

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

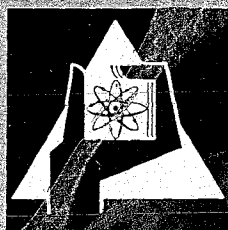
Dezember 1966

KFK 609

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Induktive Wärmeerzeugung und Wärmeleitung
in kreiszylindrischen Stäben und Rohren

K. Schretzmann



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

Sonderdruck aus »INTERNATIONALE ZEITSCHRIFT FÜR ELEKTROWÄRME« Band 24 (1966), Nr. 12, Seiten 415–419

Induktive Wärmeerzeugung und Wärmeleitung in kreiszylindrischen Stäben und Rohren

Von K. Schretzmann, Karlsruhe



VULKAN-VERLAG DR. W. CLASSEN - 43 ESSEN - HAUS DER TECHNIK

Induktive Wärmeerzeugung und Wärmeleitung in kreiszylindrischen Stäben und Röhren

Inductive generation and conduction of heat in cylindrical rods and tubes

Production inductive de chaleur et conduction thermique dans des barres et des tubes cylindriques circulaires

Von K. Schretzmann, Karlsruhe*

DK 621.365.511:536.212.2:62-434.1:62-462

EINLEITUNG

Im Verlauf von experimentellen Untersuchungen an Heat-Pipes (zum Prinzip siehe z. B. [1]) wurde es notwendig, bei induktiv geheizten Röhren die Temperaturunterschiede zu berechnen, die sich bei ständiger Wärmeabfuhr im stationären Zustand zwischen der inneren und äußeren Oberfläche des Rohres ergeben. Dabei durfte auf Grund der im Experiment vorliegenden Verhältnisse weder angenommen werden, daß die Stromdichte in der Rohrwand überall den gleichen Wert habe (kein Skin-Effekt), noch, daß der Stromfluß auf eine im Verhältnis zur Wandstärke des Rohres dünne Haut beschränkt sei (starker Skin-Effekt). Die radiale Verteilung der Stromdichte von azimuthalen Strömen in zylindrischen runden Körpern ist im Hinblick auf Abschirmungen und eisenkernlose Induktionsöfen mehrfach exakt behandelt worden [2 bis 10]. Diese Arbeiten sind teilweise auch darauf gerichtet, den Wirk- und Blindwiderstand der Heizspulen mit den in ihnen befindlichen Werkstücken zu bestimmen. Auch der Einfluß endlicher Werkstücklängen ist öfter untersucht worden [3, 11, 12]. In diese Arbeiten wurden aber die sich bei stationärer Wärmeabfuhr ergebenden Temperaturfelder und Wärmestromdichten nicht mit einbezogen. In [13] sind sie für vollzylindrische Körper bei Energiezu- und Wärmeabfuhr von außen näherungsweise berechnet. Daher wurden für den eindimensionalen Fall des kreiszylindrischen Körpers die kreiszylindrischen elektromagnetischen Wärmestrom- und Temperaturfelder mit Hilfe der Elektrodynamik und der linearen Wärmeleitung streng berechnet. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die auftretenden Materialkonstanten überall den gleichen Wert haben und von der Temperatur unabhängig sind. Der eindimensionale Fall entspricht zwar nicht den experimentellen Verhältnissen, zu deren besserem Verständnis die Überlegungen und Rechnungen durchgeführt wurden. Sie stellen aber einen ersten Schritt zur mathematischen Beschreibung des vollen Sachverhalts dar.

ELEKTROMAGNETISCHES FELD UND WÄRMEERZEUGUNG

Aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2)$$

und dem Ohmschen Gesetz,

$$j = \sigma \cdot E \quad (2.3)$$

wo σ die elektrische Leitfähigkeit bedeutet, erhält man bei Vernachlässigung des Verschiebungsstroms D gegen den Leitungsstrom j nach einigen Umformungen die bekannte Differentialgleichung für die elektrische Feldstärke E :

$$\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E \quad (2.4)$$

Hierbei wurde der Zusammenhang

$$B = \mu H \quad (2.5)$$

zwischen der magnetischen Feldstärke H und der magnetischen Induktion B verwendet. Bei einer elektrischen Feldstärke, die überall die Richtung des Azimutvektors hat und von der Azimut- und Achsenkoordinate unabhängig ist, erhält man für die φ -Komponente der elektrischen Feldstärke E_φ durch zweimalige Anwendung des rot-Operators aus (2.4):

$$\mu \sigma \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} E_\varphi \quad (2.6)$$

Macht man für E_φ den Ansatz

$$E_\varphi = E_{\varphi 0} \cdot e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

dann erhält man nach einfachen Umformungen

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(-\frac{1}{r^2} - i\mu\sigma\omega \right) \right\} E_{\varphi 0} = 0 \quad (2.8)$$

Diese Differentialgleichung wird durch die neue, komplexe Variable

$$\varrho = \sqrt{-i\mu\sigma\omega} \cdot r = \sqrt{-i} \cdot R \quad (2.9)$$

ist die Besselsche Differentialgleichung 1. Ordnung,

$$\left\{ \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} + \left(1 - \frac{1}{\varrho^2} \right) \right\} E_{\varphi 0} = 0 \quad (2.10)$$

übergeführt. Ihre allgemeine Lösung läßt sich als Linearkombination der Besselfunktion 1. Ordnung und der Hankelfunktion erster Art und 1. Ordnung darstellen:

$$E_{\varphi 0} = c_1 J_1(\varrho) + c_2 \frac{\pi i}{2} H_1^{(1)}(\varrho) \quad (2.11)$$

Die komplexe Besselfunktion $J_1(\varrho)$ ist bekanntlich die einzige Zylinderfunktion 1. Ordnung, die überall im Endlichen beschränkt ist [14]. Sie allein ist Lösung des Problems, wenn im Endlichen keine Quellen des elektromagnetischen Feldes vorhanden sind. Der elektromagnetische Energiestrom ist in diesem Fall zur Achse des zylindrischen Körpers hin ($\varrho = 0$) gerichtet. Er liegt vor, wenn dem Körper die elektromagnetische Energie von außen zugeführt wird, d. h. wenn die Induktionspule den Körper von außen umfaßt.

Die Funktion $H_1^{(1)}(\varrho)$ verschwindet im Unendlichen. Sie hat eine Singularität bei $\varrho = 0$, die die Quelle des elektromagnetischen Feldes darstellt. Der Energiestrom hat die Richtung des Radiusvektors. Dieser Fall liegt vor, wenn die elektromagnetische Energie dem Körper von innen zugeführt wird, d. h. wenn sich die Induktionsspule im Innern eines Rohres oder in der zylindrischen Bohrung eines sehr großen Metallkörpers befindet.

Die elektrische Feldstärke ist ebenso wie die übrigen Feldgrößen wegen der komplexen Variablen ϱ komplex. Obwohl das Argument von ϱ konstant gleich $\frac{3}{4}\pi$ ist, ändern sich die

Argumente der Funktionen $J_1(\varrho)$ und $H_1^{(1)}(\varrho)$ mit dem Radius

* Dr. K. Schretzmann, Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Kernforschungszentrum Karlsruhe

[14]. Das bedeutet, daß die elektrische Feldstärke bei verschiedenen Radien ihren Höchstwert zu verschiedenen Zeiten durchläuft (zeitliche Phasenverschiebung).

Die lokale momentane Wärmeleistung pro Volumeneinheit q ist dem Quadrat des Realteils der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Leitfähigkeit proportional:

$$q = \sigma (\operatorname{Re} E_{\varphi})^2 \quad (2.12)$$

Im Zeitmittel ist die Wärmeleistung pro Volumeneinheit dem Quadrat des Betrages der elektrischen Feldstärke proportional

$$\bar{q} = \frac{\sigma}{2} |E_{\varphi 0}|^2 \quad (2.13)$$

Die Funktion $|E_{\varphi 0}|^2$ hat im Falle der Zufuhr der elektromagnetischen Energie von außen bei $R = 0$ den Wert Null [15] und steigt in der Umgebung von $R = 0$ wie R^2 an. Das bedeutet, daß die induktive Wärmezeugung in einem kreiszylindrischen Stab auch dann, wenn die „Eindringtiefe“ der Hochfrequenz im Verhältnis zum Radius groß ist, auf der Achse ein Minimum hat. Eine über den Querschnitt gleichmäßige Wärmezeugung ist bei azimuthalem Stromfluß nicht möglich.

WÄRMELEITUNG

Bei der Wechselstromheizung eines Körpers ist die Wärmezeugung an allen Punkten eine periodische Funktion der Zeit mit der doppelten Frequenz des elektromagnetischen Feldes. Die Wärmezeugung hat ebenso wie die elektrischen Feldgrößen an verschiedenen Orten eine unterschiedliche Phasenlage. Zu einer Phasenverschiebung der Wärmezeugung von 180° gehört eine Phasenverschiebung der elektrischen Feldstärke von 90° . Diese Phasenverschiebung besteht nach [14, 15] zwischen Orten, deren Entfernung $\Delta R \approx 2$ oder $\Delta r \approx 2 / \sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$ ist. Es soll zunächst geprüft werden, ob sich die momentanen Temperaturunterschiede, die sich durch die zeitlich verschobene Wärmezeugung an benachbarten Orten ergeben, durch Wärmeleitung ausgleichen können. Die Zeit t_a , die für einen Ausgleich nötig wäre, liegt in der Größenordnung

$$t_a = \frac{\gamma \cdot c}{\lambda} (2\delta)^2 \quad (3.1)$$

Dabei bedeuten λ die Wärmeleitfähigkeit, c die spezifische Wärmekapazität und γ die Dichte. δ ist die Abkürzung für $1 / \sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$. Die Periodendauer der Wärmezeugung t_w ist:

$$t_w = \frac{\pi}{\omega} \quad (3.2)$$

Das Verhältnis von t_w/t_a ist:

$$\frac{t_a}{t_w} = \frac{\pi^2 \lambda \mu \sigma}{2\gamma \cdot c} \quad (3.3)$$

Um einen Überblick über die Größe t_w/t_a zu gewinnen, wurden für zwei typische Metalle – Kupfer und rostfreien Stahl – Zahlenwerte nach der Literatur [16] in (3.3) eingesetzt. Das Ergebnis ist zusammen mit den verwendeten Zahlenwerten in Tafel 1 angegeben. Man sieht, daß t_w/t_a stets sehr viel kleiner als eins ist. Damit braucht ein räumlicher thermischer Ausgleich der zeitlich periodischen und phasenverschobenen Wärmezeugung nicht berücksichtigt werden.

Die stationäre Wärmeleitung wird damit durch die Gleichungen

$$Q = -\lambda \operatorname{grad} \vartheta \quad (3.4)$$

und

$$\operatorname{div} Q = \bar{q} \quad (3.5)$$

beschrieben, wo Q die Wärmestromdichte und ϑ die Tem-

Tafel 1: Verhältnis der Periodendauer der Wärmezeugung zur inneren Wärmeausgleichszeit bei elektrischer Wechselstromheizung in Metall

Table 1: Relationship between heat generating cycle and soaking time in the a.c. heating of metals

Tableau 1: Rapport entre la durée de la période de la production de la chaleur et le temps de compensation thermique lors du chauffage à courant alternatif, dans le métal

	λ W/cm grd	σ $\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$	γ g/cm ³	c Ws/g grd	$\frac{t_w}{t_a}$
Kupfer	3,51	$5 \cdot 10^5$	8,8	0,47	$4,1 \cdot 10^{-3}$
Rostfreier Stahl	0,15	10^4	7,8	0,40	$4,8 \cdot 10^{-6}$

peratur bedeuten. Bei rein radialem Wärmestrom Q_r und Temperaturgradienten nimmt (3.5) die Form

$$\frac{1}{r} Q_r + \frac{dQ_r}{dr} = \bar{q} \quad (3.6)$$

an. Damit wird (3.6) zu

$$r\bar{q} = Q_r + r \frac{dQ_r}{dr} = \frac{d}{dr} (rQ_r) \quad (3.7)$$

Die Integration liefert

$$r_2 \cdot Q_r(r_2) - r_1 \cdot Q_r(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} r\bar{q} dr \quad (3.8)$$

Werden in (3.8) die Radien der zylindrischen Begrenzungsflächen des Körpers r_1 und r_2 eingesetzt, dann erhält man die gesamte pro Längeneinheit der z-Achse erzeugte Wärmeleistung Φ zu

$$\Phi = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r\bar{q} dr \quad (3.9)$$

Wird diese Wärmeleistung nur bei $r_2 = r_a$ abgeführt, ist mithin $Q_r(r_1) = Q_r(r_o) = 0$, dann wird die Wärmestromdichte Q_a bei r_a

$$Q_a = \frac{1}{r_a} \int_{r_o}^{r_a} r\bar{q} dr \quad (3.10)$$

Die Wärmestromdichte Q_a wird positiv oder negativ, je nachdem, ob die Wärmeleistung an der Außen- oder Innenfläche abgeführt wird.

Bei rein radialer Wärmestromdichte geht (3.4) über in

$$-\frac{1}{\lambda} Q_r = \frac{d\vartheta}{dr} \quad (3.11)$$

Integration zwischen r_o und r_a ergibt, wenn $\vartheta(r_o) = \vartheta_o$ und $\vartheta(r_a) = \vartheta_a$ gesetzt wird,

$$\vartheta_a - \vartheta_o = -\frac{1}{\lambda} \int_{r_o}^{r_a} Q_r dr = -\frac{1}{\lambda} \int_{r_o}^{r_a} \left\{ \frac{1}{r} \int_{r_o}^r r\bar{q} dr \right\} dr \quad (3.12)$$

Diese Temperaturdifferenz kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \vartheta_o - \vartheta_a &= \frac{1}{\lambda} \int_{r_o}^{r_a} \frac{1}{r} \left[\int_{\varepsilon}^r r\bar{q} dr - \int_{\varepsilon}^{r_o} r\bar{q} dr \right] dr = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \int_{r_o}^{r_a} \frac{1}{r} \left[\int_{\varepsilon}^r r\bar{q} dr \right] dr - \ln \frac{r_a}{r_o} \int_{\varepsilon}^{r_o} r\bar{q} dr \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\vartheta_o - \vartheta_a = \frac{1}{\lambda} \left\{ \int_{\varepsilon}^{r_a} \frac{1}{r} \int_{\varepsilon}^r r \bar{q} dr dr - \int_{\varepsilon}^{r_o} \frac{1}{r} \int_{\varepsilon}^r r \bar{q} dr dr - \ln \frac{r_a}{r_o} \int_{\varepsilon}^{r_o} r \bar{q} dr \right\} \quad (3.14)$$

Die in (3.14) auftretenden Integrale können nach Einsetzen der Funktion $\bar{q}(r)$ ausgerechnet werden.

BERECHNUNG DER WÄRMESTROM- UND TEMPERATUR-INTEGRALE

Zunächst soll das letzte Integral von (3.14) durch Einsetzen von \bar{q} berechnet werden. Bei Zuführung der elektromagnetischen Energie von außen erhält man eine Wärmestromfunktion WB:

$$WB = \frac{2}{\delta^2 \sigma c_1^2} \int_{\varepsilon}^R r \bar{q} dr = \int_{\varepsilon}^R R |J_1(\sqrt{-i} R)|^2 dR \quad (4.1)$$

Für Real- und Imaginärteil von $J_1(\sqrt{-i} R)$ lautet die übliche Bezeichnung

$$J_1(\sqrt{-i} R) = \text{ber}_1 R + i \text{bei}_1 R \quad (4.2)$$

Damit wird aus (4.1), wenn außerdem von der Rekursionsformel der Zylinderfunktionen [17]

$$Z_o' = -Z_1 \quad (4.3)$$

Gebrauch gemacht wird,

$$WB = \int_{\varepsilon}^R R \{ (\text{ber}' R)^2 + (\text{bei}' R)^2 \} dR \quad (4.4)$$

Der Index o ist hier wie üblich weggelassen. Das Integral (4.4) kann nach [2] geschlossen ausgerechnet werden und ergibt, wenn $\varepsilon = 0$ gesetzt wird,

$$WB = R (\text{ber} R \cdot \text{ber}' R + \text{bei} R \text{bei}' R) \quad (4.5)$$

Die beiden ersten Integrale von (3.14) können nach Einsetzen von (4.5) ebenfalls geschlossen berechnet werden. Definiert man eine Temperaturfunktion TB durch

$$TB = \int_{\varepsilon}^r \frac{1}{r} WB dr = \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{R} WB dR, \quad (4.6)$$

so erhält man:

$$TB = \int_0^R (\text{ber} R \text{ber}' R + \text{bei} R \text{bei}' R) dR = \frac{1}{2} \{ (\text{ber} R)^2 + (\text{bei} R)^2 - 1 \} \quad (4.7)$$

Für die hier auftretenden Funktionen sind folgende Bezeichnungen gebräuchlich [2, 19]:

$$\text{ber}'^2 + \text{bei}'^2 = Vb \quad (4.8)$$

$$\text{ber} \text{ber}' + \text{bei} \text{bei}' = Zb \quad (4.9)$$

$$\text{ber}^2 + \text{bei}^2 = Xb \quad (4.10)$$

Sie sind u. a. in [2, 18, 19] für ganzzahlige R tabelliert. Die hier interessierenden Funktionen WB und TB können entweder mit Hilfe dieser Tafeln oder unter Verwendung von feineren Tafeln für ber, bei, ber' und bei' [14, 15] berechnet und tabelliert werden. Für den eigenen Gebrauch wurde eine Tafel für den Wertebereich $0 \leq R \leq 20$ mit $\varepsilon = 0$ und einer Schrittweite $\Delta R = 0,1$ mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine aufgestellt. Die Werte der hier wiedergegebenen kleineren Tafel 2 wurden unter Verwendung von [15] berechnet.

Tafel 2: Wärmestrom- und Temperaturfunktion in kreiszylindrischen Körpern bei Zufuhr der elektrischen Energie von außen. Der Exponent der beizufügenden Zehnerpotenz ist nach E angegeben.

Table 2: Heat flow and temperature function in cylindrical bodies with electrical energy applied from external source

Tableau 2: Fonction du courant calorifique et de la température dans des corps cylindriques circulaires, quand le courant électrique est amené de l'extérieur. L'exposant de la puissance dix à ajouter est indiqué selon E

R	Vb	WB	TB
0	0	0	0
0,5	6,2460 E-2	3,9069 E-3	9,7317 E-4
1	2,5130 -1	6,2662 -2	1,5644 -2
1,5	5,7736 -1	3,2059 -1	7,9621 -2
2	1,0840	1,0418	2,5522 -1
2,5	1,8869	2,6932	6,4170 -1
3	3,2397	6,1505	1,4016
3,5	5,6468	1,3238 1	2,8188
4	1,0067 1	2,7638 1	5,4137
4,5	1,8303 1	5,7046 1	1,0162 1
5	3,3745 1	1,1726 2	1,8917 1
5,5	6,2810 1	2,4058 2	3,5178 1
6	1,1773 2	4,9289 2	6,5634 1
6,5	2,2188 2	1,0084 3	1,2302 2
7	4,2026 2	2,0602 3	2,3165 2
7,5	7,9941 2	4,2051 3	4,3825 2
8	1,5264 3	8,5741 3	8,3255 2
8,5	2,9147 3	1,7471 4	1,5877 3
9	5,6211 3	3,5579 4	3,0381 3
9,5	1,0833 4	7,2420 4	5,8319 3
10	2,0930 4	1,4735 5	1,1227 4

Bei Zuführung der elektromagnetischen Energie von innen kann man in völlig analoger Weise eine Wärmestromfunktion WK definieren:

$$WK = \frac{\pi^2}{4} \int_{\varepsilon}^R R |H_1^{(1)}(\sqrt{-i} R)|^2 dR \quad (4.11)$$

Für Real- und Imaginärteile von $\frac{\pi i}{2} H_1^{(1)}(\sqrt{-i} R)$ lautet die übliche Bezeichnung

$$\frac{\pi i}{2} H_1^{(1)}(\sqrt{-i} R) = \text{ker}_1 R + i \text{kei}_1 R \quad (4.12)$$

Das Integral (4.9) kann wie oben ebenfalls in geschlossener Form durch partielle Integration ausgerechnet werden. Dabei müssen die Beziehungen

$$\frac{d}{dR} (R \text{ker}' R) = -R \text{kei} R \quad (4.13)$$

und

$$\frac{d}{dR} (R \text{kei}' R) = R \text{ker} R \quad (4.14)$$

verwendet werden. Sie können durch die Identität der Reihenentwicklungen der linken und rechten Seiten von (4.13) und (4.14) bewiesen werden. Wegen der Singularität der Hankelfunktion kann der Nullpunkt nicht in die Integration mit einbezogen werden. Von einer festen, in der Nähe des Nullpunktes liegenden Untergrenze nach R zu integrieren, ist aber nicht zweckmäßig, weil die Werte von WK bei großem R wegen des starken Abfalls von $|H_1^{(1)}|^2$ sich nur noch sehr geringfügig ändern würden. WK müßte in diesem Fall auf sehr viele Stellen angegeben werden, wobei bei größeren R-Werten nur in den niedrigsten Stellen von WK noch Änderungen festzustellen wären. Gerade diese Stellen wären aber bei einer Benutzung von WK von Bedeutung. Daher werden die Integrationsgrenzen vertauscht und ε wird sehr groß gewählt:

$$WK = - \left[\text{ker} R \text{ker}' R + \text{kei} R \cdot \text{kei}' R \right]_{\varepsilon}^R \quad (4.12)$$

Hieraus berechnet man die Temperaturfunktion TK:

$$TK = \int_R^\varepsilon \frac{1}{R} WK dR = \quad (4.13)$$

$$= -\ln \frac{\varepsilon}{R} \cdot \varepsilon \cdot (\ker \varepsilon \ker' \varepsilon + \operatorname{kei} \varepsilon \operatorname{kei}' \varepsilon)$$

$$+ \frac{1}{2} [(\ker \varepsilon)^2 + (\operatorname{kei} \varepsilon)^2] - \frac{1}{2} [(\ker R)^2 + (\operatorname{kei} R)^2]$$

Läßt man nunmehr die obere Integrationsgrenze gegen Unendlich gehen, dann verschwindet in (4.12) der Ausdruck

$$\ker \varepsilon \ker' \varepsilon + \operatorname{kei} \varepsilon \operatorname{kei}' \varepsilon$$

wie $\exp(-\sqrt{2} \cdot \varepsilon)$. Damit nimmt WK die Form

$$WK = R \{ \ker R \cdot \ker' R + \operatorname{kei} R \cdot \operatorname{kei}' R \} \quad (4.14)$$

an.

Ebenso verschwinden in TK alle Ausdrücke, die ε enthalten, wodurch TK dann die Form

$$TK = -\frac{1}{2} \{ (\ker R)^2 + (\operatorname{kei} R)^2 \} \quad (4.15)$$

annimmt. Unter Verwendung der Zahlenwerte aus [15] wurden nach diesen Formeln die in Tafel 3 wiedergegebenen Werte von WK und TK berechnet. In der Tafel ist bei WK ein Minuszeichen beigefügt, obwohl WK an sich positiv ist. Durch dieses Minuszeichen wird aber erreicht, daß die im folgenden Abschnitt angegebenen Endformeln sowohl bei äußerer als auch bei innerer Zufuhr der elektrischen Energie angewendet werden können.

Für die hier auftretenden Funktionen haben sich in der Literatur folgende Bezeichnungen eingebürgert [19]:

$$\ker'^2 + \operatorname{kei}'^2 = V_k \quad (4.16)$$

$$\ker^2 + \operatorname{kei}^2 = X_k \quad (4.17)$$

Tafel 3: Wärmestrom- und Temperaturfunktion in kreiszylindrischen Körpern bei Zufuhr der elektrischen Energie von innen. Der Exponent der beizufügenden Zehnerpotenz ist nach E angegeben.

Table 3: Heat flow and temperature function in cylindrical bodies with electrical energy applied from internal source

Tableau 3: Fonction du courant calorifique et de la température dans des corps cylindriques circulaires, quand le courant électrique est amené de l'intérieur. L'exposant de la puissance dix à ajouter est indiqué selon E

R	V _k	-WK	TK
0,5	3,4227 E	8,9067 E-1	2,2551 E-1
1	6,0664 -1	3,7357 -1	1,6361 -1
1,5	1,7392 -1	1,7030 -1	5,6312 -2
2	5,9681 -2	8,0095 -2	2,1351 -2
2,5	2,2456 -2	3,8256 -2	8,5550 -3
3	8,9330 -3	1,8434 -2	3,5532 -3
3,5	3,6874 -3	8,9332 -3	1,5135 -3
4	1,5626 -3	4,3452 -3	6,5687 -4
4,5	6,7529 -4	2,1191 -3	2,8925 -4
5	2,9628 -4	1,0355 -3	1,2884 -4
5,5	1,3199 -4	5,0673 -4	5,7932 -5
6	5,9006 -5	2,4825 -4	2,6252 -5
6,5	2,6675 -5	1,2173 -4	1,1975 -5
7	1,2145 -5	5,9735 -5	5,4931 -6
7,5	5,5615 -6	2,9330 -5	2,5321 -6
8	2,5597 -6	1,4408 -5	1,1721 -6
8,5	1,1833 -6	7,0806 -6	5,4465 -7
9	5,4914 -7	3,4808 -6	2,5392 -7
9,5	2,5573 -7	1,7117 -6	1,1873 -7
10	1,1946 -7	8,4193 -7	5,5666 -8

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN WÄRMELEISTUNG, TEMPERATURDIFFERENZ UND FELDSTARKE

Mit Hilfe der Wärmestrom- und Temperaturfunktionen WB und TB bzw. WK und TK können die Wärmeleistung, die Temperaturdifferenz und die elektrische Feldstärke sowie die Zusammenhänge zwischen diesen Größen sehr einfach ausgedrückt und berechnet werden. Die Wärmeleistung Φ_a , die pro Längeneinheit der Achsenkoordinate abgeführt wird, ist

$$\Phi_a = \pi \delta^2 \sigma c_k \{ W_a - W_o \} \quad (5.1)$$

Die Indizes a und o bedeuten wie schon früher die Funktionswerte bei den Radien r_a und r_o bzw. R_a und R_o . Der Index B bzw. K, der die unterschiedlichen Fälle der elektrischen Energiezufuhr kennzeichnet, ist hier wie auch im folgenden der Einfachheit halber weggelassen.

Die Temperaturdifferenz ist

$$\vartheta_o - \vartheta_a = \frac{\delta^2 \sigma c_k^2}{2\lambda} \left\{ T_a - T_o - W_o \ln \frac{R_a}{R_o} \right\} \quad (5.2)$$

Wenn R_a als laufende Koordinate angesehen wird, gibt die Gleichung (5.2) auch den Temperaturverlauf im Innern des Körpers bzw. des Rohres wieder.

Der Zusammenhang zwischen Temperaturdifferenz und Wärmeleistung lautet:

$$\vartheta_o - \vartheta_a = \frac{\Phi_a}{2\pi \lambda} \cdot \frac{T_a - T_o - W_o \ln \frac{R_a}{R_o}}{W_a - W_o} \quad (5.3)$$

Wenn der Effektivwert der elektrischen Feldstärke E_e an der Oberfläche mit dem Radius r_e bzw. R_e , an der die elektrische Leistung zugeführt wird, bekannt ist, kann daraus die Wärmeleistung nach den folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$\Phi_a = 2\pi \delta^2 \sigma E_e^2 \frac{WB_a - WB_o}{V_b(R_e)} \quad (5.4)$$

$$\Phi_a = 2\pi \delta^2 \sigma E_e^2 \frac{WK_a - WK_o}{V_k(R_e)} \quad (5.5)$$

Die Werte von V_b und V_k sind in den Tafeln 2 und 3 aufgeführt.

Die in den Formeln vorkommenden Materialkonstanten λ und σ sind im allgemeinen bekannt, δ kann dann bei Kenntnis der Frequenz berechnet werden.

Die Anwendung der Formeln soll an einem Zahlenbeispiel mit Werten, die bei Experimenten gegeben waren, verdeutlicht werden. Es wurde ein Rohr aus rostfreiem Stahl mit einem Außendurchmesser von 20 mm und einer Wandstärke von 1 mm durch eine außenliegende Spule induktiv erwärmt. Die Leistung je cm Rohrlänge war $\Phi = 1000$ W/cm. Diese Leistung wurde stationär durch Kühlung von innen abgeführt. Φ_a ist in diesem Fall negativ. Bei einer Frequenz von etwa 250 kHz errechnet man mit den Werten der Materialkonstanten von Tafel 1 für δ einen Wert von 1 mm. Damit werden $R_o = 10$ und $R_a = 9$. Hieraus ergibt sich eine Temperaturdifferenz zwischen Außen- und Innenseite des Rohres von 70 °C. Bei induktiver Heizung mit sehr niedriger Frequenz, z. B. mit 50 Hz, wo sich hier keine Stromverdrängung mehr ausbilden würde, würde die Temperaturdifferenz vergleichsweise 59 °C betragen. Bei extrem starkem Skineffekt, etwa bei einer Frequenz von 1000 MHz, ergäbe sich bei gleicher Leistung eine Temperaturdifferenz von 111 °C. Bei einer Frequenz von 250 kHz erhält man für die elektrische Feldstärke an der Außenseite des Rohres nach (5.4) einen Wert von 1.09 V/cm.

SCHRIFTTUM

- [1] Grover, G. M., Cotter, T. P., Erickson, G. F.: Structures of Very High Thermal Conductance, Journ. Appl. Phys. 35 (1964), S. 1990/1
- [2] Russell, A.: A Treatise on the Theory of Alternating Currents, Cambridge at the University Press, London, 1914
- [3] Vaughan, J. T., Williamson, J. W.: Design of Induction Heating Coils for Cylindrical Nonmagnetic Loads, Trans. A. I. E. E. 64 (1945), S. 587/92
- [4] Oatley, C. W.: The Power Loss and Electromagnetic Shielding Due to the Flow of Eddy Currents in Thin Cylindrical Tubes, Phil. Mag. 22 (1936), S. 445/53
- [5] Baker, R. M.: Heating of Nonmagnetic Electric Conductors by Magnetic Induction Longitudinal Flux, Trans. A. I. E. E. 63 (1944), S. 273/8
- [6] Stansel, N. R.: Induction Heating - Selection of Frequency, Trans. A. I. E. E. 63 (1944), S. 755/9
- [7] Stansel, N. R.: Induction Heating, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1949
- [8] Geisel, H.: Das induktive Erwärmen von Platten und zylinderförmigen Körpern mit konstanter Leistung, Elektrowärme 18 (1960), S. 211/8
- [9] Büssing, W.: Die induktive Erwärmung eines Hohlzylinders, Elektrowärme 17 (1959), S. 423/6
- [10] Buchholz, H.: Das Magnetfeld der Wirbelströme in einem elektrischen Induktionsofen und andere daraus ableitbare Wirbelstromfelder, Arch. f. Elektrotechnik 43 (1958), S. 355/75
- [11] Brewer, L.: The Use of High Frequency Induction Furnaces, UCRL-653, University of California, 1950
- [12] Lebeau, Trombe (Hrsg.): Les hautes températures et leurs utilisations en chimie, tome 1 et 2, Masson, Paris, 1950
- [13] Geisel, H.: Induktives Erwärmen von zylindrischen Körpern bei gleichzeitiger Mantelkühlung, Industrie-Anzeiger 78 (1956), S. 757/60
- [14] Jahnke, Emde, Lösch: Tafeln höherer Funktionen, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960
- [15] Dwight, H. B.: Mathematical Tables of Elementary and Some Higher Mathematical Functions, Dover Publ. Inc., New York, 1961
- [16] Espe, W.: Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik, Band I, VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1959
- [17] Watson, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge at the University Press, Cambridge, 1958
- [18] Savidge, H. G.: Tables of the ber and bei and ker and kei Functions with Further Formula for their Computation, Phil. Mag. 19 (1910), S. 49/58
- [19] Hill et al.: The Calculation of Mathematical Tables, Part IV, Tables of ber, bei, ker, kei etc. Functions, Brit. Ass. Rep. 1916, S. 108/21

Zusammenfassung

Die eindimensionalen elektromagnetischen Felder mit kreiszylindrischer Symmetrie, wie sie sich bei induktiver Erregung von Wirbelströmen in unendlich langen kreiszylindrischen Stäben oder Rohren ergeben, wurden berechnet. Die Wärmequellenverteilung sowie die sich im stationären Zustand einstellenden Wärmeströme und Temperaturdifferenzen zwischen der Achse und der äußeren Begrenzung von Stäben bzw. zwischen der Innen- und Außenwand von Rohren wurden bestimmt. Die Ergebnisse lassen sich in einfachen Formeln zusammenfassen. Die Berechnung der in ihnen vorkommenden, speziellen nicht elementaren Funktionen ist angegeben. Ihre Zahlenwerte sind für einige Werte des Radius in Tafeln beigefügt.

Summary

Unidimensional electromagnetic fields of regular cylindrical symmetry as induced by eddy currents set up in infinitely long cylindrical rods or tubes are calculated. The heat source distribution as well as the heat flow and temperature dif-

ferences between the axis and the surface of rods and between the inside and outside surface of tubes were determined. The results can be combined in simple formulas. The calculation of the special non-elementary functions occurring in them is given. Their values are tabulated for certain radii.

Résumé

L'auteur fait le calcul des champs électromagnétiques à une dimension, présentant une symétrie cylindrique circulaire, tels qu'ils se produisent lors de l'excitation inductive de courants de Foucault dans des barres ou des tubes cylindriques circulaires, d'une longueur infinie. Ont été déterminés la répartition des sources de chaleur ainsi que les courants thermiques et les différences de température engendrés à l'état stationnaire entre l'axe et la limite extérieure des barres ou entre les parois intérieure et extérieure des tubes. Les résultats se traduisent en de simples formules. L'auteur indique le calcul des fonctions spéciales, non élémentaires, que l'on rencontre dans ces formules. Leurs valeurs numériques sont données dans les tableaux, pour certaines valeurs du rayon.