehlender Absorption $f_n = 1$ sein. Denn in dem betrachteten Lethargieintervall $0 \leq u \leq \infty$ wird mit Sicherheit der Stoß n auftreten. Die Größe $\frac{f_n(u) du}{f_n}$

ist dann die Anzahl der Neutronen, die zwischen n und $n + 1$ -Stößen eine Lethargie zwischen u und $u + du$ besitzen, dividiert durch die Gesamtzahl der Neutronen zwischen n und $n + 1$ -Stößen. Damit ist dieser Quotient genau die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach n -Stößen das Neutron die Lethargie u besitzt, also gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit $f(u/n) du$. In der normierten Form $f_n = 1$ [vgl. (10)] ist $f(u/n) = f_n(u)$. Weiter ist die Größe $f(u) du = \sum_{n=1}^\infty f_n(u) du$ gleich der Anzahl aller Neutronen, die durch

alle möglichen Stöße nach du bei u kommen können. Bei fehlender Absorption werden alle diese Neutronen ihren nächsten Streustoß in du bei u machen; somit ist $f(u) du$ auch gleich der Anzahl der Stöße in du bei u , $f(u)$ selbst also die Stoßdichte. Die Ausführung der Summation liefert $f(u) = 1$, die bekannte Tatsache, daß die Stoßdichte für Wasserstoff konstant (und gleich der Quellstärke $Q = 1$) ist. Die Größe $\frac{f_n(u) du}{f(u) du}$ ist dann die Anzahl der Neutronen bei u mit Stößen zwischen n und $n + 1$ dividiert durch die Anzahl aller möglichen Stöße, d.h. also die bedingte Wahrscheinlichkeit $f(n/u)$ dafür, daß der $n + 1$ -Stoß bei u stattfindet bzw. der n -te Stoß zu u führt (Stoßverteilung). Wegen $f(u) = 1$ ist wieder $f(n/u) = f_n(u)$, so daß also Stoß- und Lethargieverteilungsfunktionen direkt durch Gl. (10) gegeben sind. Die zweidimensionale Verteilungsfunktion selbst ist nicht normierbar, da bei Berücksichtigung des ganzen Lethargieintervalls $0 \leq u \leq \infty$ es (endlich viele) Neutronen gibt, die unendlich viele Stöße benötigen, um $u = \infty$ zu erreichen, so daß die Norm $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n(u) du$ divergiert.

Betrachtet man also Gl. (4) oder Gl. (10) als Verteilung der Stöße bei vorgegebenem u_T oder E_T , so

ist die Definition einer mittleren Stoßzahl evident, womit man auf die üblicherweise benutzte genäherte Berechnung verzichten kann. Es ist nämlich („ex“ bedeute exakt):

$$\bar{n}_{\text{ex}} = \frac{\sum_{n=1}^\infty n \cdot f_n(E_T)}{\sum_{n=1}^\infty f_n(E_T)} = \frac{\sum_{n=1}^\infty n \cdot f_n(u_T)}{\sum_{n=1}^\infty f_n(u_T)}. \quad (19)$$

Es muß natürlich bei dem richtigen Mittelungsprozeß das Ergebnis unabhängig davon sein, in welcher Variablen man das Problem untersucht. Es ergibt sich:

$$\bar{n}_{\text{ex}} = \ln \frac{E_0}{E_T} + 1 = u_T + 1 = 19,2. \quad (20)$$

Als weitere Größe kann man noch die wahrscheinlichste (häufigste) Stoßzahl n_w definieren bei vor-

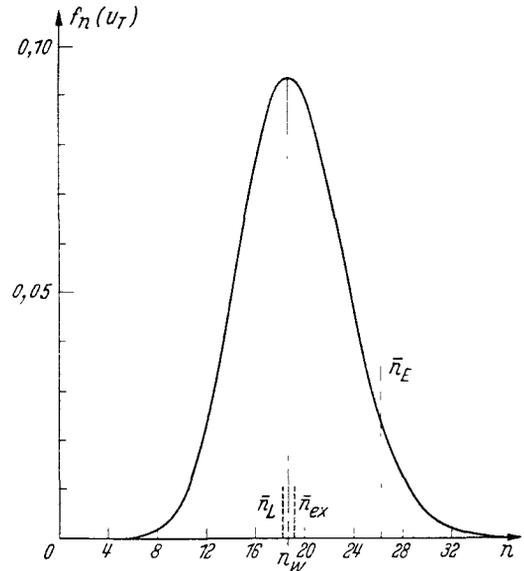


Abb. 3. Stoßverteilung bei der Abbremsung von Neutronen durch Protonen

gegebenem E_0/E_T oder u_T . Sie ergibt sich als Maximum der Verteilungsfunktion $f_n(u_T)$ oder $f_n(E_T)$. Und zwar folgt aus

$$\frac{d \ln f_n}{dn} = \frac{f'_n}{f_n} = \ln u_T - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \ln u_T$$

[$\Gamma(n)$ ist die Gammafunktion, $\Gamma'(n)$ deren Ableitung].

Für große n gilt die Entwicklung

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \ln n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} \pm \dots \quad (22)$$

Daraus ergibt sich für $u_T = 18,2$ die wahrscheinlichste Stoßzahl

$$n_w = 18,7. \quad (23)$$

In Abb. 3 ist die Stoßverteilung $f_n(u_T)$ für $u_T = 18,2$ aufgetragen (vgl. E. AMALDI [1]). Die geringe Asymmetrie der Kurve ist für die endliche Differenz $\bar{n}_{\text{ex}} - n_w$ verantwortlich; sie nimmt ab, je größer E_0 ist bei festem E_T . Man erkennt, wie eng benachbart die Werte von \bar{n}_L , \bar{n}_{ex} und n_w liegen. \bar{n}_E liefert eine viel zu große Stoßzahl (s. dazu auch eine Notiz von G.C. WICK [2]).

Da bei Abbremsproblemen in der Reaktorphysik z.B. zur Charakterisierung der Moderatorqualität entscheidend ist, nach wieviel Stößen der größte Teil der

Neutronen einen bestimmten Energiebetrag verloren hat, liefert die genäherte Berechnung der Stoßzahl aus der erreichten mittleren Lethargie nach n -Stößen das bessere Ergebnis als die Bestimmung aus der erreichten mittleren Energie, da die langsamen Neutronen im Gegensatz zur Energiedarstellung (s. weiter oben) in der Lethargie nahezu richtig gewichtet werden wegen $\bar{n}_L \approx \bar{n}_{ex}$ (s. dazu auch die Diskussion im Anschluß an die Behandlung der Streuung für $A > 1$).

2. Streuung von Neutronen
an Kernen der Massenzahl $A > 1$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron der Anfangsenergie E_0 nach dem ersten Stoß eine Energie zwischen E und $E + dE$ hat, ist gegeben durch

$$f_1(E) dE = \begin{cases} \frac{dE}{(1-\alpha)E_0} & \text{für } \alpha E_0 \leq E \leq E_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (24)$$

Dabei ist

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2. \quad (25)$$

Geht man zum Lethargiemaß über, so wird

$$f_1(u) du = \frac{e^{-u}}{1-\alpha} du. \quad (26)$$

Die Verteilung nach dem n -ten Stoß erhält man aus einer Gl. (3) analogen Rekursionsformel

$$f_n(u) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{u-q}^u f_{n-1}(u') e^{-(u-u')} du'. \quad (27)$$

q ist der maximale logarithmische Energieverlust (= maximaler Lethargiegewinn) pro Stoß:

$$q = 2 \ln \frac{A+1}{A-1}; \quad \alpha = e^{-q}. \quad (28)$$

Lösung von Gl. (27) ergibt [3], [4]

$$f_n(u) = \begin{cases} \frac{e^{-u}}{(n-1)!(1-\alpha)^n} \sum_{k=0}^{\bar{k}} (-1)^k \binom{n}{k} (u-kq)^{n-1} & \text{für } 0 \leq u \leq nq \\ 0 & \text{für } u > nq. \end{cases} \quad (29)$$

Die Summation über k ist stets soweit zu führen, daß jeder Term $(u-kq) > 0$ ist. Damit hat die Funktion $f_n(u)$ Unstetigkeiten in der ersten Ableitung an den Stellen $u = k \cdot q$, $k = 1, 2, \dots$. Für $n=2$ wird z.B.

$$f_2(u) = \frac{e^{-u}}{(1-\alpha)^2} \begin{cases} u & \text{für } 0 \leq u \leq q \\ 2q - u & \text{für } q \leq u \leq 2q \\ 0 & \text{für } u > 2q. \end{cases}$$

Ist $n \gg 1$, so läßt sich für Gl. (29) eine asymptotische Entwicklung angeben [4]:

$$f_n(u) \stackrel{as}{=} \frac{e^{-u}}{(1-\alpha)^n} q^{n-1} \left[\sqrt{\frac{6}{n\pi}} e^{-6n \left(\frac{u}{nq} - \frac{1}{2} \right)^2} \times \frac{\text{Sin } 6 \left(\frac{u}{nq} - \frac{1}{2} \right)}{6 \left(\frac{u}{nq} - \frac{1}{2} \right)} \right] \quad (30)$$

Hierbei bedeutet $\stackrel{as}{=}$ die asymptotische Gleichheit der Ausdrücke (29) und (30).

Das Maximum der Gl. (30) liegt in der Nähe von $u_w = \frac{1}{2} nq$ ($e^u \cdot f_n(u)$ hat das Maximum exakt bei $u = \frac{1}{2} nq$ und ist symmetrisch um diesen Wert). Dies können wir dazu benutzen, die asymptotische Form (30) weiter zu vereinfachen. Für sehr große n kann man nämlich in Gl. (30) den Term $\frac{\text{Sin } x}{x} \approx 1$ setzen, ohne daß auf den Flanken der Verteilung ein merklicher Fehler entsteht.

Man erhält:

$$f_n(u) \stackrel{as}{=} \frac{e^{-u}}{(1-\alpha)^n} q^{n-1} \sqrt{\frac{6}{n\pi}} \cdot e^{-6n \left(\frac{u}{nq} - \frac{1}{2} \right)^2}, \quad (31)$$

$$n \gg 1, \quad \left| \frac{u}{nq} - \frac{1}{2} \right| \ll 1.$$

Für $n=20$ weicht praktisch die asymptotische Form mit $A \geq 4$ nicht mehr von der strengen Darstellung ab, sogar für $n=10$ sind die Unterschiede bereits sehr klein ($< 4\%$ bei $A=4$). Die Berechnung der wahrscheinlichsten Stoßzahl aus Gl. (31) ist bereits für $A=2$ auf 1,2% genau (s. unten), so daß die wesentliche Bedingung für die asymptotische Darstellung $n \gg 1$ ist, und diese ist für $A=2$ mit $n=25$ schon gut erfüllt. Daher kann man ohne weiteres zur Untersuchung der Mittelwerte die asymptotische Darstellung (31) hernehmen. Es ist hier natürlich wie bei $A=1$ wieder $\int_0^\infty f_n(u) du = 1$, dagegen wird die Stoßdichte (asymptotisch) $f(u) = 1/\xi$ in Übereinstimmung mit der auf andere Weise bestimmten asymptotischen Stoßdichte. Das Maximum der Darstellung (31) bezüglich u , also die wahrscheinlichste Lethargie, ist gegeben durch

$$u_n^w = \frac{q \cdot n}{2} \left(1 - \frac{q}{6} \right). \quad (32)$$

Für die mittlere Lethargie nach n -Stößen erhält man

$$\bar{u}_n = \frac{q e^{-\frac{(q-6)^2 \cdot n}{24}}}{\sqrt{\frac{6\pi}{n}} \left(1 + \Phi \left[(6-q) \sqrt{\frac{n}{24}} \right] \right)} - \frac{(q-6)nq}{12}. \quad (33)$$

Dabei ist $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ das Fehlerintegral.

Da für $n \gg 1$ der erste Term in Gl. (33) zu vernachlässigen ist ($< 10^{-6}$ für $A=2$ mit $n=25$, $q=2,2$), folgt

$$\bar{u}_n = \frac{q \cdot n}{2} \left(1 - \frac{q}{6} \right). \quad (34)$$

Damit haben wir das wichtige Ergebnis, daß

$$\bar{u}_n - u_n^w = 0 \quad \text{für } A > 1, n \gg 1. \quad (35)$$

Transformiert man Gl. (31) auf Energieeinheiten, so ergibt sich

$$f_n(E) = \frac{q^{n-1}}{(1-\alpha)^n} \sqrt{\frac{6}{n\pi}} \cdot \frac{1}{E_0} e^{-6n \left(\frac{\ln \frac{E_0}{E}}{nq} - \frac{1}{2} \right)^2}. \quad (36)$$

Diese Verteilung hat ihr Maximum bei

$$E_n^w = E_0 e^{-\frac{n}{2} q} = E_0 \alpha^{\frac{n}{2}}. \quad (37)$$

Die mittlere Energie ergibt sich aus (36) zu:

$$\bar{E}_n = E_0 e^{-\frac{nq}{2}} \left(1 - \frac{q}{4} \right). \quad (38)$$

Aus der strengen Formel (29) ergibt sich

$$\overline{E}_n = E_0 \left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^n \tag{39}$$

Dies stimmt mit (38) bis auf Terme $O(q^3)$ überein, so daß $\overline{E}'_n \stackrel{as}{=} \overline{E}_n$. Die Differenz $\overline{E}_n - E_n^w$ verschwindet demnach nur mit $\frac{n(q)}{8} \cdot q^2$ für $q \rightarrow 0$ bzw. in der Näherung, in der $\sqrt{a^n}$ durch $\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n$ ersetzt werden kann. Das ist aber bei großem n für keinen vorkommenden Streuer erfüllt. Für $A = 238$ und $n = 2000$ ist $|\overline{E}_n - E_n^w| \approx 0,07$ im Gegensatz zur Lethargiedarstellung, wo schon bei $A = 2$ für $n \gg 1$ die entsprechende Differenz verschwindet.

Berücksichtigt man dagegen nur Terme in $1/A$, so unterscheiden sich Energie- und Lethargiemittelung nicht mehr voneinander. Da $q \rightarrow \frac{4}{A}$ und $\ln \frac{2}{1+\alpha} \rightarrow \frac{2}{A}$, folgt:

$$\overline{u}_n = \ln \frac{\overline{E}_0}{\overline{E}_n} \approx \ln \frac{E_0}{E_n} = n \cdot \frac{2}{A} + O\left(\frac{1}{A^2}\right) \tag{40}$$

Führt man wieder das mittlere logarithmische Energie-dekrement ξ ein, so ist:

$$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \tag{41}$$

Entwicklung für $A \gg 1$ liefert

$$\xi = \frac{1}{2} q - \frac{1}{12} q^2 + \dots \tag{42}$$

Vergleicht man Gl. (34) mit (42), so sieht man, daß die strenge Beziehung (15) bis auf Terme der Größenordnung $O(q^3)$ auch aus der asymptotischen Darstellung folgt, so lange also ξ gegeben ist durch $\xi \stackrel{as}{=} \frac{1}{2} q - \frac{1}{12} q^2$. Dies ist schon für $A > 10$ erfüllt.

Für die genäherten mittleren Stoßzahlen (s. Abschnitt 1) erhält man (die gestrichelten Größen sind aus der asymptotischen Entwicklung, die ungestrichlenen aus den strengen Formeln gebildet):

$$\overline{n}'_L = \frac{2u_T}{q\left(1-\frac{q}{6}\right)} \stackrel{as}{=} \frac{u_T}{\xi} = \overline{n}_L \text{ [aus (34), (42) und (15)]} \tag{43}$$

$$\overline{n}_E = \frac{\ln \frac{E_0}{E_T}}{\ln \frac{2}{1+\alpha}} \text{ [aus (39)]} \tag{44}$$

$$\overline{n}'_E = \frac{2 \ln \frac{E_0}{E_T}}{q\left(1-\frac{q}{4}\right)} \stackrel{as}{=} n_E \text{ [aus (38)]} \tag{45}$$

Vergleich von (45) und (43) zeigt, daß

$$\overline{n}'_E - \overline{n}'_L = \frac{u_T}{6} \tag{46}$$

Die aus der mittleren Energie berechneten Stoßzahlen sind also auch für $A \gg 1$ und $n \gg 1$ stets größer als die aus der mittleren Lethargie bestimmten Werte. Der Unterschied beträgt etwa drei Stöße für $u_T = 18,2$.

Entsprechend Gl. (19) läßt sich aus der asymptotischen Form (31) leicht die Größe \overline{n}_{ex} ausrechnen, wenn man die Summation über alle n -Werte durch eine Integration ersetzt, was sicherlich für große A und n erlaubt ist; jedenfalls sind die dadurch entstehenden Fehler kleiner als die Unterschiede, die hier diskutiert werden.

Man erhält:

$$\overline{n}'_{ex} = \frac{\int_0^\infty n f_n(u_T) dn}{\int_0^\infty f_n(u_T) dn} = \frac{\int_0^\infty z^2 e^{-a^2 z^2 - \frac{b^2}{z^2}} dz}{\int_0^\infty e^{-a^2 z^2 - \frac{b^2}{z^2}} dz} \tag{47}$$

für $A \gg 1, n \gg 1$.

Hierbei ist:

$$a^2 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \ln \frac{q}{1-\alpha} \right), \quad b^2 = \frac{6u_T^2}{q^2} \tag{48}$$

Die Integrale der Gl. (47) sind nur dann endlich, wenn $\ln \frac{q}{1-\alpha} < \frac{3}{2}$. Das ist aber für alle $A > 1$ der Fall.

Die Integration liefert:

$$\overline{n}'_{ex} = \frac{1+2ab}{2a^2} \tag{49}$$

Der Term $1/2a^2$ variiert von 0,83 für $A = 2$ bis 0,33 für $A = \infty$ ($\alpha = 1$). Für $A = 12$ ist $1/2a^2 = 0,37$. Für $A \gg 1$ kann man in Gl. (49) den Term $1/2a^2$ gegenüber b/a vernachlässigen und man erhält:

$$\overline{n}'_{ex} = \frac{b}{a} = \frac{2 \frac{u_T}{q}}{\sqrt{1 - \frac{2}{3} \ln \frac{q}{1-\alpha}}} \text{ für } A \gg 1 \tag{50}$$

Für die wahrscheinlichste (häufigste) Stoßzahl n_w erhält man durch Logarithmieren und nachfolgender Differentiation von Gl. (31)

$$n'_w = \frac{1}{4 \left(\ln \frac{q}{1-\alpha} - \frac{3}{2} \right)} \times \left(1 - \sqrt{1 - 96 \frac{u_T^2}{q^2} \left(\ln \frac{q}{1-\alpha} - \frac{3}{2} \right)} \right) \tag{51}$$

Vernachlässigt man in dem Wurzel Ausdruck die Eins gegen den zweiten Term ($3,1 \cdot 10^3$ für $A = 2$), so bekommt man mit (48)

$$n'_w = \frac{4ab-1}{4a^2} \tag{52a}$$

und daraus

$$n'_w = \frac{b}{a} \text{ für } A \gg 1 \tag{52b}$$

Demnach ist

$$n'_w - \overline{n}'_{ex} = 0 \text{ für } A \gg 1 \tag{53}$$

In Abb. 4 ist die unnormierte Stoßverteilung $f_n(u_T)$ für $A = 2$ nach der strengen Formel (29) aufgetragen ($u_T = 18,2$). Das Maximum liegt bei $n = 25,4$; aus der asymptotischen Darstellung folgt nach (51) $n_w = 25,7$, so daß also bereits für $A = 2$ n_w mit guter Genauigkeit aus der asymptotischen Form bestimmt werden kann. Die numerisch oder graphisch leicht bestimmbaren Maxima der strengen Verteilung stimmen für $A \geq 6$ mit den Werten der Gl. (51) überein. Für $A = 2$ liefert Gl. (49) $\overline{n}'_{ex} = 27$. Diese Abweichung gegenüber n_w rührt in erster Linie her von der Ersetzung der Summation über n durch eine Integration, was für $A = 2$ ($q = 2,2$) sicherlich noch nicht möglich ist. Immerhin beträgt der Fehler in diesem Fall nur 4% und nimmt rasch ab mit wachsendem A ($< 4\%$ bei $A = 12$). In Abb. 5 ist die (asymptotische) Stoßverteilung $f_n(u_T)$ für $A = 238$ aufgetragen. Bei Entwicklungen um $q = 0$ oder $\alpha = 1$ darf man nicht übersehen, daß

z.B. für $A = 238$ die Größe $q = 0,0168$ zwar sehr klein ist, aber in Gl. (44) oder (50) nicht gegen Eins vernachlässigt werden kann, da dann ein Fehler in der mittleren Stoßzahl der Größe $u_T/3$ (≈ 6) entsteht [s. auch Diskussion im Anschluß an Gl. (39)].

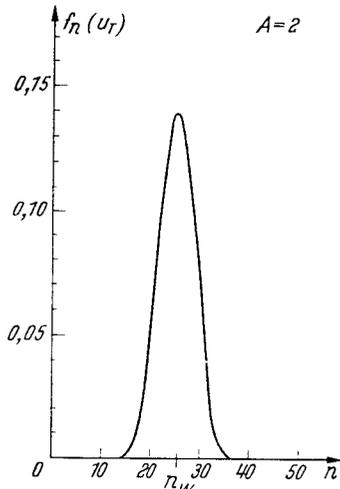


Abb. 4. Strenge Stoßverteilung bei der Abbremsung von Neutronen durch Deuterium

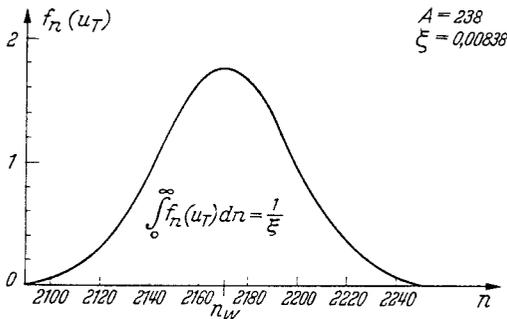


Abb. 5. Asymptotische Stoßverteilung bei der Abbremsung von Neutronen durch U 238 ($q = 0,0168$)

Entwickelt man in Gl. (50) den Wurzel Ausdruck bis zum linearen Glied in q (Entwicklung von n bis q^2), so ergibt sich

$$\bar{n}'_{ex} = \frac{2u_T}{q(1 - \frac{q}{6})} \quad \text{für } A \gg 1. \quad (54)$$

Daraus folgt durch Vergleich mit (44), daß *asymptotisch* gilt ($A \gg 1$):

$$\bar{n}'_{ex} = n'_w = \bar{n}'_L = \bar{n}_L. \quad (55)$$

Dagegen ist

$$\bar{n}'_E \approx \bar{n}'_{ex}. \quad (56)$$

Auflösung von Gl. (32) nach n liefert die gleiche Stoßzahl wie Gl. (43) oder Gl. (54). Hier ist also das üblicherweise benutzte Verfahren zulässig, die mittlere Stoßzahl aus der erreichten mittleren Lethargie (aber nicht Energie) nach n -Stößen zu ermitteln.

Mathematisch haben wir also folgenden Sachverhalt:

Der Erwartungswert \bar{n}'_{ex} der Verteilungsfunktion $f(n/u)$ bei vorgegebenem u ist asymptotisch ($A \gg 1$, $n \gg 1$) eine lineare Funktion der Größe u :

$$\bar{n} = \frac{1}{\xi} u; \quad \left(\xi \text{ as } \frac{q}{2} \left(1 - \frac{q}{6} \right) \right). \quad (57)$$

Diese Gerade (57) bezeichnet man in der Statistik als lineare Regressionskurve von n bezüglich u . Umgekehrt

ist der Erwartungswert \bar{u} der Verteilungsfunktion $f(u|n)$ eine lineare Funktion von n :

$$\bar{u} = \xi n. \quad (58)$$

Gl. (57) und (58) besagen, daß die Regressionslinien zusammenfallen. Das ist aber dann und nur dann möglich [5], wenn die Beziehungen (57) und (58) nicht nur für die Erwartungswerte gelten, sondern wenn allgemein gilt:

$$u = \xi n. \quad (59)$$

Damit hat man asymptotisch einen linearen Zusammenhang zwischen der Lethargie und der Stoßzahl, womit die Berechtigung des üblichen Verfahrens zur Bestimmung der mittleren Stoßzahl für $A \gg 1$ und $n \gg 1$ erwiesen ist. Für $A = 1$ fallen die ebenfalls linearen Regressionslinien nicht zusammen, wie man aus Gl. (12) und (20) abliest, so daß eine zu Gl. (59) analoge Beziehung nicht möglich ist, wenn man nur kleinere n und u betrachtet. Erst für $n \gg 1$ und $u \gg 1$ sind die Unterschiede vernachlässigbar klein, jedoch wird bei der Streuung an Wasserstoff dieser asymptotische Bereich nicht erreicht. Allerdings sind die Abweichungen im interessierenden (u, n) -Bereich relativ gering, so daß bei der Vertauschung der Mittelungsprozesse kein allzu großer Fehler in der Stoßzahl entsteht. Dies gilt erst recht für $A > 1$, und im Grenzfall schwerer Streuzentren ergeben sich die gleichen Werte.

In der Energiedarstellung fallen unter Berücksichtigung des Terms $\sim q^2$ (entspricht der Genauigkeit der Lethargiedarstellung) die Regressionskurven bei sämtlichen Streusubstanzen nicht zusammen, so daß die Berechnung der mittleren Stoßzahl aus der erreichten mittleren Energie stets fehlerhaft ist. Bei $A = 1$ sind die Diskrepanzen besonders gravierend.

Aus der vorangehenden Betrachtung folgt, daß man zur Bestimmung einer geeigneten mittleren Stoßzahl bei der Neutronenabbremsung die Spaltneutronen nicht durch ihre mittlere Energie, sondern zweckmäßig durch die über das Spaltspektrum gemittelte Lethargie $u_T(\chi)$ charakterisiert. Verwenden wir die Darstellung des Spaltspektrums von R. B. LEACHMAN [6], so ist:

$$u_T(\chi) = \frac{\int_0^\infty \ln \frac{E_0}{E_T} \cdot \sqrt{E_0} e^{-\beta E_0} dE_0}{\int_0^\infty \sqrt{E_0} e^{-\beta E_0} dE_0} \quad (60)$$

mit

$$\beta = 0,775 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{eV}} \right].$$

Man erhält

$$u_T(\chi) = \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \ln \alpha - \ln E_T. \quad (61)$$

Dabei ist $\psi(x)$ die logarithmische Ableitung der Gammafunktion und speziell

$$\psi\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - C - 2 \ln 2 = 0,03649. \quad (62)$$

($C =$ Eulersche Konstante).

Damit wird für unser Beispiel

$$u_T(\chi) = 17,8 \quad \text{statt} \quad u_T = 18,2. \quad (63)$$

Dem entspricht eine Energie $E_0^* = 1,34$ MeV.

Die wahrscheinlichste Energie der Spaltneutronen (Maximum des Spaltspektrums) ist $E_0^w = 0,63$ MeV.

Setzen wir wieder $E_T = 0,025$ eV, so ist

$$u_T(E_0^w) = \ln \frac{E_0^w}{E_T} = 17 = u_T - 1,2. \quad (64)$$

Die daraus gewonnenen Stoßzahlen sind entsprechend kleiner, bei Wasserstoff um einen Stoß, bei U 238 um 119 Stöße. In diesem Fall hat nur noch die Angabe von $n_w(E_0^w)$ eine physikalische Bedeutung als die am häufigsten bei der Abbremsung von Spaltneutronen unter thermische Energie auftretende Stoßzahl.

In allen diesen Fällen wurde davon abgesehen, daß für Energien $\lesssim 1$ eV die chemische Bindung die effektive Masse vergrößert, womit natürlich auch die Stoßzahlen anwachsen.

Herrn K. OTT möchte ich für einige wertvolle Hinweise danken.

Literatur: [1] AMALDI, E.: Handbuch der Physik, Bd. XXXVIII/2, S. 217 ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1959. — FERMI, E.: Nuclear Physics, S. 181 ff. Chicago: Chicago University Press 1955. — WEINBERG, A. M., and E. P. WIGNER: The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, S. 282. Chicago: Chicago University Press 1958. — [2] WICK, G. C.: Phys. Rev. **49**, 192 (1936). — [3] CONDON, E. U., and G. BREIT: Phys. Rev. **49**, 229 (1936). — [4] MARSHAK, R. E.: Rev. Mod. Phys. **19**, 185 (1947). — [5] CRAMER, H.: Mathem. Methods of Statistics, S. 275. Princeton 1954. — [6] LEACHMAN, R. B.: PIGG **2**, 193 (1955); s. auch WEINBERG, A., and E. WIGNER: The Physical Theory of Nuclear Chain Reactors, S. 112 loc. cit.