

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

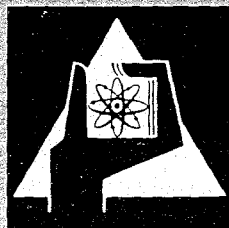
September 1968

KFK 835

Institut für Angewandte Kernphysik

Der Einfluß von Schaleneffekten auf die kinetische Energie  
und die Anregungsenergie von Spaltfragmenten

F. Dickmann, K. Dietrich



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

September 1968

K F K 835

Institut für Angewandte Kernphysik

---

Der Einfluß von Schaleneffekten auf die kinetische  
Energie und die Anregungsenergie von Spaltfragmenten

von

Friedrich Dickmann und Klaus Dietrich

Ges. für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe



## 1. Einleitung

Im Verlauf der letzten Jahre verdichteten sich Hinweise darauf, daß verschiedene Aspekte des Spaltvorgangs sich durch eine Betrachtung des sich teilenden Kerns am Zerreißpunkt (Szissionspunkt<sup>1)</sup>) verstehen oder zumindest in konsistenten Zusammenhang bringen lassen. Der Szissionspunkt muß dabei in Anlehnung an eine vereinfachte klassische Modellvorstellung definiert werden. Im folgenden sei darunter die Konfiguration zweier Kerntropfen verstanden, die sich bei zusammenfallenden Symmetrieachsen berühren. Die erste Diskussion eines einfachen Szissionsmodells stammt von Vandenbosch<sup>1)</sup>; detailliertere Untersuchungen wurden von P. Armbruster<sup>2)</sup> und H.W. Schmitt<sup>3)</sup> durchgeführt. ber das Verhalten am Szissionspunkt werden folgende Annahmen gemacht:

- 1.) Die Gesamtenergie des Systems berührender Kerne ist als Funktion der Kerngestalt ein Minimum.
  - 2.) Die Kerne besitzen über die Deformationsenergie hinaus keine innere Anregung.
  - 3.) Die sich berührenden Kerne haben die Form von Drehellipsoiden.
- Zur Beschreibung der Kerne wird das Tröpfchenmodell herangezogen; der Einfluß der Schalenstruktur wird von den Autoren in jeweils verschiedener Weise phänomenologisch berücksichtigt. Im Rahmen einer solchen Modellvorstellung sollte dann die potentielle Energie der Coulombabstoßung zwischen den oskulierenden Fragmenten mit der gemessenen relativen kinetischen Energie der Spaltprodukte übereinstimmen und die Deformationsenergie am Szissionspunkt sollte gleich sein der Summe der durch Emission von Neutronen,  $\beta$ -Teilchen und  $\gamma$ -Strahlung abgegebenen Energie der Fragmente.

Vandenbosch<sup>1)</sup> beschrieb die Schaleneffekte, indem er die nach dem Tröpfchenmodell berechnete Deformationsenergie durch einen Term der Form

$$k_A \left( \frac{c}{a} - 1 \right)^2$$

ergänzte. Dabei sind  $c$  und  $a$  große und kleine Halbachse des Drehellipsoids und  $k_A$  ein von der Massenzahl  $A$  abhängiger Parameter, der

im Falle magischer Kerne groß und positiv, im Falle unabgeschlossener Schalen klein bzw. sogar negativ sein sollte. Die Parameter  $R_A$  wurden so angepaßt, daß im Falle der Spaltung von  $U^{235}$  die Coulombwechselwirkung der gemessenen kinetischen Energie und die Deformationsenergie der durch Neutronenemission abgegebenen Energie gleich wurden. Mit den so festgelegten Parametern  $R_A$  konnte dann die Verteilung der kinetischen Energie als Funktion des Massenverhältnisses für die Spaltung von  $Cf^{252}$ ,  $He^{228}$ ,  $U^{236}$  und  $At^{213}$  ziemlich gut wiedergegeben werden.

H.W. Schmitt <sup>3)</sup> und P. Armbruster <sup>2)</sup> suchten die Schaleneffekte dadurch zu berücksichtigen, daß die Oberflächenspannung  $\sigma$  als abhängig von der Massenzahl  $A$  ansetzten. Schmitt bestimmte  $\sigma$  so, daß die Coulombwechselwirkung in der Szissionskonfiguration gleich der gemessenen kinetischen Energie wurde, Armbruster verwendete Vibrationsenergien zur Festlegung der Oberflächenspannung. Die nach dem Verfahren von H.W. Schmitt angepaßte Oberflächenspannung liegt für nichtabgeschlossene, leicht deformierbare Kerne im Bereich der durch die Bethe-Weizsäcker Formel gegebenen Werte, für magische Kerne hingegen wesentlich höher. Die empirisch sichergestellte geringere mittlere Anregungsenergie für magische Fragmente wird von dem Modell qualitativ richtig wiedergegeben <sup>3)</sup>; die berechneten Anregungsenergien sind aber durchweg für die schweren Fragmente zu klein und für die leichten Fragmente zu groß.

P. Armbruster <sup>2)</sup> studierte im Rahmen dieses Modells die Frage der Verteilung der Ladung auf die Spaltprodukte.

Da Erfolg oder Mißerfolg der beschriebenen einfachen Betrachtungen am Szissionspunkt wertvolle Hinweise auf den tatsächlichen Verlauf der Spaltung zu geben vermögen, erschien es uns nützlich, einerseits durch Einbau eines Potentialmodells die Auswirkung der Schaleneffekte besser zu beschreiben, andererseits durch Anpassung aller auftretenden Parameter an Grundzustandseigenschaften der Kerne ein Modell ohne anpaßbare Parameter zu gewinnen. Deshalb beschreiben wir die Kerne in der Szissionskonfiguration durch Nilssonpotentiale mit Paarkräften als Restwechselwirkung (siehe §2.2). Um zugleich die für solche Betrachtung wichtige Sättigungseigenschaft der Kernmaterie berücksichtigen zu können, verquicken wir die Scha-

lenmodellbeschreibung nach dem Vorschlag von Strutinskii <sup>4)</sup> mit dem Tröpfchenmodell (siehe § 2.3). Die Ergebnisse unserer Rechnung sind in Kapitel 5 dargestellt und können im Hinblick auf die sehr einfache Modellvorstellung als recht ermutigend bezeichnet werden.

Wir möchten darauf hinweisen, daß eine Beschreibung des spaltenden Kerns durch zwei Nilssonpotentiale mit Paarkräften als Restwechselwirkung von Nörenberg <sup>5)</sup> mit gutem Erfolg zur Diskussion der Ladungsverteilung herangezogen worden war.

---

## 2. Das Kernmodell für die Spaltbruchstücke

Wir wollen die Kernformen aus Gründen der mathematischen Einfachheit auf Rotationsellipsoide beschränken. Entsprechend wählen wir als Schalenmodell ein Nilsson-Potential. Die Gestalt des Kerns läßt sich dann durch nur einen Deformationsparameter kennzeichnen. Wir wählen hierfür das Verhältnis  $p$  der großen ( $c$ ) zur kleinen ( $a$ ) Halbachse:

$$p = \frac{c}{a} .$$

### 2.1 Das Tropfenmodell

Die Deformationsenergie eines Kerntropfens ist gegeben durch die Summe von Oberflächenenergie und Coulombenergie, bezogen auf die Energie des kugelförmigen Tropfens:

$$E_{\text{Tr}} = E_{\text{s}} + E_{\text{c}} . \quad ( 1 )$$

Die zulässigen Kerndeformationen werden eingeschränkt durch die Forderung konstanten Kernvolumens. Diese physikalische Forderung ergibt sich aus der empirischen Beobachtung, daß die Dichte der Kernmaterie in guter Näherung konstant ist. Das Tröpfchenmodell erscheint nicht zuletzt deshalb ein geeignetes Hilfsmittel zur Beschreibung des spaltenden Kerns zu sein, weil es diese Grundeigenschaften der Kernmaterie in höchst einfacher Weise zu berücksichtigen gestattet.



Verwendet man als Energieeinheit die Oberflächenenergie des kugelförmigen Tropfens

$$E_S^{(0)} = \sigma 4\pi R^2 = \sigma 4\pi r_0^2 A^{2/3},$$

so läßt sich schreiben

$$E_{Tr} = E_S^{(0)} \cdot \left[ B_S - 1 + 2x (B_C - 1) \right]. \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet A die Nukleonenzahl des Kerns,  $\sigma$  die Oberflächenspannung und x den Spaltbarkeitsparameter

$$x = \frac{Z^2}{A} \frac{3 e^2}{10 r_0 4\pi \sigma r_0^2} \quad \text{mit } e = \text{Elementarladung und}$$

Z = Ladungszahl . Die Konstante  $r_0$  ist gegeben durch den empirischen Zusammenhang zwischen Kernradius R und Massenzahl A ( $R = r_0 A^{1/3}$ ). Die durch ( 1 ) und ( 2 ) definierten Größen  $B_S$  und  $B_C$  beschreiben die Formabhängigkeit der Oberflächenenergie und der Coulombselfenergie des Tropfens. Im Falle spindelförmiger ( $p \geq 1$ ) Drehellipsoide sind  $B_S$  und  $B_C$  gegeben durch die Ausdrücke

$$B_S = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2)^{1/3} \left[ 1 + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right], \quad (3a)$$

$$B_C = \frac{1}{2} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/3}}{\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (3b)$$

Dabei ist  $\varepsilon$  die Excentricität des Ellipsoids; sie hängt vom Deformationsparameter p in folgender Weise ab:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - 1/p^2}. \quad (4)$$

Eine Zusammenstellung vieler Formeln für das Tropfenmodell siehe in den Arbeiten von Nix und Swiatecki (6,7).

## 2.2 Das Nilssonmodell

Den Einfluß der magischen Zahlen auf die Deformationseigenschaften der Kerne berücksichtigen wir mit Hilfe des Nilssonmodells <sup>8,9)</sup>. Wir benutzen folgenden Einteilchenhamiltonoperator:

$$H_{sp} = H_0 + V_{corr}, \quad (5)$$

dabei ist

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \left[ \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right] \quad (5a)$$

und

$$V_{corr} = - \kappa_N \hbar \omega_0 \left[ 2 (\vec{l} \vec{s}) + \mu_N \left( \vec{l}^2 - \frac{N(N+3)}{2} \right) \right] \quad (5b)$$

$N$  ist die Oscillatorhauptquantenzahl,  $\kappa_N$  und  $\mu_N$  die Kopplungskonstanten für den Spin-Bahn-Term und den  $\vec{l}^2$ -Term. Die Oscillatorfrequenzen  $\omega_{\perp}$  und  $\omega_z$  sind mit dem Deformationsparameter durch die Beziehung

$$p = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_z} \quad (6)$$

verknüpft. Fordert man, daß bei der Deformation des Kerns die von Äquipotentialflächen eingeschlossenen Volumina unverändert bleiben sollen, so wird man auf die Nebenbedingung <sup>9)</sup>

$$\omega_{\perp}^2 \omega_z = \omega_0^3 = \text{const.} \quad (7)$$

geführt. Die deformationsabhängige Frequenz  $\omega_0$  ist durch das Kernvolumen festgelegt und i.a. verschieden für Neutronen und Protonen (s.u. Abschnitt 4).

Zur Bestimmung der Eigenwerte  $\epsilon_\nu$  von  $H_{sp}$  diagonalisieren wir  $H_{sp}$  im Raum der im Anhang A der Nilssonschen Arbeit <sup>8)</sup> angegebenen Basisfunktionen.

Die Deformationsenergie des Kerns im Nilssonmodell erhält man nun, indem man die für verschiedene Deformationen berechneten tiefsten Einteilchenniveaus aufsummiert. Die Coulombwechselwirkung der Protonen wird näherungsweise dadurch berücksichtigt, daß man noch einen Term addiert, der wie im Tropfenmodell die Selbstenergie einer im Kernvolumen homogenen Ladungsverteilung beschreibt. Es ergibt sich:

$$E_{Nil}(p) = \sum_{\substack{\text{Neutronen} \\ \text{Protonen}}} \epsilon_\nu(p) + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{1/3}} (B_c(p) - 1). \quad (8)$$

### 2.3 Die Strutinskii-Methode

Wir wollen das Nilssonmodell zu einer Schalenkorrektur am Tropfenmodell verwenden. Die Bedingung konstant gehaltener Äquipotentialvolumina ist nicht gleichbedeutend mit der physikalischen Forderung nach konstanter Dichte der Kernmaterie. Während die durch Bündelung der Einteilchenniveaus erzeugten typischen Schaleneffekte von der durchschnittlichen Kerndichte vermutlich wenig abhängen, kann der mittlere Trend der Deformationsenergie als Funktion der Kernform durch eine Verletzung der Sättigungseigenschaft empfindlich verfälscht werden. Deshalb zieht man nach einem Vorschlag von Strutinskii <sup>4)</sup> von der im Schalenmodell berechneten Gesamtenergie einen geeignet definierten Mittelwert ab und ersetzt ihn durch die Energie  $E_{Tr}$  eines entsprechend deformierten Tropfens.

Der zu korrigierende Mittelwert der Schalenmodellenergie wird in Anlehnung an ein fiktives System mit kontinuierlicher Verteilung der Einteilchenenergien definiert. Es sei

$$g^{(0)}(\epsilon) = \sum_\nu \delta(\epsilon - \epsilon_\nu) = \sum_\nu h_\nu \delta(\epsilon - \epsilon_\nu) \quad (9)$$

die Niveaudichteverteilung in dem zugrunde gelegten Schalenmodell. Dabei tritt in  $\sum_{\nu}$  jede Einteilchenenergie nur einfach auf und  $h_{\nu}$  ist der Entartungsgrad (die Vielfachheit) des Eigenwertes  $\epsilon_{\nu}$ . Die Gesamtenergie im Schalenmodell läßt sich dann formal schreiben als

$$E_{\text{sch}} = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon g^{(0)}(\epsilon) . \quad (10)$$

Wir können eine kontinuierliche Niveaudichteverteilung erzeugen, indem wir die  $\delta$ -Funktionen durch Gaußkurven ersetzen:

$$g^{(0)}(\epsilon) \rightarrow g(\epsilon) = \frac{1}{\pi\gamma} \sum_{\nu} e^{-\frac{(\epsilon - \epsilon_{\nu})^2}{\gamma}} . \quad (11)$$

Dieser Verteilung der Niveaus entspricht eine Gesamtenergie

$$E_{\text{con}} = \int_{-\infty}^{\lambda} d\epsilon \epsilon g(\epsilon) , \quad (12)$$

wobei die obere Integrationsgrenze  $\lambda$  so zu wählen ist, daß die Teilchenzahl in diesem fiktiven System  $\eta$  ist:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\lambda} d\epsilon g(\epsilon) . \quad (13)$$

Dabei ist  $\eta$  die Zahl der Neutronen  $N$  bzw. Protonen  $Z$  des Kerns. Im Grenzfall  $\gamma \rightarrow 0$  geht  $g(\epsilon) \rightarrow g^{(0)}(\epsilon)$  und  $E_{\text{con}} \rightarrow E_{\text{sch}}$  über. Wählt man dagegen die Breite  $\gamma$  der Gaußschen Glockenkurven größer als die typischen Schalenabstände, so erreicht man, daß die durch (12) definierte "mittlere Schalenmodellenergie" eine stetig variierende Funktion der Teilchenzahl  $\eta$  wird.

Der stetig mit  $N$  und  $Z$  variierende Anteil der Gesamtenergie des Kerns sollte durch das Tröpfchenmodell in verlässlicherer Weise wiedergegeben werden als durch unser einfaches Schalenmodell.

Deshalb ersetzen wir den Mittelwert  $E_{\text{con}}$  durch die Energie  $E_{\text{Tr}}$  des entsprechend gewählten Kerntropfens.

Soweit ist aber die vollzogene Mittelung der Schalenmodellenergien nur eine von vielen Möglichkeiten eine "mittlere Energie" zu definieren. Jede Funktionenfolge  $f_{\gamma}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\nu})$ , die im Grenzfall  $\gamma \rightarrow 0$  die  $\delta$ -Funktion  $\delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\nu})$  ergibt, führt bei geeigneter Wahl der Abfallbreite  $\gamma$  zu einer Mittelung

$$g(\mathcal{E}) = \sum_{\nu} f_{\gamma}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\nu}). \quad (14)$$

Wir wollen die Wahl der Funktionen  $f_{\gamma}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\nu})$  durch eine sinnvolle physikalische Forderung einengen. Die  $\Sigma$  über die Schalenmodellenergien  $\mathcal{E}_{\nu}$  läßt sich immer dann durch eine Integration mit stetiger Dichtefunktion  $h(x)$  ersetzen, wenn die zu summierende Funktion über Bereiche typischer Schalenmodellabstände wenig variiert:

$$\sum_{\nu} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx h(x) \quad (15)$$

Das ist aber für die Funktion  $f_{\gamma}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\nu})$  gewiß der Fall. Wir können also anstelle von (14) schreiben

$$g(\mathcal{E}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx h(x) f_{\gamma}(\mathcal{E} - x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz h(\mathcal{E} - Z) f_{\gamma}(Z) dz. \quad (16)$$

Es erscheint sinnvoll zu fordern, daß die künstlich erzeugte Dichtefunktion  $g(\mathcal{E})$  näherungsweise mit der interpolierenden Schalenmodellldichte  $h(\mathcal{E})$  übereinstimmen solle:

$$g(\mathcal{E}) = h(\mathcal{E}) \quad (17)$$

Setzt man gar nichts über die Funktion  $h(\mathcal{E})$  voraus, so läßt sich (16) und (17) natürlich nur für die  $\delta$ -Funktion

$$f(Z) = \delta(Z)$$

erfüllen, die gerade keine Mittelung erzeugt. Wir müssen also Kenntnisse über die Niveaudichte  $h(x)$  ausnutzen. Wir wissen, daß im Falle des harmonischen Oscillators die Einteilchenenergien  $\mathcal{E}_\nu$   $(\nu + 1/2)$  - fach entartet sind, wobei  $\nu$  die Hauptquantenzahl ist. Die Gewichte  $h_\nu$  sind also proportional zu  $\nu^2$  d.h. die interpolierende Dichte  $h(\mathcal{E})$  in diesem einfachen Falle ist eine quadratische Funktion der Energie. Es ist anzunehmen, daß auch im Falle realistischer Schalenmodellpotentiale die Niveaudichten  $h(\mathcal{E})$  sich in guter Näherung quadratisch approximieren lassen, zumindest in jedem durch die Abfallbreite  $\gamma$  der Niveauverschmierung gegebenen Intervall.

Wir entwickeln deshalb die Funktion  $h(\mathcal{E} - Z)$  im Integranden von ( 16 ) bis zu quadratischen Termen um  $\mathcal{E}$

$$h(\mathcal{E} - Z) \approx h(\mathcal{E}) - Z h'(\mathcal{E}) + \frac{Z^2}{2} h''(\mathcal{E}) \quad ( 18 )$$

und verlangen, daß die Gleichung ( 17 ) in der durch ( 18 ) gegebenen Näherung erfüllt sei.

Es folgt also

$$h(\mathcal{E}) = h(\mathcal{E}) \int_{-\infty}^{+\infty} f_\gamma(Z) dz - h'(\mathcal{E}) \int_{-\infty}^{+\infty} Z \cdot f_\gamma(Z) dz + \frac{h''(\mathcal{E})}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 f_\gamma(Z) dz$$

d.h.  $f_\gamma(Z)$  muß so gewählt werden, daß das nullte Moment der Verteilungsfunktion  $f_\gamma(Z)$  auf eins normiert ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\gamma(Z) dz = 1 \quad ( 19 )$$

und das erste und zweite Moment verschwinden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z f_\gamma(Z) dz = 0, \quad ( 20 )$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 f_\gamma(Z) dz = 0. \quad ( 21 )$$

Ferner soll, wie schon ausgeführt, gelten

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} f_{\gamma}(Z) = \delta(Z). \quad (22)$$

Die Bedingungsgleichungen ( 19 ) bis ( 22 ) legen  $f_{\gamma}(Z)$  zwar nicht fest, führen aber zu einer weitgehenden Einschränkung. Der ursprüngliche Ansatz (Gleichung ( 11 ) )

$$f_{\gamma}(Z) = \frac{1}{\gamma \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{Z}{\gamma}\right)^2}$$

erfüllt ( 19 ), ( 20 ) und ( 22 ). Wir können auch das zweite Moment zum Verschwinden bringen, wenn wir die Gaußfunktion mit einem geeignet gewählten Polynom  $P(Z)$  multiplizieren

$$f_{\gamma}(Z) = P(Z) e^{-\left(\frac{Z}{\gamma}\right)^2} \quad (23)$$

Bedingung ( 20 ) ist erfüllt, wenn  $P(Z)$  eine gerade Funktion von  $Z$  ist. Die übrigen Bedingungen lassen sich durch ein Polynom zweiten Grades erfüllen

$$P(Z) = C_0 + C_2 Z^2. \quad (24)$$

Man findet durch einfache Rechnung das Ergebnis

$$f_{\gamma}(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma} \left( \frac{3}{2} - \left(\frac{Z}{\gamma}\right)^2 \right) e^{-\left(\frac{Z}{\gamma}\right)^2} \quad (25)$$

und damit

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma} \sum_{\nu} \left[ \frac{3}{2} - \left(\frac{\xi - \xi_{\nu}}{\gamma}\right)^2 \right] e^{-\left(\frac{\xi - \xi_{\nu}}{\gamma}\right)^2} \quad (26)$$

Die Dichtefunktion  $g(\xi)$  wurde von Strutinskii <sup>4)</sup> angegeben und

in konkreten Rechnungen verwendet. Sie liegt auch den von uns durchgeführten Rechnungen zugrunde. Mit Hilfe der Niveaudichteformel ( 26 ) erhält man nun die kontinuierliche Energie  $E_{\text{con}}$  aus ( 12 ), wobei  $\lambda$  durch ( 13 ) festgelegt ist.

Der Korrekturterm zum Tropfenmodell lautet also

$$\delta U = \sum_{\substack{\text{Neutronen,} \\ \text{Protonen}}} \epsilon_{\nu} - E_{\text{con, Neutronen}} - E_{\text{con, Protonen}} \quad ( 27 )$$

#### 2.4 Paarkraftkorrelationen

Um die Auswirkung der Paarkräfte auf die Deformationseigenschaften der Kerne zu berücksichtigen, bestimmen wir die Energie zur BCS-Grundzustandfunktion <sup>10)</sup> und subtrahieren davon die Summe der Nilsson-Einteilchenenergien. Der BCS-Grundzustandsenergie für Protonen ist

$$E_{\text{BCS}} = \epsilon_{\text{odd}} + \sum'_{\substack{\text{Protonen} \\ \text{Niveaus}}} 2 v_i^2 \left( \epsilon_i + \frac{G}{2} v_i^2 \right) - \frac{\Delta^2}{G} + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{1/3}} (B_c - 1) \quad ( 28 )$$

Dabei ist  $\epsilon_{\text{odd}}$  die Energie des von einem eventuell vorhandenen ungeraden Proton besetzten Zustandes,  $G$  ist die Paarkraftkonstante und

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{\epsilon}_i - \lambda}{\sqrt{(\bar{\epsilon}_i - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \quad ( 29 )$$

mit

$$\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i - G v_i^2 \quad ( 30 )$$

$\Delta$  und  $\lambda$  (das chem. Potential) sind implizit durch die BCS-Gleichungen gegeben:



$$\frac{Z}{G} = \sum' \frac{1}{\sqrt{(\bar{\epsilon}_i - \lambda)^2 + \Delta^2}} \quad (31)$$

$$Z_e = \sum' 2 \nu_i^2 = \sum' \left( 1 - \frac{\bar{\epsilon}_i - \lambda}{\sqrt{(\bar{\epsilon}_i - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \quad (32)$$

$Z_e$  ist gleich  $Z$ , wenn  $Z$  gerade ist und sonst  $Z-1$ . Der Strich über dem  $\Sigma$ -Zeichen deutet an, daß Niveau  $\epsilon_{\text{odd}}$  von der Summation auszuschließen ist. Für die Neutronen erhält man entsprechende Gleichungen, wobei der letzte Term in (28) natürlich nicht auftritt.

Somit lautet der Korrekturterm zum Tropfenmodell für Paar-kraftkorrelationen:

$$P = E_{\text{BCS, Neutronen}} + E_{\text{BCS, Protonen}} - E_{\text{Nil.}} \quad (33)$$

Zusammenfassend erhalten wir als Deformationsenergie eines Kernbruchstücks

$$E(Z, N, p) = E_{\text{Tr}} + \delta U + P - E_0(Z, N) \quad (34)$$

Da wir uns nicht für Absolutwerte der Energie (Kernmassen) interessieren, sondern nur für deren Deformationseigenschaften, beziehen wir die Energien auf das Minimum  $E_0(Z, N)$  als Funktion von  $p$  der nach dem Strutinskii-Verfahren bestimmten Energie .

### 3. Das Modell zur Berechnung der Scissionskonfiguration

Wir nehmen im folgenden an, daß sich die Form eines spaltenden Kerns am Zerreißpunkt durch zwei rotationssymmetrische Ellipsoide beschreiben läßt, die sich an den Durchstoßpunkten ihrer Rotations-

achsen berühren (siehe Fig. 1)

Die Deformationsenergien der beiden Bruchstücke entnehmen wir dem in Abschnitt 2 beschriebenen Modell. Zwischen den beiden Fragmenten besteht eine Coulombwechselwirkung  $W$ . Unter der Voraussetzung, daß die Ladung jedes Fragments homogen über sein Volumen verteilt ist, gilt <sup>6)</sup>

$$W = \frac{Z_1 Z_2 \cdot e^2}{C_1 + C_2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(2j+1)(2j+3)} \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} \frac{(2j+2k)!}{(2j)!(2k)!} \lambda_1^{2j} \lambda_2^{2k}, \quad (35)$$

wobei

$$\lambda_1 = \frac{C_1^2 - a_1^2}{(C_1 + C_2)^2}, \quad \lambda_2 = \frac{C_2^2 - a_2^2}{(C_1 + C_2)^2}, \quad (36)$$

Die Doppelsumme in ( 35 ) beschreibt die Abweichung der Coulombwechselwirkung von der Wechselwirkung zweier Punktladungen im Abstand der Ladungsschwerpunkte. Die Hauptachsen  $C_i$  und  $a_i$  der beiden Bruchstücke lassen sich durch deren Nukleonenzahlen  $A_i$  und Deformationsparameter  $p_i = C_i/a_i$  ausdrücken:

$$C_i = r_0 \sqrt{A_i p_i^2}, \quad (37)$$

$$a_i = r_0 \sqrt{A_i/p_i}, \quad (i = 1, 2).$$

Die Gleichungen ( 37 ) folgen aus der Bedingung, daß sich die Volumina der Bruchstücke bei Deformationen nicht ändern sollen:

$$V_i = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A_i = \frac{4\pi}{3} C_i a_i^2. \quad (38)$$

Die Deformationsenergie des aus zwei sich berührenden Bruchstücken zusammengesetzten Systems ist nun gegeben durch:

$$E = \mathcal{E}(Z_1, N_1, p_1) + \mathcal{E}(Z_2, N_2, p_2) + W(Z_1, N_1, p_1, Z_2, N_2, p_2). \quad (39)$$

Unter der Nebenbedingung, daß sich die Bruchstücke bei vorgegebenen Nukleonenzahlen  $Z_1, A_1$  und  $Z_2, A_2$  am Scheitelpunkt der großen Halbachsen berühren, bestimmen wir die Deformationsparameter  $p_1$  und  $p_2$  so, daß die Energie  $E$  ein Minimum wird. Unserer Arbeit liegt die Annahme zugrunde, daß das wirkliche System die so definierte Scissionskonfiguration näherungsweise durchläuft. Bezüglich des zur Spaltung gehörigen Freiheitsgrades (Abstand der Bruchstücksschwerpunkte) ist die Energie am Zerreißpunkt im allgemeinen weder ein Maximum noch ein Minimum. Das Tröpfchenmodell macht die Voraussage, daß Kerne mit einem Spaltbarkeitsparameter  $x < 0.67$  (d.h. unterhalb Radium) am Spaltplatz eine symmetrische, ausgeprägt hantelförmige Gestalt besitzen<sup>11)</sup>. In grober Näherung läßt sich diese Kernform durch zwei gleich große, berührende Ellipsoide approximieren<sup>6)</sup>. Wir können also annehmen, daß im Falle leichterer Spaltkerne der von uns definierte Zerreißpunkt bei symmetrischer Massenaufteilung näherungsweise dem Sattelpunkt entspricht.

Wenn die Kernbruchstücke auseinanderfliegen, wird die Coulombwechselwirkungsenergie  $W$  der Scissionskonfiguration in kinetische Energie der Spaltbruchstücke umgewandelt. Beim Vergleich der berechneten Coulombenergie  $W$  mit der meßbaren kinetischen Energie von Spaltprodukten (s.u. Abschnitt 5) sind jedoch 3 Punkte zu beachten:

- 1.) Ein Teil der Energie  $W$  wird zur Coulombanregung der Fragmente verbraucht. Die Rechnungen von Nix<sup>7)</sup> für das dynamische Tröpfchenmodell haben ergeben, daß im Falle wirbelfreier Strömung die asymptotische kinetische Energie der Kerntropfen kaum größer ist als die Coulombwechselwirkung zweier Punktladungen, deren Abstand gleich der Entfernung der Bruchstücksschwerpunkte in der Scissionskonfiguration ist. Dieses Ergebnis läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die Schwingungsdauer der Bruchstücke um ihre Gleichgewichtslage ist klein gegenüber

der Zeit, in der sich die Coulombwechselwirkung zwischen den auseinanderfliegenden Fragmenten merklich ändert <sup>6,7)</sup>. In diesem Fall wird sich die Coulombwechselwirkung näherungsweise wiedergeben lassen als Wechselwirkung zweier kugelförmiger Ladungsverteilungen. Dieser Effekt führt in unserem Modell zu einer Verringerung der asymptotischen kinetischen Energie der Bruchstücke um  $\gtrsim 10$  MeV im Massenbereich  $186 \leq A \leq 236$  gegenüber ihrer Coulombwechselwirkung am Zerreißpunkt (s.u. Abschnitt 5).

2.) Bevor die kinetische Energie eines Bruchstücks gemessen werden kann, hat dieses sog. prompte Neutronen abgegeben. Die Neutronenemission im System des fliegenden Fragments erfolgt isotrop, und es ergibt sich, daß die mittlere kinetische Energie der Spaltfragmente durch Neutronenemission um  $1/2 - 1$  MeV pro Neutron verringert wird.

3.) Ist die Anregungsenergie des spaltenden Compoundkerns größer als die Energie der Scissionskonfiguration, so so kann die überschüssige Energie in Form zusätzlicher kinetischer Energie der Spaltprodukte auftreten. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist jedoch gering, da die überschüssige Energie aus Phasenraumgründen vorzugsweise als innere Anregung der Fragmente und nicht als translatorische Energie erscheint.

Der zuletzt genannte Effekt führt also im Gegensatz zu den vorgenannten zu einer Vergrößerung der kinetischen Energie; diese ist aber im allgemeinen dem Betrage nach viel kleiner als die vorher genannte Verringerung und wird deshalb unberücksichtigt gelassen.

#### 4. Festlegung der Modellparameter

In unseren Rechnungen haben wir folgende Parameterwerte benutzt:

a) Tropfenmodell

$$\begin{aligned} \text{Kernradiusparameter} \quad r_0 &= 1.216 \text{ Fermi,} \\ \text{spezifische} & \\ \text{Oberflächenenergie} \quad 4\pi\sigma r_0^2 &= 17.8 \text{ MeV.} \end{aligned} \quad (40)$$

Diese Werte sind der Arbeit von Nix und Swiatecki<sup>6)</sup> entnommen. Durch Anpassen von Massenformeln an empirische Daten erhält man größere spezifische Oberflächenenergien von ca. 19.5 MeV (siehe z.B. Green<sup>12)</sup> und Seeger und Perisho<sup>13)</sup>).

b) Einteilchenmodell

Wir verwenden ein von P.A. Seeger und R.C. Perisho<sup>13)</sup> angegebenes Einteilchenniveauschema. Diese Autoren geben die Kopplungskonstanten für die  $(\vec{l} \vec{s})$ -Kopplung und den  $\vec{l}^2$ -Term als Funktion der Oscillatorhauptquantenzahl N wie folgt an:

$$\kappa_N = \kappa_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{(N+1)(N+2)}{2}}, \quad (41)$$

$$\mu_N = \mu = \text{konstant,}$$

wobei

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 0.18, \quad \mu = 0.62 \text{ für Protonen,} \\ \kappa_0 &= 0.21, \quad \mu = 0.308 \text{ für Neutronen.} \end{aligned}$$

Die Energieeinheit  $\hbar\omega_0$  wird aus der Forderung bestimmt, daß der mittlere quadratische Radius für Protonen und Neutronen einzeln gleich dem mittleren quadratischen Radius einer Kugel vom Halbmesser  $R = r_0 A^{1/3}$  sein solle. Für Protonen ergibt sich:

$$\overline{R^2} = \frac{3}{5} (r_0 A^{1/3})^2 = \frac{1}{Z} \sum_i \langle i | r^2 | i \rangle = \frac{\hbar}{Z m \omega_0} \sum_i (N + \frac{3}{2}) \quad (42)$$

Die Summe in ( 42 ) erstreckt sich über die Z tiefsten Einzelchenzustände des Nilssonmodells mit kugelsymmetrischem Potential. Aus ( 42 ) folgt

$$\frac{\hbar}{2m} \omega_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{10}{3} \frac{1}{Z r_0^2 A^{2/3}} \sum_i (N + \frac{3}{2}) . \quad ( 43 )$$

Eine gute Näherung für ( 43 ) ist

$$\frac{\hbar}{2m} \omega_0 = \frac{38 \text{ MeV}}{A^{1/3}} \text{ für Protonen.}$$

Entsprechend ergibt sich ( 44 )

$$\frac{\hbar}{2m} \omega_0 = \frac{44 \text{ MeV}}{A^{1/3}} \text{ für Neutronen.}$$

#### c) Strutinskii-Rechnung

Wir wählen wie Strutinskii <sup>4)</sup> den Parameter  $\gamma$  als

$$\gamma = 0.7 \frac{\hbar}{2m} \omega_0 . \quad ( 45 )$$

Dieser Wert ist groß genug, um Schaleneffekte aus der Niveaudichteformel ( 26 ) zu eliminieren.

#### d) Paarkraftkorrelationen

Wir verwenden die Paarkraftkonstanten

$$G = \frac{20.5}{A} \text{ MeV für Protonen,}$$

$$G = \frac{17.5}{A} \text{ MeV für Neutronen.}$$

Diese Werte haben wir so bestimmt, daß die gg-ug-Massendifferenzen

im Bereich der Seltenen Erden im Mittel gut wiedergegeben werden <sup>14)</sup>.  
Bei der Beurteilung der Zahlwerte für die Paarkraftkonstanten muß man zweierlei beachten:

- 1.) Für einen Kern mit  $Z$  Protonen berücksichtigen wir bei der Auflösung der BCS-Gleichungen ( 31 ) und ( 32 )  $Z$  Protonenniveaus. Dies entspricht wegen der zweifachen Entartung jedes Niveaus  $2 Z$  Protonenzuständen. Es werden also alle Niveaus unterhalb der Fermikante und noch einmal genauso viele oberhalb der Fermikante mitgenommen.
- 2.) Wir berücksichtigen die  $\gamma^4$ -Terme (siehe ( 28 ) ). Dies führt in den BCS-Gleichungen zu renormierten Einteilchenenergien (siehe ( 30 ) ). Die  $\gamma^4$ -Terme wirken wie eine Verkleinerung der Niveaudichte an der Fermikante. Man braucht daher eine etwas größere Paarkraftkonstante, um ein vorgegebenes  $\Delta$  zu erreichen, als bei Vernachlässigung der  $\gamma^4$ -Terme.

## 5. Ergebnisse

### 5.1 Schaleneffekte in der Deformationsenergie eines isolierten Kernes

Fig. 2 zeigt Deformationsenergiekurven. Wir haben für fünf Nuklide (Fig. 2 a - 2 e) jeweils drei Kurven gezeichnet, die die Deformationsenergie nach der Methode von Strutinskii, nach einem Nilssonmodell mit Paarkräften (BCS-Verfahren) und nach dem Tropfenmodell darstellen. Fig. 2 a bezieht sich auf das doppelt magische Nuklid  ${}_{50}^{132}\text{Sn}_{82}$ , Fig. 2 b auf das Nuklid  ${}_{50}^{128}\text{Sn}_{78}$  mit magischer Protonenzahl; den in Fig. 2 c - 2 e dargestellten Nukliden fehlen jeweils einige Nukleonen zum Schalenabschluß bei 50 bzw. 82. Fig. 2 f zeigt das gleiche Nuklid wie Fig. 2 e, jedoch mit geänderten Tropfenmodellparametern (s.u. dieser Abschnitt). Ordinatenwerte wurden für die Abscissenwerte

$\frac{c}{a} = p = 1.0$  in Schritten von  $\Delta p = 0.1$  bis  $p = 2.3$  berechnet. Es wurde so normiert, daß der tiefste Ordinatenwert für jede der drei Reihen null ist.

Die Folge der Abbildungen 2 a bis 2 e illustriert die Auswirkung der magischen Zahlen auf die Deformationseigenschaften der Kerne. Der Schaleneffekt zeigt sich als Abweichung der Strutinskii-Kurve von der Tropfenmodell-Kurve. Man erkennt, daß der kugelförmige Grundzustand des doppelt magischen Nuklids  ${}_{50}^{132}\text{Sn}_{82}$  besonders stabil gegen Deformationen ist, denn die Deformationsenergie nach Strutinskii steigt für Deformationsparameterwerte  $p$  zwischen  $p = 1$  und  $p = 1.3$  wesentlich schneller an als nach dem Tropfenmodell. Dieser Effekt wird verursacht durch die große Lücke im Einteilchenspektrum kugelförmiger Kerne mit magischen Nukleonenzahlen. Bei größeren Deformationen verschwindet diese Lücke und magische Nuklide sind dann nicht mehr steifer gegen Deformationen als andere. Den Figuren 2 b bis 2 e entnimmt man, daß der kugelförmige Grundzustand des halbmagischen Nuklids  ${}_{50}^{128}\text{Sn}_{78}$  schon leichter zu deformieren ist als derjenige von  ${}_{50}^{132}\text{Sn}_{82}$  und daß nichtmagische Nuklide im Grundzustand deformiert sein können und zwar umso stärker, je mehr ihre Neutronen- und Protonenzahlen von magischen Zahlen abweichen.

Die Figuren 2 a bis 2 e zeigen eine recht gute Übereinstimmung der Modellrechnungen nach BCS und nach Strutinskii im ganzen Deformationsbereich und für alle fünf Nuklide. Die Übereinstimmung bedeutet, daß das Nilssonmodell mit Paarkraftkorrektur nach Abzug der Schaleneffekte die gleichen Deformationsenergien liefert wie das Tropfenmodell. Diese Aussage ist natürlich nur für die hier gewählten Parameter gültig. Um den Einfluß von Parameteränderungen zu demonstrieren, stellen wir in Fig. 2 f die Deformationsenergie des in Fig. 2 e behandelten Nuklids bei anderer Wahl der Tropfenmodellparameter dar, u. z. wurden in Fig. 2 f die Tropfenmodellparameter von Seeger und Perisho <sup>13)</sup> verwendet:

$$4\pi\sigma r_0^2 = 19.655 \text{ MeV und } r_0 = 1.203 \text{ f .}$$



Mit diesen Parameterwerten steigt die Deformationsenergie des Tropfenmodells wegen der um ca. 10 % vergrößerten Oberflächenspannung steiler an als die in Fig. 2 e. Dieser Effekt zeigt sich auch in der Deformationsenergiekurve nach Strutinskii, da die Tropfenmodellenergie hier additiv eingeht. Die BCS-Kurven in Fig. 2 e und Fig. 2 f sind natürlich von den Tropfenmodellparametern unabhängig und daher identisch.

Wir können diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen: Berechnet man die Deformationsenergie eines Kerns als Funktion der Kerngestalt unter Zugrundelegung eines Nilssonpotentials (mit Paarkräften), dessen Formparameter nur so verändert werden, daß die von Äquipotentialflächen umgebenen Volumina konstant bleiben, und vergleicht man den mittleren Trend dieser Kurve mit dem vom Tröpfchenmodell vorhergesagten Verlauf, so erhält man bei geeigneter Wahl der Oberflächenspannung  $\sigma$  eine überraschend gute Übereinstimmung.<sup>\*)</sup> Es stellte sich in unseren Rechnungen heraus, daß die Übereinstimmung zwischen der BCS- und Strutinskii-Energie für den Wert  $4\pi\sigma r_0^2 = 17.8$  MeV relativ gut ist, der in den dynamischen Tröpfchenmodellrechnungen von Nix und Swiatecki zugrunde gelegt wurde. Wie schon bemerkt, haben wir die Energieskalen so gewählt, daß die nach den verschiedenen Methoden berechneten Energien getrennt auf die jeweiligen Werte dieser Energien am Minimum bezogen wurden. Unsere Aussagen gelten also nur für die Deformationsenergien. Da das Tropfenmodell die Sättigungseigenschaft der Kernmaterie richtig wiedergibt, können wir dieses Ergebnis auch folgendermaßen ausdrücken: Die Nebenbedingung festgehaltener Potentialvolumina in Verbindung mit einem Nilssonpotential berücksichtigt die Sättigungseigenschaft dann näherungsweise richtig, wenn der Wert der Oberflächenspannung in der Umgebung von  $4\pi\sigma r_0^2 = 17.8$  MeV liegt. Wir weisen darauf hin, daß dieses Ergebnis sehr wesentlich davon abhängt, daß wir zur Beschreibung der Deformations-eigenschaften die Summe der besetzten Einteilchenenergien zugrundegelegt haben (siehe Diskussion im Anhang).

---

<sup>\*)</sup> Dieses Ergebnis haben wir im Massenbereich  $92 \leq A \leq 144$  erhalten.

## 5.2 Schaleneffekte in der Deformationsenergie von zwei berührenden Kernen

Die Gesamtenergie ist nach ( 39 ) die Summe der Deformationsenergien beider Nuklide und ihrer Coulombwechselwirkung. Die Deformationsenergien sind für Fig. 3 a nach dem Tropfenmodell und für Fig. 3 b nach der Methode von Strutinskii berechnet. Auf der horizontalen Achse ist in Fig. 3 a - 3 b die Deformation des leichteren Nuklids  $\text{Mo}^{104}$  auf der vertikalen Achse die des schwereren Nuklids  $\text{Sn}^{132}$  aufgetragen.

Den Einfluß von Schaleneffekten erkennt man durch einen Vergleich der Figuren 3 a und 3 b. Da die Tropfenmodelleigenschaften der beiden Nuklide nicht sehr voneinander verschieden sind, zeigt Fig. 3 a Kurven, die annähernd spiegelsymmetrisch zu einer Hauptdiagonalen der Figur sind. Im Minimum der Gesamtenergie ist deren Gradient bezüglich der Deformationsparameter null. Der negative Gradient der Coulombwechselwirkung wird im Minimum durch den positiven Gradienten der Deformationsenergie der Nuklide gerade kompensiert. Die Höhenlinien der Gesamtenergie in Fig. 3 b zeigen ein wesentlich anderes Aussehen als die in Fig. 3 d. Die Abweichung wird verursacht durch den Unterschied in den Deformationsenergien der Nuklide zwischen Tropfenmodell mit und ohne Schalenkorrekturen (siehe Fig. 2 a und Fig. 2 e). Das steile Anwachsen der Deformationsenergie des doppelt magischen Nuklids  $_{50}\text{Sn}^{132}_{82}$  bei kleinen Deformationen bewirkt ein Minimum der Gesamtenergie bei einer kleinen Deformation dieses Nuklids. Hierdurch wird wegen der verstärkten Coulombabstoßung eine größere Deformation des leichten Nuklids erzeugt. Man findet also ein Minimum der Gesamtenergie bei großer Deformation des schweren Bruchstücks, d.h. rechts unten in Fig. 3 b. Im Tropfenmodell tritt ein solches Minimum nicht auf. Bei relativ großer Deformation beider Nuklide gibt es ein zweites Minimum, das dem einzigen Minimum des Tropfenmodells entspricht.

Die Berücksichtigung von Schaleneffekten in der Methode von Strutinskii verursacht einen Vorzeichenwechsel der zweiten

Ableitung der Deformationsenergie des doppelt magischen Nuklids  ${}_{50}^{132}\text{Sn}_{82}$  und ermöglicht dadurch das Auftreten zweier Minima der Gesamtenergie.

### 5.3 Vergleich mit Experimenten und anderen Rechnungen

Es gibt folgende Möglichkeiten, die von uns benutzte Modellvorstellung zu prüfen:

1.) Der Energiesatz für die Spaltreaktion



lautet:

$$m_B c^2 + m_C c^2 + E_{\text{kin}} + \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_C = m_A c^2 + \mathcal{E}_A$$

Dabei sind  $\mathcal{E}_{A,B,C}$  und  $m_{A,B,C}$  die Anregungsenergien und Massen der Kerne A,B,C und  $E_{\text{kin}}$  ist die relativistische kinetische Energie der Spaltprodukte B,C im Unendlichen.

Der Q-Wert der Reaktion ist gegeben durch

$$Q = m_A c^2 - m_B c^2 - m_C c^2$$

Andererseits sollte die Summe der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  und der (mittleren) Anregungsenergien  $\mathcal{E}_B$  und  $\mathcal{E}_C$  durch die Energie  $E$  (39) unseres Modells gegeben sein. Wir erhalten also die Relation

$$E = Q + \mathcal{E}_A \quad (47)$$

Abgesehen von Spontanspaltung ist  $\mathcal{E}_A \gtrsim$  der Schwellenenergie  $B_f$  der Spaltung. In der Näherung unseres Modells ist die Energie  $E$  von der Anregungsenergie  $\mathcal{E}_A$  unabhängig und mithin liefert Gleichung (47) nur die Aussage:

$$E \gtrsim Q + B_f .$$

Unsere Ergebnisse (siehe Fig. 4) bestätigen diese Ungleichung. Zur Berechnung von  $Q$  wird dabei die Massenformel von Seeger und Perisho <sup>13)</sup> benutzt; die verwendeten Spaltschwellenwerte  $B_f$  sind in Tabelle 1 zusammengestellt, die  $Q$ -Werte in Tab. 2. Es ist darauf hinzuweisen, daß die Werte  $Q$  dann mit einer Unsicherheit behaftet sind, wenn es sich um Kerne weit vom Massental handelt.

- 2.) Die experimentellen, für Neutronenemission korrigierten kinetischen Energien der Fragmente sind in unserem Modell zu vergleichen mit der Coulombabstoßung am Zerreißpunkt. Wie oben ausgeführt, stellt die Coulombenergie in der von uns berechneten Scissionskonfiguration die obere Grenze für die kinetische Energie dar, hingegen die Coulombwechselwirkung zweier Punktladungen im Abstand der Fragmentschwerpunkte die untere. In Tab. 3 und Fig. 4 sind die gemessenen und für Neutronenemission korrigierten kinetischen Energien neben den sich aus unserer Rechnung ergebenden oberen und unteren Grenzen für diese Werte dargestellt.

Für Os <sup>186</sup>- und Pb <sup>198</sup>-Spaltung <sup>15)</sup> liegen in jeweils drei von vier Fällen die gemessenen (und für Neutronenemission korrigierten) kinetischen Energien unterhalb des von uns berechneten Bereiches. Für Uranspaltung <sup>16)</sup> liegen in fünf von sieben Fällen die gemessenen Werte im Bereich der berechneten. Nur bei symmetrischer Spaltung liegen die berechneten Werte zu hoch. Die für den höheren Scissionspunkt berechneten kinetischen Energien sind systematisch zu groß.

- 3.) Tabelle 4 zeigt die für den Scissionspunkt berechneten Deformationsenergien der einzelnen Spaltbruchstücke. Diese Deformationsenergie sollte kleiner sein als die "beobachtete" Anregungsenergie  $E_x$  der Spaltbruchstücke, die man aus Daten über prompte Neutronenemission <sup>17)</sup> und  $\gamma$ -Emission <sup>18)</sup> erhält, denn die "beobachtete" Anregungsenergie  $E_x$  enthält neben der Deformationsenergie der Spaltbruchstücke auch innere Anregungsenergie und Coulombanregungsenergie (s.a. Abschnitt 3).

Fig. 5 zeigt einen Vergleich zwischen  $\xi$ - und  $E_x$ -Werten <sup>3)</sup> für thermische Neutronenspaltung von  $U^{235}$ . Die  $\xi$ -Daten des leichteren Bruchstücks ( $A \leq 118$ ) liegen mit nur einer Ausnahme unter den entsprechenden  $E_x$ -Werten. Die  $\xi$ -Daten des schwereren Bruchstücks ( $A \geq 118$ ) liegen mit Ausnahme der vier eingeklammerten Punkte, die sich auf den höheren Scissionspunkt beziehen, über den  $E_x$ -Werten. Für Os- und Pb-Spaltung liegen bisher keine  $E_x$ -Werte vor.

## 6. Diskussion der Ergebnisse

Wenn man berücksichtigt, daß kein Parameter unseres Modells an die Daten angepaßt wurde, die wir in Abschnitt 5 mit den Ergebnissen unserer Modellrechnung verglichen haben, so kann man eine recht gute Übereinstimmung feststellen. Insbesondere gibt das Modell das experimentelle Ergebnis wieder, daß magische Spaltbruchstücke kleine Anregungsenergie besitzen. Dieses Ergebnis beruht auf der Steifheit des kugelförmigen Grundzustandes der magischen Kerne. Es ist unempfindlich gegen kleine Änderungen der Modellparameter, denn das Minimum der Gesamtenergie (siehe rechtes unteres Viertel der Fig. 3 b) wird sich bei solchen Änderungen nur wenig in Richtung des Deformationsparameters des magischen Bruchstücks verschieben, weil die Krümmung der Energiefläche in dieser Richtung sehr groß ist, und das wird gerade durch die Steifheit des magischen Bruchstücks bewirkt. Dagegen können durch kleine Änderungen der Parameter Minima in solchen Richtungen verschoben werden, in denen sich die Energie nur wenig ändert; so kann das untere Minimum in Fig. 3 b sich leicht nach rechts und links verschieben. Hierdurch wird eine Umverteilung der Gesamtenergie auf die Coulombwechselwirkung und die Deformationsenergie des leichten (nichtmagischen) Bruchstücks bewirkt, denn bei einer Verschiebung des Minimums z.B. nach rechts nimmt die Coulombwechselwirkung der Bruchstücke (siehe Fig. 39) ab und damit die berechnete kinetische Energie, während die Deformationsenergie des leichten Bruchstücks (Fig. 2 e) wächst.

Alle berechneten Gesamtenergien (siehe Fig. 4) liegen um 10 MeV und mehr über den aus der Massenformel von Seeger und Perisho sowie aus "experimentellen" Spaltschwellen erhaltenen Vergleichswerten. Zur Erklärung dieser Diskrepanz ist folgende Hypothese naheliegend:

Die wahre Scissionspunktsform wird gut approximiert durch zwei berührende Fragmente, die außer dem elliptischen auch noch andere Deformationsfreiheitsgrade haben. Diese Erklärungsmöglichkeit bietet sich an, weil die berechneten Gesamtenergien am Scissionspunkt bei Beschränkung auf elliptische Deformationen der Fragmente sämtlich zu hoch liegen. Da die Gesamtenergie am Sattelpunkt ein Minimum der Gesamtenergie bezüglich Variation der Deformationsparameter ist, führt die Zulassung jedes weiteren Deformationsparameters zu einer Senkung des Minimums. Als erstes wird man Oktupol ( $\alpha_3$ -) Deformationen zulassen. Isolierte Nuklide sind gegen  $\alpha_3$ -Deformationen stabil<sup>19)</sup>. Die Coulombwechselwirkung zwischen zwei berührenden Nukliden erzeugt jedoch Oktupoldeformationen, deren Vorzeichen sich aus der Forderung ergibt, daß der Abstand der Ladungsschwerpunkte maximal sein soll. Solche Formen ähneln der vom Tropfenmodell bekannten hantelförmigen Sattelpunktsgestalt von Kernen, die leichter sind als Radium. Über die Eigenschaften der neuen Sattelpunkte kann man folgende qualitative Voraussagen machen:

- 1.) Die Gesamtenergien werden gegenüber den Werten, die man ohne  $\alpha_3$ -Deformation erhält, gesenkt.
- 2.) Da durch die  $\alpha_3$ -Deformation die Ladungsschwerpunkte der Fragmente weiter voneinander entfernt werden, läßt die Coulombabstoßung nach; dadurch werden die elliptischen Deformationen kleiner. Die elliptische Deformation eines

bestimmten Bruchstücks geht umso stärker zurück, je flacher das Minimum der Gesamtenergie vorher (d.h. ohne  $\alpha_3$ -Deformation) in dieser Deformationsrichtung war. Nimmt die elliptische Deformation eines oder beider Bruchstücke stark ab, so nimmt die Gesamtenergie vor allem auf Kosten der Deformationsenergie dieses oder beider Bruchstücke ab. Im umgekehrten Falle wird die Gesamtenergie vor allem auf Kosten der Coulombwechselwirkungsenergie gesenkt.

Wir weisen darauf hin, daß die relative kinetische Energie der Fragmente für symmetrische Spaltung von Uran ein Minimum besitzt in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen (Fig. 4 f). Dieser Effekt war der Ausgangspunkt des in der Einleitung erwähnten Modells von Vandenbosch gewesen.

Anhang

Beschreibung der Deformationseigenschaften mit Hilfe eines Schalenmodellhamiltonoperators für A Teilchen

Wir wollen in diesem Abschnitt der Einfachheit halber von den Paarungskräften absehen; die folgende Argumentation läßt sich unschwer auf den Fall mit Paarwechselwirkungen übertragen.

Wir beschreiben in unserer Arbeit die Deformationsenergie (d.h. den Unterschied der Energie des deformierten und kugelförmigen Kernes) durch einen Hamiltonoperator,  $H_0(A')$ , der durch die Summe von A deformationsabhängigen Schalenmodelloperatoren  $h(i)$  gegeben ist

$$h(i) = T(i) + U^{(s)}(i) \quad (A 1)$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h(i) \quad (A 1')$$

$U^{(s)}$  ist ein von den Deformationsparametern  $s$  abhängiges Schalenmodellpotential, in unserem Fall ein Nilssonpotential. Da die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen dabei doppelt gezählt werden, muß man sich Rechenschaft darüber geben, weshalb es berechtigt ist, einen solchen Hamiltonoperator zugrunde zu legen:

Es sei  $H$  der Hamiltonoperator des Systems von A wechselwirkenden Nukleonen

$$H = \sum_{i=1}^A T(i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A v(i,j) \quad (A 2)$$

und  $\phi^{(s)}$  eine auf 1 normierte Slaterdeterminante aus A Schalenmodellfunktionen  $\varphi_{\nu}^{(s)}$

$$\phi^{(s)} = \left\{ \varphi_1^{(s)}(1) \dots \varphi_A^{(s)}(A) \right\} \quad (A 3)$$

$$h(i) \varphi_{\nu}^{(s)}(i) = \epsilon_{\nu}^{(s)} \varphi_{\nu}^{(s)}(i) \quad (A 4)$$

Wir lassen hinfert den Index  $(s)$  an den Einteilchenfunktionen weg.



Der Erwartungswert  $\langle \phi^{(s)} / H / \phi^{(s)} \rangle$  läßt sich schreiben in der Form

$$\begin{aligned}
 A^{(s)} &= \langle \phi^{(s)} / H / \phi^{(s)} \rangle = \sum_i \int d\tau \psi_i^* T \psi_i \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \iint d\tau d\tau' \psi_i^*(\vec{r}) \psi_j^*(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \left[ \psi_i(\vec{r}) \psi_j(\vec{r}') - \psi_j(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}') \right] \\
 &= \sum_i \int d\tau \psi_i^* T \psi_i + \frac{1}{2} \sum_i \int d\tau \psi_i^*(\vec{r}) v_i^{(s)}(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}) \quad (A 4)
 \end{aligned}$$

wobei das Einteilchenpotential  $v_i^{(s)}(\vec{r})$  definiert ist durch

$$\begin{aligned}
 v_i^{(s)}(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}) &= \sum_j \int d\tau' \psi_j^*(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \left[ \psi_i(\vec{r}) \psi_j(\vec{r}') \right. \\
 &\quad \left. - \psi_j(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}') \right] \quad (A 5)
 \end{aligned}$$

Wir nehmen an, daß sich das nichtlokale und zustandsabhängige Einteilchenpotential  $v_i^{(s)}$  näherungsweise durch das Nilssonpotential  $U^{(s)}$  darstellen läßt. Wir betrachten nun eine durch eine kleine Änderung der Formparameter  $s$  hervorgerufene Variation der Gesamtenergie  $A^{(s)}$ :

$$\delta A^{(s)} = \sum_{i=1}^A \int d\tau \delta \psi_i^* T \psi_i + \sum_i \int d\tau \delta \psi_i^*(r) v_i(r) \psi_i(r) \quad (A 6)$$

Andererseits ist der Erwartungswert  $\langle \phi^{(s)} / H_0 / \phi^{(s)} \rangle$  gegeben durch die Summe der besetzten Einteilchenenergien  $\varepsilon_i^{(s)}$

$$\begin{aligned}
 B^{(s)} &:= \langle \phi^{(s)} / H_0 / \phi^{(s)} \rangle = \sum_i^A \varepsilon_i^{(s)} = \sum_i \int d\tau \psi_i^* \cdot \\
 [T + U^{(s)}] \psi_i &\approx \sum_{i=1}^A \int d\tau \psi_i^* [T + v_i^{(s)}] \psi_i \quad (A 7)
 \end{aligned}$$

und die durch eine kleine Deformationsänderung erzeugte Variation durch

$$\begin{aligned}
 \delta B^{(s)} &= \langle \delta \phi^{(s)} / H_0 / \phi^{(s)} \rangle = \sum_i \delta \varepsilon_i^{(s)} = \sum_{i=1}^A \int d\tau \delta \psi_i^* \cdot \\
 [T + v_i^{(s)}] \psi_i &+ \sum_{i=1}^A \int d\tau \psi_i^* \delta v_i^{(s)} \psi_i \quad (A 8)
 \end{aligned}$$

Man sieht, daß weder die Energien A und B noch die Variationen  $\delta A$  und  $\delta B$  übereinstimmen. Um die innere Energie eines deformierten Kerns in der Einteilchennäherung zu erhalten, müssen wir also im allgemeinen die Modellenergie  $B^{(s)}$  korrigieren:

$$A^{(s)} = B^{(s)} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int d\tau \varphi_i^* V_i^{(s)} \varphi_i \quad (\text{A } 9)$$

Im Falle eines harmonischen Oszillators ( $V_i = U = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^3 \omega_{x_j}^2 x_j^2$ )

ist nach dem Virialtheorem

$$\langle \varphi_i | T | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_i | V_i^{(s)} | \varphi_i \rangle = \frac{1}{2} E_i^{(s)}$$

und damit

$$A^{(s)} = \frac{3}{4} B^{(s)} \quad (\text{A } 10)$$

Da man sich üblicherweise nur für die durch

$$\delta A^{(s)} = 0 \quad (\text{A } 11)$$

definierte Gleichgewichtsdeformationen interessiert, und da das gewöhnlich zugrunde gelegte Nilssonpotential in guter Näherung die Beziehung (A 10) erfüllt, läßt sich (A 11) ersetzen durch

$$\delta B^{(s)} = 0 \quad (\text{A } 12)$$

In unserer Arbeit suchen wir jedoch das Minimum der Gesamtenergie von 2 berührenden Kernen in der Scissionskonfiguration, d.h. das Minimum eines Ausdrucks der Form

$$B_1^{(s)} + B_2^{(s)} + E_{cb} \quad (\text{A } 13)$$

das wegen der Coulombwechselwirkung  $E_C$  im allgemeinen keineswegs mehr mit dem Minimum der "wahren" Energie

$$A_1^{(s)} + A_2^{(s)} + E_C \quad (A 13')$$

übereinstimmt. Zudem interpretieren wir die Differenz der Modellenergie  $B^{(s)}$  in Scissionskonfiguration und Grundzustand als mittlere Anregungsenergie des Fragments.

In der Tat legen wir zwar die Modellenergien  $B^{(s)}$  zugrunde, wir kombinieren diese Energien aber nach der Methode von Strutinskii mit den Tröpfchenmodellenergien, d.h. wir betrachten anstelle von (A 13) den Ausdruck

$$C := B_1^{(s)} - \overline{B_1^{(s)}} + \underset{\text{Tr1}}{E^{(s)}} + B_2^{(s)} - \overline{B_2^{(s)}} + \underset{\text{Tr2}}{E^{(s)}} + E_C \quad (A 14)$$

wobei die Größen  $B_1^{(s)}$  und  $B_2^{(s)}$  die nach dem Strutinskii-Verfahren gemittelten Modellenergien darstellen. Die Energie (A 14) bezieht man geeigneterweise noch auf die Energie bei der Grundzustandsdeformation (siehe Glchg (34)), was aber für unsere grundsätzlichen Überlegungen nicht relevant ist.

Die im Strutinskii-Verfahren verwendete Mittelung ist so beschaffen, daß alle Einteilchenenergien  $\epsilon_i$  aus  $B^{(s)}$ , die sich um mehr als die Mittelungsbreite  $\gamma$  unterhalb der Fermikante befinden, sich gegen einen entsprechenden Term aus  $\overline{B^{(s)}}$  wegheben:

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} \epsilon e^{-\frac{(\epsilon - \epsilon_i)^2}{\gamma^2}} d\epsilon \approx \frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon e^{-\frac{(\epsilon - \epsilon_i)^2}{\gamma^2}} d\epsilon = \epsilon_i \quad (A 15)$$

für alle  $\epsilon_i < \lambda - \gamma$ .

(Die Beziehung (A 15) gilt in derselben Näherung auch für die

Mittelungsfunktion  $\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} \left( \frac{3}{2} - \frac{(\epsilon - \epsilon_i)^2}{\gamma^2} \right) e^{-\frac{(\epsilon - \epsilon_i)^2}{\gamma^2}}$ ).

Nichtverschwindende Beiträge zu den Differenzgrößen  $B_{1,2}^{(S_{1,2})}$  -

$B_{1,2}^{(S_{1,2})}$  liefern also nur die Einteilchenenergien in der Umgebung der Fermikante  $\xi_F$  ( $\xi_i > \lambda - \gamma \approx \xi_F - \gamma$ ). Wir bezeichnen die Summe über alle besetzten Einteilchenzustände oberhalb der Energie  $(\xi_F - \gamma)$  mit  $\Sigma'$  und lassen die Indices 1,2 weg. Es lautet dann der in (A 14) relevante Teil von  $B^{(s)}$

$$B^{(s)'} = \sum_i' \xi_i^{(s)} = \sum_i' \int d\tau \varphi_i^* (T + V_i) \varphi_i \quad (A 16)$$

und die durch eine kleine Änderung der Deformationsparameter  $s$  hervorgerufene Variation von  $B^{(s)'} :$

$$B^{(s)'} = \sum_i' \int d\tau \varphi_i^* (T+V_i) \varphi_i + \sum_i' \int d\tau \varphi_i^* \delta V_i \varphi_i \quad (A 17)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (A 17) ist gleich der Variation der analog zu (A 16) definierten Größe  $A^{(s)'} :$

$$A^{(s)} = \sum_i' \int d\tau \varphi_i^* T \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_i' \varphi_i^* V_i \varphi_i \quad (A 18)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von (A 17) ist gegenüber dem ersten von der Größenordnung  $\frac{1}{A}$ , sofern die Summe  $\sum_i'$  nur über im Vergleich zu  $A$  wenige Terme läuft: Es gilt

$$\int d\tau / \varphi_i^* \varphi_i \delta V_i / \approx \int d\tau \int d\tau' / \delta \rho_i(\vec{r}') / \cdot / v(\vec{r} - \vec{r}') / \rho_i(\vec{r}), \quad (A 19)$$

$$\int d\tau / V_i \delta \varphi_i^* \varphi_i / \approx \int d\tau \int d\tau' / \delta \rho_i(\vec{r}') / \cdot / v(\vec{r} - \vec{r}') / \rho(\vec{r}), \quad (A 20)$$

wobei die Dichtematrizen  $\rho_i$  und  $\rho$  definiert sind durch

$$\rho_i(\vec{r}) = \varphi_i^* \varphi_i \quad (A 21)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^A \rho_i \quad (A 22)$$

Da offenbar die Ordnung  $O(\rho)$  von  $\rho$  und  $\rho_i$  durch

$$O(\rho) = A \cdot O(\rho_i) \quad (A 23)$$

verknüpft sind, erhalten wir:

$$O \left\{ \int d\tau / \sigma^{V_i} \rho_i / \right\} = \frac{1}{A} O \left\{ \int d\tau / V_i \sigma \rho_i / \right\} \quad (A 24)$$

Da die Summation  $\Sigma'$  nur über wenige Terme läuft, können wir in (A 17) des letzten Terms auf der rechten Seite vernachlässigen und kommen somit zu dem Ergebnis:

$$\int \left\{ A^{(s)} - \overline{A^{(s)}} \right\} \approx \int \left\{ B^{(s)} - \overline{B^{(s)}} \right\}$$

In Kombination mit dem Strutinskii-Verfahren lassen sich also die Deformationseigenschaften der Kerne auf der Basis eines Schalenmodellhamiltonoperators von A Teilchen beschreiben.

Wir heben hervor, daß unsere Argumentation nur dann richtig ist, wenn die Summe  $\Sigma'$  nur über wenige Zustände zu erstrecken ist. Die Feststellung, daß die von der Variation des Potentials herührenden Terme im Falle weniger Nukleonen vernachlässigbar sind, findet sich bereits in einem Handbuchartikel von S. Moszkowski <sup>22)</sup>, siehe auch Bès und Szymanski <sup>23)</sup>.

Literaturverzeichnis

- 1) R. Vandenbosch, Nucl. Phys. 46 (1963) 129
- 2) P. Armbruster, Proceedings of the International Symposium on the Physics and Chemistry of Fission, Salzburg 1965, Vol. I. p 103, International Atomic Energy Agency, Vienna (1965)
- 3) H.W. Schmitt, Proceedings of the International Symposium on "why and how should we investigate Nuclides far off the stability line", Lysekil, Sweden (1966), p. 633, Almquist u. Wiksell, Stockholm (1967)
- 4) V.M. Strutinskii, Nucl. Phys. 195 (1967) 420
- 5) W. Nörenberg, Phys. Lett. 19 (1965) 589; Dissertation TH München (1966)
- 6) J.R. Nix und W.J. Swiatecki, Nucl. Phys. 71 (1965) 1
- 7) J.R. Nix, Ph.D. Thesis, Lawrence Radiation Laboratory Report UCRL-11338
- 8) S.G. Nilsson, Mat. Phys. Medd. Vid. Selsk. 29 (1955) no. 16

---

- 9) C. Gustafson, I.L. Lamm, B. Nilsson und S.G. Nilsson, Proceedings of the International Symposium on "why and how should we investigate Nuclides far off the stability line", Lysekil, Sweden (1966) p. 613, Almquist u. Wiksell, Stockholm (1967)
- 10) J. Bardeen, L.N. Cooper und J.R. Schrieffer, Phys.Rev. 108 (1957) 1175
- 11) S. Cohen und W.J. Swiatecki, Ann. Phys. (N.Y.) 22 (1963) 406
- 12) A.E.S. Green, Phys. Rev. 95 (1954) 1006
- 13) P.A. Seeger und R.C. Perisho, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3751 (1967)
- 14) S.G. Nilsson und O. Prior, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 32, no. 16 (1961)
- 15) F. Plasil, D.S. Burnett, H.C. Britt und S.G. Thompson, Phys. Rev. 142 (1966) 696
- 16) H.W. Schmitt, J.H. Neiler und F.S. Walter, Phys.Rev. 141(1966)1146
- 17) V.F. Apalin, Yu. N. Gritsyuk, I.E. Kutikov, V.I. Lebedev und L.A. Mikaelian, Nucl. Phys. 55 (1964) 249

- 18) H. Maier-Leibnitz, H.W. Schmitt und P. Armbruster, Proceedings of the International Symposium on the Physics and Chemistry of Fission, Salzburg, 1965, Vol. II, p. 143, International Atomic Energy Agency, Vienna (1965)
  - 19) P. Vogel, Nucl. Phys. A 112 (1968) 583
  - 20) T. Sikkeland, Phys. Rev. 135 (1964) B 669
  - 21) I. Halpern, Ann. Rev. Nucl. Sci. 9 (1959) 245
  - 22) S.A. Moszkowski, Encyclopedia of Physics edited by S. Flügge, Vol. XXXIX, p. 511, Springer-Verlag (1957)
  - 23) D.R. Bès und Z. Szymanki, Nukl. Phys. 28 (1961) 42
-

Tabelle 1  
Spaltschwellen

Nuklid	$^{186}_{75}\text{Os}_{116}$	$^{198}_{82}\text{Pb}_{110}$	$^{236}_{92}\text{U}_{144}$
$B_f$ (MeV)	24.2 a)	17.0 a)	5.8 b)

a) Ref. 20), b) Ref. 21).

Tabelle 2

Es bedeutet  $Q_+ = E B_1 + E B_2 - E B + B_f = Q + B_f$ , wobei

$E B_i$  = Bindungsenergie des Bruchstücks  $i$  ( $i = 1,2$ )

$E B$  = Bindungsenergie des spaltenden Kerns

$B_f$  = Spaltschwelle des spaltenden Kerns .

Die Bindungsenergien sind Ref. 13) entnommen, die Spaltschwellen Tab. 1.

$E$  ist der in dieser Arbeit berechnete Wert der  $Q$  entspricht.

Die Energiewerte sind in MeV angegeben. Eingeklammerte Zahlen gelten für den Scissionspunkt mit der höheren Energie.

Tabelle 2a:  $^{186}_{76}\text{Os}_{110}$  - Spaltung

Fragment 1	Fragment 2	$Q_+$	$E$
$^{92}_{38}\text{Sr}_{54}$	$^{94}_{38}\text{Sr}_{56}$	142.279	159.96
$^{88}_{36}\text{Kr}_{52}$	$^{98}_{40}\text{Zr}_{58}$	143.035	161.93
$^{82}_{34}\text{Se}_{48}$	$^{104}_{42}\text{Mo}_{62}$	141.317	160.07
$^{72}_{30}\text{Zn}_{42}$	$^{114}_{46}\text{Pd}_{68}$	134.454	151.70



Tabelle 2 b:  $^{198}_{82}\text{Pb}_{116}$  - Spaltung

Fragment 1	Fragment 2	$Q_+$	E
$^{96}_{40}\text{Zr}_{56}$	$^{102}_{42}\text{Mo}_{60}$	160.108	177.59
$^{92}_{38}\text{Sr}_{54}$	$^{106}_{44}\text{Ru}_{62}$	160.714	178.40
$^{86}_{36}\text{Kr}_{50}$	$^{112}_{46}\text{Pd}_{66}$	162.363	181.91
$^{76}_{32}\text{Ge}_{44}$	$^{122}_{50}\text{Sn}_{72}$	155.640	173.57

Tabelle 2 c:  $^{236}_{92}\text{U}_{144}$  - Spaltung

Fragment 1	Fragment 2	Q	E	
$^{118}_{46}\text{Pd}_{72}$	$^{118}_{46}\text{Pd}_{72}$	200.834	211.04	--
$^{112}_{44}\text{Ru}_{68}$	$^{124}_{48}\text{Cd}_{76}$	202.216	212.90	--
$^{108}_{42}\text{Mo}_{66}$	$^{128}_{50}\text{Sn}_{78}$	204.412	217.17	(221.37)
$^{104}_{42}\text{Mo}_{62}$	$^{132}_{50}\text{Sn}_{82}$	205.991	223.03	(224.01)
$^{100}_{40}\text{Zr}_{60}$	$^{136}_{52}\text{Te}_{84}$	201.770	215.20	(221.68)
$^{146}_{38}\text{Sr}_{58}$	$^{140}_{54}\text{X}_{86}$	196.482	209.22	(219.09)
$^{92}_{36}\text{Kr}_{56}$	$^{144}_{56}\text{Ba}_{88}$	191.255	204.44	--

Tabelle 3

Kinetische Energie der Spaltbruchstücke

- $E_{kin}$  : experimentelle Werte, korrigiert für Neutronenemission  
 $W$  : Coulombwechselwirkung nach Gl. ( 35 ) für die Szissionspunkt-konfiguration  
 $W_o$  : Coulombwechselwirkung zweier Punktladungen im Abstand der Ladungsschwerpunkte für die Szissionspunkt-konfiguration  
 $W_o = Z_1 Z_2 e^2 / (C1 + C2)$

Tabelle 3 a:  $^{186}_{76}\text{Os}_{110}$  - Spaltung

Fragment 1	Fragment 2	$E_{kin}^{*)}$	W	$W_o$
$^{92}_{38}\text{Sr}_{54}$	$^{94}_{38}\text{Sr}_{56}$	130	147.99	137.86
$^{88}_{36}\text{Kr}_{52}$	$^{98}_{40}\text{Zr}_{58}$	129.5	150.25	140.42
$^{82}_{34}\text{Se}_{48}$	$^{104}_{42}\text{Mo}_{62}$	128	142.16	131.75
$^{72}_{30}\text{Zn}_{42}$	$^{114}_{46}\text{Pd}_{68}$	122	128.87	117.89

Tabelle 3 b:  $^{198}_{82}\text{Pb}_{116}$  - Spaltung

Fragment 1	Fragment 2	$E_{kin}^{*)}$	W	$W_o$
$^{96}_{40}\text{Zr}_{56}$	$^{102}_{42}\text{Mo}_{60}$	146	165.76	153.89
$^{92}_{38}\text{Sr}_{54}$	$^{106}_{44}\text{Ru}_{62}$	145.5	159.65	147.27
$^{86}_{36}\text{Kr}_{50}$	$^{112}_{46}\text{Pd}_{66}$	143	150.91	138.17
$^{76}_{32}\text{Ge}_{44}$	$^{122}_{50}\text{Sn}_{72}$	139	148.99	136.84

\*) Ref. 15).

Tabelle 3 c:  ${}_{92}^{236}\text{U}_{144}$  - Spaltung

Eingeklammerte Zahlen gelten für den Scissionspunkt mit der höheren Energie.

Fragment 1	Fragment 2	$E_{\text{kin}}$ **)	W		$W_0$	
${}_{46}^{118}\text{Pd}_{72}$	${}_{46}^{118}\text{Pd}_{72}$	156.5	176.21	--	160.80	--
${}_{44}^{112}\text{Ru}_{68}$	${}_{48}^{124}\text{Cd}_{76}$	166.0	181.50	--	167.50	--
${}_{42}^{108}\text{Mo}_{66}$	${}_{50}^{128}\text{Sn}_{78}$	175.1	180.54	(201.82)	165.49	(188.56)
${}_{42}^{104}\text{Mo}_{62}$	${}_{50}^{132}\text{Sn}_{82}$	180.75	183.29	(199.24)	168.26	(185.73)
${}_{40}^{100}\text{Zr}_{60}$	${}_{52}^{136}\text{Te}_{84}$	177.0	181.73	(214.21)	166.51	(203.57)
${}_{38}^{96}\text{Sr}_{58}$	${}_{54}^{140}\text{X}_{86}$	171.6	182.26	(210.94)	167.40	(200.23)
${}_{36}^{92}\text{Kr}_{56}$	${}_{56}^{144}\text{Ba}_{88}$	166.8	173.79	--	158.61	--

\*\*) H.W. Schmitt, private Mitteilung, siehe auch Ref. 16).

Tabelle 4

Deformationsenergien  $V_D$  und Deformationsparameter  $p$  für die Sattelpunktskonfiguration

Tabelle 4 a :  ${}^{186}_{76}\text{Os}_{110}$  - Spaltung

Fragment 1	$P_1$	$V_{D1}$	Fragment 2	$P_2$	$V_{D2}$
${}^{92}_{38}\text{Sr}_{54}$	1.6	7.37	${}^{94}_{38}\text{Sr}_{56}$	1.6	4.60
${}^{88}_{36}\text{Kr}_{52}$	1.5	8.14	${}^{98}_{40}\text{Zr}_{58}$	1.6	3.54
${}^{82}_{34}\text{Se}_{48}$	1.9	15.71	${}^{104}_{42}\text{Mo}_{62}$	1.5	2.20
${}^{72}_{30}\text{Zn}_{42}$	1.8	8.57	${}^{114}_{46}\text{Pd}_{68}$	2.0	14.26

Tabelle 4 b :  ${}^{198}_{82}\text{Pb}_{116}$  - Spaltung

Fragment 1	$P_1$	$V_{D1}$	Fragment 2	$P_2$	$V_{D2}$
${}^{96}_{40}\text{Zr}_{56}$	1.6	4.86	${}^{102}_{42}\text{Mo}_{60}$	1.7	6.97
${}^{92}_{38}\text{Sr}_{54}$	1.6	7.37	${}^{106}_{44}\text{Ru}_{62}$	1.9	11.38
${}^{86}_{36}\text{Kr}_{50}$	1.8	18.24	${}^{112}_{46}\text{Pd}_{66}$	2.0	12.75
${}^{76}_{32}\text{Ge}_{44}$	1.9	8.78	${}^{122}_{50}\text{Sn}_{72}$	1.8	15.81

Tabelle 4 c :  ${}_{92}^{236}\text{U}_{144}$  - Spaltung  
-----

Eingeklammerte Zahlen gelten für den Scissionspunkt mit der höheren Energie.

Fragment 1	$P_1$		$V_{D1}$		Fragment 2	$P_2$		$V_{D2}$	
${}_{46}^{118}\text{Pd}_{72}$	2.0	--	17.41	--	${}_{46}^{118}\text{Pd}_{72}$	2.0	--	17.41	--
${}_{44}^{112}\text{Ru}_{68}$	1.95	--	13.40	--	${}_{48}^{124}\text{Cd}_{76}$	1.85	--	18.20	--
${}_{42}^{108}\text{Mo}_{66}$	2.0	(2.1)	15.09	(18.21)	${}_{50}^{128}\text{Sn}_{78}$	1.8	(1.1)	21.53	(1.33)
${}_{42}^{104}\text{Mo}_{62}$	1.8	(2.2)	9.70	(21.51)	${}_{50}^{132}\text{Sn}_{82}$	1.9	(1.1)	30.04	(3.26)
${}_{40}^{100}\text{Zr}_{60}$	1.6	(1.7)	4.06	(7.48)	${}_{52}^{136}\text{Te}_{84}$	2.1	(1.1)	29.42	(0.0)
${}_{38}^{96}\text{Sr}_{58}$	1.6	(1.6)	3.67	(3.67)	${}_{54}^{140}\text{Xe}_{86}$	2.0	(1.2)	23.29	(4.48)
${}_{36}^{92}\text{Kr}_{56}$	1.6	--	5.71	--	${}_{56}^{144}\text{Ba}_{88}$	2.2	--	24.93	--

## Figuren

- Fig. 1: Die Scissionskonfiguration wird durch zwei rotations-symmetrische Ellipsoide beschrieben, die sich an den Durchstoßpunkten ihrer Rotationsachsen berühren.
- Fig. 2: Die Deformationsenergie einzelner Kerne nach dem Tropfenmodell, nach einem Nilssonmodell mit Paar-kraften (BCS-Verfahren) und nach der Methode von Strutinskii. Die Tropfenmodellparameter sind  $r_0 = 1.216$  Fermi,  $4\pi r_0^2 = 17.8$  MeV in Fig. 2 a - e und  $r_0 = 1.203$  Fermi,  $4\pi\sigma r_0^2 = 19.6555$  MeV in Fig. 2 f.
- Fig. 3: Höhenlinien der Deformationsenergie von zwei berührenden Kernen (siehe Text Gl. 39 auf S. 14). Auf der horizontalen Koordinatenachse ist der Deformationsparameter  $p = \frac{c}{a}$  des leichteren Bruchstückes aufgetragen, auf der vertikalen Achse der des schweren Bruchstücks. Die Zahlen an den Höhenlinien sind Energiewerte in MeV. Für Fig. 3 a wurde die Deformationsenergie der beiden Fragmente nach dem Tropfenmodell berechnet, für Fig. 3 b nach der Methode von Strutinskii.
- Fig. 4: Die ersten drei Teilfiguren (Fig. a - c) stellen die nach Gl. 39 berechnete Energie für die Zerreißpunktskonfiguration dar. Die berechneten Werte sind als Kreuze gezeichnet. Für einige Spaltprozesse wurden zwei Zerreißpunkte berechnet. Ergebnisse, die sich auf den Scissionspunkt mit der höheren Energie beziehen sind als eingeklammerte Kreuze gezeichnet. Die auf den ausgezogenen Linien liegenden Punkte geben Q-Werte, vermehrt um die Schwellenergie  $B_f$  für den Spaltprozess (siehe Text § 5.3). Die Teilfiguren Fig. 4 d-f stellen durch Balken verbundene Kreuze die berechnete obere und untere Grenze für die kinetische Energie der Spaltprodukte dar.

Fig. 5: Kreuze bezeichnen die Deformationsenergie von Uranspaltbruchstücken in der Zerreißkonfiguration nach dieser Arbeit. Offene Kreise bezeichnen die aus Neutronen- und Gamma-Emissionsdaten abgeleiteten Anregungsenergien der Spaltbruchstücke <sup>3)</sup>.

Korrekturen:

Seite 8 (Gleichung (11) ):  $g^{(0)}(\varepsilon) \rightarrow g(\varepsilon) = \frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} \sum e^{-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_y}{\gamma}\right)^2}$ .

Seite 14 (Gleichung (37) ):  $c_i = r_o \sqrt[3]{A_i p_i^2}$ ,

$a_i = r_o \sqrt[3]{A_i/p_i}$ , (i = 1,2).

Seite 17 (Gleichung (41) ):  $K_N = K_o / \sqrt[3]{\frac{(N+1)(N+2)}{2}}$ ,



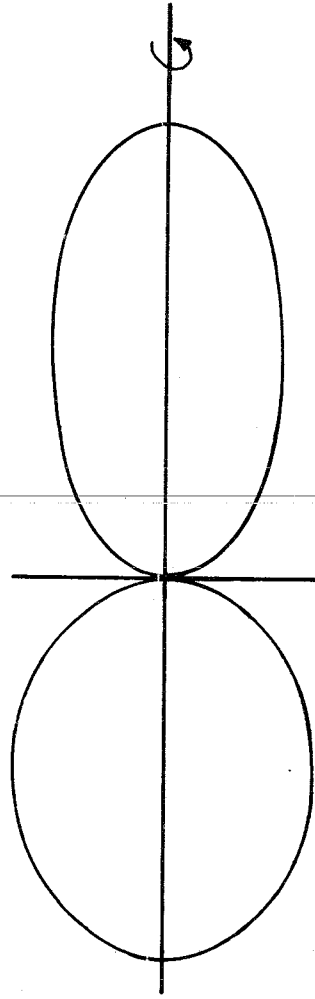


Fig.1

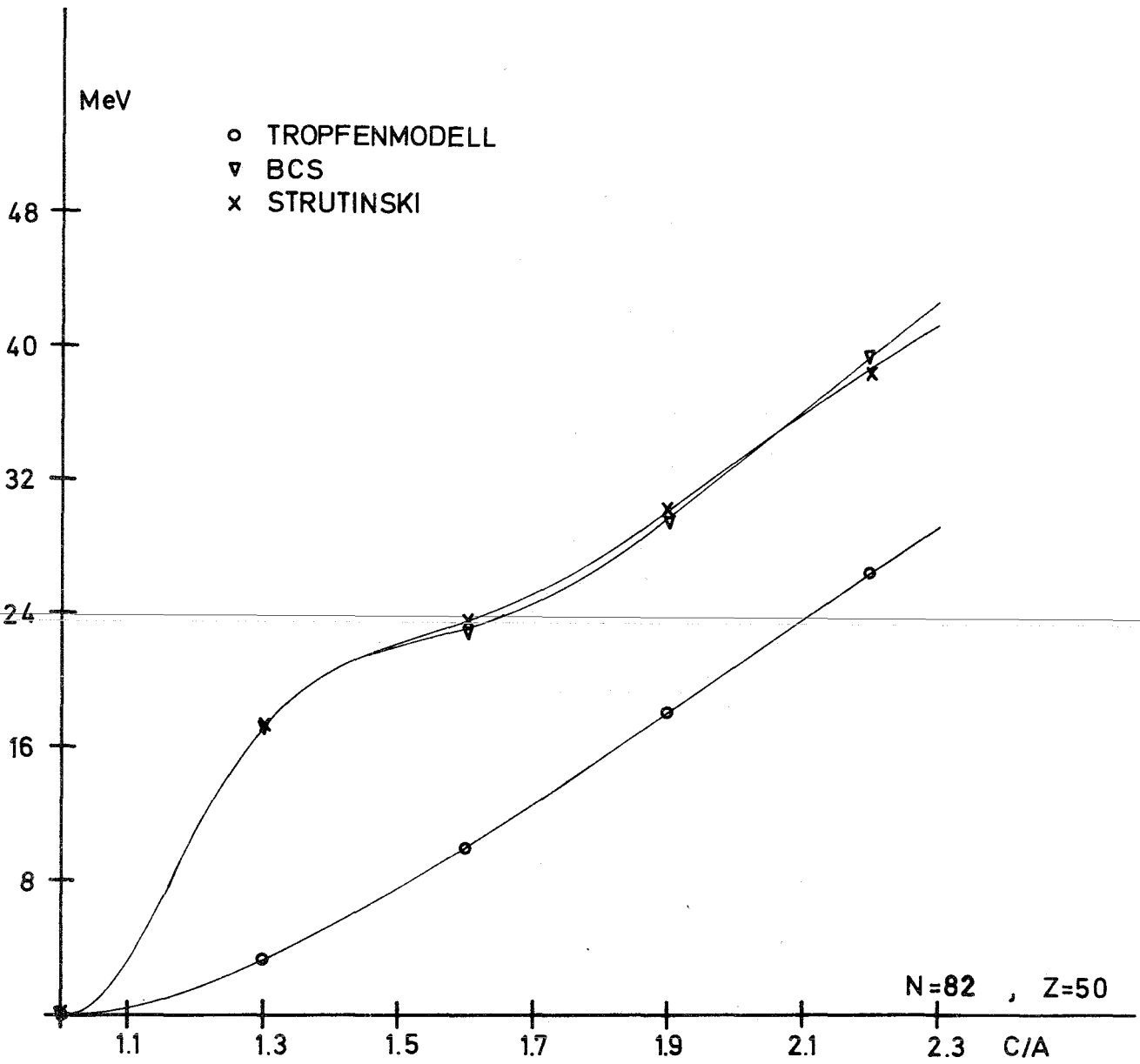


Fig. 2a

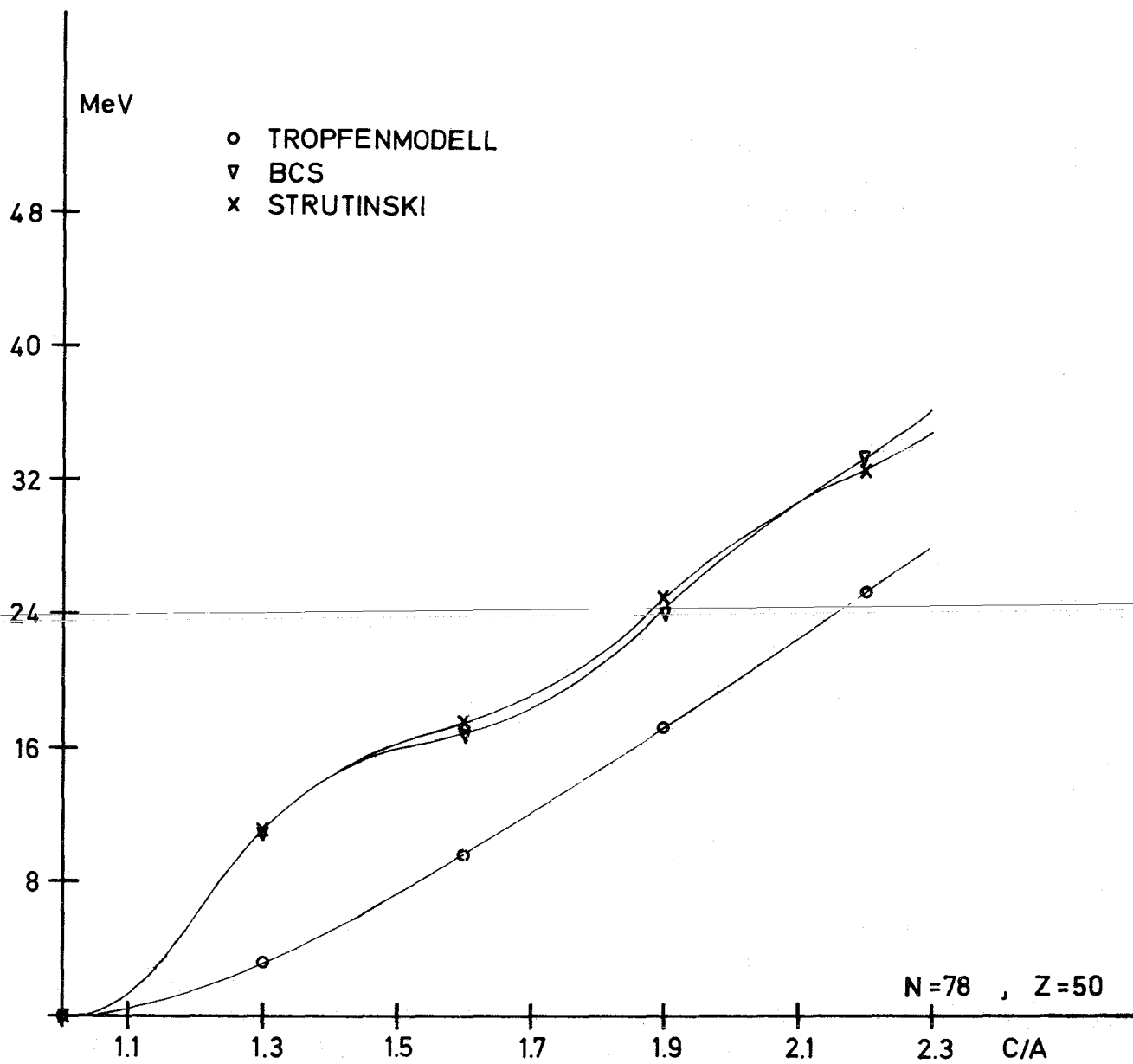


Fig.2b

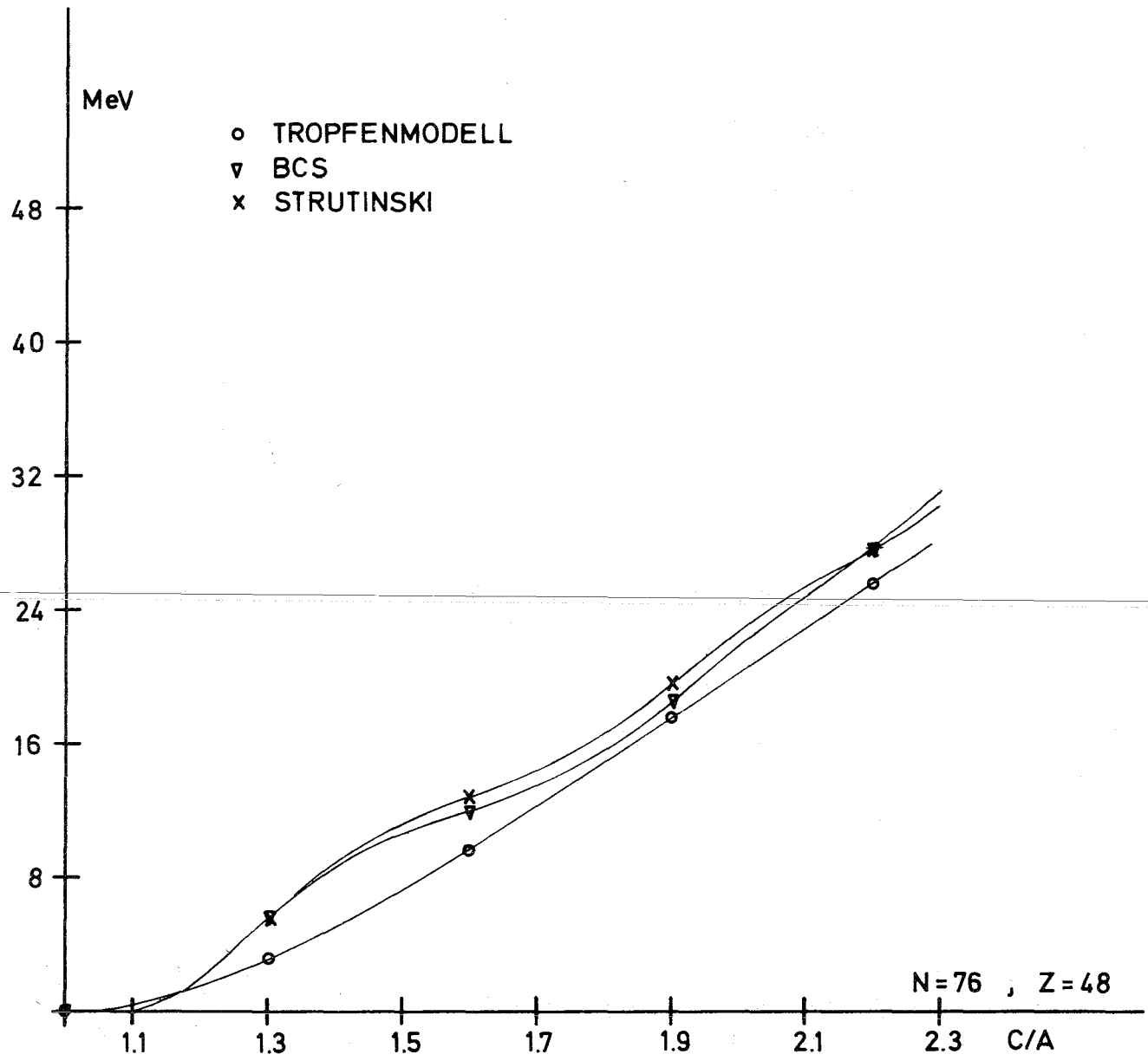


Fig.2c

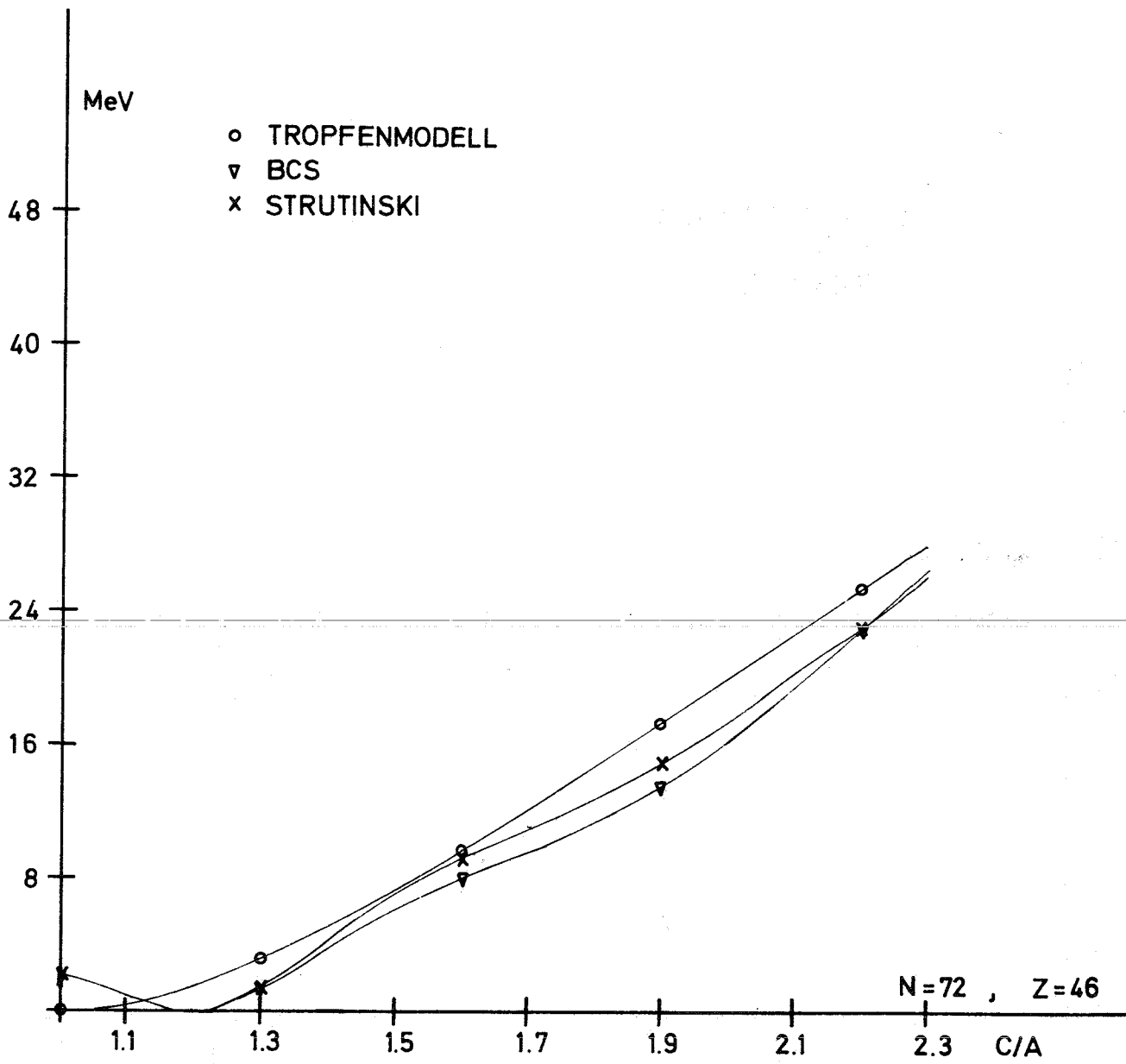


Fig.2d

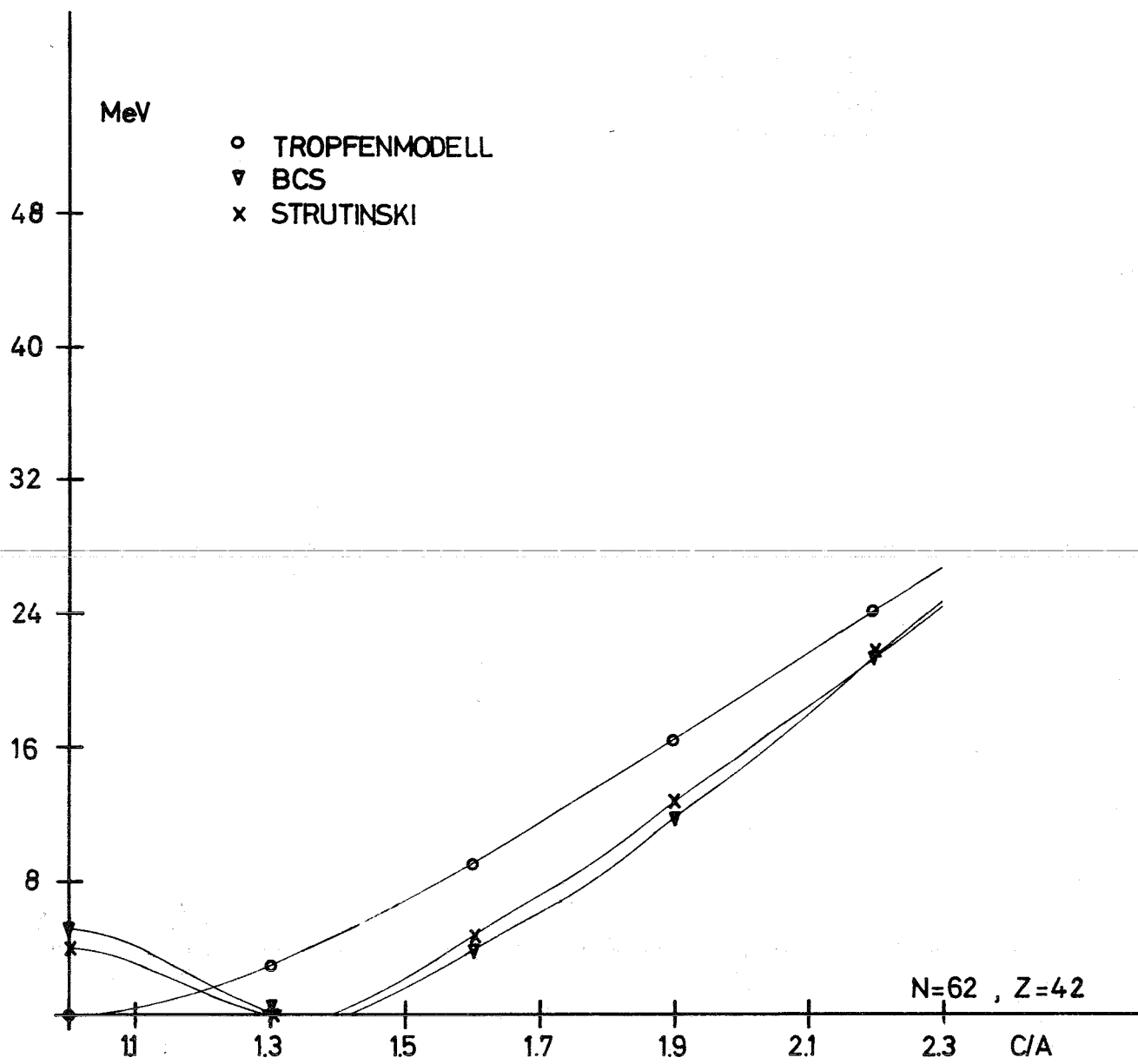


Fig. 2e

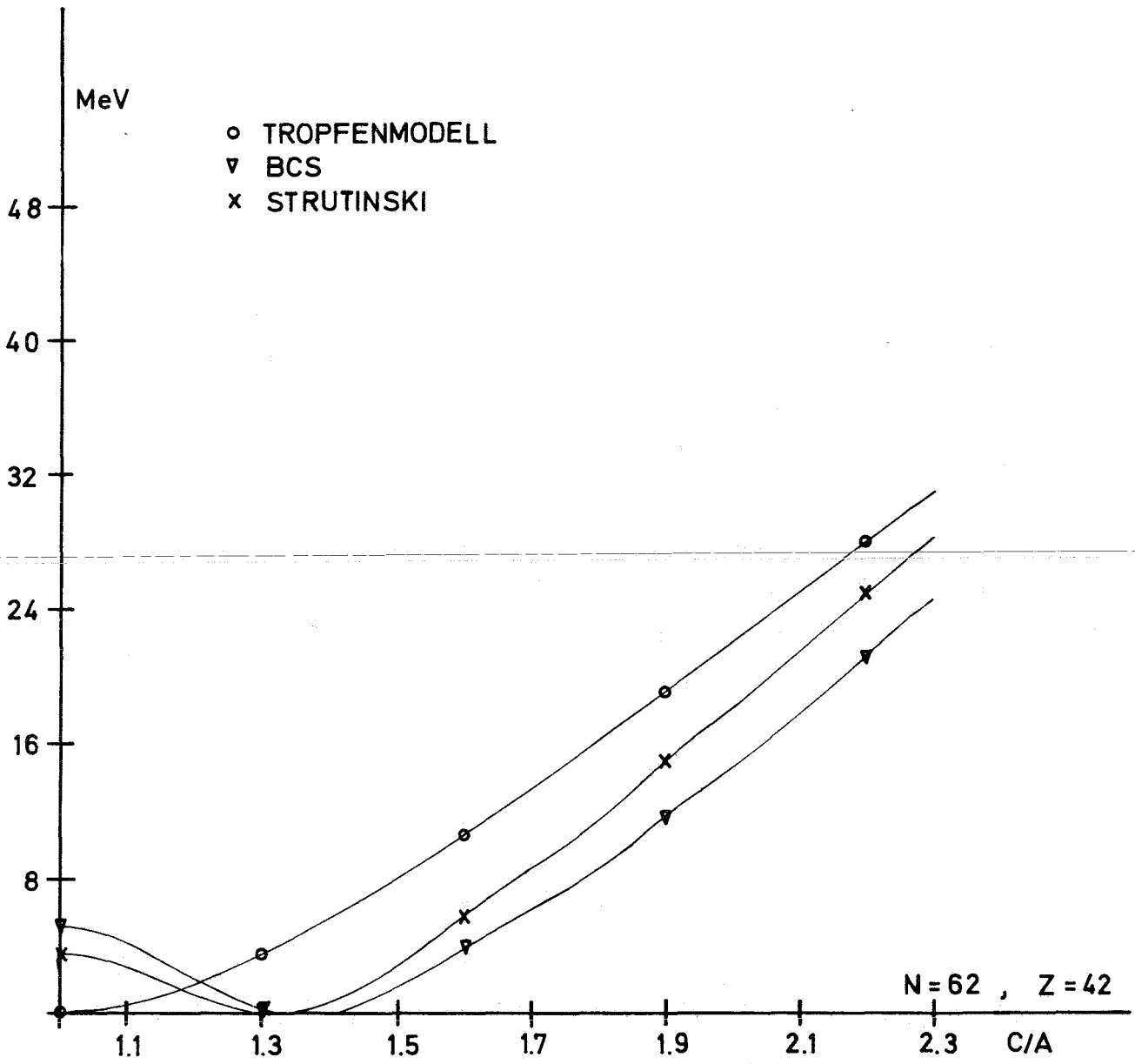


Fig.2f

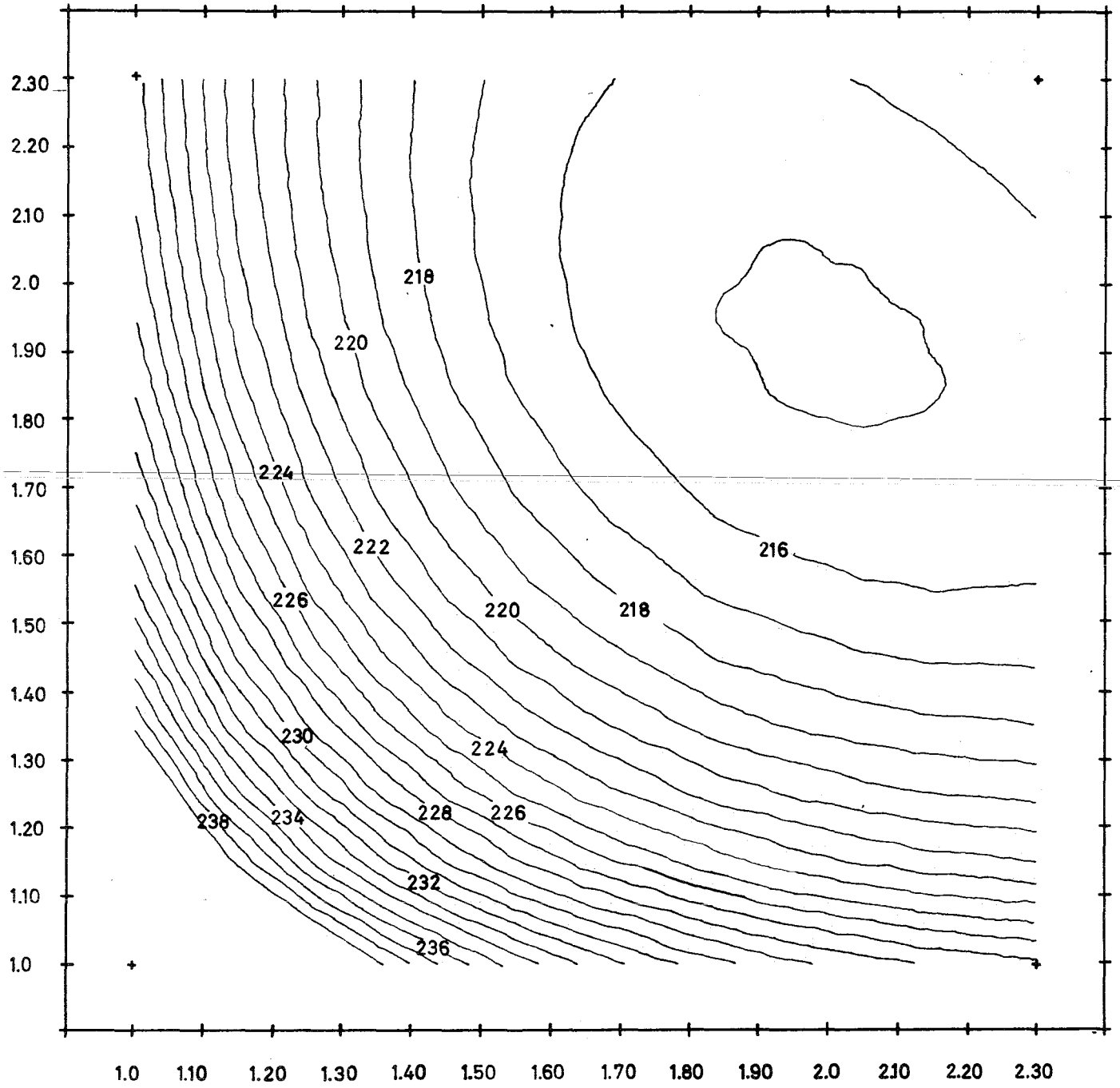


Fig.3a



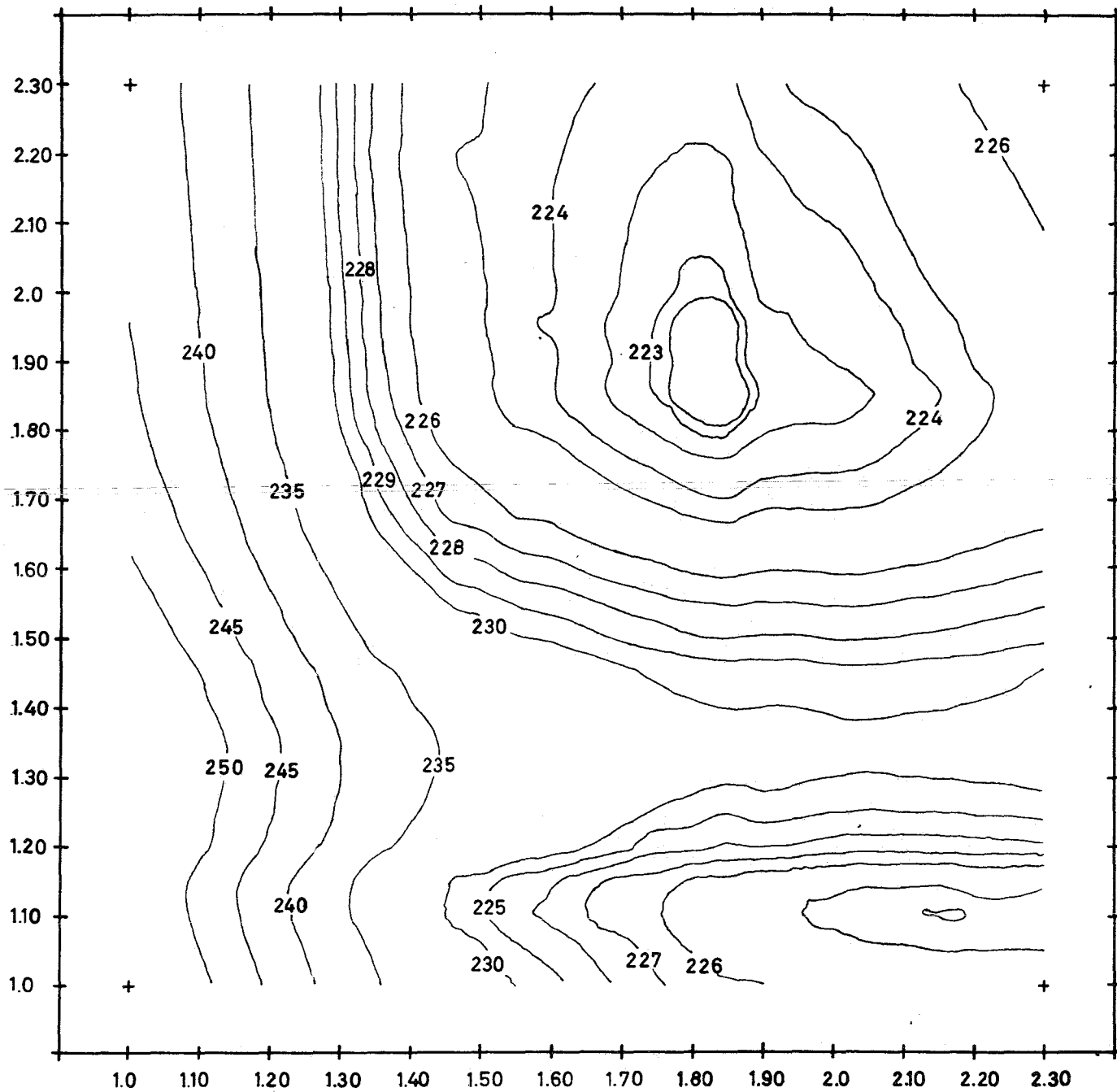
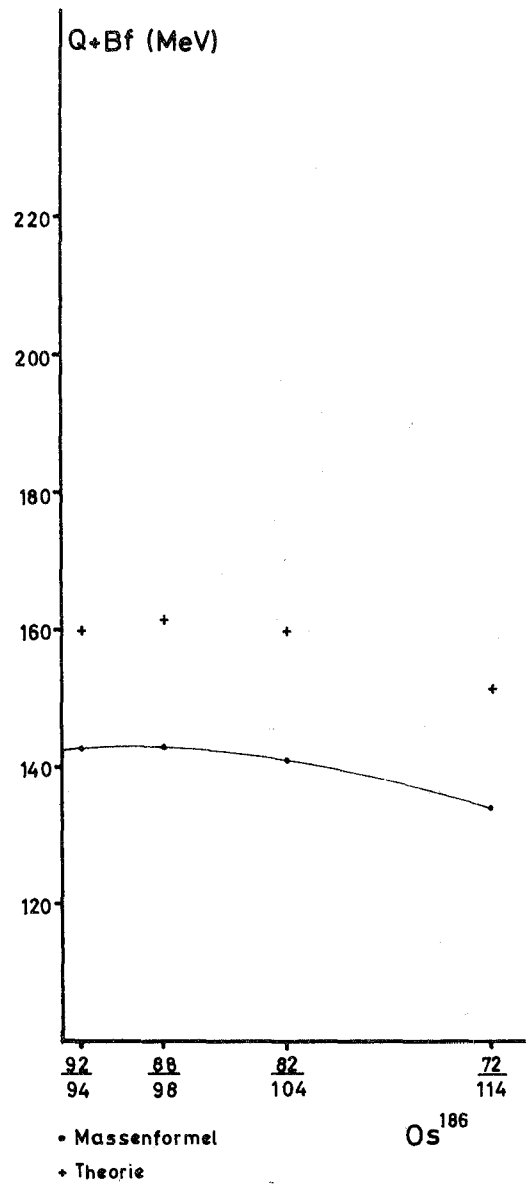
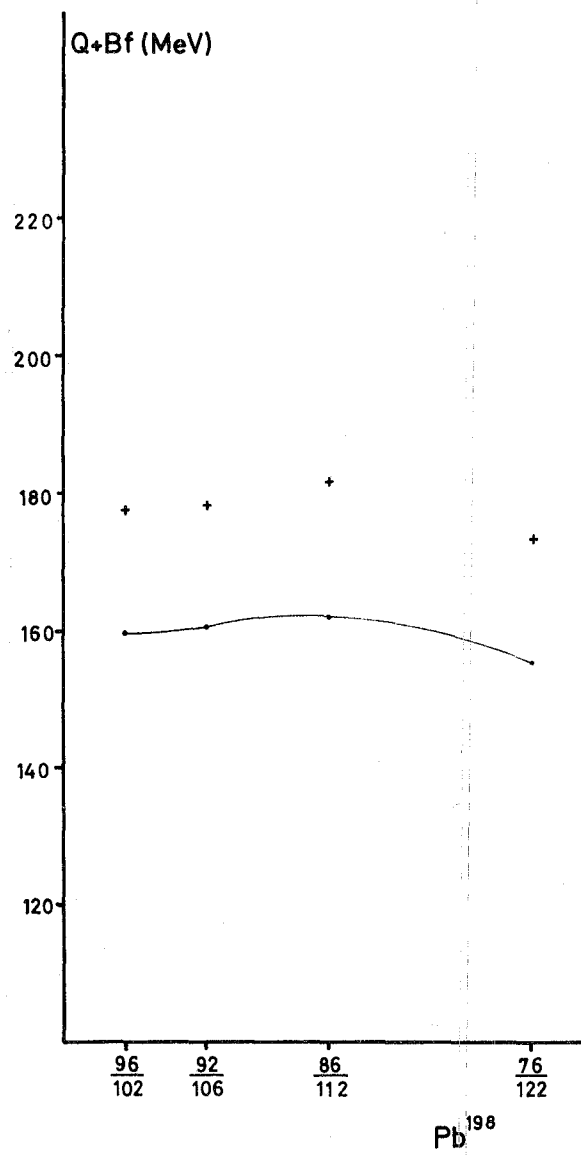


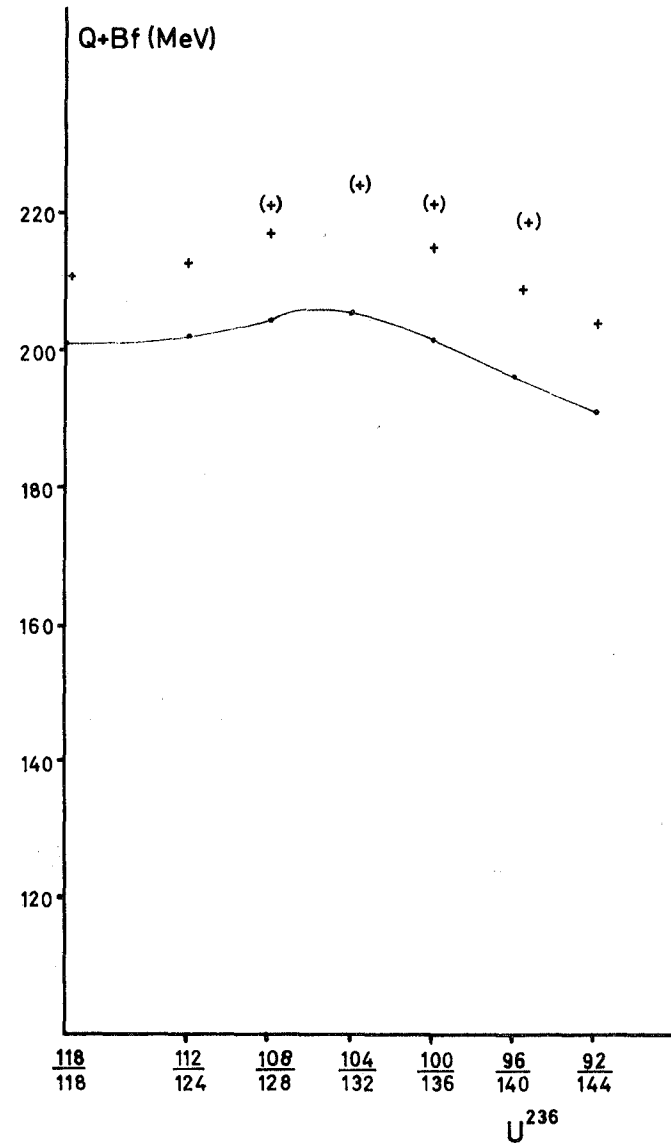
Fig.3b



a

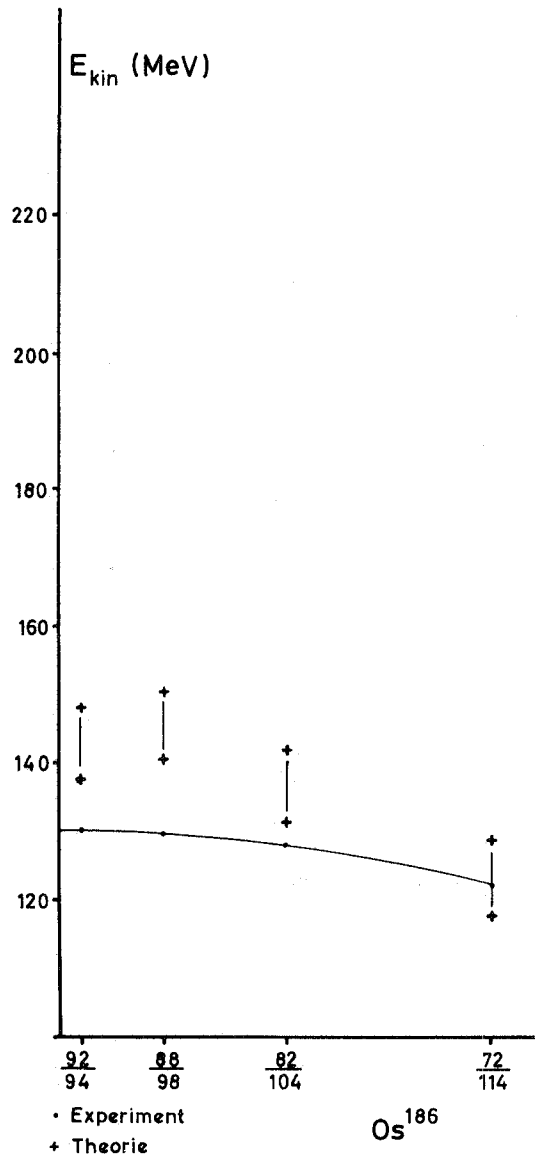


b

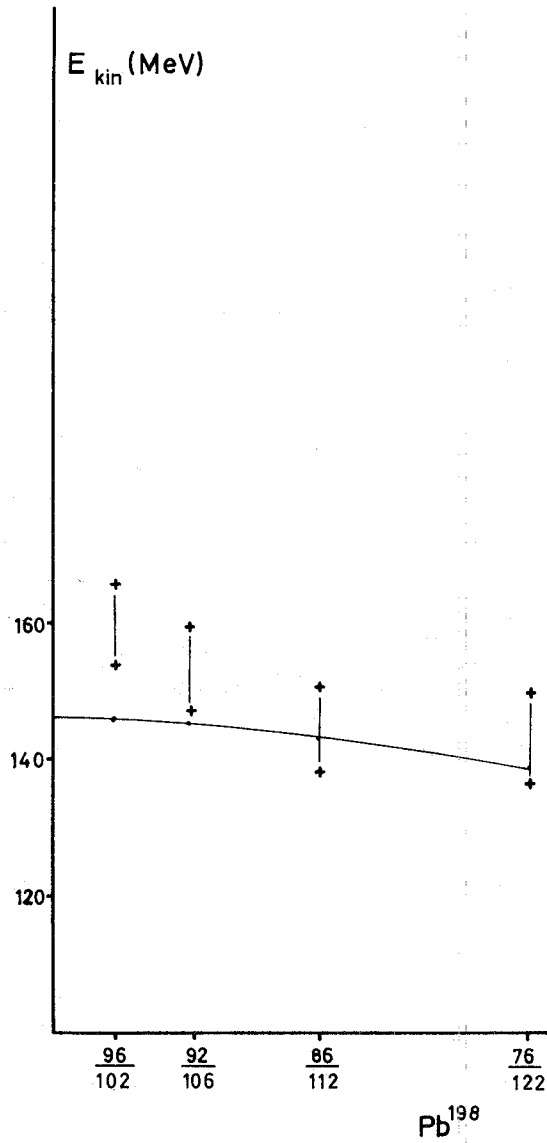


c

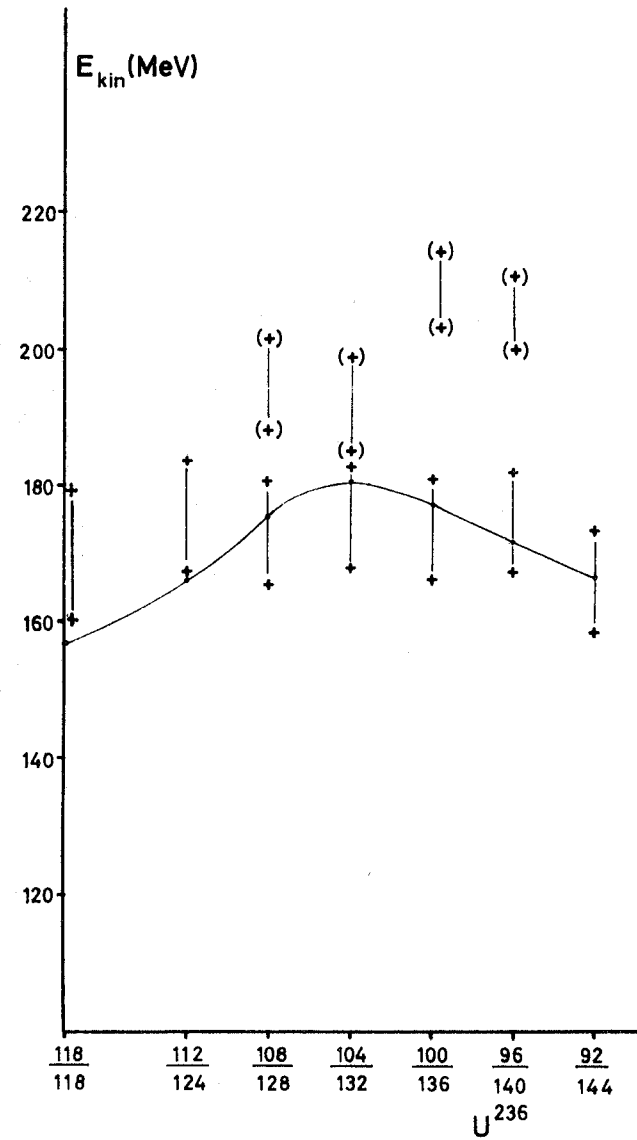
Fig.4



d



e



f

Fig.4

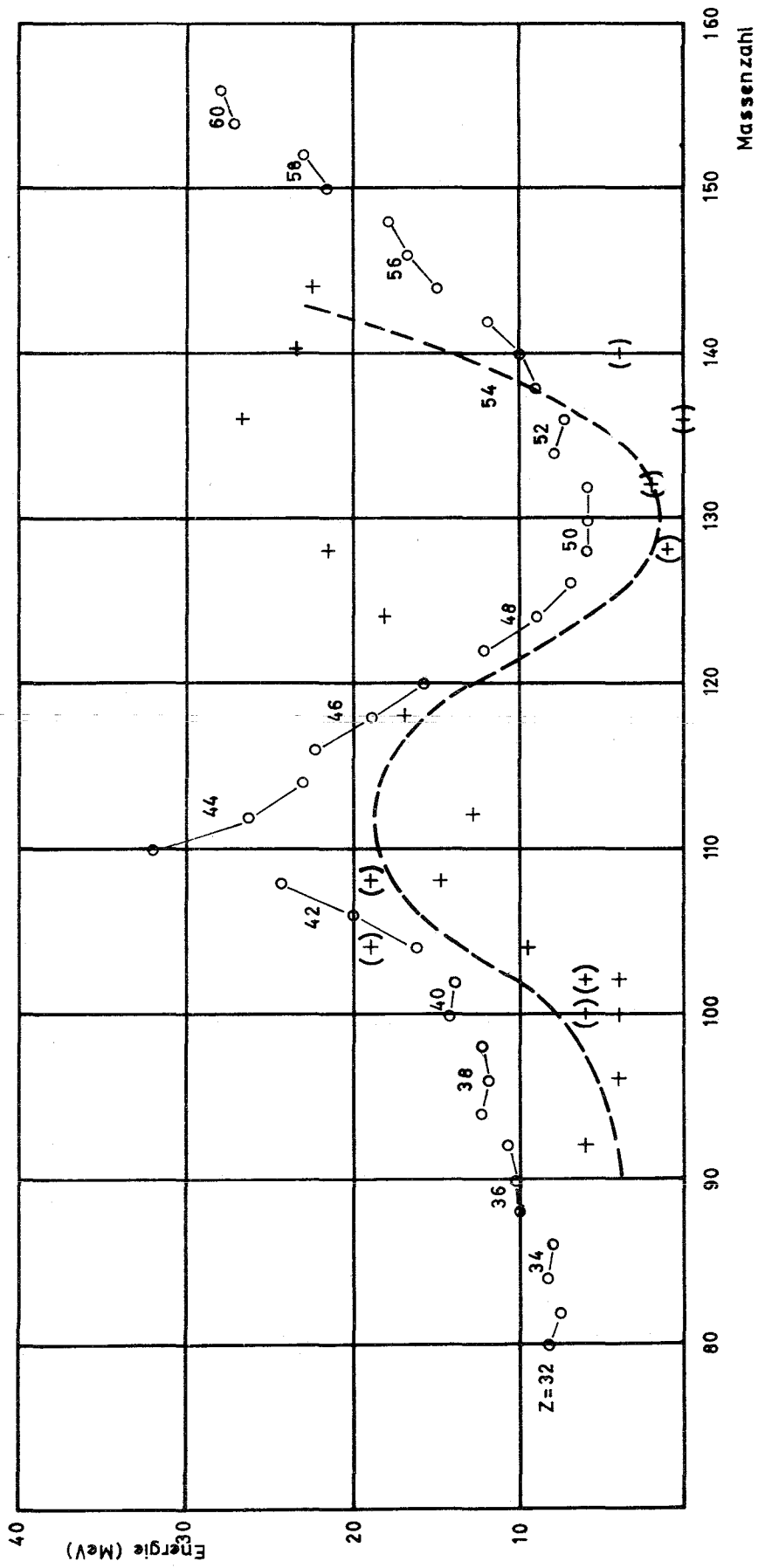


Fig.5