

KFK-175

(1. Ex.)

KFK-175

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

August 1963

KFK 175

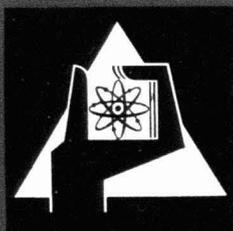
Institut für angewandte Reaktorphysik

Prompt überkritische Leistungsexkursionen

in schnellen Reaktoren

Wolf Häfele

*Gesellschaft für Kernforschung m. B. H.  
Verwaltung der Zentralbücherei*



KERNREAKTOR

BAU- UND BETRIEBS-GESELLSCHAFT M. B. H.

KARLSRUHE



## Prompt überkritische Leistungsexkursionen in schnellen Reaktoren

Von WOLF HÄFELE

(Aus dem Institut für Angewandte Reaktorphysik des Kernforschungszentrums Karlsruhe)

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. Mai 1963)

**Zusammenfassung.** Es wird das kritische Verhalten eines Reaktors bei rampenförmiger von außen eingebrachter Reaktivität und bei Rückwirkung eines prompten negativen Temperaturkoeffizienten untersucht. Dabei wird auf die Besonderheiten schneller Reaktoren und ihren Unterschied zu thermischen Reaktoren abgehoben. Der Fall, in dem verzögerte Neutronen nicht berücksichtigt werden, ist besonders einfach und gestattet eine fast erschöpfende analytische Behandlung. Es werden die Umstände untersucht, unter denen die Größe des prompten negativen Temperaturkoeffizienten aus dem Verlauf der (prompt) überkritischen Leistungsexkursion abgelesen werden kann. Diese Art und Weise der Bestimmung des prompten (Doppler-) Temperaturkoeffizienten interessiert für schnelle Reaktoren und erlaubt insbesondere die Anwendung hoher Temperaturen im Brennstoff und stellt somit eine wertvolle Ergänzung zu Meßmethoden in kritischen Nullenergieanordnungen dar. Es ist beabsichtigt, das hier erläuterte Verfahren beim geplanten amerikanisch-deutschen Reaktorprojekt SEFOR (Southwest Experimental Fast Oxide Reactor), das die Bestimmung des Doppler-Koeffizienten zum Ziele hat, anzuwenden. Die praktische Verwendbarkeit des abgeleiteten Formelsatzes jedoch erfordert eine Untersuchung über den Einfluß der verzögerten Neutronen und die Möglichkeit, diesen Einfluß einfach zu berücksichtigen. Es zeigt sich, daß für den Fall, daß der Reaktor vor der Leistungsexkursion bei Nulleistung betrieben wurde ( $\Phi \approx 10^7 \frac{n}{\text{cm}^2 \text{sec}}$ ), in der ersten Hälfte der ersten Leistungsexkursion der Einfluß der verzögerten Neutronen für Rampensteilheiten, die größer als  $2 \frac{\$}{\text{sec}}$  sind, durch bloße Umnormierung des Ausgangsflusses berücksichtigt werden kann.

### A. Einleitung

Das kritische Verhalten eines Reaktors mit schnellen Neutronen ist im verzögert kritischen Bereich, wo die Reaktivität kleiner als ein Dollar ist, so gut wie überhaupt nicht von dem kritischen Verhalten eines Reaktors mit thermischen Neutronen verschieden. Lediglich der Übergang zum prompt überkritischen Bereich ist unmittelbarer, abrupt. — Im prompt überkritischen Bereich dagegen ergibt sich für die dort zu betrachtenden Leistungsexkursionen zufolge der bei schnellen Reaktoren sehr kurzen Neutronenlebensdauer ( $l \approx 5 \cdot 10^{-7}$ ) eine deutlich andere Zeitskala als bei thermischen Reaktoren. Man hat darauf zu achten, daß ein prompter negativer Temperaturkoeffizient vorliegt, der die Leistungsexkursion begrenzt. Bei schnellen Reaktoren mit nicht metallischen Brennstoffelementen ist das der rein nuklear wirkende Doppler-Koeffizient. Er ist schwer zu berechnen und ist in kritischen Nullenergieanordnungen (z. B. SNEAK) auch nicht einfach zu messen. Deshalb liegt es nahe, den prompten negativen Temperaturkoeffizienten auch dadurch zu messen, daß man seinen Einfluß auf die Form und den Verlauf einer prompt überkritischen Leistungsexkursion untersucht und womöglich von daher eine Meßvorschrift ableitet. Es wird sich herausstellen, daß solche prompt überkritischen Leistungsexkursionen insbesondere dann interessant sind, wenn sie von einem Nulleistungsniveau aus starten ( $\Phi \approx 10^7 \frac{n}{\text{cm}^2 \text{sec}}$ ). Durch die Betonung dieser Art von Exkursionen werden die Ergebnisse dieser Untersuchung auch für die Sicherheitsanalyse von schnellen Nullenergieanordnungen interessant.

Es sollte noch bemerkt werden, daß beabsichtigt ist, die hier angegebene Methode zur Bestimmung des Doppler-Koeffizienten bei der Analyse der Messungen mit dem SEFOR-Reaktor zu benutzen. SEFOR ist eine Abkürzung für Southwest Experimental Fast Oxide Reactor. Der SEFOR-Reaktor arbeitet mit  $\text{PuO}_2/\text{UO}_2$  als Brennstoff und soll mit geplanter personeller und finanzieller Beteiligung des Karlsruher

Projektes Schneller-Brüter\* in einer amerikanischen Wüste durch die General Electric im Auftrage der Southwest Atomic Energy Associates, einer Gruppe von amerikanischen Elektrizitätsgesellschaften, erstellt werden. Die amerikanische Atomenergie-Kommission unterstützt das Projekt durch Übernahme der Entwicklungs- und Betriebskosten.

Untersuchungen, wie sie in der hier vorliegenden Arbeit angestellt werden, sind in verwandter Form unter anderem Aspekt schon früher angestellt worden, ohne jedoch auf die Frage der verzögerten Neutronen in vergleichbarer Ausführlichkeit einzugehen. Vor allem ist es die in Idaho tätige Gruppe von Physikern, die mit der Durchführung der „special power excursion reactor tests“ (SPERT) befaßt ist, die hier genannt werden muß. Der dort vorwiegend gültige Ansatzpunkt ist die Frage, unter welchen Umständen bei Leistungsexkursionen ernsthafte Schäden am Reaktor-Core zustande kommen. Es sei zunächst auf die beiden allgemeinen Arbeiten von W. E. NYER und S. G. FORBES [1], [2] hingewiesen. Mehr explizit mit unseren Überlegungen hat die Arbeit [3] zu tun. Eine Reihe der hier aufgestellten Beziehungen für den Fall ohne verzögerte Neutronen sind dort zu finden. Der Fall eines von außen eingegebenen Reaktivitätssprunges, der gewisse Ähnlichkeiten hat, ist in großer Allgemeinheit von N. J. PALLADINO und A. FODERARO [4] behandelt worden. Mit dem Digitalrechner durchgeführte numerische Untersuchungen finden sich vor allem in Argonne, dort sind die Arbeiten von L. J. KOCH et al. [5] sowohl als auch Untersuchungen von W. J. MCCARTHY jr., R. B. NICHOLSON, D. OKRENT und V. Z. JANKUS [6] zu nennen. Über eine Analogrechner-Untersuchung wird von P. DOSCH [7] berichtet.

Es zeigt sich, daß sich im Grunde eine ganze Reihe von Arbeiten in großer Nachbarschaft zu den hier angestellten Untersuchungen befindet, was nicht überrascht. Jedoch ist nicht bekannt, daß die drei leitenden Gesichtspunkte dieser Arbeit:

1. die Messung des prompten Temperaturkoeffizienten durch prompt überkritische Leistungsexkursionen,

\* Das Karlsruher Projekt Schneller-Brüter wird zu 60% von Deutschland und zu 40% von Euratom getragen.

2. die quantitative Abschätzung der verzögerten Neutronen,

3. eine Gegenüberstellung des dynamischen Verhaltens thermischer und schneller Neutronen schon in ähnlicher Form behandelt worden sind.

### B. Die kinetischen Gleichungen ohne verzögerte Neutronen

Es sei

$$l = \left( \frac{1}{\Sigma_a v} \right)_{\text{eff}} \quad (1)$$

die Neutronenlebensdauer.  $\Sigma_a$  ist der makroskopische Absorptionsquerschnitt,  $v$  ist die Neutronengeschwindigkeit. Wir betrachten im folgenden eine ortsunabhängige Ein-Gruppengleichung für das kinetische Verhalten des Neutronenflusses. In Gl. (1) ist deshalb ein dementsprechender Effektivwert zu wählen. Dann gilt unter Berücksichtigung der Temperaturreaktivitätsrückwirkung:

$$l \frac{d\Phi}{dt} = \left( \rho_{ex}(t) - \Gamma \tilde{c} \int_0^t (\Phi - \Phi_0) dt' \right) \Phi. \quad (2)$$

$\Phi$  ist der Neutronenfluß,  $t$  ist die Zeit,  $\rho_{ex}(t)$  die zeitabhängig von außen aufgeprägte Reaktivität,  $\Gamma$  ist der hier als negativ angenommene, prompt wirkende Temperatur-(Doppler-) Koeffizient,  $\Phi_0$  ist der Neutronenfluß zur Zeit  $t=0$ ; für  $\tilde{c}$  gilt die Gleichung

$$\tilde{c} = \left( \frac{\Sigma_f}{c_S \cdot \rho c} \right)_{\text{eff}}. \quad (3)$$

$\Sigma_f$  ist der makroskopische Spaltquerschnitt,  $\rho \cdot c$  ist die Wärmekapazität des Brennstoffs pro  $\text{cm}^3$  und  $c_S$  ist die Zahl der Spaltungen pro gewählter Energieeinheit bei  $\rho c$ . Bei (3) ist im selben Sinn wie bei (1) ein Effektivwert anzunehmen. In (2) ist angenommen, daß während der jetzt zu betrachtenden Zeiten keine Wärmeabfuhr aus dem Brennstoff erfolgt.

Zunächst flechten wir noch eine hilfreiche Betrachtung ein. Falls wir im Fall  $\Gamma=0$  für  $\rho_{ex}$  ein spezielles Potenzgesetz ansetzen:

$$\rho_{ex} = \left( \frac{t}{t_1} \right)^n \quad (4)$$

läßt sich in (2) für  $\Gamma=0$  ein allgemein interessanter Sachverhalt ablesen. Es kann nämlich die Zeitskala normiert werden, indem man die dimensionslose Zeit  $\tau$  einführt:

$$t = t_0 \cdot \tau, \quad (5)$$

$$t_0 = t_1^{n+1} \cdot l^{\frac{1}{n+1}}. \quad (6)$$

Je größer  $n$  ist, desto mehr ist die Größe von  $l$  ohne Einfluß auf die charakteristische Zeit  $t_0$ , desto mehr verschwindet also in der hier betrachteten Hinsicht der Unterschied zwischen schnellen und thermischen Reaktoren.

Für den uns von jetzt an allein interessierenden Fall  $n=1$  ist die Einführung der dimensionslosen Zeit  $\tau$  auch für  $\Gamma \neq 0$  richtig, was diesen gedanklichen Schritt in seiner Bedeutung betont. Wir führen eine spezielle Schreibweise ein:

$$\rho_{ex} = at, \quad (7)$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{l}{a}}. \quad (8)$$

$a$  ist die sog. Reaktivitätsrampensteilheit mit der Dimension  $\text{sec}^{-1}$ . Aus (8) erkennt man, daß ein Unterschied in  $l$  um den Faktor  $10^3$ , wie er beim Übergang von thermischen zu schnellen Reaktoren vorliegt, bei gleichbleibendem  $a$  in  $t_0$  lediglich den Faktor 30 mit sich bringt. Nur bei Reaktivitätssprüngen ( $n=0$ ) würde der Faktor  $10^3$  einer Änderung von  $l$  sich voll auswirken können. Bei einer Neutronenlebensdauer von etwa  $5 \cdot 10^{-7}$  sec kann man aber Reaktivitätssprünge technisch nicht mehr realisieren, so daß der oben angegebene Faktor 30 auch wirklich relevant ist.

Wir wenden uns jetzt wieder der Gl. (2) zu und führen eine weitere Abkürzung ein, deren physikalischer Sinn im folgenden immer mehr klar werden wird, nämlich

$$\Phi_{as} = \Phi_0 + \frac{a}{\Gamma \tilde{c}}. \quad (9)$$

Man erhält mit (7), (8) und (9) aus (2) die folgende Gleichung:

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \left( \tau - \int_0^\tau \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau' \right) \Phi. \quad (10)$$

An (10) ist bemerkenswert, daß lediglich die Parameterkonstellationen

$$\sqrt{\frac{l}{a}} \quad \text{und} \quad \frac{a}{\Gamma \tilde{c}} \quad (11)$$

implizit bzw. explizit in die Gleichung eingehen. Die Parameterkonstellation  $\sqrt{l/a}$  hat den Charakter einer Zeit, die Parameterkonstellation  $a/\Gamma \tilde{c}$  den Charakter eines Flusses. Zu ihrer Bestimmung werden wir letzten Endes eine absolute Zeit, einen absoluten Fluß oder eine Kombination von Zeit und Fluß, z. B. das Produkt Zeit  $\times$  Fluß, messen müssen. Eine Analyse des Leistungsexkursionsverlaufes kann also höchstens zwei Zahlenwerte vermitteln, wenn  $\Phi_0$  bekannt ist. Von den drei Größen  $l$ ,  $\Gamma \cdot \tilde{c}$ ,  $a$  wird also eine auf anderem Wege bestimmt werden müssen. Es liegt nahe,  $l$  oder  $l/\beta$ , wenn  $\beta$  der Anteil der verzögerten Neutronen ist, zu bestimmen. Dann erhält man aus einer Analyse einer Exkursion  $\Gamma \cdot \tilde{c}$  und  $a$  bzw.  $\Gamma \tilde{c}/\beta$  und  $a/\beta$ . Auch  $a$  mit zu erhalten ist hilfreich, weil  $a$  vielleicht anderweitig schwer sauber bestimmbar ist.

Mit der Abkürzung

$$\rho = \tau - \int_0^\tau \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau' \quad (12)$$

gilt dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\tau} &= \rho \Phi, \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= 1 - \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Das führt auf den Zusammenhang  $\Phi(\rho)$ , indem wir die Gln. (13) durcheinander dividieren und die entstehende Differentialgleichung zwischen zwei Grenzen 1 und 2 integrieren. Man erhält

$$\frac{\Phi_{as}}{\Phi_{as} - \Phi_0} \ln \frac{\Phi_2}{\Phi_1} - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Phi_{as} - \Phi_0} = \frac{\rho_2^2}{2} - \frac{\rho_1^2}{2}. \quad (14)$$

Bevor wir weiter gehen, stellen wir noch fest, daß bei  $\Phi = \Phi_{as}$   $\frac{d\rho}{d\tau} = 0$  ist, dort liegt also ein Maximum oder Minimum der Reaktivität  $\rho$  vor.

Eine Leistungsexkursion beginnt bei  $t=0$ , dort ist  $\Phi = \Phi_0$  und  $\rho = 0$ .

Wir integrieren zunächst allgemein von  $\Phi = \Phi_0$  (nicht notwendig bedeutet das  $t=0$ ) bis  $\Phi = \Phi_{as}$ , wo  $\rho$  ein Extremum hat. Für den Wert von  $\rho$  in diesem Extremum findet man:

$$\rho_{as} = \pm \sqrt{2 \left[ \frac{\Phi_{as}}{\Phi_{as} - \Phi_0} \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0} - 1 \right]}. \quad (15)$$

Das +-Zeichen führt zum Maximum von  $\rho$ , das -Zeichen zum Minimum. Wir fassen zunächst den Fall ins Auge, wo  $\Phi = \Phi_0$  zur Zeit  $t=0$  vorgelegen hat, also den Anfang der Exkursion. Dann erkennt man aus (12), daß zunächst ein Maximum von  $\rho$  durchlaufen wird.

Ist

$$\ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0} \gg 1, \quad (16)$$

so kann auch mit wesentlich kleinerem Fehler  $\Phi_{as}/(\Phi_{as} - \Phi_0) = 1$  gesetzt werden.

Die Ungleichung (16) bedeutet, daß  $\Phi_0$  einem Nulleistungsbetrieb entspricht. Man orientiert sich, daß  $\Phi_{as}$  normalerweise in der Gegend von  $10^{15}$  liegt. Für  $\Phi_0 \approx 10^7$  ist dann  $\ln(\Phi_{as}/\Phi_0) \approx 18$ , die Ungleichung (16) ist in diesem Sinn erfüllt. Es läßt sich dann die Wurzel in (15) wie folgt entwickeln:

$$\rho_{as} = \tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}} + 0\left(\frac{1}{\tau_{as}^3}\right) \quad (17)$$

mit

$$\tau_{as} = \sqrt{2 \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0}} \quad (\text{in obigem Beispiel wäre } \tau_{as} \approx 6). \quad (18)$$

Hätten wir (10) gelöst, ohne die Temperaturrückwirkung zu berücksichtigen, so hätten wir die Lösung

$$\Phi' = \Phi_0 e^{\tau'^2/2} \quad (19)$$

zu betrachten gehabt. Zum Zeitpunkt  $\tau = \tau_{as}$  ist dort  $\Phi' = \Phi_{as}$ . Berechnen wir im Sinne einer ersten Näherung die bei  $\tau = \tau_{as}$  vorliegende Reaktivität  $\rho'_{as}$ , indem wir das Temperaturintegral unter Verwendung von (19) ermitteln, so erhalten wir zunächst:

$$\int_0^{\tau_{as}} \frac{\Phi' - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau' \approx \frac{1}{\Phi_{as}} \int_0^{\tau_{as}} \Phi_0 e^{\tau'^2/2} d\tau' = \frac{1}{\tau_{as}} + 0\left(\frac{1}{\tau_{as}^3}\right).$$

Damit gilt dann:

$$\rho'_{as} = \tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}} + 0\left(\frac{1}{\tau_{as}^3}\right).$$

Also gilt unter Beachtung von (17):

$$\rho'_{as} = \rho_{as} + 0\left(\frac{1}{\tau_{as}^3}\right). \quad (20)$$

Solange  $\tau_{as}$  hinreichend groß ist, solange also die Exkursion von einem Nulleistungsbetrieb startet, ist bei  $\Phi = \Phi_{as}$  die bis dahin erfolgte Reaktivitätsrückwirkung  $1/\tau_{as}$  gegenüber der von außen eingebrachten Reaktivität  $\tau_{as}$  klein wie  $1/\tau_{as}^2$  gegenüber 1. In diesem Sinne kann man sagen, daß erst bei  $\tau = \tau_{as}$  die Aufheizung des Brennstoffs einsetzt.

Man bestimmt nun sehr leicht die Höhe des entstehenden Maximums des Flusses, an dem die Reaktivitätsrückwirkung der Aufheizung die von außen eingebrachte Reaktivität zum erstenmal kompensiert hat, indem wir (14) von  $\rho=0$  und  $\Phi = \Phi_0$ , (1), bis

$\rho=0$  und  $\Phi = \Phi_M$ , (2), ausgeführt denken. Man erhält

$$\ln \frac{\Phi_M}{\Phi_0} = \frac{\Phi_M - \Phi_0}{\Phi_{as}} \approx \frac{\Phi_M}{\Phi_0} \cdot \frac{\Phi_0}{\Phi_{as}}. \quad (21)$$

Wir erhalten durch Auflösen dieser transzendenten Gleichung:

$$\Phi_M = \Phi_{as} \left( \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0} + \ln \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0} + \ln \left( \frac{\ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0} + \ln \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0}}{\ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0}} \right) + \dots \right). \quad (21a)$$

Das Bemerkenswerte an der Gl. (21a) ist, daß allein der  $\ln(\Phi_{as}/\Phi_0)$  die Höhe des Maximums bestimmt. Ein Fehler von z.B. 20% bei der Bestimmung von  $\Phi_0$

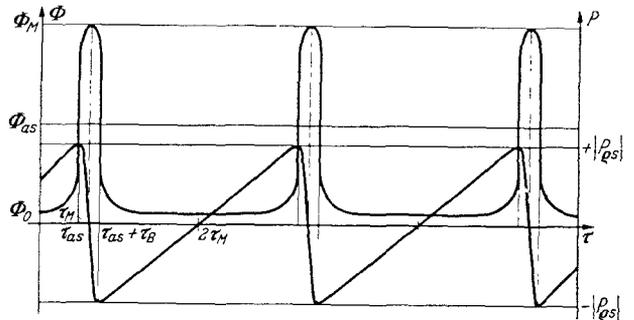


Abb. 1. Der Flußverlauf im Fall, daß keine verzögerten Neutronen vorliegen, ist streng periodisch. Bis zu  $\Phi = \Phi_{as}$  ergibt sich ein linearer Anstieg der Reaktivität während der Zeit  $\tau_{as}$ , dann wird die Reaktivität von  $+\rho_{as}$  zu  $-\rho_{as}$  durch Temperaturentwurf abgebaut. Nach  $2\tau_M = 2\tau_{as} + \tau_B$  ist der Ausgangszustand erreicht. Die Flußspitze oberhalb  $\Phi_{as}$  mittels sich mit den Werten unterhalb  $\Phi_{as}$ , derart heraus, daß im zeitlichen Mittel der Fluß  $\Phi_{as}$  herrscht

macht sich kaum bemerkbar. Will man große Werte von  $\Phi_M$  erzielen, so muß man möglichst mit einer von Neutronen im logarithmischen Sinn leeren Anordnung zur Zeit  $t=0$  beginnen.

Nach dem Erreichen des Flußmaximums wird die Reaktivität negativ, der Fluß nimmt ab, bei  $\Phi = \Phi_{as}$  wird  $\rho = -|\rho_{as}|$ . Da der Zusammenhang  $\Phi(\rho)$  die Zeit explizit nicht enthält, ist das Abfallen des Flusses  $\Phi$  streng symmetrisch zum Aufbau des Flusses, der gesamte Flußverlauf ist streng periodisch. Man erhält also folgendes Bild (s. Abb. 1).

Bei  $\rho = +|\rho_{as}|$  gilt

$$\rho_{as} = \tau_{as} - \int_0^{\tau_{as}} \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau' = - \int_0^{\tau} \frac{\Phi_{as} - \Phi}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau'.$$

Bei  $\tau = \tau_{as} + \tau_B$  soll  $\rho = -|\rho_{as}|$  sein. Dort hat dann der Fluß wieder den Wert  $\Phi_{as}$  erreicht. Deshalb gilt:

$$\int_{\tau_{as}}^{\tau_{as} + \tau_B} \frac{\Phi - \Phi_{as}}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau' = 2 \left( \tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}} \right). \quad (22)$$

Das heißt aber, daß die Integrale  $\int_0^{\tau_{as}}$  und  $\int_{\tau_{as}}^{\tau_{as} + \tau_B}$  flächengleich sind.

$$- \int_0^{\tau_{as}} (\Phi - \Phi_{as}) d\tau' = \int_{\tau_{as}}^{\tau_{as} + \tau_B} (\Phi - \Phi_{as}) d\tau'. \quad (23)$$

Es kann interessant sein, nach der echten maximalen reziproken Periode zu fragen. Man erhält:

$$\left(\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dt}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{a}{l}} \left(\tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}}\right). \quad (24)$$

Die maximale reziproke Periode tritt bei  $\Phi = \Phi_{as}$  auf.

Schließlich stellen wir noch folgende Überlegung an: Es ist der Zusammenhang  $\rho(\Phi)$  durch (14) bekannt, so daß (13) dazu benutzt werden kann, den Zusammenhang  $\tau(\Phi)$  herzustellen und damit die Faltung der Zeitachse über  $\Phi$  zu finden, also das Problem vollständig zu lösen. Wir finden aus (14), wenn wir zwischen  $\tau_{as}$  und  $\tau$ , d. h. zwischen  $\Phi_{as}$  und  $\Phi$  integrieren:

$$\rho = \sqrt{2 \left[ \ln \frac{\Phi}{\Phi_{as}} - \frac{\Phi - \Phi_{as}}{\Phi_{as}} \right] + \varrho_{as}^2}.$$

Damit gilt dann

$$\frac{\tau_B}{2} = \int_{\Phi_{as}}^{\Phi_M} \frac{d\Phi}{\Phi \sqrt{2 \left[ \ln \frac{\Phi}{\Phi_{as}} - \frac{\Phi - \Phi_{as}}{\Phi_{as}} \right] + \varrho_{as}^2}}. \quad (25)$$

Ist  $\tau_B$  bekannt, so läßt sich das Aufheizintegral angeben. Im Maximum ( $\tau = \tau_M$ ) gilt nämlich

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^{\tau_{as} + \frac{\tau_B}{2}} (\Phi - \Phi_0) d\tau' \\ &= \left(\tau_{as} + \frac{\tau_B}{2}\right) (\Phi_{as} - \Phi_0) = \tau_M \cdot (\Phi_{as} - \Phi_0). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Wegen der Symmetrie des Flußverlaufes gilt diese Relation sinngemäß auch für jedes ganze Vielfache der Zeit  $\tau_M$ .  $\Phi_{as}$  ist also der Wert, der im zeitlichen Mittel im Sinn von (26) vorliegt.

Man kann sich für  $\tau_B$  Näherungswerte verschaffen, wenn man die numerische Ermittlung von  $\tau_B$  gemäß (25) scheidet. Ersetzt man den Flußverlauf zwischen  $(\Phi_{as}, \Phi_M, \Phi_{as})$  durch eine Parabel, die im Maximum richtig den Wert  $\Phi_M$  annimmt, so erhält man unter Verwendung von (22)

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{as}}^{\tau_{as} + \tau_B} (\Phi - \Phi_{as}) d\tau' &= \Phi_M \cdot \tau_B \cdot \frac{2}{3} \\ &= 2 \left(\tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}}\right) \cdot (\Phi_{as} - \Phi_0). \end{aligned}$$

Hätte man statt der Parabel eine andere Kurvenform gewählt, so wäre statt  $\frac{2}{3}$  ein etwas anderer Zahlenfaktor entstanden.

Wegen  $\Phi_{as} \gg \Phi_0$  gilt dann

$$\tau_B \cong 3 \left(\tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}}\right) \frac{\Phi_{as}}{\Phi_M} \quad (27)$$

(in unserem früheren Zahlenbeispiel wäre  $\tau_B \approx 1$ ).

Ist  $\tau_{as}$  hinreichend groß, so ist auch  $\Phi_{as}/\Phi_M$  hinreichend klein, bei  $\tau_B$  handelt es sich dann im Vergleich zu  $\tau_{as}$  nur um eine Korrekturgröße.

Wir erhalten folgende Formelzusammenstellung, bei der wir, um der praktischen Anwendung willen,

wieder die normale Zeit  $t$  an Stelle von  $\tau$  einführen.

$$\left. \begin{aligned} t &= t_0 \cdot \tau, \\ t_0 &= \sqrt{\frac{l}{a}}, \\ \Phi_{as} &= \Phi_0 + \frac{a}{\Gamma \tilde{c}} \cong \frac{a}{\Gamma \tilde{c}}, \\ |\varrho_{as}| &= \tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}} + 0 \left(\frac{1}{\tau_{as}^3}\right), \\ \tau_{as} &= \left| \sqrt{2 \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0}} \right|, \\ \frac{\Phi_M}{\Phi_{as}} &= \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0} + \\ &+ \ln \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0} + \ln \left( \frac{\ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0} + \ln \ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0}}{\ln \frac{\Phi_{as}}{\Phi_0}} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left(\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dt}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{a}{l}} \left(\tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}} + 0 \left(\frac{1}{\tau_{as}^3}\right)\right)$$

tritt bei  $\Phi = \Phi_{as}$  auf,

$$\begin{aligned} \int_{t_{as}}^{t_{as} + t_B} (\Phi - \Phi_{as}) dt' &= \frac{2\sqrt{la}}{\Gamma \tilde{c}} \left(\tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}} + 0 \left(\frac{1}{\tau_{as}^3}\right)\right), \\ \int_0^{t_M} (\Phi - \Phi_0) dt' &\cong \frac{\sqrt{la}}{\Gamma \tilde{c}} \left(\tau_{as} + \frac{3}{2} \left(\tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}}\right) \frac{\Phi_{as}}{\Phi_M}\right). \end{aligned}$$

In der letzten Formel stellt der Faktor  $\frac{3}{2}$  einen Näherungswert dar. Das Größenordnungssymbol 0 haben wir in der zweiten Klammer nicht mehr mitgeführt. Sonst sind alle Relationen exakt.

Die Relation (26) führt für die Zeitpunkte  $t_n$  mit

$$t_n = n \cdot t_M; \quad t_M = \sqrt{\frac{l}{a}} \cdot \tau_M$$

auf die einfache Gleichung

$$\Gamma \tilde{c} \int_0^{t_n} (\Phi - \Phi_0) dt' = t_n \cdot a = \varrho_{ex}(t_n). \quad (29)$$

In der Näherung, wie die Punkte  $t_n$  dicht liegen, d. h. wenn man also Zeiten  $t \gg t_M$  betrachtet, wird das Problem im Sinne von (29) zum quasistatischen Problem. Dort gilt einfach

$$\varrho_{ex} = \Gamma \tilde{c} \int_0^t (\Phi - \Phi_0) dt'.$$

Es ist dabei gleichgültig, wie  $\varrho_{ex}$  eingebracht wird, ob mit großem  $a$  und kleinen Zeiten  $t$  oder kleinem  $a$  und großen Zeiten  $t$ , lediglich das Produkt  $\varrho_{ex} = at$  geht in das quasistatische Problem ein.

Anders verhält es sich, wenn man nach der Temperaturerzeugung in der ersten Leistungsspitze fragt. Dort sind die für die Reaktivitätseingabe anzuordnenden Zeiten durch die Natur des Problems vorgeschrieben, es geht nicht mehr Produkt  $a \cdot t$ , sondern allein  $a$  ein. Man erhält mit

$$T_0 = \tilde{c} \int_0^{2t_M} (\Phi - \Phi_0) dt', \quad (30)$$

$$T_0 \cong \frac{\sqrt{l \cdot a}}{\Gamma} (\tau_{as} + \tau_B). \quad (31)$$

Die Zeiteile  $\tau_{as} + \tau_B \leq \tau \leq 2\tau_M$  tragen zum Temperaturintegral praktisch nichts bei.

Betrachten wir jetzt einmal ein fest vorgegebenes Zeitintervall  $t_g$ , wobei  $t_g \gg t_0$  sei. Dann ergeben sich  $N = \frac{t_g}{t_0} \sim \sqrt{\frac{a}{l}} \cdot t_g$  Leistungsexkursionen während der Zeit  $t_g$ . Jede Exkursion zieht eine Temperaturerhöhung, die zu  $\sqrt{l \cdot a}$  proportional ist, nach sich. Die totale Temperaturerhöhung  $T_g$  während der Zeit  $t_g$  ist also wie folgt proportional:

$$T_g \sim N \cdot \sqrt{l \cdot a} \sim t_g \sqrt{\frac{a}{l}} \sqrt{l a} = a \cdot t_g.$$

$T_g$  ist also von  $l$  unabhängig.

Wenn der Temperaturkoeffizient  $\Gamma$  nur negativ ist, ergibt sich in der integralen Aufheizspanne während einer Zeit  $t_g \gg t_0$  kein Unterschied zu einem thermischen Reaktor. Man kann lediglich feststellen, daß die Aufheizung bei einem schnellen Reaktor in kleinen, abgehackten Stücken vonstatten geht, dem raschen Schwingen einer straff gespannten Feder bei kleiner Amplitude vergleichbar, während ein thermischer Reaktor wenige, dafür aber größere Exkursionen ausführt, was mit dem langsamen, weiten Ausschlagen einer schwach gespannten Feder verglichen werden kann.

Ein wirklich weittragender Unterschied zum Verhalten thermischer Reaktoren stellt sich bei schnellen Reaktoren erst dann ein, wenn ein positiver Temperaturkoeffizient vorliegt. Die Kürze der charakteristischen Zeit  $\sqrt{l/a}$  macht dann fast jedes mechanische oder sonstige Eingreifen unmöglich. Bezüglich der häufig gemachten Feststellung, daß schnelle Reaktoren von ihrem dynamischen Verhalten her gefährlicher als thermische Reaktoren seien, ist festzustellen, daß bei kleiner werdendem  $l$  lediglich mit wachsender Schärfe das Negativsein des prompten Temperaturkoeffizienten zu fordern ist.

Es ist wichtig, sich schließlich noch den folgenden Sachverhalt vor Augen zu führen: Die Auswirkung eines großen Wertes von  $\Gamma$  ist eine doppelte: einmal wird  $\Phi_{as}$  verkleinert und damit der mittlere Temperaturaufbau, hier geht  $\Gamma$  unmittelbar, d.h. linear ein, zum anderen wird, wenn auch schwach, die Leistungsüberhöhung  $\Phi_M/\Phi_{as}$  sowohl als auch der Abstand der Leistungsspitze  $2\tau_{as}$  kleiner,  $\Gamma$  geht dabei nur logarithmisch ein. Die Bestimmung des Doppler-Koeffizienten, d.h. hier der Größe  $\Gamma$ , erfolgt nun leicht dadurch, daß z.B. das Flußintegral  $\int_0^{t_M} (\Phi - \Phi_0) dt'$  und der Wert  $\Phi_M$  gemessen werden, dann gilt unter Verwendung von (21)

$$\frac{a}{\Gamma \bar{c}} = \left( \Phi_M \cdot \frac{1}{\ln \frac{\Phi_M}{\Phi_0}} \right)_{\text{Meßwert}} \quad (32)$$

$\Phi_0$  muß zur Ermittlung des Ausdruckes unter dem Logarithmus vorliegen, muß also nicht sehr genau bekannt sein, dagegen muß  $\Phi_M$  als Absolutwert bestimmt werden. Für die Ermittlung von  $\sqrt{l/a}$  gilt:

$$\sqrt{\frac{l}{a}} = \left( \frac{\ln \frac{\Phi_M}{\Phi_0}}{\Phi_M} \cdot \frac{\int_0^{t_M} (\Phi - \Phi_0) dt'}{\tau_{as} + \frac{3}{2} \left( \tau_{as} - \frac{1}{\tau_{as}} \right) \cdot \frac{1}{\ln \frac{\Phi_M}{\Phi_0}}} \right)_{\text{Meßwert}} \quad (33)$$

dabei ist  $\tau_{as} = \sqrt{2 \ln \frac{a}{\Gamma \bar{c} \Phi_0}}$ , also geht auch hier  $\Phi_0$  nur unter dem Logarithmus ein.

Mit (32) und (33) ist aber die Aufgabe erfüllt, aus zwei leicht zugänglichen Meßdaten die beiden relevanten Parameterkonstellationen  $\sqrt{l/a}$  und  $a/\Gamma \bar{c}$  zu bestimmen.

### C. Der Einfluß der verzögerten Neutronen

Die bisherige Behandlung der prompt überkritischen Leistungsexkursionen ist nur dann richtig, wenn der Einfluß der verzögerten Neutronen vernachlässigt bzw. leicht abgeschätzt und berücksichtigt werden kann. Im folgenden soll ermittelt werden, unter welchen Bedingungen das der Fall ist.

Die Gleichungen für den Fall mit verzögerten Neutronen, die (2) ersetzen, lauten wie folgt:

$$l \frac{d\Phi}{dt} = \left( at - \Gamma \bar{c} \int_0^t (\Phi - \Phi_0) dt' - \beta \right) \Phi + \sum_i \frac{\lambda_i C_i}{\Sigma_a} \quad (34)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i + \beta_i \Sigma_a \Phi. \quad (35)$$

In (34) haben wir von vornherein für  $\rho_{ex}(t)$  die Form (7) angenommen. Statt  $\Sigma$  haben wir  $\Sigma$  als Summenzeichen verwendet,  $\beta$  ist, wie schon früher erwähnt, der Gesamtanteil der verzögerten Neutronen,  $\beta_i$  der Anteil der  $i$ -ten Gruppe,  $\lambda_i$  ist die Zerfallskonstante der Vorläufer der  $i$ -ten Gruppe,  $C_i$  ist die Konzentration der Vorläufer der  $i$ -ten Gruppe. Aus (35) folgt

$$\sum_i \frac{\lambda_i C_i}{\Sigma_a} = \beta \Phi_0 + \beta \sum_i g_i \lambda_i \int_0^t (\Phi - \Phi_0) e^{-\lambda_i(t-t')} dt' \quad (36)$$

mit

$$g_i = \frac{\beta_i}{\beta}. \quad (37)$$

Bei den hier in Rede stehenden Zeiten  $t \ll 1/\lambda_i$  kann das Exponentialglied im Integral durch die eins ersetzt werden. Wenn wir wieder die Zeit  $t$  mit  $\sqrt{l/a}$  normieren, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\tau} = & \left( \tau - \tilde{\beta} - \int_0^\tau \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau' \right) \Phi + \tilde{\beta} \Phi_0 + \\ & + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R} \int_0^\tau (\Phi - \Phi_0) d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Dabei haben wir folgende neuen Abkürzungen eingeführt:

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{l/a}}, \quad (39)$$

$$\lambda_{\text{eff}} = \sum_i g_i \lambda_i, \quad (40)$$

$$R = \frac{a}{\beta}. \quad (41)$$

$R$  ist also die Reaktivitätsgeschwindigkeit in  $\$/\text{sec}$ , wie sie fast immer benutzt wird.  $\tilde{\beta}$  ist bei schnellen Reaktoren wegen der Kleinheit der Reaktivitätsgröße  $\sqrt{l/a}$  eine große Zahl, die bei  $100/\sqrt{R}$  liegt. Diese Zahl gibt an, wie viele Zeiteinheiten  $t_0 = \sqrt{l/a}$  man für das Erreichen des überprompt kritischen Punktes benötigt.

Wir wollen nun zeigen, daß für die erste Hälfte der ersten Leistungsexkursion der Einfluß der verzögerten Neutronen dadurch leicht erfaßt werden kann, daß für den Wert  $\Phi_0$  in den Formeln (28) ein Ersatzwert  $\Phi_0^*$  bzw.  $\Phi_0^{**}$  verwendet wird. Nach wie vor gehen wir von der Voraussetzung aus, daß vor der Leistungsexkursion Nulleistung vorliegt.

Bei der Diskussion der Zusammenhänge im Falle der Exkursion ohne verzögerte Neutronen hatten wir erkannt, daß für  $\Phi < \Phi_{as}$  noch keine Aufheizung vorlag. Dort konnte der Verlauf von  $\Phi$  durch (19) beschrieben werden, d.h. aber, daß bei  $\Phi < \Phi_{as}$  nur eine lineare Differentialgleichung zu betrachten ist.

Im Falle der Exkursion mit verzögerten Neutronen wollen wir für  $\Phi < \Phi_{as}$  nun ebenfalls lediglich die lineare Differentialgleichung betrachten, d.h. das Aufheizglied fortlassen.

Mit der Abkürzung

$$x = \tau - \tilde{\beta} \quad (42)$$

erhalten wir aus (38) unter Fortlassung des Aufheizintegrals:

$$\frac{d\Phi}{dx} = x \cdot \Phi + \tilde{\beta} \Phi_0 + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R} \int_{-\tilde{\beta}}^x (\Phi - \Phi_0) dx'. \quad (43)$$

Zunächst interessieren wir uns für den Fall  $\lambda_{\text{eff}}/R = 0$ . Man erhält als Lösung von (43)

$$\Phi = e^{\frac{x^2}{2}} \left( \Phi_0 e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}} + \tilde{\beta} \Phi_0 \int_{-\tilde{\beta}}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \right).$$

Unter Verwendung der Fehlerfunktion

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

erhalten wir:

$$\Phi = e^{\frac{x^2}{2}} \left( \Phi_0 e^{-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}} + \Phi_0 \tilde{\beta} \sqrt{2\pi} \frac{\Phi\left(\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}}\right) + \text{sign } x \cdot \Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right)}{2} \right) \quad (44)$$

sign  $x = \pm 1$ , je nach dem Vorzeichen von  $x$ .

Der erste Term ist gegenüber dem zweiten Term zu vernachlässigen. Für  $x > 2$  etwa kann die Fehlerfunktion  $\Phi(x/\sqrt{2})$  eins gesetzt werden. Für alle interessierenden Fälle ist auch  $\Phi(\tilde{\beta}/\sqrt{2})$  sehr genau gleich eins. Man erhält dann

$$\Phi = \tilde{\beta} \Phi_0 \sqrt{2\pi} \cdot e^{x^2/2}, \text{ für hinreichend großes } x. \quad (45)$$

Das ist aber der Lösungstyp, wie er schon bei (19), d.h. im Falle, wo die verzögerten Neutronen fehlen, unterhalb  $\Phi_{as}$  vorliegt. Man hat lediglich wie folgt zu substituieren:

$$\Phi_0 \rightarrow \Phi_0^* = \Phi_0 \tilde{\beta} \sqrt{2\pi}. \quad (46)$$

Im Falle  $\lambda_{\text{eff}}/R = 0$  ist es also sicher möglich, die verzögerten Neutronen durch eine bloße Umnormierung zu berücksichtigen.

Der Fall  $\lambda_{\text{eff}}/R \neq 0$  ist bereits sehr viel schwerer zu behandeln; zunächst transformieren wir (43) in eine etwas handlichere Form

$$\Phi = y(x) + A. \quad (47)$$

Dadurch geht (43) in die folgende Form über:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y + B + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R} \int_{-\tilde{\beta}}^x y dx'. \quad (48)$$

Dabei gilt

$$A = \Phi_0 \frac{\frac{\lambda_{\text{eff}}}{R}}{1 + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R}}, \quad (49)$$

$$B = \tilde{\beta} \Phi_0 \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R}}, \quad (49a)$$

$$y(-\tilde{\beta}) = \Phi_0 \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R}}. \quad (49b)$$

(48) ist eine lineare Differentialgleichung, die für  $\lambda_{\text{eff}}/R = n$  ( $n$  ist eine ganze, positive Zahl) geschlossene Lösungen hat. Löst der Ausdruck  $\overset{\circ}{y}(x)$  die Gl. (48) für  $\lambda_{\text{eff}}/R = 0$  ( $\overset{\circ}{y}(x)$  ist also durch (44) gegeben), so ist

$$\overset{(n)}{y}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \overset{\circ}{y}(x)$$

eine Lösung von (48) für  $\lambda_{\text{eff}}/R = n$ . Bei dem hier vorliegenden Problem jedoch interessiert vielmehr der Fall sehr kleiner Werte von  $\lambda_{\text{eff}}/R$ . Das legt eine störungstheoretische Behandlung nahe. Mit

$$\frac{\lambda_{\text{eff}}}{R} \ll 1 \quad (50)$$

setzen wir jetzt an:

$$y = \left( 1 + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R} \cdot f(x) \right) \overset{\circ}{y}(x). \quad (51)$$

Mit (51) gehen wir in (48) ein und vernachlässigen Glieder mit  $(\lambda_{\text{eff}}/R)^2$  gegenüber 1.

Mit

$$w(x) = f(x) \cdot \overset{\circ}{y}(x) \quad (52)$$

erhält man dann für  $w$  die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dw}{dx} = xw + \int_{-\tilde{\beta}}^x \overset{\circ}{y}(x') dx'. \quad (53)$$

Da  $\overset{\circ}{y}(x)$  schon die richtige Anfangsbedingung erfüllt, muß gelten:

$$w(-x_0) = 0, \quad \text{da} \quad f(-x_0) = 0. \quad (54)$$

Man erhält mit

$$M(x) = \int_{-\tilde{\beta}}^x \overset{\circ}{y}(x') dx' \quad (55)$$

für  $f(x)$  die folgende Lösung

$$f(x) = \frac{w(x)}{\overset{\circ}{y}(x)} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\tilde{\beta}}^x M(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi}{\overset{\circ}{y}(x)}. \quad (56)$$

Unser Ziel ist es,  $f(x)$  so genau zu ermitteln, daß wir für  $x$  größer als etwa 2 angeben können, wie klein  $\lambda_{\text{eff}}/R$  sein muß, damit in (51) der Term  $(\lambda_{\text{eff}}/R) f(x)$  gegenüber 1 nur noch eine Korrektur ist. Nur in diesem groben Sinne ist eine Auswertung erforderlich.

Dazu bedenken wir, daß  $\overset{0}{y}(x)$  sich für  $x < -a$  relativ langsam ändert, denn der Ausdruck

$$e^{x^2/2} \left( 1 - \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

ist eine sich im Vergleich zu  $e^{x^2/2}$  langsam ändernde Funktion.  $a$  ist ein Zahlwert, oberhalb dessen für  $\Phi$  die asymptotischen Darstellungen gelten. Man orientiert sich, wenn man feststellt  $a \approx 2$ . Für  $x > a$  ändert sich  $\overset{0}{y}(x)$  wie  $e^{x^2/2}$  [siehe (45)]. Für unsere groben Betrachtungen lassen wir jetzt das Zwischengebiet  $-a < x < +a$  außer acht. Dann ist es sinnvoll,  $M(x)$  für  $x > a$  in zwei Teile aufzuteilen<sup>1</sup>.

$$M(x) = \Phi_0 \sqrt{2\pi} \tilde{\beta} (m_0 + m_1(x)). \tag{57}$$

Dabei gilt

$$\int_{-\tilde{\beta}}^0 \overset{0}{y}(x') dx' = \Phi_0 \sqrt{2\pi} \tilde{\beta} \cdot m_0$$

$$\int_0^x \overset{0}{y}(x') dx' = \Phi_0 \sqrt{2\pi} \tilde{\beta} m_1(x) \approx \Phi_0 \sqrt{2\pi} \tilde{\beta} \frac{e^{x^2/2}}{x}, \text{ für } x > a.$$

Dann schließen wir weiter

$$\int_{-\tilde{\beta}}^x M(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \int_{-\tilde{\beta}}^0 M(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + \int_0^x M(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Der erste Term ist wegen der relativ langsamen Veränderlichkeit von  $M(\xi)$  für  $\xi < 0$  (bzw.  $< -a$ ) im Vergleich zu  $e^{-\xi^2/2}$  dadurch leicht zu ermitteln, daß man schreibt

$$\int_{-\tilde{\beta}}^0 M(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \approx m_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \Phi_0 \sqrt{2\pi} \tilde{\beta}. \tag{58}$$

Der zweite Term hat etwa den folgenden Charakter:

$$\int_0^x M(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \approx \Phi_0 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\beta} \cdot \ln \frac{x}{a}, \text{ für } x > a. \tag{59}$$

Damit erhält man aber für  $f(x)$

$$f(x) \approx m_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \ln \frac{x}{a}, \text{ für } x > a, a \approx 2 \tag{60}$$

mit

$$m_0 = \int_{-\tilde{\beta}}^0 e^{\xi^2/2} \frac{\Phi \left( \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \right) - \Phi \left( \frac{|\xi|}{\sqrt{2}} \right)}{2} d\xi. \tag{61}$$

Betrachtet man die Funktion

$$r_0(x) = \int_{-\infty}^x e^{\xi^2/2} \frac{1 - \Phi \left( \frac{|\xi|}{\sqrt{2}} \right)}{2} d\xi, \tag{61}$$

so wird der einmal zu ermittelnde Wert  $r_0(0)$  typisch für  $m_0$  sein. Die Abhängigkeit von  $r_0$  von  $x$  im Intervall  $-a < x < +a$  ist ein Hinweis für den Fehler, den wir durch das Nichtbeachten dieses Zwischengebietes bis jetzt gemacht haben. In Abb. 2 ist  $r(x)$  dargestellt.

Im Sinne von Abb. 2 ist

$$m_0 \approx 2 \tag{62}$$

ein vernünftiger Zahlenwert.

Man erhält unter Beachtung von (46), (47), (49), (51), (44) und (60) den folgenden Ausdruck für  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) = \Phi_0^* \left\{ 1 + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R} \times \left( m_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1 + \ln \frac{x}{a} \right) e^{x^2/2}; a \approx 2. \right\} \tag{63}$$

Bei der Aufstellung der Relationen (32) und (33) und davor wurde darauf hingewiesen, daß  $\Phi_0$  – und d.h. jetzt  $\Phi_0^*$  – lediglich unter dem Logarithmus erscheint. Bei Nulleistungsbetrieb würde z.B. ein Fehler von 100% bei  $\Phi_0^*$  bei der Ermittlung von  $\tau_{as}$  lediglich einen Fehler von etwa 2% verursachen. Daraus schließen wir, daß (63) für

$$\frac{\lambda_{\text{eff}}}{R} < 0,2 \tag{64}$$

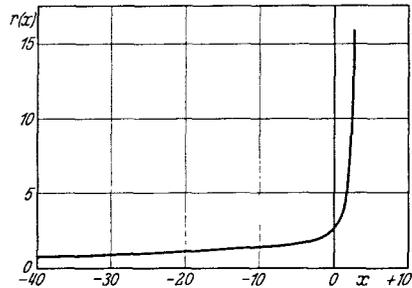


Abb. 2. Der Verlauf der Funktion  $r(x)$ , die zur Abschätzung des Einflusses der verzögerten Neutronen dient. Es interessiert der Zahlenwert von  $r(x)$  im Intervall  $-a < x < +a$ , mit  $a \approx 2$

die Ermittlung eines hinreichend genau definierten Anfangsflusses

$$\Phi_0^{**} = \Phi_0 \sqrt{2\pi} \tilde{\beta} \left( 1 + \frac{\lambda_{\text{eff}}}{R} \left( m_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1 + \ln \frac{x}{a} \right) \right) \tag{65}$$

erlaubt. Die schwache Veränderlichkeit  $\ln(x/a)$  geht in dem hier erlaubten Unsicherheitspegel unter.

Jetzt kehren wir zu der vollständigen Gl. (38) zurück.

Unter Beachtung von (64) läßt sich ein Ersatzfluß  $\Phi^{**}$  [siehe (65)] angeben derart, daß der Einlauf in das Gebiet der Aufheizung von einem Einlauf in das Gebiet der Aufheizung, der ohne verzögerte Neutronen zustande kommt, nicht unterschieden werden kann; d.h. aber, daß in (38) der Term der unverzögerten Neutronen führend ist. Das ist bis zum Erreichen des ersten Maximums der Fall. Dort macht sich der Term der verzögerten Neutronen erneut bemerkbar. Somit ist es interessant zu fragen, eine wie große zeitliche Verschiebung das Maximum der Leistungsexkursion zufolge des Einflusses der verzögerten Neutronen erfährt. Im Falle des Fehlens der verzögerten Neutronen gilt

$$\tau_M - \int_0^{\tau_M} \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau' = 0.$$

Das  $\tau_M$  im Falle ohne verzögerte Neutronen ist sinngemäß für den Fall mit verzögerten Neutronen mit  $(\tau_M - \tilde{\beta} + \delta\tau)$  in Beziehung zu setzen.

<sup>1</sup> Ich verdanke diesen Hinweis Herrn Dr. K. OTT.

Im Maximum muß gelten:

$$\left( \tau_M + \tilde{\beta} + \delta\tau - \int_0^{\tau_M} \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0} d\tau' - \frac{\Phi_M - \Phi_0}{\Phi_{as} - \Phi_0} \delta\tau \right) \times \left. \begin{aligned} &\times \Phi_M + \tilde{\beta}\Phi_0 + \frac{\lambda_{eff}}{R} \int_0^{\tau_M} (\Phi - \Phi_0) d\tau' + \\ &+ \frac{\lambda_{eff}}{R} (\Phi_M - \Phi_0) \delta\tau = 0. \end{aligned} \right\} (66)$$

Dabei soll  $\Phi_M$  den Wert von  $\Phi$  in und um das Maximum bedeuten. Unter Beachtung von (64) und wegen  $\Phi_0 \ll \Phi_{as}$  gilt dann

$$\frac{\delta\tau}{(\tau_M - \tilde{\beta})} = \frac{\frac{\lambda_{eff}}{R}}{\frac{\Phi_M}{\Phi_{as}} \left( \frac{\Phi_M}{\Phi_{as}} - 1 \right)}. \quad (67)$$

Ebenso leicht läßt sich der relative Fehler im Integral, das die Fläche unter der Leistungsexkursion angibt, ermitteln.

$$\delta J = \frac{\frac{\delta\tau_M}{\tau_M} \int_0^{\tau_M} (\Phi - \Phi_0) d\tau'}{\int_0^{\tau_M} (\Phi - \Phi_0) d\tau'} \cong \frac{\frac{\lambda_{eff}}{R}}{\left( \frac{\Phi_M}{\Phi_{as}} - 1 \right)}. \quad (68)$$

Wie bei der Betrachtung (19) bis (20) ist der Fehler in der Zeitverschiebung (67) um etwa eine Größenordnung kleiner als der Fehler bei der Ermittlung der Reaktivität (68).

Bis zum Erreichen des ersten Maximums können wir also unter Verwendung von (65) und unter Beachtung von (64) den Formelsatz (28) d.h. aber die Relationen (32) und (33) zur Bestimmung des prompten Temperaturkoeffizienten verwenden.

Es ist nicht zu erwarten, daß die Anwendbarkeit des Formelsatzes (28) auch über das erste Maximum hinaus noch gegeben ist. Betrachten wir z.B. das Minimum nach dem ersten Maximum. Zufolge der

ersten Leistungsexkursion sind im Vergleich zu  $t=0$ , als lediglich der Anteil  $\tilde{\beta}\Phi_0$  an verzögerten Neutronen vorlag, wesentlich mehr verzögerte Neutronen vorhanden. Für die zweite Exkursion wird also qualitativ gesprochen ein wesentlich höherer Wert  $\Phi_0^{**}$  vorliegen, das zweite Maximum wird also erheblich tiefer liegen als das erste, es macht sich ein Dämpfungseffekt bemerkbar, der es schließlich mit sich bringt, daß sich der Fluß bei  $\Phi = \Phi_{as}$  als stationärem Wert einpendelt.

Im Gegensatz zum Fall ohne verzögerte Neutronen stellt sich also im Fall mit verzögerten Neutronen der Wert  $\Phi_{as}$  auch wirklich asymptotisch ein. Aus diesem Grunde wurde auch dieser Wert als  $\Phi_{as}$  bezeichnet. Der Dämpfungseffekt hat zur Folge, daß durch ein Hochziehen der zweiten Hälfte der ersten Leistungsexkursion bereits die erste Leistungsexkursion im Gegensatz zu Formelsatz (28) zeitlich unsymmetrisch verläuft. Man hat sich also bei der Anwendung von (28) auf die erste Hälfte der ersten Exkursion zu beschränken.

Der Verfasser dankt den Herren Dr. OTT und Dr. ENGELMANN für viele hilfreiche Diskussionen.

**Literatur:** [1] NYER, W.E., and S.G. FORBES: SPERT Program Review. IDO-16634 (1960). — [2] NYER, W.E., and S.G. FORBES: Dynamic Properties of Heterogeneous Water Reactors. IDO-16701 (1961). — [3] FORBES, S.G., F.L. BENTZEN, P. FRENCH, J.E. GRUND, J.C. HAIRE, W.E. NYER and R.F. WALKER: Analysis of Self Shutdown Behaviour in the SPERT I Reactor. IDO-16528 (1959). — [4] PALLADINO, N.J., and A. FODERARO: Intrinsic Reactor Safety through Design. Symposium on Reactor Safety and Hazards Evaluation Techniques, SM-24/36, Wien 14.—18. Mai 1962. — [5] KOCH, L.J. et al. Hazard Summary Report: EBR-II, ANL-5719. — [6] MCCARTHY jr., W.J., R.B. NICHOLSON, D. OKRENT and V.Z. JANKUS: Studies of Nuclear Accidents in Fast Power Reactors. 2. Genfer Konferenz, P/2165. — [7] DOSCH, P.: Leistungsschwankungen eines Reaktors im prompt überkritischen Gebiet bei rampenförmigen Reaktivitätsstörungen. Nukleonik 4, 258ff. (1962).