

KFK-367

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

November 1965

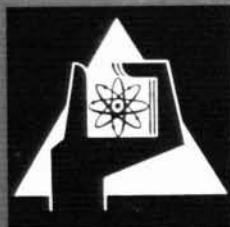


KFK 367

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Theorie der Dopplerkoeffizienten schneller Reaktoren unter
Berücksichtigung der gegenseitigen Abschirmung der Resonanzen

R. Froelich



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

November 1965

K F K 367

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Theorie der Dopplerkoeffizienten schneller Reaktoren unter
Berücksichtigung der gegenseitigen Abschirmung der Resonanzen +)

von

Reinhard Froelich

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

+) Diese Arbeit wurde im Rahmen der Assoziation
zwischen der Europäischen Atomgemeinschaft
und der Gesellschaft für Kernforschung mbH,
Karlsruhe, auf dem Gebiet der schnellen
Reaktoren durchgeführt.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. <u>Einleitung</u>	1
2. <u>Allgemeine Überlegungen über die Berechnung des Dopplerkoeffizienten eines schnellen Reaktors</u>	3
2.1 Qualitativer Unterschied zwischen den Berechnungsmethoden der Dopplerkoeffizienten für thermische und schnelle Reaktoren	3
2.2 Übersicht über die bereits durchgeführten Dopplerkoeffizientberechnungen	5
2.3 Ziel der vorliegenden Arbeit	6
3. <u>Neutronenwirkungsquerschnitte und Resonanzparameter</u>	8
3.1 Beschreibung der möglichen Reaktionen eines Neutrons mit Kernen und Einteilung der Resonanzen	8
3.2 Neutronenwirkungsquerschnitte im Resonanzbereich	10
3.2a Natürliche Form der Resonanzen	10
3.2b Dopplerverbreiterte Resonanzform	12
3.2c Eigenschaften der dopplerverbreiterten Resonanzform	15
3.3 Resonanzabstands- und Breitenstatistik	17
3.4 Ableitung einer analytischen Form der Resonanzverteilungsfunktion $\Omega(D)$	20
4. <u>Reaktorphysik</u>	24
4.1 Grundzüge der Multigruppentheorie	24
4.2 Störungstheorie	29
4.2a Ableitung der Multigruppenstörungsformel	29
4.2b Auswertung der Formel für $\frac{\Delta k}{k}$	31
4.2c Vereinfachung der Berechnungsmethode von Reaktivitätsänderungen infolge von Wirkungsquerschnittsänderungen	32

	<u>Seite</u>	
5	<u>Anwendung der statistischen Aussagen zur Berechnung der Reaktionsratenverhältnisse und deren Temperaturableitungen</u>	36
5.1	Schwierigkeiten bei der Einführung statistischer Methoden	36
5.2	Näherungen	38
6.	<u>Genauere Berechnung der Reaktionsratenverhältnisse in dem für den Dopplerkoeffizienten maßgebenden Energiegebiet</u>	42
6.1	Ziel der folgenden Reihenentwicklungen	42
6.2	Entwicklung von $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ in einen berechenbaren Ausdruck	43
6.3	" $\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle$ " " " " "	45
6.4	Vereinfachte Form des Dopplerkoeffizienten	46
7.	<u>Beschreibung der für die Berechnung des Dopplerkoeffizienten wichtigen Mittelwerte durch kernphysikalische Daten</u>	49
7.1	Berechnung von $\langle \mu_z^s \rangle$	49
7.2	" " $\langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle$ und $T \frac{d}{dT} \langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle$	51
7.3	" " $\left\langle \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$	54
7.4	" " $T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{\text{EFF}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$	57
7.5	" " $T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_y^{(1)}}{\mu_{pz}^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$	58
8	<u>Zusammenfassung der Formeln</u>	59
9	<u>Ergebnisse</u>	64
9.1	Vergleich mit früheren Arbeiten	64
9.2	Dopplerkoeffizienten spezieller Systeme	66
9.3	Genauigkeit von Dopplerkoeffizientberechnungen	68
10.	<u>Benutzte Daten</u>	69
11.	<u>Literaturverzeichnis</u>	70
12.	<u>Zusammenfassung der benutzten Zeichen und Abkürzungen</u>	72
13.	<u>Diagramme</u>	74
14.	<u>Anhang</u>	80

1. Einleitung

Gewisse Ereignisse in der Natur hängen von der relativen Bewegung der daran beteiligten Körper ab. Christian Doppler beschrieb diese Erscheinung im Fall von Schallwellen zum ersten Mal quantitativ. Deshalb bezeichnet man gewöhnlich Effekte dieser Art als Dopplereffekt. In der Reaktorphysik spielt dieser Dopplereffekt eine wesentliche Rolle.

Ein Neutron in einem Reaktor hat in Bezug auf die einzelnen Atome der Reaktormaterialien, da diese sich in Folge der Temperaturbewegung relativ zueinander bewegen, verschiedene kinetische Energien. Die Absorptions-, Streu- und Spaltungswirkungsquerschnitte der einzelnen Materialien sind zum Teil stark energieabhängig (schmale Resonanzen). Es existiert daher keine einheitliche Reaktionswahrscheinlichkeit eines Neutrons mit den verschiedenen Atomen des gleichen Materials. Die Temperaturbewegung der Atome hat einen Einfluß auf die Absorptions-, Streu- und Spaltraten eines Reaktors. Deshalb tritt bei einer Reaktortemperaturänderung auch eine Änderung des Multiplikationsfaktors k auf. Der Multiplikationsfaktor eines Reaktors gibt das Verhältnis der im Reaktor in einer kleinen Zeit Δt (Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$) durch Spaltung entstehenden Neutronen zu den in der gleichen Zeit aus dem Reaktor verschwindenden Neutronen an. (Neutronen können aus dem Reaktor verschwinden, indem sie absorbiert werden oder den Reaktor verlassen.) Der Multiplikationsfaktor ist wichtig für die Beschreibung des zeitlichen Verhaltens der Neutronenanzahl im Reaktor. Ist in einem Reaktor $k = 1$, so ist in ihm die Neutronenanzahl zeitlich konstant. Einen solchen Reaktor nennt man einen kritischen Reaktor. Den Betrag, um den k von 1 abweicht, dividiert durch k , nennt man Reaktivität.

Eine weitere Änderung von k mit der Temperatur wird durch die Ausdehnung der einzelnen Reaktormaterialien bei einer Temperaturerhöhung hervorgerufen. Die gesamte Änderung von k mit der Temperatur $\frac{dk}{dT}$ setzt sich also aus 2 Summanden zusammen.

$$1.1 \quad \frac{dk}{dT} = \left(\frac{dk}{dT}\right)_{\text{Doppler}} + \left(\frac{dk}{dT}\right)_{\text{Ausdehnung}}$$

Der erste Summand, der im folgenden als Dopplerkoeffizient bezeichnet wird, wird durch die schmalen Resonanzen der schweren Reaktormaterialien Uran und Plutonium verursacht. Bei diesen Materialien sind nämlich die erwähnten Unterschiede in den kinetischen Energien vergleichbar mit den Halbwertsbreiten der Resonanzen. Zum zweiten Summanden liefern die Strukturmaterialien und das Kühlmittel den Hauptbeitrag.

Die Änderung des Multiplikationsfaktors mit der Temperatur ist für die Sicherheit eines Reaktors maßgebend. Wird z.B. in einem Reaktor durch einen Unfall der Multiplikationsfaktor vergrößert, so beginnt seine Leistung zu steigen. Zuerst werden sich die Brennelemente über die Betriebstemperatur erhitzen, und nach einiger Zeit wird auch die Kühlmitteltemperatur wegen des erhöhten Wärmestromes aus den Brennelementen ansteigen. Beim Versagen der äußeren Abschaltmechanismen würde dann in einem solchen Fall der Reaktor zerstört, wenn nicht der Multiplikationsfaktor mit wachsender Temperatur so stark abnimmt, daß die Leistungssteigerung gestoppt wird, bevor die Zerstörung eingetreten ist. Es ist also für die Sicherheit eines Reaktors wichtig, daß $\frac{dk}{dT}$ negativ und möglichst groß ist.

Diese Bedingung ist für den Fall einer langsamen Leistungsexkursion meistens gut erfüllt. In diesem Fall kann die erzeugte Spaltungswärme aus dem Brennstoff in die Strukturmaterialien und das Kühlmittel übergehen und diese aufheizen; deshalb spielt hier der in der Regel große negative Wert von $\left(\frac{dk}{dT}\right)_{\text{Ausdehnung}}$ die Hauptrolle bei der Bestimmung von $\frac{dk}{dT}$. Bei den viel gefährlicheren schnellen Exkursionen, die fast

explosionsartig ablaufen, besteht keine Zeit für einen wesentlichen Wärmeaustausch zwischen Strukturmaterialien, Kühlmittel und Brennstoff. In einem solchen Fall wird $\frac{dk}{dT}$ allein durch $\frac{(dk)}{(dT)}$ Doppler bestimmt. Im folgenden soll dieser Beitrag (Dopplerkoeffizient) genauer untersucht werden.

2. Allgemeine Überlegungen über die Berechnung des Dopplerkoeffizienten eines schnellen Reaktors

2.1 Qualitativer Unterschied zwischen den Berechnungsmethoden der Dopplerkoeffizienten für thermische und schnelle Reaktoren

Der Dopplereffekt wird dann einen meßbaren Einfluß auf die Kritikalität des Reaktors ausüben, wenn in dem Gebiet der Resonanzen, in dem die Temperaturverbreiterung eine Rolle spielt, ein relativ hoher Neutronenfluß herrscht, und das "Gewicht" eines Neutrons dieser Energie für die Aufrechterhaltung der Kettenreaktion groß ist. Reaktortheoretisch bedeutet dieses, daß $\phi(E) \phi^+(E)$, d.h. das Produkt aus Fluß- und Einflußfunktion, relativ groß sein muß. Aus diesem Grunde brauchen in einem thermischen Reaktor nur Resonanzen bei niedrigen Energien ($E < 100$ eV) zur Berechnung des Dopplerkoeffizienten explizit herangezogen zu werden. Die anderen Resonanzen werden pauschal in einem Korrekturglied berücksichtigt. Bei schnellen Reaktoren dagegen spielen bei der Bestimmung des Dopplerkoeffizienten die Resonanzen im Gebiet von 500 - 50000 eV die Hauptrolle. Betrachtet man die Verteilung der Resonanzen, so sieht man, daß sie bei niedrigeren Energien getrennt, schmal und hoch sind. Mit zunehmender Energie werden sie immer breiter und flacher. In einem Zwischengebiet überlappen sich die äußeren Flanken der Resonanzen. Bei hohen Energien treten schließlich so starke Überlappungen auf, daß sich die Resonanzstruktur am totalen Wirkungsquerschnitt nur noch wenig bemerkbar macht.

Neutronen, deren Energien in der Nähe des Maximums einer hohen Resonanz liegen, haben eine kleine mittlere freie Weglänge. Unterhalb 100 eV sind die Resonanzen zum Teil so hoch, daß die mittlere freie Weglänge der entsprechenden Neutronen vergleichbar oder sogar klein gegenüber der Ausdehnung der Brennelemente wird.

Bei der genauen Berücksichtigung dieser Resonanzen muß man daher Heterogenitätseffekte beachten. Bei höheren Energien dagegen ist die mittlere freie Weglänge der Neutronen immer groß gegenüber der Ausdehnung der Brennelemente. Hier kann man den Reaktor als homogen betrachten. Deshalb muß man bei thermischen Reaktoren die Heterogenitätseffekte berücksichtigen, während man bei schnellen Reaktoren in guter Näherung den Reaktor als homogen betrachten kann.

Ein zweiter wichtiger Unterschied wird dadurch hervorgerufen, daß bei thermischen Reaktoren der Fluß in dem für den Dopplerkoeffizienten maßgebenden Gebiet proportional zu E^{-1} ist, während man keine ähnliche Aussage über den Fluß bei schnellen Reaktoren machen kann. Man muß also bei der Berechnung des Dopplerkoeffizienten schneller Reaktoren erst den Flußverlauf bestimmen, während dies bei thermischen Reaktoren entfällt.

Betrachtet man schließlich die Anzahl der maßgebenden Resonanzen, so stellt man fest, daß bei thermischen Reaktoren nur wenige Resonanzen bei der Berechnung des Dopplerkoeffizienten eine Rolle spielen. Bei den schnellen Reaktoren dagegen sind es über 10000. Es ist einleuchtend, daß man bei schnellen Reaktoren nicht mehr den Einfluß jeder einzelnen Resonanz für sich behandeln kann. Dies ist auch deshalb unmöglich, weil die Resonanzparameter der meisten Resonanzen nicht bekannt sind.

Bei U^{238} sind die Resonanzparameter von etwa 100 und bei Pu^{239} von 20 Resonanzen bekannt.

Man verwendet daher zur Berechnung des Dopplerkoeffizienten bei schnellen Reaktoren statistische Methoden.

2.2 Übersicht über die bereits durchgeführten Dopplerkoeffizient-Berechnungen

In den vergangenen Jahren ist von verschiedenen Autoren versucht worden, den Dopplerkoeffizienten zu berechnen. Greebler et al.¹³⁾ und Hummel et al.²⁾ berechneten die Wirkungsquerschnitte für drei Temperaturen und bestimmten dann aus den anschließenden Kritikalitätsrechnungen den Multiplikationsfaktor des Reaktors bei diesen Temperaturen. Aus den Änderungen des Vermehrungsfaktors und den Temperaturdifferenzen kann man Aussagen über den Dopplerkoeffizienten machen. Die mit dieser Methode gewonnenen Ergebnisse sind etwas unsicher, da die Berechnung der Wirkungsquerschnitte bei den verschiedenen Temperaturen nicht sehr genau ist. Die berechnete relative Änderung des Multiplikationsfaktors ist sehr klein $\frac{dk}{k} \approx 10^{-3}$, d.h. die Berechnung der Multiplikationsfaktoren muß eine relative Genauigkeit von mindestens 10^{-4} haben, wenn 10 % Genauigkeit erzielt werden soll. Zur Zeit versucht Mathes¹⁶⁾ mit einer Monte-Carlo-Rechnung den Dopplerkoeffizienten zu berechnen. Eine solche Rechnung verlangt einen großen rechen-technischen Aufwand.

Die einfachste und übersichtlichste Art, den Dopplerkoeffizienten zu bestimmen, wurde von Bethe¹⁾, Goertzel et al.¹¹⁾ und Lane et al.¹⁵⁾ entwickelt. Bei dieser Methode werden zunächst die Temperaturableitungen der Wirkungsquerschnitte bestimmt. Aus diesen rechnet man mit Hilfe der Störungstheorie den Dopplerkoeffizienten aus.

In den Arbeiten von Bethe¹⁾, Goertzel et al.¹¹⁾ und Lane et al.¹⁵⁾ wurde jedoch angenommen, daß die Resonanzen im Energiegebiet um 100 keV den Hauptbeitrag zum Dopplerkoeffizienten liefern. Dies ist

jedoch nur bei den älteren schnellen Reaktoren der Fall. Bei den heute geplanten schnellen Reaktoren liegt das Maximum des Energiespektrums des Neutronenflusses bei so niedrigen Energien, daß die Resonanzen zwischen 500 eV und 50 KeV den Hauptbeitrag zum Dopplerkoeffizienten liefern. Nicholson¹⁸⁾ und Greebler¹³⁾ entwickelten deshalb auf ähnliche Weise wie Bethe eine neue Methode zur Berechnung des Dopplerkoeffizienten für niedrige Energien ($E < 10 \text{ keV}$). Es gelang aber nicht, die neue und die alte Methode in dem Energiegebiet zwischen 10 keV und 50 keV ineinander überzuführen. Der Grund dafür ist, daß man die gegenseitige Abschirmung der Resonanzen nur grob abgeschätzt oder sogar weggelassen hat. Codd et al.⁵⁾ zeigen, daß dies zu groben Fehlern führen kann.

2.3 Ziel der vorliegenden Arbeit

In dieser Arbeit soll der Einfluß der "Wechselwirkung" der Resonanzen auf den Dopplerkoeffizienten ausführlich untersucht werden.

Diese "Wechselwirkung" ist einerseits bei Resonanzen verschiedener Serien von Bedeutung und andererseits spielt sie bei hohen Energien bei Resonanzen derselben Serie eine wichtige Rolle. Für die Behandlung der "Wechselwirkung" verschiedener Serien aufeinander, die bis jetzt noch nicht berücksichtigt werden konnte, wird in dieser Arbeit eine Methode entwickelt, die nur unwesentlich komplizierter ist als das bisher im wechselwirkungsfreien Fall benutzte Verfahren. Für die Behandlung der "Wechselwirkung" derselben Serie, für die bisher nur ungenaue Abschätzungen benutzt wurden, wird eine im wesentlichen analytische Behandlungsmethode angegeben.

Eine ausführliche Diskussion des gesamten Fragenkreises der Dopplerkoeffizient-Berechnungen schneller Reaktoren ist in Vorbereitung. Aus

diesem Grunde wurden die Fragen, die nicht unmittelbar mit dem genannten Thema zusammenhängen, nur so weit behandelt, wie es im Rahmen dieser Arbeit erforderlich ist.

3. Neutronenwirkungsquerschnitte und Resonanzparameter

3.1 Beschreibung der möglichen Reaktionen eines Neutrons mit Kernen und Einteilung der Resonanzen

Trifft ein Neutron mit einer kinetischen Energie $E_{\text{kin}} < 100 \text{ keV}$ (Reaktionen mit Neutronen höherer kinetischer Energien als 100 keV liefern keinen wesentlichen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten) auf einen Kern im Grundzustand, so kann es sowohl am Potential dieses Kerns gestreut werden (Potentialstreuung) als auch von diesem absorbiert werden (Compoundkernbildung). Der gebildete Compoundkern kann wieder durch Emission eines Neutrons mit der gleichen kinetischen Energie wie das absorbierte Neutron zerfallen (compoundelastische Streuung), oder er kann durch Emission von γ -Quanten in den Grundzustand eines benachbarten Isotopes übergehen (Strahlungsabsorption). Schließlich kann auch bei bestimmten Compoundkernen ein Zerfall in zwei andere Kerne stattfinden (Spaltung). Emission eines Neutrons niedriger Energie als die Energie des absorbierten Neutrons (inelastische Streuung) tritt bei Neutronenenergien unterhalb 100 keV fast nicht auf. Man kann also die Wechselwirkung zwischen Kernen und Neutronen in 3 Klassen aufteilen, und zwar in Reaktionen des Typs (n, n) (elastische Streuung), des Typs (n, γ) (Strahlungsabsorption) und des Typs (n, f) (Spaltung, f-fission).

Die Wahrscheinlichkeit für die Bildung eines Compoundkerns wird bei bestimmten kinetischen Energien der Neutronen in Bezug auf den Kern (Resonanzenergien) besonders groß. Mit wachsender Abweichung der kinetischen Energien der Neutronen von diesen Resonanzenergien nimmt die Wahrscheinlichkeit für die Bildung von Compoundkernen sehr rasch ab. Da die Wirkungsquerschnitte ein Maß für die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Reaktionsabläufe sind, treten daher bei diesen die be-

kannten Resonanzstrukturen auf. Im folgenden werden diese Resonanzstrukturen der Wirkungsquerschnitte Resonanzen genannt.

Die Resonanzen entsprechen bestimmten Zuständen der Kerne, die durch die Quantenzahlen "Parität" und "Gesamtdrehimpuls" charakterisiert sind. Man kann daher die Resonanzen eines bestimmten Isotops in verschiedene Serien einteilen, die sich durch die Parität und den Gesamtdrehimpuls der betreffenden Compoundkerne unterscheiden. Der Gesamtdrehimpuls \vec{J} setzt sich aus dem Neutronbahndrehimpuls \vec{l} , dem Neutronspin \vec{s} und dem Targetkernspin \vec{i} wie folgt zusammen:

$$3.1.1 \quad \vec{J} = \vec{l} + \vec{s} + \vec{i}$$

In dem für den Dopplerkoeffizienten maßgebenden Energiegebiet brauchen wegen der Zentrifugalschwelle nur Reaktionen von Neutronen mit den Bahndrehimpulsen $l = 0$ und $l = 1$ in Bezug auf den entsprechenden Kern berücksichtigt werden. Da sich aber bei der Absorption eines Neutrons mit dem Bahndrehimpuls $l = 0$ die Parität des Kerns nicht ändert, während dies bei einer Absorption eines Neutrons mit $l = 1$ der Fall ist, kann man in dem hier vorliegenden speziellen Fall die Unterscheidung der Serien durch die Parität der betreffenden Compoundkerne auch durch die Bahndrehimpulse der absorbierten Neutronen durchführen. Bei der Berücksichtigung von höheren Bahndrehimpulsen als $l = 1$ ist die Klassifizierung der Serien durch die verschiedenen Bahndrehimpulse l nicht mehr so einfach wie in dem hier vorliegenden Fall. Beachtet man, daß für U^{238} der Targetkernspin $i = 0$ und für Pu^{239} $i = 1/2$ ist, so erhält man aus der Gleichung 3.1.1 die folgenden Serien:

	Uran (U^{238})				Plutonium (Pu^{239})				
l	0	1	1		0	0	1	1	1
J	1/2	1/2	3/2		0	1	0	1	2
s	1	2	3		4	5	6	7	8

Diese acht für den Dopplerkoeffizienten wichtigen Serien werden im folgenden durch die Zahlen 1 bis 8 wie in der 3. Zeile angegeben charakterisiert. In dieser Arbeit wird beim Uran nur das Isotop U^{238} und beim Plutonium nur das Isotop Pu^{239} berücksichtigt.

3.2 Neutronenwirkungsquerschnitte im Resonanzbereich

3.2 a Natürliche Form der Resonanzen

Der Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion vom Typ "z" [$z = (n, \gamma)$ oder $z = (n, f)$, $f = \text{Spaltung}$] wird in der Umgebung einer Resonanz im Falle ruhender Kerne durch die gewöhnliche Breit-Wigner-Formel beschrieben:

$$3.2.1 \quad \sigma_z(E') = \sigma_{oz} \psi_r(E' - E_R),$$

worin E_R die Lage der Resonanz (Index "R") bezeichnet und der Index "r" auf eine Reaktion an einem "ruhenden" Kern hinweisen soll. Relativ zu dem ruhenden Kern bewegt sich das ankommende Neutron mit der Energie E' . σ_{oz} ist der Wirkungsquerschnitt der Reaktion vom Typ "z" bei $E' - E_R = 0$ und ψ_r ist gegeben durch

$$3.2.2 \quad \psi_r(E' - E_R) = \frac{\Gamma^2}{4} \frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (E' - E_R)^2},$$

worin Γ die totale Halbwertsbreite angibt, die sich aus den γ -Emissions-, Streu- und Spaltungsbreiten zusammensetzt:

$$\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n + \Gamma_f.$$

Im folgenden wird generell die Interferenz zwischen verschiedenen Resonanzen vernachlässigt, da deren Einfluß in den betrachteten Fällen gering ist und deren Berücksichtigung zu erheblichen Schwierigkeiten führen würde. Dagegen kann leicht der wesentliche Teil der Interferenz zwischen Resonanz- und Potentialstreuung mitgenommen werden. Der totale Wirkungsquerschnitt erhält mit dieser Vernachlässigung

die Form

$$3.2.3 \quad \sigma_t = \sigma'_{oc} (\psi_r (E' - E_R) \cos 2\delta_1 + \chi_r (E' - E_R) \sin 2\delta_1) + \sigma_p$$

Der Ausdruck

$$3.2.4 \quad \chi_r = \frac{\Gamma (E' - E_R)}{\frac{\Gamma^2}{4} + (E' - E_R)^2}$$

und die Phasenverschiebung

$$3.2.5 \quad \delta_1 = -\arctan \frac{J_{1+1/2} \left(\frac{R'}{\lambda} \right)}{N_{1+1/2} \left(\frac{R'}{\lambda} \right)}$$

ergeben sich aus der Einniveau-Breit-Wigner-Theorie unter Berücksichtigung der oben genannten Interferenz. Eine Dopplerkoeffizientenberechnung unter Berücksichtigung der Multiniveautheorie existiert noch nicht.

J_1 und N_1 sind die Bessel- bzw. Neumann-Funktionen. Für $l = 0$ und $l = 1$ gilt

$$3.2.6 \quad \delta_1 = \frac{R'}{\lambda} - \arctan \frac{R'}{\lambda} \quad \begin{matrix} l = 0, 1 \\ (l = 2, 3, \dots) \end{matrix}$$

R' ist der effektive Kernradius und λ die reduzierte Neutronenwellenlänge. σ'_{oc} ist der totale Resonanzwirkungsquerschnitt bei $E' - E_R = 0$, wie er sich bei Vernachlässigung der Interferenz ergibt, σ_p ist der Potentialwirkungsquerschnitt. Für die Berechnung der σ_{oz} und σ'_{oc} bestehen folgende Formeln

$$3.2.7 \quad \sigma_{oz} = 4\pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_z}{\Gamma^2} \quad \text{und}$$

$$3.2.8 \quad \sigma'_{oc} = 4\pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma}$$

Hierbei ist g der "statistische Faktor".

Mit dem Kernspin i und dem Gesamtdrehimpuls J des Zwischenkerns ist

$$3.2.9a \quad g = \frac{2J+1}{2(2i+1)}$$

Die Energieabhängigkeit der reduzierten Neutronenwellenlänge wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$3.2.9 \text{ b} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{E}}$$

3.2 b Dopplerverbreiterte Resonanzform

Bewegt sich ein Neutron in einem Körper mit der relativen kinetischen Energie E zu dessen Schwerpunkt, so hat es in Bezug auf verschiedene Kerne wegen der Temperaturbewegung verschiedene kinetische Energien E'. Das bedeutet, daß der Wirkungsquerschnitt für die verschiedenen Kerne nicht durch die gleichen Funktionen ψ_r und χ_r beschrieben werden kann. Um dennoch die Wirkungsquerschnitte in der Form 3.2.1 und 3.2.3 angeben zu können, muß man ψ_r und χ_r durch Mittelwerte (Mittellung über alle Atome des Körpers) ersetzen. (Mittelwerte der Form $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_n$ werden im folgenden immer durch einen Querstrich gekennzeichnet.)

$$3.2.10 \quad \psi = \bar{\psi}_r, \quad \chi = \bar{\chi}_r$$

Um diese Mittelungen durchführen zu können, muß man die Verteilung der Geschwindigkeiten der einzelnen Atome in einem Körper kennen.

Man kann für die Verteilung analog zu den Verhältnissen bei einem Gas in guter Näherung (Dresner)⁷⁾ eine Maxwellverteilung

$$3.2.11 \quad P(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \rightarrow P(v) d^3v = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{Mv^2}{2kT}\right)} 4\pi v^2 dv$$

annehmen.

Hierbei ist M die Masse eines Kernes,

k die Boltzmannkonstante,

T die absolute Temperatur und

v die Geschwindigkeit der Kerne.

Nach Lamb²⁷⁾, der die Geschwindigkeitsverteilung der Atome im Festkörper näher untersucht hat, müßte man die absolute Temperatur T durch eine etwas abgeänderte Temperatur T* ersetzen, die die Gittereigenschaften des betreffenden Körpers enthält. In dieser Arbeit

wird diese Korrektur nicht durchgeführt, weil man die dazu benötigten Debyetemperaturen von UO_2 und PuO_2 nur sehr schlecht kennt.

Beachtet man, daß in den in Frage kommenden Fällen

$$3.2.12 \quad m_N \ll M \quad (\text{Neutronenmasse klein gegenüber Resonanzkernmasse})$$

und

$$3.2.13 \quad E' \gg kT \quad (\text{Neutronenbewegungsenergie groß gegen die mittlere Bewegungsenergie eines Kernes})$$

ist, dann erhält man mit der Maxwellverteilung

$$3.2.14 \quad \Psi = \frac{\Gamma^2}{4\sqrt{\pi}\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{(E-E')^2}{\Delta^2}\right\}}{\frac{\Gamma^2}{4} + (E'-E_R)^2} dE' \quad \text{und}$$

$$3.2.15 \quad \chi = \frac{\Gamma}{2\sqrt{\pi}\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(E'-E_R) \exp\left\{-\frac{(E-E')^2}{\Delta^2}\right\}}{\frac{\Gamma^2}{4} + (E'-E_R)^2} dE'$$

$$3.2.16 \quad \text{mit} \quad \Delta = \sqrt{4KT M^{-1} m_N E_R}$$

Δ wird Dopplerbreite genannt. Sie gibt bei einer stark verbreiteten Resonanz den Energieabstand vom Resonanzmaximum an, bei dem Ψ auf den e-ten Teil seines Maximalwertes abgesunken ist.

Substituiert man

$$3.2.17 \quad \theta = \frac{\Gamma}{\Delta}, \quad x = \frac{2(E-E_R)}{\Gamma}, \quad y = \frac{2(E'-E_R)}{\Gamma},$$

so erhält man die übliche Form für Ψ und χ

$$3.2.18 \quad \Psi(\theta, x) = \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{4} \theta^2 (x-y)^2\right\}}{1+y^2} dy \quad *)$$

$$3.2.19 \quad \chi(\theta, x) = \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2y \exp\left\{-\frac{1}{4} \theta^2 (x-y)^2\right\}}{1+y^2} dy$$

*) Ψ ist die von Voigt²⁸⁾ in der Optik eingeführte Funktion für die temperaturverbreiterte Resonanzform.

In dieser Arbeit wurde der in Bezug auf die Resonanzlage asymmetrische Teil von σ_t , nämlich das Glied $\sigma'_{oc} \chi \sin 2\delta_1$, vernachlässigt. Diese Vernachlässigung ist für kleine Energien berechtigt, da dort $\sin 2\delta_1$ klein wird. Nicholson zeigt, daß auch für hohe Energien der asymmetrische Anteil (bei nicht verschwindendem $\sin 2\delta_1$) im Rahmen der dort angewandten Näherung den Dopplerkoeffizienten nicht beeinflußt.

Es sei darauf hingewiesen, daß eine echte Berücksichtigung dieses Anteils noch nicht konsequent durchgeführt wurde.

Für die Wirkungsquerschnitte der Reaktionen vom Typ $z((n, \chi), (n, f))$ wird im folgenden die Beschreibungsweise

$$3.2.20 \quad \sigma_z(E) = \sigma_{oz} \psi$$

benutzt und für den totalen Wirkungsquerschnitt wird

$$3.2.21 \quad \sigma_t(E) = \sigma'_{oc} \psi \cos 2\delta_1 + \sigma_p$$

geschrieben. σ_p ist der Potentialwirkungsquerschnitt und σ_t der gesamte Reaktionsquerschnitt.

Da im folgenden stets das Produkt $\sigma'_{oc} \cos 2\delta_1$ auftritt, wird die Abkürzung

$$3.2.22 \quad \sigma_{oc} = \sigma'_{oc} \cos 2\delta_1$$

eingeführt.

Für die gesamten makroskopischen Wirkungsquerschnitte (der Reaktion vom Typ z) gilt dann

$$3.2.23 \quad \mu_z(E) = \sum_s N_s \sum_k \sigma_{ozk}^s \psi_k^s \quad *)$$

Entsprechend gilt für den gesamten totalen makroskopischen Wirkungsquerschnitt

*) In dieser Arbeit ist μ das Symbol für den makroskopischen Wirkungsquerschnitt. Die Serienindices s und r stehen im folgenden immer rechts oben.

$$3.2.24 \quad \mu_t(E) = \mu_p^+ + \sum_s N^s \sum_k \sigma_{ock}^s \psi_k^s$$

Die Summe über s bedeutet die Summation über die 8 aufgeführten Serien des Urans und Plutoniums. Die Summe über k bedeutet die Summation über die einzelnen Resonanzen der verschiedenen Serien s. N^s ist die Atomzahldichte der Kerne, zu der die Serie s gehört.

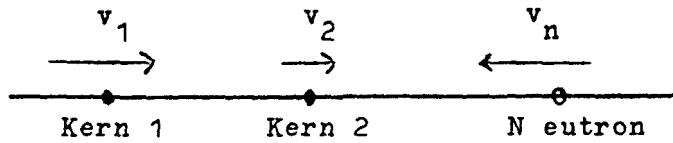
Die makroskopischen Wirkungsquerschnitte der Resonanzen der Strukturmaterialien und des Kühlmittels werden zum makroskopischen Potentialquerschnitt μ_p dazugerechnet. Sie liefern keinen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten, da bei ihnen die Halbwertsbreiten Γ groß gegenüber den Dopplerbreiten Δ sind. Wegen ihrer großen Halbwertsbreiten sind diese Resonanzen in Bezug auf die Resonanzen von Uran und Plutonium nur schwach energieabhängige Funktionen. Es erscheint daher gerechtfertigt, diese Strukturmaterialresonanzen zum Potentialwirkungsquerschnitt hinzu zu addieren.

$$3.2.25 \quad \mu_p^+ = \mu_p + \mu_{\text{Strukturres.}}$$

Eine genauere Untersuchung des Einflusses dieser Resonanzen muß noch durchgeführt werden.

3.2 c Eigenschaften der dopplerverbreiterten Resonanzform

Aus der Definitionsgleichung $\Delta = \sqrt{\frac{4kTEm_N}{M}}$ erkennt man, daß zwei Resonanzen mit der gleichen natürlichen Linienform ψ bei gleicher Temperatur verschieden stark verbreitert sind, wenn sie bei verschiedenen Resonanzenergien liegen. Die Resonanz mit der höheren Resonanzenergie wird stärker verbreitert als die Resonanz bei niedriger Energie. Der Grund dafür ist, daß sich die kinetischen Energien eines Neutrons in Bezug auf zwei sich verschieden bewegende Kerne um so mehr unterscheiden, je größer die Geschwindigkeit des Neutrons ist. Dies ist an einem eindimensionalen Beispiel für schwere Kerne leicht zu erkennen.



v_1 , v_2 und v_n sind die Geschwindigkeiten der Kerne und des Neutrons und m_N ist die Neutronenmasse.

Ist

$$3.2.26 \quad \Delta E = E_{kin1} - E_{kin2}$$

die gesuchte Energiedifferenz und sind

$$3.2.27 \quad E_{kin1} = \frac{m_N}{2} (v_1 + v_n)^2 \text{ und } E_{kin2} = \frac{m_N}{2} (v_2 + v_n)^2$$

die entsprechenden kinetischen Energien des Neutrons in Bezug auf die beiden Kerne, dann ist

$$3.2.28 \quad \Delta E = m_N \left[v_n (v_1 - v_2) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right].$$

Ist

$$3.2.29 \quad E = \frac{m_N}{2} v_n^2$$

die Energie des Neutrons in Bezug auf den Kristallschwerpunkt, zu dem die beiden Kerne gehören, und vernachlässigt man wegen Beziehung

3.2.13

$$\frac{v_1 + v_2}{2} \text{ gegen } v_n,$$

dann ist

$$3.2.30 \quad \Delta E = (v_1 - v_2) \sqrt{2m_N E}$$

Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden Kerne sind von der Neutronenenergie unabhängig und haben in der Regel die Größenordnung $\sqrt{kTM^{-1}}$ (M ist die Masse eines Kernes). Es ist also $\Delta E \sim \sqrt{m_N M^{-1} kTE}$.

Hieraus erkennt man, daß ΔE und damit analog die Dopplerverbreiterung mit wachsender Neutronenenergie zunimmt.

Für $\Gamma \gg \Delta$ geht die Dopplerverbreiterte Linienform in die "natürliche" Linienform über.

$$3.2.31 \quad \psi(\theta, x) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} \quad 26)$$

Aus diesem Grunde liefern nur die Resonanzen der schweren Reaktormaterialien Uran und Plutonium einen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten. Bei den anderen Materialien ist $\theta = \frac{\Gamma}{\Delta}$ bei den in Frage kommenden Temperaturen und Energien so groß, daß ψ bei den Resonanzen dieser Materialien die natürliche Linienform angenommen hat und damit nicht mehr temperaturabhängig ist.

Im umgekehrten Fall $\Gamma \ll \Delta$ nimmt in der Umgebung des Maximums $x \ll \sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta}}$ die ψ -Funktion die Form einer Gaußverteilung an:

$$3.2.32 \quad \psi(\theta, x) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta \exp\left\{-\frac{x^2}{4} \theta^2\right\}$$

Genügend weit vom Maximum entfernt geht die ψ -Funktion immer in die natürliche Linienform über.

$$3.2.33 \quad \psi(\theta, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2}$$

Für das Integral über ψ gilt

$$3.2.34 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \, dx = \pi.$$

3.3 Resonanzabstands- und Breitenstatistik

Um mit den Formeln 3.2.23 und 3.2.24 die Wirkungsquerschnitte zu beschreiben, muß man folgende Größen kennen:

1. Die Abstände D_{lk} zwischen den einzelnen Resonanzen,
2. die elastischen Streubreiten Γ_n ,
3. die Absorptionsbreiten Γ_s ,
4. die Spaltbreiten Γ_f .

In dem Gebiet der statistischen Resonanzen sind diese Parameter für die einzelnen Resonanzen nicht mehr bekannt. Man kann nur noch mehr oder weniger richtige Annahmen über die Mittelwerte der benötigten Größen und deren Verteilungen um die Mittelwerte machen.

Bei der Bestimmung der D_{lk} müssen zwei verschiedene Arten von Abständen betrachtet werden:

1. die Abstände zwischen Resonanzen der gleichen Serie;
d.h., zwischen Resonanzen eines Materials, die zu gleichem l (Bahndrehimpuls des Neutrons) und gleichem J (Gesamtdrehimpuls des Compoundkerns) gehören; und
2. die Abstände zwischen Resonanzen verschiedener Serien.

Für die erste Art von Abständen läßt sich der mittlere Abstand zwischen zwei benachbarten Resonanzen wie folgt schreiben²³⁾:

$$3.3.1 \quad \overline{D}_J(E) = \overline{D}_J^0 \frac{(E_B + E)^2}{E_B^2} \exp\{-\sqrt{89,72(E_B + E)\text{MeV}^{-1}} - \sqrt{89,72E_B\text{MeV}^{-1}}\}$$

E_B ist die Bindungsenergie des eingefangenen Neutrons im Zwischenkern, und \overline{D}_J^0 ist der mittlere Abstand der Resonanzen bei niederen Energien ($E \ll E_B$). \overline{D}_J^0 wird bei niedrigen Energien an die Messungen angepaßt.

Bei diesen Energien ist die Verteilung der D_{lk} um den Mittelwert \overline{D}_{lk} bekannt. Man kann sie gut durch eine "Wignerverteilung" oder durch eine " χ^2 -Verteilung" mit einem Freiheitsgrad $\nu = 10$ darstellen¹⁸⁾.

$$3.3.2 \quad P_w(D)dD = \frac{\pi}{2} \frac{D}{\overline{D}^2} \exp\left\{-\frac{\pi}{4} \frac{D^2}{\overline{D}^2}\right\} dD$$

$$3.3.3 \quad P_{\chi^2}(D)dD = \frac{\nu}{2\overline{D}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\nu D}{2\overline{D}}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\nu D}{2\overline{D}}\right\} dD$$

$\Gamma(\frac{\nu}{2})$ ist die Gammafunktion.

Aus der Verteilungsfunktion 3.3.2 bzw. 3.3.3 erkennt man, daß kleine Abstände zwischen zwei benachbarten Resonanzen einer Serie ($D \ll \overline{D}$)

sehr unwahrscheinlich sind. Es existiert eine Art von gegenseitiger Abstoßung zwischen Resonanzen einer Serie.

Es wird angenommen, daß diese Verteilung auch bei höheren Energien erhalten bleibt. Theoretische Arbeiten von Porter und Rosenzweig²⁰⁾ zeigen, daß dieses der Fall ist. Für die Abstände zwischen Resonanzen verschiedener Serien ist bis heute keine Gesetzmäßigkeit bekannt.

In dieser Arbeit wird die Resonanzverteilungsfunktion $\Omega^s(D)$ benötigt.

$\Omega^s(D)dD$ gibt an, wieviel Resonanzen der Serie s im Intervall dD von einer bestimmten Resonanz der Serie s im Abstand D liegen.

Im nächsten Abschnitt wird eine solche analytische Form von $\Omega^s(D)$ abgeleitet werden.

Für die mittlere elastische Streubreite ergibt sich³⁾

$$3.3.4 \quad \bar{\Gamma}_{n1J} = S_1 \overline{D_J^0} \sqrt{E} v_1$$

Hierbei ist S_1 die Stärkefunktion, und v_1 ist der Durchdringungsfaktor für Neutronen durch die "Zentrifugalschwelle".

$$3.3.5 \quad v_0 = 1 \quad v_1 = \frac{R'^2}{R'^2 + \lambda^2}$$

Gewöhnlich setzt man

$$3.3.6 \quad \bar{\Gamma}_{n1J}^0 = S_1 \overline{D_J^0}$$

$\bar{\Gamma}_{n1J}^0$ nennt man reduzierte Neutronenbreite. Es ist dann

$$3.3.7 \quad \bar{\Gamma}_{n1J} = \bar{\Gamma}_{n1J}^0 \sqrt{E} v_1$$

Die wirklichen Streubreiten Γ_{n1J} weichen von diesem mittleren $\bar{\Gamma}_{n1J}$ ab.

Die Wahrscheinlichkeit $F_n(\Gamma_n)d\Gamma_n$ dafür, daß die wirkliche Streubreite größer als Γ_n und kleiner oder gleich $\Gamma_n+d\Gamma_n$ ist, wird nach Porter und Thomas²¹⁾ durch eine χ^2 -Verteilungsfunktion mit dem Freiheitsgrad 1 beschrieben.

$$3.3.8 \quad F_n(\Gamma_n) d\Gamma_n = \frac{1}{2\sqrt{\bar{\Gamma}_n} \bar{\Gamma}_n} \left(\frac{2\bar{\Gamma}_n \Gamma_n}{\bar{\Gamma}_n} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\Gamma_n}{2\bar{\Gamma}_n}\right\} d\Gamma_n$$

Die Absorptionsbreite wird für die einzelnen Isotope (U^{238} , Pu^{239}) als Konstante angesehen. Die mittlere Spaltbreite $\bar{\Gamma}_f$ wird aus den Messungen von $\alpha = \frac{\bar{G}_f}{\bar{G}_\gamma}$ bestimmt²³⁾.

Aus Analysen der Messungen vermutet man, daß die Verteilung der Γ_f um diesen Mittelwert mit χ^2 -Verteilungen vom Freiheitsgrad 1 bis 3 beschrieben werden kann.

$$3.3.9 \quad F_f(\Gamma_f) d\Gamma_f = \frac{\nu_f}{2\bar{\Gamma}_f \Gamma(\frac{\nu_f}{2})} \left(\frac{\nu_f \Gamma_f}{2\bar{\Gamma}_f} \right)^{\frac{\nu_f}{2} - 1} \exp\left\{-\frac{\nu_f}{2} \frac{\Gamma_f}{\bar{\Gamma}_f}\right\} d\Gamma_f$$

Die χ^2 -Verteilungen haben folgende Eigenschaften

$$3.3.10 \quad \int_0^{\infty} F^{(\nu)}(\Gamma) d\Gamma = 1$$

$$3.3.11 \quad \int_0^{\infty} \Gamma F^{(\nu)}(\Gamma) d\Gamma = \bar{\Gamma} \quad \text{und}$$

$$3.3.12 \quad \int_0^{\infty} \Gamma^2 F^{(\nu)}(\Gamma) d\Gamma = \left(1 + \frac{2}{\nu}\right) \bar{\Gamma}^2$$

3.4 Ableitung einer analytischen Form der Resonanzverteilungsfunktion $\Omega(D)$ *)

Ist $P_n(D)dD$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Abstand D von einer bestimmten Resonanz im Intervall dD die n -te Resonanz liegt, dann ist

$$3.4.1 \quad \Omega(D)dD = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(D)dD$$

*) Ein totalnumerisches Verfahren zur Berechnung von $\Omega(D)$ wurde von F.R. Nakache und M.H. Kalos (Trans. Am. Nuc. Soc. 1961 Annual Meeting) angegeben. Nach Abschluß dieser Arbeit wurde dem Autor bekannt, daß E.A. Fischer in einem APDA-Arbeitsbericht ebenfalls einen Weg zur analytischen Berechnung von $\Omega(D)$ angegeben hat.

die Funktion, die angibt, wieviele Resonanzen im Abstand D von einer bestimmten Resonanz aus gesehen im Intervall dD liegen. Ist $P_1(D)$, die Verteilungsfunktion für die Abstände zwischen benachbarten Resonanzen, bekannt, so kann man alle $P_n(D)$ nach der Rekursionsformel

$$3.4.2 \quad P_n(|D|) = \int_0^{|D|} P_1(t) P_{n-1}(|D|-t) dt$$

berechnen.

Die Beschränkung auf positive Abstände bringt keine Einschränkung der Allgemeinheit mit sich, da $\Omega(D)$ symmetrisch in D sein muß.

Nimmt man für $P_1(|D|)$ eine χ^2 -Verteilung mit geradem Freiheitsgrad ν an, so erhält $F_n(\nu, |D|)$ die Form

$$3.4.3 \quad P_n(|D|) = \frac{1}{|D|} \left(\frac{\nu}{2} \frac{|D|}{D} \right)^{\frac{\nu}{2} n} \frac{\exp\left(-\frac{\nu}{2} \frac{|D|}{D}\right)}{\Gamma\left(n \frac{\nu}{2}\right)},$$

was durch Schluß von n auf $n+1$ wie folgt bewiesen werden kann.

Nach Gleichung 3.4.2 ist

$$3.4.4 \quad P_{n+1}(|D|) = \int_0^{|D|} \frac{\nu}{2D} \frac{\exp\left\{-\frac{\nu t}{2D}\right\}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu t}{2D}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{\frac{\nu t}{2D}\right\} \frac{1}{|D|-t} \left(\frac{\nu(|D|-t)}{2D}\right)^{\frac{\nu}{2} n} \cdot \exp\left\{-\frac{\nu}{2} \frac{(|D|-t)}{2D}\right\} \frac{dt}{\Gamma\left(n \frac{\nu}{2}\right)}$$

oder

$$3.4.5 \quad P_{n+1}(|D|) = \frac{\nu}{2D} \frac{\exp\left\{-\frac{\nu}{2} \frac{|D|}{D}\right\}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(n \frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu |D|}{2D}\right)^{\frac{\nu}{2}(n+1)-1} \int_0^1 x^{\frac{\nu}{2}-1} (1-x)^{n \frac{\nu}{2}-1} dx$$

oder

$$3.4.6 \quad P_{n+1}(|D|) = \frac{1}{|D|} \left(\frac{|D|}{2D}\right)^{\frac{\nu}{2} n+1} \frac{\exp\left\{-\frac{\nu}{2} \frac{|D|}{D}\right\}}{\Gamma\left\{[n+1] \frac{\nu}{2}\right\}}$$

was zu beweisen war.

Es ergibt sich also

$$3.4.7 \quad \Omega(|D|) = \frac{\nu}{2D} \exp\left\{-\frac{\nu}{2} \frac{|D|}{D}\right\} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\nu|D|}{2D}\right)^{\frac{\nu}{2}n-1} \frac{1}{(n\frac{\nu}{2}-1)!}$$

Die Summe

$$3.4.8 \quad Su = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{\nu}{2}n-1} \frac{1}{(n\frac{\nu}{2}-1)!}$$

läßt sich aufsummieren.

Man sieht leicht ein, daß Su der Differentialgleichung

$$3.4.9 \quad \frac{d^{\frac{\nu}{2}} Su}{dx^{\frac{\nu}{2}}} = Su$$

gehört.

Ferner gelten die Anfangsbedingungen

$$3.4.10 \quad \left. \frac{d^p Su}{dx^p} \right|_{x=0} = 0$$

$$3.4.11 \quad \left. \frac{d^{(\frac{\nu}{2}-1)} Su}{dx^{(\frac{\nu}{2}-1)}} \right|_{x=0} = 1 \quad \text{für } p = 0, 1, 2 \dots \frac{\nu}{2} - 2$$

Die Lösung der Differentialgleichung 3.4.9 mit den Anfangsbedingungen 3.4.10 und 3.4.11 ist

$$3.4.12 \quad Su = \frac{2}{\nu} \sum_{\chi=1}^{\nu/2} \exp\left\{i \frac{4\pi}{\nu} \chi + x \exp\left(i \frac{4\pi}{\nu} \chi\right)\right\}$$

Su ist reell. Dies erkennt man, wenn man einige triviale Umformungen durchführt. Es ergibt sich dann

$$3.4.13 \quad Su = \frac{2}{\nu} \sum_{\chi=1}^{\nu/2} \cos\left\{\frac{4\pi}{\nu} \chi + x \sin \frac{4\pi}{\nu} \chi\right\} \exp\left(x \cos \frac{4\pi}{\nu} \chi\right)$$

und

$$3.4.14 \quad \Omega(|D|) = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{\mathcal{L}=1}^{\sqrt{D}/2} \cos\left(\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \mathcal{L} + \frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{D}} \sin \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \mathcal{L}\right) \exp \frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{D}} (\cos \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \mathcal{L} - 1)$$

Dies ist eine für die numerischen Berechnungen brauchbare Form von $\Omega(D)$. Da $\Omega(D)$ immer in der Form $\Omega(D)dD$ vorkommt, ist es sinnvoll, eine Transformation des Arguments vorzunehmen.

Mit $x' = \frac{D}{\sqrt{D}}$ ergibt sich aus $\Omega(D)dD = \Omega(x')dx'$

$$3.4.15 \quad \Omega(x') = \sum_{\mathcal{L}=1}^{\sqrt{D}/2} \cos\left\{\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \mathcal{L} + \frac{\sqrt{D}}{2} x' \sin \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \mathcal{L}\right\} \exp\left\{\frac{\sqrt{D}}{2} x' (\cos \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \mathcal{L} - 1)\right\}$$

Die Form von $\Omega(x')$ wird für den Fall $\sqrt{D} = 10$ in Abbildung 1 gezeigt.

4. Reaktorphysik

4.1 Grundzüge der Multigruppentheorie

Bei einer Multigruppentheorie wird das für die spezielle Berechnung benötigte Energiegebiet in N-Intervalle aufgeteilt, und das Verhalten der Neutronen in den einzelnen Intervallen beschrieben.

Ist $\phi(E)$ der wahre Neutronenfluß und ist ΔE_i die Intervallbreite des i-ten Energieintervalls, dann lautet die Definitionsgleichung für den "Multigruppenfluß" des i-ten Intervalls

$$4.1.1 \quad \phi_{oi} = \int_{\Delta E_i} \phi(E) dE$$

Für die Reaktionsraten R_{bi} der Reaktion vom Typ "b" [b=(n, γ) oder b = (n, f) oder b = (n, n)_i = Streuung aus dem i-ten Intervall] gilt

$$4.1.2 \quad R_{bi} = \int_{\Delta E_i} \mu_b(E) \phi(E) dE$$

Hierbei ist $\mu_b(E)$ der wahre Wirkungsquerschnitt für Reaktionen vom Typ b.

Man definiert einen effektiven Wirkungsquerschnitt $\tilde{\mu}_{bi}$ für Reaktionen des Typs b derart, daß folgende Gleichung gilt

$$4.1.3 \quad R_{bi} = \tilde{\mu}_{bi} \phi_{oi}$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen für die Reaktionsraten ergibt sich

$$4.1.4 \quad \tilde{\mu}_{bi} = \frac{\int_{\Delta E_i} \mu_b(E) \phi(E) dE}{\phi_{oi}}$$

Nimmt man die Intervallbreite der einzelnen Intervalle so klein an, daß die Zahl der eingestreuten Neutronen pro Energieeinheit q_i konstant ist, dann kann man den wahren Fluß durch den wahren totalen Wirkungsquerschnitt beschreiben. Es gilt für die totale Reaktionsrate

$$4.1.5 \quad q_i dE = \varphi(E) \mu_t(E) dE$$

Daraus folgt

$$4.1.6 \quad \varphi_i(E) = \frac{q_i}{\mu_t(E)}$$

Setzt man 4.1.6 in 4.1.1 und 4.1.4 ein, so erhält man

$$4.1.7 \quad \phi_{oi} = q_i \int_{\Delta E_i} \frac{1}{\mu_t(E)} dE \quad +)$$

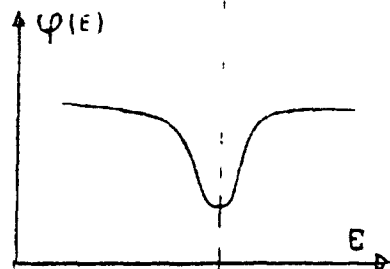
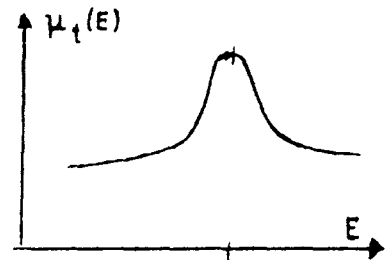
$$4.1.8 \quad \tilde{\mu}_{bi} = \frac{\int_{\Delta E_i} \mu_b(E) dE}{\int_{\Delta E_i} \frac{1}{\mu_t(E)} dE}$$

An der Gleichung 4.1.8 erkennt man deutlich den Einfluß der Resonanzen auf die effektiven Wirkungsquerschnitte.

An den Energiepunkten, an denen $\mu_b(E)$ (Abbildung) besonders groß ist, ist der Fluß $\varphi_i(E) = \frac{q_i}{\mu_t(E)}$ besonders klein, weil wegen des großen Wertes von $\mu_t(E)$ an dieser Stelle die Neutronen sehr schnell aus diesem Energiegebiet entfernt werden. Diese Tatsache, daß in den Energiegebieten der Resonanzspitzen wenig Neutronen für eine Reaktion zur Verfügung stehen, ist unter dem Namen Selbstabschirmung bekannt.

Es gilt deshalb allgemein die Beziehung

$$\frac{\tilde{\mu}_{bi}}{\frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} \mu_{bi}(E) dE} < 1$$



+) Der Index "o" soll andeuten, daß es sich bei dem Fluß ϕ_{oi} um die "Grundwelle" des Flusses handelt.

Mit kleiner werdenden Resonanzspitzen nähert sich dieser Quotient immer mehr dem Wert von 1. Da die Resonanzen mit wachsender Temperatur immer flacher werden und der Ausdruck $\frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} \mu_{bi}(E) dE$ wegen Beziehung 3.2.34 konstant bleibt, nimmt mit wachsender Temperatur $\tilde{\mu}_{bi}$ zu. Dies ist die Ursache des Dopplerkoeffizienten bei Reaktoren.

Bei den üblichen Multigruppenrechnungen sind aus rechentechnischen Gründen die Intervalle ΔE_i z.T. so groß, daß die Voraussetzungen, die zur Ableitung und zur Berechnung der $\tilde{\mu}_{bi}$ gemacht werden müssen, nicht mehr gültig sind. Diese Schwierigkeit kann man beseitigen, indem man das Intervall ΔE_i in j Intervalle ΔE_{ij} , in denen die oben erwähnten Voraussetzungen gültig sind, aufteilt. Sind die ϕ_{oij} , die zu diesen Intervallen gehörigen Multigruppenflüsse, dann gilt für die Reaktionsraten der Reaktion der Typ b.

$$4.1.9 \quad R_{bi} = \sum_j \tilde{\mu}_{bij} \phi_{oij}$$

Mit Gleichung 4.1.3 erhält man dann

$$4.1.10 \quad \tilde{\mu}_{bi} = \frac{\sum_j \tilde{\mu}_{bij} \phi_{oij}}{\phi_{oi}}$$

Teilt man das Intervall ΔE_i in genügend Unterintervalle ΔE_{ij} , dann kann $\tilde{\mu}_{bij}$ als kontinuierliche Funktion der Energie angesehen werden und man kann $\tilde{\mu}_{bi}$ wie folgt mit einer geeigneten Gewichtsfunktion $\phi'_i(E)$ berechnen.

$$4.1.11 \quad \tilde{\mu}_{bi} = \frac{\int_{\Delta E_i} \tilde{\mu}_{bij}(E) \phi'_i(E) dE}{\int_{\Delta E_i} \phi'_i(E) dE}$$

$\phi'_i(E)$ soll im Rahmen dieser Arbeit nicht näher untersucht werden.

Näherungsweise wird bei den späteren numerischen Auswertungen in

den Energiegruppen oberhalb von 2,1 KeV $\phi'_i(E)$ in den einzelnen

Gruppen als energieunabhängig angenommen, und unterhalb von 2,1 KeV

wird $\phi'(E)$ mit Hilfe einer Fermiagetheorie bestimmt.

Die Neutronenbilanz von Neutronen der i -ten Gruppe an der Stelle r in dem Volumen dV wird im stationären Fall durch folgende Gleichung beschrieben²⁴⁾

$$4.1.12 \quad \left\{ \text{div } D_i \text{ grad } \phi_{oi} - \tilde{\mu}_i \text{ Brems } \phi_{oi} - \tilde{\mu}_{\gamma i} \phi_{oi} - \tilde{\mu}_{fi} \phi_{oi} + \sum_{j \neq i} \tilde{\mu}_s(j \rightarrow i) \phi_{oj} + \nu_0 \chi_i \sum_j \tilde{\mu}_{fj} \cdot \xi_j \phi_{oj} \right\} dV = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Aus diesen Gleichungen und der Bedingung, daß die Flüsse an dem extrapolierten Rand des Reaktors verschwinden, lassen sich die Flüsse berechnen. $i = 1$ charakterisiert gewöhnlich die energetisch höchste und $i = N$ die energetisch tiefste Gruppe. Es beschreibt in dieser Gleichung das erste Glied den Anteil der Neutronen, die durch Diffusion das Volumen dV verlassen (D_i ist der Neutronendiffusionskoeffizient in der i -ten Gruppe). Das zweite Glied beschreibt den Anteil der Neutronen, die durch Streuung verloren gehen. $\tilde{\mu}_i \text{ Brems}$ ist der totale effektive Bremsquerschnitt in der i -ten Gruppe.

Das dritte und vierte Glied geben den Anteil der Neutronen an, die durch Absorption ((n, γ) , (n, f)) verloren gehen. $\tilde{\mu}_{\gamma i}$ und $\tilde{\mu}_{fi}$ sind die effektiven Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen des Typs (n, γ) und (n, f) .

Die beiden letzten Glieder geben die Anzahl der Neutronen an, die in dV in der i -ten Gruppe entstehen. Das fünfte Glied gibt die Neutronenanzahl an, die durch Streuung in einer anderen Gruppe in die i -te Gruppe gestreut werden, während durch das letzte Glied die Spaltneutronen berücksichtigt werden, die in dV in der i -ten Gruppe entstehen. $\mu_s(j \rightarrow i)$ ist der Wirkungsquerschnitt für die Streuung, durch die ein Neutron aus der j -ten Gruppe in die i -te Gruppe gestreut wird. In der Regel verschwindet $\mu_s(j \rightarrow i)$ für $j > i$. χ_i ist der Anteil der

Spaltungsneutronen, die in der i-ten Gruppe entstehen. ν_0 ist die Anzahl der Spaltungsneutronen, die bei einer durch ein langsames Neutron verursachten Spaltung entstehen. ξ_j ist das Verhältnis der entstehenden Spaltungsneutronen bei einer Spaltung mit Neutronen aus der j-ten Energiegruppe zu der oben erwähnten Spaltungsneutronenanzahl ν_0 . In dem für die Berechnung des Dopplerkoeffizienten wichtigen Energiegebiet ist $\xi_j = 1$.

Schreibt man die N Gleichungen von 4.1.12 in Vektorschreibweise, so erhält man

$$4.1.13 \quad \mathcal{D}(\mathbf{k})\phi_0(\mathbf{k}) + \mathcal{M}\phi_0(\mathbf{k}) + \nu_0 \mathcal{F}(\mathbf{k})\phi_0(\mathbf{k}) = 0$$

Hierbei gilt für die einzelnen Matrixelemente von \mathcal{D} , \mathcal{M} und \mathcal{F}

$$4.1.14 \quad s_{ik} = (\text{div } D_i \text{ grad } \tilde{\mu}_i - \text{Brems } \tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_{fi}) \delta_{ik}$$

$$4.1.15 \quad m_{ik} = \tilde{\mu}_s(k \rightarrow i)(1 - \delta_{ik})$$

$$4.1.16 \quad f_{ik} = \chi_i \mu_{fk} \mathbf{e}_k$$

ϕ_0 ist ein Vektor, dessen Komponenten ϕ_{0i} die Multigruppenflüsse sind.

Man definiert zu den Operatoren \mathcal{D} , \mathcal{M} und \mathcal{F} adjungierte Operatoren \mathcal{D}^+ , \mathcal{M}^+ und \mathcal{F}^+ derart, daß mit zwei beliebigen stetigen Funktionen u und v, die auf dem extrapolierten Rand des Reaktors verschwinden, folgende Beziehungen gelten¹⁰⁾.

$$4.1.17 \quad \int (u \mathcal{D}v - \mathcal{D}^+ uv) dV = 0 \quad +)$$

$$4.1.18 \quad \int (u \mathcal{M}v - \mathcal{M}^+ uv) dV = 0$$

$$4.1.19 \quad \int (u \mathcal{F}v - \mathcal{F}^+ uv) dV = 0$$

Die Elemente von \mathcal{D}^+ , \mathcal{M}^+ und \mathcal{F}^+ haben die Form

$$4.1.20 \quad s_{ik}^+ = s_{ki}, \quad m_{ik}^+ = m_{ki} \quad \text{und} \quad f_{ik}^+ = f_{ki}$$

¹⁰⁾ Integrale der Form $\int \dots dV$ bedeuten in dieser Arbeit stets Integrationen über das gesamte extrapolierte Reaktorvolumen.

Für die zu Gleichung 4.1.13 adjungierte Gleichung

$$4.1.21 \quad \gamma^+ \phi^+ + \mathcal{M}^+ \phi^+ + \nu_0 f^+ \phi^+ = 0$$

gibt es unter der Bedingung, daß ϕ^+ auf dem extrapolierten Reaktorrand verschwindet, eine Lösung ϕ_0^+ ¹⁰⁾.

Ist $\Delta \phi$ irgendeine Flußänderung, die durch eine Änderung der Wirkungsquerschnitte (z.B. auf Grund einer Reaktortemperaturänderung) hervorgerufen wird, dann gilt, da $\Delta \phi$ auf dem extrapolierten Reaktorrand verschwindet, analog den Gleichungen 4.1.17 bis 4.1.19

$$4.1.22 \quad \int (\phi_0^+ \delta \Delta \phi - \delta^+ \phi_0^+ \Delta \phi) dV = 0$$

$$4.1.23 \quad \int (\phi_0^+ \mathcal{M} \Delta \phi - \mathcal{M}^+ \phi_0^+ \Delta \phi) dV = 0$$

$$4.1.24 \quad \int (\phi_0^+ f \Delta \phi - f^+ \phi_0^+ \Delta \phi) dV = 0$$

Diese letzten drei Beziehungen werden bei der folgenden Ableitung der "Multigruppenstörungsformel" benötigt.

4.2 Störungstheorie

4.2 a Ableitung der Multigruppenstörungsformel

Zur Berechnung des Einflusses einer Temperaturänderung eines Reaktors auf dessen Reaktivität wird eine Multigruppen-Störungstheorie benutzt. Bei einer Temperaturänderung ändern sich die Größen γ , \mathcal{M} und f aus Gleichung 4.1.13 um $\Delta \gamma$, $\Delta \mathcal{M}$ und Δf . Gleichung 4.1.13 ist also im Fall einer Störung zunächst nicht mehr erfüllt. Im Rahmen der statischen Störungstheorie nimmt man eine fiktive Änderung von ν_0 und dV derart an, daß Gleichung 4.1.13 nach Einführung der Störung auch noch gültig ist.

Für kleine Änderungen von ν_0 , wie sie bei der Berechnung des Dopplerkoeffizienten auftreten, ^{ist} (nach Henry ¹⁴⁾) $-\frac{\Delta \nu}{\nu_0}$ gleich der gesuchten Reaktivitätsänderung $\frac{\Delta k}{k}$. Die Änderungen von γ , \mathcal{M} und f induzieren

eine Änderung von ϕ_0 um $\Delta\phi$. Die der Gleichung 4.1.13 entsprechende Gleichung lautet nach Einführung einer Störung:

$$4.2a.1 \quad (\bar{\nu} + \Delta\bar{\nu})(\phi_0 + \Delta\phi) + (\bar{m} + \Delta\bar{m})(\phi_0 + \Delta\phi) = -(\nu_0 + \Delta\nu)(\bar{f} + \Delta\bar{f})(\phi_0 + \Delta\phi)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung 4.1.13 und Vernachlässigung von quadratischen Änderungseffekten erhält man

$$4.2a.2 \quad \bar{\nu}\Delta\phi + \Delta\bar{\nu}\phi_0 + \bar{m}\Delta\phi + \Delta\bar{m}\phi_0 + \nu_0\bar{f}\Delta\phi + \nu_0\Delta\bar{f}\phi_0 = -\Delta\nu\bar{f}\phi_0$$

Multipliziert man 4.2a.2 von links mit dem in 4.1.20 definierten adjungierten Fluß ϕ_0^+ und integriert über das gesamte Reaktorvolumen, so erhält man

$$4.2a.3 \quad \int \phi_0^+ (\Delta\bar{\nu} + \Delta\bar{m} + \nu_0\Delta\bar{f}) \phi_0 \, dV = -\Delta\nu \int \phi_0^+ \bar{f} \phi_0 \, dV$$

(ϕ_0^+ ist der adjungierte Fluß, der zum Eigenwert ν_0 gehört.)

Die Glieder mit $\Delta\phi$ kompensieren sich gegenseitig, denn es ist nach den Gleichungen 4.1.22 bis 4.1.24

$$4.2a.4 \quad \int \phi_0^+ (\bar{\nu} + \bar{m} + \nu_0\bar{f}) \Delta\phi \, dV = \int (\bar{\nu}^+ + \bar{m}^+ + \nu_0\bar{f}^+) \phi_0^+ \Delta\phi \, dV$$

Wegen 4.1.21 verschwindet aber dieser Ausdruck.

Aus 4.2a.3 ergibt sich die Reaktivitätsänderung

$$4.2a.5 \quad \frac{\Delta k}{k} = -\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\int \phi_0^+ (\Delta\bar{\nu} + \Delta\bar{m} + \nu_0\Delta\bar{f}) \phi_0 \, dV}{\nu_0 \int \phi_0^+ \bar{f} \phi_0 \, dV}$$

Es ist zu beachten, daß zur Bestimmung der Reaktivitätsänderung mit Hilfe der oben abgeleiteten Störungstheorie allein die Änderungen von $\bar{\nu}$, \bar{m} und \bar{f} maßgebend sind. Das bedeutet wegen der Gleichungen 4.1.14 - 4.1.16, daß allein die Änderungen der effektiven Wirkungsquerschnitte zur Bestimmung von $\frac{dk}{k}$ berechnet werden müssen.

Man kann aber auch die Reaktivitätsänderungen aus den Reaktionsratenänderungen bestimmen, denn man kann immer auf der rechten Seite von 4.2a.5 eine Größe der Form

$$4.2a.6 \quad \frac{\int \phi_c^+ (\gamma + \beta M + \nu_0 f) \Delta \phi \, dV}{\nu_0 \int \phi_c^+ \bar{f} \phi_0 \, dV} = 0 \quad \text{addieren.}$$

Es ist dann

$$4.2a.7 \quad \frac{\Delta k}{k} = \frac{\int \phi_0^+ [(\delta + \beta M + \nu_0 f) \Delta \phi + (\Delta \delta + \Delta \beta M + \nu_0 \Delta f) \phi_0] \, dV}{\nu_0 \int \phi_0^+ \bar{f} \phi_0 \, dV}$$

$\Delta \phi$ ist ein beliebiger Flußvektor, der die in Abschnitt 4.1 angegebenen Bedingungen erfüllen muß. Man kann ihn so wählen, daß der Ausdruck $dA = [(\delta + \beta M + \nu_0 f) \Delta \phi + (\Delta \delta + \Delta \beta M + \nu_0 \Delta f) \phi_0] \, dV$ in erster Näherung eine effektive Absorptionsratenänderung darstellt.

In der Regel führt eine Berechnung des Dopplerkoeffizienten mit Hilfe von Reaktionsratenänderungen zu erheblichen Schwierigkeiten. Auch die Ermittlung des Dopplerkoeffizienten aus den Änderungen in den effektiven Wirkungsquerschnitten ist nicht die einfachste Art seiner Bestimmung, was in Abschnitt 4.2c gezeigt wird.

4.2b Auswertung der Formelfür $\frac{\Delta k}{k}$

Setzt man $\Delta \gamma$, $\Delta \beta M$ und Δf in 4.2a.5 ein, so erhält man

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{-\sum_i \int (\delta \tilde{\mu}_{vi} + \delta \tilde{\mu}_{fi}) \phi_{oi} \phi_{oi}^+ \, dV + \nu_0 \sum_{ik} \int \chi_i \phi_{oi}^+ \delta \tilde{\mu}_{fk} \xi_k \phi_{ok} \, dV}{\nu_0 \int \sum_{ik} \chi_i \phi_{oi}^+ \tilde{\mu}_{fk} \phi_{ok} \xi_k \, dV} - \frac{\sum_i \int \phi_{oi} \delta \tilde{\mu}_i \text{Brems} \phi_{oi}^+ \, dV - \sum_i \int \phi_{oi} \sum_{k \neq i} \delta \tilde{\mu}(i \rightarrow k) \phi_{ok}^+ \, dV}{\nu_0 \int \sum_{ik} \chi_i \phi_{oi}^+ \tilde{\mu}_{fk} \phi_{ok} \xi_k \, dV}$$

(ϕ_{oi} ist die i-te Komponente des Flußvektors ϕ_0 .)

Die Änderungen der Ausflußverluste, die durch Änderungen der Ausdrücke "div D_i grad" hervorgerufen werden, spielen bei den zur Diskussion stehenden großen Reaktoren keine Rolle. Sie werden deshalb vernachlässigt. Bei kleinen Reaktoren müssen die Ausflußverluste in gleicher

Weise wie die Strahlungsabsorption bei der Berechnung des Dopplerkoeffizienten berücksichtigt werden.

In dem für die Berechnung des Dopplerkoeffizienten maßgebenden Energiegebiet ($E < 100 \text{ keV}$) ist $\mu(i \rightarrow k)$ nur dann wichtig, wenn i und k zwei benachbarte Gruppen bezeichnen. Da aber ϕ_o^+ sich nicht stark von Gruppe zu Gruppe ändert, kann man in guter Näherung

$$4.2b.2 \quad \phi_{ok}^+ \approx \phi_{oi}^+ \quad \text{setzen,}$$

Mit 4.2b.2 verschwindet der zweite Quotient in 4.2b.1.

Es ist nämlich

$$4.2b.3 \quad \tilde{\mu}_i \text{ Brems} = \sum_{k \neq i} \tilde{\mu}(i \rightarrow k)$$

Es ergibt sich also für den Dopplerkoeffizienten (durch den Übergang von $\Delta T \rightarrow 0$)

$$4.2b.4 \quad c = \frac{1}{k} \frac{dk}{dT} = \frac{-\sum_i \left(\frac{d}{dT} \tilde{\mu}_{fi} + \frac{d}{dT} \tilde{\mu}_{fi} \right) \phi_{oi} \phi_{oi}^+ dV + \nu_o \sum_{ik} \chi_i \phi_{oi}^+ \frac{d}{dT} \tilde{\mu}_{fk} \xi \phi_{ok} dV}{\nu_o \sum_{ik} \chi_i \phi_{oi}^+ \tilde{\mu}_{fk} \xi \phi_{ok} dV}$$

4.2c Vereinfachung der Berechnungsmethode von Reaktivitätsänderungen infolge von Wirkungsquerschnittsänderungen

Nach Gleichung 4.1.8 haben die effektiven Wirkungsquerschnitte die Form

$$4.2c.1 \quad \tilde{\mu}_{zi} = \frac{\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i} \quad +)$$

Daraus folgt für die Ableitung von $\tilde{\mu}_{zi}$ nach der Temperatur

^{+) Die Klammern " $\langle \rangle$ " bezeichnen im folgenden die energetischen Mittelwerte:}

$$\text{z.B.} \quad \langle x \rangle = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} x(E) dE$$

$$4.2c.2 \quad \frac{d}{dT} \tilde{\mu}_{zi} = \frac{\frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i} - \frac{\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i^2} \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i$$

Nach den Überlegungen von Abschnitt 4.2a und 4.2b kann man zu Störungen $\Delta \gamma, \Delta \mathcal{M}$ und Δf jederzeit einen Summanden der Form $(\delta + \mathcal{M} + f) \Delta \phi_0$ hinzufügen, ohne das Endergebnis $\left(\frac{\Delta k}{k} \right)$ zu ändern, falls der Vektor $\Delta \phi_0 = \{ \Delta \phi_{oi} \}$ die in Abschnitt 4.1 angegebenen Bedingungen erfüllt.

Folgende $\frac{d}{dT} \phi_{oi}$ erfüllen diese Bedingung

$$4.2c.3 \quad \frac{d}{dT} \phi_{oi} = \frac{\frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i} \phi_{oi} \quad . \quad \text{Man erhält so unter Berücksichtigung von Beziehung 4.1.8}$$

$$4.2c.4 \quad \frac{d\mu_{zi}^{\text{fiktiv}}}{dT} = \frac{\frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i} - \frac{\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i^2} \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i + \tilde{\mu}_{zi} \frac{\frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i}$$

Aus der Definition des effektiven Wirkungsquerschnittes 4.2c.1 erkennt man, daß sich die beiden letzten Glieder kompensieren.

Das bedeutet, daß zur Berechnung des Dopplerkoeffizienten folgende Temperaturableitungen von fiktiven Wirkungsquerschnitten benutzt werden können.

$$4.2c.5 \quad \frac{d}{dT} \mu_z^{\text{fiktiv}} = \frac{\frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i} \quad +)$$

Das Integral

$$4.2c.6 \quad \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E}^{\mu_z} \frac{\mu_z}{\mu_t} dE$$

^{+) Im folgenden werden Indices, die eindeutig aus dem Rechengang hervorgehen, weggelassen.}

gibt im Intervall ΔE den Anteil der Reaktionen vom Typ z in Bezug auf die Gesamtzahl der Reaktionen an.

Aus der Beziehung 4.2c.5 erkennt man deutlich, daß die Reaktivitätsänderung mit der Temperatur dadurch hervorgerufen wird, daß die Reaktionsverhältnisse $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ geändert werden. Würden sich alle Wirkungsquerschnitte um den gleichen Faktor ändern, dann wäre $\frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = 0$. Es gäbe, wie zu erwarten war, im Rahmen der Näherungen von Abschnitt 4.2b keine Reaktivitätsänderung.

Aus Gleichung 4.2c.5 könnte man entnehmen, daß auch konstante Wirkungsquerschnitte einen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten liefern können.

Setzt sich z.B. μ_z aus einem konstanten und einem stark energieabhängigen Teil zusammen, dann erhält man mit

$$4.2c.7 \quad \mu_z = \mu_z \text{ konst} + \mu_z(E)$$

$$4.2c.8 \quad \frac{d\mu_z^{\text{fiktiv}}}{dT} = \mu_z \text{ konst} \frac{\frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle} + \frac{\frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_z(E)}{\mu_t} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle}$$

Das erste Glied kann als Beitrag von $\mu_z \text{ konst}$ zum Dopplerkoeffizienten betrachtet werden. Würde man dagegen den Dopplerkoeffizienten mit den Temperaturableitungen der effektiven Wirkungsquerschnitte berechnen, dann würde $\mu_z \text{ konst}$ im Gegensatz zu Gleichung 4.2c.8 keinen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten liefern. Denn es wäre

$$4.2c.9 \quad \frac{d\tilde{\mu}_z}{dT} = \frac{d}{dT} \frac{\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle} = \frac{d}{dT} \left(\frac{\mu_z \text{ konst} \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle} + \frac{\left\langle \frac{\mu_z(E)}{\mu_t} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle} \right)$$

oder

$$4.2c.10 \quad \frac{d\tilde{\mu}_z}{dT} = \frac{\frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_z(E)}{\mu_t} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle} - \frac{\left\langle \frac{\mu_z(E)}{\mu_t} \right\rangle \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle}$$

Dieser scheinbare Gegensatz wird dadurch hervorgerufen, daß der gleiche Dopplerkoeffizient C durch verschiedene $\frac{z}{dT}$ erklärt werden kann. Eine eindeutige Zuordnung der einzelnen Teile des Dopplerkoeffizienten zu bestimmten Serien ist daher nicht möglich.

Mit den in Gleichung 4.2c.5 definierten fiktiven Ableitungen von Wirkungsquerschnitten erhält die Formel für den Dopplerkoeffizienten folgende Form:

$$4.2c.11 \quad C = - \frac{\sum_i \phi_{oi} \phi_{oi}^+ \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle^{-1} \left[\frac{d}{dT} \left\{ \left\langle \frac{\mu_s}{\mu_t} \right\rangle + \left\langle \frac{\mu_f}{\mu_t} \right\rangle \right\} - \frac{\sum_k \chi_k \phi_{ok}^+}{\phi_{oi}^+} v_o \right] \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_f}{\mu_t} \right\rangle_i}{v_o \int \sum_{ik} \chi_i \phi_{oi}^+ \mu_{fk} \epsilon_{k\phi_{ok}} dV} dV$$

Gewöhnlich setzt man

$$4.2c.12 \quad \sum_k \chi_k \phi_{ok}^+ = W_H$$

und

$$4.2c.13 \quad v_o \int \sum_{ik} \chi_i \phi_{oi}^+ \mu_{fk} \epsilon_{k\phi_{ok}} dV = \text{Norm}$$

Es ist dann

$$4.2c.14 \quad C = - \frac{1}{N_{crm}} \int \sum_i \frac{\phi_{oi}^+ \phi_{oi}}{\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle_i} \left\{ \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_s}{\mu_t} \right\rangle_i + \left(1 - v_o \frac{W_H}{\phi_{oi}^+} \right) \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_f}{\mu_t} \right\rangle_i \right\} dV$$

5. Anwendung der statistischen Aussagen zur Berechnung der effektiven Wirkungsquerschnitte und deren Temperaturableitungen

5.1. Schwierigkeiten bei der Einführung statistischer Methoden

Um die Reaktionsverhältnisse $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ und deren Temperaturableitung zu berechnen, spaltet man μ_z in die Beiträge der einzelnen Serien μ_z^s auf. Mit

$$5.1.1 \quad \mu_z = \sum_s \mu_z^s$$

ist dann

$$5.1.2 \quad \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \sum_s \left\langle \frac{\mu_z^s}{\mu_t} \right\rangle$$

μ_z^s ist nach Abschnitt 3.2 eine Summe von Resonanzen

$$5.1.3 \quad \mu_z^s = N^s \sum_k \mathcal{G}_{ozk}^s \psi_k^s$$

Damit wird

$$5.1.4 \quad \left\langle \frac{\mu_z^s}{\mu_t} \right\rangle = N^s \sum_k \mathcal{G}_{ozk}^s \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle$$

Die Summe über k erstreckt sich nur über die Resonanzen der Serie s , die in ΔE liegen. Die einzelnen Resonanzen k unterscheiden sich durch die Halbwertsbreiten Γ_{nk} und Γ_{fk} , die jedoch für die einzelnen Resonanzen nicht bekannt sind. Im Rahmen der statistischen Theorie kann man die einzelnen Summanden $\mathcal{G}_{ozk}^s \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle$ durch ihre Mittelwerte $\mathcal{G}_{ozk}^s \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle_{\Gamma_{nk}, \Gamma_{fk}}$ in Bezug auf alle möglichen Γ_{nk} und Γ_{fk} ersetzen.

$$5.1.5 \quad \mathcal{G}_{ozk}^s \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle = \iint_0^\infty \mathcal{G}_{ozk}^s \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle F_n^s(\Gamma_{nk}) F_f^s(\Gamma_{fk}) d\Gamma_{nk} d\Gamma_{fk}$$

Die Funktionen $F_n^s(\Gamma_{nk})$ und $F_f^s(\Gamma_{fk})$ sind die in Abschnitt 3.3 eingeführten Verteilungsfunktionen. Ist D^s der mittlere Abstand der Resonanzen der Serie s im Intervall ΔE , dann ist die Anzahl der Resonanzen

der Serie s in ΔE

$$5.1.6 \quad n^s = \frac{\Delta E}{D^s}$$

Daraus ergibt sich

$$5.1.7 \quad \left\langle \frac{\mu_z^s}{\mu_t} \right\rangle = N^s \frac{\Delta E}{D^s} \overline{\left(\sigma_{\text{ozk}}^s \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle \right)} \Gamma_{nk}, \Gamma_{fk}$$

Da in

$$\mu_t = \mu_p^+ + \sum_r N^r \sigma_{\text{ock}, k'}^r \psi_{k'}^r,$$

alle Resonanzen enthalten sind, müßten bei der Integration

$$5.1.8 \quad \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \int \frac{\psi_k^s}{\Delta E \mu_p^+ + \sum_r N^r \sigma_{\text{ock}, k'}^r \psi_{k'}^r} dE$$

Mittelungen über alle Parameter der übrigen Resonanzen durchgeführt werden. Wie diese Mittelungen durchgeführt werden müssen, soll an einem Modell, bei dem nur zwei Resonanzen im Nenner vorhanden sind, gezeigt werden.

Es ist in diesem Fall

$$5.1.9 \quad \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \int \frac{\psi_k^s(E_k - E)}{\Delta E \mu_p^+ + N^s \sigma_{\text{ock}}^s \psi_k^s(E_k - E) + N^r \sigma_{\text{ock}, k'}^r \psi_{k'}^r(E_{k'} - E)} dE$$

$\sigma_{\text{ock}, k'}^r$ und $\psi_{k'}^r$ hängen von den nur statistisch bekannten Größen Γ_{nk} und Γ_{fk} ab. $E_{k'}$ und E_k sind die Resonanzenergien der beiden Resonanzen. Ihre Differenz $E_{k'} - E_k = D_{k',k}$ ist auch nur statistisch bekannt. Das heißt, um $\left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle$ zu berechnen, muß man über alle möglichen Γ_{nk} , Γ_{fk} und $D_{k',k}$ mit den zugehörigen Verteilungsfunktionen $F_n(\Gamma_{nk})$, $F_f(\Gamma_{fk})$ und $F_D(D_{k',k})$ mitteln.

$$5.1.10 \quad \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \int \int \int \int I(D_{k',k}; \Gamma_{nk}, \Gamma_{fk}, E) d\Gamma_{nk} d\Gamma_{fk} dD_{k',k} dE$$

$$\text{mit } I(D_{k',k}; \Gamma_{nk}, \Gamma_{fk}, E) = \frac{\psi_k^s(E_k - E) F_n(\Gamma_{nk}) F_f(\Gamma_{fk}) F_D(D_{k',k})}{\mu_p^+ + N^s \sigma_{\text{ock}}^s \psi_k^s(E_k - E) + N^r \sigma_{\text{ock}, k'}^r \psi_{k'}^r(D_{k',k} + E_k - E)}$$

Beim Vorhandensein von n weiteren Resonanzen würden weitere $3n$ Integrationen hinzukommen. Man sieht, daß unter diesen Umständen $\left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle$ praktisch nicht mehr berechenbar ist. Man muß also irgendwelche Näherungen einführen, die es ermöglichen, dieses komplizierte Integral in einfachere Integrale zu überführen.

5.2 Näherungen

Bisher kannte man zwei Näherungen. Die eine Näherung, die bei niedrigen Energien gilt, setzt voraus, daß die einzelnen Resonanzen vollkommen voneinander getrennt sind. Das bedeutet, daß im Ausdruck 5.1.8 in dem Energiebereich, in dem ψ_k^s von Null verschieden ist, der Ausdruck $\sum_r \sum_{k'(r) \neq k(s)} \delta_{ock}^r \psi_{k'}^r$ verschwindet. Es ist dann

$$5.2.1 \quad \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \frac{1}{N^s \delta_{ock}^s} \int \frac{\psi_k^s}{\frac{\mu_p}{N^s \delta_{ock}^s} + \psi_k^s} dE$$

Ist das Intervall ΔE genügend groß, so daß der wesentlich von Null verschiedene Teil von ψ_k^s im Intervall ΔE liegt, dann ergibt sich

$$5.2.2 \quad \left\langle \frac{\psi_k^s}{\mu_t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \left\langle \frac{1}{N^s \delta_{ock}^s} \Gamma_k^s J(\theta_k^s, \beta_k^s) \right\rangle$$

Hierbei ist $J(\theta, \beta)$ die bekannte und tabellierte Funktion:

$$5.2.3 \quad J(\theta, \beta) = \int_0^\infty \frac{\psi(\theta, x)}{\beta + \psi(\theta, x)} dx \quad \text{mit} \quad \beta_k^s = \frac{\mu_p^*}{N^s \delta_{ock}^s}; \quad \theta = \frac{\sqrt{k}^s}{\Delta} \quad \text{und} \quad x = \frac{(E_k^s - E)}{\frac{1}{2} \Gamma_k^s}$$

Mit dem Ausdruck 5.2.2 kann man die Reaktionsratenverhältnisse $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ und deren Temperaturableitungen berechnen.

Bei der zweiten Näherung wird die Tatsache benutzt, daß die Lagen von Resonanzen verschiedener Serien unabhängig voneinander sind. Das hat zur Folge, daß die energetischen Mittelwerte von Produkten von Funktionen f der Wirkungsquerschnitte μ^s der verschiedenen Serien als Produkte der Mittelwerte der Funktionen geschrieben werden können.

$$5.2.4 \quad \left\langle f_1(\mu^{(1)}) \cdot f_2(\mu^{(2)}) \right\rangle = \left\langle f_1(\mu^{(1)}) \right\rangle \left\langle f_2(\mu^{(2)}) \right\rangle \text{ oder}$$

$$5.2.5 \quad \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} f_1(\mu^{(1)}) \cdot f_2(\mu^{(2)}) dE = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} f_1(\mu^{(1)}) dE \cdot \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} f_2(\mu^{(2)}) dE$$

Diese Beziehung kann man wie folgt beweisen. Da die Lagen der Resonanzen der einen Serie nicht von den Lagen der Resonanzen der anderen Serie abhängen, gilt

$$5.2.6a \quad \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} f_1(E) \cdot f_2(E) dE = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} f_1(E+E^+) f_2(E) dE$$

E^+ ist eine beliebige Energie, die jedoch so klein sein muß, daß $f_1(E)$ und $f_1(E+E^+)$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit irgendeinen bestimmten Wert annehmen. Es gilt daher auch noch für alle E^+ , die diese Bedingung erfüllen:

$$5.2.6b \quad \left\langle f_1 \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} f_1(E) dE = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} f_1(E+E^+) dE$$

Sind E_a und E_e die Anfangs- bzw. Endkoordinaten des Intervalls ΔE , dann gilt

$$5.2.6c \quad \frac{1}{\Delta E} \int_{E_a}^{E_e} f_1(E) \cdot f_2(E) dE = \frac{1}{\Delta E} \int_{E_a - \frac{E_e - E_a}{2}}^{E_e - \frac{E_e - E_a}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta E} \int_{E_a}^{E_e} f_1(E+E^+) f_2(E) dE \right\} dE^+$$

Hierbei wurde angenommen, daß für $|E^+| \leq \frac{E_e - E_a}{2}$ die Gleichung 5.2.6a erfüllt ist. Setzt man nach Gleichung 5.2.6b

$$5.2.6d \quad \frac{1}{\Delta E} \int_{E_a - \frac{E_e - E_a}{2}}^{E_e - \frac{E_e - E_a}{2}} f_1(E+E^+) dE^+ = \frac{1}{\Delta E} \int_{E_a}^{E_e} f_1 \left(\left[E - \frac{E_e + E_a}{2} \right] + E'' \right) dE'' = \left\langle f_1 \right\rangle$$

dann erhält man aus Gleichung 5.2.6c

$$5.2.7a \quad \frac{1}{\Delta E} \int_{E_a}^{E_e} f_1(E) \cdot f_2(E) dE = \left\langle f_1 \right\rangle \cdot \frac{1}{\Delta E} \int_{E_a}^{E_e} f_2(E) dE \quad \text{oder}$$

$$5.2.7b \quad \langle f_1 \cdot f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle$$

und Gleichung 5.2.4 ist damit bewiesen.

Um Gleichung 5.2.4 bei der Berechnung der Reaktionsratenverhältnisse $\frac{\mu_z}{\mu_t}$ benützen zu können, wird bei der zweiten Näherung angenommen, daß μ_t nur wenig von $\langle \mu_t \rangle$ abweicht, was nur bei hohen Energien der Fall ist.

$$5.2.8 \quad \left| \frac{\langle \mu_t \rangle - \mu_t}{\langle \mu_t \rangle} \right| \ll 1 \quad \text{oder} \quad \left| \frac{\frac{\sum (\langle \mu_c^s \rangle - \mu_c^s)}{s}}{\langle \mu_t \rangle} \right| \ll 1$$

Hierbei ist für

$$\mu_c^s = N^s \sum_k \frac{\psi_k^s}{\psi_k^s}$$

$$5.2.9 \quad \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \left\langle \frac{\frac{\sum \mu_z^r}{r}}{\mu_p^+ + \frac{\sum \mu_c^s}{s}} \right\rangle = \left\langle \frac{\frac{\sum \mu_z^r}{r}}{\left[\mu_p^+ + \left\langle \frac{\sum \mu_c^s}{s} \right\rangle \right] \cdot \left[1 - \frac{\frac{\sum (\langle \mu_c^s \rangle - \mu_c^s)}{s}}{\langle \mu_t \rangle} \right]} \right\rangle$$

gilt wegen Beziehung 5.3.8 folgende Entwicklung

$$5.2.10 \quad \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \frac{\sum \langle \mu_z^r \rangle}{\langle \mu_t \rangle} - \frac{\sum \sum \langle \mu_z^r (\mu_c^s - \langle \mu_c^s \rangle) \rangle}{\langle \mu_t \rangle^2}$$

Nach 5.3.4 ergibt sich

$$5.2.11 \quad \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \frac{\sum \langle \mu_z^r \rangle}{\langle \mu_t \rangle} - \frac{\sum_r \sum_s \langle \mu_z^r \rangle \langle \mu_c^s \rangle + \sum_s \langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle - \sum_r \sum_s \langle \mu_z^r \rangle \langle \mu_c^s \rangle}{\langle \mu_t \rangle^2}$$

Die in dieser Form von $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ und der entsprechenden Temperaturableitung vorkommenden Ausdrücke kann man berechnen (Abschnitt 7.1 und Abschnitt 7.2). Betrachtet man die Gültigkeit dieser beiden Näherungen (Anhang), so erkennt man, daß sie nur in Energiegebieten (hohe und niedrige Energien) berechtigt sind, die zum Dopplerkoeffizienten des zur stehenden Reaktors keinen wesentlichen Beitrag liefern. Um den Dopplerkoeffizienten richtig berechnen zu können, ist es wichtig, eine Methode zu entwickeln, die in dem Zwischenbereich, der den Hauptbeitrag zum Dopplerkoeffizienten liefert, gültig ist. Eine solche

Methode wird im folgenden hergeleitet.

Bei hohen Energien geht sie in die entsprechende Näherungsform 5.3.11 über, während sie bei niedrigen Energien versagt. Um den Beitrag des niederen Energiegebietes zum Dopplerkoeffizienten genauer zu berechnen, müßte man dort die erste angegebene Näherung benutzen. In dieser Arbeit wurde diese genauere Berechnung des Beitrags der niederenergetischen Resonanzen zum Dopplerkoeffizienten nicht durchgeführt, da, wie erwähnt, dieses Energiegebiet nicht den wesentlichen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten der zur Diskussion stehenden Reaktoren liefert.

6. Genauere Berechnung der Reaktionsratenverhältnisse in dem für den Dopplerkoeffizienten maßgebenden Energiegebiet

6.1 Ziel der folgenden Reihenentwicklungen

Die im folgenden entwickelte Methode beruht darauf, daß die Reaktionsratenverhältnisse $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ und deren Temperaturableitungen auf die berechenbaren Größen $\left\langle \mu_z \mu_c \right\rangle$ und auf Integrale über Ausdrücke, die J , $\frac{dJ}{d\theta}$ und $\frac{dJ}{d\beta}$ enthalten, zurückgeführt werden, Dies ist deshalb möglich, weil es gelingt, $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ so umzuschreiben, daß im Nenner nur noch Resonanzen einer Serie stehen. Da man weiß, daß sich die Resonanzen einer Serie gegenseitig "abstoßen", (Gleichung 3.3.2, 3.3.3) kann man diese Resonanzen getrennt behandeln und ihre gegenseitige Wechselwirkung mit einem Korrekturglied berücksichtigen.

Ausgenutzt wird die Tatsache, daß bei den in Frage kommenden Reaktoren im totalen Wirkungsquerschnitt nur die Resonanzen der ersten Serie (U^{238} , $l = 0$, $J = \frac{1}{2}$) wesentlich über den Mittelwert des totalen Wirkungsquerschnittes herausragen. (Bei niedrigen Energien ragen auch Resonanzen anderer Serien stark über diesen Mittelwert heraus. Deshalb versagt dort die folgende Ableitung.) Es wird angenommen, daß

$$6.1.1 \quad \left| \frac{\sum_{s \neq 1} (\mu_c^s - \langle \mu_c^s \rangle)}{\mu_p + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle} \right| \ll 1 \quad \text{ist.}$$

($s=1$ entspricht der $l=0$ Serie in U^{238} .)

Man könnte mit dieser Annahme eine Entwicklung ähnlich wie bei der zweiten angegebenen Näherung durchführen.

Aus

$$6.1.2 \quad \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \left\langle \frac{\sum_r \mu_z^r}{\left[\mu_p + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle \right] \left[1 - \frac{\sum_{s \neq 1} (\mu_c^s - \langle \mu_c^s \rangle)}{\mu_p + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle} \right]} \right\rangle$$

ergäbe sich dann

$$6.1.3 \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \left\langle \frac{\frac{\sum \mu_z^r}{r}}{\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle} \right\rangle - \left\langle \frac{\frac{\sum \mu_z^r (\mu_c^s - \langle \mu_c^s \rangle)}{r \sum_{s \neq 1}}}{(\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle)^2} \right\rangle$$

Die Berechnung der Temperaturableitungen von $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ ist aber nur noch in 0-ter Näherung ohne größeren Rechenaufwand möglich, da das zweite Glied auf der rechten Seite von 6.1.3 auf Ausdrücke mit schwerberechenbaren Funktionen führt. Einen relativ einfachen Ausdruck erhält man dagegen für das erste Glied von Gleichung 6.1.3 unter Berücksichtigung von Gleichung 5.2.4.

$$6.1.4 \left\langle \frac{\frac{\sum \mu_z^r}{r}}{\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle} \right\rangle = \left\langle \frac{\mu_z^{(1)}}{\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle} \right\rangle + \sum_{r \neq 1} \langle \mu_z^r \rangle \left\langle \frac{1}{\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle} \right\rangle$$

Die Berechnung von $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ in 0-ter Näherung allein bedeutet, daß der Dopplerkoeffizient nur von der Temperaturverbreiterung der Serie $s=1$ bestimmt wird. ($\sum_{r \neq 1} \langle \mu_z^r \rangle$ ist nach Abschnitt 7.1 nicht temperaturabhängig.)

Um aus technischen Gründen dennoch nur mit einer Form, die der 0-ten Näherung ähnlich ist, rechnen zu können, wird $\frac{1}{\mu_t}$ anstatt

$$\text{um } \frac{1}{\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle} \quad \text{um } \frac{1}{\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + C'}$$

C' wird dann so bestimmt, daß das erste Entwicklungsglied verschwindet.

6.2 Entwicklung von $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ in einen berechenbaren Ausdruck

Analog Gleichung 6.1.3 ist:

$$6.2.1 \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + C'} \right\rangle - \left\langle \frac{\mu_z \left(\sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C' \right)}{(\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + C')^2} \right\rangle$$

(μ_z setzt sich aus den Anteilen der verschiedenen Serien zusammen

$$6.2.2 \quad \mu_z = \sum_r \mu_z^r$$

Man kann jetzt ein einziges c so bestimmen, daß der gesamte Ausdruck

$$6.2.3 \quad \left\langle \frac{\sum_r \mu_z^r \left(\sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C' \right)}{(\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + C')^2} \right\rangle \text{ verschwindet,}$$

oder man bestimmt für jede Serie r ein C'_r so, daß jeder einzelne Summand

$$6.2.4 \quad \left\langle \frac{\mu_z^r \left(\sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C'_r \right)}{(\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + C'_r)^2} \right\rangle \text{ verschwindet.}$$

Vom Standpunkt der späteren numerischen Auswertung her ist es sinnvoll, einen Mittelweg zwischen diesen beiden Extremen einzuschlagen.

Es werden zwei C' bestimmt: Das erste C' sorgt dafür, daß der Summand der Form 6.2.4 für $r = 1$ verschwindet.

Es ergibt sich aus der Forderung

$$\left\langle \frac{\mu_z^{(1)} \left(\sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C'_1 \right)}{(\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + C'_1)^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\mu_z^{(1)}}{(\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + C'_1)^2} \right\rangle \left\langle \sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C'_1 \right\rangle = 0$$

$$6.2.5 \quad C'_1 = \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle$$

Im folgenden wird die Abkürzung

$$6.2.6 \quad \mu_p^{\text{eff}} = \mu_p^+ + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle \text{ benutzt, Mit dieser Abkürzung ist}$$

$$6.2.7 \quad C'_1 = \mu_p^{\text{eff}} - \mu_p^+$$

Das zweite C'_2 soll dafür sorgen, daß der Rest des 2. Gliedes der Gleichung 6.2.1 verschwindet.

$$6.2.8 \quad \left\langle \sum_{r \neq 1} \mu_z^r \left(\sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C'_2 \right) \frac{1}{(\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + C'_2)^2} \right\rangle = 0$$

Wegen Gleichung 5.2.4 ist dann:

$$6.2.9 \quad \left\langle \sum_{r \neq 1} \sum_{s \neq 1} (\mu_z^r \mu_c^r - C'_2 \mu_z^r) \right\rangle = 0$$

Daraus folgt dann

$$6.2.10 \quad C'_2 = \frac{\sum_{r \neq 1} \sum_{s \neq 1} \langle \mu_z^r \mu_c^r \rangle}{\sum_{r \neq 1} \langle \mu_z^r \rangle} = \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle + \frac{\sum_{s \neq 1} (\langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle - \langle \mu_z^s \rangle \langle \mu_c^s \rangle)}{\sum_{r \neq 1} \langle \mu_z^r \rangle}$$

Entsprechend der Definition 6.2.6 wird ein μ_{pz}^{EFF} definiert.

$$6.2.11 \quad \mu_{pz}^{EFF} = \mu_p^{eff} + \frac{\sum_{s \neq 1} (\langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle - \langle \mu_z^s \rangle \langle \mu_c^s \rangle)}{\sum_{r \neq 1} \langle \mu_z^r \rangle}$$

Es ist also unter Berücksichtigung von Gleichung 5.3.4

$$6.2.12 \quad \left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle = \left\langle \frac{\mu_z^{(1)}}{\mu_p^{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle + \sum_{r \neq 1} \langle \mu_z^r \rangle \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$$

Nach den Abschätzungen im Anhang sind die Entwicklungen von $\frac{1}{\mu_t}$ um $\frac{1}{\mu_p + \mu_c^{(1)} + C'}$ in dem für den Dopplereffekt wichtigen Gebiet für

$C' = C'_1$ und $C' = C'_2$ erlaubt.

6.3 Entwicklung von $\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle$ in einen berechenbaren Ausdruck

Auf ähnliche Weise, wie in Abschnitt 6.2 kann man den in Gleichung

4.2c.14 benötigten Ausdruck $\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle$ entwickeln. Es ist

$$6.3.1 \quad \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_p + \mu_c^{(1)} + C'} \right\rangle - \left\langle \frac{\sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C'}{(\mu_p + \mu_c^{(1)} + C')^2} \right\rangle$$

Das letzte Glied der Gleichung 6.3.1 kann man nach Gleichung 5.3.4 vereinfachen.

$$6.3.2 \quad \left\langle \left(\sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C' \right) \left(\frac{1}{(\mu_p + \mu_c^{(1)} + C')^2} \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{s \neq 1} \mu_c^s - C' \right\rangle \left\langle \frac{1}{(\mu_p + \mu_c^{(1)} + C')^2} \right\rangle$$

Hieraus erkennt man, daß dieses Glied verschwindet, wenn

$$6.3.3 \quad C' = \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle$$

ist. Also ist

$$6.3.4 \quad \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_p^+ + \mu_c^{(1)} + \sum_{s \neq 1} \langle \mu_c^s \rangle} \right\rangle$$

Mit der Abkürzung μ_p^{eff} ist dann

$$6.3.5 \quad \left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$$

6.4 Vereinfachte Form des Dopplerkoeffizienten

Mit den entwickelten Formen von $\left\langle \frac{\mu_z}{\mu_t} \right\rangle$ und $\left\langle \frac{1}{\mu_t} \right\rangle$ erhält man aus Gleichung 4.2c.14 für den Dopplerkoeffizienten

$$6.4.1 \quad C = - \frac{1}{T \cdot \text{Norm}} \int \sum_i \frac{\phi_i^+ \phi_i}{\left\langle \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle_i} T \left\{ \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu^{(1)}}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle_i + \right. \\ \left. + \sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_r^r \right\rangle_i \left\langle \frac{1}{\mu_{p\gamma}^{\text{EFF}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle_i \right\} + (1 - \nu_{\phi_i^+}^{\frac{W_H}{\phi_i^+}}) \sum_{r=4}^8 \left\langle \mu_r^r \right\rangle_i \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{pf}^{\text{EFF}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle_i \Bigg\} dV$$

Hierbei sind die Ausdrücke

$$6.4.2 \quad \mu_{pi}^{\text{eff}} = \mu_{pi}^* + \sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_c^r \right\rangle_i$$

und

$$6.4.3 \quad \mu_{pzi}^{\text{EFF}} = \mu_{pi}^{\text{eff}} + \frac{\sum_{s=2}^8 \left(\left\langle \mu_z^s \mu_c^s \right\rangle_i - \left\langle \mu_z^s \right\rangle_i \left\langle \mu_c^s \right\rangle_i \right)}{\sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_z^r \right\rangle_i}$$

innerhalb eines Intervalls als konstant in Bezug auf die Energie anzusehen.

Der Unterschied zwischen den Formen für den Dopplerkoeffizienten 4.2c.14 und 6.4.1 ist der, daß bei Gleichung 6.4.1 in den Nennern der zu ermit-

telnden Ausdrücke nur noch die Resonanzen der ersten Serie enthalten sind, während in Gleichung 4.2c.14 an entsprechender Stelle die Resonanzen aller Serien stehen. Wie bereits erwähnt, ist aus diesem Grunde in Gleichung 6.4.1 eine Berechnung der Mittelwerte möglich.

Aus der Form 6.4.1 für den Dopplerkoeffizienten erkennt man deutlich den Einfluß der Wechselwirkung zwischen den Resonanzen verschiedener Serien auf den Dopplerkoeffizienten. Das erste Glied in der geschweiften Klammer wird nur durch die Temperaturabhängigkeit von $\mu_{\gamma}^{(1)}$ und $\mu_c^{(1)}$ (also Größen, die zur ersten Serie gehören) bestimmt. Ein solches Glied trat in den bisherigen Rechnungen auch auf und kann als der Beitrag zum Dopplerkoeffizienten betrachtet werden, der durch die Selbstabschirmung der ersten Serie hervorgerufen wird. Im zweiten Glied treten Ableitungen von $\mu_c^{(1)}$ und $\mu_{p\gamma}^{EFF}$ nach der Temperatur auf:

$$6.4.4 \quad T \frac{d}{dT} \sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_{\gamma}^r \right\rangle \left\langle \frac{1}{\mu_{p\gamma}^{EFF} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = - \sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_{\gamma}^r \right\rangle \left\langle \frac{+T \frac{d}{dT} \mu_{p\gamma}^{EFF} + T \frac{d}{dT} \mu_c^{(1)}}{(\mu_{p\gamma}^{EFF} + \mu_c^{(1)})^2} \right\rangle$$

Da in $\mu_{p\gamma}^{EFF}$ nur $\left\langle \mu_{\gamma}^s \mu_c^s \right\rangle$ von der Temperatur abhängt, ist unter Berücksichtigung von 5.2.4

$$6.4.5 \quad T \frac{d}{dT} \sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_{\gamma}^r \right\rangle \left\langle \frac{1}{\mu_{p\gamma}^{EFF} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = - \left\langle \frac{1}{(\mu_{p\gamma}^{EFF} + \mu_c^{(1)})^2} \right\rangle T \frac{d}{dT} \sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_{\gamma}^s \mu_c^s \right\rangle - \sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_{\gamma}^r \right\rangle \left\langle \frac{T \frac{d}{dT} \mu_c^{(1)}}{\mu_{p\gamma}^{EFF} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung kann man als den Beitrag zum Dopplerkoeffizienten, der durch die Selbstabschirmung der Serien 2 bis 8 hervorgerufen wird, interpretieren. Ein ähnliches Glied, nämlich $-T \frac{d}{dT} \sum_{r=2}^8 \left\langle \mu_{\gamma}^s \mu_c^s \right\rangle \frac{1}{\langle \mu_t \rangle^2}$ wurde in den bisherigen Rechnungen auch berücksichtigt. Neu ist das letzte Glied der Gleichung 6.4.5. Man kann es als das Glied, das den Wechselwirkungsbeitrag der

ersten Serie mit allen anderen Serien beschreibt, auffassen. Im Extremfall von konstantem

$$\mu_{\gamma}^r(r=1) \text{ ist } \mu_{p\gamma}^{\text{EFF}} = \mu_p^{\text{eff}} \text{ und}$$

$\left\langle \frac{\sum_{r=2}^8 \mu_{\gamma}^r}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$ gibt das Reaktionsverhältnis der Reaktionen vom Typ (n_{γ})

in den Serien 2 bis 8 zu den gesamten Reaktionen an.

Der Ausdruck

$$6.4.6 \quad T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\sum_{r=2}^8 \mu_{\gamma}^r}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = - \sum_{r=2}^8 \mu_{\gamma}^r \left\langle \frac{T \frac{d}{dT} \mu_c^{(1)}}{(\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)})^2} \right\rangle$$

beschreibt die Änderung des entsprechenden Reaktionsverhältnisses mit der Temperatur. Das zweite Glied in Gleichung 6.4.5 berücksichtigt also die Tatsache, daß die entsprechenden Reaktionsverhältnisse der Serien 2 bis 8 sich in Folge einer Reaktionsratenänderung der ersten Serie ändern. Analog der Erklärung für das zweite Glied von 6.4.1 kann man auch das dritte Glied dieser Gleichung erklären.

Bevor die Mittelwerte

$$\left\langle \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle, \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{\text{EFF}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle \text{ und } \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_{\gamma}^{(1)}}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$$

bestimmt werden, werden die aus früheren Arbeiten bekannten Ausdrücke für $\langle \mu_z^s \rangle$ und $\langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle$ näher untersucht¹⁸⁾.

7. Beschreibung der für die Berechnung des Dopplerkoeffizienten
wichtigen Mittelwerte durch kernphysikalische Daten

7.1 Berechnung von $\langle \mu_z^s \rangle$

Nach Abschnitt 3.2 gilt

$$7.1.1 \quad \mu_z^s(E) = N^s \sum_k \sigma_{\text{ozk}}^s \psi_k^s$$

s kennzeichnet die Serien, k(s) kennzeichnet die Resonanzen der Serie s, und N^s ist die Atomzahldichte der Kerne, zu denen die Serie s gehört.

Um die Integration über ΔE zur Bestimmung von $\langle \mu_z^s \rangle$ durchzuführen, wird angenommen, daß nur wenige von den Resonanzen im Intervall ΔE wesentlich mit ihren Flanken über die Intervallgrenzen von ΔE hinausreichen. und daß im Mittel den aus dem Intervall laufenden Flankenanteilen gleich große in das Intervall hineinlaufende Flankenteile gegenüberstehen.

Unter dieser Annahme ist

$$7.1.2 \quad \langle \mu_z^s \rangle = \frac{1}{\Delta E} \int_0^{+\infty} N^s \sum_k \sigma_{\text{ozk}}^s \psi_k^s dE$$

Die Summe über k(s) erstreckt sich im folgenden immer nur über Resonanzen der Serie s im Intervall ΔE .

Formal kann man auch die Energieintegration von $-\infty$ bis $+\infty$ durchführen, denn der formale Beitrag der negativen Energien zum Gesamtintegral ist vernachlässigbar klein. Wegen

$$7.1.3 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^s dE = \pi \sqrt{\frac{k}{2}} \text{ ist dann}$$

$$7.1.4 \quad \langle \mu_z^s \rangle = \frac{1}{\Delta E} N^s \sum_{k(s)} \sigma_{\text{ozk}}^s \sqrt{\frac{k}{2}} \pi$$

Ist die Anzahl der Resonanzen einer Serie in ΔE genügend groß, so

kann man die Summanden $\overline{\delta_{ozk}}^s \Gamma_k^s$ durch ihren Mittelwert in Bezug auf Γ_n^s und Γ_f^s $\overline{\delta_{oz}}^s \Gamma_n^s \Gamma_f^s$ ersetzen.

$$7.1.5 \quad \langle \mu_z^s \rangle = \frac{\hbar}{2} N^s \frac{n^s}{\Delta E} \overline{\delta_{oz}}^s \Gamma_n^s \Gamma_f^s$$

Γ_n^s und Γ_f^s hinter dem Mittelungsstrich sollen andeuten, in Bezug auf welche Größen die Mittelung durchgeführt werden muß.

Hierbei ist n^s die mittlere Anzahl der Resonanzen der Serie s in ΔE . Ist \overline{D}^s der mittlere Abstand der Resonanzen der Serie s im Intervall ΔE , dann ist

$$7.1.6 \quad n^s = \frac{\Delta E}{\overline{D}^s}$$

Unter Berücksichtigung von 3.2.5 erhält man

$$7.1.7 \quad \langle \mu_z^s \rangle = 2 \hbar^2 N^s \frac{(\lambda^s)^2 g^s}{\overline{D}^s} \frac{\Gamma_n \Gamma_z}{\Gamma} \Gamma_n^s \Gamma_f^s$$

Benutzt man die in Abschnitt 3.3 definierten Verteilungsfunktionen, dann ist allgemein

$$7.1.8 \quad \left(\frac{\Gamma_n \Gamma_z}{\Gamma} \right) \Gamma_n^s \Gamma_f^s = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Gamma_n \Gamma_z}{\Gamma} F_n^s(\Gamma_n) \cdot F_f^s(\Gamma_f) d\Gamma_n d\Gamma_f$$

Ist s eine Serie eines nicht spaltbaren Materials, dann entfällt die Integration über Γ_f und die Integration über Γ_n läßt sich analytisch durchführen (Dresner⁶⁾).

Im allgemeinen Fall für beliebige Freiheitsgrade ν_n und ν_f für χ^2 -Verteilungen F_n und F_f läßt sich aber immer das Doppelintegral in ein Einfachintegral umwandeln und dann verhältnismäßig leicht numerisch auswerten. In der Literatur schreibt man gewöhnlich Gleichung 7.1.7 in Form

$$7.1.9 \quad \langle \mu_z^S \rangle = 2 \pi^2 N^2 \frac{(\lambda^S)^2 g^S}{D^S} \frac{\overline{\Gamma_n^S \Gamma_z^S}}{\overline{\Gamma^S}} S_z^S$$

mit

$$7.1.10 \quad S_z^S = \frac{\frac{\overline{\Gamma_n \Gamma_z}}{\Gamma} \Gamma_n^S \Gamma_f^S}{\frac{\overline{\Gamma_n^S \Gamma_z^S}}{\overline{\Gamma^S}}}$$

Entsprechend ist eine später auftretende Größe definiert

$$7.1.11 \quad R_z^S = \frac{\frac{\overline{\Gamma_n \Gamma_z}}{\Gamma} \Gamma_n^S \Gamma_f^S}{\frac{(\overline{\Gamma_n^S})^2 \overline{\Gamma_z^S}}{\overline{\Gamma^S}}}$$

Berechnungsmethoden zur Berechnung von S_z^S und R_z^S hat Dresner⁶⁾ angegeben. Bei dieser Berechnungsweise von $\langle \mu_z^S \rangle$ muß vorausgesetzt werden, daß die Energieintervalle, in denen die angegebenen Größen durch ihre Mittelwerte ersetzt werden, so klein sind, daß die bekannten Energieabhängigkeiten von λ^S , Γ_n^S und Γ_f^S vernachlässigt werden können. Auf Grund der Überlegungen von Abschnitt 4.1 darf man mit dieser Voraussetzung rechnen.

7.2 Berechnung von $\langle \mu_z^S \mu_c^S \rangle$ und $\frac{d}{dT} \langle \mu_z^S \mu_c^S \rangle$

Es ist

$$7.2.1 \quad \langle \mu_z^S \mu_c^S \rangle = (N^S)^2 \langle \sigma_z^S \sigma_c^S \rangle$$

Mit 3.2.23 und 3.2.24 erhält man

$$7.2.2 \quad \langle \sigma_z^S \sigma_c^S \rangle = \frac{1}{\Delta E} \sum_k \sum_{k'} \int_{\Delta E} \sigma_{ozk}^S \psi_k^S(E_k - E) \sigma_{ock}^S \psi_{k'}^S(E_{k'} - E) dE$$

Führt man den Resonanzabstand $D_{k',k} = E_{k'} - E_k$ ein, dann ist

$$7.2.3 \quad \langle \tilde{\sigma}_z^s \tilde{\sigma}_c^s \rangle = \frac{1}{\Delta E} \sum_k \sum_{k' \neq k} \int_{\Delta E} \tilde{\sigma}_{ozk}^s \psi_k^s(E_k - E) \tilde{\sigma}_{ock}^s \psi_{k'}^s(D_{k',k} + E_k - E) dE$$

Mit der exakten ψ -Funktion treten bei der Berechnung der Integrale in Gleichung 7.2.3 erhebliche Schwierigkeiten auf. Nach Dresner⁶⁾ kann man aber gut die ψ -Funktion durch folgende Näherung darstellen

$$7.2.4 \quad \psi_k^s(E_k^s - E) = \frac{\sqrt{\Gamma_k}}{2} \frac{\Gamma_k^s}{\Delta} \exp\left\{-\frac{(E_k^s - E)^2}{\Delta^2}\right\}^{*})$$

Aus Gleichung 7.2.3 ergibt sich mit dieser Näherung

$$7.2.5 \quad \langle \tilde{\sigma}_z^s \tilde{\sigma}_c^s \rangle = \frac{1}{\Delta E} \sum_k \sum_{k' \neq k} \tilde{\sigma}_{ozk}^s \Gamma_k^s \tilde{\sigma}_{ock}^s \Gamma_{k'}^s \frac{\pi}{2\Delta^2} \int_{\Delta E} \exp\left\{-\frac{(E_k^s - E)^2 + (D_{k',k} + E_k^s - E)^2}{\Delta^2}\right\} dE$$

Ersetzt man die Ausdrücke $\tilde{\sigma}_{ozk}^s \Gamma_k^s$, $\tilde{\sigma}_{ock}^s \Gamma_{k'}^s$ und $\tilde{\sigma}_{ozk}^s \tilde{\sigma}_{ock}^s \Gamma^2$ durch ihren Mittelwert, dann ist

$$7.2.6 \quad \langle \tilde{\sigma}_z \tilde{\sigma}_c \rangle = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{oz} \tilde{\sigma}_{oc}}{\tilde{\sigma}_{oz} \tilde{\sigma}_{oc}} \sum_{k' \neq k} e^{-\frac{D_{k',k}^2}{2\Delta^2} + \frac{D_{k',k}^2}{\tilde{\sigma}_{oz} \tilde{\sigma}_{oc} \Gamma^2}} \right) \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \frac{1}{\Delta \bar{D}}$$

In Gleichung 7.2.6 wurde berücksichtigt, daß $n = \frac{\Delta E}{D}$ Resonanzen der betreffenden Serie im Intervall ΔE liegen.

Außerdem wurde wiederum angenommen, daß der Beitrag der Resonanzflanken, die von außerhalb in das Intervall ΔE hineinlaufen, genau so groß ist, wie der Beitrag der Resonanzen in ΔE , deren Flanken aus ΔE hinauslaufen. Aus diesem Grunde wird die Integration über E nicht auf ΔE beschränkt. Es wird über die gesamte Ausdehnung der Resonanzen integriert, was mathematisch durch die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ berücksichtigt wird.

Der Fall $k = k'$ (zweites Glied in 7.2.6) mußte getrennt werden, da in diesem Fall $\tilde{\sigma}_{ozk}$ und $\tilde{\sigma}_{ock}$, nicht voneinander unabhängig sind.

*⁾ Da sich die Werte von Δ für Uran und Plutonium um weniger als 3 % unterscheiden, wird im folgenden mit einem mittleren Δ im Fall des Urans und Plutoniums gerechnet.

Ist $\Omega(D)dD$ die Häufigkeit, mit der Resonanzen der betreffenden Serie im Intervall dD im Abstand D von der Resonanz k dieser Serie auftreten, dann kann die Summe über k' in ein Integral verwandelt werden.

Es ist dann:

$$7.2.7a \quad \langle \zeta_z \zeta_c \rangle = \overline{\zeta_{oz}} \overline{\zeta_{oc}} \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \frac{1}{\Delta \bar{D}} \{E_{z+\varepsilon}\}$$

Mit

$$7.2.7b \quad E_z = \frac{\overline{\zeta_{oz} \zeta_{oc}^2}}{\overline{\zeta_{oz}} \overline{\zeta_{oc}}} = \frac{R_z}{S_z} \quad \text{und}$$

$$7.2.7c \quad \varepsilon = 2 \int_0^\infty \Omega(D) e^{-\frac{D^2}{2\Delta^2}} dD$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$7.2.8 \quad \langle \zeta_c \rangle = \frac{\bar{\pi}}{2\bar{D}} \overline{\zeta_{oc}} \quad \text{und} \quad \langle \zeta_z \rangle = \frac{\bar{\pi}}{2\bar{D}} \overline{\zeta_{oz}}$$

(Gleichung 7.1.5) ergibt sich

$$7.2.9 \quad \langle \zeta_z \zeta_c \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\bar{D}}{\Delta} \langle \zeta_z \rangle \langle \zeta_c \rangle \{E_{z+\varepsilon}\}$$

Im Rahmen der Näherung 7.2.4 ergibt sich für die Ableitung von 7.2.6 nach Δ

$$7.2.10 \quad \frac{d}{d\Delta} \langle \zeta_z \zeta_c \rangle = - \left(\overline{\zeta_{oz}} \overline{\zeta_{oc}} \sum_{k' \neq k} \left(1 - \frac{D_{k'k}^2}{2\Delta^2} \right) + \overline{\zeta_{oz} \zeta_{oc}^2} \right) \frac{\pi^{3/2}}{2^{5/2}} \frac{1}{\Delta^2 \bar{D}}$$

Definiert man

$$7.2.11 \quad e = 2 \int_0^\infty \Omega(D) e^{-\frac{D^2}{2\Delta^2}} \left(\frac{D^2}{\Delta^2} - 1 \right) dD,$$

so ergibt sich analog Gleichung 7.2.9

$$7.2.12 \quad T \frac{d}{dT} \langle \zeta_z \zeta_c \rangle = - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\bar{D}}{\Delta} \langle \zeta_z \rangle \langle \zeta_c \rangle \{E_{z-e}\}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß

7.2.13 $T \frac{d}{dT} \dots = \frac{1}{2} \Delta \frac{d}{d\Delta} \dots$ ist.

Die Integrale 7.2.7c und 7.2.11 können numerisch berechnet werden, wenn die Funktion $\Omega(D)$ berechenbar ist.

Im Abschnitt 3.4 ist eine analytische Form von $\Omega(D)$ abgeleitet worden unter Verwendung einer χ^2 -Verteilung mit geradem Freiheitsgrad ν .
(Gleichung 3.3.3)

7.3 Berechnung von $\left\langle \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$

Um eine der J-Funktion ähnliche Funktion zu erhalten, wird folgende Umformung durchgeführt:

7.3.1 $\left\langle \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}}} \left\langle \frac{\mu_p^{\text{eff}}}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} + \frac{\mu_c^{(1)}}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} - \frac{\mu_c^{(1)}}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$ oder

7.3.2 $\left\langle \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = \frac{1}{\mu_p^{\text{eff}}} \left(1 - \left\langle \frac{\mu_c^{(1)}}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle \right)$

Ersetzt man $\mu_c^{(1)}$ durch

7.3.3 $\mu_c^{(1)} = N^{(1)} \sum_{k'} G_{ock, \psi_{k'}}^{(1)}$,

dann erhält man

7.3.4 $\left\langle \frac{\mu_c^{(1)}}{\mu_p^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = N^{(1)} \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \int_{\Delta E} \frac{G_{ock, \psi_{k'}}^{(1)} dE}{\mu_p^{\text{eff}} + N^{(1)} \sum_{k \neq k'} G_{ock, \psi_k}^{(1)}}$

Die Resonanzen im Nenner gehören alle zu einer einzigen Serie. Da sich wegen 3.3.3 die Resonanzen einer Serie gegenseitig abstoßen, gilt in dem Energiegebiet, in dem $\psi_{k'}^{(1)}$ und damit der Integrand

$\frac{G_{ock, \psi_{k'}}^{(1)}}{\mu_p^{\text{eff}} + N^{(1)} \sum_{k \neq k'} G_{ock, \psi_k}^{(1)}}$ wesentlich von Null verschieden ist,

die Beziehung

7.3.5 $\mu_p^{\text{eff}} + N^{(1)} G_{ock, \psi_{k'}}^{(1)} \gg N^{(1)} \sum_{k \neq k'} G_{ock, \psi_k}^{(1)}$

Es ist daher folgende Entwicklung erlaubt:

$$7.3.6 \quad \left\langle \frac{\mu_c^{(1)}}{\mu_p^{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = \sum_{k'} \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} \frac{\Psi_{k'}^{(1)}}{\frac{\mu_p}{N^{(1)} \Gamma_{ock}^{(1)}} + \Psi_{k'}^{(1)}} dE -$$

$$- \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \sum_{k \neq k'} \int_{\Delta E} \frac{\Gamma_{ock}^{(1)} \Psi_k^{(1)} \Psi_{k'}^{(1)}}{\Gamma_{ock}^{(1)} \left(\frac{\mu_p}{N^{(1)} \Gamma_{ock}^{(1)}} + \Psi_{k'}^{(1)} \right)^2} dE$$

(Bei hohen Energien, bei denen sich auch die Resonanzen einer Serie stark überlappen, ist diese Entwicklung ebenfalls wegen Beziehung 5.3.8 möglich.) Das erste Glied beschreibt im wesentlichen den Einfluß jeder Resonanz auf sich selbst, während das zweite Glied die gegenseitige Beeinflussung der Resonanzen berücksichtigt. Nimmt man an, daß das Intervall ΔE genügend groß ist, dann gilt für das erste Glied der rechten Seite von Gleichung 7.3.6 (Ausdehnung der Energieintegration entsprechend Gleichung 7.1.2 bzw. 7.1.3)

$$7.3.7 \quad \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \int_{\Delta E} \frac{\Psi_{k'}}{\beta_{k'}^{eff} + \Psi_{k'}} dE = \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi_{k'}}{\beta_{k'}^{eff} + \Psi_{k'}} dE$$

Hierbei ist

$$7.3.8 \quad \beta_{k'}^{eff} = \frac{\mu_p^{eff}}{N^{(1)} \Gamma_{ock}^{(1)}}$$

Führt man die J-Funktion (Gleichung 5.2.3) ein, dann ist

$$7.3.9 \quad \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \int_{\Delta E} \frac{\Psi_{k'}}{\beta_{k'}^{eff} + \Psi_{k'}} dE = \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \Gamma_{k'} J(\beta_{k'}^{eff}, \theta_{k'})$$

Die Summe über k' ist nicht durchführbar, da die einzelnen Resonanzparameter nicht bekannt sind. Im Rahmen der Statistik kann man aber die Summanden $\Gamma_{k'} J(\beta_{k'}^{eff}, \theta_{k'})$ durch ihren Mittelwert

$$7.3.10 \quad \frac{\Gamma_n}{\Gamma J(\beta^{eff}, \theta)} = \int_0^{\infty} \Gamma J(\beta^{eff}, \theta) F_n(\Gamma_n) d\Gamma_n \quad \text{ersetzen.}$$

Da es sich bei den Mittelungen nur um Mittelungen über Größen der ersten Uranserie ($l=0, J=\frac{1}{2}$) handelt, tritt nur eine Mittelung über Γ_n auf. ($\Gamma_f=0$)

Die Anzahl der Resonanzen in ΔE über die die Summe sich erstreckt, ist

$$7.3.11 \quad n = \frac{\Delta E}{D}$$

Mit 7.3.10 und 7.3.11 ergibt sich aus 7.3.9

$$7.3.12 \quad \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \int_{\Delta E} \frac{\psi_{k'}}{R_{k'}^{\text{eff}} + \psi_{k'}} dE = \frac{1}{D^{(1)}} \overline{\Gamma_n^{(1)} J(R^{\text{eff}(1)}, \theta^{(1)})} \Gamma_n^{(1)}$$

Die exakte Berechnung des 2. Gliedes von Gleichung 7.3.6 erfordert einen großen rechentechnischen Aufwand. Da es die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Resonanzen beschreibt, liefert es nur bei höheren Energien, bei denen sich die Resonanzen stark überlappen, einen wesentlichen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten. Bei den getrennten Resonanzen im niederenergetischen Bereich verschwindet dieses 2. Glied. Es erscheint deshalb sinnvoll, eine Näherung einzuführen, mit der dieses Glied bei hohen Energien richtig beschrieben wird. Bei niederen Energien muß mit dieser Näherung das zweite Glied gegen Null gehen.

Die Tatsache, daß bei hohen Energien auch der gesamte Wirkungsquerschnitt der Resonanzen der ersten Serie nur wenig über den mittleren totalen Wirkungsquerschnitt hinausragt, kann für eine solche näherungsweise Berechnung dieses Gliedes benutzt werden. Für den Nenner des zweiten Gliedes gilt dann

$$7.3.13 \quad \sigma_{\text{ock}'} \left(\frac{\mu_p^{\text{eff}}}{N \sigma_{\text{ock}'}} + \psi_{k'} \right)^2 \approx \frac{1}{N^2 \sigma_{\text{ock}'}} \langle \mu_t \rangle^2$$

Dieser Nenner ist damit unabhängig von der Energie, und die Integration

$$\frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \sum_{k \neq k'} \int_{\Delta E} \sigma_{\text{ock}'} \sigma_{\text{ock}'} \psi_k \psi_{k'} dE$$

läßt sich wie in Abschnitt 7.2 durchführen. Es ergibt sich dann

$$7.3.14 \left\langle \frac{1}{\mu_p^{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = \frac{1}{\mu_p^{eff}} \left\{ 1 - \frac{1}{D^{(1)}} \frac{\Gamma_n^{(1)}}{\Gamma_n^{(1)} J(\beta_z^{eff}, \theta)} + \frac{D^{(1)} \langle \mu_c^{(1)} \rangle^2}{\sqrt{2\pi} \langle \mu_t \rangle^2} e\left(\frac{D^{(1)}}{\Delta}\right) \right\}$$

7.4 Berechnung von $T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle$

Den Ausdruck für $\left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle$ erhält man, indem man in Gleichung 7.3.14

μ_p^{eff} durch μ_{pz}^{EFF} und β_z^{eff} durch

$$7.4.1 \beta_z^{EFF} = \frac{\mu_{pz}^{EFF}}{N^{(1)} \delta_{oc}^{(1)}} \text{ ersetzt.}$$

Berücksichtigt man die Temperaturabhängigkeit von μ_{pz}^{EFF} , so erhält man nach einigen trivialen Umformungen

$$7.4.2 T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle = \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF}} \left\{ \frac{-1}{4\pi (\lambda^{(1)})^2 g^{(1)} \cos 2\delta^{(1)} D^{(1)} N^{(1)}} \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma_n} \frac{d}{d\beta} J(\beta_z^{EFF}, \theta) \right. \\ \left. - \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle T \frac{d}{dT} \mu_{pz}^{EFF} + \frac{D^{(1)}}{2\Delta \mu_{pz}^{EFF}} \left\{ \frac{1}{D^{(1)2}} \Gamma_n^2 \frac{d}{d\theta} J(\beta_z^{EFF}, \theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\langle \mu_c^{(1)} \rangle^2}{\langle \mu_t \rangle^2} e\left(\frac{D^{(1)}}{\Delta}\right) \right\} \right\}$$

Da nach Gleichung 6.2.11 $\frac{d}{dT} \mu_{pz}^{EFF} = \frac{1}{\sum_{r=2}^8 \mu_z^r} \frac{d}{dT} \sum_{r=2}^8 \langle \mu_z^r \mu_c^r \rangle$

ist, gilt

$$7.4.3 T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle = \frac{T \frac{d}{dT} \sum_{s=2}^8 \langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle}{\mu_{pz}^{EFF} \sum_{r=2}^8 \langle \mu_z^r \rangle} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{-1}{4\pi (\lambda^{(1)})^2 g^{(1)} \cos 2\delta^{(1)} D^{(1)} N^{(1)}} \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma_n} \frac{d}{d\beta} J(\beta_z^{EFF}, \theta) \right. \\ \left. - \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle \right\}$$

$$+ \frac{\overline{D^{(1)}}}{2\Delta\mu_{pz}^{EFF}} \left\{ \frac{1}{\overline{D^{(1)}}^2} \overline{\Gamma_z^2 \frac{d}{d\theta} J(\beta_z^{EFF}, \theta)} \Gamma_n^{-(1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\langle \mu_c^{(1)} \rangle^2}{\langle \mu_t \rangle^2} e\left(\frac{\overline{D^{(1)}}}{\Delta}\right) \right\}$$

7.5 Berechnung von $T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_z^{(1)}}{\mu_p^{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$

Analog Beziehung 7.3.6 ist

$$7.5.1 \left\langle \frac{\mu_z^{(1)}}{\mu_p^{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \int_{\Delta E} \frac{\sigma_{ozk'}}{\sigma_{ock'} \psi_{k'}} \psi_{k'} dE - \frac{1}{\Delta E} \sum_{k'} \sum_{k \neq k'} \int_{\Delta E} \frac{\sigma_{ozk'} \sigma_{ock'} \psi_{k'} \psi_k}{\sigma_{ock'} (\beta_{eff}^{eff} + \psi_{k'})^2} dE$$

Führt man die Mittelungen wie in Abschnitt 7.3 durch, dann erhält man

$$7.5.2 \left\langle \frac{\mu_z^{(1)}}{\mu_p^{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = \frac{\overline{\Gamma_z J(\beta^{eff}, \theta)} \Gamma_n^{(1)}}{\cos 2\delta^{(1)} \overline{D^{(1)}}} - \frac{\overline{D^{(1)}} \langle \mu_c^{(1)} \rangle \langle \mu_z^{(1)} \rangle}{\sqrt{2\pi} \Delta \langle \mu_t \rangle^2} e\left(\frac{\overline{D^{(1)}}}{\Delta}\right)$$

Entsprechend gilt für die Temperaturableitung

$$7.5.3 T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_z^{(1)}}{\mu_p^{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = - \frac{\overline{D^{(1)}}}{2\Delta} \left\{ \frac{1}{\overline{D^{(1)}} \cos 2\delta^{(1)}} \overline{\Gamma_z \frac{d}{d\theta} J(\beta^{eff}, \theta)} \Gamma_n^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\langle \mu_c^{(1)} \rangle \langle \mu_z^{(1)} \rangle}{\langle \mu_t \rangle^2} e\left(\frac{\overline{D^{(1)}}}{\Delta}\right) \right\}$$

Die Ausdrücke

$$\frac{\overline{\Gamma_z J(\beta^{eff}, \theta)} \Gamma_n^{(1)}}{\overline{\Gamma_z J(\beta^{eff}, \theta)} \Gamma_n^{(1)}}, \quad \frac{(\overline{\Gamma_z})^2 \frac{d}{d\beta} J(\beta_z^{EFF}, \theta^{(1)}) \Gamma_n^{(1)}}{\overline{\Gamma_z} \frac{d}{d\beta} J(\beta_z^{EFF}, \theta^{(1)})}, \quad \frac{\overline{\Gamma_z^2 \frac{d}{d\theta} J(\beta_z^{EFF}, \theta^{(1)})} \Gamma_n^{(1)}}{(\overline{\Gamma_z})^2 \frac{d}{d\theta} J(\beta_z^{EFF}, \theta^{(1)})}$$

und $\overline{\Gamma_z \frac{d}{d\theta} J(\beta^{eff}, \theta)} \Gamma_n^{(1)}$ werden totalnumerisch berechnet.

Die entsprechenden Werte von J , $\frac{d}{d\theta} J$ und $\frac{d}{d\beta} J$ werden aus der Tabelle von Bell et al.²⁵⁾ durch Interpolation entnommen, In Gebieten, die außerhalb der Tabelle liegen, werden die Näherungsformeln von Roe²²⁾ zur Berechnung der entsprechenden Werte benutzt.

8 Zusammenfassung der Formeln

Nach Gleichung 6.4.1 hat der Dopplerkoeffizient die Form:

$$8.1 \quad C = \frac{-1}{\text{Norm} \cdot T} \sum_i \phi_i \phi_i^+ \left\langle \left\langle T \frac{d\hat{\mu}}{dT} \right\rangle \right\rangle_i$$

Hierbei ist

$$8.2 \quad \left\langle \left\langle T \frac{d\hat{\mu}}{dT} \right\rangle \right\rangle_i = \left\langle \left\langle \frac{T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_{\gamma}^{(1)}}{\mu_p \text{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle + \sum_{r=2}^8 \langle \mu_{\gamma}^r \rangle T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{p\gamma}^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle + \left(1 + V_{\alpha} \frac{W_H}{\phi_i^+}\right) \sum_{r=4}^8 \langle \mu_f^r \rangle T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{p\gamma}^{\text{eff}} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\mu_p \text{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle} \right\rangle \right\rangle_i$$

Die Größen-Norm, ϕ_i und ϕ_i^+ werden einer Multigruppenrechnung entnommen.

Der Einfachheit halber wurde bei den Berechnungen $W_H = \phi_i^+$ gesetzt. Dadurch wird $T \frac{d\hat{\mu}}{dT}$ eine kontinuierliche Funktion der Energie.

Die Multigruppenwerte von $T \frac{d\hat{\mu}}{dT}$ werden wie die Multigruppenwirkungsquerschnitte

$$8.3 \quad \tilde{\mu}_{zi} = \frac{\int_{\Delta E_i} \mu_z(E) \phi'(E) dE}{\int_{\Delta E_i} \phi'(E) dE} \quad (\text{Abschnitt 4.1) bestimmt.}$$

$$8.4 \quad \left\langle \left\langle T \frac{d\hat{\mu}}{dT} \right\rangle \right\rangle_i = \frac{\int_{\Delta E_i} T \frac{d}{dT} \hat{\mu} \phi'(E) dE}{\int_{\Delta E_i} \phi'(E) dE}$$

Es ist nach Abschnitt 7.5

$$8.5 \quad T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu_{\gamma}^{(1)}}{\mu_p \text{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = - \frac{\overline{D^{(1)}}}{2\Delta} \left\{ \frac{1}{\overline{D^{(1)}} \cos 2\delta^{(1)}} \sqrt{\gamma^{(1)}} \sqrt{\frac{d}{dE} J(\beta^{\text{eff}}, \theta)} \sqrt{n^{(1)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\langle \mu_c^{(1)} \rangle \langle \mu_{\gamma}^{(1)} \rangle}{\langle \mu_t \rangle^2} e \left(\frac{\overline{D^{(1)}}}{\Delta} \right) \right\}$$

Nach Abschnitt 7.4 ist

$$8.6 \quad \sum_{r=2}^8 \langle \mu_z^r \rangle^T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = \left\{ T \frac{d}{dT} \sum_{s=2}^8 \langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle \left[\frac{\sqrt{n} \frac{d}{d\beta} J(\beta_z^{EFF}, \theta^{(1)}) \Gamma_n^{(1)}}{4\tilde{N}(\lambda^{(1)})^2 g^{(1)} \cos 2\delta^{(1)} D^{(1)} N^{(1)}} \right. \right. \\ \left. \left. - \left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle \right] + \sum_{r=2}^8 \langle \mu_z^r \rangle \frac{D^{(1)}}{2\Delta} \left[\frac{1}{D^{(1)2}} \sqrt{n} \frac{d}{d\theta} J(\beta_z^{EFF}, \theta) \Gamma_n^{(1)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle \mu_t \rangle^2} e\left(\frac{D^{(1)}}{\Delta}\right) \right] \right\} \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF}}$$

Nach Abschnitt 7.3 ist

$$8.7 \quad \left\langle \frac{1}{\mu_p^{eff} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle = \frac{1}{\mu_p^{eff}} \left\{ 1 - \frac{1}{D^{(1)}} \sqrt{J(\beta^{eff}, \theta)} \Gamma_n^{(1)} + \frac{D^{(1)} \langle \mu_c^{(1)} \rangle^2}{\sqrt{2\pi} \Delta \langle \mu_t \rangle^2} \varepsilon\left(\frac{D^{(1)}}{\Delta}\right) \right\}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für $\left\langle \frac{1}{\mu_{pz}^{EFF} + \mu_c^{(1)}} \right\rangle$ erhält man, indem man in

Ausdruck 8.7 μ_p^{eff} durch μ_{pz}^{EFF} und β^{eff} durch β_z^{EFF} ersetzt.

Bei den folgenden Gleichungen sind gegenüber den in der Arbeit abgeleiteten Gleichungen (Zahlen in der letzten Spalte) kleinere Umformungen vorgenommen worden. "z" steht für Reaktionen vom Typ (n, γ) und (n, f).

$$8.8 \quad \mu_p^{eff} = \mu_p^+ + \sum_{r=2}^8 \langle \mu_c^r \rangle \quad 6.2.6$$

$$8.9 \quad \mu_{pz}^{EFF} = \mu_p^{eff} + \frac{\sum_{s=2}^8 (\langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle - \langle \mu_z^s \rangle \langle \mu_c^s \rangle)}{\sum_{r=2}^8 \langle \mu_z^r \rangle} \quad 6.2.11$$

$$8.10 \quad \mu_p^* = \mu_p + \mu_{\text{Struktur res.}}$$

$$8.11 \quad \beta^{eff} = \frac{\mu_p^{eff} \Gamma^{(1)}}{4\tilde{N}^{(1)} (\lambda^{(1)})^2 g^{(1)} \Gamma_n^{(1)} \cos 2\delta_1^{(1)}} \quad \begin{matrix} 3.2.8, 3.2.22 \\ 7.3.8 \end{matrix}$$

$$8.12 \quad \beta_z^{EFF} = \beta^{eff} \frac{\mu_{pz}^{EFF}}{\mu_p^{eff}} \quad 7.4.1, 8.11$$

$$8.13 \quad \langle \mu_c^s \rangle = 2\pi^2 \cdot N^s \frac{(\lambda^s)^2 g^s \overline{\Gamma_n^s}}{D^s} \cos 2\delta_1^s \quad 7.2.8, 3.2.22$$

$$8.14 \quad \langle \mu_z^s \rangle = 2\pi^2 N^s \frac{(\lambda^s)^2 g^s \overline{\Gamma_n^s \Gamma_z^s}}{D^s \overline{\Gamma^s}} S_z^s \quad 7.1.9$$

$$8.15 \quad \langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta} \overline{D^s} \langle \mu_z^s \rangle \langle \mu_c^s \rangle \left\{ E_z^s + e \left(\frac{\overline{D^s}}{\Delta} \right) \right\} \quad 7.2.9$$

$$8.16 \quad T \frac{d}{dT} \langle \mu_z^s \mu_c^s \rangle = - \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \Delta} \overline{D^s} \langle \mu_z^s \rangle \langle \mu_c^s \rangle \left\{ E_z^s - e \left(\frac{\overline{D^s}}{\Delta} \right) \right\} \quad 7.2.12$$

$$8.17 \quad \overline{\Gamma} = \overline{\Gamma^s} + \overline{\Gamma_n^s} + \overline{\Gamma_f} \quad 3.2$$

$$8.18 \quad \overline{\Gamma_n^s} = S_1^s \overline{D_j^{os}} \sqrt{E} V_1^s \quad 3.3.4$$

$$8.19 \quad V_c = 1, \quad V_1^s = \frac{(R'^s)^2}{(R'^s)^2 + (\lambda^s)^2} \quad 3.3.5$$

$$8.20 \quad (\lambda^s)^2 = \frac{(\lambda_o^s)^2}{E} \quad 3.2.9b$$

$$8.21 \quad \overline{D^s} = \overline{D^{os}} \frac{(E_B^s + E)^2}{(E_B^s)^2} \exp \left\{ - \left(\sqrt{89,72(E_B^s - E)} - \sqrt{89,72 E_B^s} \right) \right\} \quad 3.3.1$$

$$8.22 \quad \theta^s = \frac{\overline{\Gamma^s}}{\Delta} \quad 3.2.17$$

$$8.23 \quad \Delta = \sqrt{4kT M^{-1} E m_N} \quad 3.2.16$$

$$8.24 \quad \delta^s = \frac{R'^s}{\lambda^s} - 1 \text{ arc tang } \frac{R'^s}{\lambda^s} \quad 3.2.5$$

$$8.25 \quad E_z^s = \frac{R_z^s}{S_z^s} \quad 7.2.7b$$

Folgende Integrale werden zur Berechnung des Dopplerkoeffizienten benötigt, sie werden alle total numerisch gelöst.

$$8.26 \quad \varepsilon\left(\frac{\bar{D}}{\Delta}\right) = 2 \int_0^{\infty} \Omega(x) \exp\left\{-\frac{\bar{D}^2}{2\Delta^2} x^2\right\} dx \quad 7.2.7c$$

$$8.27 \quad e\left(\frac{\bar{D}}{\Delta}\right) = 2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\bar{D}^2}{\Delta^2} x^2 - 1 \right\} \Omega(x) \exp\left\{-\frac{\bar{D}^2}{2\Delta^2} x^2\right\} dx \quad 7.2.11$$

Hierbei ist

$$8.28 \quad \Omega(x) = \sum_{\lambda=1}^5 \cos\left[\frac{2\pi\lambda x}{5} + 5x \sin \frac{2\pi\lambda x}{5}\right] \exp\left\{5x\left[\cos \frac{2\pi\lambda x}{5} - 1\right]\right\} \quad 3.4.15$$

Die Größen R_Z^S und S_Z^S (Abschnitt 7.1) können nach Dresner⁶⁾ in folgende Integrale übergeführt werden. (Der Freiheitsgrad der χ^2 -Verteilung für die Γ_n ist immer $\nu_n = 1$, und der Freiheitsgrad der χ^2 -Verteilung der Γ_f sei ν_f)

$$8.29 \quad R_f^S = 3 \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{s}{n}}}{\sqrt{\gamma}} + \frac{\sqrt{\frac{s}{f}}}{\sqrt{\gamma}}\right) \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{2\sqrt{\frac{s}{n}}x}{\sqrt{\gamma}}\right)^{-2,5} \left(1 + \frac{2\sqrt{\frac{s}{f}}x}{\nu_f \sqrt{\gamma}}\right)^{-\left(\frac{\nu_f}{2} + 1\right)} e^{-x} dx$$

$$8.30 \quad S_f^S = \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{s}{n}}}{\sqrt{\gamma}} + \frac{\sqrt{\frac{s}{f}}}{\sqrt{\gamma}}\right) \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{2\sqrt{\frac{s}{n}}x}{\sqrt{\gamma}}\right)^{-1,5} \left(1 + \frac{2\sqrt{\frac{s}{f}}x}{\nu_f \sqrt{\gamma}}\right)^{-\left(\frac{\nu_f}{2} + 1\right)} e^{-x} dx$$

$$8.31 \quad R_{\gamma}^S = 3 \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{s}{n}}}{\sqrt{\gamma}} + \frac{\sqrt{\frac{s}{f}}}{\sqrt{\gamma}}\right) \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{2\sqrt{\frac{s}{n}}x}{\sqrt{\gamma}}\right)^{-2,5} \left(1 + \frac{2\sqrt{\frac{s}{f}}x}{\nu_f \sqrt{\gamma}}\right)^{-\frac{\nu_f}{2}} e^{-x} dx$$

$$8.32 \quad S_{\gamma}^S = \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{s}{n}}}{\sqrt{\gamma}} + \frac{\sqrt{\frac{s}{f}}}{\sqrt{\gamma}}\right) \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{2\sqrt{\frac{s}{n}}x}{\sqrt{\gamma}}\right)^{-1,5} \left(1 + \frac{2\sqrt{\frac{s}{f}}x}{\nu_f \sqrt{\gamma}}\right)^{-\frac{\nu_f}{2}} e^{-x} dx$$

Zwischen den R_Z^S und S_Z^S bestehen die Beziehungen:

$$8.33 \quad \sqrt{\gamma}^S S_{\gamma}^S + \sqrt{\frac{s}{n}} R_{\gamma}^S + \sqrt{\frac{s}{f}} S_f^S = \sqrt{\gamma}^S + \sqrt{\frac{s}{n}} + \sqrt{\frac{s}{f}}$$

$$8.34 \quad -\nu_f \sqrt{\frac{s}{n}} R_{\gamma}^S + 3 \sqrt{\frac{s}{f}} S_f^S = \sqrt{\frac{s}{f}} R_f^S - \nu_f \sqrt{\frac{s}{n}} R_f^S$$

Im Fall von U^{238} lassen sich die R_{γ} und S_{γ} analytisch berechnen⁶⁾.

$$8.35 \quad S_y^s = \frac{\sqrt{\gamma^s + \bar{\Gamma}_n^s}}{\bar{\Gamma}_n^s} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\pi \bar{\Gamma}_n^s}{2 \Gamma_n^s}} e^{\frac{\Gamma_n^s}{2 \bar{\Gamma}_n^s}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\Gamma_n^s}{2 \bar{\Gamma}_n^s}}} e^{-y^2} dy \right) \right\}$$

$$8.36 \quad R_y^s = \frac{\sqrt{\gamma^s + \bar{\Gamma}_n^s} - \sqrt{\gamma^s} S_y^s}{\bar{\Gamma}_n^s}$$

Zur Berechnung der folgenden Integrale (Abschn. 7) wurde für die Rechenmaschine IBM 7070 ein Programm entwickelt, mit dem man die Werte $\frac{d}{d\theta} J(\beta, \theta)$, $\frac{d}{d\beta} J(\beta, \theta)$ und $J(\beta, \theta)$ schnell berechnen kann (Abschnitt 7).

$$8.37 \quad \overline{\Gamma \cdot J(\beta^{\text{eff}}, \theta)} = \int_0^{\infty} (\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n) J(c^{\text{eff}} \frac{\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n}{\bar{\Gamma}_n}, \frac{\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n}{\Delta}) F_n(\Gamma_n) d\Gamma_n$$

$$8.38 \quad \overline{\frac{\Gamma^2}{\bar{\Gamma}_n} \frac{d}{d\beta} J(\beta_z^{\text{EFF}}, \theta)} = \int_0^{\infty} \frac{(\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n)^2}{\bar{\Gamma}_n} \frac{d}{d\beta} J(c_z^{\text{EFF}} \frac{\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n}{\bar{\Gamma}_n}, \frac{\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n}{\Delta}) F_n(\Gamma_n) d\Gamma_n$$

$$8.39 \quad \overline{\Gamma^2 \frac{d}{d\theta} J(\beta_z^{\text{EFF}}, \theta)} = \int_0^{\infty} (\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n)^2 \frac{d}{d\theta} J(c_z^{\text{EFF}} \frac{\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n}{\bar{\Gamma}_n}, \frac{\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n}{\Delta}) F_n(\Gamma_n) d\Gamma_n$$

$$8.40 \quad \overline{\Gamma \frac{d}{d\theta} J(\beta^{\text{eff}}, \theta)} \bar{\Gamma}_n = \int_0^{\infty} (\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n) \frac{d}{d\theta} J(c^{\text{eff}} \frac{\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n}{\bar{\Gamma}_n}, \frac{\bar{\Gamma}_n + \Gamma_n}{\Delta}) F_n(\Gamma_n) d\Gamma_n$$

Hierbei ist

$$8.41 \quad c^{\text{eff}} = \frac{\mu_p^{\text{eff}}}{4\pi \lambda_g^2 \cos 2\delta_1} \quad \text{bzw.}$$

$$8.42 \quad c_z^{\text{EFF}} = c^{\text{eff}} \cdot \frac{\mu_{pz}^{\text{EFF}}}{\mu_p^{\text{eff}}} \quad \text{und}$$

$$8.43 \quad F_n(\Gamma_n) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \bar{\Gamma}_n} \left(\frac{\Gamma_n}{2\bar{\Gamma}_n} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{\Gamma_n}{2\bar{\Gamma}_n} \right\}$$

Da es sich in den letzten acht Gleichungen bei den in Bezug auf die Serien indizierten Größen nur um Größen der ersten Serie handelt, wurde der Serienindex 1 in diesen Gleichungen weggelassen.

9. Ergebnisse

9.1 Vergleich mit früheren Arbeiten

Die Diskussion der Ergebnisse wird in Form eines Vergleichs mit früheren Dopplerkoeffizientberechnungen durchgeführt. Da man am totalen Dopplerkoeffizienten die Unterschiede schlecht erklären kann, wird die in Abschnitt 8 definierte Temperaturableitung eines gedachten Absorptionswirkungsquerschnittes $\frac{d\hat{\mu}}{dT}$ zum Vergleich herangezogen.

Zunächst wird die gegenseitige Abschirmung der Resonanzen innerhalb einer Serie untersucht. Diese Wechselwirkung spielt nur bei höheren Energien eine Rolle. Dort ist aber die Näherung $\left| \frac{\sum_s (\langle \mu_c^s \rangle - \mu_c^s)}{\mu_t} \right| \ll 1$ aus Abschnitt 5.3 gültig.

Mit dieser Näherung erhält man

$$9.1 \quad \frac{d\mu}{dT} = \frac{-1}{2\langle \mu_t \rangle \sqrt{\frac{2 k T m_N}{M}} T^{3/2}} \sum_s \overline{D^s} \langle \mu_c^s \rangle \left\{ \langle \mu_g^s \rangle (E_g^s - e(\frac{D^s}{\Delta})) - \langle \mu_f^s \rangle (\nu_0 - 1) (E_f^s - e(\frac{D^s}{\Delta})) \right\}$$

In der Standardarbeit von Nicholson¹⁸⁾ wurde der Wert von $e(\frac{D^s}{\Delta})$ nur grob abgeschätzt und temperaturunabhängig angenommen. Dadurch entstand die Meinung, daß $\frac{d\hat{\mu}}{dT}$ und damit der Beitrag zum Dopplerkoeffizienten, der aus dem Energiegebiet herkommt, in dem die Gleichung 9.1 gültig ist, proportional zu $T^{-3/2}$ ist. In Abbildung 4 sind die Größen konstant $\frac{d\hat{\mu}}{dT} \cdot T^{3/2}$ für die erste Uranserie als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Energien aufgetragen, wie sie mit der in dieser Arbeit entwickelten Methode berechnet wurde. Man erkennt deutlich, daß selbst bei 100 KeV $\frac{d\hat{\mu}}{dT}$ noch nicht proportional zu $T^{-3/2}$ ist. Erst bei sehr viel höheren Energien, die aber keinen Beitrag zum Dopplerkoeffizienten liefern, wird $\frac{d\hat{\mu}}{dT} \sim T^{-3/2}$.

Um den Einfluß der "Wechselwirkung" zwischen den verschiedenen Serien auf den Dopplerkoeffizienten zu untersuchen, wird $\frac{d\hat{\mu}}{dT}$ in zwei Summanden aufgeteilt.

$$9.2 \quad \frac{d\hat{\mu}}{dT} = \frac{d\hat{\mu}}{dT} \Big|_U + \frac{d\hat{\mu}}{dT} \Big|_{Pu}$$

Hierbei ist

$$9.3 \quad \frac{d\hat{\mu}}{dT} \Big|_U = \frac{T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{\mu^{(1)}}{\mu_p^{eff} + \mu_c} \right\rangle + \sum_{r=2}^3 \langle \mu^r \rangle T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{p\gamma}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle}{T \left\langle \frac{1}{\mu_p^{eff} + \mu_c} \right\rangle}$$

$$9.4 \quad \frac{d\hat{\mu}}{dT} \Big|_{Pu} = \frac{\sum_{r=4}^8 \langle \mu^r \rangle T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{p\gamma}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle + (1 - V_o) \langle \mu^r \rangle T \frac{d}{dT} \left\langle \frac{1}{\mu_{pf}^{EFF} + \mu_c} \right\rangle}{T \left\langle \frac{1}{\mu_p^{eff} + \mu_c} \right\rangle}$$

Nach Abschnitt 4.2c ist eine Aufspaltung des Dopplerkoeffizienten in einen Teil, der vom Uran herrührt und in einen Teil, der von Plutonium herrührt, nicht mehr eindeutig. Die hier eingeführte Aufspaltung wurde so, wie in früheren Dopplerkoeffizientberechnungen, durchgeführt.

Dadurch wird ein Vergleich mit diesen Arbeiten möglich gemacht.

In Abbildung 5 und 6 sind diese beiden Summanden 9.3 und 9.4 aufgetragen. Die strich-punktierten Kurven geben die Werte an, die man nach den älteren Methoden erhalten würde.

Im Fall des Urans (Abbildung 5) gab es bisher keine einheitliche Berechnungsmethode. Die angegebenen zwei Kurven stellen die Ergebnisse dar, die man mit den beiden in Abschnitt 5.2 angedeuteten Näherungsmethoden erhält. Man erkennt deutlich, daß bei hohen und niedrigen Energien die genauere Form von $\frac{d\hat{\mu}}{dT}$ mit der alten Berechnungsmethode gut beschrieben werden kann. Im Energiegebiet von 20 KeV beschreibt aber keine der früheren Berechnungsmethoden die Ergebnisse genau.

Noch größere Unterschiede als beim "Beitrag" des Urans zum Dopplerkoeffizienten erhält man beim Vergleich der Ergebnisse für Plutonium.

Da für das Plutonium in dem diskutierten Energiegebiet die Abschätzung

$\left| \frac{\sum_{s=4}^8 (\mu_s^c - \langle \mu_c^s \rangle)}{\langle \mu_t \rangle} \right| \ll 1$ gilt, kann man mit der alten Näherungsmethode für das hochenergetische Gebiet (Abschnitt 5.2) $\left. \frac{d\hat{\mu}}{dT} \right|_{\text{Pu}}$ berechnen. Man erhält so zwar eine einzige Kurve für das gesamte Energiegebiet, diese weicht aber erheblich von den Ergebnissen dieser Arbeit ab.

In Abbildung 6 sieht man, daß sich sogar das Vorzeichen von $\left. \frac{d\hat{\mu}}{dT} \right|_{\text{Pu}}$ im Gegensatz zu der älteren Berechnungsmethode ändert. Dieser Vorzeichenwechsel wird durch das letzte Glied in Gleichung 6.4.5 hervorgerufen, das die bisher vernachlässigte "Wechselwirkung" zwischen der ersten Uranserie und allen anderen Serien beschreibt.

Bei den zur Diskussion stehenden schnellen Reaktoren ist jedoch der gesamte Beitrag von $\left. \frac{d\hat{\mu}}{dT} \right|_{\text{Pu}}$ zum Dopplerkoeffizienten immer positiv. Der Einfluß der Wechselwirkung zwischen der ersten Uranserie und den Plutoniumserien macht sich nur in einer Verkleinerung des Beitrags von $\left. \frac{d\hat{\mu}}{dT} \right|_{\text{Pu}}$ (im Vergleich zu den bisherigen Rechnungen) bemerkbar. Ein über das bisher Gesagte hinaus gehender Vergleich ist in Vorbereitung.

9.2 Dopplerkoeffizienten spezieller Systeme

Zum Schluß sollen die Dopplerkoeffizienten von 2 Reaktoren, die nach der in dieser Arbeit beschriebenen Methode berechnet wurden, angegeben werden.

1. Reaktor

Zusammensetzung:	$\text{Pu}^{239}\text{O}_2$	5 %	(Volumenprozent)
	U^{238}O_2	25 %	
	Na	40 %	

Strukturmaterial 30 %

Die Reaktortemperatur wurde konstant angenommen ($T = 900^{\circ}\text{K}$).

Es ergibt sich bei einer gleichmäßigen Aufheizung des Reaktors ein Dopplerkoeffizient von

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dT} k = C = -2,1 \cdot 10^{-6} (\text{°K})^{-1} .$$

2. Reaktor

Zusammensetzung:	Pu ²³⁹ O ₂	3,75 %	(Volumenprozent)
	U ²³⁸ O ₂	26,25 %	
	Na	40 %	
	Strukturmaterial	30 %	

Bei einer konstanten Reaktortemperatur von $T = 900^{\circ}\text{K}$ ergibt sich bei einer gleichmäßigen Aufheizung des Reaktors ein Dopplerkoeffizient von

$$C = -5,2 \cdot 10^{-6} (\text{°K})^{-1}$$

Die beiden Annahmen, daß die Reaktortemperatur ortsunabhängig und die Aufheizung an jedem Reaktorpunkt gleich sei, sind sehr unrealistisch. Die Umrechnung auf ortsabhängige Temperaturverteilungen ist auch durchgeführt worden. Sie wird aber an dieser Stelle nicht näher erläutert, da diese Rechnung außerhalb des Rahmens dieser Arbeit liegt.

Die erstaunlich große Differenz zwischen den Dopplerkoeffizienten der beiden angegebenen Reaktoren, die sich sehr ähnlich sind, wird durch eine Verschiebung des Flußspektrums im Fall des zweiten Reaktors zu niedrigeren Energien hier verursacht. (Da der zweite Reaktor wesentlich weniger Plutonium enthält, besteht für die Neutronen eine größere Wahrscheinlichkeit, in das Gebiet niedrigerer Energien zu gelangen.) Die $\frac{d\hat{\mu}}{dT}$ beider Reaktoren unterscheiden sich fast im ganzen Energiegebiet um weniger als 15 %.

9.3 Genauigkeit von Dopplerkoeffizientberechnungen

In den Dopplerkoeffizientberechnungen sind drei wesentliche Fehlerquellen enthalten.

1. Fehler in der Berechnung des "mikroskopischen homogenen" Dopplerkoeffizienten $\left(\frac{d\hat{\nu}}{dT}\right)$.
2. Fehler in der Berechnung des makroskopischen Dopplerkoeffizienten, die von den Multigruppenflüssen verursacht werden $(\phi\phi^+)$.
3. Fehler der kernphysikalischen Gesetzmäßigkeiten und Daten (z.B. $\Gamma_\gamma, \Gamma_n, \Gamma_f, D_{iK}$)

Quantitative Aussagen über die einzelnen Beiträge sind schwer möglich.

Qualitativ kann man folgendes sagen:

Die Fehler, die in die Berechnung des "mikroskopischen homogenen" Dopplerkoeffizienten eingehen (Vernachlässigung der Heterogenitätseffekte, Benutzung der Gaußfunktionsnäherung für die ψ -Funktion, Vernachlässigung der Gittereigenschaften bei der Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung der Atome und die Annahme, daß die Plutoniumsresonanzen nur wenig über den mittleren totalen Wirkungsquerschnitt herausragen), sind sehr stark von dem speziellen Reaktor abhängig. Bei den zur Diskussion stehenden Reaktoren kann man auf Grund sehr grober Abschätzungen vermuten, daß diese Fehler kleiner als 10 % sind.

Die Fehler in der Berechnung des makroskopischen Dopplerkoeffizienten kann man nur bei sorgfältiger Flußberechnung klein halten.

Die Unsicherheiten in den kernphysikalischen Gesetzmäßigkeiten und Daten können mit den bis heute bekannten Ergebnissen Fehler bis zu ca. 20 % hervorrufen³¹⁾. Mit der Verbesserung der kernphysikalischen Meßergebnisse wird dieser Fehler in der nächsten Zeit sicher kleiner werden.

10. Benutzte Daten

Die im folgenden aufgeführten Daten sind einer Zusammenstellung von J.J. Schmidt²³⁾ entnommen:

	U ²³⁸			Pu ²³⁹					
l	0	1	1	0	0	1	1	1	
J	1/2	1/2	3/2	0	1	0	1	2	
g	1	1	2	0,25	0,75	0,25	0,75	1,25	
ν_f				1					
ν_n	1			1					
E_B	4,7			6,4					10^6 eV
$\overline{D^0}$	18,5	18,5	10,08	10,12	3,57	10,12	3,57	2,4	10^3 meV
$\overline{\Lambda^0}^2$	2,0895			2,0894					10^5 barn eV
$\overline{\delta}$	24,6			38,7					meV
$\overline{\Gamma_n^0}$	1,85	1,85	1,008	1,012	0,357	1,012	0,714	0,24	$\frac{\text{meV}}{\sqrt{\text{eV}}}$
R^2	0,8515			0,8356					barn
s	1	2	3	4	5	6	7	8	

$\nu_0 = 2,89$ (Spaltneutronenanzahl in Pu²³⁹ bei niedrigen Energien)

Die Spaltungshalbwertsbreiten $\overline{\Gamma_f}$ für die 5 Serien des Pu²³⁹ wurden als einander gleich angenommen. Die Werte für $\overline{\Gamma_f}$ in Abhängigkeit von der Energie sind in einer von J.J. Schmidt²³⁾ ermittelten Kurve aufgetragen (Abbildung 7).

11. Literaturverzeichnis

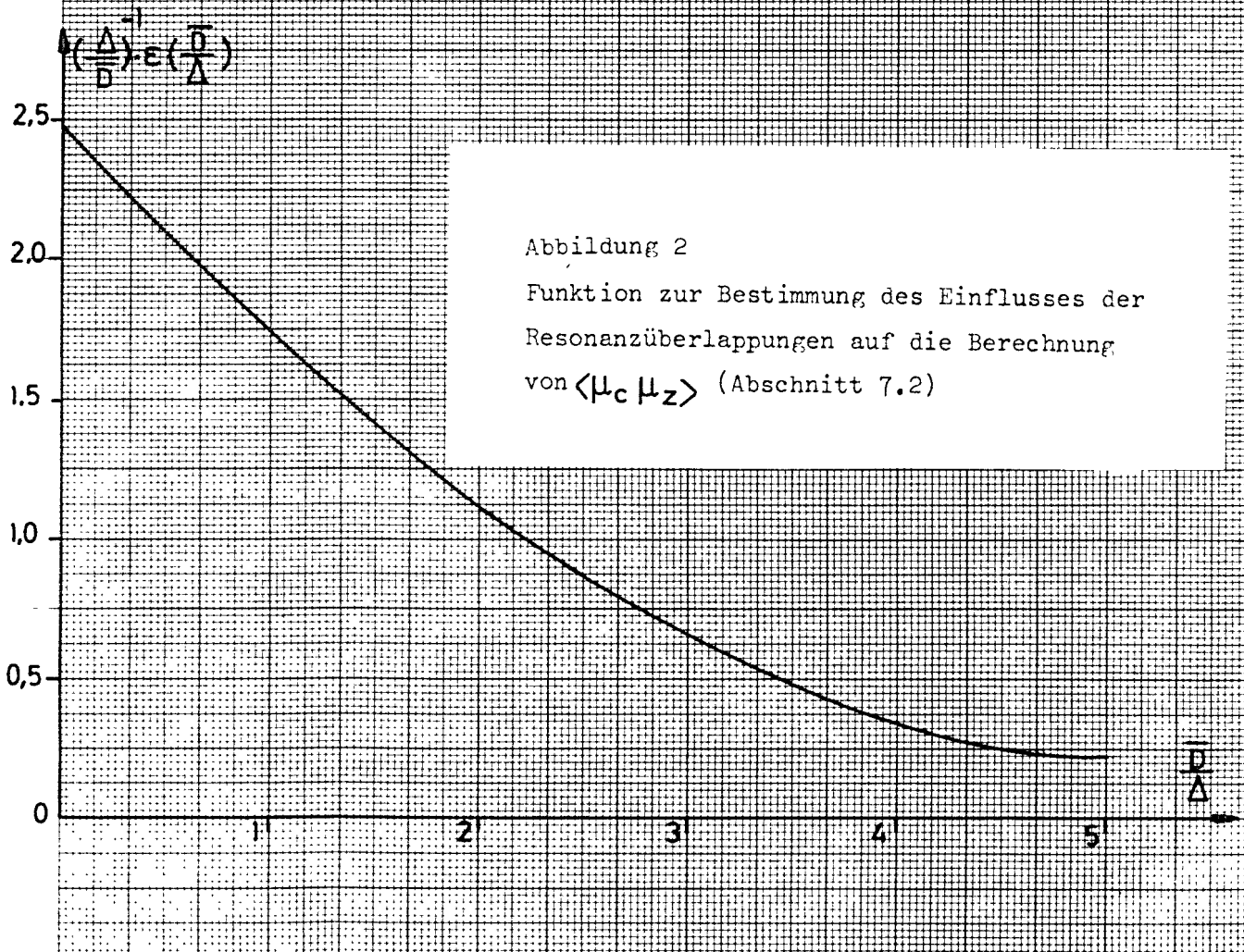
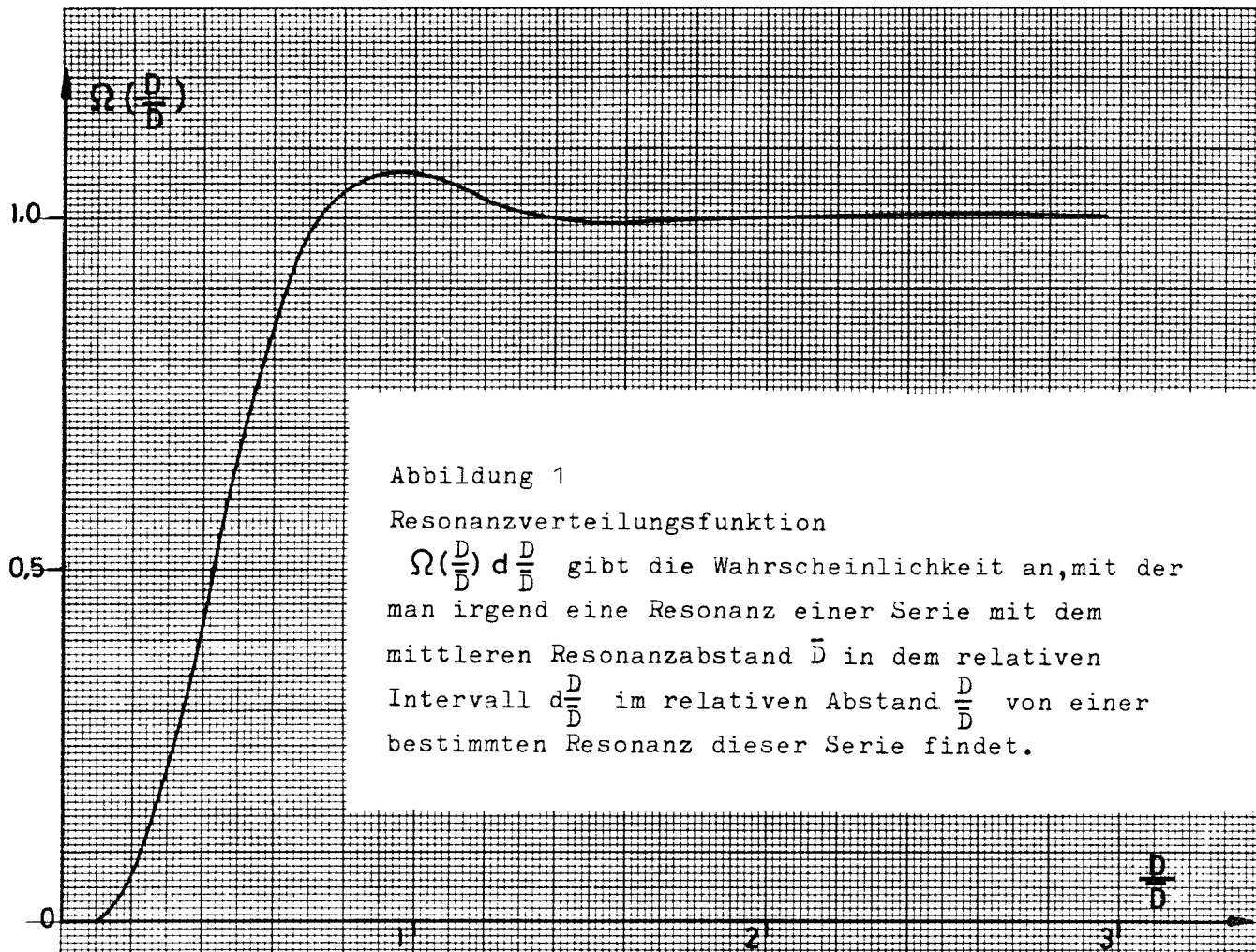
1. H.A. Bethe, "On the Doppler-Effect in Fast Reactors", APDA-119 (1957)
2. M.G. Bhide, H.H. Hummel, Computing Branch, Argonne National Laboratory, ANL-6601 (1962)
3. J.M. Blatt, V.F. Weisskopf, "Theoretical Nuclear Physics",
J. Wiley, New York (1962) und
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1959)
4. G. Blässer, W. Matthes, "Recent Investigations Concerning the Influence of Non-Uniform Temperature-Distribution in Doppler-Effect Calculations", X Congresso Nucleare Roma (1963)
5. J. Codd, P.J. Collins, ANL-6792 (1963)
6. L. Dresner, Nuclear Science and Engineering 1, 68 (1956)
7. L. Dresner, International Series of Monographs on Nuclear Energy, Pergamon Press, vol. 4 (1960)
8. J.H. Ferziger, P. Greebler, M.D. Kelley, J.W. Walton, GEAP-3929 (1956)
9. E.A. Fossoul, Sem. on Physics of Fast and Intermediate Reactors, Wien, SM-18/10 (1961)
10. S. Glasstone, M.C. Edlund, "Nuclear Reactor Theory", Macmillan, London (1950), Springer-Verlag, Wien (1961)
11. G. Goertzel, H. Feshbach, H. Hurwitz, G. Roe, H. Yamanchi, International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Genf, vol. 5, pap. 613 (1955)
12. C.C. Graves, UNC-5034 (1962)
13. P. Greebler, ^{E.A. Hutchins,} Seminar on Physics of Fast and Intermediate Reactors, Wien, SM-18/59 (1961)
14. A.F. Henry, Nuclear Science and Engineering 3, 52 (1958)

15. A.M. Lane, J.E. Lynn, J.S. Story, AERE, T/M 137 (1956)
16. W. Matthes, "Monte Carlo Calculation of the Nuclear Temperature Coefficient in Fast Reactors", (private Mitteilung)
17. F.R. Nakache, M.H. Kalos, Trans.Am.Nuc.Soc., 1961 Annual Meeting
18. R.B. Nicholson, APDA-139 (1960)
19. K. Ott, "Theory of Delayed Supercritical Excursions to Determine Doppler-Coefficients of Fast Reactors", KFK 153 (1963)
20. C.E. Porter, N. Rosenzweig, Phys. Rev. 120, 1698 (1960)
21. C.E. Porter, R.C. Thomas, Phys. Rev. 104, 483 (1956)
22. G.M. Roe, KAPL-1241 (1954)
23. J.J. Schmidt, EANDC (E)-46 "L" (1963)
24. A.M. Weinberg, E.P. Wigner, "The Physical Theory of Neutron Chain Reactors", The University of Chicago Press (1958)
25. Bell, Buckler, Pull, "Tables of the J-Function", Winfrith
26. M. Born, "Optik", Springer-Verlag, Berlin (1933)
27. N. LAMB, Phys. Rev. 55 (1939)
28. W. Voigt, Bayer.Akad. d.Wiss. (1912)
29. Ch. Doppler, Abh.d.K.Böhmischen Ges.d.Wiss. (5), Bd. 2 (1842)
30. E.A. Fischer, APDA 157 (1963)
31. R. Froelich, K. Ott, J.J. Schmidt, ANL 6792 (1963)

12. Zusammenfassung der benutzten Zeichen und Abkürzungen

- b Index zur Charakterisierung aller Reaktionen
- C Dopplerkoeffizient
- c Index zur Charakterisierung des Compound-Wirkungsquerschnittes
- C', C'_1, C'_2 Hilfsgrößen bei der Entwicklung von μ_t
- D Abstände zwischen den Resonanzen
- E Neutronenenergie
- E_R Resonanzenergie
- E_B Bindungsenergie
- E_Z definiert durch Gl. 7.2.7b
- e " " " 7.2.11
- \mathcal{F} Operator in der Multigruppengleichung
- F Verteilungsfunktion
- f Index zur Charakterisierung von Spaltreaktionen
- g spinstatischer Faktor
- i Index zur Charakterisierung der einzelnen Energiegruppen
- \rightarrow
i(i) Kernspin
- $J(\beta, \theta)$ definiert durch Gl. 5.2.3
- J Gesamtdrehimpuls des Zwischenkerns
- J_e Bessel-Funktion
- K Boltzmannkonstante
- k Neutronenmultiplikationsfaktor
- \rightarrow
l(1) Neutronenbahndrehimpuls
- M Kernmasse
- m_N Neutronenmasse
- \mathcal{O} Operator in der Multigruppengleichung
- N Atomzahldichte
- n Anzahl der Resonanzen in einem gegebenen Intervall

n_e	Neumannfunktion
n	Index zur Charakterisierung der elastischen Streuung
R'	effektiver Kernradius
$r,$	Ortskoordinaten
r	Index zur Charakterisierung von Serien
s	" " " " "
$\vec{s}(s)$	Neutronenspin
T	Temperatur
V, V_n	Geschwindigkeit
V_e	Durchdringungsfaktor für Neutronen mit dem Bahndrehimpuls e
W_H	mittleres statisches Gewicht eines Spaltneutrons
X	relative Energiekoordinate
Z	Index zur Bezeichnung von Reaktionen des Typs (n,γ) und (n,f)
β	Argument der J-Funktion
Γ	Halbwertsbreite
γ	Index zur Charakterisierung von Reaktionen vom Typ (n,γ)
Δ	Dopplerbreite
d_1	Phasenverschiebung für ein Neutron mit dem Bahndrehimpuls 1
θ	Argument der J-Funktion
λ	reduzierte Neutronenwellenlänge
μ	Makroskopischer Wirkungsquerschnitt
ν_0	Spaltneutronenanzahl (Eigenwert im Multigruppenproblem)
ν	Freiheitsgrad bei 2 -Verteilungen
σ	mikroskopischer Wirkungsquerschnitt
ϕ_0	Multigruppenflußvektor
ϕ_{oi}	Multigruppenfluß in der i-ten Gruppe
$\langle z \rangle$	Energetischer Mittelwert $\langle z \rangle = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} z(E) dE$
\bar{z}	arithmetischer Mittelwert $\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n$



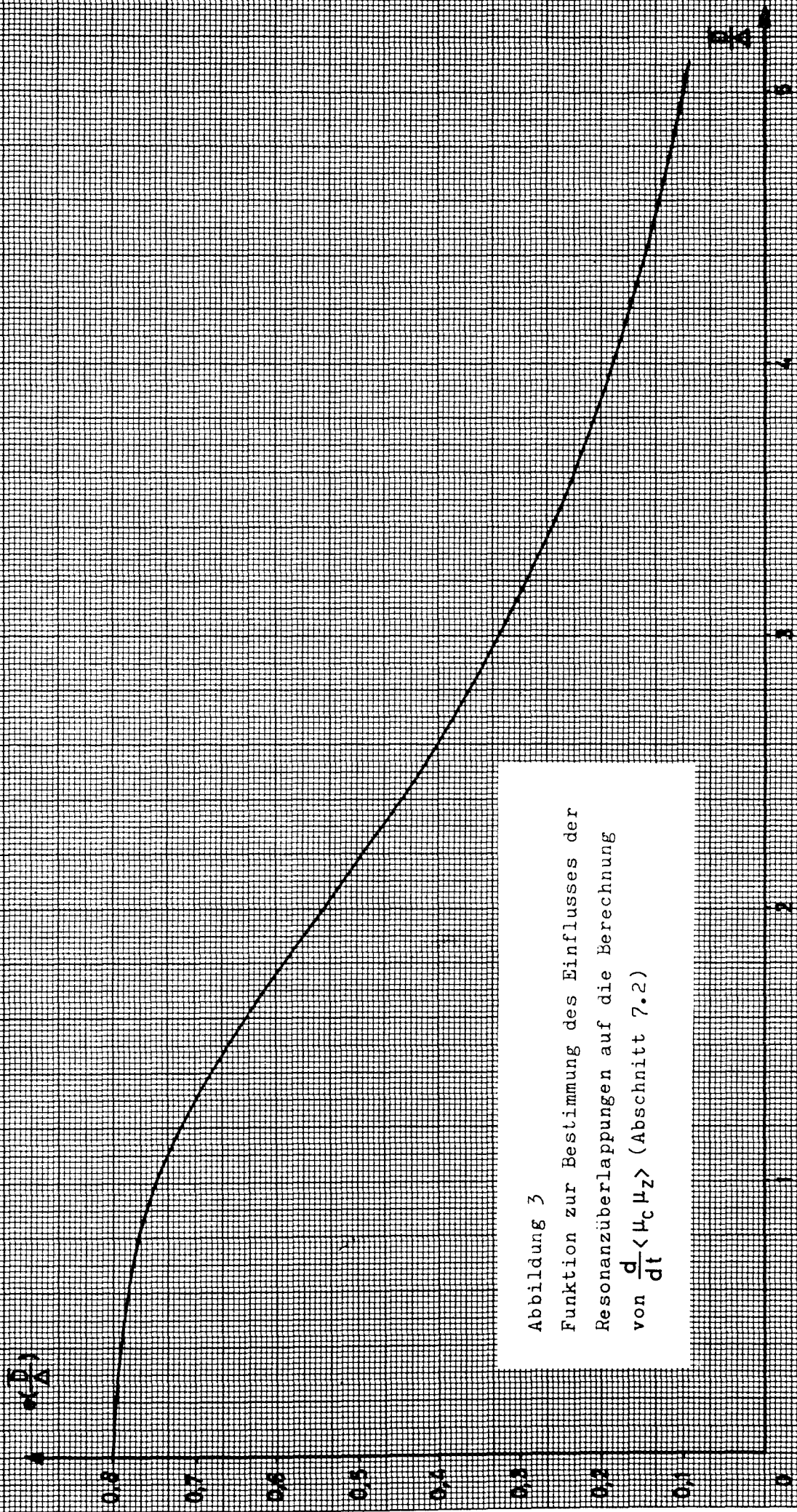
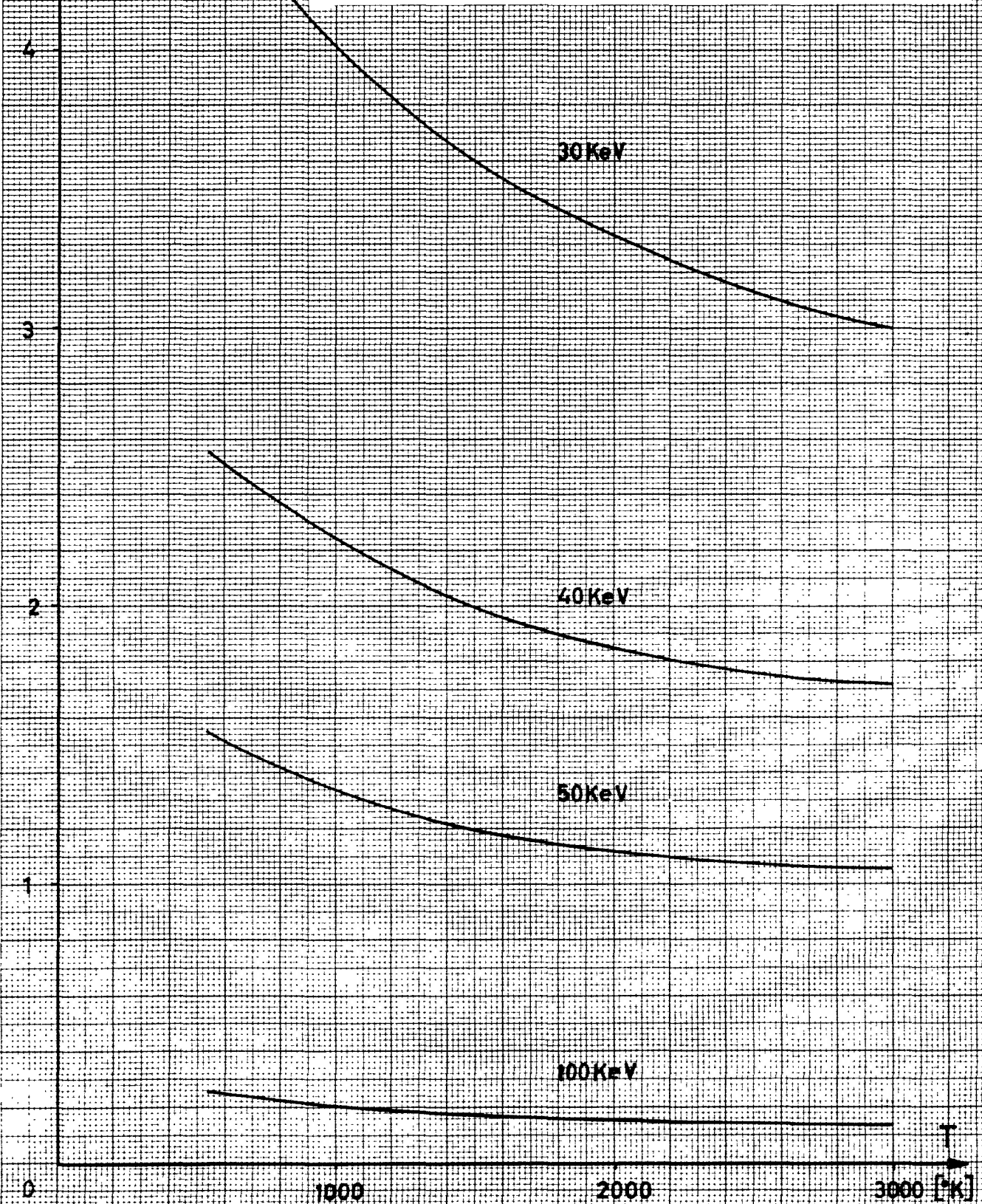


Abbildung 3
 Funktion zur Bestimmung des Einflusses der
 Resonanzüberlappungen auf die Berechnung
 von $\frac{d}{dt} \langle \mu_c \mu_z \rangle$ (Abschnitt 7.2)

Konst. $T \cdot \frac{d\sigma}{dT}$

Abbildung 4

Temperaturabhängigkeit der Temperaturableitung des fiktiven Wirkungsquerschnitts von $U^{238}(l=0)$



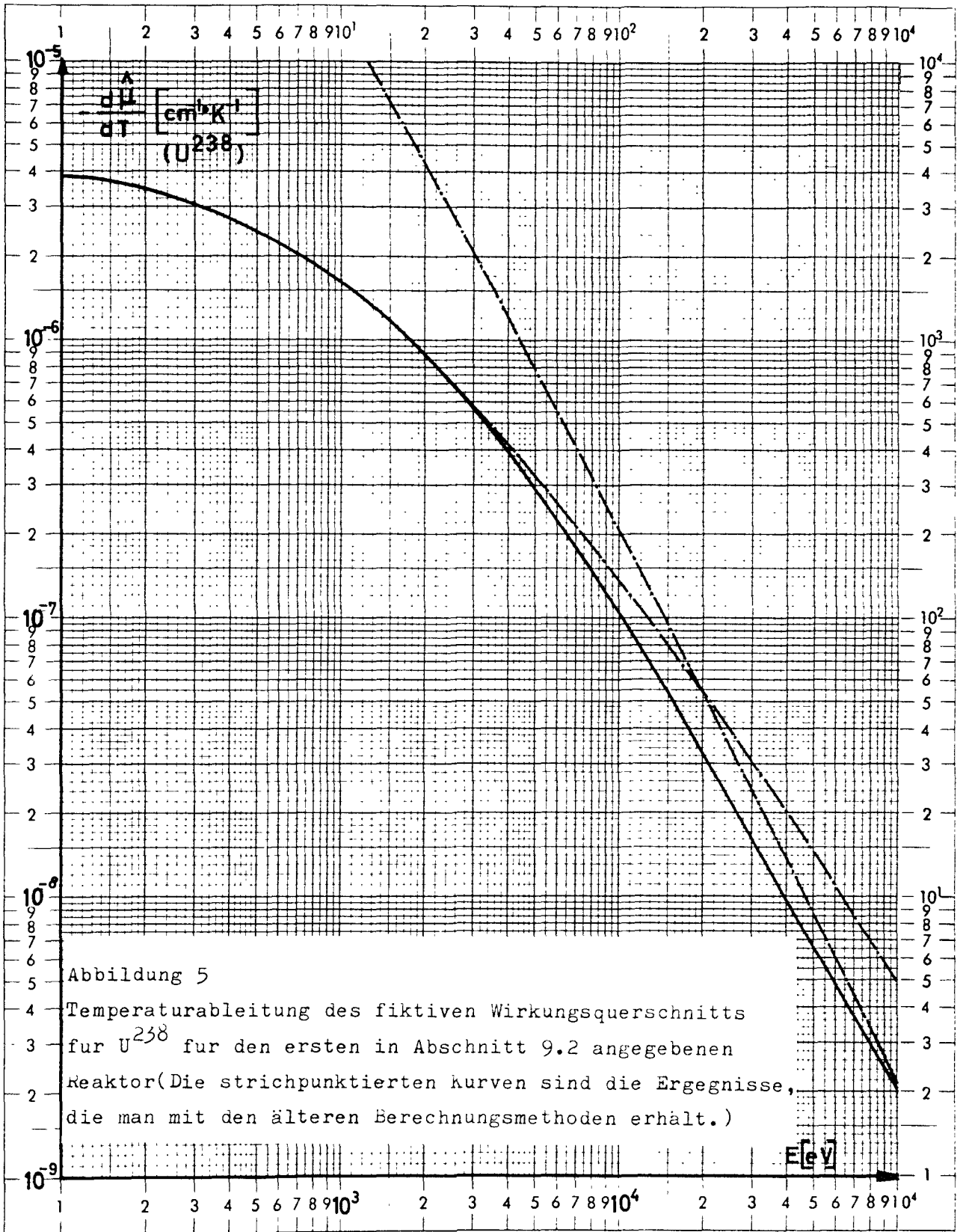


Abbildung 5

Temperaturableitung des fiktiven Wirkungsquerschnitts
 für U^{238} für den ersten in Abschnitt 9.2 angegebenen
 Reaktor (Die strichpunktierten Kurven sind die Ergebnisse,
 die man mit den älteren Berechnungsmethoden erhält.)

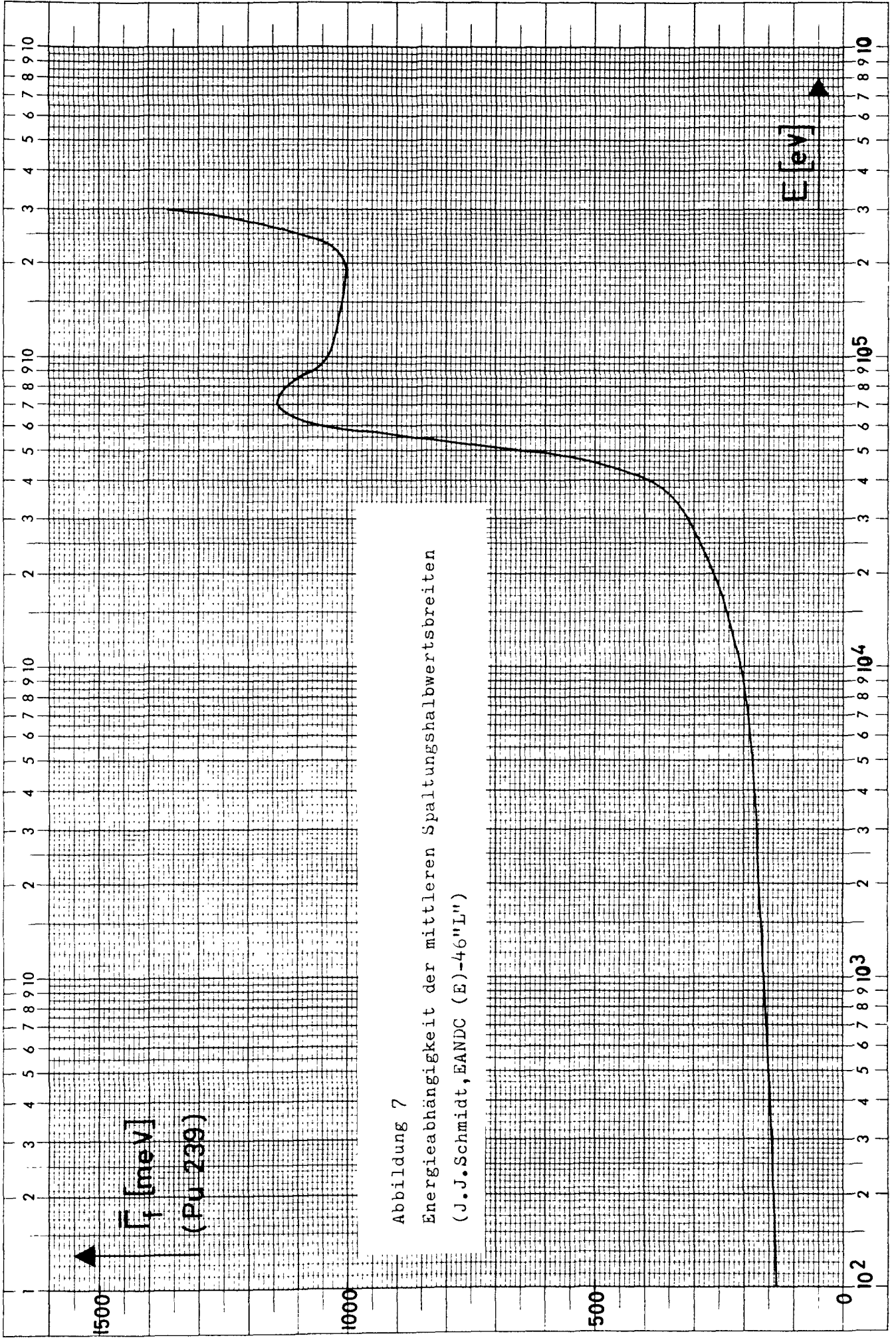


Abbildung 7
 Energieabhängigkeit der mittleren Spaltungshalbwertsbreiten
 (J.J.Schmidt, EANDC (E)-46"L")

14. Anhang (Größenordnungen der einzelnen Wirkungsquerschnitte)

Um einen Überblick über die Zahlenverhältnisse der einzelnen Wirkungsquerschnitte zu bekommen, werden diese für den in Bezug auf die angewandten Entwicklungen ungünstigsten in Frage kommenden Fall zusammengestellt.

Es handelt sich hier um einen Reaktor, der wie folgt zusammengesetzt ist (Angabe in Volumenprozenten):

Pu ²³⁹ O ₂	5 %		
U ²³⁸ O ₂	25 %		
Na	40 %		
Strukturmaterial	30 %	Fe 65 %	
		Cr 16 %	
		Ni 16 %	
		Mo 3 %	

Der gesamte Potentialquerschnitt aller dieser Materialien beträgt ungefähr

$$\mu_p \approx 0,35 \text{ cm}^{-1}$$

Bei den Vergleichen müßten zu dem μ_p noch die Resonanzquerschnitte der Strukturmaterialien und des Kühlmittels hinzugezählt werden

$$\mu_p^* = \mu_p + \mu_{\text{Strukturres.}}$$

Da μ_p^* meistens größer als μ_p ist, bedeutet ein Vergleich mit μ_p (zur Überprüfung der Gültigkeit der angewandten Entwicklungen) stets die Verhältnisse im ungünstigsten Fall zu betrachten.

Im folgenden werden die zu den Vergleichen benötigten Größen für die einzelnen Serien bei den Energien $E = 1,5 \text{ KeV}$ und $E = 30 \text{ KeV}$ tabelliert.

E = 1,5 keV

S	1	2	3	4	5	6	7	8	DIMEN.
$\overline{\mu_c^{\max}}$	0,46	0,003	0,003	0,013	0,014	8/-5	1,5/-4	10 ⁻⁴	cm ⁻¹
$\langle \mu_c \rangle$	5,8/-2	3,6/-4	7,1/-4	3/-3	9/-3	1,8/-5	1,1/-4	9,1/-5	cm ⁻¹
$\langle \mu_y \rangle$	1/-2	3,4/-4	6,9/-4	6/-4	2,6/-3	7,0/-6	4,6/-5	3,8/-5	cm ⁻¹
$\langle \mu_f \rangle$				1,2/-3	4,3/-3	1,1/-5	6,3/-5	5,3/-5	cm ⁻¹
$\langle \mu_y \mu_c \rangle$	4,8/-3	1,9/-6	4,3/-6	1,1/-5	6,5/-5	1,2/-9	1,2/-8	8,8/-9	cm ⁻²
$\langle \mu_f \mu_c \rangle$				1,1/-5	5,2/-5	5,5/-10	6,4/-9	5,5/-9	cm ⁻²
$\overline{D} / \Delta (800^\circ\text{K})$	14	14	8	8	3	8	3	2	

E = 30 keV

S	1	2	3	4	5	6	7	8	DIMEN.
$\overline{\mu_c^{\max}}$	0,018	2,5/-3	2,7/-3	5,1/-4	5,4/-4	7,1/-5	1,5/-4	8,4/-5	cm ⁻¹
$\langle \mu_c \rangle$	1,1/-2	1,5/-3	3/-3	5,5/-4	1,7/-3	7,7/-5	4,6/-4	3,8/-4	cm ⁻¹
$\langle \mu_y \rangle$	7,6/-4	4,2/-4	1,2/-3	5,4/-5	2,9/-4	1,6/-5	1,2/-4	1,1/-4	cm ⁻¹
$\langle \mu_f \rangle$				2,2/-4	9,2/-4	4,2/-5	2,7/-4	2,4/-4	cm ⁻¹
$\langle \mu_y \mu_c \rangle$	1,4/-5	1,5/-6	6,4/-6	4,9/-8	6,1/-7	2,5/-9	6,6/-8	5,5/-8	cm ⁻²
$\langle \mu_f \mu_c \rangle$				1,4/-7	1,6/-6	3,5/-9	1,2/-7	9,2/-8	cm ⁻²
$\overline{D} / \Delta (800^\circ\text{K})$	3	3	1,6	1,6	0,6	1,6	0,6	0,4	

(Die Zahlen hinter den Schrägstrichen "/" geben Zehnerpotenzen an, z.B. 4/-2 = 4·10⁻²).