

KFK-228

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

Mai 1964

KFK 228

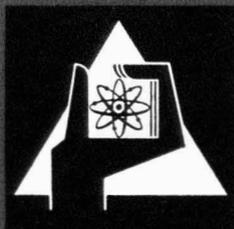
Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Näherungsformeln zur Theorie der Resonanzabsorption von Neutronen
in heterogenen Strukturen

Manfred Brose

Gesellschaft für Kernforschung m. B. H.
Zentrum

7. Okt. 1964



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

Gesellschaft für Kernforschung m. b. H.
Zentralbücherei

7. Okt. 1964

Näherungsformeln zur Theorie der Resonanzabsorption von Neutronen in heterogenen Strukturen

Von **MANFRED BROSE**

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Kernforschungszentrum Karlsruhe*

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 20. Dezember 1963)

Zusammenfassung. Unter Verwendung einer von ROE angegebenen Approximation für die dopplerverbreiterten Wirkungsquerschnitte (Ψ -Funktion) und einer Approximation für die Stoßwahrscheinlichkeiten von Platten- und Stabgeometrie können die bekannten Integrale der „narrow resonance“ (NR)-Näherungen analytisch ausgeführt werden. In einigen Fällen wird ein Vergleich mit den Ergebnissen numerischer Integrationen von ADLER und NORDHEIM durchgeführt.

1. Einleitung

Die Absorption von Neutronen während der Moderation in Uranresonanzen ist Gegenstand zahlreicher theoretischer Arbeiten gewesen. Eine vollständige Zusammenstellung dieser Arbeiten sowie deren Ergebnisse wird in dem bekannten Buch von L. DRESNER [1] gegeben. Mehr auf die Bedürfnisse der praktischen Berechnung effektiver Resonanzintegrale ausgerichtet sind die Tabellenwerke von ADLER und NORDHEIM [2]. ADLER et al. geben für den Fall der weiter unten noch zu erläuternden „narrow resonance“ (NR)- und „infinite mass“ (IM)-Näherung Tabellen an, die in einem beschränkten Geometriebereich die gleichzeitige Berücksichtigung von Geometrie- und Doppler-Effekt gestatten. Im Rahmen dieser Arbeit sollen analytische Approximationsausdrücke für die Rechnungen von ADLER et al. angegeben werden, die eine beliebige Ausdehnung des Geometriebereiches gestatten. Die Approximationsformeln erlauben eine Berücksichtigung des Doppler-Effektes bei Platten- oder Stabgeometrie des Resonanzabsorbers. Eine Anpassung an die Kugelform ist ebenfalls möglich, wird aber in dieser Arbeit nicht durchgeführt.

2. Formulierung des Problems

Der Resonanzabsorber nehme das Volumen V_1 ein und sei in ein unendlich ausgedehntes Moderatorvolumen V_2 eingebettet. Es wird ferner angenommen, daß sich sowohl in V_1 als auch in V_2 oberhalb der Resonanz ein isotropes und homogenes $1/E$ -Bremspektrum ausgebildet hat und daß dieses Spektrum in V_2 auch bei Resonanzenergien erhalten bleibt. Alle mikroskopischen und makroskopischen Wirkungsquerschnitte beziehen sich auf den Absorberkörper V_1 . Dann führt die Theorie der Resonanzabsorption von Neutronen in heterogenen Geometrien auf zwei Näherungen, die hier ohne Ableitung angegeben werden sollen. Ihre Herleitung ist in den Arbeiten [1] und [2] zu finden.

* Auszug aus der Dissertation des Verfassers, Karlsruhe 1962.

2.1. „Narrow resonance“ (NR)-Näherung

Hier wird angenommen, daß die Ausdehnung der Resonanz klein ist im Vergleich zum Stoßintervall ($E, E/\alpha$) in V_1 .

$(1-\alpha)$ ist der maximale relative Energieverlust beim Stoß an einem Kern der Massenzahl A , mit $\alpha = (A - 1/A + 1)^2$.

Das Resonanzintegral zerfällt dann in zwei Teile, für die von WIGNER [3] die Bezeichnungen Oberflächenterm I_s und Volumenterm I_v eingeführt wurden:

$$I = I_v + I_s, \quad (2.1)$$

$$I_v(E_r) = \int_0^\infty \frac{\sigma_a(E) \Sigma_p}{\Sigma_t(E)} \frac{dE}{E}, \quad (2.2)$$

$$I_s(E_r) = \int_0^\infty \sigma_a(E) \frac{(\Sigma_t(E) - \Sigma_p)}{\Sigma_t(E)} P_{12}(\Sigma_t(E)) \frac{dE}{E}. \quad (2.3)$$

E_r Resonanzenergie,
 Σ_p makroskopischer Potentialstreuquerschnitt in V_1 ,
 $\Sigma_t(E)$ makroskopischer totaler Wirkungsquerschnitt in V_1 ,
 $\sigma_a(E)$ mikroskopischer Absorptionsquerschnitt des Resonanzabsorbers in V_1 ,
 $P_{12}(E)$ Entkommwahrscheinlichkeit für V_1 , d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei homogener und isotroper Quellverteilung in V_2 ein Neutron in V_1 keinen Stoß ausführt.

Für I_v und I_s wurden von ADLER et al. [2] Tabellen berechnet, die in einem beschränkten Geometriebereich die Angabe der beiden Terme für Platten, Kugeln und Stäbe ermöglichen. Die Berechnungen wurden mit den exakten Entkommwahrscheinlichkeiten $P_{12}(E)$ der drei Geometrien und dopplerverbreiterten Wirkungsquerschnitten, entsprechend (2.5) und (2.6) durchgeführt, jedoch unter Vernachlässigung des Interferenzterms.

2.2. „Infinite Mass“ (IM)-Näherung

In diesem entgegengesetzten Extremfall wird angenommen, daß für die Absorberkerne $\alpha = 1$ ist. Im

Absorberelement enthaltene leichte Kerne (z. B. Sauerstoff und Kohlenstoff) werden weiter nach der NR-Approximation berücksichtigt. Man erhält für das Resonanzintegral einer Linie in der IM-Näherung:

$$I(E_r) = \int_0^{\infty} \sigma_a(E) P_{12}(\Sigma_a(E)) \frac{dE}{E}. \quad (2.4)$$

(2.4) ist mit dem exakten $P_{12}(E)$ der drei Geometrien von ADLER et al. [2] tabelliert worden.

2.3. Mikroskopische Wirkungsquerschnitte

Es wird angenommen, daß sich der totale und die partiellen mikroskopischen Wirkungsquerschnitte durch Einniveau Breit-Wigner-Formel darstellen lassen. Dann gilt bei Berücksichtigung des Doppler-Effektes:

$$\sigma_a(x) = \frac{\sigma_{a0} \Psi(x, t_D)}{\sqrt{1 + \gamma x}}, \quad (2.5)$$

$$\sigma_s(x) = \sigma_{s0} \Psi(x, t_D) + \sigma_i \chi(x, t_D) + \sigma_p \quad (2.6)$$

mit

$$\sigma_{a0} = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \sigma_0 \quad (2.7)$$

Resonanzabsorptionsquerschnitt bei $E = E_r$,

$$\sigma_{s0} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \sigma_0 \quad (2.8)$$

Resonanzstreuquerschnitt bei $E = E_r$,

$$\sigma_0 = 4\pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \quad (2.9)$$

totaler Resonanzquerschnitt bei $E = E_r$,

$$\sigma_i = \sqrt{g \sigma_{s0} \sigma_p} \quad (2.10)$$

Interferenzstreuquerschnitt,

$$\sigma_p = 4\pi R^2 \quad (2.11)$$

Potentialstreuquerschnitt,

λ_r die reduzierte Broglie-Wellenlänge eines Neutrons mit der Energie E_r ,

Γ_n Neutronenbreite,

Γ_γ Strahlungsbreite,

$\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n$ totale Halbwertsbreite,

R Kernradius,

sowie

$$\Psi(x, t_D) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_D}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t_D}}}{1+y^2} dy \quad (2.12)$$

$$\rightarrow \frac{1}{1+x^2}, \text{ wenn } t_D \rightarrow 0; \quad (2.13)$$

$$\chi(x, t_D) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_D}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t_D}}}{1+y^2} 2y dy \quad (2.14)$$

$$\rightarrow \frac{2x}{1+x^2}, \text{ wenn } t_D \rightarrow 0; \quad (2.15)$$

$$x = \frac{2}{\Gamma} (E - E_r), \quad (2.16)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2E_r}, \quad (2.17)$$

$$t_D = \frac{4E_r kT}{(A+1)\Gamma^2} \quad (2.18)$$

Doppler-Parameter.

$\sqrt{t_D}$ ist der Quotient aus der sog. Doppler-Breite Δ und der Halbwertsbreite Γ der natürlichen Linienform¹. Wenn der Kern in ein Kristallgitter eingebaut ist, sind (2.12) und (2.14) nicht streng gültig. LAMB [4] hat diesen Fall untersucht. Er legt seinen Rechnungen das Debye-Modell zugrunde und kommt zu dem Ergebnis, daß man bei „schwacher Bindung“ des Kernes im Kristall, die durch die Ungleichung

$$\Delta + \Gamma \gg 2k\Theta_D; \quad \Theta_D: \text{Debye-Temperatur}$$

charakterisiert ist, die Funktionen (2.12) und (2.14) beibehalten kann. An Stelle der thermischen Energie kT muß man t_D jedoch mit der mittleren Energie pro Schwingungsfreiheitsgrad eines Atomes im Kristall berechnen. Diese Größe ist aus der Theorie der spezifischen Wärme gut bekannt und lautet nach dem Debye-Modell:

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{3}{8} K \cdot \Theta_D + 3kT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{t^3 dt}{e^t - 1}. \quad (2.19)$$

Wenn $\frac{\Theta_D}{T} \ll 1$ ist, kann man (2.19) entwickeln:

$$\bar{\varepsilon}(T) \approx kT \left(1 + \frac{1}{20} \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)^2 - \frac{1}{1680} \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)^4 \pm \dots \right). \quad (2.20)$$

3. Approximationen

3.1. Approximation der Funktion $\Psi(x, t_D)$ nach ROE

Eine Reduktion des Integrals (2.12) auf tabellierte Funktionen ist nicht möglich. In neuerer Zeit haben ADLER und NALIBOFF [6] die Exponentialfunktion im Integranden durch ein Tschebyscheff-Polynom hoher Genauigkeit ersetzt und konnten dann die Integration geschlossen ausführen. Das Ergebnis ist jedoch kompliziert und gestattet keine weitere geschlossene Integration von Funktionen, in denen Ψ im Argument auftritt.

Für Rechnungen mäßiger Genauigkeit besteht jedoch der Wunsch, eine rationale, integrierbare Approximation zu besitzen. Eine Näherung, die diese Bedingungen erfüllt, ist von ROE [7] angegeben worden und soll im folgenden besprochen werden. Sie besitzt für Werte von $t_D \leq 100$ einen maximalen Fehler von $-6,7\%$, der bei einer Ausdehnung des Bereiches auf $t_D \leq 2500$ auf $-9,7\%$ anwächst.

Nach ROE [7] genügt die Ψ -Funktion folgenden Integralbedingungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi dx = \pi, \quad (3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2 dx = \frac{\pi}{2} M(t_D), \quad (3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{(1+x^2)\Psi - 1\} = 2\pi t_D, \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2 x^2 dx = \frac{\pi}{2} \{1 + t_D M(t_D)\}, \quad (3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} M\left(\frac{t_D}{2}\right) \quad (3.5)$$

¹ Die Grenzfälle (2.13) und (2.15) bezeichnet man als die natürlichen Linienformen einer Resonanz.

mit

$$\begin{aligned}
 M(t_D) &= \int_0^\infty e^{-v} - \left(\frac{t_D}{2}\right)^v dv \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2t_D}} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2t_D}} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(n-1)!}{n!} \left(\frac{t_D}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}; \quad t_D > 1^1 \\
 &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{t_D}{2}\right)^n; \quad t_D < 1.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ferner gilt für $t_D \ll 1 + x^2$

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \frac{1}{1+x^2} + t_D \frac{(6x^2-1)}{(1+x^2)^3} + \\
 &\quad + t_D^2 \frac{(60x^4-120x^2+12)}{(1+x^2)^5} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

bzw.

$$t_D \ll x^2$$

$$\Psi = \frac{1}{x^2} + \frac{6t_D-1}{x^4} + \frac{60t_D-20t_D+1}{x^6} + \dots \tag{3.8}$$

sowie für sehr kleine Werke von x

$$\Psi = \alpha + \frac{1}{2} \alpha' x^2 + \dots, \tag{3.9}$$

$$\Psi = \alpha(1 - \gamma x^2 + \dots) \tag{3.10}$$

mit

$$\Psi(0, t_D) = \alpha(t_D) = M(2t_D), \tag{3.11}$$

$$\gamma = \frac{\alpha'}{2\alpha}. \tag{3.12}$$

Gl. (3.9) beruht auf der Identität:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \tag{3.13}$$

Wie ROE zeigt, ist es zweckmäßig, nicht Ψ als Funktion von x , sondern x als Funktion von Ψ zu approximieren. Als unabhängige Variable wird

$$\xi = \frac{\Psi}{\alpha} \tag{3.14}$$

verwandt; damit ist der Maximalwert von ξ immer auf 1 normiert. Die von ROE angegebene Approximation lautet:

$$\begin{aligned}
 X \alpha(t_D) &= \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \times \\
 &\quad \times \{R_0 + R_1 \xi + R_2 \xi^2 + R_3 \xi^3 + R_4 \xi^4\}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Die Koeffizienten R sind Funktionen von t_D . Sie lauten:

$$R_0 = \sqrt{\alpha}, \tag{3.16a}$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha} \{ (6t_D - 1) \alpha + 1 \}, \tag{3.16b}$$

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \frac{1}{6} \left\{ 896 - 549 \sqrt{\alpha} - 384 \frac{M}{\alpha} + \right. \\
 &\quad \left. + 14 \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} - 23 \alpha \sqrt{\alpha} (t_D - 1) \right\},
 \end{aligned} \tag{3.16c}$$

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \frac{2}{3} \left\{ -608 + 345 \sqrt{\alpha} + 288 \frac{M}{\alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - 14 \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} + 11 \alpha \sqrt{\alpha} (6t_D - 1) \right\},
 \end{aligned} \tag{3.16d}$$

¹ Um Verwechslungen mit dem makroskopischen Wirkungsquerschnitt zu vermeiden, wird S für das Summenzeichen verwendet.

$$\begin{aligned}
 R_4 &= -4 \left\{ -64 + 35 \sqrt{\alpha} + 32 \frac{M}{\alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \alpha \sqrt{\alpha} (6t_D - 1) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.16e}$$

Die Approximation (3.15) mit den Koeffizienten (3.16) erfüllt:

- a) die Integralbedingungen (3.1) und (3.2)
- b) bei Entwicklung für $\xi \ll 1$ bzw. $1 - \xi \ll 1$ die ersten und zweiten Entwicklungskoeffizienten (3.8) und (3.9).

3.2. Approximation der Stoßwahrscheinlichkeit

$Q_{12}(x) = 1 - 2E_3(x/2)$ für Platten
durch rationale Ausdrücke

Mit x möge im folgenden die Größe $\Sigma_t l = 2 \Sigma_i d$ (Σ_i = makroskopischer totaler Wirkungsquerschnitt des Absorbers, d = Plattendicke) bezeichnet werden. Dann ist die Beziehung zwischen der Stoßwahrscheinlichkeit $Q_{12}(x)$ und der Entkommwahrscheinlichkeit $P_{12}(x)$, wie sie in dem Buch von DRESNER [1] abgeleitet wird, gegeben durch:

$$P_{12}(x) = \frac{Q_{12}(x)}{x}. \tag{3.17}$$

$Q_{12}(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein aus einem isotropen und homogenen Neutronenfeld im Moderator 2 auf den Absorber 1 fliegendes Neutron in diesem einen Stoß ausführt.

$P_{12}(x)$ wurde in Kap. 2.1 erklärt.

Die Stoßwahrscheinlichkeit für eine Absorberplatte 1, eingebettet in einen Moderator 2 mit homogenem isotropen Neutronenfeld lautet:

$$Q_{12}(x) = 1 - 2E_3\left(\frac{x}{2}\right). \tag{3.18}$$

$E_3(x)$ bedeutet das dritte Placzeksche Exponentialintegral [8]. Gl. (3.18) ist aber nicht weiter integrierbar und man muß für $Q_{12}(x)$ Approximationen suchen, die bei Verwendung der mikroskopischen Wirkungsquerschnitte in Form der Gl. (2.5) und (2.6) mit der Roe-Approximation (3.15) die Energiemittlung noch in geschlossener Form gestattet. Diese Bedingung wird nur von rationalen Ausdrücken erfüllt, auf die man sich daher beschränken muß. Die erste Funktion dieser Art, die alle gestellten Bedingungen erfüllt, ist von WIGNER angegeben worden:

$$Q_w(x) = \frac{x}{1+x}. \tag{3.19}$$

(3.19) gilt auch für Kugeln und Stäbe. Wie in Abb. 1 gezeigt wird, ist diese Approximation nicht sehr genau und der relative Fehler von $Q_w(x)$ gegenüber (3.18), Kurve I, beträgt für das Argument $X = 0,06$, +1,1%, sowie für $x = 3,00$, -15,4%. Der Fehler fällt außerdem für große Argumente nur sehr langsam ab und beträgt z. B. bei $x = 30$ noch -3%. Wie DRESNER [1] gezeigt hat, kann hierdurch das aus der Wigner-Näherung berechnete effektive Resonanzintegral einer Linie Fehler bis zu -10% aufweisen. Dieser Fehler wird dadurch hervorgerufen, daß die Funktion $Q_{12}(x)$ für große Argumente wie $1 - (\sum_n C_n x^n e^{x/2})^{-1}$ gegen den Grenzwert 1 strebt, wohingegen $Q_w(x)$ für große Argumente wie $1 - 1/x$ verläuft. Eine verbesserte Approximationsfunktion muß daher mit höherer Ordnung gegen den Grenzwert 1 konvergieren. MÜLLER [4] gibt einen Korrekturterm der Form:

$$\Delta Q_{12}(x) = a_1 \frac{(b_1 x)^2}{(b_1 + x)^3} \tag{3.20}$$

mit den Konstanten $a_1 = 0,44$ und $b_1 = 1,98$ für Plattengeometrie an. Es soll nun der Approximationssatz (3.20) für die Differenzfunktion $Q_{12}(x) - Q_W(x)$ so erweitert werden, daß es möglich ist, den großen negativen Fehler der Wigner-Näherung in jedem weiteren Approximationsschritt zu verkleinern. Der allgemeine Approximationsansatz lautet:

$$\Delta \tilde{Q}_{12}(x) = \sum_{v=1}^N \Delta^{(v)} \tilde{Q}_{12}(x) = \sum_{v=1}^N a_v \frac{x^{v+1}}{(b_v + x)^{2v+1}} \quad (3.21)$$

Es sollen Glieder bis zur Ordnung $N=4$ berücksichtigt werden.

a) Die Funktion $Q_{12}(x) - Q_W(x)$ hat ein Maximum bei $x_m = b_e = 3,740$.

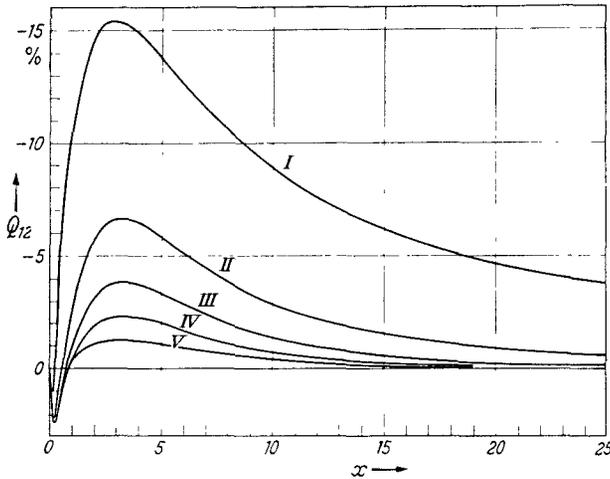


Abb. 1. Approximation der Stoßwahrscheinlichkeit $Q_{12}(x)$ für Platten

b) Um optimale Korrektur des Fehlers zu erhalten, ist es notwendig, den Maxima der Korrekturfunktionen $\Delta^{(v)} \tilde{Q}_{12}(x)$ die Abszissenwerte b_e zu geben. Aus

$$\frac{d\Delta^{(v)} \tilde{Q}_{12}(x)}{dx} = 0; \quad v = 1, 2, 3 \text{ und } 4$$

erhält man für die Maxima x_m , der Funktionen $\Delta^{(v)} \tilde{Q}_{12}(x)$

$$\left. \begin{aligned} x_{m,v} &= \frac{v+1}{v} b_v = b_e \\ b_v &= \frac{v}{v+1} b_e \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

c) Die Entwicklung der Approximationsfunktion $\tilde{Q}_{12}(x) = Q_W(x) + \Delta \tilde{Q}_{12}(x)$ nach Potenzen von $1/x$

$$\tilde{Q}_{12}(x) = 1 + \frac{g_1}{x} + \frac{g_2}{x^2} + \frac{g_3}{x^3} + \frac{g_4}{x^4} + \dots$$

ergibt die Entwicklungskoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= 1 + a_1 \\ g_2 &= 1 - 3a_1 b_1 + a_2 \\ g_3 &= -1 + 6a_1 b_1^2 - 5a_2 b_2 + a_3 \\ g_4 &= 1 - 10a_1 b_1^3 + 15a_2 b_2^2 - 7a_3 b_3 + a_4 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

d) Wie oben ausgeführt, strebt $Q_{12}(x)$ für große Argumente mit unendlich hoher Ordnung gegen den Grenzwert 1. Daher werden die Koeffizienten g_1, g_2, g_3 und g_4 Null gesetzt und ergeben mit b_e nach (3.22) die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a_v :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{3}{2} b_e - 1, \\ a_3 &= \frac{7}{2} b_e^2 - \frac{10}{3} b_e + 1, \\ a_4 &= \frac{77}{8} b_e - \frac{130}{12} b_e^2 + \frac{21}{4} b_e - 1. \end{aligned}$$

Prinzipiell wäre es möglich, nach ähnlichem Verfahren auch das kleine positive Fehlermaximum zu beseitigen, jedoch wäre der numerische Aufwand beträchtlich. Abb. 1) gibt den relativen Fehler der verschiedenen Approximationsschritte wieder.

Kurve I: $\frac{Q_W(x) - Q_{12}(x)}{Q_{12}(x)}$,

Kurve II: $\frac{Q_W(x) + \Delta^{(1)} \tilde{Q}_{12}(x) - Q_{12}(x)}{Q_{12}(x)}$, etc.

Die vollständige Approximation $\tilde{Q}_{12}(x)$, Kurve V in Abb. 1 zeigt noch einen Fehler von +2,5% und -1%. Diese Fehler können sich nur noch bei sehr dünnen Absorberfolien bemerkbar machen.

3.3. Anpassung der Konstanten a_v und b_v an die Stabgeometrie

Die Stoßwahrscheinlichkeit für Stäbe ist in dem Buch von CASE et al. [9] angegeben und lautet:

$$Q_{12}(y) = \frac{4y^2}{3} \left\{ 2[y \{K_1(y) I_1(y) + K_0(y) I_0(y)\} - 1] + \frac{1}{y} K_1(y) I_1(y) - K_0(y) I_1(y) + K_1(y) I_0(y) \right\} \quad (3.25)$$

In (3.25) ist das Argument: $y = \Sigma_t R$ mit $R =$ Stabradius, also $x = 2y$ mit x in der Definition des Abschnittes 3.2. $K_0(y), I_0(y), K_1(y)$ und $I_1(y)$ sind die Bessel-Funktionen wie sie in dem Buch von WATSON [10] definiert sind. Für (3.25) gelten die Entwicklungen bei sehr kleinem bzw. sehr großem Argument:

$y \ll 1$:

$$Q_{12}(y) \approx 2y - \frac{8}{3} y^2 + y^3 \left(\frac{5}{4} - \ln \frac{\gamma y}{2} \right) \dots \quad (3.26)$$

mit $\gamma = 0,577216 \dots$ Macheronische Konstante,

$y \gg 1$:

$$Q_{12}(y) \approx 1 - \frac{3}{16y^2} + \dots \quad (3.27)$$

Die Anpassung der Konstanten a_v und b_v geschieht in folgenden Schritten:

a) $\Delta^{(1)} \tilde{Q}_{12}(x)$.

a_1 und b_1 werden so bestimmt, daß bei der Entwicklung des Ausdruckes $Q_W(x) + \Delta^{(1)} \tilde{Q}_{12}(x)$ für kleine Argumente der quadratische Entwicklungsterm den Wert $-\frac{3}{8}$, entsprechend (3.26) in der x -Skala, annimmt, während der lineare Entwicklungsterm für große Argumente, entsprechend (3.27), verschwinden muß, d.h. Gl. I des Gleichungssystems (3.24) gültig bleibt:

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \sqrt[3]{3} = 1,44225 \dots$$

b) $\Delta^{(2)} \tilde{Q}_{12}(x)$.

Die Funktion $Q_W(x) + \Delta^{(1)} \tilde{Q}_{12}(x)$ hat gegenüber (3.25) einen maximalen absoluten Fehler beim Argument $x = 2,662$; d.h. die der Konstanten b_e bei Plattengeometrie entsprechenden Größe b_2 hat den Wert

$$b_2 = 2,662.$$

Aus (3.22) folgt daraus b_e . Man erhält dann a_2 aus dem Gleichungssystem (3.23), Gl. 2, indem g_2 entsprechend (3.27) in der x -Skala, $-\frac{3}{8}$ gesetzt wird:

$$1 - 3a_1 b_1 + a_2 = -\frac{3}{8}.$$

Man erhält für a_2 und b_2 endgültig

$$a_2 = 2,57675, \quad b_2 = 1,7747.$$

c) $\Delta^{(v)} \tilde{Q}_{12}(x); v = 3 \text{ und } 4$.

Die höheren b_v und a_v mit $v = 3$ und 4 werden aus der Gl. (3.22) und Gleichungssystem (3.24) gewonnen, da $Q_{12}(x)$ für

Stabgeometrie in einer Entwicklung nach $1/x$ keine endlichen Entwicklungskoeffizienten höherer Ordnung aufweist. Mit b_2 für b_e folgt:

$$\begin{aligned} a_3 &= 11,3843; & b_3 &= 1,9965; \\ a_4 &= 66,3669; & b_4 &= 2,1296. \end{aligned}$$

Abb. 2 gibt die Genauigkeit der verschiedenen Approximationschritte wieder. Der maximal verbleibende Fehler beträgt 0,69% und ist damit kleiner als bei der Plattengeometrie. Die Ursache hierfür ist in den Entwicklungstermen mit endlichen Koeffizienten der Gln. (3.26) und (3.27) zu sehen, die von (3.19) und (3.21) exakt beschrieben werden können.

3.4. Integration der NR-Näherung für die natürliche Linienform der Resonanz und der rationalen Approximation der Stoßwahrscheinlichkeit $\tilde{Q}_{12}(x)$

Wie ein Vergleich von (2.1) mit (2.4) zeigt, geht die IM-Approximation formal aus der NR-Approximation hervor, indem man in der NR-Approximation alle Streuquerschnitte Null setzt. Es ist daher nur notwendig, die Gleichungen der NR-Näherung (2.2) und (2.3) mit den mikroskopischen Wirkungsquerschnitten (2.5) und (2.6) sowie der rationalen Approximation (3.19) und (3.21) zu berechnen. Aus (2.1) folgt für das effektive Resonanzintegral der Linie, wenn man zur reduzierten Energieskala (2.16) übergeht:

$$I = \left. \begin{aligned} & \frac{\Gamma}{2E_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_a \sigma_p}{\sigma_t} dx + \\ & + \frac{\Gamma}{2E_r} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_t - \sigma_p) \sigma_a P_{12}(\Sigma_t d) dx \end{aligned} \right\} (3.28)$$

mit

$$P_{12}(\Sigma_t d) = \frac{1}{1 + 2 \Sigma_t d} + \sum_{v=1}^4 a_v \frac{(2 \Sigma_t d)^v}{(b_v + 2 \Sigma_t d)^{2v}} \quad (3.29)$$

bzw. (3.29) in (3.28) eingesetzt:

$$I = \left. \begin{aligned} & \frac{\Gamma}{2E_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_a(x) \frac{1 + 2 \Sigma_p d}{1 + 2 \Sigma_t d} dx + \\ & + \frac{\Gamma}{2E_r} \sum_{v=1}^4 a_v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_a(x) (\sigma_t - \sigma_p)}{\sigma_t} \frac{(2 \Sigma_t d)^v}{(b_v + 2 \Sigma_t d)^{2v+1}} dx. \end{aligned} \right\} (3.30)$$

Mit (3.23) und (3.24) folgt unter Vernachlässigung des $1/v$ -Anteiles der Absorption und Einführung folgender Abkürzungen:

$$I_\infty = \frac{\pi \Gamma \sigma_{a0}}{2E_r} \quad (3.31)$$

Resonanzintegral für unendliche Verdünnung,

$$c_e = \frac{2 \Sigma_e d}{1 + 2 \Sigma_p d}; \quad \rho \equiv 0, s_0, i, p, \quad (3.32)$$

$$q_0^2 = 1 + c_0 - c_i^2, \quad (3.33)$$

$$c_{ev} = \frac{2 \Sigma_e d}{b_v + 2 \Sigma_p d}, \quad (3.34)$$

$$q_v^2 = 1 + c_{0v} - c_{iv}^2, \quad (3.35)$$

$$\bar{a}_v = \frac{a_v}{(b_v + 2 \Sigma_p d)^{v+1}}; \quad (3.36)$$

für das Integral (3.30):

$$I = \frac{I_\infty}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + c_0 + 2c_i x} + \frac{I_\infty}{\pi} \sum_{v=1}^4 a_v \int_{-\infty}^{+\infty} \times \left. \begin{aligned} & \frac{(c_{0v} + 2c_{iv} x) (c_{0v} + 2c_{iv} x + c_{pv} (1+x^2))^{v-1} (1+x^2)^v}{(1+x^2 + c_{0v} + 2c_{iv} x)^{2v+1}} dx. \end{aligned} \right\} (3.37)$$

Mit (3.33) erhält man für das erste Integral

$$I^0 = I_\infty G_0, \quad (3.38)$$

$$G_0 = \frac{1}{q_0}. \quad (3.39)$$

I^0 folgt aus WIGNERS Approximation der Stoßwahrscheinlichkeit und ist in [1] ausführlich diskutiert. Die v -te Korrektur möge mit $I^{(v)}$ bezeichnet werden.

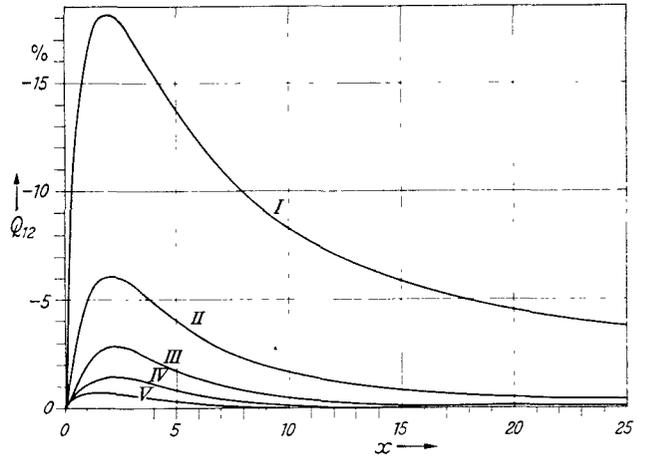


Abb. 2. Approximation der Stoßwahrscheinlichkeit für $Q_{12}(x)$ für Stäbe

Für das effektive Resonanzintegral der Linie folgt dann nach (3.37):

$$I = I^0 + \sum_{v=1}^4 I^{(v)} \quad (3.40)$$

mit

$$I^{(v)} = I_\infty G_v, \quad (3.41)$$

$$G_v = \left. \begin{aligned} & \frac{\bar{a}_v}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \times \\ & \times \frac{(c_{0v} + 2c_{iv} x) (c_{0v} + 2c_{iv} x + c_{pv} (1+x^2))^{v-1} (1+x^2)^v dx}{(1+x^2 + c_{0v} + 2c_{iv} x)^{2v+1}}. \end{aligned} \right\} (3.42)$$

Die G_v mit $v=1 \dots 4$ werden als Abschirmungsfaktoren bezeichnet. Definiert man das Integral:

$$J_{0,v}(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\varepsilon(1+x^2) + c_{0v} + 2c_{iv} x}, \quad (3.43)$$

so erhält man für die Abschirmungsfaktoren G_v mit $v=1 \dots 4$:

$$G_v = \bar{a}_v V_{0v}, \quad (3.44)$$

$$V_{0v} = \sum_{\mu=0}^{v-1} (1 - c_{pv})^\mu V_{0v\mu}, \quad (3.45)$$

$$V_{0v\mu} = \left. \begin{aligned} & \frac{(-1)^\mu}{(v+\mu+1)!} \left(\frac{v-1}{\mu} \right) \times \\ & \times [(v+\mu+1) J_{0,v}^{(v+\mu)}(1) + J_{0,v}^{(v+\mu+1)}(1)]. \end{aligned} \right\} (3.46)$$

Ein Vergleich der Gln. (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.44), (3.45) und (3.46) mit exakten numerischen Resultaten erfolgt in Anhang 2.

3.5. *Das Resonanzintegral einer Linie in der Wigner-Approximation der Stoßwahrscheinlichkeit und in der Roe-Approximation der Ψ -Funktion*

Nach (3.30) lautet das Resonanzintegral in der Wigner-Näherung der Stoßwahrscheinlichkeit:

$$I^0 = \frac{\Gamma}{2E_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_a(x) \frac{1 + 2 \sum_p d}{1 + 2 \sum_t(x) d} dx. \quad (3.47)$$

Unter Vernachlässigung des $1/v$ -Anteiles der Absorption und des Interferenztermes σ_i der Streuung erhält man nach (2.26) und (2.27):

$$\sigma_a(x) = \sigma_{a0} \Psi(x, t_D), \quad (3.48)$$

$$\sigma_t(x) = \sigma_0 \Psi(x, t_D) + c_p. \quad (3.49)$$

mit Ψ nach (2.28). In (3.47) eingesetzt, erhält man:

$$I^0 = \frac{\Gamma \sigma_{a0}}{2E_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi dx}{1 + c_0 \Psi} \quad (3.50)$$

mit c_0 nach (3.32). Aus (3.50) folgt:

$$I^0 = I_\infty G_0(c_0, t_D), \quad (3.51)$$

$$G_0(c_0, t_D) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Psi dx}{1 + c_0 \Psi}. \quad (3.52)$$

Nach ROE wird substituiert:

$$y_0 = \alpha(t_D) \cdot c_0, \quad (3.53)$$

$$\psi = \alpha(t_D) \cdot \xi. \quad (3.14)$$

Hiermit folgt aus (3.52):

$$G_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi}{1 + y_0 \xi} d(\alpha x). \quad (3.54)$$

Für αx soll der von ROE [7] angegebene Ansatz (3.15) verwandt werden. Zur Integration ist es zweckmäßig, die Substitution $\xi = \frac{1}{1 + \eta^2}$ vorzunehmen. Dann folgt für (3.54):

$$G_0 = \sum_{e=0}^4 R_e \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \eta^2 + y_0} \frac{d}{d\eta} \frac{\eta}{(1 + \eta^2)^e} d\eta. \quad (3.55)$$

Definiert man in Analogie zu (3.43)

$$J_{e,\nu}(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\{\varepsilon(1 + \eta^2) + y_\nu\} (1 + \eta^2)^e}, \quad (3.56)$$

so folgt aus (3.55):

$$G_0 = \sum_{e=0}^4 R_e \{(1 - 2\rho) J_{e;0}(1) + 2\rho J_{e+1;0}(1)\}. \quad (3.57)$$

Mit Rücksicht auf die Integration der Geometrie-korrektur (3.21) ist es zweckmäßig (3.57) umzuschreiben und folgende neue Geometrie- und Temperatur-funktionen einzuführen:

$$V_{e0} = J_{e;0}(1), \quad (3.58)$$

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= R_0 & S_3 &= 4R_2 - 5R_3 \\ S_1 &= -R_1 & S_4 &= 6R_3 - 7R_4 \\ S_2 &= 2R_1 - 3R_2 & S_5 &= 8R_4. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Das Ergebnis dieser Umformung lautet:

$$G_0(c_0, t_D) = \sum_{e=0}^5 S_e(t_D) V_{e0}(y_0). \quad (3.60)$$

Ein Vergleich von (3.60) mit den Ergebnissen exakter numerischer Integrationen erfolgt in Anhang 1. In anderer Formulierung wird (3.60) in [7] angegeben. Im Grenzfall zu vernachlässigenden Doppler-Effektes gehen die $S_e(t_D)$ für $e = 1, 2, 3, 4$ und 5 gegen Null und S_0 gegen 1. Man erhält in Übereinstimmung mit (3.39):

$$G_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + c_0}} \quad \text{für } t_D \rightarrow 0.$$

3.6. *Integration der Geometriekorrektur in der NR-Näherung und der Roe-Approximation der Ψ -Funktion*

Nach (3.30) lautet der geometriebedingte Zusatz-term zum Resonanzintegral:

$$\Delta I = \sum_{\nu=1}^4 I^{(\nu)} = I_\infty \sum_{\nu=1}^4 G_\nu, \quad (3.61)$$

$$G_\nu = \frac{a_\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_a(x) (\sigma_t - \sigma_p)}{\sigma_t} \frac{(2 \sum_t d)^\nu}{(b_\nu + 2 \sum_t d)^{2\nu+1}} dx. \quad (3.62)$$

Mit den Wirkungsquerschnitten (3.48) und (3.49) geht (3.62) in

$$G_\nu = \frac{\bar{a}_\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_{0\nu} \Psi^2 (c_{p\nu} + c_{0\nu} \Psi)^{\nu-1}}{(1 + c_{0\nu} \Psi)^{2\nu+1}} dx \quad (3.63)$$

über. I_∞ , \bar{a}_ν , $c_{0\nu}$ und $c_{p\nu}$ sind in Kap. 3.4 definiert.

Substituiert man

$$y_\nu = \alpha(t_D) c_{0\nu} \quad (3.64)$$

und (3.14), so folgt:

$$G_\nu = \bar{a}_\nu \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y_\nu \xi^2 (c_{p\nu} + y_\nu \xi)^{\nu+1}}{(1 + y_\nu \xi)^{2\nu+1}} d(\alpha x). \quad (3.65)$$

Der Roe-Ansatz (3.15) für αx ergibt, wenn man entsprechend Abschnitt 3.5 die neue Integrationsvariable $\xi = \frac{1}{1 + \eta^2}$ einführt:

$$G_\nu = \bar{a}_\nu \sum_{e=0}^5 S_e(t_D) V_{e\nu}(y_\nu, c_{p\nu}), \quad (3.66)$$

$$V_{e\nu} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y_\nu [c_{p\nu}(1 + \eta^2) + y_\nu]^{e-1} (1 + \eta^2)^{e-\nu}}{(1 + \eta^2 + y_\nu)^{2e+1}} d\eta. \quad (3.67)$$

(3.67) läßt sich auf Ableitungen des Integrals (3.68) zurückführen. Man erhält:

$$V_{e\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (1 - c_{p\nu})^\mu V_{e\nu\mu}, \quad (3.68)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{e\nu\mu} &= \frac{(-1)^\mu}{(\nu + \mu + 1)!} \left(\frac{\nu - 1}{\mu} \right) \times \\ &\quad \times [(v + \mu + 1) J_{e;\nu}^{(\nu+\mu)}(1) + J_{e;\nu}^{(\nu+\mu+1)}(1)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Die Funktionen $J_{e;\nu}(1)$ können hier aus Raumgründen nicht explizit angegeben werden.

Anhang I

Vergleich von Gl. (3.60) mit der tabellierten Funktion $J(\beta, \Theta)$

In verschiedenen Arbeiten [1, 2] wurde eine numerische Berechnung des Integrals

$$J(\beta, \Theta) = \int_0^\infty \frac{\Psi(x, \Theta)}{\beta + \Psi(x, \Theta)} dx \quad (A 1-1)$$

durchgeführt. Zwischen den Funktionen $J(\beta, \Theta)$ und $G_0(c_0, t_D)$ besteht folgender Zusammenhang:

$$J(\beta, \Theta) = \frac{\pi}{2\beta} G_0(c_0, t_D), \quad (A 1-2)$$

$$\beta = \frac{1}{C_0} = 2^k \cdot 10^{-5}, \quad (A 1-3)$$

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{t_D}}. \quad (A 1-4)$$

Die Tabellen A1.1bisA1.3 geben einen Vergleich der Approximationen mit exakten Werten für drei typische Θ -Werte wieder. Sie enthalten in der ersten Spalte den Parameter k nach Gl. (A1-3), in Spalte 2 den exakten Tabellenwert aus [2], in Spalte 3 den aus (A1-2) folgenden approximativen Wert J , wobei $G_0(c_0, t_D)$ nach Gl. (3.60) berechnet wurde. Spalte 4 schließlich enthält den relativen Fehler $\frac{\tilde{J}-J}{J}$. Die Zahlenwerte sind in Gleitkomma geschrieben, und für $\Theta=0,5$ ist der erste Wert z. B. zu lesen $1,2240 \times 10^2$.

Anhang 2

Vergleich von Gl. (3.66) mit den Ergebnissen numerischer Integrationen von ADLER et al.

Setzt man die Wirkungsquerschnitte entsprechend den Gln. (3.48) und (3.49) an, so folgt aus (3.28):

$$I = \frac{\sigma_p \Gamma_\gamma}{E_r} \int_0^\infty \frac{\Psi}{\beta + \Psi} dx + \frac{\sigma_0 \Gamma_\gamma}{E_r} \int_0^\infty \frac{\Psi^2}{\beta + \Psi} R_{12} \left(Z \left(\frac{\Psi}{\beta} + 1 \right) \right) dx \quad (A 2-1)$$

mit (A1-3) und (A1-4). Zusätzlich ist:

$$Z = N \sigma_p d.$$

Aus (A2-1) folgt:

$$I = I_\infty \left\{ \frac{2\beta}{\pi} J(\beta, \Theta) + \frac{2}{\pi} L(Z, \Theta, \beta) \right\}. \quad (A 2-2)$$

Der erste Term stellt den „Volumenterm“ und der zweite den „Oberflächenterm“ der Resonanzlinie dar [6]. Zur Berechnung des Volumenterms kann die Funktion $J(\beta, \Theta)$ nach [1] oder [2] benutzt werden, die Funktion $L(Z, \Theta, \beta)$ ist in [2] tabelliert worden. Nach den Definitionen der Gln. (3.51) und (3.61) ist I/I_∞ gegeben durch:

$$\frac{\tilde{I}}{I_\infty} = G_0(c_0, t_D) + \sum_{v=1}^4 G_v(c_{0v}, t_D). \quad (A 2-3)$$

Die Approximation (A2-3) wird in den Tabellen A2.1 bis A2.4 mit (A2-2) verglichen. Für $J(\beta, \Theta)$ wurden die exakten Tabellenwerte aus [2] verwandt. Bei dem Vergleich wurden die Funktionen (3.32), (3.34) und (3.36) wie folgt berechnet:

$$C_0 = \frac{2Z}{\beta(1 + 2Z)}, \quad (A 2-4)$$

$$C_{0v} = \frac{2Z}{\beta(b_v + 2Z)}, \quad (A 2-5)$$

$$\bar{a}_v = \frac{a_v}{(b_v + 2Z)^{v+1}}. \quad (A 2-6)$$

Tabelle A1.1. Vergleich von J und \tilde{J}
 $\Theta = 5,0000/-01$

k	J	\tilde{J}	$\frac{\tilde{J}-J}{J}$
4,0	1,2440/+02	1,2439/+02	-1,9069/-05
5,0	8,8120/+01	8,8107/+01	-1,4667/-04
6,0	6,2520/+01	6,2496/+01	-3,8019/-04
7,0	4,4500/+01	4,4449/+01	-1,1426/-03
8,0	3,1830/+01	3,1759/+01	-2,2011/-03
9,0	2,2970/+01	2,2859/+01	-4,7968/-03
10,0	1,6750/+01	1,6620/+01	-7,7531/-03
11,0	1,2350/+01	1,2211/+01	-1,1237/-02
12,0	9,1190/+00	9,0104/+00	-1,1898/-02
13,0	6,6290/+00	6,5642/+00	-9,7718/-03
14,0	4,6240/+00	4,5964/+00	-5,9490/-03
15,0	3,0220/+00	3,0132/+00	-2,9072/-03
16,0	1,8290/+00	1,8269/+00	-1,1024/-03

Tabelle A1.2. Vergleich von J und \tilde{J}
 $\Theta = 1,0000/-01$

k	J	\tilde{J}	$\frac{\tilde{J}-J}{J}$
4,0	1,3070/+02	1,2920/+02	-1,1458/-02
5,0	9,6670/+01	9,4433/+01	-2,3133/-02
6,0	7,3550/+01	7,0592/+01	-4,0217/-02
7,0	5,7720/+01	5,4408/+01	-5,7380/-02
8,0	4,6470/+01	4,3368/+01	-6,6751/-02
9,0	3,7810/+01	3,5443/+01	-6,2579/-02
10,0	3,0450/+01	2,9017/+01	-4,7056/-02
11,0	2,3670/+01	2,3009/+01	-2,7911/-02
12,0	1,7310/+01	1,7081/+01	-1,3226/-02
13,0	1,1650/+01	1,1596/+01	-4,6135/-03
14,0	7,1730/+00	7,1662/+00	-9,4048/-04
15,0	4,0880/+00	4,0884/+00	1,0804/-04
16,0	2,2040/+00	2,2044/+00	2,2486/-04

Tabelle A1.3. Vergleich von J und \tilde{J}
 $\Theta = 2,0000/-02$

k	J	\tilde{J}	$\frac{\tilde{J}-J}{J}$
4,0	2,3860/+02	2,1555/+02	-9,6580/-02
5,0	2,0860/+02	1,9441/+02	-6,7993/-02
6,0	1,8210/+02	1,7818/+02	-2,1509/-02
7,0	1,5630/+02	1,5984/+02	2,2660/-02
8,0	1,2960/+02	1,3557/+02	4,6109/-02
9,0	1,0180/+02	1,0622/+02	4,3449/-02
10,0	7,3990/+01	7,6088/+01	2,8368/-02
11,0	4,9090/+01	4,9759/+01	1,3632/-02
12,0	2,9730/+01	2,9894/+01	5,5366/-03
13,0	1,6710/+01	1,6748/+01	2,2816/-03
14,0	8,9220/+00	8,9276/+00	6,3807/-04
15,0	4,6200/+00	4,6224/+00	5,3591/-04
16,0	2,3520/+00	2,3527/+00	3,1814/-04

Tabelle A2.1. Vergleich von I und \tilde{I}
 $Z = 5,00/-02 \quad \Theta = \infty$

k	I/I_∞	\tilde{I}/I_∞	$\frac{\tilde{I}-I}{I}$
4,0	4,4392/-02	4,4464/-02	1,6055/-03
5,0	6,2799/-02	6,2844/-02	7,1349/-04
6,0	8,8741/-02	8,8771/-02	3,3890/-04
7,0	1,2520/-01	1,2524/-01	3,5079/-04
8,0	1,7627/-01	1,7627/-01	5,0417/-05
9,0	2,4683/-01	2,4686/-01	1,2292/-04
10,0	3,4237/-01	3,4194/-01	-1,2531/-03
11,0	4,6283/-01	4,6219/-01	-1,3783/-03
12,0	5,9561/-01	5,9643/-01	1,3845/-03
13,0	7,1989/-01	7,2388/-01	5,5384/-03
14,0	8,1973/-01	8,2764/-01	9,6471/-03
15,0	8,9088/-01	9,0074/-01	1,1063/-02
16,0	9,3766/-01	9,4613/-01	9,0284/-03

Tabelle A2.2. Vergleich von I und \tilde{I} $Z = 5,00/-02 \quad \Theta = 5,00/-01$

k	I/I_∞	\tilde{I}/I_∞	$\frac{\tilde{I}-I}{I}$
4,0	4,5011/-02	4,5057/-02	1,0099/-03
5,0	6,4577/-02	6,4479/-02	-1,5258/-03
6,0	9,3782/-02	9,3198/-02	-6,2232/-03
7,0	1,3837/-01	1,3682/-01	-1,1220/-02
8,0	2,0759/-01	2,0442/-01	-1,5277/-02
9,0	3,1092/-01	3,0631/-01	-1,4836/-02
10,0	4,4730/-01	4,4254/-01	-1,0632/-02
11,0	5,9551/-01	5,9296/-01	-4,2736/-03
12,0	7,2804/-01	7,3065/-01	3,5763/-03
13,0	8,2992/-01	8,3768/-01	9,3410/-03
14,0	8,9992/-01	9,0917/-01	1,0277/-02
15,0	9,4413/-01	9,5165/-01	7,9576/-03
16,0	9,6998/-01	9,7501/-01	5,1858/-03

Tabelle A2.3. Vergleich von I und \tilde{I} $Z = 5,00/-02 \quad \Theta = 1,00/-01$

k	I/I_∞	\tilde{I}/I_∞	$\frac{\tilde{I}-I}{I}$
4,0	6,1486/-02	5,6928/-02	-7,4123/-02
5,0	1,0137/-01	9,3534/-02	-7,7308/-02
6,0	1,6811/-01	1,5797/-01	-6,0304/-02
7,0	2,7284/-01	2,6250/-01	-3,7880/-02
8,0	4,1473/-01	4,0640/-01	-2,0086/-02
9,0	5,7072/-01	5,6673/-01	-6,9896/-03
10,0	7,1117/-01	7,1394/-01	3,9047/-03
11,0	8,1949/-01	8,2780/-01	1,0135/-02
12,0	8,9427/-01	9,0382/-01	1,0682/-02
13,0	9,4109/-01	9,4879/-01	8,1802/-03
14,0	9,6837/-01	9,7357/-01	5,3677/-03
15,0	9,8348/-01	9,8654/-01	3,1114/-03
16,0	9,9154/-01	9,9321/-01	1,6880/-03

Tabelle A2.4. Vergleich von I und \tilde{I} $Z = 5,00/-02 \quad \Theta = 2,00/-02$

k	I/I_∞	\tilde{I}/I_∞	$\frac{\tilde{I}-I}{I}$
4,0	1,7881/-01	1,8751/-01	4,8678/-02
5,0	2,9523/-01	3,0732/-01	4,0947/-02
6,0	4,4591/-01	4,5679/-01	2,4387/-02
7,0	6,0291/-01	6,1288/-01	1,6536/-02
8,0	7,3801/-01	7,4868/-01	1,4453/-02
9,0	8,3901/-01	8,5082/-01	1,4080/-02
10,0	9,0651/-01	9,1734/-01	1,1939/-02
11,0	9,4834/-01	9,5633/-01	8,4186/-03
12,0	9,7265/-01	9,7757/-01	5,0621/-03
13,0	9,8598/-01	9,8852/-01	2,5778/-03
14,0	9,9284/-01	9,9421/-01	1,3869/-03
15,0	9,9629/-01	9,9711/-01	8,1860/-04
16,0	9,9793/-01	9,9857/-01	6,4074/-04

Literatur: [1] DRESNER, L.: Resonance Absorption in Nuclear Reactors. Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press 1960. — [2] NORDHEIM, L.W.: The Theory of Resonance Absorption. General Atomic Report G.A.-638 (Rev.); ferner ADLER, F.T., and L.W. NORDHEIM: Tables for the Computation of Resonance Integrals. General Atomic Report, G.A.-377. — [3] WIGNER, E.P.: Review of Resonance Capture by Lumps. Proc. of the Brookh. Conf. on Res. Absorp. of Neutrons in Nuclear Reactors. BNL-433 (C-24), Sept. 1956. — [4] MÜLLER, A.: Nukleonik β , 54–73 (1960). — [5] LAMB jr., W.E.: Phys. Rev. 55, 190–197 (1939). — [6] ADLER, F.T., and J.D. NALIBOFF: A Direct Method for the Evaluation of the Resonance Line Shape Functions. Department of Physics, Univ. of Illinois, NP-8902. — [7] ROE, G.M.: The Absorption of Neutrons in Doppler Broadened Resonances. KAPL-1241, Physics (TID-4500, 8th Ed.). — [8] PLACZEK, G.: The Functions $E_n(x)$. NRC No. 1547, Chalk River, Ont. — [9] CASE, K.M., F. DE HOFFMANN and G. PLACZEK: Introduction to the Theory of Neutron Diffusion, vol. I. Los Alamos Scientific Laboratory 1953. — [10] WATSON, G.N.: Treatise on the Theory of Bessel Functions, S. 698. Cambridge: Cambridge University Press 1952.

Anschrift: Dr. MANFRED BROSE

8501 Behringsdorf, Rainwiesenweg 3