

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

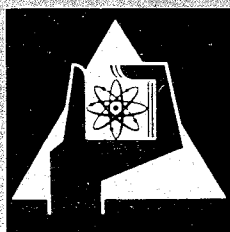
Juli 1968

KFK 813
EUR 3971 d

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Theoretische Behandlung hypothetischer, schwerer Unfälle
bei schnellen Leistungsreaktoren

D. Braess, K. Thurnay



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Juli 1968

KFK-813
EUR 3971 d

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

Theoretische Behandlung hypothetischer, schwerer Unfälle^{m)}
bei schnellen Leistungsreaktoren

von
D. Braess⁺⁾ und K. Thurnay

<sup>+) jetzt: Institut für Numerische und Instrumentelle Mathematik,
Universität Münster.</sup>

<sup>m) Diese Arbeit wurde im Rahmen der Assoziation zwischen der
Europäischen Atomgemeinschaft und der Gesellschaft für Kern-
forschung m.b.H. Karlsruhe auf dem Gebiet der schnellen
Reaktoren durchgeführt.</sup>

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H. KARLSRUHE

Abstract

In the design of fast power reactors the safety considerations are governed by the investigation of second excursions. These excursions might occur, when there is an assumed failure of the cooling system and, at the same time, a breakdown of all safety devices. Second excursions are mostly studied with the so-called Bethe-Tait-Method. This method is developed further and the effect of doppler feedback and of delayed neutrons is studied intimately.

1. Einleitung. Der Reaktorunfall.

Die Konstruktion von schnellen Leistungsreaktoren hängt von der Lösung der Sicherheitsprobleme ab. Den Ausgangspunkt der hier relevanten Sicherheitsbetrachtungen bildet die Annahme, daß bei einer positiven Reaktivitätsstörung, z.B. als Folge eines Bruchs in der Natriumkühlung, das Sicherheitssystem versagt. Dann wird das Core ganz oder teilweise schmelzen und sich eventuell eine überkritische Brennstoffkonfiguration am Boden des Reaktorbehälters bilden (Meltdown-Unfall) |1|, |4|, |5|.

In natriumgekühlten Reaktoren könnte es außerdem zu einer sehr schnellen Verdampfung des Kühlmittels kommen. |2| Durch die Bildung und Ausbreitung einer Na-Dampfblase wird dann immer mehr Kühlmittel aus dem Core herausgedrückt, was durch den positiven Void-Koeffizienten des Natriums in kurzer Zeit zu erheblicher Reaktivitätszunahme führen kann (Void-Unfall).

Die so ausgelösten Exkursionen bezeichnet man im allgemeinen als zweite Exkursionen. Wegen der erhöhten Leistung erfolgt ein weiterer Temperaturanstieg. Durch die Dopplerrückwirkung wird die Geschwindigkeit der Exkursion abgebremst, jedoch wird der Reaktor dadurch nicht abgeschaltet. Erst der Druck, der sich mit wachsender Temperatur aufbaut, führt zu Materialverschiebungen im Core von innen nach außen und so schließlich zu einer Beendigung der Exkursion.

Im Rahmen dieser Arbeit wird nun die Voraussetzung getroffen, daß die Unfallursache durch eine ortsunabhängige Reaktivitätseingabe beschrieben werden kann. Der Verlauf der Exkursion und die Energiefreisetzung als Folge dieser Reaktivitätsstörung wird studiert. Im Vordergrund stehen Untersuchungen über den Einfluß des Dopplerkoeffizienten und der verzögerten Neutronen.

Kleine Unsicherheiten im Werte des Dopplerkoeffizienten können große Änderungen in den Ergebnissen verursachen |1|, |8|. Für die Analyse der Ergebnisse muß man deshalb die Rechnungen für den ganzen Dopplerkoeffizientenbereich ausführen und diskutieren.

Die hier dargestellte Theorie baut auf der Bethe-Tait Methode (|3|, - |9|) auf und ist in wesentlichen Punkten weiter ausgebaut worden.

Die numerischen Werte in den Abbildungen beziehen sich immer auf den "Meltdown-Unfall" für das Projekt eines 1000 MWe natriumgekühlten Reaktors |10|. Die Eingabedaten für die Schmelze wurden durch Kritikalitätsrechnungen gewonnen, wobei die Zusammensetzung nur insofern von der ursprünglichen abweicht, daß das Kühlmittelvolumen durch Leervolumen ersetzt wird.

2. Grundgleichungen zum Bethe-Tait Formalismus.

Wir betrachten einen kugelsymmetrischen, homogenen Reaktor in der Eingruppennäherung^{**} und nehmen die im Rahmen des Bethe-Tait Formalismus übliche Separation des Flusses in Ort und Zeit vor:

$$\phi(r,t) = N(r) S(t) \quad (2.1)$$

$N(r)$ wird gemäß $N(0)=1$ normiert, so daß $S(t)$ den Fluß im Reaktorzentrum darstellt. Wenn man die Energiedichte im Core mit $E(r,t)$ bezeichnet, ist die Leistungsdichte durch

$$\frac{\partial}{\partial t} E(r,t) = L_0 \phi(r,t) \quad \text{gegeben.} \quad (2.2)$$

Der Leistungsfluß-Umrechnungsfaktor ist

$$L_0 = \frac{c_f \Sigma_f}{\rho_B} . \quad (2.3)$$

Hier ist c_f die pro Spaltung freigesetzte Energie des Brennstoffes, Σ_f der makroskopische Spaltquerschnitt und ρ_B die Brennstoffdichte. Die Leistungsdichte im Zentrum wird mit

$$\dot{Q}(t) = L_0 S(t) \quad (2.4)$$

bezeichnet.

Durch Einsetzen von (2.4) in die kinetischen Gleichungen eines Punktreaktors |11| erhält man folgendes Differentialgleichungssystem:

^{**}Die Eingruppenflüsse bzw. -konstanten ermittelt man durch Kondensation aus den entsprechenden Größen einer Multigruppenrechnung.

$$\begin{aligned}\ddot{Q} &= \alpha \dot{Q} + \lambda C \\ C &= \frac{k\beta}{\ell} \dot{Q} - \lambda C\end{aligned}\tag{2.5}$$

Hier ist ℓ die mittlere Lebensdauer der Neutronen und

$$\alpha = \frac{k-1-\beta k}{\ell}\tag{2.5'}$$

ist die auf die Neutronenlebensdauer bezogene Reaktivität. C stellt, mit Hilfe der effektiven Zerfallskonstante, λ die Leistungsdichte der Vorläufergruppen dar. Da die Dauer der Exkursion sehr klein ist gegenüber der Lebensdauer der einzelnen Vorläufergruppen, ist λ gemäß [12] durch

$$\lambda = \sum_i \frac{\beta_i}{\beta} \lambda_i ; \quad \beta = \sum_i \beta_i\tag{2.6}$$

gegeben.

Da $|k-1| \ll 1$ ist, kann man in den Gleichungen (2.5) noch $k\beta$ durch β ersetzen.

Die Reaktivität setzt sich in unserem Modell aus drei Komponenten zusammen:

$$\alpha = \alpha_R + \alpha_D + \alpha_E\tag{2.7}$$

wobei α_R die eingegebene Reaktivität ist, die die Exkursion auslöst (speziell $\alpha_R(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$), α_D ist die Dopplerrückwirkung und α_E ist die Reaktivitätsrückwirkung infolge der Materialverschiebungen im Core. Die zeitlichen Ableitungen von α_D und α_E werden mit Hilfe der Störungstheorie aus der jeweiligen Energieverteilung $E(r,t)$ bestimmt.

Diese ist (s. Gl.en (2.1), (2.2) und (2.4)) durch

$$E(r,t) = Q_0 \cdot \hat{N}(r) + (Q(t) - Q_0) N(r)\tag{2.8}$$

gegeben, oder, falls man annimmt, daß die örtliche Energieverteilung am Beginn der Exkursion $\hat{N}(r)$ mit der Fluß- und Leistungsverteilung identisch ist, erhält man

$$E(r,t) = Q(t) \cdot N(r)\tag{2.8'}$$

Den Beitrag der Expansionsrückwirkung kann man gemäß |3| aus

$$\alpha_E(t) = \frac{4v}{N_I} \int dr r \frac{D}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{\partial N}{\partial r} \right)^2 \quad (2.9)$$

berechnen, wobei v die mittlere Neutronengeschwindigkeit und

$$N_I = \int dr r^2 N^2(r)$$

eine Normierungsgröße ist. $p(r)$ ist der Druck im Brennstoff, D und ρ sind die Diffusionskonstante bzw. die Dichte des Corematerials. Die Formel (2.9) gilt für den Meltdown-Unfall, wenn sich das Corematerial in der Schmelze gemäß der Gleichung

$$\rho \cdot \ddot{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

frei bewegen kann.

Aus der Gl. (2.9) und einer Zustandsgleichung $p(T)$ läßt sich, wie im nächsten Abschnitt erläutert wird, α_E bestimmen. Die Auswertung des Integrals (2.9) für parabelförmige Leistungsverteilung

$$N(r) = 1 - q \frac{r^2}{R^2}, \quad R = \text{Core-Radius} \quad (2.10)$$

erfolgt im Anhang A. Dabei wird wie üblich vorausgesetzt, daß die Dichte des Cores während der Exkursion konstant bleibt.

Die zeitliche Änderung der Dopplerrückwirkung gründet sich auf eine Erhöhung der Coretemperatur während der Exkursion:

$$\frac{dk_D}{dt} = \frac{\partial k_D}{\partial T_{ref}} \frac{\partial T_{ref}}{\partial t} \quad (2.11)$$

wobei unter T_{ref} eine für die Reaktivitätsänderung maßgebliche Temperaturgröße zu verstehen ist.

Bei den schnellen Brütern besteht zwischen der Referenztemperatur und der Dopplerreaktivität folgender Zusammenhang |13|:

$$(T_{ref})^x \frac{\partial k_D}{\partial T_{ref}} = \text{konst} = -\gamma$$

wobei

$$x \gtrsim 1$$

(2.12)

ist.

Somit ist die temperaturabhängige Änderung der Reaktivität in λ -Einheiten durch

$$\dot{\alpha}_D(t) = -\frac{\gamma}{\lambda} \frac{1}{T_{ref}^x} \frac{\partial T_{ref}}{\partial t} \quad \text{gegeben.} \quad (2.13)$$

Bei kleinen Exkursionen im stationären Betrieb benutzt man als T_{ref} die mittlere Coretemperatur. In den hier betrachteten zweiten Exkursionen bleiben die Temperaturänderungen nicht auf kleine Werte beschränkt, zudem ist die Temperaturentwicklung im Core wegen örtlicher Phasenübergänge nicht einheitlich.

Wenn man nur den Flüssigkeits-Gas-Phasenübergang berücksichtigt, gibt es drei verschiedene Fälle für die Temperaturentwicklung:

Fall 1

Der gesamte Brennstoff ist im geschmolzenen Zustand, die Ortstemperatur ist (unter Vernachlässigung der Fusionswärme)

$$T(r,t) \equiv \frac{E(r,t)}{c_v} = \frac{Q(t) \cdot N(r)}{c_v} \quad (2.14)$$

s. Gl. (2.8') (c_v ist die Wärmekapazität des Brennstoffs). Wenn man mit

$$T(t) = \frac{Q(t)}{c_v} \quad (2.15)$$

die Zentraltemperatur bezeichnet, ist die Rückwirkung durch

$$\dot{\alpha}_D(t) = -\frac{\gamma}{\lambda} \frac{\dot{Q}}{c_v T^x} \frac{1}{N_I} \int dr r^2 [N(r)]^{3-x} \approx -\frac{\gamma}{\lambda} \frac{\dot{Q}}{c_v T^x} \quad (2.16)$$

gegeben. (Die Benutzung der mittleren Temperatur würde für diesen Fall ($x=1$) zu demselben Ergebnis führen.)

Fall 2

Alle vorhandenen Leerräume sind durch gasförmigen Brennstoff ausgefüllt, dabei wird pro Gramm E_v latente Wärme verbraucht. In diesem Falle ist die Ortstemperatur (da i.A. hier $Q(t) \gg E_v$ ist)

$$T(r,t) \equiv \frac{E(r,t) - E_v}{c_v} \approx \frac{(Q(t) - E_v) N(r)}{c_v} \quad (2.14')$$

$\dot{\alpha}_D$ wird auch hier durch die Gl. (2.16) dargestellt, wobei die Zentraltemperatur

in diesem Falle

$$T(t) = \frac{Q(t) - E_V}{c_V} \quad (2.15')$$

beträgt.

Fall 3

Wenn in der Kugelschale $0 \leq r_2 < r \leq r_1 \leq R$ eine Zustandsänderung eintritt, bleibt hier die Temperatur konstant; dieser Coreteil trägt zur Rückwirkung nicht bei. Diesen Fall kann man in erster Näherung durch Hinzunahme einer Wichtungsgröße

$$\xi = \int_{(R)} \phi^+ \phi \, dv / \int_{(c)} \phi^+ \phi \, dv$$

berücksichtigen, wobei das Zählerintegral nur über das Restvolumen, in dem keine Zustandsänderungen stattfinden, ausgeführt wird. Das führt auf:

$$\dot{\alpha}_D(t) \approx -\frac{\gamma}{\ell} \frac{\dot{Q}}{c_V T^x} \cdot \xi(r_1, r_2) \quad \text{mit} \quad (2.16')$$

$$\xi(r_1, r_2) = \frac{1}{N_I} \left[\int_0^{r_2} + \int_{r_1}^R \right] dr \, r^2 N^2(r) \quad (2.17)$$

Das Integral (2.17) wird ebenfalls im Anhang A ausgewertet.

3. Zustandsgleichung und Durchführung der Rechnung.

Durch die Zustandsgleichung ist der Zusammenhang von Druck, Temperatur und spezifischer Dichte gegeben. Bei schwachen und mittelstarken Exkursionen^{*)} bewegt man sich nun in einem Temperaturbereich, in dem der Druck durch den Sättigungsdampfdruck gegeben ist und nicht von der Dichte, sondern nur von der Temperatur abhängt |14|, |10|.

Als Dampfdruckformel wird ein

$$\ln p(T) = A - \frac{B}{T} \quad (3.1)$$

Zusammenhang gewählt, wobei man A und B gemäß der Forderungen $p(3500 \text{ K}^\circ) = 1 \text{ atm}$ und $p(8000 \text{ K}^\circ) = 2240 \text{ atm}$ anpaßt. Dann ergibt sich

^{*)} d.h. bei Rampen, deren Steigung weniger als 100 \$/s beträgt.

$$p[\text{atm}] = 2240 e^{6(1 - \frac{8000}{T[\text{K}^\circ]})} \quad (3.2)$$

Um das Integral (2.9) einfach berechnen zu können, approximieren wir die Funktion $p(T)$ durch ein Polynom dritten Grades (s. Anhang A, und Abb. 5).

Bei der Ausführung der Rechnungen ist es zweckmäßig, die Exkursion in mehrere Rechnungsphasen aufzuteilen, entsprechend den unterschiedlichen Formen der Rückwirkungen bei den verschiedenen Energiezuständen des Cores.

Es sei E_1 die (thermische) Energiedichte des flüssigen Brennstoffs am Siedepunkt und $E_2 = E_1 + E_v$ sei die Energiedichte des siedenden Brennstoffs in einem Ort, in dem alle Leervolumina mit gasförmigem Brennstoff ausgefüllt sind.

Ein wesentlicher Druck tritt nur in dem Teil des Reaktors auf, in dem die Energiedichte größer als E_2 ist, also

$$E(r,t) \equiv Q(t) \cdot N(r) \geq E_2 \quad (3.3)$$

Zur Dopplerrückwirkung trägt nur der Corebereich bei, in dem

$$Q(t) \cdot N(r) \leq E_1 \quad \text{oder} \quad E_2 \leq Q(t) \cdot N(r) \quad \text{ist.} \quad (3.4)$$

Daraus ergeben sich fünf Phasen, wie aus nachfolgender Tabelle zu ersehen ist |1|:

Rechnungsphase	Energie im Corezentrum	Bereich des Cores mit	
		$E \leq E_1$	$E_2 \leq E$
I	$Q(t) \leq E_1$	$0 \leq r \leq R$	-
II	$E_1 \leq Q(t) \leq E_2$	$r_1 \leq r \leq R$	-
III	$E_2 \leq Q(t) \leq E_1/N(R)$	$r_1 \leq r \leq R$	$0 \leq r \leq r_2$
IV	$E_1/N(R) \leq Q(t) \leq E_2/N(R)$	-	$0 \leq r \leq r_2$
V	$E_2/N(R) \leq Q(t)$	-	$0 \leq r \leq R$

Tabelle: Die Energieverteilung im Reaktor in den einzelnen Rechnungsphasen.

Mit dem Ansatz (2.10) ergibt sich für die in der Tabelle aufgeführten Radien

$$r_i = R \sqrt{\frac{Q(t) - E_i}{qQ(t)}} \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

Die Energieangaben beziehen sich immer auf thermische Energien. Für die Auslegung des Reaktors interessiert speziell der Anteil der erzeugten Gesamtenergie, der in mechanische Arbeit umgesetzt werden kann. Eine absolut pessimistische Abschätzung nach oben für diesen Anteil erhält man, wenn man annimmt, daß im Reaktor die gesamte thermische Energie oberhalb der Schwelle E_2 sich in mechanische Arbeit umwandeln läßt. Den so erhaltenen Energiebetrag

$$E_{ex} = \int_0^{r_2(t^x)} dv \rho_B(E(r, t^x) - E_2) \quad (3.6)$$

bezeichnen wir als Exzessenergie der Exkursion (s. auch Anhang A). (t^x bezeichnet hier den Zeitpunkt, in dem die Exkursion abgeschlossen wurde.)

4. Der zeitliche Verlauf der Exkursion.

Wenn die Dopplerkonstante γ (Gl. 2.12) verschwindet, erhält man leicht verständliche Ergebnisse. Aus den bekannten Näherungen |4|, |6| für den zeitlichen Verlauf des Flusses erkennt man, daß die freigesetzte Energie zunimmt, wenn die Rampensteilheit vergrößert oder der Anfangsfluß vermindert wird. Nicht so übersichtlich sind die Ergebnisse bei $\gamma \neq 0$. Um den Fall genau analysieren zu können, betrachten wir den Verlauf der Exkursion zunächst unter Vernachlässigung der verzögerten Neutronen.

Die zeitliche Entwicklung der Reaktorgrößen: Fluß, Reaktivität und Energiedichte, ist für eine typische Exkursion mit linearer Reaktivitätseingabe in Abb. 1 aufgezeichnet (für den Dopplereponenten setzen wir den Wert 1 ein). Fluß und Reaktivität sind nahezu periodisch, ehe die Abschaltung durch die Coreexpansion einsetzt. Es entstehen typische "Dopplerschwingungen".

Diese Schwingungen der durch Reaktivitätsrampen ausgelösten Exkursionen hatte schon Häfele |7| diskutiert. Bei den Untersuchungen in |7| wird angenommen, daß

$$\Gamma = - \frac{\partial k_D}{\partial T_{ref}} \quad (4.1)$$

temperaturunabhängig ist und daß zur Erwärmung des Cores nur der Anteil des Flusses beiträgt, der den Anfangsfluß, ϕ_0 übersteigt.

Trotzdem beschreiben die Ergebnisse - bei entsprechenden Abänderungen - auch den vorliegenden Fall recht gut.

Doppler-Schwingungen treten demnach dann auf, wenn ϕ_0 klein ist gegenüber dem Wert, der sich als Zeitmittelwert des Flusses einstellt:

$$\phi_{as} = \frac{\alpha_1 \ell c_v}{\Gamma_0 L_0} \quad (4.2)$$

Hier ist Γ_0 die temperaturunabhängige Größe. Es wird nun vorausgesetzt, daß die Größe

$$X_0 \equiv \ln(\phi_{as}/\phi_0) \gg 1 \quad \text{ist.} \quad (4.3)$$

In diesem Falle sind die Flußmaxima groß gegenüber ϕ_{as} und die Zunahme der Energiedichte erfolgt hauptsächlich nur in dem Teil jeder Schwingung, in dem der Fluß den Mittelwert übersteigt. Die Energie nimmt stufenweise zu. Die Größe einer Energiedichte-Stufe beträgt (s. Anhang B)

$$\Delta Q_0 \approx \frac{2 c_v \ell}{\Gamma_0} \sqrt{2\alpha_1 X_0} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\ln X_0}}{X_0}\right) \quad (4.4)$$

Während die Exkursion bei den Konstanten Γ streng periodisch verläuft, werden die Dopplerschwingungen bei einem $\frac{1}{T}$ Gesetz im Laufe der Zeit leicht bedämpft (Abb. 1). Dies beruht letzten Endes darauf, daß sich beim Durchlaufen der Flußspitzen die Temperatur erhöht, Infolge des verkleinerten Wertes für Γ erreicht der Fluß nicht wieder den Anfangswert. Außerdem steigt der zeitliche Flußmittelwert ebenfalls etwas an.

Die Abschaltung kommt durch den Druckaufbau in der Expansionsphase zustande, d.h. in den Phasen, in denen die Zentraltemperatur über dem Siedepunkt liegt. Der mit der Temperatur zunehmende Druck vermindert durch örtliche Materialverschiebungen (vor allem im Core-Zentrum) solange die Reaktivität, bis in einer der Perioden die positive Reaktivitätsspitze verschwindet. Weitere Doppler-Schwingungen können sich nicht mehr ausbilden, der Fluß nimmt monoton ab, und die Energiezunahme kommt zum Stillstand.

Die Exzessenergie einer Exkursion hängt sehr empfindlich vom Wert der Dopplerkonstante ab (s. Abb. 2). Charakteristisch für die $E_{ex}(\gamma)$ -Kurven sind die mit wachsendem γ regelmäßig auftretenden starken E_{ex} -Sprünge, die in der Periodizität der Energiezunahme begründet sind.

Zur Abschaltung der Exkursion ist es notwendig, daß die Energiedichte einen Mindestbetrag Q_g übersteigt, damit die Expansionsrückwirkung ausreicht, um in der letzten Dopplerperiode die Reaktivitätsspitze zu unterdrücken (Vergl. die untere Schranke der $E_{ex}(\gamma)$ -Kurve in Abb. 2). Solange die Dopplerkonstante so klein ist, daß für die Höhe der ersten Energiestufe $\Delta Q \gg Q_g - Q_0$ gilt, wird die Exkursion bereits in der ersten Dopplerperiode abgeschaltet. Mit wachsendem γ nimmt die Stufenhöhe und so auch E_{ex} ab. Bei einem bestimmten γ -Wert genügt nun eine kleine Zunahme $\Delta\gamma$, um die Energiedichte der ersten Periode $Q_0 + \Delta Q$ unter das Abschaltminimum Q_g sinken zu lassen. Damit kommt es zur Ausbildung einer zweiten Dopplerperiode mit einer zusätzlichen Energiestufe. Dem entspricht der Sprung in E_{ex} bei diesem γ -Wert. Entsprechende Sprungstellen ergeben sich bei jedem γ -Wert, an dem die Anzahl der Dopplerperioden um eins erhöht wird. Die Schwankungen bei diesen Sprungstellen nehmen mit wachsendem γ ab, da die zusätzlichen Stufen kleiner werden.

Bei Berücksichtigung der verzögerten Neutronen ändert sich der Exkursionsverlauf erheblich.

Der Reaktor wird jetzt mit einer Verzögerung

$$t_1 = \frac{\beta}{\alpha_1 \ell} \quad (4.5)$$

prompt kritisch, wenn man als Startpunkt der Rampe den verzögert kritischen Zustand einsetzt. Der Fluß kann in dieser Zeit stark ansteigen ($\phi_0 \ll \phi_{as}$ wird weiterhin vorausgesetzt). In der ersten halben Dopplerperiode entwickelt sich nach |7| der Fluß so, wie es bei einer Exkursion ohne verzögerte Neutronen und einen erhöhten Anfangsfluß

$$\phi_0^x = \phi_0 \cdot \frac{\beta}{\ell} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_1}} \quad (\text{falls } \beta \gg \ell \cdot \sqrt{\alpha_1}) \quad (4.6)$$

der Fall wäre. Dadurch wird die Energieerzeugung in der ersten Periode reduziert (s. Gl.en 4.4 und 4.3). Dies macht sich besonders bei kleinen γ -Werten bemerkbar, bei denen die Exkursion bereits in der ersten Periode beendet wird.

Bei Exkursionen, die sich über mehrere Perioden erstrecken, verursachen die verzögerten Neutronen eine starke Dämpfung der Dopplerschwingungen von der zweiten Welle an. Dieser Effekt, der auch in Abb. 3 deutlich zu sehen ist, beruht auf folgendem: Bei negativen Reaktivitätssprüngen sinkt der Fluß bekanntlich nicht exponentiell mit der Geschwindigkeit ab, die dem Sprung entspricht. Selbst bei kleinem Anfangsfluß ϕ_0 erfolgt nach dem Maximum ein schneller Abfall nur solange, bis der Fluß die Größenordnung

$$\lambda t \cdot \phi_{as} \quad (4.7)$$

(s. Anhang C) erreicht hat. Das weitere Abklingen entsprechend dem Zerfallsgesetz der Vorläufer wird durch die weiterlaufende Rampe abgefangen. Da also für die zweite Flußspitze der Anfangswert des Flusses wesentlich höher liegt, ist sie viel kleiner als die erste Spitze (vgl. Gl. (21) in [7]). Die Dämpfung schreitet im Laufe der Zeit fort, und die Schwankungen gegenüber dem Mittelwert ϕ_{as} werden sehr schnell klein.

Durch das Verschwinden der Energiestufen wird der Verlauf der $E_{ex}(\gamma)$ -Kurve bei größerem γ wesentlich glatter als die entsprechende Kurve, die unter Vernachlässigung der verzögerten Neutronen ermittelt wurde (Abb. 4). Man kann insofern von einer Reduktion der Energiefreisetzung durch verzögerte Neutronen sprechen, als die Werte nun niedriger liegen als die entsprechenden relativen Maxima in dem ersten Fall.

Herrn Dr. Küsters danken wir für die Förderung der Arbeit und für zahlreiche Diskussionen.

Anhang A. Berechnung der Ortsintegrale.

Für den parabelförmigen Fluß (2.10)

$$N = 1 - q \frac{r^2}{R^2}$$

sollen die verschiedenen Ortsintegrale berechnet werden. Mehrfach wird das Integral

$$\int_0^r r'^2 dr' N^2(r') = \frac{r^3}{3} \left(1 - \frac{6}{5} q \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{7} q^2 \frac{r^4}{R^4} \right) \quad (\text{A.1})$$

benötigt. Hieraus erhält man mit $r=R$ das Normierungsintegral

$$N_I = \frac{R^3}{3} \left(1 - \frac{6}{5} q + \frac{3}{7} q^2 \right) \quad (\text{A.2})$$

Das Integral (2.9) zur Bestimmung von $\ddot{\alpha}_E$ schreibt sich bei konstanter Diffusionskonstante und Dichte

$$\ddot{\alpha}_E = \frac{4v}{N_I} \frac{4q^2 D}{R^4 \rho} \int_0^R r^3 dr \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A.3})$$

Für die Zustandsgleichung benutzen wir die Approximation durch eine kubische Parabel in der Form (s. Abb. 5)

$$p = \begin{cases} \sum_{v=0}^3 p_v [T(r,t)]^v & \text{f. } E(r,t) \geq E_2 \\ 0 & \text{f. } E(r,t) < E_2 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Da die Temperatur oberhalb E_2 durch (Gl. 2.14')

$$T(r,t) \equiv \frac{Q(t)N(r) - E_v}{c_v}$$

gegeben ist, erhält man für den Druckgradienten in diesem Gebiet

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r,t) = \sum_{v=1}^3 \frac{v p_v}{c_v} [Q \cdot N - E_v]^{v-1} Q \frac{dN}{dr} \quad (\text{A.5})$$

Mit der Abkürzung

$$s_v \equiv \sum_{\mu=0}^{3-v} \frac{p_{v+\mu}}{(c_v)^{v+\mu}} \binom{v+\mu}{\mu} (-E_v)^\mu \quad (\text{A.6})$$

wird daraus

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r,t) = \sum_{v=1}^3 v s_v Q(t)^v N(r)^{v-1} \frac{dN}{dr} \quad \text{für } E(r,t) \geq E_2 \quad (\text{A.5'})$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_E(t) &= -\frac{32}{N_I} \frac{vD}{\rho} \left(\frac{q}{R^2}\right)^3 \sum_{v=1}^3 v s_v Q(t)^v \int_0^{r_2} dr r^4 \left[1 - q \frac{r^2}{R^2}\right]^{v-1} = \\ &= -\frac{6.4}{N_I} \frac{vDq^3}{\rho R} \sum_{v=1}^3 v s_v Q(t)^v \cdot A_v\left(\frac{r_2}{R}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Hier ist

$$A_v(\xi) \equiv 5 \int_0^\xi dx x^4 (1 - qx^2)^{v-1} \equiv \xi^5 \sum_{\mu=0}^{v-1} \frac{5}{5+2\mu} \binom{v-1}{\mu} (-q\xi^2)^\mu \quad (\text{A.8})$$

und für $r_2 > R$ ist $A_v(r_2/R) = A_v(1)$.

Aus (3.6) ergibt sich für die Exzessenergie

$$E_{\text{ex}} = \int_0^{r_2} dv \rho_B(Q(t)N(r) - E_2) = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_B \xi^3 \left\{ Q(t) \left(1 - \frac{3}{5} q\xi^2\right) - E_2 \right\} \quad (\text{A.9})$$

dabei ist $\xi = r_2/R$ für $r_2 \leq R$ und $\xi = 1$ für $r_2 > R$ (A.10)

r_2 und Q bezeichnen hier die Werte der entsprechenden Größen am Ende der Exkursion.

Anhang B. Energieerzeugung während einer Dopplerperiode ohne verzögerte Neutronen.

Die Energiefreisetzung während einer Flußspitze ist schon in einer Näherung in |7| angegeben worden. Zunächst diskutieren wir eine bessere Approximation für den Fall des temperaturunabhängigen Γ . Die Korrektur durch das $\frac{1}{T}$ -Gesetz wird anschließend behandelt.

Die Energiedichte, die während einer Dopplerperiode - deren Zeitdauer $2t_M$ ist - erzeugt wird, ist

$$\Delta Q_0 = \int_0^{2t_M} L_0 \phi(t') dt' = \frac{L_0}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^{2\tau_M} \phi d\tau' = \frac{L_0}{\sqrt{\alpha_1}} \phi_{as} \cdot 2\tau_M \quad (B.1)$$

τ ist die relative Zeit in **dimensionallosen** Einheiten. Mit (4.2) erhält man

$$\Delta Q_0 = \frac{\lambda c_v}{\Gamma_0} \sqrt{\alpha_1} \cdot 2\tau_M \quad (B.1')$$

$$2\tau_M = 2\tau_{as} + \tau_B \quad (B.2)$$

Wenn man die Flußspitze mit ϕ_M bezeichnet, so sind die obigen Größen wie folgt definiert:

$$\phi(\tau_{as}) = \phi_{as}, \quad \phi(\tau_M) = \phi_M, \quad \phi(\tau_{as} + \tau_B) = \phi_{as}, \quad \phi(2\tau_M) = \phi_0 \quad (B.3)$$

Aus der Gl.(12) in |7|, die hier die Form

$$\rho = \tau - \int_0^{\tau} \frac{\phi}{\phi_{as}} d\tau' \quad (B.4)$$

hat, erhält man

$$\int_{\tau_{as}}^{\tau_{as} + \tau_B} \phi d\tau' = \phi_{as} [2\rho_{as} + \tau_B] \quad (B.5)$$

In |7| wurde die linke Seite dieser Gleichung ausgewertet, indem man ϕ im Gebiet $\tau_{as} \leq \tau \leq \tau_{as} + \tau_B$ mit einer Parabel approximiert. Wir verwenden zu diesem Zweck eine Glodenkurve

$$\phi(\tau) \approx \phi_M \exp \left[-\xi \left(\frac{\tau - \tau_M}{\tau_B/2} \right)^2 \right]; \quad \xi = \ln(\phi_M / \phi_{as}). \quad (B.6)$$

Dieser Ansatz entspricht einem linearen Reaktivitätsverlauf und beschreibt den Fluß in diesem Gebiet besser für $\phi_M \gg \phi_{as}$. Wir erhalten

$$\int_{\tau_{as}}^{\tau_{as} + \tau_B} \phi \, d\tau' \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \, d\tau' = \phi_M \tau_B \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \quad (\text{B.7})$$

Aus B.5 und B.7 ergibt sich unter Benutzung von (17) in [7]

$$\tau_B \approx \frac{\phi_{as}}{\phi_M} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\xi} \cdot 2\tau_{as} \quad (\text{B.8})$$

Die Gl. (21) in [7] gibt folgende weitere Näherung (s. auch Gl. 4.3):

$$\frac{\phi_{as}}{\phi_M} \sqrt{\xi} \approx \frac{\sqrt{\ln x_0}}{x_0} \quad (\text{B.9})$$

Man erhält also

$$2\tau_M = 2\tau_{as} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\ln x_0}}{x_0} \right) \quad (\text{B.10})$$

Wenn man noch Gl. (18) in [7] berücksichtigt, dann ist die in einer Doppler-Periode entwickelte Energiedichte

$$\Delta Q_0 \approx \frac{2lc}{\Gamma_0} v \sqrt{2\alpha_1 x_0} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\ln x_0}}{x_0} \right] \quad (\text{B.11})$$

Wenn sich Γ auf Grund des Temperaturanstiegs ändert, muß man bei der Anwendung der Formel (4.4) einen geeigneten mittleren Γ einsetzen. Nun ist die Abhängigkeit von Γ in dieser Formel im wesentlichen durch die Relation $\Delta Q \sim \frac{1}{T}$ gegeben, d.h. bei einem $\frac{1}{T}$ -Gesetz gilt $\Delta Q \propto T$. Wir können also schreiben

$$\Delta Q \approx \Delta Q_0 \cdot \frac{T^x}{T_0} \quad (\text{B.12})$$

Wir setzen nun als mittlere Temperatur

$$T^x = \frac{1}{2} (T_0 + T_1) \quad (\text{B.13})$$

wobei $T_1 = T_0 + \frac{\Delta Q}{c v}$ die Temperatur am Ende der ersten Dopplerperiode ist. Man erhält

$$\Delta Q \approx \Delta Q_0 \left(1 + \frac{\Delta Q}{2Q_0} \right) \quad (\text{B.14})$$

Anhang C. Herleitung von (4.7).

Wir gehen aus von den kinetischen Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \alpha\phi + \lambda C \\ \dot{C} &= \frac{1}{\Lambda} \phi - \lambda C, \quad \Lambda = \frac{\ell}{\beta}\end{aligned}$$

aus denen man erkennt, daß für den stationären Reaktor $\phi = \lambda\Lambda C$ gilt. Da $C(t=0)$ klein ist, ergibt sich ($\lambda t \ll 1$)

$$C(t) \approx \frac{1}{\Lambda} \int_0^t \phi(t') dt$$

und bei Einsetzung des zeitlichen Mittelwerts

$$C(t) \approx \frac{t}{\Lambda} \phi_{as} \quad (C.1)$$

Die Abschaltung von kritischen Reaktoren durch negative Sprünge (für $t > t_0$) ist bekannt [11]. Bei einer Reaktivität von $-k$ endet der schnelle Abfall bei dem Wert

$$\begin{aligned}\phi_{pd} &\approx \frac{1}{1+k} \phi(t_0) \quad (k \text{ in } \%) \\ &\approx \frac{1}{1+k} \lambda\Lambda C(t_0)\end{aligned} \quad (C.2)$$

Die letzte Relation gilt näherungsweise für beliebige Ausgangssituationen. Wenn k wesentlich kleiner als 1 % ist, erhalten wir durch Einsetzen von (C.1) in (C.2) genau (4.7).

Literatur:

- |1| H. Böhm, Analytische Behandlung von Reaktorexkursionen, private Mitteilung, 1964.
- |2| A.M. Judd, Loss of Coolant Accidents in a Large Sodium-Cooled Fast Reactor Maximum Accident (Conf. Argonne, Okt. 1965), ANL 7120, 67 (1965).
- |3| W.J. McCarthy, Jr, R.B. Nicholson, D. Okrent, V.Z. Jankus, Studies of Nuclear Accidents in Fast Power Reactors, Proc. of the Sec. U.N. Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, Genf 12, 244 (1958).
- |4| R.B. Nicholson, Methods for Determining the Energy Release in Hypothetical Reactor Meltdown Accidents, APDA 150 (1962), Nucl. Sc. Eng. 18, 207 (1964).
- |5| A.H. Kazi, B.H. Cherry, Survey of Current Methods for Analysis of Fast Reactor Transients Including Meltdown, UNC 5092 (1964).
- |6| V.Z. Jankus, A Theoretical Study of Destructive Nuclear Bursts in Fast Power Reactors, ANL 6512 (1965).
- |7| W. Häfele, Prompte überkritische Leistungsexkursionen in schnellen Reaktoren, Nukleonik 5, 201 (1963).
- |8| E.P. Hicks, D.C. Menzies, Theoretical Studies on Fast Reactor Maximum Accident, ANL 7120, 654 (Conf. Argonne, Oct. 1965).
- |9| R.A. Meyer, B. Wolfe, N.F. Friedmann, A Parameter Study of Large Fast Reactor Meltdown Accidents, ANL 7120, 671 (1965), (Conf. Argonne, Oct. 1965).
- |10| W. Häfele, D. Smidt, K. Wirtz, The Karlsruhe Reference Design of a 1000 MWe Sodium-Cooled Fast Breeder Reactor, ANL 7120, 162 (1965) (Conf. Argonne, Oct. 1965).
- |11| M. Ash, Nuclear Reactor Kinetics, Mc Graw-Hill, New York, 1965.
- |12| H. Uhrig, Näherungsformeln zur Lösung der reaktorkinetischen Gleichungen im Bereich unterpromptkritisch, gültig für schnelle Reaktoren, private Mitteilung.
- |13| R. Froelich, K. Ott, G. Shaviv, S. Yiftah, Results of Doppler Coefficient Calculations, ANL 7120, 440 (1965), (Conf. Argonne, Oct. 1965).
- |14| D. Braess, Bemerkungen zur Zustandsgleichung für UO_2 . PSB-Notiz Nr. 174/66, Kernforschungszentrum Karlsruhe.

Bilderverzeichnis:

- Abb. 1 Exkursionsverlauf. Die verzögerten Neutronen sind nicht berücksichtigt.
 $\alpha_1 \cdot \lambda = 100 \text{ \$/s}$, $\phi_0 = 10^{10} \text{ n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\gamma = 1,6 \cdot 10^{-3}$
- Abb. 2 Die Exzessenergie in Abhängigkeit von der Dopplerkonstante. Die verzögerten Neutronen sind nicht berücksichtigt.
 $\alpha_1 \cdot \lambda = 100 \text{ \$/s}$, $\phi_0 = 10^{10} \text{ n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
- Abb. 3 Exkursionsverlauf, falls die verzögerten Neutronen auch berücksichtigt sind.
 $\alpha_1 \cdot \lambda = 100 \text{ \$/s}$, $\phi_0 = 10^{10} \text{ n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\gamma = 1,6 \cdot 10^{-3}$
- Abb. 4 Die Exzessenergie in Abhängigkeit von der Dopplerkonstante, mit Berücksichtigung der verzögerten Neutronen.
 $\alpha_1 \cdot \lambda = 100 \text{ \$/s}$, $\phi_0 = 10^{10} \text{ n cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
- Abb. 5 Verlauf der in der Arbeit benutzten Zustandsgleichung des UO_2 und der Polynomnäherung.

Abb. 1

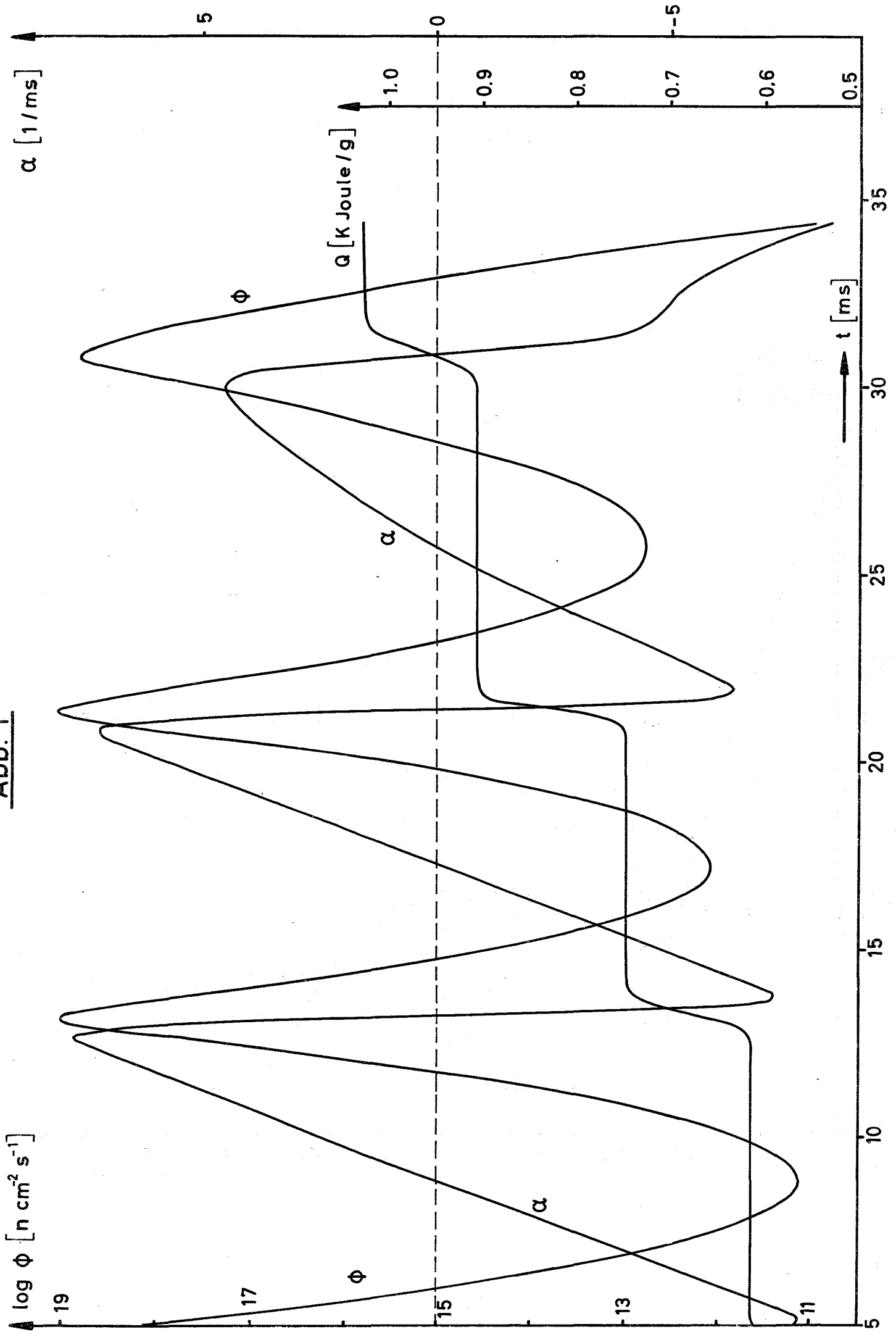


Abb. 2

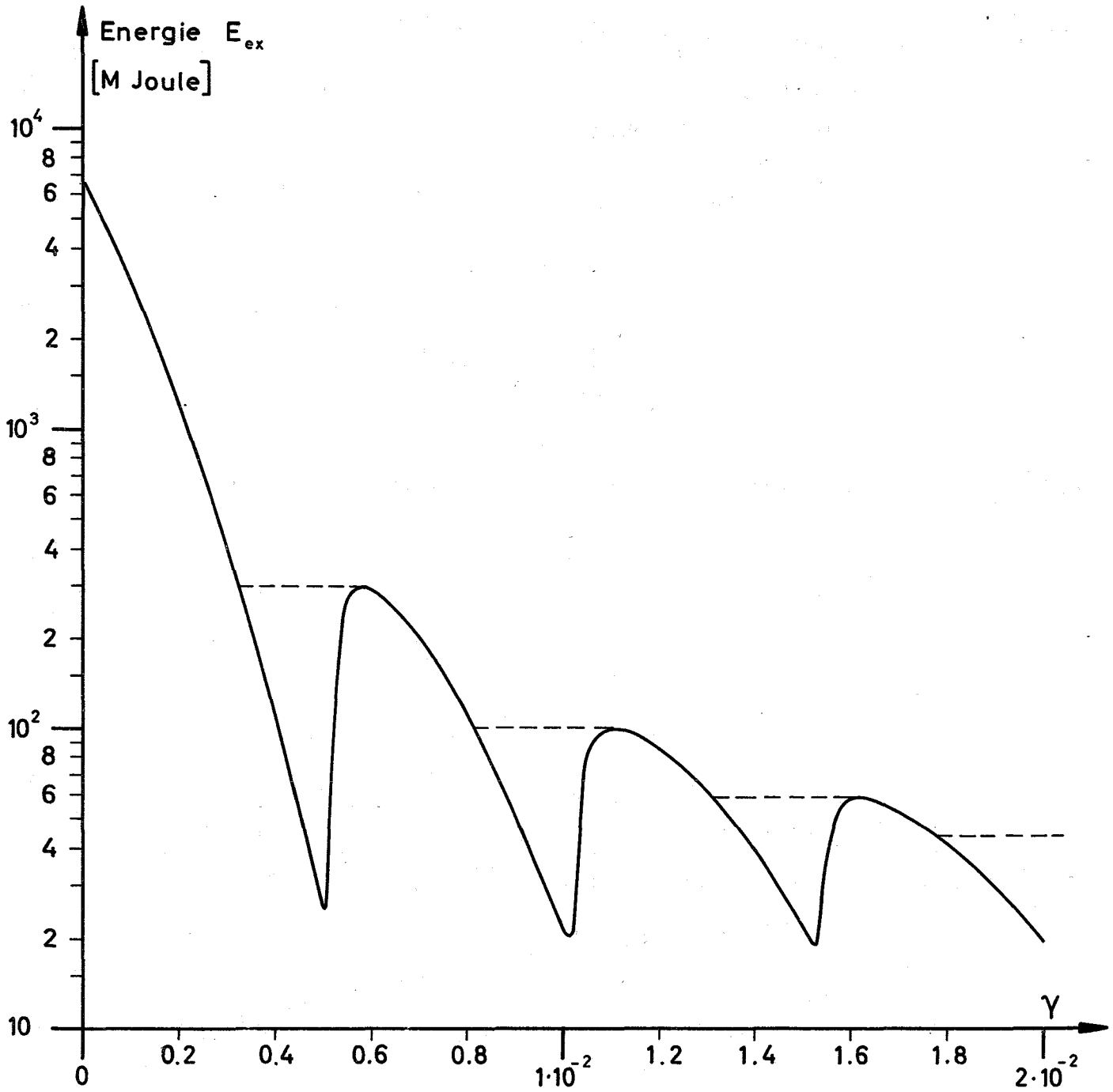


Abb. 3

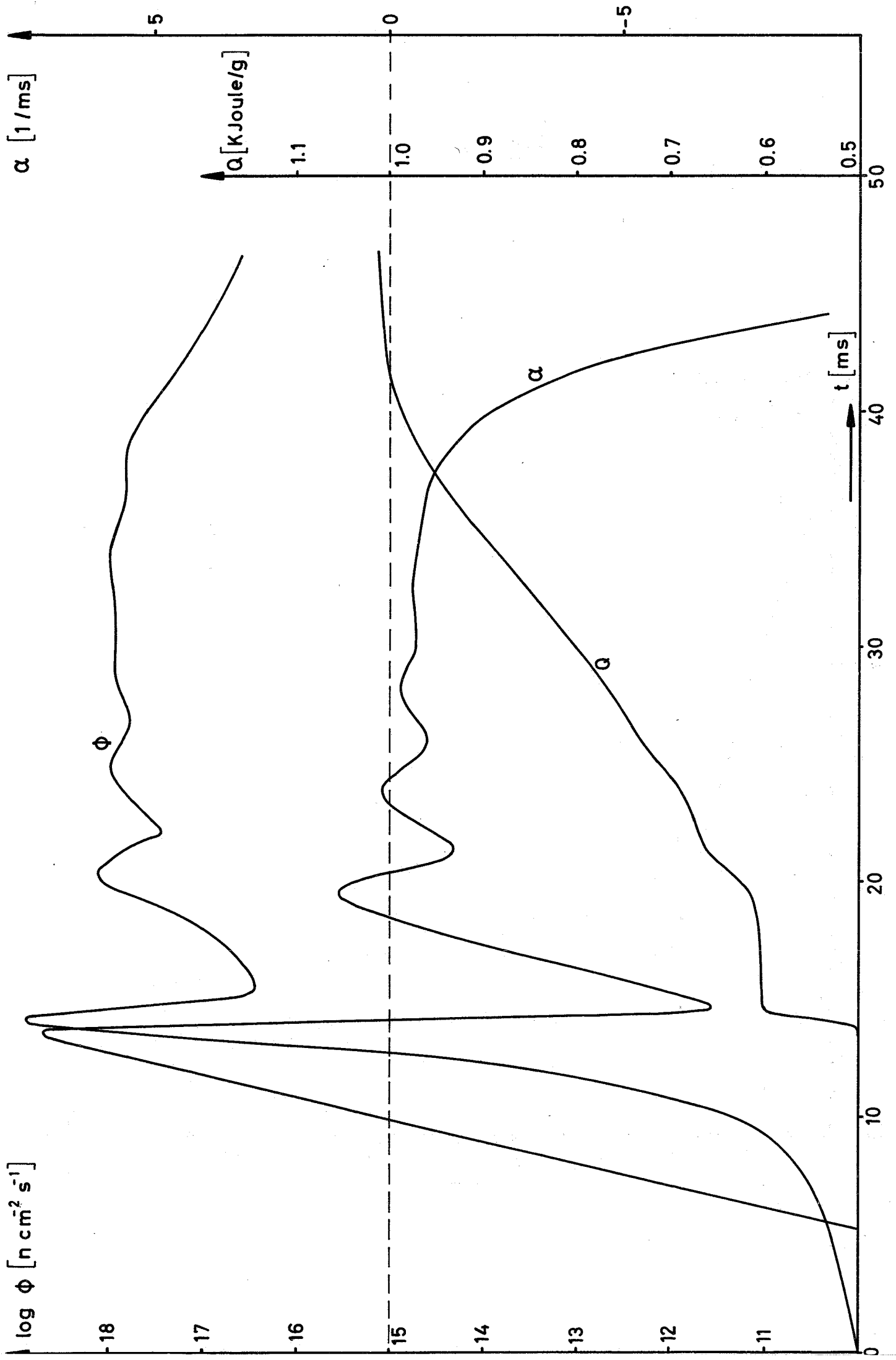


Abb. 4

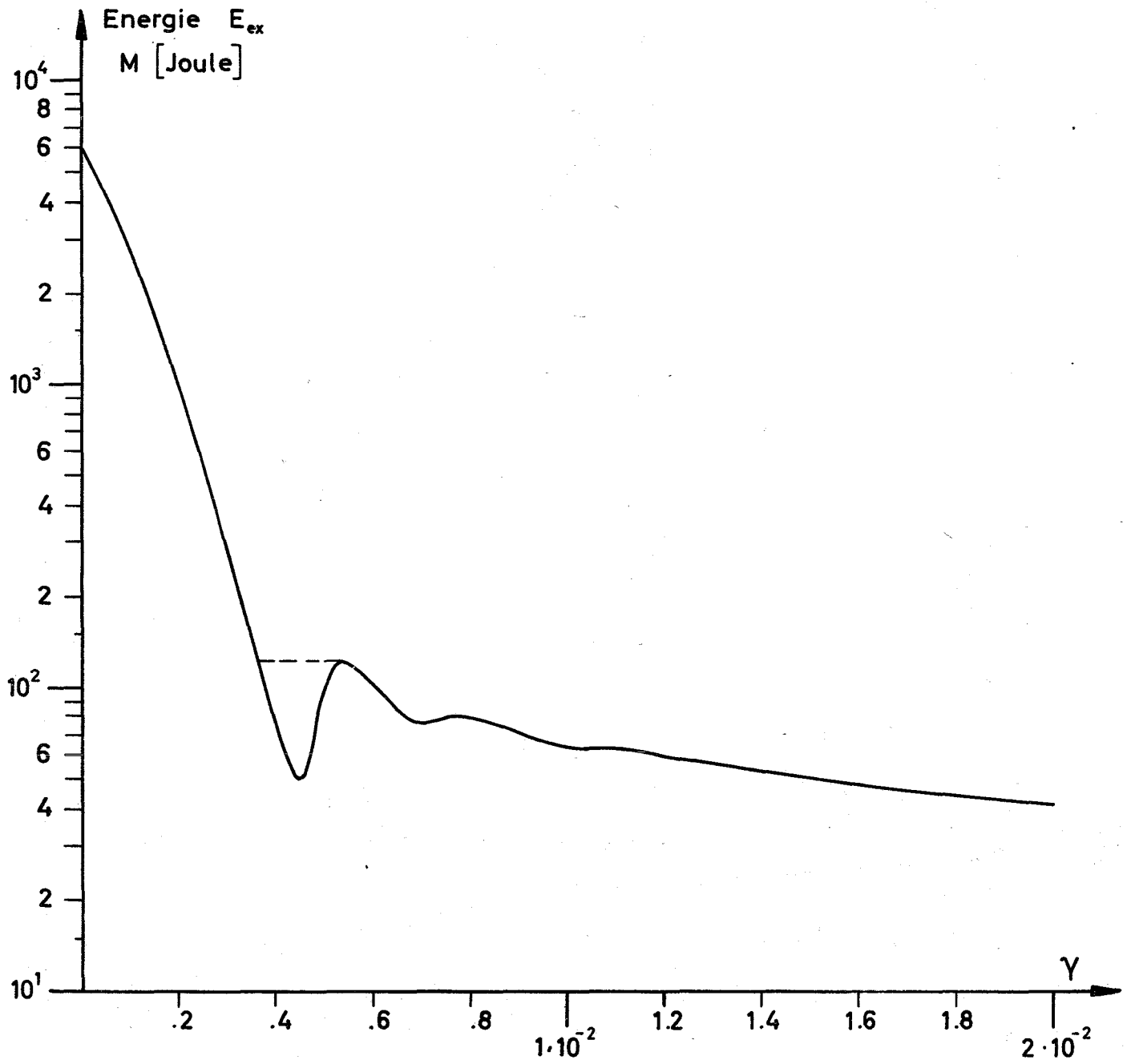


Abb. 5

