

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM**

**KARLSRUHE**

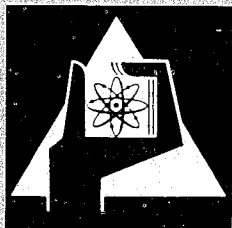
Dezember 1967

KFK 656  
EUR 3691 d

Institut für Reaktorbauelemente

Die Stabilität von starr zurückgeführten Regelstrecken ohne  
Ausgleich am Beispiel des dampfgekühlten Reaktors

L. Krebs



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Dezember 1967

KFK 656

EUR 3691 d

Institut für Reaktorbauelemente

Die Stabilität von starr zurückgeführten Regel-  
strecken ohne Ausgleich am Beispiel des dampfge-  
kühlten Reaktors. <sup>+</sup>)

von

L. Krebs

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG MBH., KARLSRUHE

<sup>+</sup>) Diese Arbeit wurde im Rahmen der Assoziation zwischen der Europäischen Atomgemeinschaft und der Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe, auf dem Gebiet der Schnellen Reaktoren durchgeführt.

-----

-----

-----

-----

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	1
1. Einführung	2
2. Näherungsverfahren zur Berechnung der Stabilitätsgrenze	3
2.1 Modellfunktion mit Totzeit	4
2.2 Modellfunktion mit Totzeit und Verzögerung 1. Ordnung	6
2.3 Modellfunktion mit und ohne Totzeit und n gleichen Verzögerungszeitkonstanten	7
2.4 Modellfunktion mit und ohne Totzeit und n verschiedenen Verzögerungszeitkonstanten	10
3. Die Bedeutung des kritischen Faktors	13
4. Berechnung der Stabilitätsgrenze eines Reaktorkühlkreislaufs mit den angegebenen Näherungsverfahren	15
5. Schlussbemerkung	16
Literaturverzeichnis	
Verzeichnis der verwendeten Bezeichnungen	

Zusammenfassung:

Im vorliegenden Bericht wird dargelegt, auf welche Weise man die Stabilitätsgrenze eines dampfgekühlten Reaktors bestimmen kann, wenn man regelungstechnische Untersuchungsmethoden anwendet. Insbesondere wird das Stabilitätsverhalten von vier Modellen des Kühlkreislaufs untersucht, die so ausgewählt sind, dass die Übergangsfunktionen der offenen Kreise Näherungen der Übergangsfunktion des aufgeschnittenen Kühlkreislaufs darstellen. Die dabei aufgezeigten Zusammenhänge gelten im Prinzip für alle Systeme ohne Ausgleich. Die abgeleiteten Ergebnisse werden anschliessend an einem Beispiel interpretiert.

## 1. E i n f ü h r u n g

Untersuchungen am Analogmodell des dampfgekühlten Reaktors [1] ergaben, dass der aufgeschnittene Kühlkreislauf (Bild 1) sich wie ein System ohne Ausgleich verhält. Wird der Dampfdruck  $p$  am Eingang des Cores sprungförmig abgesenkt, so ändert sich der Dampfdruck am Ausgang des Verdampfers in Abhängigkeit von der Zeit entsprechend dem in Bild 2 gezeigten Verlauf. Dieses Systemverhalten ergibt sich allerdings nur, wenn die Amplitude des Eingangssignals so klein gewählt wird, dass der Kreislauf als lineares System angesehen werden kann. Die folgenden Ableitungen gelten nur für den Fall, dass diese wichtige Voraussetzung erfüllt ist. Die als Übergangsfunktion bezeichnete Antwort auf ein sprungförmiges Eingangssignal kann bei Systemen ohne Ausgleich durch drei Kenngrößen charakterisiert werden. Diese haben bei dem hier behandelten offenen Kühlkreislauf folgende physikalische Bedeutung:

- 1)  $T_t$  [s]: Die durch die endliche Geschwindigkeit des Dampfes bedingte Transportzeit oder Totzeit.
- 2)  $T_u$  [s]: Die sich aus Totzeit und Verzögerungszeiten zusammensetzende Verzugszeit.
- 3)  $K$  [1/s]: Die Geschwindigkeit mit der sich nach dem Abklingen des Einschwingvorgangs der Ausgangsdruck ändert, wenn am Eingang ein Drucksprung wirkt.

Um Aussagen über das Stabilitätsverhalten des geschlossenen Kreises zu erhalten, werden im folgenden einige einfache Modelle untersucht. Diese Modelle bestehen aus einer Strecke, deren Übergangsfunktion eine Näherung des in Bild 2 gezeigten Kurvenverlaufs darstellt und einer starren (= proportionalen) Rückführung mit dem Verstärkungsfaktor  $V = 1$  (Bild 3).

## 2. Näherungsverfahren zur Berechnung der Stabilitätsgrenze

Aus der Übergangsfunktion kann nun nicht direkt abgelesen werden, für welche Werte von  $K$  bei vorgegebener Verzugszeit  $T_u$  der geschlossene Kreis noch stabil ist. In der linearen Regelungstheorie geht man daher nicht von dieser Darstellung im Zeitbereich aus, sondern man verwendet die Beschreibung im sogenannten Bildbereich der LAPLACE-Transformation. Dies bedeutet nichts anderes, als dass man eine Zeitfunktion (z.B. die Übergangsfunktion  $U(t)$ ) einer Integraltransformation unterwirft und schreibt:

$$u(s) = \int_0^{\infty} U(t) \cdot e^{-st} dt$$

Durch die Integrationsgrenzen  $0$  und  $\infty$  verschwindet die bisherige Variable  $t$ , an ihre Stelle tritt eine neue, im allgemeinen komplexe Variable  $s$ .

Bei Stabilitätsuntersuchungen erweist es sich nun als vorteilhaft, wenn man anstelle von  $u(s)$  das Verhältnis der LAPLACE-Transformierten von Ausgangs- zu Eingangssignal bildet. Man erhält dann eine das dynamische Verhalten des Systems vollständig beschreibende Funktion, die komplexe Übertragungsfunktion des offenen Kreises genannt wird:

$$\frac{u(s)}{e(s)} = F_o(s)$$

In der Regelungstechnik wird bei der Bestimmung der Stabilitätsgrenze von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass sich der geschlossene Regelkreis dann am Stabilitätsrand befindet, wenn die charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises

$$1 + F_o(s) = 0 \quad (1)$$

für rein imaginäre Werte von  $s$  erfüllt ist. Der Regelkreis ist stabil, wenn sämtliche komplexen Lösungen  $s_v$  dieser Gleichung einen negativen Realteil besitzen, instabil, wenn auch nur eine Lösung  $s_\mu$  mit positivem Realteil vorhanden ist.



Da zur Berechnung der Stabilitätsgrenze die charakteristische Gleichung für rein imaginäre Werte von  $s$  erfüllt sein soll, wird bei den folgenden Untersuchungen stets

$$s := i\omega \quad (2)$$

gesetzt. Der Rechengang sei an einem ersten, bereits in der Literatur [2] bekannten Modell vorgeführt:

## 2.1 Modellfunktion mit Totzeit

Die Übergangsfunktion des offenen Kreises nach Bild 4a, die offensichtlich eine grobe Näherung der Übergangsfunktion nach Bild 2 darstellt, lässt sich in der Form

$$U_a(t) = K \cdot (t - T_u) \cdot 1(t - T_u) \quad (3)$$

anschreiben. Hierbei wird angenommen, dass die gesamte Verzugszeit  $T_u$  wie eine echte Totzeit wirkt. Das in dieser Gleichung auftretende Symbol  $1(t - T_u)$  ist eine verkürzte Schreibweise der Schaltfunktion:

$$1(t - T_u) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T_u \\ 1 & \text{für } t \geq T_u \end{cases}$$

Ein System mit der Übergangsfunktion (3) besitzt die komplexe Übertragungsfunktion:

$$F_o(s) = \frac{K}{s} \cdot e^{-sT_u}$$

Mit der Definition (2) nimmt daher für das hier untersuchte Modell die charakteristische Gleichung (1) nach kurzer Zwischenrechnung die Form

$$\omega \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \omega T_u\right)} + K = 0$$

an. Berücksichtigt man, dass  $K$  als positive und reelle Konstante eingeführt wurde (Bild 2) so erhält man die gesuchte

Lösung dann, wenn die Winkelbedingung

$$\omega \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + \omega \cdot T_u)} = -1 = e^{i\pi}$$

erfüllt ist. Daraus errechnet sich die Eigenfrequenz des Systems zu

$$\omega_e = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{T_u}$$

und damit auch die gesuchte kritische Änderungsgeschwindigkeit zu

$$K_{\text{krit}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{T_u}$$

Für einige Untersuchungen ist es vorteilhaft mit dem Produkt aus kritischer Änderungsgeschwindigkeit und Verzugszeit zu arbeiten. Dieses Produkt sei als kritischer Faktor bezeichnet:

$$A_{\text{krit}} = K_{\text{krit}} \cdot T_u \quad (4)$$

Da eine reine Totzeit für die Stabilität eines Systems wesentlich gefährlicher ist, als eine gleichgrosse Verzugszeit, die sich aus Totzeit und mehreren Verzögerungszeiten zusammensetzt, liefert dieses Modell mit der hier abgeleiteten Forderung

$$A \leq \frac{\pi}{2}$$

einen Wert für A, mit dem man sich stets auf der sicheren Seite befindet.

## 2.2 Modellfunktion mit Totzeit und Verzögerung 1. Ordnung

Auf dem gleichen Weg wie bei dem Modell 2.1 soll nun ein Wert für  $K_{\text{krit}}$  berechnet werden, wenn die vorgegebene Übergangsfunktion durch die Gleichung

$$U_b(t) = K \cdot (T_v \cdot e^{-\frac{t-T_{tM}}{T_v}} + t - T_u) \cdot 1(t-T_u) \quad (5)$$

angenähert wird (Bild 4b). Die Verzugszeit besteht bei diesem Modell aus einer echten Totzeit  $T_{tM}$  und einer Verzögerungszeit  $T_v$ . Die Grösse der Totzeit wird so festgelegt, dass die Übergangsfunktionen des untersuchten Systems und des Modells möglichst gut übereinstimmen. Die komplexe Übertragungsfunktion lautet dann:

$$F_o(s) = \frac{K}{s(1+sT_v)} \cdot e^{-sT_{tM}}$$

Löst man die hierzu gehörende charakteristische Gleichung, so ergibt sich für die Eigenfrequenz des Systems in erster Näherung (vgl. [2])

$$\omega_e = \sqrt{\frac{1}{T_{tM} \cdot T_v}}$$

für den praktisch interessanten Fall, dass  $T_{tM} < T_v$  ist, errechnet man für die kritische Änderungsgeschwindigkeit

$$K_{\text{krit}} \approx \frac{1}{T_{tM}}$$

Damit ergibt sich für den kritischen Faktor

$$A_{\text{krit}} \approx \frac{T_u}{T_{tM}}$$

Im Gegensatz zu dem ersten Modell erhält man hier keinen festen Zahlenwert, sondern eine Abhängigkeit von Kenngrössen, die zunächst nicht erkennen lässt, ob man sich auf der sicheren oder auf der unsicheren Seite befindet. Dieses Ergebnis sei hier festgehalten, es wird in einem späteren Abschnitt nochmals aufgegriffen.

2.3 Modellfunktion mit und ohne Totzeit und n gleichen Verzögerungszeitkonstanten

Die Übergangsfunktion des in diesem Abschnitt betrachteten Modells zeigt Bild 4c. Die zugehörige Gleichung lautet

$$\begin{aligned}
 U_c(t) = & K \cdot \left\{ \frac{T}{(n-1)!} \left[ \left(\frac{t-T_t}{T}\right)^{n-1} + 2(n-1) \left(\frac{t-T_t}{T}\right)^{n-2} \right. \right. \\
 & + 3(n-1)(n-2) \left(\frac{t-T_t}{T}\right)^{n-3} + \dots + n(n-1)! \left. \right] \cdot e^{-\frac{t-T_t}{T}} \\
 & \left. + t - T_u \right\} \cdot 1(1 - T_t) \quad (6)
 \end{aligned}$$

und die (wesentlich einfacher aufgebaute) komplexe Übertragungsfunktion

$$F_o(s) = \frac{K}{s(1+sT)^n} \cdot e^{-sT_t}$$

Mit diesem Modell lässt sich die vorgegebene Übergangsfunktion des Kreislaufs schon relativ gut annähern. Zunächst ist es von Interesse, welcher Zusammenhang zwischen der Verzugszeit  $T_u$ , dem Totzeitanteil  $T_t$  und den  $n$  gleichen Zeitkonstanten  $T$  besteht. Dazu ist es erforderlich, die Gleichung der Asymptoten  $a(t)$  an die Übergangsfunktion  $U_c(t)$  zu ermitteln:

$$a(t) = m \cdot t + a_0$$

Für die Steigung der Asymptoten gilt: [3]

$$m = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{U_c(t)}{t} \right)$$

und für den Ordinatenabschnitt:

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( U_c(t) - m \cdot t \right)$$

Diese Parameter lassen sich mit Hilfe der Grenzwertsätze der LAPLACE-Transformation [4] auch direkt aus der komplexen Übertragungsfunktion des offenen Kreises berechnen.

$$m = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F_0(s))$$

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \left( F_0(s) - m \cdot \frac{1}{s} \right)$$

Für das hier untersuchte Modell mit  $n$  gleichen Zeitkonstanten erhält man die Werte:

$$m = K$$

$$a_0 = -K (T_t + nT)$$

und folglich die Asymptotengleichung:

$$a(t) = K \cdot t - K \cdot (T_t + nT)$$

Definitionsgemäss ist  $a(t) = 0$  für  $t = T_u$ , was auf die gesuchte Beziehung

$$T_u = T_t + nT$$

führt. Nachdem der für die folgenden Untersuchungen wichtige Zusammenhang dargelegt ist, soll jetzt die charakteristische Gleichung angegeben werden. Mit der Vereinbarung (2) gelangt man nach kurzer Rechnung zu der Form:

$$\omega \cdot \sqrt{(1 + \omega^2 T^2)^n} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + \omega T_t + n \operatorname{Arctan} \omega T)} + K = 0 \quad (7)$$

und damit zu der Winkelbedingung:

$$f(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \omega T_t + n \cdot \operatorname{Arctan} \omega T = 0 \quad (8)$$

Diese transzendente Bestimmungsgleichung für die Eigenfrequenz  $\omega_e$  besitzt den ersten Näherungswert:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{T_t + nT} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{T_u}$$

Um genauere Werte zu berechnen, verwendet man am besten das NEWTONsche Näherungsverfahren:

$$\omega_{r+1} = \omega_r - \frac{f(\omega_r)}{f'(\omega_r)}$$

Dieses Verfahren konvergiert stets gegen die genaue Lösung  $\omega_e$ , sofern  $f'(\omega_e) \neq 0$  und der erste Wert  $\omega_0$  hinreichend nahe bei dem genauen Wert  $\omega_e$  liegt (z.B. dürfen zwischen  $\omega_0$  und  $\omega_e$  keine Extremwerte von  $f(\omega)$  liegen).

Die Ableitung von  $f(\omega)$  lautet:

$$f'(\omega) = T_t + \frac{n \cdot T}{1 + \omega^2 T^2}$$

und damit die Rechenvorschrift für einen genaueren Wert der Eigenfrequenz:

$$\omega_{r+1} = \omega_r - \frac{-\frac{\pi}{2} + \omega_r T_t + n \cdot \text{Arctan } \omega_r T}{T_t + \frac{n \cdot T}{1 + \omega_r^2 T^2}}$$

Genügt ein Näherungsschritt nicht, so wendet man diese Formel mehrmals an, bis die Eigenfrequenz  $\omega_e$  mit der gewünschten Genauigkeit berechnet ist. Mit diesem Wert erhält man aus der charakteristischen Gleichung für die kritische Änderungsgeschwindigkeit

$$K_{\text{krit}} = \omega_e \cdot \sqrt{(1 + \omega_e^2 T^2)^n} \quad (10)$$

Gelegentlich kann es nun vorkommen, dass der Totzeitanteil klein gegenüber der Verzugszeit ist. Während er zum Beispiel beim Kühlkreislauf des dampfgekühlten Reaktors ohne Zwischenüberhitzer nicht vernachlässigt werden darf, ist er in einem Kreislauf mit Zwischenüberhitzer so klein, dass er bei den Stabilitätsuntersuchungen nicht berücksichtigt werden muss. Setzt man daher in den bisherigen Gleichungen dieses Abschnitts  $T_t = 0$ , so vereinfacht sich die Winkelbedingung (8)

$$f(\omega) = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \text{Arctan } \omega T = 0 \quad (8a)$$

womit sich die Eigenfrequenz in geschlossener Darstellung

$$\omega_e = \frac{1}{T} \cdot \tan \frac{\pi}{2n}$$

angeben lässt, und ebenso die kritische Änderungsgeschwindigkeit

$$K_{\text{krit}} = \frac{n}{T} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{(\cos \frac{\pi}{2n})^{n+1}} \quad (10a)$$

Für eine sinnvolle Näherung der Übergangsfunktion muss bei Vernachlässigung des Totzeitanteils mindestens  $n = 2$  angenommen werden. Dies ergibt für den kritischen Faktor eines Systems mit gleichen Zeitkonstanten, aber ohne Totzeitanteil den grösstmöglichen Wert

$$A_{\text{krit}}(n=2) = 4$$

Wird aber eine grosse Zahl gleicher Zeitkonstanten angenommen, so erhält man im Grenzfall

$$A_{\text{krit}}(n \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2}$$

den bereits mit dem Verfahren 2.1 berechneten Wert, mit dem man sich stets auf der sicheren Seite befindet. Damit ist ein Bereich abgegrenzt, in dem der tatsächliche kritische Faktor eines Kühlkreislaufs liegen muss.

Auf die Frage, wie genau dieser Wert bestimmt werden kann, soll erst nach den folgenden Untersuchungen über ein letztes Modell eingegangen werden.

#### 2.4 Modellfunktion mit und ohne Totzeit und n verschiedenen Verzögerungszeitkonstanten

Die in Bild 2 gezeigte Übergangsfunktion kann durch eine Gleichung der Form

$$U_d(t) = K \cdot \left[ \sum_{\mu=1}^n \frac{T_u^n \cdot e^{-\frac{t-T_t}{T_\mu}}}{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n (T_\mu - T_\nu)} + t - T_u \right] \cdot 1(t - T_t) \quad (11)$$

bei geeigneter Wahl der Anzahl  $n$  und der Grösse der verschiedenen Zeitkonstanten besonders gut angenähert werden (Bild 4d). Diese Übergangsfunktion führt auf ein Modell mit der (wieder wesentlich einfacher aufgebauten) komplexen Übertragungsfunktion:

$$F_o(s) = \frac{K}{s \cdot \prod_{\nu=1}^n (1 + sT_\nu)} \cdot e^{-sT_t}$$

Den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Zeitkonstanten  $T_\nu$  und der Verzugszeit  $T_u$  erhält man wieder wie im vorigen Abschnitt durch Berechnung des Schnittpunktes der Asymptoten an  $U_d(t)$  mit der Zeitachse.

Nach kurzer Rechnung ergibt sich:

$$T_u = T_t + \sum_{\nu=1}^n T_\nu \quad (12)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem im vorigen Abschnitt für die Verzugszeit angegebenen überein, wenn alle  $T_\nu$  gleich gross sind. Es ist ausserdem von Interesse, weil man bei einem System, dessen einzelne Zeitkonstanten abgeschätzt werden können, ohne Messung der Übergangsfunktion nach dem Verfahren 2.1 zumindest die Grössenordnung von  $K_{krit}$  sofort angeben kann. Ausserdem ist es möglich, anhand der gemessenen Übergangsfunktion des offenen Kreises festzustellen, ob man bei einer analytischen Abschätzung keine wesentliche Zeitkonstante übersehen hat, da die Summe dieser Zeitkonstanten und der Totzeit, mit der gemessenen Verzugszeit  $T_u$  übereinstimmen muss.

Für den Fall, dass die einzelnen Zeitkonstanten bekannt sind, soll jetzt die Berechnungsmöglichkeit von  $K_{krit}$  bzw.  $A_{krit}$  angegeben werden. Die charakteristische Gleichung kann wieder unter der Vereinbarung (2) in die Form



$$\omega \cdot \prod_{r=1}^n \sqrt{1 + \omega^2 T_r^2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + \omega T_t + \sum_{r=1}^n \text{Arctan} \omega T_r)} + K = 0 \quad (13)$$

gebracht werden, die für gleiche Zeitkonstanten in Gleichung (7) übergeht. Aus der Winkelbedingung erhält man als Bestimmungsgleichung für

$$f(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \omega T_t + \sum_{r=1}^n \text{Arctan} \omega T_r = 0 \quad (14)$$

Eine erste Näherungslösung  $\omega_0$  liefert die Reihenentwicklung

$$\text{Arctan} \omega T_r = \omega T_r - \frac{\omega^3 T_r^3}{3} + \frac{\omega^5 T_r^5}{5} - + \dots$$

wenn man die Reihe nach dem 1. Glied abbricht, und zwar

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{T_t + \sum_{r=1}^n T_r} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{T_u}$$

Der genaue Wert der Eigenfrequenz  $\omega_e$  lässt sich wieder mit dem NEWTONschen Näherungsverfahren (9) ermitteln.

Man erhält die Rechenvorschrift:

$$\omega_{\mu+1} = \omega_{\mu} - \frac{-\frac{\pi}{2} + \omega_{\mu} T_t + \sum_{r=1}^n \text{Arctan} \omega_{\mu} T_r}{T_t + \sum_{r=1}^n \frac{T_r}{1 + \omega_{\mu}^2 T_r^2}}$$

und für die kritische Änderungsgeschwindigkeit:

$$K_{\text{krit}} = \omega_e \cdot \prod_{r=1}^n \sqrt{1 + \omega_e^2 T_r^2}$$

bzw. für den kritischen Faktor:

$$A_{\text{krit}} = \omega_e \cdot T_u \cdot \prod_{r=1}^n \sqrt{1 + \omega_e^2 T_r^2} \quad (15)$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die hier abgeleiteten Gleichungen auch für den Fall gleicher Zeitkonstanten gelten, wie ein Vergleich mit Abschnitt 2.3 zeigt. Wie man überdies erkennt, können alle bisher behandelten Modelle als Spezialfälle der zuletzt vorgenommenen Untersuchung angesehen werden.

### 3. Die Bedeutung des kritischen Faktors

In der Regelungstechnik ist es allgemein üblich, als Kenngrösse für die Stabilitätsgrenze des geschlossenen Kreises eines Systems mit I-Anteil die kritische Änderungsgeschwindigkeit  $K_{krit}$  anzugeben. In diesem Abschnitt soll nun dargestellt werden, welchen Vorteil die Einführung des kritischen Faktors (4) bringt, wenn man mit den hier angegebenen Modellen eine gute Approximation der Übergangsfunktionen erreicht.

Um dies zu zeigen, seien für den folgenden Rechengang die Abkürzungen

$$\frac{T_t}{T_u} := c_0 \quad \text{und} \quad \frac{T_v}{T_n} = K_v \quad \text{mit} \quad v = 1, 2, \dots, n$$

vereinbart.

Dies führt mit Gleichung (12) nach kurzer Rechnung auf

$$T_u = T_n \cdot \frac{\sum_{v=1}^n K_v}{1 - c_0}$$

und

$$T_v = (1 - c_0) \cdot \frac{K_v}{\sum_{v=1}^n K_v} \cdot T_u \quad (16)$$

Damit lautet die Winkelbedingung (14)

$$-\frac{\pi}{2} + c_0 \omega T_u + \sum_{v=1}^n \text{Arctan} \left\{ (1 - c_0) \cdot \frac{K_v}{\sum_{v=1}^n K_v} \cdot \omega T_u \right\} = 0 \quad (14a)$$

Eine Möglichkeit, diese Gleichung explizit nach dem Produkt  $\omega \cdot T_u$  aufzulösen, existiert nicht, man kann lediglich allgemein schreiben:

$$\omega \cdot T_u = f(c_0, K_v) \quad (17)$$

Mit den Beziehungen (16) und (17) erhält man jetzt für den kritischen Faktor:

$$A_{\text{krit}} = f(c_0, K_v) \cdot \prod_{v=1}^n \sqrt{1 + [(1-c_0) \cdot \frac{K_v}{\sum_{v=1}^n K_v} \cdot f(c_0, K_v)]^2} \quad (15a)$$

Die Gl. (15a) sagt aus, dass der kritische Faktor lediglich von der Anzahl  $n$  und dem Verhältnis der Verzögerungszeitkonstanten sowie dem Totzeitanteil  $c_0$  abhängt, dagegen nicht von der zahlenmässigen Grösse der Verzugszeit  $T_u$ . Die Bedeutung dieser Tatsache wird deutlich, wenn man ein System mit  $n$  gleichen Zeitkonstanten betrachtet: Trägt man nämlich  $A_{\text{krit}}$  in Abhängigkeit vom Totzeitanteil  $c_0 = T_t/T_u$  auf, und variiert als Parameter die Anzahl  $n$  der Verzögerungszeitkonstanten, so kann anhand des Diagramms (Bild 5) für alle Systeme mit  $n$  gleichen Zeitkonstanten und mit oder ohne Totzeit (die Sonderfälle  $n = 0$  und  $n = 1$  eingeschlossen) der kritische Faktor sofort abgelesen werden. Mit dem Diagramm (Bild 5) können demnach die Stabilitätsgrenzen der in den Abschnitten 2.1 bis 2.3 behandelten Modelle rasch ermittelt werden, was ihre Verwendung als zweckmässig erscheinen lässt.

Bisher wurde die Frage, ob man sich bei der Bestimmung der Stabilitätsgrenze mit einem Modell auf der sicheren oder auf der unsicheren Seite befindet, nur kurz gestreift. Um einen ersten Anhaltspunkt zu erhalten, wurden einige Beispiele durchgerechnet. Dabei stellte sich heraus, dass man sich mit einem Modell auf der sicheren Seite befindet (d.h. das Modell wird für kleinere Werte von  $A_{\text{krit}}$  instabil, als das untersuchte System), solange die Modellübergangsfunktion in dem Bereich zwischen der gemessenen Systemübergangsfunktion und der Näherung mit reiner Totzeit liegt. Der Wert  $A_{\text{krit}}$  des untersuchten Systems stimmt um so besser mit demjenigen Wert des Modells überein, je näher sich die Übergangsfunktion des Modells an die vorgegebene anschmiegt. Einen Beweis hierfür erhält man dann, wenn man die Fläche zwischen beiden Kurven zum Minimum macht, und das aus dieser Forderung sich ergebende  $A_{\text{krit}}$  des Modells mit demjenigen des Systems vergleicht. Die exakte mathematische Ableitung dieses Beweises bietet keine grossen Schwierigkeiten, sie sei aber im Rahmen dieser Arbeit übergangen.

4. Berechnung der Stabilitätsgrenze eines Reaktorkühlkreislaufs mit den angegebenen Näherungsverfahren

Das in [1] beschriebene umfangreiche Analogmodell lieferte die in Bild 2 dargestellte Übergangsfunktion für den offenen Kreis. Berücksichtigt man nur die wesentlichsten Zeitkonstanten, so kann das System unter Vernachlässigung vorhandener Nichtlinearitäten in erster Näherung durch die komplexe Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises

$$F_o(s) = \frac{K}{s(1+sT_1) \cdot (1+sT_2) \cdot (1+sT_3) \cdot (1+sT_4)} \cdot e^{-sT_t} \quad (18)$$

beschrieben werden.

In Gleichung (18) bedeuten:

- $T_t$  die gesamte durch den Transport des Dampfes bedingte Totzeit,
- $T_1$  die Aufheizzeit des Dampfes im Heissdampfplenum,
- $T_2$  die bei Temperaturerhöhung des Dampfes erforderliche Aufheizzeit der Anlagenteile
- $T_3$  die durch das Aufheizen der Rohrleitungen bedingte Verzögerungszeit
- $T_4$  die beim Wärmeübergang vom Brennstoff zum Kühlmittel vorhandene Verzögerungszeit.

Enthält der Kühlkreislauf einen Zwischenüberhitzer, so müssen mindestens noch zwei weitere Zeitkonstanten  $T_5$  und  $T_6$  angenommen werden, die die Verzögerungen infolge Wärmeabgabe berücksichtigen.

In der nachstehenden Tabelle sind die Werte für  $A_{krit}$  zusammengestellt, die man erhält, wenn man die Stabilitätsgrenze mit den hier beschriebenen Modellen eines Systems mit I-Anteil bestimmt. Dabei gibt in diesem Beispiel das Modell 2.4 die dynamischen Eigenschaften des vorgegebenen Systems exakt wieder. Die Zahlenwerte der Zeitkonstanten stimmen mit den in [1] angegebenen überein.

Systemkenngrössen	Modell	ohne ZÜ	$A_{krit}$	mit ZÜ
$T_t=1,3$ s	2.1	1,571		1,571
$T_1=0,5$ s; $T_2=1,0$ s	2.2	1,8 ÷ 2,2		2,2 ÷ 2,6
$T_3=1,3$ s; $T_4=2,0$ s	2.3	1,954		2,322
$T_5=10$ s; $T_6=10$ s	2.4	2,052		2,518

Wie man aus dieser Tabelle entnimmt, liefert das Modell mit gleichen Zeitkonstanten recht gute Ergebnisse, wenn man die Ordnung  $n$  und die Zeitkonstante  $T$  so bestimmt, (hier  $n=4$ ;  $T=2,2$ s ohne ZÜ und  $n=3$ ;  $T=8,27$ s mit ZÜ), dass die Modellübergangsfunktion die in Abschnitt 3 ohne Beweis aufgestellten Forderungen erfüllt. Das Modell 2.2 führt ebenfalls auf genaue Werte für  $A_{krit}$ , wenn sich die Modellfunktion möglichst nahe an die vorgegebene Übergangsfunktion anschmiegt. Allerdings ist die grössenmässige Festlegung der Modelltotzeit mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, so dass nur ein Bereich für  $A_{krit}$  angegeben werden kann. Völlig falsche Werte wurden mit diesem Modell nur dann berechnet, wenn anstelle der Modelltotzeit die tatsächlich vorhandene Systemtotzeit eingesetzt wird.

## 5. Schlussbemerkung

Die in diesem Bericht dargelegten Zusammenhänge gelten allgemein für Systeme, deren offener Kreis eine Strecke ohne Ausgleich darstellt. Eine Erweiterung auf Strecken mit Ausgleich ist ohne weiteres möglich, für den hier vornehmlich behandelten Reaktorkühlkreislauf aber ohne Interesse.

Als wichtigstes Ergebnis sei nochmals betont, dass durch ein Modell mit gleichen Zeitkonstanten recht genaue Werte für die Stabilitätsgrenze gefunden werden, die aus dem Diagramm (Bild 5) leicht abzulesen sind.

Bei der Auslegung von Systemen mit mehr als zwei Verzögerungszeiten ist ausserdem von Bedeutung, dass die sich ergebenden Werte für den kritischen Faktor stets im Bereich

$$4 > A_{krit} > \frac{\pi}{2} \text{ liegen.}$$

## Literaturverzeichnis

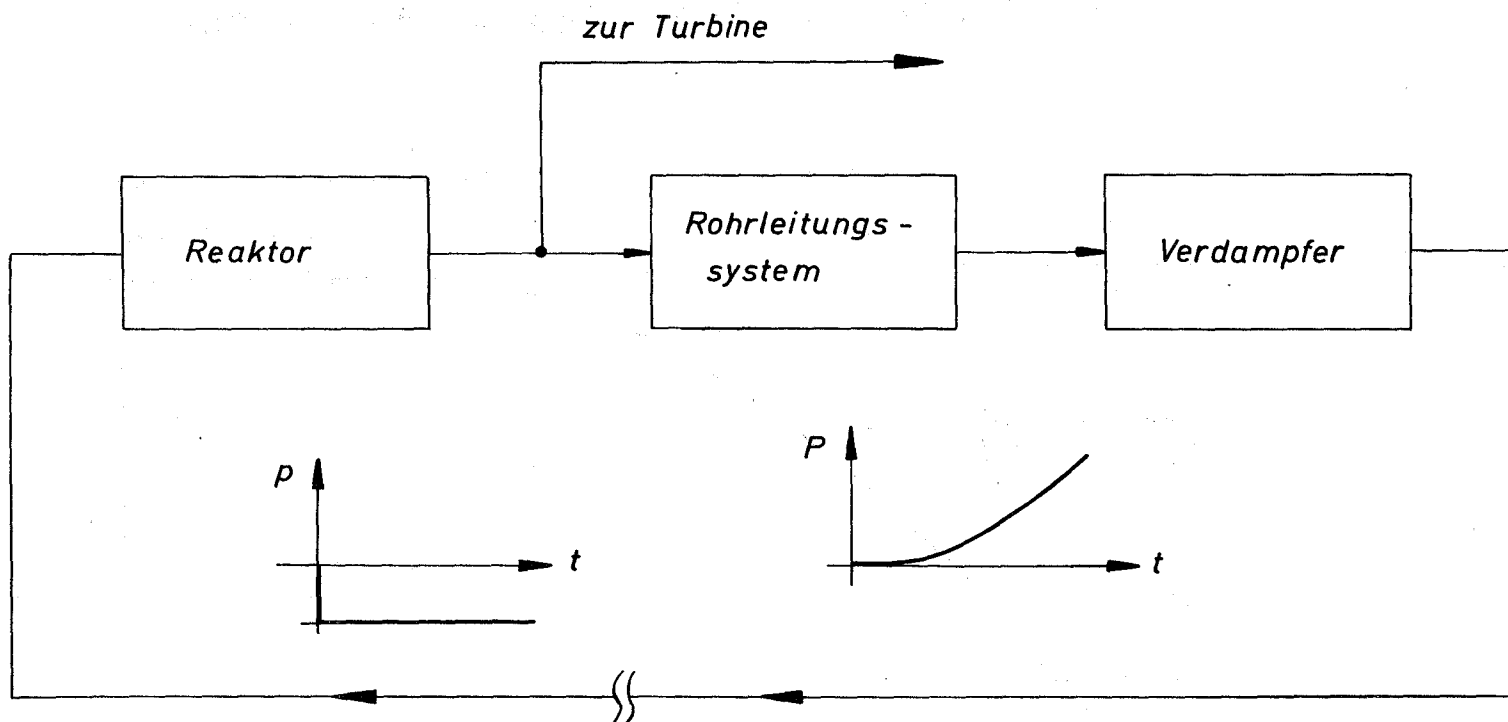
- [1] Frisch, W. Woite G. "Analogrechenmodell für dampfgekühlte schnelle Reaktoren mit Direktkreislauf".  
KFK 657, Kernforschungszentrum Karlsruhe.
  
- [2] Oppelt, W. "Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge". 4. Auflage, Verlag Chemie, Weinheim/Bergstrasse 1964.
  
- [3] Rothe, R. "Höhere Mathematik". Teil I, Verlag Teubner, Stuttgart 1960.
  
- [4] Doetsch, G. "Anleitung zum praktischen Gebrauch der LAPLACE-Transformation, 2. Auflage, Verlag R. Oldenbourg, München 1961.

## Verzeichnis der verwendeten Bezeichnungen

$a(t)$	Asymptote an die Übergangsfunktion
$a_0$	Ordinatenabschnitt der Asymptoten an die Übergangsfunktion
$A$	Kenngrosse für Stabilitätsuntersuchungen
$A_{krit}$	kritischer Faktor
$c_0$	Verhältnis von Totzeit zu Verzugszeit ( = Totzeitanteil)
$e(s)$	LAPLACE-Transformierte des Eingangssignals
$F_0(s)$	komplexe Übertragungsfunktion des offenen Kreises
$f(...)$	Funktion von ...
$i$	imaginäre Einheit
$K$	Änderungsgeschwindigkeit der Ausgangsgrösse
$K_v$	Verhältnis der $v$ -ten zur $n$ -ten Zeitkonstante
$m$	Steigung der Asymptoten an die Übergangsfunktion
$n$	Anzahl der Zeitkonstanten
$p$	Dampfdruck
$s$	komplexe Variable des Bildbereichs
$t$	Zeitvariable
$T$	Zeitkonstante
$U(t)$	Übergangsfunktion
$u(s)$	LAPLACE-Transformierte der Übergangsfunktion
$V$	Verstärkung
$\omega$	Kreisfrequenz

### Indices:

$a, b, c, d,$	Modellfunktionen nach 2.1, 2.2, 2.3, 2.4
$krit$	kritisch
$v$	Verzögerung -
$t$	Totzeit -
$M$	Modell -
$\nu, \mu$	variable Indices



*Bild 1: Schema des betrachteten Kreislaufes*



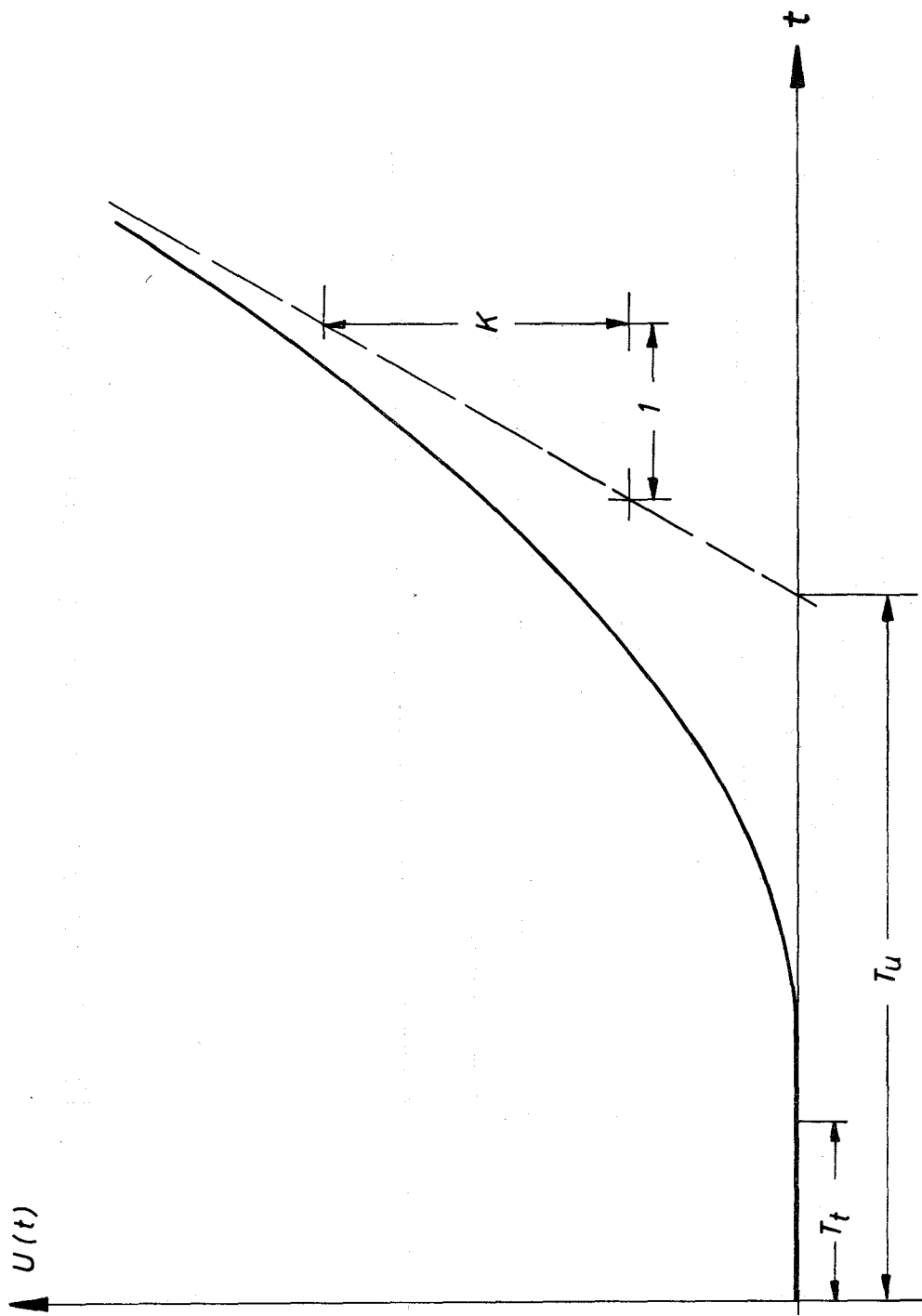
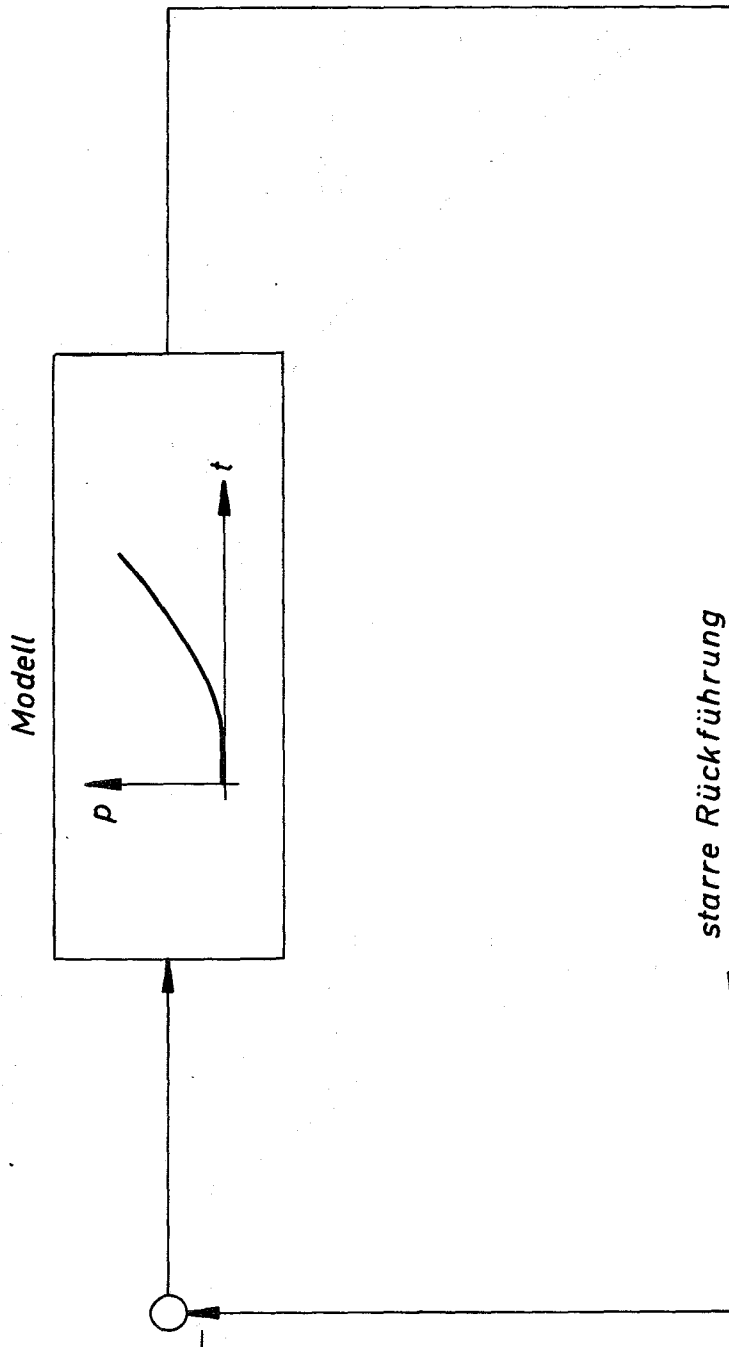


Bild 2: Kenngrößen der Übergangsfunktion



*Bild 3: Vereinfachtes Blockschaltbild des Modellkreislaufes*

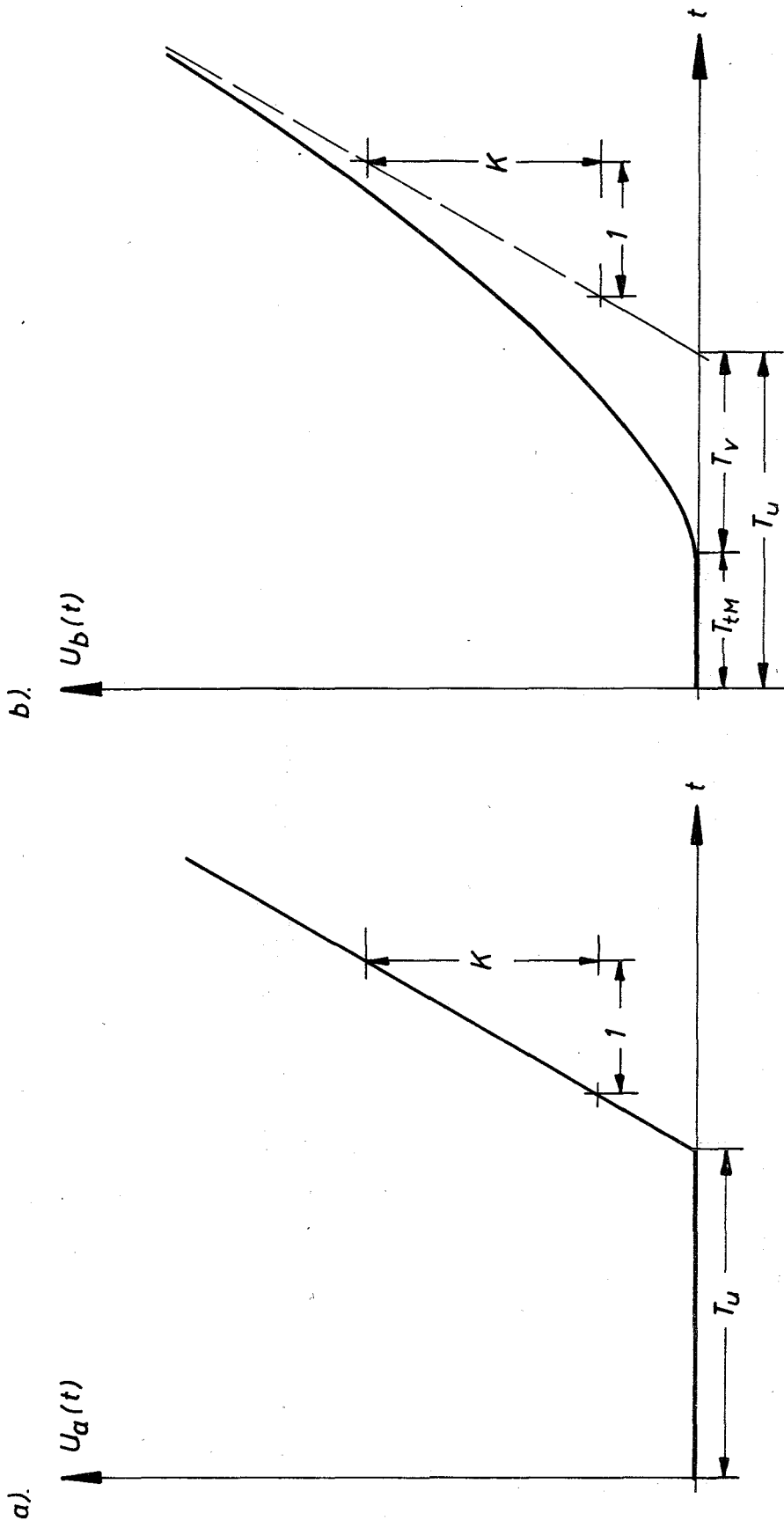


Bild 4: Bisher bekannte Modellfunktionen

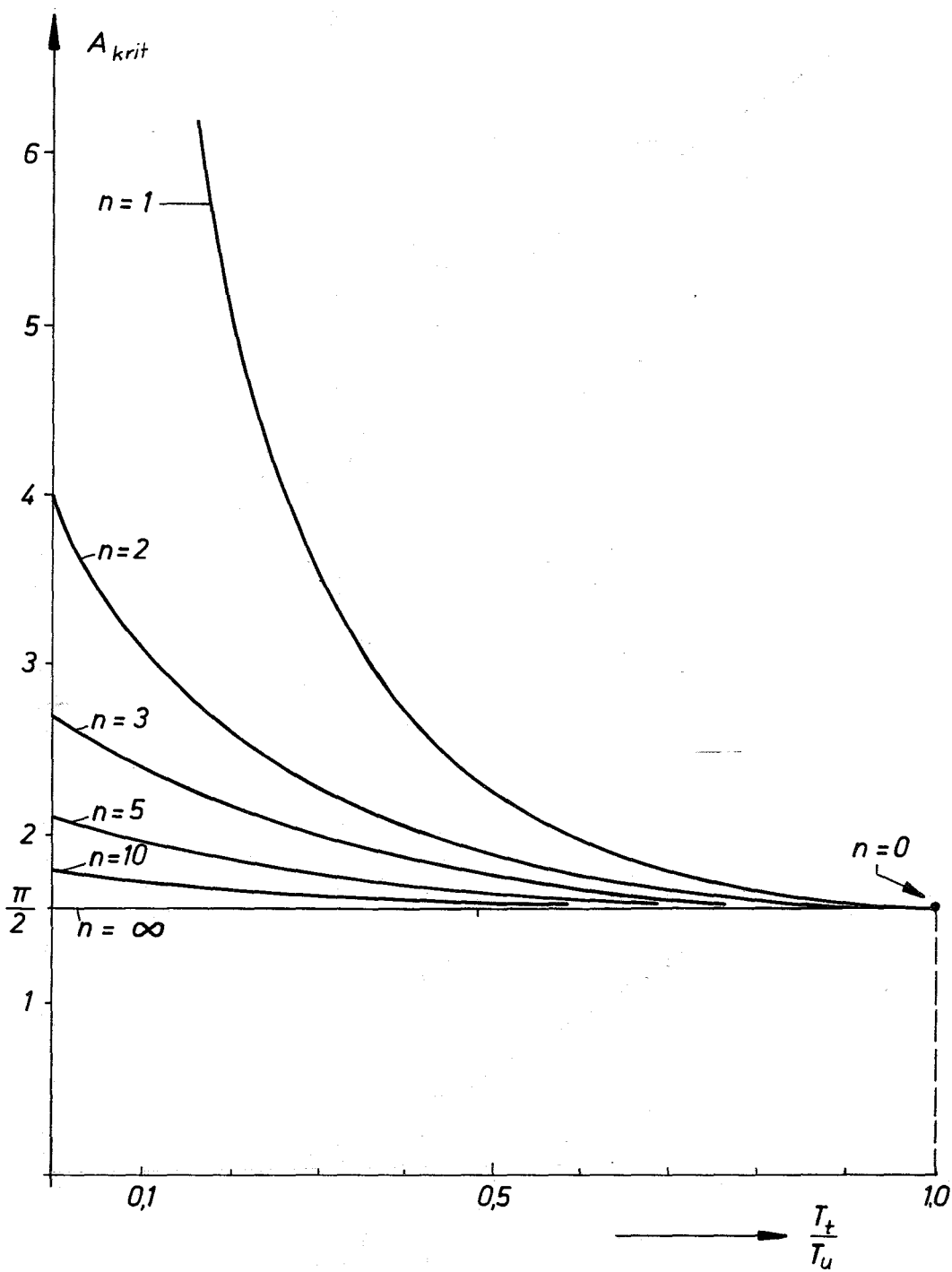


Bild 5: Kritischer Faktor eines Systems mit  $n$  gleichen Zeitkonstanten in Abhängigkeit vom Totzeitanteil  $T_t / T_u$