

KFK-135

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

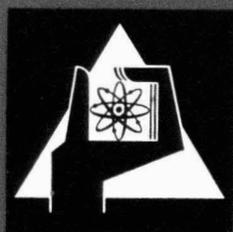
Februar 1963

KFK 135

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Die Bestimmung der wahren Verteilung bei Winkel-
korrelationsexperimenten

W. Michaelis



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Februar 1963

KFK 135

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Die Bestimmung der wahren Verteilung bei Winkel-
korrelationsexperimenten

W. Michaelis

KERNREAKTOR
Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H.
Verwaltung der Zentralbücherei

12 Nov 1963

Kernreaktor Bau- und Betriebs-Gesellschaft mbH. Karlsruhe

1. Einleitung

Untersuchungen der Winkelverteilung von Kernstrahlen, die in Kaskade emittiert werden, sind in den letzten Jahren zu einem der wichtigsten Hilfsmittel der experimentellen Kernphysik geworden. Der Stand der Meßtechnik ermöglicht heute sehr hohe Meßgenauigkeiten, so daß der Verarbeitung der experimentellen Daten wachsende Bedeutung zukommt. Die Probleme, die dabei entstehen, umfassen neben einer sinnvollen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate die Durchführung von Korrekturen für die endliche Ausdehnung der Quelle und der Detektoren sowie die Berücksichtigung von Wechselwirkungsprozessen in der Quelle. Zwar sind für einige der genannten Korrekturen experimentelle Methoden bekannt, doch ist ihre Durchführung im allgemeinen sehr mühsam und zeitraubend. Den kernphysikalischen Laboratorien stehen in wachsendem Maße elektronische Rechenanlagen für die Datenverarbeitung zur Verfügung. Man wird daher, auch wenn umfangreichere Rechnungen erforderlich sind, einer numerischen Methode den Vorzug geben. Eine genaue Kenntnis der Korrekturmöglichkeiten gestattet die Verwendung größerer Raumwinkel für die Detektoren und eine freiere Wahl in den Dimensionen der Quelle. Dies bietet den Vorteil einer kürzeren Meßzeit, ohne daß die Genauigkeit leidet, und ist daher von besonderer Bedeutung für Experimente mit schwachen Aktivitäten und kurzlebigen Proben sowie für Korrelationsmessungen an prompter Gammastrahlung, die beim Neutroneneinfang auftritt. In den folgenden Abschnitten werden ausführlich die Grundlagen für ein numerisches Verfahren diskutiert, dessen Anwendung sich für den speziellen Fall von γ - γ -Kaskaden bei einer größeren Anzahl von Winkelverteilungsexperimenten gut bewährt hat.

2. Ermittlung der experimentellen Winkelverteilung

Vor jeder Messung werden der Untergrund $N_0^{(1)}$, $N_0^{(2)}$ und N_0^c sowie die zufälligen Koinzidenzen N_z^c ermittelt. Die Indices (1), (2) und c kennzeichnen die Einzelzählraten der Detektoren bzw. die Ausgangszählrate der Koinzidenzstufe[†]. Die Quelle wird auf etwa 1% zentriert, d.h. die Zählrate des bewegten Detektors als Funktion des Winkels θ sollte auf etwa 1% konstant sein.

Während der Messung wird der Einfluß von Instabilitäten der Apparatur auf das Meßergebnis durch häufiges Wechseln der Winkelpositionen klein gehalten. Aus den gemessenen Daten erhält man die wahren Werte durch Subtraktion von Untergrund und zufälligen Koinzidenzen. Für jede Einzelmessung wird der Ausdruck

+)

Bei Anwendung des fast-slow-Koinzidenzprinzips Ausgangszählrate der langsamen (Tripel-) Koinzidenzstufe

$$n_{ij} = n_j(\theta_i) = (N_{ij}^c - N_o^c - N_z^c) \frac{(N_{11}^{(1)} - N_o^{(1)}) (N_{11}^{(2)} - N_o^{(2)})}{(N_{ij}^{(1)} - N_o^{(1)}) (N_{ij}^{(2)} - N_o^{(2)})} \quad (1)$$

gebildet, wobei das Zahlenpaar ij die j -te Messung in der Winkelposition θ_i bezeichnet. Die Korrektur mit den Einzelzählraten in Gl. (1) eliminiert gleichzeitig in erster Näherung Instabilitäten der Apparatur und kleine Fehler in der Zentrierung der Quelle. Hat die Meßprobe eine wahrnehmbare Halbwertszeit, so läßt sich die Abnahme der Quellstärke in Gl. (1) durch einen Zeitfaktor $\exp \left[- \left(v - \frac{1}{2} \right) \frac{T}{T_{1/2}} \ln 2 \right]$ berücksichtigen, wenn v die laufende Nummer der Messung und T die Summe von Meß- und Pausenzeit bedeutet. Dabei sollte $T \ll T_{1/2}$ sein. Ferner ist zu beachten, daß die Zahl der zufälligen Koinzidenzen mit $\exp \left[- 2 \left(v - \frac{1}{2} \right) \frac{T}{T_{1/2}} \ln 2 \right]$ abnimmt.

Die korrigierten Zählraten n_{ij} gehorchen dem Poissonschen Gesetz, d.h. es gilt

$$W_i(n_{ij}) = \frac{\bar{n}_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!} e^{-\bar{n}_{ij}} \quad (2)$$

und

$$\sigma^2(n_{ij}) = \overline{(n_{ij} - \bar{n}_{ij})^2} = \bar{n}_{ij} \quad (3)$$

Dabei erfolgt die Mittelung über den Index j . Für jede Winkelstellung θ_i läßt sich nun aus den n_{ij} nach der Methode der kleinsten Quadrate ein n_i derart bestimmen, daß

$$\sum_j^{k_i} \frac{1}{\sigma^2(n_{ij})} (n_{ij} - n_i)^2 = \sum_j^{k_i} \frac{1}{\bar{n}_{ij}} (n_{ij} - n_i)^2 = \text{Min} \quad (4)$$

k_i gibt die Zahl der Messungen in der Winkelposition θ_i an. Aus Gl. (4) folgt

$$n_i = \frac{\sum_j^{k_i} n_{ij}}{k_i} \quad (5)$$

Wegen (2) und (3) gilt

$$\sigma^2 \left(\sum_j n_{ij} \right) = \overline{\left(\sum_j n_{ij} - \sum_j \bar{n}_{ij} \right)^2} = n_i k_i$$

und

$$G^2(n_i) = \frac{1}{k_i^2} (\sum_j n_{ij} - \bar{\sum_j n_{ij}})^2 = \frac{n_i}{k_i}$$

Den n_i aus Gl. (5) kann man daher die Gewichtungsfaktoren

$$g_i = g(n_i) = \frac{1}{G^2(n_i)} = \frac{k_i}{n_i} = \frac{k_i^2}{\sum_j n_{ij}} \quad (6)$$

zuordnen.

Die Meßergebnisse n_i werden nun nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Funktion der Form $\sum_{\nu=0}^m a_{2\nu} P_{2\nu}(\cos \theta)$ approximiert¹⁾. Sei m die Zahl der Winkelstellungen und l die Zahl der Koeffizienten α_λ in

$$\sum_{\nu=0}^m a_{2\nu} P_{2\nu}(\cos \theta_i) = \sum_{\lambda=1}^l \alpha_\lambda P_{i\lambda}$$

mit

$$P_{i\lambda} = P_{2(\lambda-1)}(\cos \theta_i)$$

und

$$\alpha_\lambda = a_{2(\lambda-1)}$$

Dann folgt nach der Methode der kleinsten Quadrate aus der Bedingung

$$\sum_i g_i (n_i - \sum_\lambda \alpha_\lambda P_{i\lambda})^2 = \text{Min}$$

das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^m P_{i\gamma} g_i n_i - \sum_{i=1}^m \sum_{\lambda=1}^l g_i P_{i\lambda} P_{i\gamma} \alpha_\lambda = 0 \quad (\gamma = 1 \dots l)$$

oder kürzer in Matrixschreibweise

$$R^T y \vec{\alpha} = R^T y \vec{u} \quad (7)$$

¹⁾ Eine Verallgemeinerung des hier beschriebenen Verfahrens auf beliebige Indices bereitet keinerlei Schwierigkeiten.

Dabei ist \mathcal{P} die Matrix

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & \dots & P_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(\cos \theta_1) & \dots & P_{2(1-1)}(\cos \theta_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_0(\cos \theta_m) & \dots & P_{2(1-1)}(\cos \theta_m) \end{pmatrix}$$

ferner \mathcal{P}^T die transponierte Matrix von \mathcal{P} , \mathcal{Y} die diagonale Matrix mit den Elementen g_i , \vec{n} der Spaltenvektor mit den Komponenten n_i und $\vec{\alpha}$ der Spaltenvektor mit den Koeffizienten $\alpha_\lambda = a_{2(\lambda-1)}$. Die Matrix $\mathcal{L} = (\mathcal{P}^T \mathcal{Y} \mathcal{P})$ ist quadratisch. Man kann daher Gl. (7) umschreiben in

$$\vec{\alpha} = (\mathcal{P}^T \mathcal{Y} \mathcal{P})^{-1} \mathcal{P}^T \mathcal{Y} \vec{n} \quad (8)$$

$(\mathcal{P}^T \mathcal{Y} \mathcal{P})^{-1}$ ist die inverse Matrix von $(\mathcal{P}^T \mathcal{Y} \mathcal{P})$. Gl. (8) liefert die Koeffizienten der experimentellen Winkelverteilungsfunktion für Detektoren und Quelle von endlicher Ausdehnung.

Aus (8) folgt für die mittleren Schwankungsquadrate der Koeffizienten α_λ unter Berücksichtigung von Gl. (6)

$$\vec{\sigma}^2(\alpha) = (\alpha^{-1} \mathcal{P}^T \mathcal{Y} \mathcal{Y}^{-1} \mathcal{Y} \mathcal{P} \mathcal{L}^{-1}) \vec{\delta}_{ik} \quad (9)$$

Dabei ist $\vec{\sigma}^2(\alpha)$ der Spaltenvektor mit den Schwankungsquadraten der l Koeffizienten α_λ als Komponenten. Der Vektor $\vec{\delta}_{ik}$ mit l Komponenten δ_{ik} ist so definiert, daß er bei Multiplikation mit einer quadratischen Matrix diese in einen aus den Diagonalelementen aufgebauten Spaltenvektor überführt. Gl. (9) läßt sich, da \mathcal{L} symmetrisch ist, wie folgt umformen:

$$\vec{\sigma}^2(\alpha) = (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} \mathcal{L}^{-1}) \vec{\delta}_{ik} = \mathcal{L}^{-1} \vec{\delta}_{ik}$$

Somit gilt

$$\vec{\sigma}^2(\alpha) = (\mathcal{P}^T \mathcal{Y} \mathcal{P})^{-1} \vec{\delta}_{ik} \quad (10)$$

Die mittleren quadratischen Fehler der Koeffizienten α_λ werden also gegeben durch die Diagonalelemente der Matrix $(\mathcal{P}^T \mathcal{Y} \mathcal{P})^{-1}$.

Gl. (10) beinhaltet nur statistische Schwankungen. Einen Hinweis auf sonstige Fehlerquellen erhält man durch Vergleich des Ergebnisses (10) mit dem mittleren quadratischen Fehler, der sich aus einer anderen von Rose¹⁾ angegebenen Definition ableitet. Zu seiner Berechnung^{+) werden zunächst die Differenzen}

$$\vec{F} = y^{1/2} (\rho \vec{x}_i - \vec{n}) \quad (11)$$

$$\vec{F} = y^{1/2} (\rho \vec{x} - \vec{n}) \quad (12)$$

gebildet. $\vec{\alpha}_0$ beschreibt die zu dem Meßergebnis $\vec{\alpha}$ gehörige (unbekannte) wahre Verteilung. Die Vektoren $(\rho \vec{x}_i - \vec{n})$ und $(\rho \vec{x} - \vec{n})$ stellen ^{somit} die Differenzen zwischen der wahren bzw. der experimentell ermittelten Winkelkorrelation und den Meßpunkten n_i dar. $y^{1/2}$ ist die Diagonalmatrix mit den positiven Wurzeln der Gewichtungsfaktoren g_i . Aus (7) und (12) folgt direkt die Beziehung

$$\rho^T y^{1/2} \vec{F} - \rho^T y (\rho \vec{x} - \vec{n}) = 0 \quad (13)$$

Mit (13) erhält man aus (11) und (12)

$$\vec{F}^T \vec{F} - \vec{F}^T \vec{F} = (\vec{F}^T - \vec{F}^T) \vec{F} = (\vec{x}_i - \vec{x})^T \rho^T y^{1/2} \vec{F} = 0 \quad (14)$$

und hiermit

$$\vec{F}^T \vec{F} - \vec{F}^T \vec{F} = \vec{F}^T (\vec{F} - \vec{F}) = \vec{F}^T y^{1/2} \rho (\vec{x}_i - \vec{x}) \quad (15)$$

Ferner gilt wegen (11), (12) und (13)

$$\begin{aligned} \vec{x}_i - \vec{x} &= L^{-1} L (\vec{x}_i - \vec{x}) = L^{-1} \rho^T y \rho (\vec{x}_i - \vec{x}) \\ &= L^{-1} \rho^T y^{1/2} (\vec{F} - \vec{F}) \\ &= L^{-1} \rho^T y^{1/2} \vec{F} \end{aligned} \quad (16)$$

Aus Gl. (16) läßt sich nun folgende Definition des mittleren quadratischen Fehlers für die Koeffizienten α_λ herleiten: Würden mehrere Experimente zur Bestimmung der α_λ durchgeführt, so ergibt Gl. (16) durch Quadrieren

+)Rose benutzt zur Herleitung der Gl. (20) die Komponentenschreibweise. Der Beweis wird aus zwei Gründen wiederholt. Einmal ist er wesentlich für das Verständnis der Gl. (20). Zum anderen erfolgt die Herleitung hier mit Hilfe der Matrizenrechnung, die eine übersichtlichere Darstellung ermöglicht.

und Mittelung über diese Messungen

$$\vec{\sigma}^2(\alpha) = \frac{1}{m} \left(L^{-1} R^T y^{\frac{1}{2}} \overline{N}^T y^{\frac{1}{2}} R L^{-1} \right) \vec{\sigma}_{ik}$$

Dabei ist \overline{N} die quadratische Matrix mit m Spaltenvektoren $\vec{D} = \{D_1, \dots, D_m\}$.
Wegen

$$\overline{D_i D_k} = \overline{D^2} \delta_{ik} \tag{17}$$

gilt

$$\overline{N N^T} = m \overline{D^2}$$

und somit

$$\vec{\sigma}^2(\alpha) = \overline{D^2} \left(L^{-1} R^T y^{\frac{1}{2}} R L^{-1} \right) \vec{\sigma}_{ik} = \overline{D^2} L^{-1} \vec{\sigma}_{ik} \tag{18}$$

$\overline{D^2}$ läßt sich mit Hilfe von (15) und (16) berechnen:

$$\overline{N^T N} = \overline{L^T N^T} = m \overline{D^2} = \overline{N^T (y^{\frac{1}{2}} R L^{-1} R^T y^{\frac{1}{2}}) N}$$

Auf Grund von (17) liefern nur die Diagonalelemente der Matrix $(y^{1/2} R L^{-1} R^T y^{1/2})$ einen Beitrag, also

$$\begin{aligned} m \overline{D^2} = \overline{N^T N} &= \overline{D^2} \sum_{i,k} (y^{\frac{1}{2}} R L^{-1} R^T y^{\frac{1}{2}})_{ik} \delta_{ik} \\ &= \overline{D^2} \sum_{\nu, \mu} (L^{-1} R^T y^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} R)_{\nu, \mu} \delta_{\nu, \mu} \\ &= \overline{D^2} \sum_{\nu, \mu} (L^{-1} L)_{\nu, \mu} \delta_{\nu, \mu} = \epsilon \overline{D^2} \end{aligned}$$

Da nur eine Bestimmung der α_λ erfolgt, wird als Näherung $\overline{N^T N}$ ersetzt durch $\overline{N^T} \vec{D}$, so daß mit (12) und (13)

$$\begin{aligned} \overline{D^2} = \frac{1}{m \cdot \epsilon} \overline{N^T N} &\approx \frac{1}{m \cdot \epsilon} \overline{N^T} \vec{D} = \frac{1}{m \cdot \epsilon} (\mu \vec{x} - \vec{m})^T y^{\frac{1}{2}} \vec{D} \\ &= \frac{1}{m \cdot \epsilon} \left[\vec{m}^T y (\vec{m} - \mu \vec{x}) \right] \end{aligned} \tag{19}$$

Aus (18) und (19) erhält man

$$\vec{\sigma}^2(\alpha) = \frac{1}{m \cdot \epsilon} \left[\vec{m}^T y (\vec{m} - \mu \vec{x}) \right] L^{-1} \vec{\sigma}_{ik} \tag{20}$$

Das Ergebnis (20) umfaßt nach seiner Herleitung statistische wie nichtstatistische Fehlerquellen. Ein Vergleich mit Gl. (10) zeigt, daß bei einem Experiment der Faktor $\frac{1}{m-1} [\vec{m} \cdot \vec{p} \alpha]$ nicht merklich von 1 abweichen sollte.

Nach Berechnung der Koeffizienten α_λ mit Hilfe von Gl. (8) kann die Funktion

$$\sum_{\lambda=1} \alpha_\lambda P_\lambda = \sum_{\nu=0} a_{2\nu} P_{2\nu} (\cos \theta)$$

durch Division mit $\alpha_1 = a_0$ auf die Form

$$W''(\theta) = \sum_{\nu=0} A''_{2\nu} P_{2\nu} (\cos \theta) \quad (21)$$

mit

$$A''_{2\nu} = \frac{a_{2\nu}}{a_0}$$

gebracht werden.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß es nicht korrekt ist, die zu ermittelnde Funktion, wie es häufig geschieht, durch den Meßpunkt bei 90° zu legen. Ein solches Vorgehen verleiht der Messung bei 90° ein unendlich hohes Gewicht.

3. Geometrische Korrekturen

Gl. (21) gibt die experimentelle Winkelverteilungsfunktion für Detektoren und Quelle von endlicher Ausdehnung wieder. Zur Bestimmung der wahren Winkelkorrelation

$$W'(\theta) = \sum_{\nu} A'_{2\nu} P_{2\nu} (\cos \theta) \quad (22)$$

sind daher noch geometrische Korrekturen erforderlich. Die Abweichungen der $A''_{2\nu}$ von den wahren Koeffizienten $A'_{2\nu}$ können recht erheblich sein, so daß eine sorgfältige Untersuchung der geometrischen Einflüsse durchzuführen ist.

Betrachtet werden zwei beliebige Detektoren 1 und 2, von denen der erste zum Nachweis der Strahlung 1, der zweite zum Nachweis der Strahlung 2 dient. Die zugehörigen Ansprechwahrscheinlichkeiten seien ϵ_{11} und ϵ_{22} . Die Quelle werde zunächst als punktförmig angenommen und sei zugleich Ursprung des Koordinaten-

systems. Gesucht ist der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten A_1' und A_1'' . Die Ansprechwahrscheinlichkeiten ε_{11} und ε_{22} sind Funktionen der Koordinaten θ_1 und φ_1 und lassen sich nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$\varepsilon_{11}(\theta_1, \varphi_1) = \sum_{1', m'} \left(\frac{2 \cdot 1' + 1}{4\pi} \right)^{1/2} b_{1', m'}^{(1)} Y_{1', m'}(\theta_1, \varphi_1) \quad (23)$$

$$\varepsilon_{22}(\theta_2, \varphi_2) = \sum_{1'', m''} \left(\frac{2 \cdot 1'' + 1}{4\pi} \right)^{1/2} b_{1'', m''}^{(2)} Y_{1'', m''}(\theta_2, \varphi_2) \quad (24)$$

Die experimentelle Winkelverteilung wird gegeben durch

$$W''(\theta) = \iint \varepsilon_{11}(\theta_1, \varphi_1) W'(\vartheta) \varepsilon_{22}(\theta_2, \varphi_2) d\Omega_1 d\Omega_2$$

Hieraus folgt durch Anwendung des Additionstheorems für Kugelfunktionen und durch Rotation des Koordinatensystems um den Winkel θ die Beziehung ²⁾

$$A_1'' = (2 \cdot 1 + 1) \sum_{1', m m'} \frac{(-1)^{m+m'+1+l'}}{(2 \cdot 1' + 1)} A_1', b_{1', m}^{(1)} b_{1', m'}^{(2)} g_{m m'}^{1' 1} \quad (25)$$

Dabei bedeuten die $g_{m m'}^{1' 1}$ numerische Koeffizienten, die mit den Darstellungskoeffizienten $d_{m m'}^1(\theta)$ der Rotationsgruppe ³⁻⁵⁾ über die Gleichung

$$g_{m m'}^{1' 1} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d_{m m'}^1(\theta) P_{1'}(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

verknüpft sind. Die $g_{m m'}^{1' 1}$ haben folgende Eigenschaften:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{m m'}^{1' 1} = g_{-m', -m}^{1' 1} = (-1)^{m+m'} g_{m', m}^{1' 1} = (-1)^{1+1'+m} g_{m, -m'}^{1' 1} \\ g_{00}^{1' 1} = \delta_{1' 1} \\ g_{m0}^{1' 1} = g_{0m}^{1' 1} = 0 \text{ für } (1+1'+m) \text{ ungerade} \\ g_{m m'}^{1' 1} = 0 \text{ für } 1' > 1, (m+m') \text{ gerade} \\ g_{m m'}^{1' 1} = \sum_L \frac{2 \cdot 1 + 1}{2L+1} (1' m 0 | 1' L m)(1' m' 0 | 1' L m') g_{m m'}^{L 0} \end{array} \right. \quad (26)$$

Tabelle I enthält die Koeffizienten $g_{m m'}^{1' 1} \neq 0$ für $1, 1' \leq 4$ und gerade m, m' .

Gl. (25) zeigt, daß im allgemeinen Fall die wahren Koeffizienten A_1' gemischt werden und daß in der experimentell ermittelten Verteilung zusätzliche Legendre-

Polynome, insbesondere auch höherer Ordnung; auftreten können. Für den Spezialfall γ -symmetrischer Detektoren gilt jedoch

$$m = m' = 0$$

(S. Gl. (23) und Gl. (24)) und somit wegen (26)

$$A_1'' = A_1' b_{10}^{(1)} b_{10}^{(2)} \quad (27)$$

Es treten keine Polynome anderer Ordnung als in der wahren Winkelverteilung auf. Dieses Ergebnis rechtfertigt für eine Punktquelle nachträglich den Ansatz $W''(\theta) = \sum_{\nu} a_{2\nu} P_{2\nu}(\cos \theta)$ in Abschnitt 2. Die zur Anwendung der Gl. (27) erforderlichen Koeffizienten $b_{10}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) können durch Spezialisierung der allgemeinen Formel (31) gewonnen werden.

Bisher wurde ein punktförmiges Präparat vorausgesetzt. Die Berechnung der Korrekturen für Quellen endlicher Ausdehnung bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Der einzige Fall, der mit erträglichem Aufwand behandelt werden kann, ist der einer axialen Linienquelle, die senkrecht zu der durch die beiden Detektoren gebildeten Ebene orientiert ist. Man verwendet daher zweckmäßig zylindrische Quellen möglichst kleiner radialer Ausdehnung und beschränkt sich auf eine axiale Korrektur.

Betrachtet werde eine Quelle der Länge L_0 mit konstanter Aktivitätsdichte sowie kreisförmige Detektoren mit dem Radius R_0 . Der Abstand Quelle-Detektor sei H_0 (Abb. 1). Die Koeffizienten b_{lm} in Gl. (23) und (24) stellen jetzt Funktionen der Auslenkung L' dar. Gl. (25) bleibt gültig. Einzusetzen sind die über L' integrierten Koeffizienten $b_{lm}(L')$. Für eine symmetrische Anordnung des Präparats zur Rotationsebene der Detektoren erhält man mit (23) und (24)

$$b_{lm}^{(i)}(L_0) = \left(\frac{4 \eta}{2l+1} \right)^{1/2} \frac{\int_{-L_0/2}^{+L_0/2} \int_{-L_0/2}^{+L_0/2} Y_{lm}^*(\theta_i, \varphi_i) \varepsilon_{ii}(\theta_i, \varphi_i) dL' d\Omega_i}{\int_{-L_0/2}^{+L_0/2} dL'} \quad (28)$$

Einführung von Polarkoordinaten auf der Stirnfläche des Detektors ergibt mit $\alpha_i = R_{oi}/H_{oi}$, $r_i = \rho/H_{oi}$, $L_i = L'/H_{oi}$ und $\gamma_i = L_0/2 H_{oi}$ (Abb. 1)

Tabelle I
 $\varepsilon_{mm}^{ll'}$, für $l \leq 4$; m, m' gerade
 (Nach Feingold und Frankel²⁾)

| $l \ l' m \ m'$ | $\varepsilon_{mm}^{ll'}$ | $l \ l' m \ m'$ | $\varepsilon_{mm}^{ll'}$ | $l \ l' m \ m'$ | $\varepsilon_{mm}^{ll'}$ |
|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|
| 0 0 0 0 | 1 | 3 3 2 0 | $-\sqrt{3/10}$ | 4 2 4 0 | $-3\sqrt{2/35}$ |
| 1 1 0 0 | 1 | 3 3 2 2 | $3/10$ | 4 2 4 2 | $-9/10\sqrt{7}$ |
| 2 0 2 0 | $5/6$ | 4 0 2 0 | $3\sqrt{10}$ | 4 2 4 4 | $18/35$ |
| 2 0 2 2 | $5/3$ | 4 0 2 2 | $9/10$ | 4 3 2 2 | $9/10$ |
| 2 2 0 0 | 1 | 4 0 4 0 | $3\sqrt{7/10}$ | 4 3 4 2 | $-9/10\sqrt{7}$ |
| 2 2 2 0 | $-1/\sqrt{6}$ | 4 0 4 2 | $9\sqrt{7/10}$ | 4 3 4 4 | $9/70$ |
| 2 2 2 2 | $1/6$ | 4 0 4 4 | $9/5$ | 4 4 0 0 | 1 |
| 3 0 2 2 | $-7/6$ | 4 1 2 2 | $-3/5$ | 4 4 2 0 | $-\sqrt{2/5}$ |
| 3 1 2 0 | $7/\sqrt{30}$ | 4 1 4 2 | $3\sqrt{7/10}$ | 4 4 2 2 | $2/5$ |
| 3 1 2 2 | $7/15$ | 4 1 4 4 | $6/5$ | 4 4 4 0 | $1/\sqrt{70}$ |
| 3 2 2 2 | $14/15$ | 4 2 2 0 | $3\sqrt{10}$ | 4 4 4 2 | $-1/5\sqrt{7}$ |
| 3 3 0 0 | 1 | 4 2 2 2 | 0 | 4 4 4 4 | $1/70$ |

Tabelle II
 Korrekturkoeffizienten $B_{\mu l}^0$ für $l, \mu \leq 4$

| μl | $B_{\mu l}^0$ | μl | $B_{\mu l}^0$ | μl | $B_{\mu l}^0$ |
|---------|---------------|---------|---------------|---------|---------------|
| 0 0 | 1 | 1 4 | $-13/2$ | 3 3 | -19 |
| 0 1 | 1 | 2 0 | $15/8$ | 3 4 | $-315/8$ |
| 0 2 | 1 | 2 1 | 3 | 4 0 | $315/128$ |
| 0 3 | 1 | 2 2 | $45/8$ | 4 1 | 5 |
| 0 4 | 1 | 2 3 | $21/2$ | 4 2 | $1575/128$ |
| 1 0 | $-3/2$ | 2 4 | $75/4$ | 4 3 | 30 |
| 1 1 | -2 | 3 0 | $-35/16$ | 4 4 | $8925/128$ |
| 1 2 | -3 | 3 1 | -4 | | |
| 1 3 | $-9/2$ | 3 2 | $-35/4$ | | |

$$b_{lm}^{(i)}(\alpha_i, \gamma_i) = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \frac{1}{2\gamma_i}$$

$$\times \int_{-Y_i}^{+Y_i} \int_0^{\alpha_i} \int_0^{2\pi} \frac{Y_{lm}^-(r_i, \omega, L_i) \bar{e}_{ii}(r_i, \omega, L_i)}{(1+r_i^2 + L_i^2 - 2r_i L_i \sin \omega)^{3/2}} dL_i r_i dr_i d\omega$$

Die Lösung dieses Integrals für einen Detektor, dessen Ansprechvermögen richtungsabhängig ist und keine speziellen Symmetrieeigenschaften zeigt, stößt auf erhebliche Schwierigkeiten. Für einen richtungsunabhängigen, φ -symmetrischen Detektor läßt sich jedoch die Integration leicht durchführen. Unter vorläufiger Vernachlässigung des Index i folgt mit

$$\xi = c(r)$$

und

$$Y_{l,0}(r, \omega, L) = \frac{(-1)^l}{(2l)!!} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}$$

$$\times \sum_{\nu=[1/2]}^l (-1)^\nu \binom{l}{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\nu-1)!} (1+r^2 + L^2 - 2rL \sin \omega)^{\frac{1}{2} - \nu}$$

(vgl. Abb. 1) für die Koeffizienten b_{l0} die Gleichung

$$b_{l0}(\alpha, \gamma) = \frac{1}{2\gamma} \frac{(-1)^l}{(2l)!!} \sum_{\nu=[1/2]}^l (-1)^\nu \binom{l}{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\nu-1)!} \times \int_{-Y}^{+Y} \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{\ell-3}{2} - \nu\right) \binom{\ell-3}{\mu} [r^2 + L^2 - 2rL \sin \omega]^\mu \mathcal{E}(r) dL r dr d\omega$$

falls $|r^2 + L^2 - 2rL \sin \omega| < 1$, was in allen praktischen Fällen gegeben ist. Zweimalige Anwendung des binomischen Lehrsatzes und Integration über L und ω liefert

$$b_{\ell 0}(\alpha, \gamma) = \frac{\pi}{\gamma} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!!} \sum_{\nu=[1/2]}^{\ell} (-1)^\nu \binom{\ell}{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\nu-1)!} \times \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\ell-3}{\mu} \sum_{\nu=0}^{[1/2]} \binom{\ell-3}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} \sum_{\lambda=\nu}^{\mu-2\nu} \binom{\mu-2\nu}{\lambda} \frac{2^\lambda \Gamma^{3(\lambda+\nu)+1}}{(2\lambda+2\nu+1)!} \int_0^{\alpha} r^{2(\mu-\nu-\lambda)+1} \mathcal{E}(r) dr$$

Mit den Abkürzungen

$$J_i^0 = 2 \int_0^{\alpha_i} \epsilon_{ii}(r) r_i dr_i \quad (29)$$

und

$$J_{i,2m} = (m+1) \frac{\int_0^{\alpha_i} r_i^{2m} \epsilon_{ii}(r_i) r_i dr_i}{\int_0^{\alpha_i} \epsilon_{ii}(r_i) r_i dr_i} \quad (30)$$

folgt für die Koeffizienten $b_{10}^{(i)}$ die Darstellung

$$\epsilon_{\ell_0}^{(i)}(\langle r_i, r_i \rangle) = \bar{r}_i^0 \sum_{\mu=0}^{\infty} B_{\mu\ell}^0 \left[\sum_{k=0}^{\mu} F_{\mu k}^0 Y_i^{2(\mu-k)} J_{i,2k} \right] \quad (31)$$

mit

$$B_{\mu\ell}^0 = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu \binom{\ell}{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\nu-\ell)!} \binom{\ell-\nu}{\mu} \quad (32)$$

und

$$F_{\mu k}^0 = \frac{1}{(k+1)(2\mu-2k+1)} \sum_{p=0}^{\mu-k} \binom{\mu}{2p} \binom{2p}{p} \binom{\mu-2p}{\mu-k-p} \quad (33)$$

Wegen der guten Konvergenz kann die Reihe in Gl. (31) nach wenigen Gliedern abgebrochen werden. Die Tabellen II und III enthalten die Korrekturkoeffizienten $B_{\mu\ell}^0$ und $F_{\mu k}^0$ für $1, \mu \leq 4$ +).

Zur Berechnung der $b_{1m}^{(i)}$ mit $m \neq 0$ ist in (28) einzusetzen (vgl. Abb. 1)

$$Y_{\ell,n}(r_i, L_i) = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-1m)!}{4\pi(\ell+1m)!} \right]^{1/2} \times \sum_{\nu=0}^{\ell} (-1)^\nu \binom{\ell}{\nu} \frac{(2\nu)!}{[2\nu-(\ell+1m)]!} (1+r^2+L^2-2rL \cos \omega)^{\ell/2-\nu} \times \left[r \cos \omega - i (-1)^{\frac{1m-\nu}{2}} (L-r \sin \omega) \right]^{-1m}$$

+) Einige dieser Koeffizienten ohne allgemeine Darstellung finden sich bereits bei Feingold und Frankel²⁾. Zum Vergleich sind die $B_{\mu\ell}^0$ mit $(1+\mu)^{-1}$ und die $F_{\mu k}^0$ mit $(1+\mu)$ zu multiplizieren.

Tabelle III
 Korrekturkoeffizienten $F_{\mu k}^0$ für $\mu \leq 4$

| μk | $F_{\mu k}^0$ |
|---------|---------------|---------|---------------|---------|---------------|---------|---------------|
| 0 0 | 1 | 2 1 | 2/3 | 3 2 | 1 | 4 2 | 12/5 |
| 1 0 | 1/3 | 2 2 | 1/3 | 3 3 | 1/4 | 4 3 | 4/3 |
| 1 1 | 1/2 | 3 0 | 1/7 | 4 0 | 1/9 | 4 4 | 1/5 |
| 2 0 | 1/5 | 3 1 | 9/10 | 4 1 | 8/7 | | |

Tabelle IV
 Korrekturkoeffizienten $B_{\mu l}^{|m|}$ für $l, \mu \leq 4$; m gerade

| $\mu l m $ | $B_{\mu l}^{ m }$ | $\mu l m $ | $B_{\mu l}^{ m }$ | $\mu l m $ | $B_{\mu l}^{ m }$ |
|-------------|-------------------|-------------|-------------------|-------------|--------------------|
| 1 2 2 | $\sqrt{6}/4$ | 2 4 2 | $-11\sqrt{10}/4$ | 3 4 4 | $-7\sqrt{70}/32$ |
| 1 3 2 | $\sqrt{30}/4$ | 2 4 4 | $\sqrt{70}/16$ | 4 2 2 | $-105\sqrt{6}/64$ |
| 1 4 2 | $3\sqrt{10}/4$ | 3 2 2 | $35\sqrt{6}/32$ | 4 3 2 | $-5\sqrt{30}/2$ |
| 2 2 2 | $-5\sqrt{6}/8$ | 3 3 2 | $3\sqrt{30}/2$ | 4 4 2 | $-189\sqrt{10}/16$ |
| 2 3 2 | $-3\sqrt{30}/4$ | 3 4 2 | $203\sqrt{10}/32$ | 4 4 4 | $63\sqrt{70}/128$ |

Tabelle V
 Korrekturkoeffizienten $F_{\mu k}^{|m|}$ für $\mu \leq 4$; m gerade

| $\mu k m $ | $F_{\mu k}^{ m }$ | $\mu k m $ | $F_{\mu k}^{ m }$ | $\mu k m $ | $F_{\mu k}^{ m }$ | $\mu k m $ | $F_{\mu k}^{ m }$ |
|-------------|-------------------|-------------|-------------------|-------------|-------------------|-------------|-------------------|
| 1 0 2 | -1/3 | 2 2 4 | 0 | 3 2 4 | 0 | 4 0 4 | 1/9 |
| 1 1 2 | 0 | 3 0 2 | -1/7 | 3 3 4 | 0 | 4 1 4 | 6/7 |
| 2 0 2 | -1/5 | 3 1 2 | -4/5 | 4 0 2 | -1/9 | 4 2 4 | 1 |
| 2 1 2 | -1/2 | 3 2 2 | -2/3 | 4 1 2 | -15/14 | 4 3 4 | 0 |
| 2 2 2 | 0 | 3 3 2 | 0 | 4 2 2 | -2 | 4 4 4 | 0 |
| 2 0 4 | 1/5 | 3 0 4 | 1/7 | 4 3 2 | -5/6 | | |
| 2 1 4 | 0 | 3 1 4 | 1/2 | 4 4 2 | 0 | | |

Dies liefert

$$\begin{aligned}
 & b_{lm}(\alpha, \gamma) \cdot \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \left[\frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!} \right]^{1/2} \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\left[\frac{\ell + |m|}{2} \right]}} \binom{\ell}{\nu} \frac{(2\nu)!}{[2\nu - (\ell + |m|)]!} \\
 & \times \int_{-r}^{+r} \int_0^{2\pi} \int_{\mu - \frac{|m|}{2}}^{\infty} \sum_{\mu = \frac{|m|}{2}}^{\infty} \binom{\frac{\ell-3}{2} - \nu}{\mu - \frac{|m|}{2}} \left[(L - r \cos \omega)^2 + r^2 \cos^2 \omega \right]^{\mu - \frac{|m|}{2}} \\
 & \times \left[r \cos \omega - i (-1)^{\frac{|m| + \nu}{2}} (L - r \sin \omega) \right]^{|\nu|} \varepsilon(r) dL r d\omega \\
 & = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \left[\frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!} \right]^{1/2} \\
 & \times \sum_{\left[\frac{\ell + |m|}{2} \right]}^{\ell} (-1)^{\nu} \binom{\ell}{\nu} \frac{(2\nu)!}{[2\nu - (\ell + |m|)]!} \sum_{\mu = \frac{|m|}{2}}^{\infty} \binom{\frac{\ell-3}{2} - \nu}{\mu - \frac{|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\mu - \frac{|m|}{2}} \binom{\mu - \frac{|m|}{2}}{j} \\
 & \times \sum_{\nu=0}^{\frac{|m|}{2}} (-1)^{\nu} \frac{r^{|\nu| + \nu}}{2^{|\nu|}} \binom{|\nu|}{\nu} \sum_{q=0}^{2\left(\mu - \frac{|m|}{2} - j\right) + \nu} (-1)^q \binom{2\left(\mu - \frac{|m|}{2} - j\right) + \nu}{q} \\
 & \times \int_{-r}^{+r} \int_0^{2\pi} L^{2\left(\mu - \frac{|m|}{2} - j\right) + \nu - q} dL \int_0^{\pi} r^{2j + |\nu| - \nu + q} \varepsilon(r) dr \int_0^{2\pi} \cos^{2j + |\nu| - \nu} \omega \sin^q \omega d\omega
 \end{aligned}$$

Die Integration ergibt 0 außer für $n, q, |m|$ gerade. Also ist

$$b_{lm}(\alpha, \gamma) = 0 \quad \text{für } |m| \text{ ungerade} \quad (34)$$

Mit n gerade folgt

$$(-1)^n \frac{|m| + m}{2|m|} = 1; \quad (-1)^n \text{ reell}$$

und damit zunächst

$$b_{l, -m} = b_{lm} \quad (35)$$

und

$$b_{lm} = b_{lm} \quad (36)$$

Mit

$$j + \frac{|m|}{2} - n = p$$

$$j + \frac{|m|}{2} - n + q = k$$

und den Abkürzungen (29) und (30) erhält man für $|m|$ gerade

$$b_{lm}^{(i)}(\alpha_i, \gamma_i) = \sqrt{J_i^0} \sum_{k=0}^{\infty} B_{\mu k}^{(i|m|)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} F_{\mu k}^{(i|m|)} J_{\nu}^{-2(\mu-k)} J_{\nu, 2k} \right] \quad (37)$$

mit

$$B_{\mu k}^{(i|m|)} = \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left[\frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!} \right]^{\nu/2} \sum_{v=0}^{\ell-k} \frac{(-1)^v \binom{\ell}{v}}{[v - (\ell + |m|)]!} \frac{(2v)!}{\left(\frac{\ell-3}{2} - v\right)!} \quad (38)$$

und

$$F_{\mu k}^{(i|m|)} = \frac{1}{2^k (k+1)! [2(\mu-k)+1]!} \quad (39)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{\ell}{k} \frac{2(2k-1)!(\nu-p-1)!!}{[k(k-p)]!}}{2^k (k+1)! [2(\mu-k)+1]!} \left(\frac{1}{2} \right)^{\nu/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k} \frac{2(2k-1)!(\nu-p-1)!!}{[k(k-p)]!}$$

Auch die Reihe in Gl. (37) zeigt ein gutes Konvergenzverhalten, so daß sie nach wenigen Gliedern abgebrochen werden kann. Die Werte der Korrekturkoeffizienten $B_{\mu l}^{(i|m|)}$ und $F_{\mu k}^{(i|m|)}$ sind für $1, \mu \leq 4$ aus den Tabellen IV und V zu ersehen⁺.

Die Gln. (31) bis (33) und (37) bis (39) bilden zusammen mit Gl. (25) die Korrektur für die endliche Ausdehnung sowohl der Detektoren wie der Quelle. Die Lösung gilt exakt für f -symmetrische Detektoren mit richtungsunabhängigem Ansprechvermögen. Diese Bedingung erfüllen im allgemeinen Szintillationskristalle zum Nachweis geladener Teilchen. Vielfach ist dabei das Ansprechvermögen sogar konstant über der Stirnfläche des Detektors, so daß man in (31) und (37)

⁺ Einige dieser Koeffizienten ohne allgemeine Darstellung finden sich bereits bei Feingold und Frankel²⁾. Für $b_{\mu 0}$ und $b_{\mu 4}$ erhalten diese Autoren im γ^1 -Term Korrekturfaktoren, die von den hier berechneten Werten abweichen. Da keine allgemeine Lösung angegeben wird, ist eine Aufklärung dieser Diskrepanz nicht möglich.

$$J_i^0 = \alpha_i^2$$

und

$$J_{i,2k} = \alpha_i^{2k}$$

setzen kann.

Im Gegensatz zur Punktquelle treten jetzt auch Koeffizienten $b_{lm}^{(i)}$ mit $m \neq 0$ auf. Die A_1' werden gemischt. Wegen der Eigenschaften der $g_{mm}^{11'}$, (26) folgt jedoch aus (34), daß in der gemessenen Verteilung keine Polynome höherer Ordnung als in der wahren Korrelation vorkommen, d.h. es ist stets (vgl. Gl. (25))

$$l \leq l' \tag{40}$$

Aus (35) und (36) zusammen mit Gl. (34) ergibt sich ferner

$$l = 2\lambda, \text{ falls } l' = 2\lambda'; \lambda, \lambda' \text{ ganz} \tag{41}$$

Gammadetektoren zeigen im allgemeinen ein richtungsabhängiges Absorptionsvermögen. Dies gilt speziell auch für Szintillatoren. Wählt man Kristalle in zylindrischer Form, so läßt sich im Falle einer zentrierten Punktquelle f -Symmetrie erzielen, die aber wegen der Randeffekte bei einer Auslenkung L' der Probe aufgehoben wird. Folglich stellen die berechneten Korrekturen für Gammadetektoren in Verbindung mit einer axialen Linienquelle Näherungen dar. Der Fehler ist dabei jedoch nur von 4. Ordnung in γ . Die Ergebnisse (40) und (41) rechtfertigen nachträglich auch für eine Linienquelle den Ansatz in Abschnitt 2.

Es bleiben noch für Gammastrahlung die Integrale J_i^0 und $J_{i,2m}$ zu bestimmen. Betrachtet werde der Spezialfall zylindrischer Szintillationskristalle, deren Achse durch den Mittelpunkt der Quelle verläuft ($L' = 0$). Die geometrischen Verhältnisse ergeben sich aus Abb. 2. Ist H_{oi} der Abstand von der Probe, R_{oi} der Radius und D_{oi} die Dicke des Kristalls i , ferner x_i der Laufweg der Gammastrahlung im Kristall und τ_i der lineare Absorptionskoeffizient, so folgt

$$J_i^0 = 2 \int_0^{\alpha_i} (1 - e^{-\tau_i x_i}) r dr \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{-G^{(2)} N \bar{s}} \frac{(1 - e^{-G^{(1)} N \bar{s}})}{G^{(1)}} \Sigma A_1 d_1^{(1)} P_1(\cos \theta) \\
 & + \frac{(1 - e^{-G^{(1)} N \bar{s}})}{G^{(1)}} \frac{(1 - e^{-G^{(2)} N \bar{s}})}{G^{(2)}} \Sigma A_1 d_1^{(1)} d_1^{(2)} P_1(\cos \theta) \}
 \end{aligned}$$

oder

$$F(\theta) \sim d\Omega_1 d\Omega_2 \left[\Sigma A_1 c_1^{(1)} c_1^{(2)} P_1(\cos \theta) \right] \quad (51)$$

mit

$$c_1^{(i)} = e^{-G^{(i)} N \bar{s}} + (1 - e^{-G^{(i)} N \bar{s}}) \frac{d_1^{(i)}}{G^{(i)}} \quad (52)$$

Für die Koeffizienten $d_1^{(i)}$ liefert (48)

$$d_1^{(i)} = 2\pi \int_0^\pi k_{inel}^{(i)}(\vartheta) P_1(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (53)$$

Die Klammer in Gl. (51) stellt wieder eine Winkelverteilung dar, und zwar genau die Verteilung, die aus der wahren Korrelation $\Sigma A_1 P_1(\cos \theta)$ durch Streuprozesse in der Quelle entsteht. Sie ist mit den Koeffizienten (53) gleich der gemessenen Verteilung, wenn in den Impulskanälen keine Diskriminierung durchgeführt wird und bei vorgegebenen Kristallabmessungen die Energie der Primärquanten γ_1 und γ_2 hinreichend klein ist, so daß sich für die gestreuten Photonen das Absorptionsvermögen der Detektoren nicht mehr merklich ändert.

Die Integration in Gl. (53) ergibt mit (45) für $l = 0, 2$ und 4 die Koeffizienten

$$\left\{ \begin{aligned}
 d_0 &= \frac{\pi r_0^2}{\alpha} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\alpha} - \frac{1}{2(1+2\alpha)^2} \right) + \left(1 - \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} \right) \ln(1+2\alpha) \right\} \\
 d_2 &= \frac{\pi r_0^2}{\alpha} \left\{ 2 \left(\frac{6(1+2\alpha)}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha(2+5\alpha)}{(1+2\alpha)^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{6(1+\alpha)(1+2\alpha)}{\alpha^4} \right) \ln(1+2\alpha) \right\}
 \end{aligned} \right. \quad (54)$$

gewinnen. Dieser Weg ist jedoch sehr mühsam. Im folgenden werden daher die Möglichkeiten diskutiert, Wechselwirkungsprozesse in der Probe rechnerisch zu berücksichtigen. Exakte Lösungen dürften kaum durchführbar sein. Man muß sich deswegen mit Näherungen begnügen. Es soll hier nur der Spezialfall der γ - γ -Kaskade behandelt werden. Die aufgezeigte Methode läßt sich jedoch ohne erhebliche Schwierigkeiten verallgemeinern.

Zwei Effekte können die Winkelkorrelation verfälschen:

1. Ein Teil der Gammaquanten wird in der Quelle inelastisch oder kohärent aus seiner ursprünglichen Richtung gestreut. Dies führt stets zu einer Abschwächung der Koeffizienten A_{ν}^{μ} .
2. Die in Kaskade emittierten Gammaquanten werden durch Streuung und Absorption unter 180° stärker abgeschwächt als unter 90° . Daher treten bei 180° größere Verluste in der Koinzidenzzählrate auf. Bei positiver Anisotropie wird die Winkelverteilung abgeschwächt, bei negativer Anisotropie wird sie verstärkt.

Beide Effekte hängen in ihrer Größe sehr stark von den Gammaenergien und der Ordnungszahl in der Quelle ab.

Es werde zunächst der erste Effekt der Streuung betrachtet. Den inelastischen Anteil durch Compton-Effekt beschreibt die Klein-Nishina-Formel⁸⁾. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung unpolarisierter Strahlung in Richtung ψ ist gegeben durch

$$k_{\text{inel}}(\psi) = \frac{r_0^2}{2} \left\{ \frac{1}{[1 + \alpha(1 - \cos\psi)]^2} \left[1 + \cos^2\psi + \frac{\alpha^2(1 - \cos\psi)^2}{1 + \alpha(1 - \cos\psi)} \right] \right\} \frac{eV^2}{\text{Elektron}} \quad (45)$$

mit

$$\alpha = \frac{h\nu}{m_0 c^2}$$

$$r_0 = \text{klassischer Elektronenradius} \\ = 2,818 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

Gl. (45) setzt Streuung an völlig freien Elektronen voraus, d.h. der übertragenen Impuls q muß wesentlich größer als der ursprüngliche Impuls des Elektrons bei

seiner Bewegung im Atom oder Molekül sein. Für sehr kleine Gammaenergien ist daher Gl. (45) mit der sog. inkohärenten Streufunktion $S(q,Z)$ zu multiplizieren.

Der kohärente Anteil besteht aus Rayleigh-Streuung, die auf elastischer Wechselwirkung mit stark gebundenen Elektronen beruht. Thomson-Streuung, d.h. elastische Streuung an Atomkernen, liefert keinen merklichen Beitrag. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für Rayleigh-Streuung ergibt sich zu⁹⁾

$$k_{\text{coh}}^{(s)} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) |F(q,Z)|^2 \quad \text{cm}^2/\text{Atom} \quad (46)$$

Dabei bezeichnet $F(q,Z)$ den Atomformfaktor. Eine wesentliche Eigenschaft der Rayleigh-Streuung liegt in ihrer stark ausgeprägten Vorwärtsrichtung. Sie braucht daher im allgemeinen nicht berücksichtigt zu werden, solange

$$\int k_{\text{coh}}^{(s)} d\Omega < \int Z k_{\text{inel}}^{(s)} d\Omega$$

ist. Eine wässrige Lösung mit kleinem Trägergehalt erfüllt diese Bedingung für alle Gammaenergien oberhalb 20 keV.

Zur Berechnung der Streukorrektur muß vorausgesetzt werden, daß der Quelldurchmesser klein gegen den Abstand Präparat-Detektor ist und daß Mehrfachstreuungen vernachlässigbar sind,

Es werde zunächst eine Kugelquelle angenommen. Der mittlere Weg \bar{s} der Gammaquanten in der Probe ist dann bei gleichförmiger Verteilung der Aktivität unabhängig von der Emissionsrichtung. Sei $F(\theta)$ die Wahrscheinlichkeit, daß von der Quelle unter dem Winkel θ in die Raumwinkelelemente $d\Omega_1$ und $d\Omega_2$ miteinander korrelierte Photonen ausgesandt werden. Bei Vernachlässigung von $S(q,Z)$ ergibt sich dann in 1. Näherung für den Fall der Compton-Streuung

$$\begin{aligned} F(\theta) \sim d\Omega_1 d\Omega_2 & \left\{ w(\theta) e^{-\mu^{(1)} \bar{s}} e^{-\mu^{(2)} \bar{s}} \right. \\ & + e^{-\mu^{(1)} \bar{s}} \left. w(\theta_2) \frac{k^{(2)}(\theta'')}{\sigma^{(2)}} (1 - e^{-\mu^{(2)} \bar{s}}) d\Omega_2 \right. \\ & + e^{-\mu^{(2)} \bar{s}} \left. w(\theta_1) \frac{k^{(1)}(\theta')}{\sigma^{(1)}} (1 - e^{-\mu^{(1)} \bar{s}}) d\Omega_1 \right. \\ & \left. + \left(w(\theta) \frac{k^{(1)}(\theta')}{\sigma^{(1)}} (1 - e^{-\mu^{(1)} \bar{s}}) \frac{k^{(2)}(\theta'')}{\sigma^{(2)}} (1 - e^{-\mu^{(2)} \bar{s}}) d\Omega_1 d\Omega_2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

Dabei ist $\sigma^{(i)} = \sigma_{\text{inel}}^{(i)}$ der totale inelastische Querschnitt, der aus dem differentiellen $k^{(i)} = k_{\text{inel}}^{(i)}$ (Gl. (45)) durch Integration über $d\Omega$ hervorgeht:

$$C_{\text{inel}}^{(i)} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} k_{\text{inel}}^{(i)}(\psi) \sin \psi d\psi d\varphi$$

N ist die Zahl der Elektronen pro cm^3 und $W(\theta) = \sum A_1 P_1(\cos \theta)$ die ungestörte Verteilungsfunktion. Die Bedeutung der Winkel ergibt sich aus Abb. 3. Der erste Term in Gl. (47) berücksichtigt die direkte Strahlung in $d\Omega_1$ und $d\Omega_2$. Der zweite Term liefert die Wahrscheinlichkeit, daß das Photon γ_1 direkt in $d\Omega_1$ ausgesandt wird, γ_2 jedoch zunächst im Winkel θ_2 zu $d\Omega_1$ emittiert und dann um den Winkel θ'' in $d\Omega_2$ gestreut wird. Der umgekehrte Fall, nämlich direkte Emission von γ_2 in $d\Omega_2$ und Streuung von γ_1 ^{in $d\Omega_1$} wird durch den dritten Term beschrieben. Der vierte Ausdruck berücksichtigt schließlich die Streuung beider Gammaquanten.

Die Funktion $k_{\text{inel}}^{(i)}(\psi)$ ist quadratisch integrierbar und eindeutig und läßt sich daher nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$k_{\text{inel}}^{(i)}(\psi) = \sum \frac{2l'+1}{4\pi} d_{l',P_1}(\cos \psi) \quad (48)$$

Das Additionstheorem für Legendre-Polynome liefert

$$\begin{aligned} P_\nu(\cos \theta'') &= P_\nu(\cos \theta_2) P_\nu(\cos \theta) + \dots \\ P_\nu(\cos \theta') &= P_\nu(\cos \theta_1) P_\nu(\cos \theta) + \dots \\ P_\nu(\cos \psi) &= P_\nu(\cos \theta^*) P_\nu(\cos \theta^{**}) + \dots \\ P_\nu(\cos \theta') &= P_\nu(\cos \theta^*) P_\nu(\cos \theta_1^{**}) + \dots \\ P_\nu(\cos \theta'') &= P_\nu(\cos \theta^{**}) P_\nu(\cos \theta_2^{**}) + \dots \\ P_\nu(\cos \theta) &= P_\nu(\cos \theta_1^{**}) P_\nu(\cos \theta_2^{**}) + \dots \end{aligned} \quad (49)$$

Dabei deuten die Punkte γ -abhängige Terme an, die keinen Beitrag liefern. Es gilt ferner

$$\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{2l'+1}{4\pi}\right)^{1/2} \int P_1(\cos \psi) P_{l'}(\cos \psi) d\Omega = \delta_{1l'}, \quad (50)$$

Mit (48), (49) und (50) folgt aus (47)

$$\begin{aligned} F(\theta) \sim d\Omega_1 d\Omega_2 \left\{ e^{-C^{(1)} N s} e^{-C^{(2)} N s} \sum A_1 P_1(\cos \theta) \right. \\ \left. + e^{-C^{(1)} N s} \frac{(1 - e^{-C^{(2)} N s})}{C^{(2)}} \sum A_1 d_{l'}^{(2)} P_1(\cos \theta) \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &+ e^{-G^{(2)}\bar{N}s} \frac{(1-e^{-G^{(1)}\bar{N}s})}{G^{(1)}} \Sigma A_1 d_1^{(1)} P_1(\cos \theta) \\
 &+ \frac{(1-e^{-G^{(1)}\bar{N}s})}{G^{(1)}} \frac{(1-e^{-G^{(2)}\bar{N}s})}{G^{(2)}} \Sigma A_1 d_1^{(1)} d_1^{(2)} P_1(\cos \theta) \}
 \end{aligned} \right\}$$

oder

$$F(\theta) \sim d_1^{(1)} d_2^{(2)} \left[\Sigma A_1 c_1^{(1)} c_1^{(2)} P_1(\cos \theta) \right] \quad (51)$$

mit

$$c_1^{(i)} = e^{-G^{(i)}\bar{N}s} + (1-e^{-G^{(i)}\bar{N}s}) \frac{d_1^{(i)}}{G^{(i)}} \quad (52)$$

Für die Koeffizienten $d_1^{(i)}$ liefert (48)

$$d_1^{(i)} = 2\pi \int_0^{\pi} k_{inel}^{(i)} P_1(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (53)$$

Die Klammer in Gl. (51) stellt wieder eine Winkelverteilung dar, und zwar genau die Verteilung, die aus der wahren Korrelation $\Sigma A_1 P_1(\cos \theta)$ durch Streuprozesse in der Quelle entsteht. Sie ist mit den Koeffizienten (53) gleich der gemessenen Verteilung, wenn in den Impulskanälen keine Diskriminierung durchgeführt wird und bei vorgegebenen Kristallabmessungen die Energie der Primärquanten γ_1 und γ_2 hinreichend klein ist, so daß sich für die gestreuten Photonen das Absorptionsvermögen der Detektoren nicht mehr merklich ändert.

Die Integration in Gl. (53) ergibt mit (45) für $l = 0, 2$ und 4 die Koeffizienten

$$\left\{ \begin{aligned}
 d_0 &= \frac{\pi r_0^2}{\alpha} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\alpha} - \frac{1}{2(1+2\alpha)^2} \right) + \left(1 - \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} \right) \ln(1+2\alpha) \right\} \\
 d_2 &= \frac{\pi r_0^2}{\alpha} \left\{ 2 \left(\frac{6(1+2\alpha)}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha(2+5\alpha)}{(1+2\alpha)^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{6(1+\alpha)(1+2\alpha)}{\alpha^4} \right) \ln(1+2\alpha) \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$d_4 = \frac{\pi r_0^2}{\alpha} \left\{ 5 \left(\frac{21(1+2\alpha)^2}{2\alpha^5} - \frac{(3-29\alpha)}{4\alpha^3} - \frac{64}{15\alpha} + \frac{7}{6} \right) \right. \\ \left. - \frac{2\alpha(9+19\alpha)}{5(1+2\alpha)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{85}{2\alpha^4} + \frac{4(10+\alpha)}{\alpha^3} + \frac{(1+4\alpha)(8+\alpha)}{\alpha^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha} - \frac{105(1+\alpha)(1+2\alpha)^2}{\alpha^6} \right\} \ln(1+2\alpha)$$

Werden die Impulse der Detektoren diskriminiert, so können nur Compton-Prozesse mit Streuwinkeln $\vartheta \leq \vartheta_0^{(i)}$ zu einer Verfälschung der Winkelverteilung beitragen. Die Gln. (53) und (54) verlieren dann ihre Gültigkeit. $\vartheta_0^{(i)}$ läßt sich aus der Energie $\alpha_0^{(i)}$ bestimmen, die der unteren Diskriminatorschwelle entspricht. Da die Energie des Streuquants

$$\alpha' = \frac{\alpha}{1+\alpha(1-\cos \vartheta)}$$

beträgt, erhält man

$$\cos \vartheta_0^{(i)} = 1 + \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_0^{(i)}} \tag{55}$$

Für

$$\alpha_0^{(i)} \leq \frac{\alpha_1}{1+2\alpha_1}$$

hat Gl. (55) keinen Sinn. Die Diskriminierung ist dann ohne Einfluß auf die Gültigkeit der Gln. (53) und (54).

In den meisten Fällen wird

$$\alpha_1(1-\cos \vartheta_0^{(i)}) \ll 1,$$

so daß man Gl. (45) in guter Näherung durch

$$k_{inel}(\vartheta) = \frac{r_0^2}{2} \left\{ (1+\cos^2 \vartheta) \left[1-2\alpha(1-\cos \vartheta) \right] \right\} \tag{56}$$

ersetzen kann. Die Diskriminierung läßt sich bei der Berechnung der Koeffizienten $d_1^{(i)}$ berücksichtigen, indem man schreibt

$$d_1^{(i)} = 2\pi \int_0^{\vartheta} f_1(\vartheta) k_{inel}^{(i)}(\vartheta) P_1(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

$$\text{mit } \begin{cases} f_i(\vartheta) = 1 & \text{für } \vartheta \leq \vartheta_o^{(i)} \\ f_i(\vartheta) = 0 & \text{für } \vartheta > \vartheta_o^{(i)} \end{cases}$$

oder

$$d_1^{(i)} = 2\pi \int_0^{\vartheta_o^{(i)}} k_{\text{inel}}^{(i)}(\vartheta) P_1(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

Mit (56) und der Abkürzung $x_i = \cos \vartheta_o^{(i)}$ erhält man an Stelle von (54) unter Vernachlässigung des Index i :

$$\begin{aligned} d_o &= \pi r_o^2 \left\{ \frac{1}{3} \left(4 - \frac{7}{2} \alpha \right) - x \left[(1-2\alpha) \left(1 + \frac{x^2}{3} \right) + \alpha x \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \right] \right\} \\ d_2 &= \pi r_o^2 \left\{ \frac{1}{15} \left(2 + \frac{7}{2} \alpha \right) + \frac{x}{2} \left[(1-2\alpha) \left(1 - \frac{2}{3} x^2 - \frac{3}{5} x^4 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha x (1 - x^2 - x^4) \right] \right\} \\ d_4 &= -\pi r_o^2 \left\{ \frac{1}{96} \alpha + \frac{3}{8} x \left[(1-2\alpha) \left(1 - 3x^2 + \frac{1}{3} x^4 + \frac{5}{3} x^6 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha x \left(1 - \frac{9}{2} x^2 + \frac{5}{9} x^4 + \frac{35}{12} x^6 \right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{57}$$

Mit (52) und (57) liefert die Klammer in Gl. (51) die experimentelle Winkelverteilung bei Verwendung von Diskriminatoren, falls für das Ansprechvermögen der Kristalle

$$\mathcal{E}(\alpha_o^{(i)}) \approx \mathcal{E}(\alpha_1)$$

gesetzt werden kann. Diese Bedingung ist meist in guter Näherung erfüllt.

Zur Ableitung der Gl. (51) wurde eine kugelförmige Quelle vorausgesetzt. Für den Grenzfall, daß die Streuwahrscheinlichkeit gleich 1 oder nahezu gleich 1 ist, bleiben die obigen Ergebnisse für beliebige Quellformen gültig. Im allgemeinen Fall $(1 - e^{-\mathcal{E} N \bar{s}}) \neq 1$ ist Gl. (51) für eine zylindrische Probe anwendbar, wenn die Impulse der Detektoren diskriminiert werden, Randeffekte von den Endflächen des Zylinders vernachlässigbar sind und die Ungleichungen

$$\vartheta_o^{(i)} \ll \frac{\pi}{2}$$

und

$$\text{arc tg } \frac{R_{oi}}{H_{oi}} \ll \frac{\eta}{2}$$

erfüllt sind. Für den mittleren Weg \bar{s} der Gammaquanten in der Quelle kann man dann schreiben

$$\bar{s} \approx \frac{1}{\eta R^2} \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \left[x + \sqrt{R^2-y^2} \right] dx dy = \frac{8}{3\eta} R$$

Dabei sind (x,y) kartesische Koordinaten in der Rotationsebene der Detektoren. R ist der Radius der Quelle.

Mit dem Ergebnis (51) erhält Gl. (25) die Form^{+) :}

$$A_1'' = (2l+1) \sum_{l'mm'} \frac{(-1)^{m+m'+l+l'}}{(2l'+1)} A_{l',b_{l',m-1,m},c_{l',c_{l',g_{mm}^{l',l}}}} \quad (58)$$

Eine Berücksichtigung der inkohärenten Streufunktion $S(q,Z)$ und Erweiterung des Ansatzes (47) auf kohärente Anteile (Gl. (46)) führt zu Integralen, die numerisch berechnet werden müssen. Werte für $S(q,Z)$ und für den Atomformfaktor $F(q,Z)$ sind in den Arbeiten von Grodstein⁶⁾ bzw. Nelms und Oppenheim⁸⁾ angegeben.

Der zu Beginn dieses Abschnitts erwähnte zweite Effekt läßt sich beschreiben durch die Schwächungsfunktion

$$G(\theta) = e^{-\tau_1 S(\tau_1, \theta_1, \rho_1)} e^{-\tau_2 S(\tau_2, \theta_2, \rho_2)} \quad (59)$$

wenn τ_i den linearen Schwächungskoeffizienten für das Quant γ_i bezeichnet. Bei der Mittelung treten Integrale auf, die nicht geschlossen darstellbar sind. Man entwickelt daher zunächst zweckmäßig die Exponentialfunktion in Gl. (59) und integriert gliedweise für die Werte $\theta = 90^\circ$ und $\theta = 180^\circ$. Bedeuten wieder (x,y) kartesische Koordinaten in der Rotationsebene der Detektoren, so erhält man für den Fall einer zylindrischen Quelle mit dem Radius R

+) Die Winkelverteilung $W(\theta) = \sum A_l P_l(\cos \theta)$ kann stets wieder so normiert werden, daß $A_0 = 1$ ist.

$$s(x, y, \theta) \approx - (y \sin \theta - x \cos \theta) + \sqrt{R^2 - (y \cos \theta - x \sin \theta)^2}$$

und damit

$$\begin{aligned} G(90^\circ) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \left[1 - \left[\tau_1 (x + \sqrt{R^2-y^2}) + \tau_2 (\sqrt{R^2-x^2} - y) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\dots]^2 - \frac{1}{6} [\dots]^3 + \frac{1}{24} [\dots]^4 - + \dots \right] dx dy \\ &= 1 - \frac{8}{3\pi} (\tau_1 + \tau_2) R + \frac{1}{2} (\tau_1^2 + \tau_2^2) R^2 + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} \right) \tau_1 \tau_2 R^2 \\ &\quad - \frac{32}{45\pi} (\tau_1^3 + \tau_2^3) R^3 - \frac{56}{45\pi} \tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2) R^3 \quad (60) \\ &\quad + \frac{1}{12} (\tau_1^4 + \tau_2^4) R^4 + \left(\frac{2}{9\pi} + \frac{\pi}{32} \right) \tau_1 \tau_2 (\tau_1^2 + \tau_2^2) R^4 + \frac{5}{24} \tau_1^2 \tau_2^2 R^4 - + \dots \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} G(180^\circ) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \left[1 - \left[\tau_1 (x + \sqrt{R^2-y^2}) + \tau_2 (\sqrt{R^2-y^2} - x) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\dots]^2 - \frac{1}{6} [\dots]^3 + \frac{1}{24} [\dots]^4 - + \dots \right] dx dy \\ &= 1 - \frac{8}{3\pi} (\tau_1 + \tau_2) R + \frac{1}{2} (\tau_1^2 + \tau_1 \tau_2 + \tau_2^2) R^2 \\ &\quad - \frac{32}{45\pi} (\tau_1^3 + \tau_1^2 \tau_2 + \tau_1 \tau_2^2 + \tau_2^3) R^3 \quad (61) \\ &\quad + \frac{1}{12} (\tau_1^4 + \tau_1^3 \tau_2 + \tau_1^2 \tau_2^2 + \tau_1 \tau_2^3 + \tau_2^4) R^4 - + \dots \end{aligned}$$

Aus (60) und (61) folgt

$$\frac{G(90^\circ) - G(180^\circ)}{G(180^\circ)} = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \tau_1 \tau_2 R^2 g(\tau_1 R, \tau_2 R) \quad (62)$$

Die Funktion

$$g(\tau_1 R, \tau_2 R) = \frac{1 - \frac{8}{3\pi} B_1 (\tau_1 + \tau_2) R + \frac{1}{2} B_2 (\tau_1^2 + \tau_2^2) R^2 + \frac{1}{2} B_3 \tau_1 \tau_2 R^2 - + \dots}{1 - \frac{8}{3\pi} (\tau_1 + \tau_2) R + \frac{1}{2} (\tau_1^2 + \tau_1 \tau_2 + \tau_2^2) R^2 - + \dots}$$

mit

$$B_1 = \frac{8 \pi}{5(\pi^2 - 4\pi + 8)},$$

$$B_2 = \frac{9\pi^2 - 24\pi + 64}{18(\pi^2 - 4\pi + 8)};$$

$$B_3 = \frac{2\pi}{\pi^2 - 4\pi + 8},$$

.....

weicht nur unwesentlich von 1 ab und kann daher meist vernachlässigt werden. Der Fehler, der dadurch in die Korrektur eingeht, beträgt für $\tau_{1R}, \tau_{2R} = \frac{1}{2}$ etwa 2%. Da die Störung der Anisotropie für diese Werte nach Gl. (62) etwa 5% ausmacht, liegt der Fehler im Endergebnis bei 0,1%, also im allgemeinen merklich unterhalb der Meßgenauigkeit.

Die Ableitung der Funktion $G(\theta)$ läßt sich nach dem oben beschriebenen Verfahren an den Stellen $\theta = 90^\circ$ und $\theta = 180^\circ$ relativ einfach berechnen. Mit dem Ansatz

$$\frac{G(\theta) - G(180^\circ)}{G(180^\circ)} = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \tau_1 \tau_2 R^2 f(\theta) \tag{63}$$

erhält man $f'(90^\circ) = -1$ und $f'(180^\circ) = 0$. Es wird daher

$$f(\theta) = 1 + \cos \theta \tag{64}$$

gesetzt. Auf Grund von (63) und (64) ergeben sich die Koeffizienten der wahren Winkelverteilung $W(\theta)$ aus der Gleichung

$$W(\theta) = \frac{W'(\theta)}{1 + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \tau_1 \tau_2 R^2 (1 + \cos \theta)}. \tag{65}$$

L i t e r a t u r

- 1) M.E. Rose, Phys. Rev. 91 (1953) 610
- 2) A.M. Feingold und S. Frankel, Phys. Rev. 97 (1955) 1025
- 3) E. Wigner, Gruppentheorie, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig
- 4) G. Goertzel, Phys. Rev. 70 (1946) 897
- 5) G. Racah , Phys. Rev. 84 (1951) 910
- 6) G.W. Grodstein, X-Ray Attenuation Coefficients from 10 keV to 100 MeV,
National Bureau of Standards, Circular 583 (1957)
- 7) C. Weitkamp, erscheint demnächst als Externer Arbeitsbericht KFK
- 8) O. Klein und Y. Nishina, Z. f. Physik 52 (1929) 853
- 9) A.T. Nelms und J. Oppenheim, J. Research NBS 55 (1955) 53

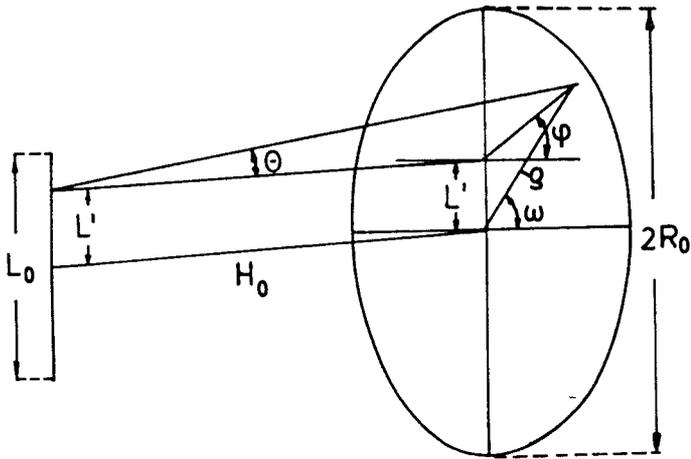


Abb. 1 Geometrie für eine axiale Linienquelle

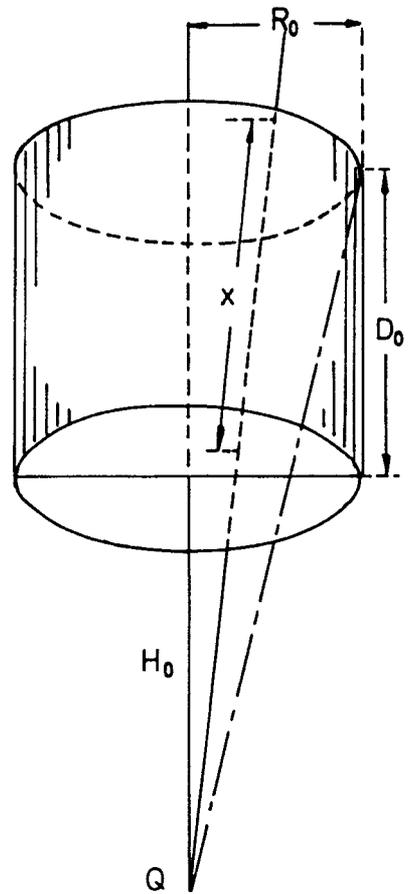


Abb. 2 Geometrie für einen zylindrischen Szintillationskristall

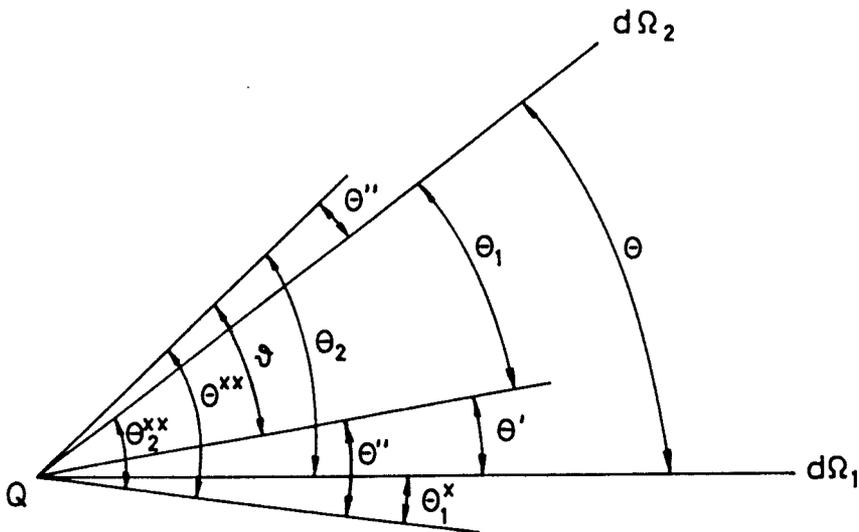


Abb. 3 Bezeichnung der Winkel für die Streukorrektur