

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

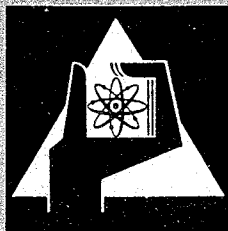
März/April 1966

KFK 444

Schule für Kerntechnik

Die mathematische Beschreibung der Umwandlung von Nukliden

A. Bach



**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE**

Die mathematische Beschreibung der Umwandlung von Nukliden

Von A. Bach, Karlsruhe

Kernforschungszentrum Karlsruhe, Schule für Kerntechnik

Zusammenfassung

Die Beschreibung des zeitlichen Ablaufes der Umwandlung von Nukliden durch radioaktiven Zerfall sowohl als auch durch Kernreaktionen mit Teilchen von zeitlich konstanter Flußdichte wird in einer Gleichung zusammengefaßt. Die Koeffizientenmatrix dieser Gleichung liefert zugleich das Rechenschema für die Behandlung praktischer Probleme; dies wird an einem Beispiel erläutert.

Abstract

The mathematical treatment of nuclear transformation

The present paper gives a formula to describe the time-dependence of radioactive decay and nuclear transformation processes in constant fluxes. The use of the coefficient matrix of the formula for practical calculation is shown in an example.

EURATOM KEYWORDS

NUCLEAR REACTIONS	HALF-LIFE
ALPHA DECAY	CROSS SECTIONS
BETA DECAY	ISOTOPES
DECAY	NEUTRONS
NUMERICALS	MATHEMATICS
DIFFERENTIAL EQUATIONS	

1. Die Differentialgleichung für die Bildung und Umwandlung eines Nuklides

1. Ausgangsnuklid

Der Verlauf des Zerfalles eines radioaktiven Nuklides ist durch seine Zerfallskonstante λ bestimmt. Ein Nuklid kann im allgemeinen auf mehrere Arten zerfallen (z. B. ^{230}Pa emittiert α -, β^- - und β^+ -Strahlen und fängt Elektronen ein). Daher ist

$$\lambda = \sum_i \lambda_i \quad (1)$$

λ_i beschreibt den Einfluß der i -ten Zerfallsart auf den Verlauf des gesamten Zerfalles. In der Literatur werden statt der λ_i meist die Bruchteile λ_i/λ oder die Häufigkeiten

$$H_i [0/0] = \frac{100 \lambda_i}{\lambda} \quad (2)$$

der einzelnen Zerfallsarten angegeben.

Bringt man ein stabiles Nuklid in einen Strom von Elementarteilchen oder leichten Kernen, so kann es zu Kernreaktionen kommen. Sind die Flußdichten aller Teilchenarten, denen das Nuklid ausgesetzt ist, zeitlich konstant, so läßt sich für jede der möglichen Reaktionen ein Faktor λ_j aufschreiben, der den Einfluß der zugehörigen Reaktion auf den Verlauf des Nuklidbaues bestimmt. Dieser Verlauf selbst ist durch die Summe aller λ_j zu beschreiben. Die λ_j spielen hier genau dieselbe Rolle wie die λ_i beim radioaktiven Zerfall.

Bezeichnet man den Wirkungsquerschnitt für die j -te Kernreaktion mit σ_j und die Flußdichte derjenigen Teilchen, mit denen die j -te Reaktion stattfindet, mit Φ_j , so ist

$$\lambda_j = \sigma_j \cdot \Phi_j \quad (3)$$

Setzt man ein radioaktives Nuklid einem Teilchenstrom aus, in dem seine Kerne reagieren können, so ist die Abnahme der Nuklidmenge — bedingt durch spontanen Zerfall und durch Kernreaktionen — durch die Summe aller λ_j und λ_i bestimmt:

$$L = \sum_i \lambda_i + \sum_j \lambda_j = \sum_K \lambda_K \quad (4)$$

Mit L lautet die Differentialgleichung für die Umwandlung

$$\frac{dN}{dt} = -L \cdot N \quad (5)$$

N ist die Anzahl der zur Zeit t vorhandenen Kerne.

2. Die erste Folgegeneration

Die Menge aller Nuklide, die unmittelbar bei der Umwandlung des Ausgangsnuklides entstehen, soll die erste Folgegeneration heißen. Dasjenige Nuklid dieser Generation, welches auf die K -te Umwandlungsart entsteht, wird als K -tes Nuklid der ersten Folgegeneration bezeichnet. Alle Größen dieses Nuklides mögen K als oberen linken Index an ihren Bezeichnungen tragen.

Um eine Beschreibung des Entstehungs- und Umwandlungsverlaufes dieses Nuklides zu finden, sei in (5) für L die Summe (4) ausgeschrieben:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_1 N - \lambda_2 N - \dots - \lambda_K N - \dots \quad (5a)$$

Das Glied $\lambda_K N$ ist der Anteil der K -ten Umwandlungsart an der Abnahmegeschwindigkeit der Kernanzahl N des Ausgangsnuklides. Weil nun aber das K -te Nuklid der ersten Folgegeneration genau durch diese Umwandlungsart entsteht, ist $\lambda_K N$ zugleich die Entstehungsgeschwindigkeit der Kernanzahl ${}^K N$ dieses Nuklides. Mit seiner Entstehung geht seine weitere Umwandlung einher, womit sich die Differentialgleichung

$$\frac{d{}^K N}{dt} = +\lambda_K N - {}^K L {}^K N \quad (6)$$

hinschreiben läßt. Für ${}^K L$ gilt dasselbe, was beim Ausgangsnuklid über L gesagt wurde. Es ist

$${}^K L = \sum_i {}^K \lambda_i + \sum_j {}^K \lambda_j = \sum_l {}^K \lambda_l \quad (7)$$

Dabei ist

$${}^K \lambda_j = \sum_i {}^K \lambda_{ij} \quad (8)$$

die Zerfallskonstante des K -ten Nuklides der ersten Folgegeneration, und es ist

$${}^K \lambda_j = {}^K \sigma_j \cdot \Phi_j \quad (9)$$

wobei ${}^K \sigma_j$ der Wirkungsquerschnitt des K -ten Nuklides der ersten Folgegeneration für die j -te Kernreaktion im gegebenen Teilchenstrom ist und Φ_j die Flußdichte der Teilchenart, mit der diese Reaktion stattfindet.

3. Die zweite Folgegeneration

Die Menge aller Nuklide, die unmittelbar bei der Umwandlung eines Nuklides der ersten Folgegeneration entstehen, heißt die zweite Folgegeneration. Diejenigen Nuklide dieser Menge, die aus dem K -ten Nuklid der ersten Folgegeneration entstanden sind, sind durch das K als oberen linken Index gekennzeichnet. Dasjenige Nuklid dieser Teilmenge, welches sich auf die l -te Umwandlungsart bildet, ist außer dem K noch durch den Index l markiert. So wird z. B. die Anzahl der Kerne des Nuklides mit ${}^{Kl}N$ bezeichnet.

Die Beschreibung des Aufbaues und der Umwandlung dieses Nuklids findet man nach der oben praktizierten Methode. Durch Einsetzen von (7) in (6) wird

$$\frac{d^{Kl}N}{dt} = +\lambda_K N - \kappa_{\lambda_1} {}^{Kl}N - \kappa_{\lambda_2} {}^{Kl}N - \dots - \kappa_{\lambda_l} {}^{Kl}N - \dots \quad (6a)$$

$\kappa_{\lambda_l} {}^{Kl}N$ liefert das Maß für die Entstehung des Kl -ten Nuklides, seine Umwandlung beschreibt der Faktor

$$\kappa_{\lambda_l} = \sum_m \kappa_{\lambda_l m} \quad (10)$$

Für die $\kappa_{\lambda_l m}$ gilt analog, was für die κ_{λ_l} und die λ_K oben ausgeführt wurde.

Damit lautet die Differentialgleichung für die Bildung und Umwandlung des Kl -ten Nuklides der zweiten Folgegeneration

$$\frac{d^{Kl}N}{dt} = +\kappa_{\lambda_l} {}^{Kl}N - \kappa_{\lambda_l} {}^{Kl}N \quad (11)$$

4. Die n -te Folgegeneration

Betrachtet man die Gleichungen (6) und (11) so erkennt man, daß ein Nuklid der ersten Folgegeneration mit einem oberen Index, ein Nuklid der zweiten Folgegeneration mit zwei oberen Indizes gekennzeichnet ist. Durch Fortsetzen des Verfahrens zeigt sich, daß ein Nuklid der n -ten Folgegeneration durch n obere Indizes gekennzeichnet sein muß. Dabei markieren die Werte der Indizes den Umwandlungsweg vom Ausgangsnuklid bis zu dem durch diese Werte bezeichneten Nuklid. Es entsteht das $Klm \dots pq$ -te Nuklid durch die q -te Umwandlungsart aus dem $Klm \dots p$ -ten Nuklid usw.

Die Differentialgleichung, nach der die Bildung und weitere Umwandlung des $Klm \dots pq$ -ten Nuklides abläuft, lautet entsprechend (6) und (11)

$$\frac{d^{Klm \dots pq}N}{dt} = +\kappa_{\lambda_q} {}^{Klm \dots p}N - \kappa_{\lambda_q} {}^{Klm \dots pq}N - \dots - \kappa_{\lambda_q} {}^{Klm \dots pq}N \quad (12)$$

$$\text{mit } \kappa_{\lambda_q} {}^{Klm \dots pq}N = \sum_r \kappa_{\lambda_q r} {}^{Klm \dots p}N_r \quad (13)$$

Ein Teil der Summe ist wie oben die Zerfallskonstante, die übrigen Glieder sind wieder Produkte aus Flußdichte und Wirkungsquerschnitten.

II. Lösung

1. Ausgangsnuklid

Die Lösung der Umwandlungsgleichung (5) des Ausgangsnuklides lautet:

$$N = B_1 \cdot e^{-L \cdot t} \quad (14)$$

Die Konstante B_1 ist, wie sich durch Einsetzen von $t = 0$ in (14) zeigt, mit der zu dieser Zeit vorhandenen Anzahl N_0 von Kernen des Ausgangsnuklides identisch.

$$B_1 = N_0 \quad (15)$$

2. Die erste Folgegeneration

Setzt man in die Differentialgleichung (6) für die Bildung und Umwandlung des K -ten Nuklides der ersten Folgegeneration für N den Ausdruck (14) ein, erhält man

$$\frac{d^K N}{dt} = B_1 \cdot \lambda_K \cdot e^{-L \cdot t} - \kappa_L {}^K N \quad (6b)$$

Die Lösung lautet

$${}^K N = \kappa_{B_1} \cdot e^{-L \cdot t} + \kappa_{B_2} \cdot e^{-\kappa_L t} \quad (16)$$

Durch Differenzieren von (16) und Einsetzen in (6b) findet man

$$\kappa_{B_1} = \frac{B_1 \cdot \lambda_K}{\kappa_L - L} \quad (17)$$

Mit der Bezeichnung ${}^K N(t=0) = {}^K N_0$ für die Anfangsmenge des Folgenuklides folgt nach Einsetzen von $t = 0$ in (16)

$$\kappa_{B_1} + \kappa_{B_2} = {}^K N_0 \quad (18)$$

3. Die zweite Folgegeneration

Setzt man (16) in (11) ein, erhält man

$$\frac{d^{Kl} N}{dt} = \kappa_{B_1} \kappa_{\lambda_l} \cdot e^{-L \cdot t} + \kappa_{B_2} \kappa_{\lambda_l} \cdot e^{-\kappa_L t} - \kappa_{\lambda_l} {}^{Kl} N \quad (11a)$$

Die Lösung lautet

$${}^{Kl} N = \kappa_{B_1} \cdot e^{-L \cdot t} + \kappa_{B_2} \cdot e^{-\kappa_L t} + \kappa_{B_3} \cdot e^{-\kappa_{\lambda_l} t} \quad (19)$$

Durch Differenzieren von (19) und Einsetzen in (11a) erhält man für die ersten beiden Koeffizienten:

$$\kappa_{B_1} = \frac{\kappa_{B_1} \cdot \kappa_{\lambda_l}}{\kappa_{\lambda_l} - L} \quad (20)$$

$$\kappa_{B_2} = \frac{\kappa_{B_2} \cdot \kappa_{\lambda_l}}{\kappa_{\lambda_l} - \kappa_L} \quad (21)$$

Mit der Bezeichnung ${}^{Kl} N(t=0) = {}^{Kl} N_0$ folgt nach Einsetzen von $t = 0$ in (19)

$$\kappa_{B_1} + \kappa_{B_2} + \kappa_{B_3} = {}^{Kl} N_0 \quad (22)$$

4. Die allgemeine Lösungsformel

Man fährt in dieser Weise fort. Die Ergebnisse lassen sich zusammenfassen. Aus (14), (16), (19) usw. wird dabei

$$\begin{pmatrix} N \\ {}^K N \\ {}^{Kl} N \\ {}^{Klm} N \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \kappa_{B_1} & \kappa_{B_2} & 0 & 0 & \dots \\ \kappa_{B_1} \kappa_{\lambda_l} & \kappa_{B_2} \kappa_{\lambda_l} & \kappa_{B_3} & 0 & \dots \\ \kappa_{B_1} \kappa_{\lambda_l} \kappa_{\lambda_m} & \kappa_{B_2} \kappa_{\lambda_l} \kappa_{\lambda_m} & \kappa_{B_3} \kappa_{\lambda_l} \kappa_{\lambda_m} & \kappa_{B_4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-L \cdot t} \\ e^{-\kappa_L t} \\ e^{-\kappa_{\lambda_l} t} \\ e^{-\kappa_{\lambda_l} \kappa_{\lambda_m} t} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (23)$$

Alle Koeffizienten oberhalb der Matrixdiagonale sind Null. Für die Koeffizienten unter der Diagonale gilt in der ersten Spalte gemäß (17) und (20)

$$\kappa_{B_1} \dots \kappa_{B_q} = \frac{\kappa_{\lambda_q} \dots \kappa_{\lambda_1} \cdot \kappa_{B_1} \cdot \kappa_{\lambda_q}}{\kappa_{\lambda_q} \dots \kappa_{\lambda_1} - L} \quad (24)$$

Für die Koeffizienten der zweiten Spalte unterhalb der Diagonale gilt gemäß (21)

$${}^{kl\dots pq}B_2 = \frac{{}^{kl\dots p}B_2 \cdot {}^{kl\dots p}\lambda_q}{{}^{kl\dots pq}L - {}^{kl}L} \quad (25)$$

Ganz entsprechend ist die Rekursionsformel der dritten Spalte

$${}^{kl\dots pq}B_3 = \frac{{}^{kl\dots p}B_3 \cdot {}^{kl\dots p}\lambda_q}{{}^{kl\dots pq}L - {}^{kl}L} \quad (26)$$

(15), (18) und (22) liefern die zur Bestimmung der Diagonal-koeffizienten notwendige Beziehung

$${}^{kl\dots pq}N_0 = \sum_v {}^{kl\dots pq}B_v \quad (27)$$

(23) beschreibt zusammen mit den Rekursionsformeln für die Koeffizienten die Bildung und die Umwandlung von Nukliden durch radioaktiven Zerfall und Kernreaktionen in zeitlich konstanten Teilchenströmen.

Beispiel

Die Anwendung der allgemeinen Lösungsformel (23) und der Koeffizientengleichungen soll durch ein Beispiel erläutert werden.

m Gramm ${}^{238}\text{U}$ werden einem Strom thermischer Neutronen der konstanten Flußdichte $\Phi \leq 10^{10} [\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}]$ ausgesetzt. Der auftretende Gehalt an ${}^{239}\text{U}$, ${}^{239}\text{Np}$ und ${}^{239}\text{Pu}$ ist zu ermitteln. Die Uranmenge m soll gering sein, so daß die durch sie hervorgerufene Änderung der Flußdichte vernachlässigbar ist.

1. Die Bestrahlung

Es müssen zwei Umwandlungsarten unterschieden werden:

1. Radioaktiver Zerfall
2. Reaktion mit Neutronen

Die Unterscheidung zwischen α - und β^- -Zerfall bzw. zwischen Neutroneneinfang und Spaltung ist hier nicht notwendig, weil bei jedem der Nuklide immer der gesamte radioaktive Zerfall zum nächsten der zu betrachtenden Nuklide führt. Dasselbe gilt für die Reaktion mit Neutronen. Der Gang der Umwandlung ist in Abb. 1 dargestellt. Da ${}^{239}\text{U}$ auf die zweite Umwandlungsart aus ${}^{238}\text{U}$ entsteht, erhalten die Bezeichnungen aller Größen des ${}^{239}\text{U}$ den oberen Index 2. Die Bezeichnungen für die Größen des ${}^{239}\text{Np}$, welches aus ${}^{239}\text{U}$ durch die erste Art der Umwandlung entsteht, erhalten den oberen Index 2.1. ${}^{239}\text{Pu}$, das sich auf die erste Art aus ${}^{239}\text{Np}$ bildet, wird mit dem oberen Index 2.1.1 markiert. In Tab. 1 sind nun alle für die Berechnung notwendigen Größen eingetragen. Die Anzahlen der Kerne der vier Nuklide zur Zeit $t = 0$ sind durch die Aufgabenstellung gegeben. Die Halbwertszeiten und die Reaktionsquerschnitte sind der Literatur entnommen.

Tab. 1: Aufstellung der erforderlichen Zahlenwerte

Nuklid	${}^{238}\text{U}$	${}^{239}\text{U}$	${}^{239}\text{Np}$	${}^{239}\text{Pu}$
Anzahl der Kerne z. Z. $t = 0$	$N_0 = 2,53 \cdot 10^{21} m$	${}^{2.1}N_0 = 0$	${}^{2.1.1}N_0 = 0$	${}^{2.1.1.1}N_0 = 0$
Halbwertszeiten	$T = 4,5 \cdot 10^9 \text{ a}$	${}^{2.1}T = 23,5 \text{ min}$	${}^{2.1}T = 2,35 \text{ d}$	${}^{2.1.1}T = 2,4 \cdot 10^4 \text{ a}$
Reaktionsquerschnitte $[\text{cm}^2]$	$\sigma = 2,7 \cdot 10^{-24}$	${}^{2.1}\sigma \approx 4 \cdot 10^{-23}$	${}^{2.1}\sigma \approx 6 \cdot 10^{-23}$	${}^{2.1.1}\sigma = 1,03 \cdot 10^{-21}$
Zerfallskonstanten $[\text{sec}^{-1}]$	$\lambda_1 = 4,9 \cdot 10^{-16}$	${}^{2.1}\lambda_1 = 4,9 \cdot 10^{-4}$	${}^{2.1}\lambda_1 = 3,4 \cdot 10^{-6}$	${}^{2.1.1}\lambda_1 = 9 \cdot 10^{-13}$
Reaktionskonstanten $[\text{sec}^{-1}]$	$\lambda_2 = 2,7 \cdot 10^{-24} \Phi$	${}^{2.1}\lambda_2 \approx 4 \cdot 10^{-23} \Phi$	${}^{2.1}\lambda_2 \approx 6 \cdot 10^{-23} \Phi$	${}^{2.1.1}\lambda_2 = 1,03 \cdot 10^{-21} \Phi$
Umwandlungskonstante $[\text{sec}^{-1}]$	$L = 4,9 \cdot 10^{-18}$	${}^{2.1}L = 4,9 \cdot 10^{-4}$	${}^{2.1}L = 3,4 \cdot 10^{-6}$	${}^{2.1.1}L = 9 \cdot 10^{-13}$
(für $\Phi \leq 10^{10} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)	$+2,7 \cdot 10^{-24} \Phi$	$= {}^{2.1}\lambda_1$	$= {}^{2.1}\lambda_1$	$+1,03 \cdot 10^{-21} \Phi$

Table 1: Table of the required numerical values

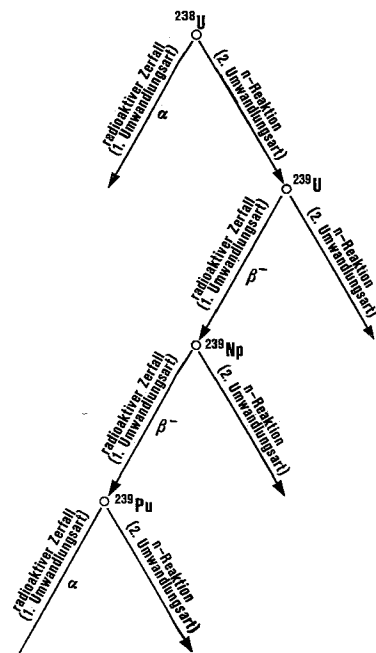


Abb. 1: Umwandlung im Neutronenstrom

Fig. 1: Transformation in neutron flux

Die Zerfallskonstanten errechnet man aus den Halbwertszeiten. Sie sind mit dem unteren Index 1 bezeichnet, weil der Zerfall hier als die erste Umwandlungsart numeriert wurde. Als Maßeinheit für die Zeit wurde die Sekunde verwendet.

Die Reaktionskonstanten sind nach (3) Produkte aus den Reaktionsquerschnitten und der Flußdichte. Sie tragen an ihren Bezeichnungen den unteren Index 2.

Die Umwandlungskonstanten sind nach (4) die Summen aus Zerfalls- und Reaktionskonstanten der jeweiligen Nuklide. Mit der vereinbarten Indizierung nimmt (23) die Form an

$$\begin{pmatrix} N \\ {}^{2.1}N \\ {}^{2.1.1}N \\ {}^{2.1.1.1}N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{2.1}B_1 & {}^{2.1}B_2 & 0 & 0 \\ {}^{2.1.1}B_1 & {}^{2.1.1}B_2 & {}^{2.1.1}B_3 & 0 \\ {}^{2.1.1.1}B_1 & {}^{2.1.1.1}B_2 & {}^{2.1.1.1}B_3 & {}^{2.1.1.1}B_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-Lt} \\ e^{-{}^{2.1}Lt} \\ e^{-{}^{2.1.1}Lt} \\ e^{-{}^{2.1.1.1}Lt} \end{pmatrix} \quad (23a)$$

Für $\Phi \leq 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ wird $L \leq 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ sec}^{-1}$ und ${}^{2.1.1.1}L \leq 1,03 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}$. Folglich wird für jede praktisch interessante Bestrahlungsdauer

$$e^{-Lt} = 1 - Lt$$

und

$$e^{-{}^{2.1.1.1}Lt} = 1 - {}^{2.1.1.1}Lt$$

Damit und mit (27) wird

$$\begin{pmatrix} N \\ {}^{2.1}N \\ {}^{2.1.1}N \\ {}^{2.1.1.1}N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{2.1}B_1 & -{}^{2.1}B_1 & 0 & 0 \\ {}^{2.1.1}B_1 & {}^{2.1.1}B_2 & (-{}^{2.1.1}B_1 - {}^{2.1.1}B_2) & 0 \\ {}^{2.1.1.1}B_1 & {}^{2.1.1.1}B_2 & {}^{2.1.1.1}B_3 & (-{}^{2.1.1.1}B_1 - {}^{2.1.1.1}B_2 - {}^{2.1.1.1}B_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - Lt \\ e^{-{}^{2.1}Lt} \\ e^{-{}^{2.1.1}Lt} \\ 1 - {}^{2.1.1.1}Lt \end{pmatrix} \quad (23b)$$

Für ^{238}U wird daraus

$$N = N_0(1 - Lt)$$

d. h. innerhalb einer Bestrahlungsdauer von praktischer Bedeutung bleibt die ^{238}U -Menge konstant:

$$N = N_0 \quad (28)$$

Für ^{239}U erhält man aus (23 b)

$${}^2N = {}^2B_1(1 - Lt - e^{-2Lt})$$

Auch hier ist das Glied Lt vernachlässigbar. Mit (24) wird

$$\begin{aligned} {}^2B_1 &= \frac{B_1 \cdot \lambda_2}{{}^2L - L} = \frac{N_0 \cdot 2,7 \cdot 10^{-24} \Phi}{4,9 \cdot 10^{-4} - 4,9 \cdot 10^{-18} - 2,7 \cdot 10^{-24} \Phi} \\ &= 5,5 \cdot 10^{-21} N_0 \cdot \Phi \end{aligned}$$

und damit

$${}^2N = 5,5 \cdot 10^{-21} N_0 \cdot \Phi (1 - e^{-4,9 \cdot 10^{-4}t}) \quad (29)$$

Für ^{239}Np ist nach (23 b)

$$\begin{aligned} {}^{2,1}N &= {}^{2,1}B_1(1 - Lt) + {}^{2,1}B_2 e^{-2Lt} - ({}^{2,1}B_1 + {}^{2,1}B_2) \cdot e^{-2,1Lt} = \\ &= {}^{2,1}B_1(1 - Lt - e^{-2,1Lt}) + {}^{2,1}B_2(e^{-2Lt} - e^{-2,1Lt}) \end{aligned}$$

Wieder ist Lt ohne Bedeutung. Nach (24) ist

$$\begin{aligned} {}^{2,1}B_1 &= \frac{{}^2B_1 \cdot {}^2\lambda_1}{{}^{2,1}L - L} = \frac{5,5 \cdot 10^{-21} N_0 \cdot \Phi \cdot 4,9 \cdot 10^{-4}}{3,4 \cdot 10^{-6} - 4,9 \cdot 10^{-18} - 2,7 \cdot 10^{-24} \Phi} \\ &= 7,9 \cdot 10^{19} N_0 \Phi \end{aligned}$$

und nach (25)

$$\begin{aligned} {}^{2,1}B_2 &= \frac{{}^2B_2 \cdot {}^2\lambda_1}{{}^{2,1}L - {}^2L} = \frac{-5,5 \cdot 10^{-21} \cdot N_0 \cdot \Phi \cdot 4,9 \cdot 10^{-4}}{3,4 \cdot 10^{-6} - 4,9 \cdot 10^{-4}} \\ &= 5,5 \cdot 10^{-21} N_0 \cdot \Phi \end{aligned}$$

Damit wird schließlich für das ^{239}Np

$$\begin{aligned} {}^{2,1}N &= 7,9 \cdot 10^{19} N_0 \Phi (1 - e^{-3,4 \cdot 10^{-6}t}) - \\ &\quad - 5,5 \cdot 10^{-21} N_0 \Phi (e^{-3,4 \cdot 10^{-6}t} - e^{-4,9 \cdot 10^{-4}t}) \quad (30) \end{aligned}$$

Für ^{239}Pu wird nach (23 b)

$$\begin{aligned} {}^{2,1,1}N &= {}^{2,1,1}B_1(1 - Lt) + {}^{2,1,1}B_2 \cdot e^{-2Lt} + {}^{2,1,1}B_3 \cdot e^{-2,1Lt} - \\ &\quad - ({}^{2,1,1}B_1 + {}^{2,1,1}B_2 + {}^{2,1,1}B_3) (1 - {}^{2,1,1}Lt) \\ &= {}^{2,1,1}B_1({}^{2,1,1}L - L) t + {}^{2,1,1}B_2(e^{-2Lt} - 1 + {}^{2,1,1}Lt) \\ &\quad + {}^{2,1,1}B_3(e^{-2,1Lt} - 1 + {}^{2,1,1}Lt) \end{aligned}$$

Aus den Rekursionsformeln (24) usw. folgt

$$\begin{aligned} {}^{2,1,1}B_1({}^{2,1,1}L - L) &= {}^{2,1}B_1 \cdot {}^2\lambda_1 \\ {}^{2,1,1}B_2 &= \frac{{}^2B_2 \cdot {}^2\lambda_1}{{}^{2,1,1}L - {}^2L} \\ {}^{2,1,1}B_3 &= \frac{{}^2B_3 \cdot {}^2\lambda_1}{{}^{2,1,1}L - {}^2L} = -\frac{{}^2B_1 \cdot {}^2\lambda_1}{{}^{2,1,1}L - {}^2L} - \frac{{}^2B_2 \cdot {}^2\lambda_1}{{}^{2,1,1}L - {}^2L} \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} {}^{2,1,1}N &= \frac{{}^2B_1 \cdot {}^2\lambda_1}{1 - \frac{{}^2L}{{}^{2,1,1}L}} \left(t - \frac{1 - e^{-2,1Lt}}{{}^{2,1,1}L} \right) - \\ &\quad - {}^{2,1}B_2 \cdot {}^2\lambda_1 \left(\frac{1 - e^{-2,1Lt} - {}^{2,1,1}Lt}{{}^2L - {}^{2,1,1}L} - \frac{1 - e^{-2Lt} - {}^{2,1,1}Lt}{{}^2L - {}^{2,1,1}L} \right) \quad (31 a) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der beim ^{239}Np errechneten Werte für ${}^{2,1}B_1$ und ${}^{2,1}B_2$ und der Konstanten aus Tab. 1 erhält man, da die in t linearen Glieder in der zweiten Klammer von (31 a) für praktisch in Frage kommende Bestrahlungszeiten vernachlässigt werden können, für ^{239}Pu

$$\begin{aligned} {}^{2,1,1}N &= 2,7 \cdot 10^{-24} N_0 \Phi \left(t - \frac{1 - e^{-3,4 \cdot 10^{-6}t}}{3,4 \cdot 10^{-6}} \right) - \\ &\quad - 1,8 \cdot 10^{-26} N_0 \Phi \left(\frac{1 - e^{-3,4 \cdot 10^{-6}t}}{3,4 \cdot 10^{-6}} - \frac{1 - e^{-4,9 \cdot 10^{-6}t}}{4,9 \cdot 10^{-6}} \right) \quad (31) \end{aligned}$$

Die Ausrechnung zeigt, daß der negative Teil vernachlässigt werden kann, wenn länger als zwei Tage bestrahlt wird.

2. Nach der Bestrahlung

Nach Beendigung der Bestrahlung fällt die zweite Umwandlungsart weg (Abb. 1). Es bleibt der in Abb. 2 dargestellte Umwandlungsverlauf übrig. Tabelle 2 enthält die für die weitere Berechnung erforderlichen Werte. Da das ^{238}U nach der Beendigung der Bestrahlung nicht mehr an der Bildung von ^{239}U , ^{239}Np und ^{239}Pu beteiligt ist, kommt es im Rechen-schemata nicht mehr vor. ^{238}U ist jetzt Ausgangsnuklid. Seine

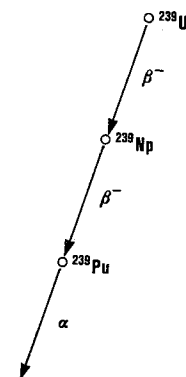


Abb. 2: Umwandlungsverlauf nach der Neutronenbestrahlung

Fig. 2: Transformation after neutron bombardment

Größen tragen hier keinen oberen Index. ^{239}Np , was sich auf die erste (und hier einzige) Umwandlungsart bildet, ist durch den oberen Index 1 gekennzeichnet, ^{239}Pu aus demselben Grunde durch den oberen Index 1.1. Um Verwechslung der Bezeichnungen nach der Bestrahlung zu vermeiden, sind alle Größen für die Berechnung des Umwandlungsablaufes nach der Bestrahlung mit einem Stern versehen. Auch die Zeit, die seit dem Ende der Bestrahlung verstrichen ist, wird mit t^* bezeichnet.

Tab. 2: Zahlenwerte für die Berechnung nach Bestrahlungsende

Table 2: Numerical values for the calculation after bombardment

Nuklid	^{238}U	^{239}Np	^{239}Pu
Anz. d. Kerne z. Z.			
$t^* = 0$	$N_0^* = {}^2N(t)$	${}^{1,1}N_0^* = {}^{2,1}N(t)$	${}^{1,1,1}N_0^* = {}^{2,1,1}N(t)$
Halbwertszeiten	$T^* = 23,5 \text{ min}$	${}^{1,1}T^* = 2,35 \text{ d}$	${}^{1,1,1}T^* = 2,4 \cdot 10^4 \text{ a}$
Zerfallskonstanten	$L^* = \lambda_1$	${}^{1,1}L^* = \lambda_1^*$	${}^{1,1,1}L^* = \lambda_1^*$
Umwandlungs-konstanten	$= 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$	$= 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$	$= 9,1 \cdot 10^{-18} \text{ sec}^{-1}$

Gleichung (23) erhält jetzt die Form

$$\begin{pmatrix} N^* \\ {}^1N^* \\ {}^{1.1}N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^* & 0 & 0 \\ {}^1B_1^* & {}^1B_2^* & 0 \\ {}^{1.1}B_1^* & {}^{1.1}B_2^* & {}^{1.1}B_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-L^*t^*} \\ e^{-{}^1L^*t^*} \\ e^{-{}^{1.1}L^*t^*} \end{pmatrix}$$

oder mit (27)

$$\begin{pmatrix} N^* \\ {}^1N^* \\ {}^{1.1}N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2N(t) & 0 & 0 \\ {}^1B_1^* & {}^2N(t) - {}^1B_1^* & 0 \\ {}^{1.1}B_1^* & {}^{1.1}B_2^* & {}^{2.1.1}N(t) - {}^{1.1}B_1^* - {}^{1.1}B_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-L^*t^*} \\ e^{-{}^1L^*t^*} \\ e^{-{}^{1.1}L^*t^*} \end{pmatrix}$$

Damit wird für ${}^{239}\text{U}$

$$N^* = {}^2N(t) \cdot e^{-4,9 \cdot 10^{-4} t^*}$$

Nach (24) wird

$${}^1B_1^* = \frac{B_1^* \cdot \lambda_1^*}{{}^1L^* - L^*} = \frac{{}^2N(t) \cdot 4,9 \cdot 10^{-4}}{3,4 \cdot 10^{-6} - 4,9 \cdot 10^{-4}} = -{}^2N(t)$$

Damit wird nach (23c) für ${}^{239}\text{Np}$

$${}^1N^* = {}^2N(t) \cdot e^{-3,4 \cdot 10^{-6} t^*} + {}^2N(t) \cdot (e^{-3,4 \cdot 10^{-6} t^*} - e^{-4,9 \cdot 10^{-4} t^*})$$

Für ${}^{239}\text{Pu}$ wird

$${}^{1.1}N^* = {}^{1.1}B_1^* (e^{-L^*t^*} - e^{-{}^{1.1}L^*t^*}) + {}^{1.1}B_2^* (e^{-{}^1L^*t^*} - e^{-{}^{1.1}L^*t^*}) + {}^{2.1.1}N(t) \cdot e^{-{}^{1.1}L^*t^*}$$

Da für praktisch interessante t^*

$$e^{-{}^{1.1}L^*t^*} = 1$$

ist, wird daraus mit (24) und (25) für ${}^{239}\text{Pu}$

$${}^{1.1}N^* = {}^{2.1.1}N(t) + ({}^2N(t) + {}^2N(t)) (1 - e^{-3,4 \cdot 10^{-6} t^*})$$

und drei Wochen nach Bestrahlungsende, d. h. für

$$t^* = 1,8 \cdot 10^6 \text{ sec}$$

$${}^{1.1}N^* = {}^{2.1.1}N(t) + {}^2N(t) + {}^2N(t)$$

(Eingegangen am 29. 4. 1965)

