

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

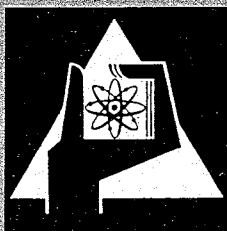
Januar 1967

KFK 508

Institut für Angewandte Reaktorphysik

Über die Bedeutung des adjungierten Flusses  
in der Reaktorkinetik

E.A. Fischer



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt.

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor.

Gesellschaft für Kernforschung m. b. H.

Karlsruhe

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Januar 1967

KFK-508

Institut für Angewandte Reaktorphysik

Über die Bedeutung des adjungierten Flusses  
in der Reaktorkinetik<sup>\*)</sup>

von

E.A. FISCHER

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe

---

<sup>\*)</sup> Diese Arbeit wurde im Rahmen der Assoziation zwischen der Europäischen Atomgemeinschaft und der Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe, auf dem Gebiet der Schnellen Reaktoren durchgeführt.

1. Einleitung

Es ist üblich, in der Reaktorthorie mit der Neutronenflußgleichung zu arbeiten. Bekanntlich genügt der Neutronenfluß als Funktion von Ort, Zeit und Energie der Boltzmann'schen Transportgleichung, die jedoch bei praktischen Rechnungen stets durch eine Näherung, z.B. Multigruppen-Diffusionsgleichungen,  $P_n$ - oder  $S_n$ -Gleichungen, ersetzt wird. Sie alle dienen jedoch dem Zwecke, den Neutronenfluß im Reaktor so gut wie möglich und notwendig zu berechnen, und der Fluß stellt somit die Grundgröße der üblichen Reaktorthorie dar, von der aus sämtliche interessanten Größen berechnet werden können.

Dieses Vorgehen ist jedoch keinesfalls das einzig mögliche. Bekanntlich sind die Multigruppengleichungen für den Neutronenfluß nicht selbstadjungiert, und man kann sich die Frage vorlegen, ob der adjungierte Fluß, d.h. die Lösung der adjungierten Gleichungen, in ähnlicher Weise wie der Neutronenfluß als Grundgröße für die Beschreibung eines Reaktors verwendet werden kann. Eine solche Beschreibung kann natürlich nur dann zweckmäßig sein, wenn dem adjungierten Fluß eine ähnlich fundamentale physikalische Bedeutung zukommt wie dem Neutronenfluß.

Erstaunlicherweise wurde erst in den im Jahre 1960 erschienenen Arbeiten von Lewins /1/, /2/ in vollem Umfang erkannt, in welchem Sinne man dem adjungierten Fluß die Bedeutung eines "Neutroneneinflusses" (in der englischen Literatur "importance" genannt) zuschreiben kann, obwohl wesentliche Eigenschaften des "Einflusses" bereits früher bekannt waren; siehe z.B. die Arbeiten an der Technischen Hochschule Stuttgart /4/, /5/ und das Buch von Weinberg und Wigner /6/. In den ersten Abschnitten des vorliegenden Berichts wird im Anschluß an Lewins /1/ der Neutroneneinfluß definiert, und seine Eigenschaften werden erläutert. Die Ausführungen werden grundsätzlich im Rahmen der Multigruppen-Diffusionstheorie gehalten, jedoch nur aus Gründen der Einfachheit, und weil die Diffusionstheorie für viele praktische Berechnungen ausreichend genau ist. Man könnte mit ein wenig mehr Mühe die Überlegungen auch für die Boltzmann'sche Transportgleichung durchführen.

In einigen weiteren Abschnitten wird dann die Frage behandelt, welche Information über physikalische Größen man aus der Lösung der adjungierten Gleichung erhalten kann. Dabei wird sich zeigen, daß die "adjungierte Beschreibung" der Beschreibung durch die Flußgleichungen in dem Sinne äquivalent ist, daß man die physikalisch beobachtbaren Größen in gleicher Weise aus jeder von beiden erhalten kann. Es wird gezeigt, daß die Reaktivität und einige andere nicht beobachtbare Größen so definiert werden können, daß sie in beiden Beschreibungen denselben Wert haben. Man kann außerdem eine "gemischte Beschreibung" angeben, von der aus ein direkter Weg zu den bekannten Variationsmethoden /7/, /8/, /9/ führt. Auch die von Usachev /10/ entwickelte Störungsrechnung für Reaktionsraten läßt sich unmittelbar aus der gemischten Beschreibung ableiten. Schließlich wird die "adjungierte" Beschreibung "explizit" auf das Problem eines Reaktivitätssprunges angewendet.

## 2. Definition des adjungierten Flusses

Der zunächst rein mathematische Begriff des "adjungierten Flusses" soll an Hand eines einfachen Falles erklärt werden. Wir gehen aus von der zeitunabhängigen Eingruppen-Diffusionsgleichung für den Neutronenfluß

$$\operatorname{div} (D \operatorname{grad} \phi) + (k-1) \sum_a \phi = 0 \quad (1)$$

die wir kurz  $M\phi = 0$  schreiben wollen, und den Randbedingungen

$$2.13 \quad D \frac{\partial \phi}{\partial n} + \phi = 0 \quad (2)$$

am Reaktorrand. Gleichung (2) besagt, daß am Reaktorrand der in das Innere gerichtete Neutronenstrom gleich Null ist.

Die Differentialgleichung (1) und die Randbedingung (2) definieren ein Eigenwertproblem. Das dazu adjungierte Eigenwertproblem ist dadurch definiert, daß die Forderung

$$\int_{\text{Reaktor}} \psi^+ M \varphi dV = \int_{\text{Reaktor}} \varphi M^+ \psi^+ dV \quad (3)$$

für alle Funktionen  $\varphi$  und  $\psi^+$ , die den einschlägigen Randbedingungen genügen, erfüllt sein soll. Offenbar ist (2) die Randbedingung für  $\varphi$ .

Um die durch (3) ausgedrückte Forderung auszuwerten, schreiben wir die linke Seite dieser Gleichung ausführlich

$$\int \psi^+ (\nabla(D\nabla\varphi) + (k-1) \sum_a \varphi) dV \quad (4)$$

Formt man den ersten Term des Integrals (4) durch zweimalige Anwendung des Green'schen Satzes um, dann wird aus (4)

$$\begin{aligned} \int_{\text{Reaktor}} \psi^+ M \varphi dV &= \int_{\text{Reaktor}} \varphi \left[ \nabla(D\nabla\psi^+) + (k-1) \sum_a \psi^+ \right] dV + \\ &+ \int_{\text{Obfl.}} df \left[ \psi^+ D \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi D \frac{\partial \psi^+}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Durch Vergleich von (5) und (3) folgt, daß die Forderung (3) erfüllt ist, wenn einmal der Operator  $M^+$  gleich dem Ausdruck

$$M^+ = \nabla(D\nabla) + (k-1) \sum_a \quad (6)$$

gesetzt wird, wodurch die Volumenintegrale in (3) und (5) gleich werden, und wenn außerdem die Funktion  $\psi^+$  der Randbedingung

$$2.13 D \frac{\partial \psi^+}{\partial n} + \psi^+ = 0 \quad (7)$$

am Reaktorrand unterworfen wird. Dann verschwindet das Oberflächenintegral in Gleichung (5).

Der Operator (6) und die Randbedingung (7) definieren das "adjungierte Randwertproblem", dessen Lösung der adjungierte Fluß ist. Im Falle der Eingruppentheorie ist also das adjungierte Randwertproblem mit dem ursprünglichen identisch, das heißt, die Eingruppengleichung ist "selbstadjungiert".

Im Falle der Multigruppengleichungen stellt der Operator  $M$  eine Matrix dar, deren Elemente in der üblichen Schreibweise lauten

$$M_{ij} = \delta_{ij} (\nabla(D_j \nabla) - \sum_{\text{rem}j}) + \chi_i (\nu \Sigma_f)_j + \sum_{j \rightarrow i} \quad (8)$$

Aus der Forderung (3) folgt ähnlich wie oben

$$M_{ij}^+ = M_{ji} \quad (9)$$

Der Multigruppenoperator ist also nicht mehr selbstadjungiert. Dies ist nicht verwunderlich, da die Moderation ein typischer dissipativer Vorgang ist, der stets auf ein nicht selbstadjungiertes Problem führt. Die Randbedingungen sind jedoch im Rahmen der Diffusionstheorie stets selbstadjungiert.

### 3. Definition des Neutronen-Einflusses

Im Anschluß an eine Arbeit von Lewins /1/ soll der Neutronen-Einfluß wie folgt definiert werden:

Wir gehen von einem Modellversuch aus. Zu einer gegebenen Zeit  $t_1$  werde eine bekannte Anzahl  $N_0$  von Neutronen der Energie  $E'$  an der Stelle  $r'$  in den Reaktor eingebracht. Vor dem Zeitpunkt  $t_1$  sollen sich keine Neutronen im Reaktor befinden.

Zu einer späteren Zeit  $t_2$  wird an einem im Reaktor befindlichen Detektor eine Messung vorgenommen.

Der Einfluß eines Neutrons wird nun definiert als der zu erwartende Beitrag jedes einzelnen dieser  $N_0$  Neutronen (bzw. deren "Nachkommen") zu der Messung im Zeitpunkt  $t_2$ .

Diese etwas abstrakte Definition kann man sich an Hand einer Reihe von Gedankenexperimenten veranschaulichen.

Als erstes denkt man sich folgendes Experiment durchgeführt:

An einer Stelle  $r'$  im Reaktor sei ein Target angebracht, in dem durch Einschuss von geladenen Teilchen aus einem Beschleuniger zur Zeit  $t_1$  ein Neutronenpuls bekannter Intensität erzeugt wird. Alle Neutronen haben die Energie  $E'$ . Der Reaktor kann im Prinzip über- oder unterkritisch sein, er soll aber vor  $t_1$  keine Neutronen enthalten.

Zu einer späteren Zeit  $t_2$  wird an einem Zähler die Zählrate abgelesen.

Für alle weiteren Experimente wird nun verabredet: Durch einen Zeitgeber wird dafür gesorgt, daß die Dauer eines jeden Experiments vom Beginn  $t_1$  bis zum Ende  $t_2$  stets die gleiche ist. Die Messungen finden stets zum Zeitpunkt  $t_2$  mit demselben Detektor statt.

Für die weiteren Experimente wird nun

- a) das Target vom Ort  $r'$  an verschiedene andere Stellen im Reaktor gebracht,
- b) durch verschiedene Targets die Energie der erzeugten Neutronen variiert,
- c) der Zeitpunkt der Erzeugung des Neutronenpulses zwischen  $t_1$  und  $t_2$  variiert.

Die bei diesen Experimenten erhaltenen Meßergebnisse definieren eine Funktion von  $r'$ ,  $E'$ ,  $t'$ . Sie werde, auf ein Neutron normiert, mit

$$\psi^+(r', E', t')$$

bezeichnet, und heißt der Einfluß pro Neutron, oder die Einflußfunktion. Offenbar paßt auf diese Funktion die obige Definition. Natürlich hängt der Einfluß von der Art des Detektors und der Zeit  $t_2$ , bzw. der Zeitdauer des Experiments,  $t_2 - t_1$ , ab; diese Abhängigkeit wird jedoch, als für das folgende weniger wichtig, zunächst unterdrückt.

An das Ausgangsexperiment soll noch eine Bemerkung angeschlossen werden. Zur Zeit  $t_1$  ist die durch den Neutronenfluß der Stärke  $N_0$  erzeugte Neutronendichte im Reaktor offenbar



$$n(r, t_1) = N_0 \delta(r' - r).$$

Das zu erwartende Meßergebnis ist dann also  $N_0$  mal dem Einfluß pro Neutron. Man kann diese Größe als Gesamteinfluß aller Neutronen im Reaktor deuten.

Während des Ablaufs des Experiments ändert sich nun die anfänglich  $\delta$ -förmige Neutronenverteilung durch Diffusion, Moderation, Erzeugung von Spaltneutronen, etc. Zu einem gewissen Zeitpunkt  $t''$  (vor  $t_2$ !) liege die Dichteverteilung  $n(r, t'')$  vor; wir denken uns diese Verteilung durch Rechnung oder Messung genau festgestellt.

Natürlich ist auch zum Zeitpunkt  $t''$  die Einflußfunktion  $\psi^+(r)$  als zu erwartender Beitrag eines Neutrons zum Meßergebnis zur Zeit  $t_2$  definiert. Das gesamte zu erwartende Meßergebnis erhält man dann offenbar durch Integration der Einflußfunktion über die Dichteverteilung, dh. durch den Ausdruck

$$R = \int dV n(r, t'') \psi^+(r, t'').$$

Die Größe  $R$  stellt offenbar den Gesamteinfluß für eine Verteilung  $n(r)$  dar.

Da sich bei dem beschriebenen Experiment das zu erwartende Meßergebnis während des Versuchsablaufes nicht ändert, ist hiermit folgendes plausibel gemacht:

Bei einem Experiment der oben beschriebenen Art, das mit einem Neutronenpuls zur Zeit  $t_1$  beginnt, ist der Gesamteinfluß aller Neutronen im Reaktor zu jedem Zeitpunkt zwischen  $t_1$  und  $t_2$  derselbe. Formelmäßig ausgedrückt heißt dies: Die Größe

$$R = \int dV \psi^+(r, t) \frac{\phi(r, t)}{v} \quad (10)$$

ist zeitlich konstant.

#### 4. Ableitung der Diffusionsgleichung für die Einflußfunktion

In diesem Abschnitt soll, ebenfalls an Lewins /1/ anknüpfend, die Diffusionsgleichung für die Einflußfunktion aus der Definition des Einflusses heraus entwickelt werden.

Dazu wird für den Einfluß eine Bilanz aufzustellen sein, die an Stelle der Neutronenbilanz bei der Flußgleichung tritt. Als Grundgröße bietet sich der Gesamteinfluß (10) an; man muß jedoch beachten, daß nur das Integral (10) über das gesamte Reaktorvolumen zeitlich konstant ist.

Wenn sich zur Zeit  $t_1$  eine gewisse Anzahl Neutronen in einem Teilvolumen  $V_1$  des Reaktors befinden, dann wird der Teil davon, der bis zur Zeit  $t'$  etwa in ein Volumen  $V_2$  diffundiert, zur Zeit  $t'$  mit dem Einfluß  $\gamma^+(V_2)$  in die Bilanz eingehen, während er zur Zeit  $t_1$  den Einfluß  $\gamma^+(V_1)$  besaß. In diesem Sinne können Neutronen, die sich von  $V_1$  nach  $V_2$  bewegen, als Träger eines "Einflußstromes" aufgefaßt werden. In der Bilanzgleichung müssen dann die durch Diffusion entstehenden Einflußverluste durch andere Prozesse, z.B. durch Erzeugung von Spaltneutronen, ausgeglichen werden.

Bevor wir an die Aufstellung der Bilanzgleichung gehen, soll noch bemerkt werden, daß in die Definition des Einflusses keinerlei Annahmen über ein Transportmodell eingehen. Man könnte also ebensogut für die Einflußfunktion auch die Boltzmann'sche Transportgleichung ableiten, wie dies in einer der Arbeiten von Lewins /2/ durchgeführt ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns jedoch auf die Diffusionsgleichung. Wir müssen dann bei der Ableitung natürlich konsequent die Näherungen der Diffusionstheorie einführen. Die folgenden Überlegungen sind völlig analog zu der üblichen Ableitung der Neutronendiffusion, wie sie z.B. in dem Buch von Glasstone und Edlund /11/ durchgeführt wird.

Zunächst soll nun aus einer gegebenen Einflußfunktion  $\gamma^+(r)$  der "Einflußstrom" abgeleitet werden. In einem beliebigen Punkt  $r$  des Reaktors sei die Neutronendichte  $n(r)$  auf eins normiert. Durch ein Flächenelement  $dS$ , das  $r$  enthält, fliegt dann in Richtung  $\Omega$  folgende Zahl von Neutronen pro Sekunde

$$Z(r)dSd\Omega = v dS \frac{d\Omega}{4\pi} \cos \vartheta \quad (11)$$

wobei  $\vartheta$  der Winkel zwischen  $\Omega$  und der Flächennormalen ist. Ein solches Neutron wird mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(r')dr' = \sum_S e^{-\Sigma_S/r'-r/} dr' \quad (12)$$

im Abstand  $/r'-r/$  vom Aufpunkt  $r$  gestreut. Dort hat dieses Neutron den Einfluß  $\psi^+(r')$ . Der durch diese Neutronen durch das Flächenelement transportierte Einfluß, also ihr Beitrag zum Einflußstrom, ist also nach (11) und (12)

$$i(r)dS = v dS \frac{d\Omega}{4\pi} \cos \vartheta \sum_S e^{-\Sigma_S/r'-r/} dr' \psi^+(r') \quad (13)$$

Hieraus erhält man durch Integration über den Halbraum den durch das Element  $dS$  tretenden gerichteten Einflußstrom

$$i^+(r) = v \sum_S \int_{\Omega > 0} \frac{d\Omega}{4\pi} \int dr' \cos \vartheta e^{-\Sigma_S/r'-r/} \psi^+(r') \quad (14)$$

Dieser Ausdruck ist aus der Theorie der Neutronendiffusion bekannt. Wie dort der Fluß, wird hier die Einflußfunktion  $\psi^+(r')$  in eine Taylor'sche Reihe in Punkt  $r$  entwickelt und nach dem 2. Glied abgebrochen. Dann lassen sich die Integrationen ausführen, und man erhält

$$i^+(r) = v \left[ \frac{\psi^+}{4} + \frac{1}{6 \Sigma_S} \frac{\partial \psi^+}{\partial r} \right] \quad (15)$$

Analog dazu wird

$$i^-(r) = v \left[ \frac{\psi^-}{4} - \frac{1}{6 \Sigma_S} \frac{\partial \psi^-}{\partial r} \right] \quad (15a)$$

Ersetzt man im Sinne der Transportnäherung  $\sum_S$  durch  $\sum_{tr}$ , dann wird der Nettostrom

$$i(r) = v D \frac{\partial \psi^+}{\partial r} \quad (15b)$$

In dieser Formel rührt der Faktor  $v$  von der Normierung auf ein Neutron her; hätte man  $\varphi(r)$  statt  $n(r)$  auf eins normiert, dann wäre dieser Faktor fortgefallen.

Ein wesentlicher Unterschied zur Neutronendiffusion liegt jedoch darin, daß der Einflußstrom nach größeren Werten von  $\psi^+(r)$  gerichtet ist. Dies ist physikalisch wie folgt zu erklären: Von den ursprünglich in  $r$  vorhandenen Neutronen fliegt wegen der angenommenen isotropen Verteilung die eine Hälfte in Richtung zunehmender, die andere in Richtung abnehmender Einflußfunktion. Da die ersten nach einem kleinen Zeitintervall mehr Einfluß besitzen als die letzteren, liegt ein Nettostrom des Einflusses in Richtung der zunehmenden Funktion  $\psi^+$  vor.

Aus dem Ausdruck (15b) für den Strom folgt durch div-Bildung die Einfluß-Leckage pro  $\text{cm}^3$  und sec

$$\text{div } i(r) = v \text{ div } (D \text{ grad } \psi^+) \quad (16)$$

Damit ist in analoger Weise wie für Neutronen die Diffusion auch für den Einfluß abgeleitet.

Es ist nun ein leichtes, die Bilanzgleichung für den Einfluß aufzustellen und daraus die Diffusionsgleichung für die Einflußfunktion zu gewinnen.

Als Beispiel sollen die 2-Gruppen-Gleichungen für einen thermischen Reaktor abgeleitet werden.

Im Punkt  $r$  zur Zeit  $t$  sei die Dichte der schnellen Neutronen auf eins normiert. Die schnellen Neutronen in  $1 \text{ cm}^3$  haben dann den Einfluß  $\psi_1^+(r, t)$ .

Innerhalb von  $t$  gehen nun folgende Vorgänge vor sich

$$\sum_1 v_1 \delta t \quad \text{Neutronen verschwinden aus der schnellen Gruppe}$$
$$p \sum_1 v_1 \delta t \quad \text{Neutronen erscheinen dafür in der thermischen Gruppe.}$$

Der Einfluß

$$v_1 \nabla (D \nabla \psi_1^+) \delta t$$

verschwindet durch Leckage.

Die Einflußbilanz für die schnelle Gruppe lautet dann

$$\begin{aligned} \psi_1^+(r, t) = & \left[ 1 - v_1 \Sigma_1 \delta t \right] \psi_1^+(r, t + \delta t) + v_1 \delta t p \Sigma_1 \psi_2^+(r, t + \delta t) + \\ & + v_1 \delta t \nabla (D_1 \nabla \psi_1^+) \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß diejenigen Neutronen, die in die thermische Gruppe moderiert werden, nach  $\delta t$  den Einfluß  $\psi_2^+(r, t + \delta t)$  pro Neutron besitzen.

Für  $\delta t \rightarrow 0$  folgt

$$-\frac{1}{v_1} \frac{\partial \psi_1^+}{\partial t} = \nabla (D_1 \nabla \psi_1^+) - \Sigma_1 \psi_1^+ + p \Sigma_1 \psi_2^+ \quad (17)$$

Analog dazu leitet man für die thermische Gruppe die folgende Gleichung ab

$$-\frac{1}{v_2} \frac{\partial \psi_2^+}{\partial t} = \nabla (D_1 \nabla \psi_2^+) - \Sigma_{a2} \psi_2^+ + v \Sigma_{f2} \psi_1^+ \quad (18)$$

Die beiden Gleichungen (17) und (18) für den schnellen und den thermischen Einfluß sind, wie man nach dem im 2. Abschnitt Gesagten leicht sieht, zu den 2-Gruppen-Gleichungen für den Neutronenfluß adjungiert.

Da die Übertragung auf beliebig viele Gruppen nichts Neues bringt, soll sie hier nicht durchgeführt werden.

Damit haben wir folgendes Ergebnis:

- a) Die Einflußfunktion genügt für  $t_1 < t < t_2$  im Rahmen der Diffusionsnäherung den zu den Flußgleichungen adjungierten Gleichungen. Im Mehrgruppenfall erhält man diese adjungierten Gleichungen durch Transposition der Matrix M und Umkehr des Vorzeichens der Zeitableitung. Ebenso ist begrifflich das Vorzeichen des (in den Gleichungen nicht vorkommenden) Stromes umzukehren.
- b) Ein Neutron am Reaktorrand mit Komponente nach außen kann keinen Einfluß haben. Es gibt also keinen Einflußstrom aus dem Reaktor heraus, d.h.

$$i^+ = 0$$

am Reaktorrand. Hieraus folgt die Randbedingung für die Einflußfunktion

$$2.13 \quad D \frac{\partial \psi^+}{\partial n} + \psi^+ = 0$$

am Reaktorrand. Die Einflußfunktion genügt also derselben Randbedingung wie der adjungierte Fluß.

- c) Man kann demnach den zunächst als physikalische Größe definierten Einfluß mit dem adjungierten Fluß identifizieren, oder, mit anderen Worten, der als mathematische Größe definierte adjungierte Fluß hat als "Neutroneneinfluß" eine wichtige physikalische Bedeutung.

## 5. Zusammenhang mit der älteren Definition

Bei der Definition des Einflusses wurde auf eine Messung Bezug genommen, die mit einem festen Detektor und zu einer festgelegten Zeit  $t_2$  durchgeführt werden sollte. Mit der Messung sollte außerdem das Experiment beendet sein. Natürlich hängt der Einfluß von den Verabredungen über die Messung ab, d.h. es gibt beliebig viele verschiedene "Einflußfunktionen", je nachdem, wann und mit welchem Detektor gemessen werden soll.

Im Gegensatz dazu wird in der älteren Literatur, z.B. auch in dem Buch von Weinberg und Wigner /6/ eine Definition des Einflusses verwendet, bei der die Einflußfunktion eindeutig und unabhängig von einer Messung festliegt. Bei Weinberg und Wigner werden folgende Annahmen gemacht:

- a) der Reaktor ist gerade kritisch,
- b) nach dem Einbringen von Neutronen in den Reaktor wird gewartet, bis die Transienten abgeklungen sind. Erst wenn der Reaktor stationär ist, wird der Einfluß der eingebrachten Neutronen festgestellt.

Wir wollen zeigen, daß unter diesen beiden Bedingungen die von uns definierte Einflußfunktion von der Detektorcharakteristik unabhängig ist; trivialerweise ist sie vom Zeitpunkt der Messung unabhängig.

Wir zeigen dies der Einfachheit halber an Hand der Eingruppengleichung. Sie lautet

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla (D \nabla \phi) + (k-1) \sum_a \phi. \quad (19)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$\phi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(r) e^{\lambda_n t}$$

wobei die Eigenfunktionen wie folgt normiert sind

$$\int \varphi_n^2(r) dV = 1.$$

Der erste Eigenwert ist Null,  $\lambda_1 = 0$ , alle höheren Eigenwerte sind negativ.

Wird zur Zeit  $t = 0$  ein Neutron an die Stelle  $r'$  gebracht, dann hat der zeitabhängige Fluß die Form

$$\phi(r, t) = v \varphi_1(r') \varphi_1(r) + v \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n(r') \varphi_n(r) e^{\lambda_n t}.$$

Nach dem Abklingen der Transienten bleibt nur der erste Term übrig. Wird nun mit einem Detektor mit  $\sum_a^{(1)}$  gemessen, dann erhält man das Ergebnis

$$v \varphi_1(r') \int \sum_a^{(1)}(r) \varphi_1(r) dV$$

während ein zweiter Detektor mit dem Wirkungsquerschnitt  $\sum_a^{(2)}$  das Ergebnis

$$v \varphi_1(r') \int \sum_a^{(2)}(r) \varphi_1(r) dV$$

liefert.

Man sieht, daß sich für gegebenes  $r'$  die beiden Messungen nur um den festen Faktor

$$\alpha = \frac{\int \sum_a^{(2)} \varphi_1 dV}{\int \sum_a^{(1)} \varphi_1 dV}$$

unterscheiden.

Das heißt: Wird die Einflußfunktion  $\Psi^+(r')$  mit zwei verschiedenen Detektoren aufgenommen, dann erhält man Funktionen, die sich nur um einen Faktor unterscheiden. Wir betrachten diesen Unterschied als unwesentlich und finden dann, daß die Einflußfunktion vom Detektor unabhängig ist. Danach ist aber auch leicht zu sehen, daß die im 3. Abschnitt gegebene Definition des Einflusses direkt auf die Definition im Buch von Weinberg und Wigner führt, wenn man die dort gemachten speziellen Annahmen berücksichtigt.

## 6. Beschreibung eines Reaktors durch die Flußgleichungen und die adjungierten Gleichungen

In diesem Abschnitt soll die bereits in der Einleitung gestellte Frage aufgegriffen werden, ob es neben der üblichen neutronenphysikalischen Beschreibung eines Reaktors durch die Flußgleichungen auch eine sinnvolle Beschreibung durch die adjungierten Gleichungen gibt. Insbesondere soll untersucht werden, welche Informationen man aus jeder der beiden Beschreibungen erhalten kann.

Da die beiden Gleichungssysteme eine gewisse Spiegelbildlichkeit aufweisen, ist zu vermuten, daß man die interessante Information, d.h. Werte für die physikalisch beobachtbaren Größen, aus jeder der beiden Beschreibungen in gleicher Weise erhalten kann. Es wird sich zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist. In diesem Sinne sind Flußbeschreibung und Beschreibung durch den adjungierten Fluß gleichwertig. Darüber hinaus werden wir noch eine dritte, gemischte Beschreibung einführen, die sowohl den Fluß als auch den adjungierten Fluß benützt. Der Vorteil dieser Beschreibung liegt darin, daß der berechnete Wert der beobachtbaren Größe bei Variation des Flusses und der Adjungierten stationär ist, oder mit anderen Worten, das Ergebnis ist unempfindlich auf kleine Fehler im Fluß und in der Adjungierten.



Wir knüpfen die folgenden Überlegungen an ein spezielles Problem an, das man in gewissem Sinne als Grundaufgabe der Reaktortheorie bezeichnen kann. Zur Zeit  $t = t_1$  werde ein Neutronenpuls in dem "leeren" Reaktor erzeugt. Zu einer späteren Zeit  $t_2$  werde in einem Detektor die Reaktionsrate gemessen. Aufgabe der Reaktortheorie ist es nun, das Meßergebnis zu berechnen.

Von dieser Grundaufgabe kann man leicht zu dem allgemeinen Fall zeitlich ausgedehnter Neutronenquellen und Meßprozesse übergehen. Man hat dazu nur die Lösungen der Grundaufgabe in geeigneter Weise zu superponieren, wozu nur einfache Integrationen über die Zeit erforderlich sind.

Bei der oben definierten Grundaufgabe liefert offenbar der (zeitlich  $\delta$ -förmig gedachte) Neutronenpuls die Anfangsverteilung für den Neutronenfluß. Umgekehrt ist zu erwarten, daß die Messung die "Endverteilung" für den Einfluß bestimmt.

Um dies zu bestätigen, wenden wir die Definition des Einflusses eines Neutrons auf den Zeitpunkt der Messung an. Offenbar erzeugt ein Neutron, das zum Zeitpunkt  $t_2$  an der Stelle  $r'$  in den Reaktor gelangt, den Fluß

$$\phi(r, t_2) = v \delta(r' - r).$$

Die Detektormessung liefert das Ergebnis

$$R = \int \sum_a(r) \phi(r, t_2) dV = v \sum_a(r'). \quad (20)$$

Das heißt aber: Der Einfluß eines Neutrons zur Zeit  $t_2$  ist (bis auf die Normierung) gleich  $v \sum_a(r')$ . Physikalisch bedeutet das einfach: Ein Neutron, das zur Zeit der Messung in den Reaktor gebracht wird, kann zur Messung nur beitragen, wenn es in den Detektor selbst gebracht wird. Der Beitrag ist proportional zum Wirkungsquerschnitt der Detektorreaktion.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Behandlung der oben definierten Grundaufgabe in Angriff nehmen.

Die übliche Lösung ist die mittels der Flußgleichungen

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = M\phi + S(r) \delta(t-t_1). \quad (21)$$

Dabei sind  $1/v$  und der Operator  $M$  Matrizen.  $S(r)$  ist ein "Quellstoß" mit der Dimension Neutronen/cm<sup>3</sup>.

Laut Annahme sind für  $t < t_1$  keine Neutronen im Reaktor. Man erhält deshalb durch Integration der Gleichung (21) von  $t_1 - \varepsilon$  bis  $t_1 + \varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Anfangsverteilung für den Fluß

$$\phi(r, t_1 + \varepsilon) = vS(r). \quad (22)$$

Nach (22) und den üblichen Randbedingungen kann  $\phi(r, t)$  für  $t > t_1$  aus der Differentialgleichung (21) berechnet werden. Die Messung zur Zeit  $t_2$  ergibt dann

$$R_1 = \int \Sigma_a(r) \phi(r, t_2) dV. \quad (23)$$

Dieser Ausdruck ist das Ergebnis der "Flußbeschreibung".

Wir versuchen nun, die Grundaufgabe mit Hilfe der adjungierten Gleichungen zu behandeln. Wir lassen uns beim Aufsuchen der Lösung zunächst von physikalischen Überlegungen leiten und werden dann hinterher exakt mathematisch zeigen, daß die gefundene Lösung mit der Lösung (23), die aus den Flußgleichungen erhalten wurde, identisch ist.

Die adjungierten Gleichungen lauten

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial \phi^+}{\partial t} = M^+ \phi^+ + \Sigma_a(r) \delta(t_2 - t). \quad (24)$$

Der homogene Teil dieser Gleichung muß natürlich zum homogenen Teil der Gleichung (21) adjungiert sein. Der inhomogene Term wurde im Hinblick auf die Endbedingungen (20) gewählt. Aus (24) folgt die richtige Endbedingung

$$\phi^+(r, t_2 - \varepsilon) = v \Sigma_a(r). \quad (25)$$

Man kann nun  $\phi^+(r, t)$  für  $t < t_2$  berechnen. Gemäß der physikalischen Bedeutung von  $\phi^+$  ist zu erwarten, daß das Meßergebnis durch den Ausdruck

$$R_2 = \int \phi^+(r, t_1) S(r) dV \quad (26)$$

gegeben ist.

Wir wollen nun die Identität von  $R_1$  und  $R_2$  exakt beweisen. Dazu bilden wir die Größe

$$N(t) = \int \frac{\phi^+(r, t) \phi(r, t)}{v} dV.$$

Ihre Zeitableitung wird für  $t_1 < t < t_2$

$$\dot{N}(t) = \int dV \left[ \phi^+ \frac{1}{v} \dot{\phi} + \dot{\phi}^+ \frac{1}{v} \phi \right] = \int dV \left[ \phi^+ M \phi - \phi M^+ \phi^+ \right] = 0.$$

Der letzte Schritt folgt aus der Definition des adjungierten Operators. Die Größe  $N(t)$  ist also für  $t_1 < t < t_2$  zeitlich konstant.

Nun ist offenbar

$$N(t_2 - \epsilon) = \int \phi^+(t_2 - \epsilon) \frac{1}{v} \phi(t_2 - \epsilon) dV = \int \Sigma_a \phi(t_2) dV = R_1$$

und

$$N(t_1 + \epsilon) = \int \phi^+(t_1 + \epsilon) \frac{1}{v} \phi(t_1 + \epsilon) dV = \int \phi^+(t_1) S dV = R_2.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Gleichheit von  $R_1$  und  $R_2$ .

Wir haben also folgendes Ergebnis:

Man kann jede meßbare Größe sowohl aus den Flußgleichungen als auch aus den adjungierten Gleichungen berechnen. Jedes der beiden Gleichungssysteme liefert also eine vollständige Beschreibung der Vorgänge im Reaktor. Bei beiden Beschreibungen wird jedoch die meßbare Größe unter verschiedenem physikalischem Blickwinkel betrachtet.

Obwohl von den beiden Gleichungen, nämlich Flußgleichung und adjungierter Gleichung, jede einzeln zur vollständigen Beschreibung des Reaktors ausreicht, ist es oft vorteilhaft, beide zu einer "ge-

mischten" Beschreibung zu kombinieren. Um dies zu zeigen, gehen wir von der folgenden Gleichung aus

$$R = \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \left[ \sum_a \delta(t_2-t) \phi_a \phi_a^+ S \delta(t-t_1) + \phi^+ M \phi - \frac{1}{2} \phi^+ \frac{1}{v} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\phi}^+ \frac{1}{v} \phi \right] \quad (27)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die rechte Seite das Meßergebnis  $R$  darstellt, wenn  $\phi$  der Gleichung (21) und  $\phi^+$  der Gleichung (24) genügt. Die Gleichung in der Form (27) besteht also zu Recht.

Nun nehmen wir an, daß  $\phi^+$  der Gleichung (24) nur bis auf einen "kleinen Fehler"  $\delta\phi^+$  genügt, wobei natürlich  $\delta\phi^+ = 0$  ist für  $t > t_2$ .

Wir wollen aus der Gleichung (27) den zugehörigen Fehler  $\delta R$  in 1. Ordnung in  $\delta\phi^+$  berechnen.

$$\delta R = \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \left[ \delta\phi^+ S \delta(t-t_1) + \delta\phi^+ M \phi - \frac{1}{2} \delta\phi^+ \frac{1}{v} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\delta\phi^+} \frac{1}{v} \phi \right] \quad (28)$$

Das letzte Glied läßt sich durch partielle Integration umformen

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \frac{1}{2} \dot{\delta\phi^+} \frac{1}{v} \phi = \frac{1}{2} \int dV \delta\phi^+ \frac{1}{v} \phi \Big|_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} - \frac{1}{2} \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \delta\phi^+ \frac{1}{v} \dot{\phi} \quad (29)$$

Da nun

$$\delta\phi^+(t_2+\varepsilon) = 0 \quad (30)$$

und

$$\delta\phi(t_1-\varepsilon) = 0 \quad (31)$$

ist der erste Term rechts in (29) gleich Null, und wir erhalten

$$\delta R = \int_{t_1 - \varepsilon}^{t_2 + \varepsilon} dt \int dV \delta \phi^+ \left[ S \delta(t - t_1) + M \phi - \frac{1}{v} \dot{\phi} \right]. \quad (32)$$

Da  $\phi$  der Gleichung (21) genügen sollte, ist der Ausdruck rechts Null. Das heißt aber, daß R, dargestellt durch (27), stationär ist bei Variationen von  $\phi^+$  im Intervall  $t_1 < t < t_2$ . Analog dazu zeigt man, daß R auch bei Variationen von  $\phi$  stationär ist.

Die durch (27) ausgedrückte "gemischte" Beschreibung erfordert zwar die Kenntnis sowohl des direkten als auch des adjungierten Flusses, hat jedoch den Vorteil, daß das Ergebnis gegen Fehler in beiden Flüssen in 1. Ordnung unempfindlich ist.

Wegen dieser Eigenschaft kann man R, aufgefaßt als Funktional von  $\phi$  und  $\phi^+$ , zum Ausgangspunkt für ein Variationsprinzip machen.

Die Anwendung der Variationsmethode auf stationäre Probleme der Reaktorphysik wird bereits in einer Arbeit von Selengut /7/ ausführlich diskutiert. Für instationäre Probleme wurde die Methode erst kürzlich von Kaplan /8/ und von Köhler /9/ verwendet.

Unsere Überlegungen haben gezeigt, daß man jede beliebige beobachtbare Größe als Funktional eines Variationsprinzips auffassen und somit nach der Variationsmethode näherungsweise berechnen kann.

## 7. Folgerungen für die Definition der Reaktivität

Im folgenden soll untersucht werden, wie man die Reaktivität und einige andere integrale Größen, die in der Reaktorphysik häufig verwendet werden, am zweckmäßigsten für Reaktoren mit ortsabhängigen Wirkungsquerschnitten definiert. Wir denken dabei an Mehrzonenreaktoren, bei denen z.B. die  $\beta$ 's, d.h. die Anteile der verzögerten Neutronen, zonenweise verschieden sein können. Dagegen wollen wir annehmen, daß die Zerfallskonstanten  $\lambda_1$  in allen Zonen gleich sind. Wir gehen aus von den Multigruppengleichungen für den Neutronenfluß und den Gleichungen für die Vorläufer verzögerter Neutronen, wobei die Zeitabhängigkeit bereits absepariert ist. Die Gleichungen lauten

$$\frac{\omega}{v_i} \phi_i = -A_{ij} \phi_j + (1-B) \chi_i \sum_j v \Sigma_{fj} \phi_j + \sum_m \chi_{im} \lambda_m c_m$$

$$\omega c_m = B_m \sum_j v \Sigma_{fj} \phi_j - \lambda_m c_m \quad (33)$$

Dabei umfaßt der Verlustoperator  $A_{ij}$  die folgenden Terme

$$A_{ij} = \delta_{ij} (-\nabla(D_j \nabla) + \Sigma_{remj}) + \Sigma_j - i \quad (34)$$

Die Eigenwerte und Eigenlösungen dieser Gleichungen seien mit  $\omega_q, \varphi_{iq}, c_{mq}$  bezeichnet. Um von hieraus zum Begriff der Reaktivität zu gelangen, multipliziert man die Gleichungen (33) für eine beliebige Eigenfunktion  $\varphi_q, c_q$  der Reihe nach mit willkürlichen Funktionen  $\psi_i^+, \gamma_m^+$ , integriert über das Reaktorvolumen und addiert die so entstehenden Gleichungen.

Damit erhält man die Beziehung

$$\omega_q \int dV \left( \sum_i \frac{\psi_i^+ \varphi_{iq}}{v_i} + \sum_m \gamma_m^+ c_{mq} \right) = - \sum_{i,j} \int dV \psi_i^+ A_{ij} \varphi_{jq} +$$

$$+ \sum_{i,j} \int dV (1-B) \chi_i \psi_i^+ v \Sigma_{fj} \varphi_{jq} + \sum_m \lambda_m \int dV \psi_i^+ \chi_{im} c_{mq} +$$

$$+ \sum_{j,m} \int dV \gamma_m^+ B_m v \Sigma_{fj} \varphi_{jq} - \sum_m \lambda_m \int dV \gamma_m^+ c_{mq} \quad (35)$$

wobei  $\chi_i^{st}$  das statische Spaltneutronenspektrum ist.

Diese Beziehung läßt sich wesentlich einfacher schreiben, wenn man die folgenden integralen Größen einführt

$$k_q = \frac{1}{1-\rho_q} = \frac{1}{A_q} \sum_{i,j} \int dV \chi_i^{st} \psi_i^+ v \Sigma_{fj} \varphi_{jq}$$

$$l_q = \frac{1}{A_q} \sum_i \int dV \frac{\psi_i^+ \varphi_{iq}}{v_i}$$

$$B_{mq} = \frac{\sum_{i,j} \int dV \chi_{im} B_m \psi_i^+ v \Sigma_{fj} \varphi_{jq}}{\sum_{i,j} \int dV \chi_i^{st} \psi_i^+ v \Sigma_{fj} \varphi_{jq}} \quad (36)$$

wobei die Hilfsgröße  $A_q$  durch

$$A_q = \sum_{i,j} \int dV \psi_i^+ A_{ij} \psi_{jq}$$

definiert ist.

Beachtet man außerdem, daß die  $c_m$  durch

$$c_{mq} = \frac{\beta_m}{\lambda_m + \omega_q} \sum_j \nu \sum_{fj} \psi_{jq} \quad (36a)$$

gegeben sind, und bestimmt aus Gründen der Einfachheit die  $\gamma_m^+$  durch die Gleichung

$$\gamma_m^+ = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \omega_q} \sum_j \chi_{jm} \psi_j^+ \quad (37)$$

dann läßt sich (35) nach einigen Umformungen als sogenannte "Inhour-Gleichung"

$$\rho_q (1 + l_q \omega_q) = l_q \omega_q + \sum_m \frac{\beta_{mq} \omega_q}{\lambda_m + \omega_q} \quad (38)$$

schreiben, an die wir hier die Bemerkung knüpfen, daß sie in Strenge nur die eine physikalisch sinnvolle Lösung  $\omega_q$  besitzt. Dementsprechend sind die durch (36) gegebenen integralen Reaktorgrößen, nämlich Reaktivität  $\rho$ , prompte Generationsdauer  $l$  und effektive Anteile der verzögerten Neutronen  $\beta_m$ , zunächst nur in Verbindung mit einer speziellen Eigenfunktion  $\psi_{iq}$  definiert, was durch den Index  $q$  zum Ausdruck gebracht ist. Wir werden weiter unten diskutieren, in welchem Sinne durch einen interessanten Entartungseffekt die durch (36) definierten Größen für mehrere Eigenfunktionen nahezu dieselben sind, so daß die Gleichung (38) verschiedene physikalisch sinnvolle Lösungen besitzt und damit ihre eigentliche Bedeutung als Inhour-Gleichung gewinnt. Vorher soll jedoch auf den Hauptpunkt dieses Abschnitts eingegangen werden.

Während die Lösung  $\omega_q$  der Gleichung (38) als Eigenwert der Gleichungen (33) eindeutig bestimmt ist, und überdies direkt aus beobachtbaren Größen erhalten werden kann, hängen die integralen

Größen (36) von der Wichtungsfunktion  $\psi_i^+$  ab, und ihre Definition ist daher in gewissem Maße willkürlich. Jede mögliche Kombination von Größen (36) führt jedoch auf denselben Eigenwert  $\omega_q$  und ist daher in sich konsistent.

Man kann statt von den Flußgleichungen (33) auch von den adjungierten Gleichungen ausgehen, für die bekanntlich  $\omega_q$  ebenfalls ein Eigenwert ist. Zur Ableitung der integralen Größen multipliziert man mit willkürlichen Funktionen  $\psi_i$  und verfährt wie oben. Man erhält dann "adjungierte" Größen  $\zeta^+$ ,  $l^+$ ,  $\beta^+$  aus Gleichungen der Form (36), wo lediglich die  $\psi_i^+$  durch die adjungierten Flüsse  $\varphi_i^+$  und die Flüsse  $\varphi_i$  durch die willkürlichen  $\psi_i$  ersetzt werden. Auch die "adjungierten" Größen sind in gewissem Maße willkürlich, und natürlich im allgemeinen von den Größen (36) verschieden. Jedoch führen sie ebenfalls zu einer Gleichung (38), die die Lösung  $\omega_q$  besitzt.

Man kann nun als Wichtungsfunktion  $\psi^+$  in (36) den adjungierten Fluß wählen, und ebenso den Fluß als Wichtungsfunktion in die Definitionsgleichung der "adjungierten" Größen  $\zeta^+$ ,  $l^+$ ,  $\beta^+$  einsetzen. Dann und nur dann sind offenbar die aus den Flußgleichungen erhaltenen Größen  $\zeta$ ,  $l$ ,  $\beta$  mit den aus den adjungierten erhaltenen identisch.

Wir haben also das Ergebnis: Die Größen Reaktivität, prompte Generationsdauer und effektive Anteile der verzögerten Neutronen sind nicht eindeutig definiert und daher zunächst nicht beobachtbar. Sie haben im allgemeinen in der Flußbeschreibung und adjungierten Beschreibung verschiedene Werte. Man kann sie jedoch so definieren, daß sie in beiden Beschreibungen identisch sind. Dazu ist in den Gleichungen (36) die Wichtungsfunktion  $\psi_i^+$  gleich dem adjungierten Fluß zu setzen. Legt man sich auf diese Definition fest, dann sind die betrachteten Größen im Prinzip beobachtbar. Übrigens erhält dann die Gleichung (35) die einfache Bedeutung einer Bilanzgleichung für den Gesamteinfluß. Man überzeugt sich leicht, daß die Terme der rechten Seite der Reihe nach die folgende Bedeutung haben:

Einflußverlust durch Absorption, Leckage und Moderation,  
Einflußgewinn durch Erzeugung von prompten Spaltneutronen,  
Einflußgewinn durch Erzeugung von Neutronen aus Vorläuferkernen,  
Einflußänderung durch Erzeugung von Vorläuferkernen,  
Einflußverlust durch Zerfall von Vorläuferkernen.



Die linke Seite stellt die Einflußänderung durch Änderung der Neutronen- und Vorläuferdichten dar.

Der Vollständigkeit halber soll hier noch eine bereits von Gozani /12/ angestellte Betrachtung über den Gültigkeitsbereich der Inhour-Gleichung (38) angeschlossen werden.

Für den prompt unterkritischen Reaktor lassen sich die Eigenlösungen der Multigruppengleichungen (33) wie folgt klassifizieren: Neben der Grundlösung gibt es "prompte" Oberschwingungen, die im wesentlichen spektrale Oberschwingungen sind; sie klingen mit sehr kleinen Zeitkonstanten ab und sind höchstens in gepulsten Experimenten meßbar. Wir wollen uns hier nicht weiter für sie interessieren.

Daneben gibt es Oberschwingungen, deren (absolute) Eigenwerte in der Größenordnung der  $\lambda_m$  liegen. Sie beschreiben Ausgleichsvorgänge zwischen den Vorläuferkonzentrationen. Für diese Oberschwingungen ist, wie man leicht sieht, in den ersten Gleichungen (33) der Term auf der linken Seite vernachlässigbar. Dann hat aber (33) nach Elimination der  $C_m$  die Form der Gleichungen für den statischen Fluß. Es liegt also eine "Entartung" vor in dem Sinne, daß beim prompt unterkritischen Reaktor die Flußverteilungen  $\varphi_i$  für die 6 "verzögerten" Eigenschwingungen (bei 6 Gruppen verzögerter Neutronen) nahezu dieselben sind, und mit der statischen Flußverteilung übereinstimmen. Man kann also die integralen Größen (33) in guter Näherung so definieren, daß sie für alle verzögerten Eigenschwingungen dieselben sind. Die zugehörige Inhour-Gleichung (38) gewinnt dann in dem Sinne erweiterte Bedeutung, als sechs von ihren Lösungen mit den Eigenwerten der verzögerten Eigenschwingungen übereinstimmen.

Zu beachten ist, daß die räumlichen Oberschwingungen durchaus zu den "verzögerten" gehören, da sich die räumliche Verteilung der Vorläufer nur im Zeitmaßstab der  $1/\lambda_m$  ausgleicht. Zu jeder räumlichen Oberschwingung der Gleichung für den statischen Fluß gehören, genau wie zur Grundschwingung, 6 "verzögerte" Eigenschwingungen, die sich durch die Konzentrationen der einzelnen Vorläufergruppen unterscheiden; die zugehörigen  $\omega$ 's genügen einer Inhour-Gleichung.

Die letzte Lösung der Gleichung (38) gehört zu einer Oberschwingung, die die Angleichung des Neutronenflusses an das Niveau der Vorläuferkonzentrationen beschreibt. Ihr Eigenwert liegt in der Größenordnung  $\beta/l$ , sie muß also zu den "prompten" Oberschwingungen gerechnet werden. Gozani /12/ hat gezeigt, daß die Flußverteilung dieser Eigenschwingung in einem  $D_2O$ -Reaktor von der statischen Flußverteilung erheblich abweicht. Wenn man also in die Inhour-Gleichung (38) Werte der  $\zeta$ ,  $l$ ,  $\beta$  einsetzt, die mit den statischen Flüssen berechnet wurden, muß man damit rechnen, daß die größte Lösung der Inhour-Gleichung von dem Eigenwert des Systems (33) erheblich abweichen kann. Nur im Falle des exakt homogenen, unreflektierten Reaktors geht die Entartung so weit, daß alle 7 Lösungen der Gleichung (38) Eigenwerte der Gleichungen (33) sind.

Man kann sich das über räumliche Oberschwingungen Gesagte leicht im Falle von nur einer Flußgruppe und einer Vorläufergruppe klar machen. Bezeichnet man mit  $\varphi_q(r)$  die orthogonalen Eigenfunktionen, dann erhält man durch eine leichte Verallgemeinerung der Gleichung (10, 35, 3) bei Glasstone und Edlund folgendes Ergebnis:

Bei Injektion eines Neutrons zur Zeit  $t = 0$  wird der Fluß

$$\phi(r) = \sum_q \left[ \frac{l\lambda\beta}{(\beta - \rho_q)^2} e^{\omega_{1q}t} + \left(1 - \frac{l\lambda\beta}{(\beta - \rho_q)^2}\right) e^{\omega_{2q}t} \right] \varphi_q(r') \varphi_q(r) . \quad (39)$$

Wird jedoch zur Zeit Null ein Vorläuferkern eingebracht, dann ist der zeitliche Verlauf des Neutronenflusses gegeben durch

$$\phi(r) + \sum_q \frac{\beta}{\beta - \rho_q} (e^{\omega_{1q}t} - e^{\omega_{2q}t}) \varphi_1(r') \varphi_1(r) . \quad (39a)$$

Dabei ist  $\rho_q$  die zur Eigenschwingung  $q$  gehörende Reaktivität,  $\omega_{1q}$  und  $\omega_{2q}$  sind die reziproken Perioden, die nach Glasstone und Edlund /11/ in guter Näherung durch die Ausdrücke

$$\omega_{1q} = \frac{\lambda\rho_q}{\beta - \rho_q} , \quad \omega_{2q} = - \frac{\beta - \rho_q}{l}$$

gegeben sind. Wir interessieren uns nur für die verzögerten Eigenwerte, d.h. die  $\omega_{1q}$ . Je nach der Leckage des Reaktors sind die Oberschwingungen stark unterkritisch, d.h. die  $\rho_q$ 's sind negativ, und absolut wesentlich

lich größer als  $\beta$ . Die Eigenwerte  $\omega_{1q}$  nähern sich dem Wert  $-\lambda$ , d.h. sie sind für jeden Index  $q$  "verzögerte" Eigenwerte. Die Koeffizienten der zugehörigen Eigenschwingungen nehmen mit wachsendem  $q$  bei Injektion eines Neutrons viel stärker ab als bei Injektion eines Vorläuferkerns.

## 8. Anwendung auf das Problem des Reaktivitätssprunges

### a) Allgemeine Formulierung

Die Aufgabe, das Verhalten eines Reaktors nach einem Reaktivitätssprung zu berechnen, führt direkt auf die im 6. Abschnitt formulierte Grundaufgabe, da man die Neutronendichte zur Zeit des Sprunges als Quelldichte für den Reaktor nach dem Sprung auffassen kann. Die adjungierte Beschreibung liefert eine besonders einfache allgemeine Formel für das Verhalten des Reaktors nach dem Sprung. Wir werden die allgemeine Formel weiter auswerten für den Fall, daß nur das asymptotische Verhalten interessant ist.

Für die folgende Formulierung des Problems wird angenommen, daß der Multigruppenoperator  $M$  zur Zeit  $t = t_1$  sich sprunghaft ändert, d.h.

$$M(t) = \begin{cases} M_0 & t < t_1 \\ M_1 & t > t_1 \end{cases}$$

wobei  $M_0$  und  $M_1$  zeitunabhängig sind. Ferner soll sich der Reaktor vor  $t_1$  auf einer konstanten Periode befinden, d.h. der Neutronenfluß ist

$$\phi(r, t) = \phi_0(r) e^{\omega_0 t} \quad \text{für} \quad t < t_1$$

wobei  $\phi_0(r)$  der Gleichung

$$M_0 \phi_0 = \frac{\omega_0}{v} \phi_0$$

genügt.

Dann kann man das Ergebnis einer durch den Wirkungsquerschnitt  $\sum_a(r)$  bestimmten Messung zur Zeit  $t_2$  wie folgt erhalten:

Aus der Gleichung

$$-\frac{1}{v} \dot{\phi}^+ = M_1 \phi^+ + \sum_a \int (t_2 - t)$$

bestimmt man  $\phi^+$ . Dann ist das Meßergebnis nach Formel (26) gegeben durch

$$R = \int dV \phi^+(r, t_1) S(r). \quad (40)$$

Die Quelle  $S(r)$  zur Zeit  $t_1$  ist offenbar die Neutronendichte zur Zeit  $t_1$ . Man erhält also den sehr einfachen Ausdruck

$$R = \int dV \frac{\phi^+(r, t_1) \phi(r, t_1)}{v} \quad (41)$$

für die durch den Wirkungsquerschnitt  $\sum_a$  bestimmte Reaktionsrate nach dem Sprung.

In vielen praktischen Fällen ist die Zeitdifferenz  $t_2 - t_1$  so groß, daß man nur den asymptotischen Verlauf von  $\phi^+$  zu kennen braucht. Wir wollen für diesen Fall die Gleichung (41) auswerten und machen dazu explizit die physikalisch plausible Annahme, daß Fluß und adjungierter Fluß in einen zur stabilen Periode gehörenden asymptotischen Anteil und einen transienten Anteil zerlegt werden können. Die asymptotischen Anteile werden

$$\begin{aligned} \phi_{as}^-(r, t) &= c \varphi_1^-(r) e^{\omega_1(t-t_1)} \\ \phi_{as}^+(r, t) &= c^+ \varphi_1^+(r) e^{\omega_1(t_2-t)} \end{aligned} \quad (42)$$

wobei also  $\varphi_1^-$  und  $\varphi_1^+$  den Gleichungen

$$\left(-\frac{\omega_1}{v} + M_1\right) \varphi_1^- = 0, \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\omega_1}{v} + M_1^+\right) \varphi_1^+ = 0 \quad (43)$$

genügen. Außerdem sei die Normierung

$$\int \frac{\varphi_1^+ \rho_1}{v} dV = 1 \quad (44)$$

angenommen.

Nun ändert sich  $\phi_{as}^+$  nicht, wenn man den Meß-Wirkungsquerschnitt  $\Sigma_a$  durch  $c^+ \varphi_1^+ / v$  ersetzt. Wir schreiben

$$\Sigma_a = \frac{c^+ \varphi_1^+}{v} + \delta \Sigma_a \quad (45)$$

und erhalten wegen (44)

$$R = \int \Sigma_a \phi_{as}^+(r, t_2) dV = \left[ c^+ c + c \int \delta \Sigma_a \varphi_1 dV \right] e^{\omega_1(t_2 - t_1)}.$$

Da in (41) der asymptotische Wert  $\phi_{as}^+$  geschrieben werden kann, ist die Größe R für die beiden Meß-Wirkungsquerschnitte  $\Sigma_a$  und  $c^+ \varphi_1^+ / v$  dieselbe. Also muß

$$\int \delta \Sigma_a \varphi_1 dV = 0$$

sein. Dann folgt aber aus (45) durch Multiplikation mit  $\varphi_1$  und Integration

$$c^+ = \int \delta \Sigma_a \varphi_1 dV. \quad (46)$$

Damit läßt sich (41) wie folgt schreiben

$$R = \int \Sigma_a \varphi_1 dV \int \frac{\varphi_1^+(t_1)}{v} dV e^{\omega_1(t_2 - t_1)}. \quad (47)$$

Diese Gleichung beschreibt das asymptotische Verhalten eines Reaktors nach einem Reaktivitätssprung exakt.

Man kann die Gleichung (47) auch erhalten, wenn man annimmt, daß die Eigenfunktionen von  $M_1$  und  $M_1^+$  ein vollständiges, biorthogonales System bilden, nach dem man die Flüsse entwickeln kann.

Wir wollen jedoch hier nicht diskutieren, unter welchen Voraussetzungen die Vollständigkeit der Eigenfunktionen bewiesen werden kann; siehe zu diesem Punkt z.B. Friedman /13/. Wir haben es deshalb vorgezogen, nur die wesentlich schwächere und physikalisch plausible Annahme zu machen, daß es asymptotische Flüsse der Form (42) gibt.

b) Beispiel: Einfallen eines Absorberstabes

Das sogenannte "Rod Drop Experiment", bei dem ein Absorberstab in den Reaktor einfällt, dient zur Messung des Reaktivitätswertes von Regelstäben. Wenn man die Reaktivitätsänderung als sprungartig annimmt, kann man Formel (41) direkt auf die Beschreibung dieses Experiments anwenden. Da dabei die verzögerten Neutronen eine große Rolle spielen, muß der Flußvektor  $\Phi(r)$  in (41) so erweitert werden, daß er neben den Multigruppenflüssen auch die Konzentrationen der Vorläufer als Komponenten enthält. Dasselbe gilt für den Vektor  $\Phi^+$  des adjungierten Flusses.

Für den gestörten Reaktor sind nach (41) die zu den Gleichungen (33) adjungierten Gleichungen zu lösen. Wir wollen für die folgende Diskussion der Einfachheit halber annehmen, daß die Eigenfunktionen ein vollständiges biorthogonales System bilden. Dann können wir die Lösungen entwickeln

$$\Phi_i^+(r, t) = \sum_q a_q \varphi_{iq}^+(r) e^{\omega_q(t_2-t)} \quad (48)$$

$$C_m^+(r, t) = \sum_q a_q c_{mq}^+(r) e^{\omega_q(t_2-t)}.$$

Die Endbedingung zur Zeit  $t_2$  lautet

$$\Phi_i^+(t_2) = \sum_q a_q \varphi_{iq}^+ = v_i \sum_{ai} \quad (49)$$

$$C_m^+(t_2) = \sum_q a_q c_{mq}^+ = 0.$$

Wegen der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int dV \left[ \sum_i \frac{\varphi_{iq}^+ \varphi_{iq'}}{v_i} + \sum_m c_{mq}^+ c_{mq'} \right] = 0 \quad \text{für } \omega_{q'} \neq \omega_q, \quad (50)$$

die aus den Gleichungen (33) und den adjungierten Gleichungen leicht zu beweisen ist, erhält man aus den Endbedingungen (49), wenn man noch die  $c_{mq}$  durch (36a) und die  $c_{mq}^+$  durch

$$c_{mq}^+ = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \omega_q} \sum_j \chi_{jm} \varphi_{jq}^+ \quad (51)$$

ausdrückt, folgende Gleichung für die Koeffizienten  $a_q$

$$a_q = \frac{\sum_i \int dV \sum_{ai} \varphi_{iq}}{N_q \left[ l_q (1 - \rho_q) + \sum_m \frac{\lambda_m \beta_{mq}}{(\lambda_m + \omega_q)^2} \right]} \quad (52)$$

Dabei ist

$$N_q = \sum_{ij} \int dV \chi_{ij} \varphi_{iq}^+ \nu \sum_{fj} \varphi_{jq}, \quad (53)$$

und die  $l_q$ ,  $\rho_q$ ,  $\beta_{mq}$  sind nach (36) mit  $\varphi_{iq}^+$  als Gewichtungsfaktoren zu bestimmen.

Nun wird das Meßergebnis nach (41)

$$R = \sum_q a_q \int dV \left[ \sum_i \frac{\varphi_{iq}^+ \phi_{io}}{v_i} + \sum_{mq} C_{mq}^+ C_{mo} \right] e^{\omega_q (t_2 - t_1)}, \quad (54)$$

wobei  $\phi_{io}$ ,  $C_{mo}$  die Größen des ungestörten Reaktors sind.  $C_{mo}$  kann aber ausgedrückt werden durch

$$C_{mo}(r) = \frac{\beta_m(r)}{\lambda_m} \sum_{fio} \nu \sum_{fio} \phi_{io}, \quad (55)$$

wobei natürlich  $\sum_{fio}$  zum ungestörten Reaktor gehört.  $\beta_m(r)$  ist Null zu setzen, wenn an der Stelle  $r$  das Spaltisotop, zu dem der Index  $m$  gehört, nicht vorkommt.

Setzt man nun (51) und (55) in (54) ein, so erhält man

$$R = \sum_q a_q N_{oq} \left[ l_{oq} (1 - \rho_{oq}) + \sum_m \frac{\beta_{moq}}{\lambda_m + \omega_q} \right] e^{\omega_q (t_2 - t_1)}. \quad (56)$$

In dieser Gleichung ist

$$N_{oq} = \sum_{ij} \int dV \chi_{io} \varphi_{iq}^+ \nu \sum_{fjo} \phi_{jo},$$

und die Größen  $l_{oq}$ ,  $\rho_{oq}$ ,  $\beta_{moq}$  sind nach (36) die des ungestörten Reaktors, jedoch gewogen mit der Adjungierten  $\varphi_{iq}^+$  des gestörten Reaktors.

In der Klammer in (56) rührt der erste Term,  $l_{oq} (1 - \rho_{oq})$ , von dem Flußglied in (54) her, der zweite Term stammt vom Vorläuferglied in (54). Da wegen der Kleinheit von  $l_{oq}$  der erste Term vernachlässigbar ist, folgt, daß für das betrachtete Problem nur die Kopplung durch die Vorläufer, nicht aber die durch den Fluß, eine Rolle spielt.

Da nur das verzögerte Verhalten interessant ist, vernachlässigen wir den ersten Term in (56) und das entsprechende Glied in (52) und erhalten, wenn wir noch  $N_{oq}/N_q$  etwas umformen, für das Meßergebnis den Ausdruck

$$R = \sum_q \frac{l_q}{l_{oq}} \int dV \sum_i \frac{\varphi_{iq}^+ \phi_{io}}{v_i} \int dV \sum_i \sum_a \varphi_{iq} \frac{\sum_m \frac{\beta_{moq}}{\lambda_m + \omega_q}}{\sum_m \frac{\beta_{mq} \lambda_m}{(\lambda_m + \omega_q)^2}} e^{\omega_q(t_2 - t_1)}. \quad (57)$$

Dabei ist die folgende Normierung der Eigenfunktionen

$$\int dV \sum_i \frac{\varphi_{iq}^+ \varphi_{iq}}{v_i} = 1$$

angenommen.

Nun wurde in Abschnitt 7 erläutert, daß man die verzögerten Eigenschwingungen in Gruppen mit derselben Ortsabhängigkeit zusammenfassen kann. Sei nun  $q$  der Index der Ortsfunktion, und  $\omega_{qn}$  ( $n=1\dots 6$ ) die zur Funktion  $\varphi_q(r)$  gehörenden verzögerten Eigenwerte. Dann wird

$$R = \sum_q A_q \sum_{n=1}^6 \frac{\sum_m \frac{\beta_{moq}}{\lambda_m + \omega_{qn}}}{\sum_m \frac{\beta_{mq} \lambda_m}{(\lambda_m + \omega_{qn})^2}} e^{\omega_{qn}(t_2 - t_1)} \quad (58)$$

mit

$$A_q = \frac{l_q}{l_{oq}} \int dV \sum_i \frac{\varphi_{iq}^+ \phi_{io}}{v_i} \int dV \sum_i \sum_a \varphi_{iq}. \quad (59)$$

Im Spezialfall einer Flußgruppe und einer Vorläufergruppe wird

$$R = \sum_q \frac{l_q}{l_{oq}} \frac{\beta}{\beta - \beta_q} \int dV \varphi_q \phi_o \int dV \sum_a \varphi_q e^{\frac{\lambda \beta_q}{\beta - \beta_q} (t_2 - t_1)}. \quad (60)$$

Das Ergebnis (58) ist eine sehr gute Näherung, da nur "prompte" Terme vernachlässigt wurden. Für praktische Rechnungen wird man sich jedoch in (58) mit der räumlichen Grundschwingung begnügen und den Einfluß höherer Terme aus (60) abschätzen. Der Term  $(\beta - \beta_q)^{-1}$  in (60) deutet darauf hin, daß nur die Kopplung durch die Vorläuferkonzentration wichtig ist, vergl. Gleichung (39a).



In der punktkinetischen Näherung wird  $A_1 = R(t_1)$ ,  $A_2 = A_3 = \dots = 0$ . Unser Ergebnis unterscheidet sich dadurch von dem punktkinetischen, daß von der Dichte  $\phi_0/v$  nur die Komponente in Richtung  $\phi_1^+$  zur Geltung kommt, und daß der Faktor  $1/l_0$  auftritt. Ein ähnliches Ergebnis wurde von P. Schmid /14/ auf der Genfer Konferenz 1958 angegeben.

Wenn nur die räumliche Grundschwingung eine Rolle spielt, kann man die Reaktivität durch Extrapolation des gemessenen langsam abfallenden Neutronenflusses gegen  $t_1$  bestimmen. Man erhält dann nach (60) aus der Gleichung

$$1 - \frac{\rho}{\beta} = \frac{\frac{1}{l_0} \int dV \frac{\phi_1 \phi_0}{v} dV \sum_a \phi_1}{R(t_2)/t_2 \rightarrow t_1} \quad (61)$$

direkt die Reaktivität.

## 9. Ableitung einer Störungsformel für Reaktionsraten

Während die Störungstheorie in der Reaktorphysik seit langem dazu verwendet wird, kleine Änderungen im Multiplikationsfaktor zu berechnen, wurde die allgemeinere Aufgabe, eine Störungsformel zur Berechnung von Reaktionsraten zu entwickeln, erst in einer im Jahre 1964 veröffentlichten Arbeit von Usachev /10/ behandelt. In der zitierten Arbeit wird im wesentlichen eine störungstheoretische Berechnung von Brutraten als Funktion des Abbrandes angestrebt. Dazu wird eine Methode entwickelt, die in der sukzessiven Berechnung von Einflußfunktionen besteht, die zur Absorption in verschiedenen Neutronengenerationen gehören.

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß man aus der in Abschnitt 6 angegebenen "gemischten Beschreibung" direkt eine Störungsformel für die Reaktionsraten erhält, wenn man beachtet, daß die beobachtbare Größe bei Änderungen des Flusses und der Adjungierten stationär ist. Da wir, wie auch in Abschnitt 6, stets ein zeitabhängiges Problem mit gegebener Quellverteilung im Auge haben, ist es sinnvoll, von

absoluten Reaktionsraten zu sprechen. Dagegen arbeitet Usachev mit der zeitunabhängigen kritischen Gleichung, so daß für ihn nur Reaktionsratenverhältnisse eine physikalische Bedeutung haben.

Wir gehen aus von der Formel (27), die für einen Reaktor mit Quelle zur Zeit  $t_1$  und Messung zur Zeit  $t_2$  das Meßergebnis darstellt. Nun wird angenommen, daß sich die Daten des Reaktors nur wenig von denen eines bekannten ("ungestörten") Reaktors unterscheiden; das gleiche gilt für die Quelle und für den Wirkungsquerschnitt des Meßprozesses, so daß

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \delta M \\ S &= S_0 + \delta S \\ \Sigma_a &= \Sigma_{a0} + \delta \Sigma_a. \end{aligned}$$

Die Formel (27) lautet dann

$$\begin{aligned} R &= \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \left[ (\Sigma_{a0} + \delta \Sigma_a) \delta(t_2-t) \phi + \phi^+ (S_0 + \delta S) \delta(t-t_1) \right. \\ &\quad \left. + \phi^+ M \phi - \frac{1}{2} \phi^+ \frac{1}{v} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\phi}^+ \frac{1}{v} \phi \right] \\ &= \int dV \delta \Sigma_a \phi(t_2) + \int dV \phi^+(t_1) \delta S \\ &\quad + \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \left[ \Sigma_{a0} \delta(t_2-t) \phi + \phi^+ S_0 \delta(t-t_1) + \phi^+ (M_0 + \delta M) \phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \phi^+ \frac{1}{v} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\phi}^+ \frac{1}{v} \phi \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Da nun der letzte Term bei Änderungen von  $\phi$  und  $\phi^+$  stationär ist, ändert sich R nur um Größen 2. Ordnung, wenn man  $\phi$  und  $\phi^+$  durch die ungestörten Werte ersetzt. Zieht man von (62) noch das ungestörte  $R_0$  ab, und beachtet, daß innerhalb der Genauigkeit der ersten Ordnung auch in den ersten beiden Termen von (62) die ungestörten Flüsse geschrieben werden können, dann erhält man

$$R = \int dV \int \sum_a \phi_o(t_2) + \int dV \phi_o^+(t_1) \int S + \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \phi_o^+ \int M \phi_o. \quad (63)$$

Damit ist die Störungsformel für die durch den Wirkungsquerschnitt  $\sum_a$  gekennzeichnete Reaktion in allgemeiner Form gefunden.

Für den Fall, daß sowohl der gestörte als auch der ungestörte Reaktor kritisch sind, und daß beide mit der gleichen Spaltrate laufen, läßt sich die Formel noch etwas weiter auswerten.

Dazu wählen wir  $t_2 - t_1$  so groß, daß nach diesem Zeitintervall alle Transienten abgeklungen sind, und nehmen die Quellen  $S$  und  $S_o$  proportional zu den stationären Flüssen  $\phi$  und  $\phi_o$  an. Dann sind offenbar nach Gleichung (21)  $\phi$  und  $\phi_o$  für  $t > t_1$  zeitlich konstant. Außerdem sei  $\phi_{o,as}^+$  die auf die genannte asymptotische Spaltrate im ungestörten Reaktor bezogene Adjungierte, die natürlich ebenfalls zeitlich konstant ist. Da die Spaltrate in beiden Reaktoren gleich sein soll, muß die Beziehung

$$\int dV \phi_{o,as}^+ \int S = 0 \quad (64)$$

gelten. Man zerlegt nun  $\phi_o^+(t)$  in einen asymptotischen und einen transienten Anteil

$$\phi_o^+(t) = \lambda \phi_{o,as}^+ + \phi_{tr}^+(t) \quad (65)$$

und beachtet, daß wegen der obigen Bedingung  $\phi_{tr}^+(t_1)$  vernachlässigt werden kann.

Mit diesen Annahmen wird aus (63)

$$\int R = \int dV \int \sum_a \phi_o + \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV (\lambda \phi_{o,as}^+ + \phi_{tr}^+(t)) \int M \phi_o. \quad (66)$$

Nun wird der Term mit  $\phi_{0,as}^+$  umgeformt. Da für  $t_1 < t < t_2$  beide Reaktoren kritisch sind, also  $M\phi = 0$  und  $M_0\phi_0 = 0$  gilt, hat man

$$\int M\phi_0 = - (M_0 + \int M)\phi = - M_0 \int \phi$$

wenn Größen 2. Ordnung vernachlässigt werden.

Damit wird

$$\begin{aligned} \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \lambda \phi_{0,as}^+ \int M\phi_0 &= - \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \lambda \phi_{0,as}^+ M_0 \int \phi \\ &= - \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \lambda \int \phi M_0^+ \phi_{0,as}^+ = 0 \end{aligned}$$

Die endgültige Formel wird dann

$$R = \int dV \int \Sigma_a \phi_0(r) + \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} dt \int dV \phi_{tr}^+(t) \int M\phi_0 \quad (67)$$

Wie zu erwarten war, ist dieser Ausdruck unabhängig von dem Zeitintervall  $t_2 - t_1$  sobald es so groß ist, daß die Transienten abklingen.

Es ist interessant, unser Ergebnis (67) mit dem von Usachev /10/ zu vergleichen. Obwohl es nicht auf den ersten Blick erkennbar ist, sind natürlich beide Methoden mathematisch äquivalent. Unsere Darstellung (67) hat sicher den Vorteil, daß sie einfach und übersichtlich ist. Sie ist jedoch als Ausgangspunkt für numerische Rechnungen nicht geeignet, da die Berechnung von  $\phi_{tr}^+$  sicher langwierig und umständlich ist. Dagegen ist der von Usachev /10/ vorgeschlagene Formalismus, der zwar auf den ersten Blick etwas schwerfällig erscheint, für numerische Rechnungen gut geeignet, da er völlig analog zu der bekannten Methode der Quelliteration aufgebaut ist. Man kann daher die vorhandenen Rechenprogramme für Multigruppen-Diffusionsrechnung direkt oder mit geringen Änderungen für die Usachev'sche Methode verwenden.

Literaturverzeichnis

- /1/ J. LEWINS: The Time Dependent Importance of Neutrons and Precursors, Nucl.Sci.Eng. 7, 268 (1960)
- /2/ J. LEWINS: A Derivation of the Time-Dependent Importance Equations, J. Nuclear Energy A 13, 1 (1960)
- /3/ J. LEWINS: Time-Dependent Variational Principles for Nonconservative Systems, Nucl.Sci.Eng. 20, 517 (1964)
- /4/ H. GRÜMM und K.H. HÖCKER: Die Einflußfunktion in der Reaktor-kinetik, Z. angew. Physik 9, 305 (1957)
- /5/ D. EMENDÖRFER: Bemerkung zur physikalischen Bedeutung der Einflußfunktion in der linearen Reaktorkinetik, Nukleonik 1, Heft 4, 128 (1958)
- /6/ A.M. WEINBERG und E.P. WIGNER: The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, Chicago Univ. Press, 1958
- /7/ D.S. SELENGUT: Variational Analysis of Multi-Dimensional Systems, HW-59126 (1958)
- /8/ S. KAPLAN: Application of Synthesis Techniques to Problems Involving Time Dependence, Nucl.Sci.Eng. 18, 163 (1964)
- /9/ W.H. KÖHLER, Nukleonik 8, 203 (1966)
- /10/ L.N. USACHEV: Journal of Nuclear Energy A/B, Vol. 18, 571 (1964)
- /11/ S. GLASSTONE und M.C. EDLUND: The Elements of Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand, 1952
- /12/ T. GOZANI: Nukleonik 5, 55 (1963)
- /13/ B. FRIEDMAN: Principles and Techniques of Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1956
- /14/ P. SCHMID: Basic Integral Equation of Reactor Kinetics, Proc. 2nd Geneva Conf. 11, 277 (1958)