

KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

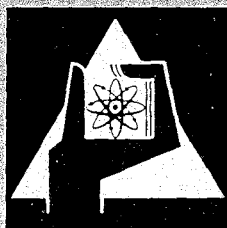
Februar 1968

KFK 735
EUR 3720 d

Institut für Reaktorbauelemente

Ein hydraulisch gedämpftes Federpaket hoher Leistungsfähigkeit
als Brems- und Abfangelement für Kernreaktor-Regelstäbe

O. Mühlhäuser



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

Berichtigung

=====

Bericht: KFK 735, EUR 3720 d / Februar 1968

'Ein hydraulisch gedämpftes Federpaket hoher Leistungsfähigkeit als Brems- und Abfangelement für Kernreaktor-Regelstäbe.'

von

O. Mühlhäuser

Der Artikel B_{1.4} auf Seite 40 bis 42 soll durch folgenden Text berichtigt werden:

B_{1.4} Formänderungsarbeit

Die bei der Durchfederung der Federscheiben gespeicherte Arbeit kann nach Weber S. 64 (197/198) ermittelt werden. Es soll die Formänderungsarbeit nur für die vorverwölbten Scheiben, die ja als Federelement in erster Linie interessant sind, beschrieben werden.

Die Formänderungsarbeit ergibt sich zu:

$$FA = \int_0^{\psi} M \cdot d\psi$$

Das Moment M besteht aus 2 Komponenten, dem Moment der Schubspannungen und dem der Normalspannungen. Also ist

$$M = M_S + M_N$$

Weiter kann man wie oben setzen

$$\psi = \frac{2h}{L} \text{ bzw. } d\psi = \frac{1}{L} d(2h)$$

Dann ist

für 1) die quadratische Federscheibe

$$FA_{\phi} = \int_0^{(2h)} \frac{M_S \phi}{L} \cdot d(2h) + \int_0^{2h} \frac{M_N \phi}{L} d(2h)$$

oder

$$FA_{\phi} = \frac{1}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} \int_0^{2h} (2h) d(2h) + \frac{1}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} \int_0^{2h} (2h_0 - 2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0 - 2h)^2 \right] d(2h)$$

Integriert und die Grenzen eingeführt ergibt sich

$$FA_{\phi} = \frac{1}{6} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h)^2 + \frac{1}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} \left[(2h_0)^2 (2h)^2 - (2h_0) (2h)^3 + \frac{(2h)^4}{4} \right]$$

(87)

Für den Höchstwert von $2h = 2h_0$ wird dann die max. Formänderungsarbeit für die flachgedrückte Platte

$$FA_{\phi_{\max}} = \frac{1}{6} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h_0)^2 + \frac{1}{180} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} (2h_0)^4 \quad (87a)$$

Für 2) die kreisrunde Federscheibe

$$FA_{\phi} = \int_0^{2h} \frac{Ms\phi}{L} d(2h) + \int_0^{2h} \frac{MN\phi}{L} d(2h)$$

oder

$$FA_{\phi} = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{DL} \int_0^{2h} (2h) d(2h) + \frac{1}{180} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{DL} \int_0^{2h} (2h_0 - 2h) [(2h_0)^2 - (2h_0 - 2h)^2] d(2h)$$

Integriert und die Grenzen eingeführt ergibt sich

$$FA_{\phi} = \frac{1}{6} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h)^2 + \frac{\sqrt{2}}{180} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D^2} \left[(2h_0)^2 (2h)^2 - (2h_0)(2h)^3 + \frac{(2h)^4}{4} \right] \quad (88)$$

Für den Höchstwert von $(2h) = 2h_0$ erhält man

$$FA_{\phi} = \frac{1}{6} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h_0)^2 + \frac{\sqrt{2}}{720} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{D} (2h_0)^4 \quad (88a)$$

Von Interesse ist noch zu wissen, wie das Verhältnis der Formänderungsarbeit aus der Schubspannung zu der aus der Normalspannung ist.

Es wird gebildet

$$\Phi_{\phi} = \frac{FA_N}{FA_S}$$

Dann ergibt sich für die

1) quadratische Federscheibe

$$\Phi_{\phi} = \frac{2(2h_0)^2(2h)^2 - (2h_0)(2h)^3 - \frac{(2h)^4}{4}}{15(m-1)d^2(2h)^2}$$

bzw. für den Höchstwert von $(2h) = (2h_0)$

$$\Phi_{\phi_{\max}} = \frac{(2h_0)^2}{30(m-1)d^2}$$

2) kreisrunde Federscheibe

$$\Phi_{\phi} = \frac{\sqrt{2} \pi^{3/2} \left[(2h_0)^2(2h)^2 - (2h_0)(2h)^3 + \frac{(2h)^4}{4} \right]}{30(m-1)d^2(2h)^2}$$

bzw. der Höchstwert

$$\Phi_{\phi_{\max}} = \frac{\sqrt{2} \pi^{3/2} (2h_0)^2}{120(m-1)d^2}$$

Ein kleiner Zahlenvergleich für Stahl $m = \frac{10}{3}$ und $(2h_0) = 2d$ zeigt, daß die Anteile der Normalspannungsarbeit gegenüber denen der Schubspannungsarbeit klein sind.

z.B.

$$\Phi_{\max} = \frac{(2d)^2}{30 \cdot 2,33 \cdot d^2} = 0,057$$

bzw.

$$\Phi_{\max} = \frac{\sqrt{2} \pi^{3/2} (2d)^2}{120 \cdot 2,33 \cdot d^2} = 0,0281$$

Von weiterem Interesse ist noch die spezifische, d.h. auf das Volumen der Federscheibe bezogene Formänderungsarbeit für die Durchfederung $(2h) = 1$.

Dann ergibt sich für

- 1) die quadratische Federscheibe

$$FA'_{\phi} = \frac{1}{6} \frac{Em}{m+1} \frac{d^2}{L^4} + \frac{1}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{1}{L^4} [(2h_0)^2 - (2h_0)] \quad (89)$$

- 2) für die kreisrunde Federscheibe

$$FA_{\phi} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^2}{D^4} + \frac{\sqrt{2}}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{\pi^{3/2}}{D^4} [(2h_0)^2 - (2h_0)] \quad (89a)$$

Man ersieht aus diesen Beziehungen, daß

- 1) der überragende Teil der Formänderungsarbeiten von den Schubspannungen geleistet wird. Der Anteil der Normalspannungsarbeit kann gegen diese im allgemeinen vernachlässigt werden.
- 2) die spezifische Formänderungsarbeit mit Verkleinerung der Durchmesser D bzw. der Kantenlänge L zunimmt, desgleichen mit der Vergrößerung der Dicke d .

Das bedeutet, daß sich mit kleineren Federscheiben leichtere Federelemente bemessen lassen.

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Februar 1968

KFK 735

EUR 3720 d

Institut für Reaktorbauelemente

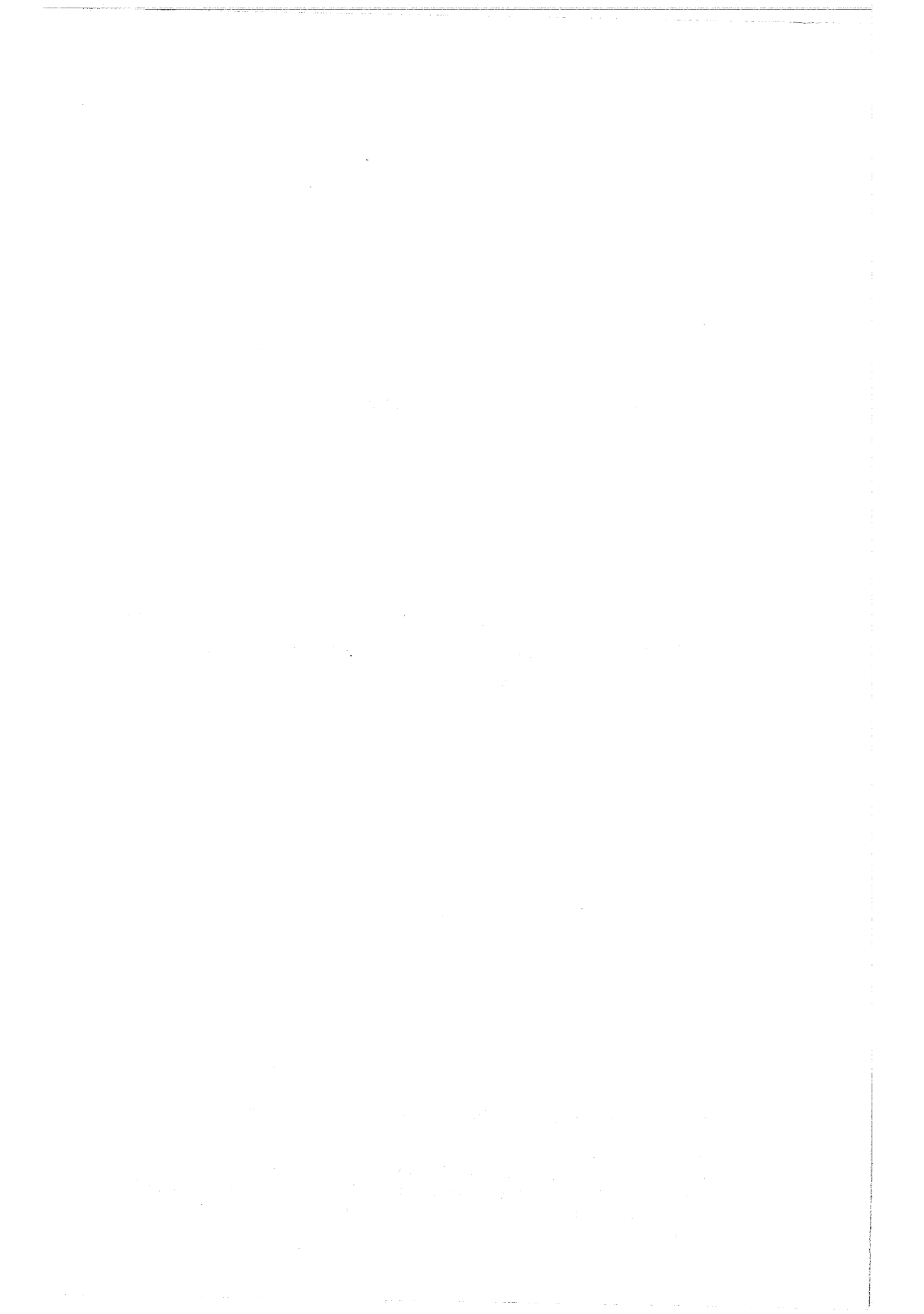
Ein hydraulisch gedämpftes Federpaket hoher Leistungs-
fähigkeit als Brems- und Abfangelement für Kernreaktor-
Regelstäbe.

von

O. Mühlhäuser

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG MBH., Karlsruhe

+) Diese Arbeit wurde im Rahmen der Assoziation zwischen der Europäischen Atomgemeinschaft und der Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe, auf dem Gebiet der schnellen Reaktoren durchgeführt.



Disposition

A. Allgemeines

- A₁ Problemstellung
- A₂ Konstruktive Lösung
 - A_{2.1} Aufbau
 - A_{2.2} Wirkungsweise

B. Theoretische Betrachtungen

- B₁ Mechanische Eigenschaften
 - B_{1.1} Allgemeines
 - B_{1.2} Rechnung I nach der Plattentheorie
 - B_{1.3} Rechnung II nach der Drehungsfestigkeit
 - B_{1.3.1} Allgemeines
 - B_{1.3.2} Die quadratische Platte
 - B_{1.3.3} Die kreisrunde Platte
 - B_{1.3.4} Die verwölbte Platte
 - B_{1.4} Formänderung
 - B_{1.5.1} Modelle und Versuche
 - B_{1.5.2} Belastungsversuche
 - B_{1.5.3} Meßergebnisse
- B₂ Dämpfungseigenschaften
 - B_{2.1} Plattendämpfung
 - B_{2.2} Kolbendämpfung
 - B_{2.3} Massendämpfung
- B₃ Dynamisches Verhalten

C. Zusammenfassung

Paraboloid-Feder - H-P-Feder

A₁ Problemstellung

Im Core eines Kernreaktors werden an 2 Stellen gedämpfte Federelemente benötigt.

1. Im Abschaltstab zum Abbremsen des im Scram-Falle eingeschossenen Stabes.
2. Unterhalb der Brennstoffbündel zum Abfangen etwa abgerissener Bündel, so daß bei deren freiem Fall es weder zu einer Zerstörung von Teilen des Cores noch zu einer solchen des Bündels kommen kann.

Zweckmäßigerweise geschieht ein solches Abbremsen bzw. Abfangen durch eine gedämpfte Elastizität. Derartige Abfangelemente bestehen daher aus einer Feder, die mit einer Dämpfung gekoppelt ist. Reibungsdämpfungen scheiden wegen des damit verbundenen Reibverschleißes und auch wegen der bei höheren Temperaturen evtl. bestehenden Fressneigung der Reibteile grundsätzlich aus. Eine hydraulische Dämpfung dagegen kann mit Vorteil eingesetzt werden. Bei flüssigkeitsgekühlten bzw. moderierten Reaktoren ist es vorteilhaft, als Dämpfungsmedium die Kühl- bzw. Moderatorflüssigkeit zu benutzen. Bei dampfgekühlten Reaktoren ist diese Flüssigkeit Wasser, bei höherer Temperatur also eine solche relativ geringer Zähigkeit.

Bei den üblichen konventionellen Bauformen von Flüssigkeitsdämpfern ist es nur bei einigem konstruktivem Aufwand möglich, mit Wasser ausreichende Dämpfungskräfte zu bekommen.

Es wurde deshalb eine von den bisherigen völlig abweichende Form einer Feder mit Dämpfung entwickelt und in einem Plexiglasmodell erprobt.

A₂ Konstruktive Lösung

A_{2.1} Aufbau

Das gedämpfte Federelement besteht aus räumlich verwölbten, vorzugsweise kreisrunden Federscheiben, die in grösserer Zahl, ähnlich Tellerfedern übereinander geschichtet werden und in einem flüssigkeitsdichten Gefäß eingebaut sind. Die gegenseitige Lage der Scheiben ist durch ineinander passende Vorsprünge und Vertiefungen die an den gegenseitigen Berührungsstellen angebracht sind oder durch eine geeignete Führung der Scheiben in der Gehäusewand festgelegt.

Die Art der Verwölbung zeigt Abb. 1 für eine quadratische Scheibe, Abb.2 für eine kreisrunde Scheibe. Der konstruktive Aufbau des Federelementes, die theoretischen Grundlagen für die Feder und für die Dämpfung werden entwickelt und vorläufige Meßergebnisse angegeben.

Die verwölbte Fläche ist ein regelmäßiges hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche, abgekürzt H-P-Fläche) und als solche eine nicht abwickelbare Regelfläche. Unter Regelflächen werden hierbei solche verstanden, die durch die räumliche Verschiebung einer Geraden als Erzeugende entstehen. Entsprechend der Koordinatenbezeichnung von Abb.7 und 8 kann diese Fläche durch den Ausdruck

$$x^2 - y^2 = a^2 z$$

beschrieben werden.[1], [2]

Bei dieser Fläche sind Schnitte mit der x-z bzw. der y-z-Ebene kongruente Parabeln. Die Schnitte der x-y-Ebene sind 2 senkrecht zueinander stehende Geraden, in Abb.7 und 8 mit u und v bezeichnet. Die zu dieser Ebene parallelen Schnitte sind Hyperbeln mit den u-y-Geraden als Asymptoten. Bei Verschiebungen des Achsenkreuzes parallel zu sich selber auf der u-v-Fläche bleibt dieses unverändert. Sämtliche Geraden einer Schar auf der Fläche sind, wie auch aus Abb. 1 und 2 zu erkennen ist, zueinander windschief.

Das hyperbolische Paraboloid kann daher durch die Parallelverschiebung einer Geraden auf zwei sich in parallelen Ebenen kreuzenden Geraden erzeugt werden. Auf elegante Art und Weise entsteht eine solche Fläche, wenn eine Seifenhaut in einem windschief verwundenen quadratischen Rahmen (z.B. aus Draht) gespannt wird.

Die Belastung der nach einer Sattelfläche verwölbten Scheibe erfolgt entsprechend Abb. 1 und 2 durch die Kräfte P_1 und P_2 , die beide gleich groß sind und die Reaktionskräfte P_1 bzw. P_2' .

Beim Übereinanderschichten werden die Federscheiben so wie Abb.3 für eine 8-eckige berandete Scheibe zeigt, angeordnet und fixiert, daß sie sich gegenseitig nur an den hochgewölbten Randteilen berühren. Ein solches übereinandergeschichtetes Paket von sechs Federscheiben, das in vier Leisten geführt ist, zeigt Foto von Abb.5. Den Einbau in ein mit Dämpfungsflüssigkeit gefülltes Gefäß zeigt in Schnitt und Grundriss Abb.4. Desgleichen zeigt das Foto von Abb.6 ein in ein Gefäß eingebautes Federpaket mit gefärbtem Wasser als Dämpfungsflüssigkeit. Die Krafteinleitung geschieht in Pfeilrichtung über eine Kolbenstange mit einer Druckplatte, die sich auf das Federpaket auflegt.

In ähnlicher Weise, wie das von Tellerfedern her bekannt ist, kann ein Federpaket auch aus mehrfach, unmittelbar aufeinanderliegenden Federscheiben aufgeschichtet werden. Entsprechend der Zahl der übereinander liegenden Scheiben erhöht sich die Steife der Federelemente bzw. die des ganzen Paketes.

Es ist ferner möglich, im gleichen Federpaket Scheiben unterschiedlicher Dicke und Wölbung zusammenzubauen und dadurch die Kennlinie eines Paketes weitgehend zu variieren.

A_{2.2} Wirkungsweise

Wird eine nach Abb. 1 oder 2 verwölbte Federscheibe dem Einfluß von Kräften (entsprechend den dort eingezeichneten Pfeilen) unterworfen, so versuchen diese die Verwölbung der Scheibe zu verkleinern. Dieser Verschiebung widersetzt sich eine Reaktionskraft, die Federkraft.

Sind mehrere Scheiben übereinander entsprechend Abb. 3 und 5 angeordnet, so besteht zwischen ihnen ein scheibenförmiger Hohlraum, der mit Dämpfungsmedium angefüllt ist. Beim Zusammenpressen des Federpaketes wird das in diesem Hohlraum befindliche Dämpfungsmedium herausgepreßt. Die Reibung des Mediums an den Oberflächen der Federscheiben, und die innere Flüssigkeitsreibung bewirken dabei einen Arbeitsverzehr der einer Dämpfungskraft entspricht. Durch die relativ große Oberfläche und die geringe Dicke der Hohlräume läßt sich leicht eine gute Dämpfung erzielen. Die Dämpfungskraft ist hierbei, gleiche Verschiebegeschwindigkeit vorausgesetzt, der dritten Potenz der Zwischenraumdicke umgekehrt proportional; d.h. die Dämpfungskraft ist progressiv zunehmend.

Wird weiterhin das Federpaket noch so in das Dämpfungsgefäß eingebaut, daß zwischen dem Rand der Scheiben und der Gefäßwand ein relativ kleiner Spalt bleibt, so ist beim Zusammendrücken des Paketes, die aus den Räumen zwischen den Scheiben austretende Flüssigkeit gezwungen, diesen engen Spalt zu passieren, was einem weiteren Arbeitsverzehr, d.h. einer Dämpfung entspricht.

Die für die Kennlinie der Federkraft und der Dämpfung eines Federelementes maßgebenden Parameter sind:

- 1.) Durchmesser D bzw. Form der Federscheibe
- 2.) Dicke d der Federscheibe
- 3.) Verwölbung h der Federscheibe
- 4.) Spalt S_2 zwischen Gefäßwand und Federscheibenrand
- 5.) Zahl n der Federscheiben
- 6.) Schichtung der Federscheiben.

Durch entsprechende Wahl der verschiedenen Parameter kann die Kennlinie eines Federpaketes für Federkraft und Dämpfung auf einfache Art und Weise ohne besonderen Aufwand an Herstellungsgenauigkeit beliebig eingestellt werden.

B Theoretische Betrachtungen

B₁ Mechanische Eigenschaften

B_{1.1} Allgemeines

Unter den mechanischen Eigenschaften einer Federscheibe sind zu verstehen:

Federungseigenschaften
Festigkeit und Spannungen

Federungseigenschaften und Festigkeitsverhalten sind eng miteinander gekoppelt. Die Berechnung der H-P-Feder hat daher unter gleichzeitiger Berücksichtigung beider Einflußgrößen zu erfolgen.

Wie üblich werden zunächst die bei der Anstrengung einer Feder entstehenden Spannungen und die Spannungsverteilung ermittelt. Daraus ergeben sich die Federungseigenschaften, also das Last-Dehnungsverhalten und die hierbei gespeicherte Formänderungsarbeit.

In der vorliegenden Arbeit werden quadratische und runde Federscheiben untersucht. Davon abweichende Scheibenformen und das Verhalten eines Federpaketes bei zeitlich veränderlicher Last sollen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Die theoretische Untersuchung wird durchgeführt für Scheiben, die im Ausgangszustand eben sind und durch die Belastung verwölbt werden. Dann für Scheiben, die im Ausgangszustand nach der Form der Sattelfläche verwölbt sind und bei Belastung zur Ebene hin verformt werden. Die Rechnung für die ebene Platte wurde durchgeführt, weil sich hier gut der Anschluß an bekannte Rechnungen der Plattentheorie schaffen ließ.

Bei den Rechnungen wurde zunächst von der reinen Plattentheorie ausgegangen. Es zeigte sich jedoch, daß diese Behandlungsart für den vorliegenden Fall nicht ausreichend war bzw. in mathematisch schwierig zu behandelnde Bereiche geführt hätte.

Deshalb wurde eine zweite Rechnungsart erprobt und mit Messungen verglichen, die den eingeschlagenen Weg als erfolgreich bestätigten.

Diese Methode ging aus von der Drehungsfestigkeit und erlaubte auch Bereiche größerer Verformungen zu erfassen.

B_{1.2} Rechnung I nach der Plattentheorie

Gerechnet wurde die kreisrunde und die quadratische, ebene Platte mit punktförmiger Belastung mit den Koordinaten entsprechend Abb. 7 und 8. ⁺⁾

Ermittelt wurden die Spannungen, der Spannungsverlauf und die Durchbiegungen.

Die Platte habe die Abmessungen

Durchmesser D

bzw. Kantelänge L

Durchsenkung an beliebigem Ort u_0

Die allgemeine Differentialgleichung für die Durchsenkung u_0 zur Plattenmittelebene lautet [3] S. 487

$$\Delta \Delta u_0 = A p \quad (1)$$

Beschränkt man sich zunächst auf die Kreisplatte, geht zu Polarkoordinaten über und setzt, wie es dem vorliegenden Fall entspricht, die Belastung $p = 0$, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_0 = 0 \quad (2)$$

Mit den Randbedingungen

$$u_0(R) = B(R) \cos 2 \varphi \quad (3)$$

⁺⁾ Diese Rechnung wurden von Herrn Dipl.-Ing. Baumann, IRB, durchgeführt.

wie sie aus der Symmetrie des vorliegenden Belastungsfalles resultieren, ergibt den Lösungsansatz

$$u_0(r) = B(r) \cos 2\varphi \quad (4)$$

und damit die Lösungen

$$(u_0)_1 = F_1 r^2 \cos 2\varphi \quad (5)$$

$$(u_0)_2 = F_2 r^4 \cos 2\varphi \quad (6)$$

Es ist einfach, nachzuweisen, daß die beiden Lösungen räumlich gekrümmte Flächen beschreiben, deren Erzeugende im 1. Falle eine Gerade, im 2. Falle eine kubische Parabel ist. ⁺)

Da aus fertigungstechnischen Gründen nur die Gerade als Erzeugende möglich ist, interessiert nur die 1. Lösung. Gl. (5).

⁺) Transformiert man die Lösungen Gl. (5) und (6) in kartesische Koordinaten, so erhält man

$$(u_0)_1 = F_1 (x^2 - y^2) \quad (5a)$$

$$(u_0)_2 = F_2 (x^4 - y^4) \quad (6a)$$

Setzt man $y = \pm (c^* \pm x)$ so folgt

$$z_1(x) = -c^*(c^* \pm 2x) \quad (\text{Gerade})$$

$$z_2(x) = -c^*(c^{*3} \pm 4c^{*2}x + 6c^*x^2 \pm 4x^3) \quad (\text{kubische Parabel})$$

Mit der Funktion der Plattendurchsenkung sind über die Gleichungen [1] S. 490

$$\sigma_r = \frac{m E z}{m^2 - 1} \left[m \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi_0} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (7)$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{m E z}{m^2 - 1} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{m}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi_0^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (8)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{m E z}{m+1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right] \quad (9)$$

die auftretenden Spannungen festgelegt.

Es ist

$$\sigma_r = -2 \frac{m E z}{m+1} F_1 \cos 2\varphi \quad (7a)$$

$$\sigma_\varphi = -2 \frac{m E z}{m+1} F_1 \cos 2\varphi \quad (8a)$$

$$\tau_{r\varphi} = 2 \frac{m E z}{m+1} F_1 \sin 2\varphi \quad (9a)$$

Untersucht man den Verlauf der Spannungen näher, so kann man feststellen, daß

- 1) alle Spannungen vom Plattenradius unabhängig, d.h. über einem Plattendurchmesser konstant sind;
- 2) alle Spannungen periodische Funktionen von φ sind. Insbesondere gilt:

$$a) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = 0 \quad \text{für } 2\varphi = (2K-1)\pi/2$$

$$b) \quad \sigma_{r \max} = \sigma_{\varphi \max} \quad \text{für } 2\varphi = K\pi$$

$$c) \quad \tau_{r\varphi} = 0 \quad \text{für } 2\varphi = (K-1)\pi$$

$$d) \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi \max} \quad \text{für } 2\varphi = K\pi/2$$

$$e) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} \quad \begin{array}{l} 2\varphi = K\pi/4 \\ \text{für } K = 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

Zur Veranschaulichung des Verlaufs diene die Abb.9. Sie zeigt oben eine Draufsicht auf eine kreisrunde Platte mit den Arten der verschiedenen Spannungen.

Darunter eine Abwicklung der Seitenansicht über den ganzen Plattenumfang von $0 - 2\pi$.

Die Hauptspannungen für den räumlichen Spannungszustand sind gleich groß und ergeben sich nach der Formel [4], S. 833.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2}\right)^2 + \tau_{r\varphi}^2} \quad (10)$$

zu

$$\sigma_{1,2} = \pm 2 \frac{mEz}{m+1} \cdot F_1 \quad (11)$$

mit Gl. (5) ergibt sich

$$\sigma_{1,2} = \pm 2 \frac{mEz}{m+1} \frac{1}{R^2} u_{0max} \quad (12)$$

Man sieht, die Hauptspannungen sind vom Radius unabhängig. Die max. Vergleichsspannung tritt an der Ober- und Unterseite der Platte auf und beträgt

$$\sigma_{max} = \pm \frac{mE}{m+1} \frac{d}{R^2} u_{0max} \quad (13)$$

Die bei der Belastung in der Platte gespeicherte Formänderungsarbeit folgt aus der Gleichung für den ebenen Spannungszustand.

$$FA = \frac{1}{2E} \int_V (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m} \sigma_1 \sigma_2) dV \quad (14)$$

Durch Integration über das Plattenvolumen erhält man

$$FA = \frac{\pi}{12} E d^3 F_1^3 \frac{m}{m+1} 4 \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (15)$$

bzw.

$$FA = \frac{4}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} u_{0max}^2 \quad (15a)$$

Aufgrund der Linearität zwischen $\sigma \sim u_0$ Gl. (12) kann man die am Plattenrand angreifende Gesamtkraft setzen

$$p^* = c \cdot u_0 \quad (16)$$

und gelangt so zur Bilanz der Formänderungsarbeit

$$FA = \int_0^{2u_{0max}} p^* du_0 = 2c u_{0max}^2 \quad (17)$$

da

$$P = c \cdot 2 \cdot u_{0 \max} \quad (18)$$

ergibt sich für die Gesamtkraft P

$$P = \frac{FA}{u_{0 \max}} \quad (19)$$

und mit Gl. (12c)

$$P = \frac{4}{3} \pi \frac{mE}{m+1} \frac{d^3}{D^3} u_{0 \max} \quad (20)$$

Damit ist die Beziehung zwischen Kraft und Durchbiegung bzw. die Federkonstante gefunden.

Für die kreisrunde Platte gelten dann die folgenden Formeln

1)	$\sigma_{\max} = 4 \frac{Em}{m+1} \frac{d}{D^2} u_{0 \max}$	(13)
----	---	------

2)	$P = \frac{4}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} u_{0 \max}$	(20)
----	---	------

3)	$c = \frac{2}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2}$	(21)
----	--	------

Für die quadratische Platte sind die analogen Formeln

1)	$\sigma_{\max} = 2 \frac{Em}{m+1} \frac{d}{L^2} u_{0 \max}$	(22)
----	---	------

2)	$P = \frac{4}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} u_{0 \max}$	(23)
----	---	------

3)	$c = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2}$	(24)
----	--	------

Messungen der Federkonstante, über die unten eingehend berichtet wird, haben sowohl für die kreisrunde, wie auch für die quadratische Platte das Ergebnis der Rechnung voll bestätigt.

Die gebrachte Rechnung gibt zwar für die ebene Platte ein richtiges Ergebnis, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die Durchbiegungen sehr klein gegen die Dicke der Platte bleiben. Für die H-P-Feder als elastisches Element gilt diese Einschränkung jedoch nicht mehr, da die Federwege im Bereich der Plattendicke liegen oder diese sogar übertreffen. Zur Ermittlung der Federungseigenschaften und der inneren Spannungen bei großen Durchbiegungen müßte deshalb das Rechenverfahren entsprechend erweitert werden. Eine solche Erweiterung führt auf nicht-lineare Differentialgleichungen, die nur mit erheblichem mathematischem Aufwand lösbar sind.

Es wurde deshalb vom Verfasser nach einem anderen Verfahren gesucht, um H-P-Federelemente einfacher berechnen zu können.

B_{1.3} Rechnung II nach der Drehungsfestigkeit

B_{1.3.1} Allgemeines

Betrachtet man eine sattelförmig durchgebogene Feder-
scheibe (Foto Abb.10), so erkennt man unschwer, daß diese
eine durch ein Momentenpaar verdrillte Platte ist. Es
sollte also möglich sein, die Rechnung nach den Grundsätzen
der Verdrehungsfestigkeit durchzuführen.

Diese Rechnungen stützen sich weitgehend auf die Arbeit
von Constantin Weber 'Die Lehre von der Verdrehungsfestig-
keit'. [6]

Die Rechnungen wurden zunächst durchgeführt für

1. die quadratische Platte,
2. die kreisrunde Platte,

und zwar wird zunächst für beide Formen die im Ausgangs-
zustand ebene Platte behandelt. Daran anschließend wird
die im Ausgangszustand bereits verwölbte Platte, die
durch die aufgebrachte Belastung zur ebenen Platte hin
verformt wird, betrachtet.

Es liegen daher folgende Fälle zur Rechnung vor:

- 1a) quadratische ebene Platte
- 2a) kreisrunde ebene Platte
- 1b) quadratische vorverwölbte Platte
- 2b) kreisrunde vorverwölbte Platte

Für sämtliche 4 Fälle gilt folgendes:

Bei kleinen Verdrillungswinkeln entstehen in der Platte
reine Schubspannungen, die über die gesamte Oberfläche
mit Ausnahme der Nähe der Ecken des Querschnittes gleich-
mäßig verteilt sind. Die Verteilung über den Querschnitt
folgt einer geraden Linie von τ_{\max} an der Oberfläche bis
zu $\tau_{\min} = 0$ in der Mittelachse. Hierzu Weber S. 25, S. 51.

Bei größeren Verdrillungen entstehen neben den Schubspannungen noch Normalspannungen parallel zur Drehachse (Weber S. 60). Diese Normalspannungen haben bei der im Ausgangszustand ebenen Platte in den randnahen Fasern positive Werte - Zugspannungen - , in Drehachsennähe negative Werte - Druckspannungen - . Bei im Ausgangszustand verwölbten Platten (vorverwölbten Platten) sind die Vorzeichen der Spannungen umgekehrt, d.h. in Randnähe liegen Druckspannungen, in Drehachsennähe Zugspannungen vor.

Da eine Überlagerung der Normal- und Schubspannungen erlaubt ist, kann die Rechnung in zwei Abschnitten durchgeführt werden. Es werden zunächst die Schubspannungen und die aus diesen abgeleiteten Momente ermittelt. Das Ergebnis gilt unter diesen Umständen für beliebig große Drillwinkel.

Als nächstes werden die Normalspannungen, ihr Verlauf und die entsprechenden Momente als Funktion der Drillwinkel ermittelt. Durch Überlagerung der Moment- und Schubspannungen im zweiachsigen Spannungsfeld können dann die Orte maximaler Spannungen sowie deren Höhe gefunden werden. Die Momente lassen sich einfach addieren und ergeben das Kraft-Dehnungsverhalten der Federscheibe.

Für die Formänderungsarbeit gilt das gleiche.

Durch die Gesamtkraft P wird die Platte um die Auslenkung ($2h$) durchgebogen.

Die Belastung P spaltet sich hierbei auf in je zwei Einzelkräfte $+P/2$, die an gegenüberliegenden Eckpunkten der Platte angreifen und die zwei gleich große entgegengerichtete Reaktionskräfte $-P/2$ an den beiden anderen Endpunkten der Platte hervorrufen.

Aus diesen Kräften entsteht an der Platte ein Momentenpaar

$$M = \frac{P}{2} L \quad (25)$$

wo L die Kantenlänge des Quadrates ist.

Dieses Moment verdrillt die Platte um den Winkel 2ψ , (Abb. 6), wobei benachbarte Plattenspitzen eine Verschiebung der Größe $(2h)$ gegeneinander erfahren.

Es gilt dann die Beziehung

$$(2h) = L \sin \psi$$

oder

$$(2h) = L \psi \quad (26)$$

Führt man den Begriff der Verdrillung ein, d.h. den Verdrehungswinkel für die Plattenbreite $b = 1$ und bezeichnet diesen mit ϑ , so ist

$$\vartheta = \frac{2\psi}{L} \quad (27)$$

Bei einer Platte liegt im Sinne der Verdrehungsfestigkeit gesprochen ein streifenförmiger Querschnitt vor.

Ist das Verhältnis n , Streifenlänge L zur Streifenbreite d größer als 10, also

$$n = \frac{L}{d} > 10 \quad (28)$$

wie dies bei den der Betrachtung zugrunde gelegten Federscheiben durchweg der Fall ist, so kann nach Weber eingesetzt werden für

B_{1.3.2} die quadratische Platte.

Die max. Schubspannung nach S. 26 (79) bzw. S. 51 (152)

$$\tau_{\max} = G \cdot d \vartheta \quad (29)$$

schreibt man für G den bekannten Wert

$$G = \frac{E m}{2(m+1)} \quad (30)$$

und aus (26), wenn man den sin gleich dem Bogen setzt,

$$\psi = \frac{(2h)}{L} \quad (31)$$

so erhält man:

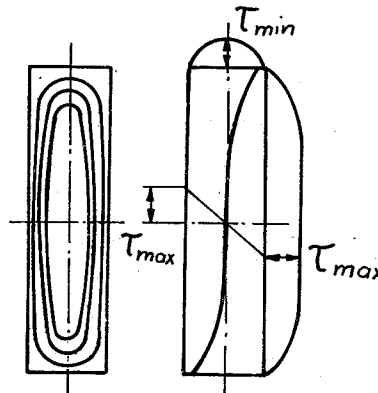
$$\tau_{max} = Gd \frac{2\psi}{L} \quad (32)$$

bzw.

$$\tau_{max} = \frac{Em}{m+1} \frac{d}{L^2} (2h) \quad (33)$$

Diese Beziehung ist mit der aus der Plattentheorie gefundenen identisch, wie man leicht sieht (Gl. (22)).

Der Verlauf der Schubspannungen und die Verteilung über den Querschnitt zeigt die nebenstehende Skizze.



Man erkennt, daß die Spannungslinien über den größten Teil der Längsseiten parallel laufen; an den Schmalseiten nimmt die Spannung ab und zwar auf einen Wert, Weber S. 26 (81)

$$\tau_{min} = 0,742 \tau_{max} \quad (34)$$

Der Spannungsverlauf ist über den Querschnitt gradlinig; die Spannung hat an der Oberfläche den höchsten Wert, in der Symmetrieachse den Wert 0.

Das aus dieser Spannung sich ergebende Moment der Verdrehung ergibt sich nach Weber S.51 (155/150) zu

$$M = \frac{1}{3} d^3 L_t G \vartheta \quad (35)$$

worin

$$L_t = L - 0,63 d \quad (36)$$

ist, oder

$$M = \frac{1}{3} (L - 0,63 d) d^3 G \vartheta$$

eliminiert man hier L aus (4), so ergibt sich

$$M = \frac{1}{3} (n d^4 - 0,63 d^4) G \vartheta$$

Wird, wie oben angegeben, n 10 limitiert, so lautet die vereinfachte Gleichung

$$M = \frac{1}{3} n d^4 G \vartheta \quad (37)$$

wobei der Fehler immer kleiner wird, je größer n, d.h. das Streifenverhältnis der Platte wird.

Unter Berücksichtigung der Gl. (26, 27, 28, 30) und mit der Annahme, daß für kleine Winkel der sin gleich dem Bogen ist, kann Gl. (37) umgeformt werden in

$$M = \frac{1}{3} \frac{E m}{s \phi} \frac{d^3}{m+1} L (2h) \quad (38)$$

Dieses Moment ist dem aus den äußeren Kräften herrührenden gleich. Die erzeugenden Kräfte werden mit dem Index s versehen.

Es ist also

$$M_{S\phi} = \frac{P_s L}{2} = \frac{2}{6} \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{L} (2h) \quad (38a)$$

oder

$$P_{S\phi} = \frac{2}{3} \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h) \quad (39)$$

Beachtet man, daß in der Rechnung I $u_0 = h$ ist, so besteht zwischen der nach der Plattentheorie ermittelten Formel (23) und der vorliegenden (39) völlige Identität.

Die Normalspannungen bzw. die aus diesen herrührenden Momente ergeben sich dann wie folgt:

Bei der Verdrillung der Platte um eine Symmetrieachse um mit der Plattendicke vergleichbaren Beträge werden die zur Drehachse parallelen Fasern mit zunehmendem Abstand von dieser immer größere Winkel zur Ausgangsebene einschließen. (Hierzu die Ausführungen von Weber, S.60). Dementsprechend werden die verschiedenen Fasern verschieden gedehnt. Grundsätzlich entstehen durch die von der Drehung herrührenden Dehnungen in den einzelnen Fasern Zugspannungen. Da jedoch über dem gesamten Querschnitt Kräftegleichgewicht bestehen muß, ergibt sich, daß im drehachsenentfernten Bereich des Querschnittes Druckkräfte entstehen müssen.

Bei den vorliegenden Platten liegen zwei zueinander senkrecht stehende Drehachsen vor. Für jede dieser gilt, unabhängig voneinander, das oben Gesagte. Die entstehenden Spannungen rufen jedoch infolge der Querkontraktion in der zu ihr senkrechten Richtung weitere Zusatzspannungen hervor, die bei großen Verdrillwinkeln mit zu beachten sind.

Die Normalspannungen infolge starker Verdrillung lassen sich in Anlehnung an die Gedanken von Weber (S. 61) wie folgt ermitteln: (Dabei wird in Abweichung von Weber beachtet, daß in der Platte durch die Dehnungen ein ebener 2-achsiger Spannungszustand entsteht.)

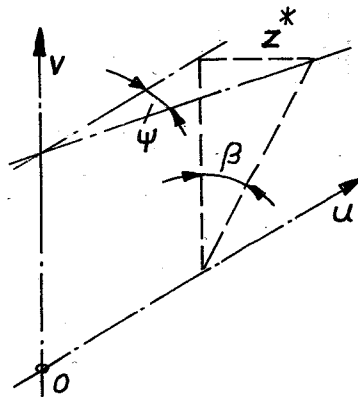
Die Koordinaten der Platte für die Verdrillung werden entsprechend der Beziehung für die Sattelfläche mit u und v bezeichnet.

Die Abweichung eines diskreten Punktes mit den Koordinaten u und v von der Ausgangsebene sei z . Dann ist der Neigungswinkel der Verbindungsgeraden dieses Punktes mit z.B. der v -Achse wie folgt gegeben

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{z^*}{u}$$

weiter ist

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z^*}{v}$$



daraus

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u}{v} \operatorname{tg} \psi$$

Da hier der Bogen = tg gesetzt werden kann, ergibt sich

$$\beta = \frac{u}{v} \psi$$

worin ferner

$$\psi = \mathcal{V} \cdot v$$

so daß sich

$$\beta = u \mathcal{V}$$

(40)

ergibt, worin \mathcal{V} die Verdrillung für die Breite 1 ist.

Für die spannungslose Faser wird ihre Projektion auf die Ausgangsebene

$$\cos \beta$$

Es ist dann

$$\cos \beta = \cos \vartheta \cdot u$$

Ihre scheinbare Verkürzung (Dehnung) ist Δl , sie beträgt

$$\Delta L = 1 - \cos \vartheta u$$

oder etwas umgeformt

$$\Delta L_v = \frac{1}{2} \vartheta^2 u^2 \quad (41)$$

Für die u-Achse als Drillachse ergibt sich analog

$$\Delta L_u = \frac{1}{2} \vartheta^2 v^2 \quad (42)$$

Beide Dehnungen sind von außen aufgeprägte Größen. Sie bestimmen die in der Platte entstehenden Spannungen.

Für den ebenen, zweiachsigen Spannungszustand, wie er hier vorliegt, gilt nach Föppl, Drang und Zwang III. 1947, S.9[6]

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E} \left[\sigma_u - \frac{1}{m} \sigma_v \right] \quad (43)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{E} \left[\sigma_v - \frac{1}{m} \sigma_u \right] \quad (44)$$

Daraus können die Spannungen σ_u bzw. σ_v ermittelt werden. Wegen der völligen Symmetrie der Platte und der Belastungen genügt es, eine der beiden Spannungen zu berechnen. Es soll σ_u ermittelt werden.

Durch Umformen ergibt sich aus (43) und (44)

$$\sigma_u = \frac{Em}{m^2-1} [\epsilon_v + m \epsilon_u]$$

setzt man hier die Dehnungen aus (41) und (42) ein, so folgt

$$\boxed{\sigma_{u_1} = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 [u^2 - m v^2]} \quad (45)$$

Die Gesamtkraft ergibt sich hieraus zu

$$Z' = \int \sigma_{u_1} dF = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 \left[\int u^2 dF + m \int v^2 dF \right] \begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$$

Integriert und für $\int u^2 dF = J_p$ das polare Trägheitsmoment des Querschnittes gesetzt, ergibt sich

$$Z' = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 [J_p + m v^2 F] \quad (46)$$

Dieser Kraft muß, um Kräftegleichgewicht im Querschnitt zu halten, eine entsprechende gleich große Gegenkraft entgegenwirken. Die von dieser erzeugten Spannungen sind

$$\sigma_{u_2} = - \frac{Z'}{F}$$

also

$$\sigma_{u_2} = - \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 \left[\frac{J_p}{F} + m v^2 \right]$$

Die örtliche Gesamtspannung ist dann

$$\sigma_u = \sigma_{u_1} + \sigma_{u_2}$$

also

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 \left[u^2 + m v^2 - \frac{J_p}{F} - m v^2 \right]$$

so daß die örtliche Spannung

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \mathcal{J}^2 \left[u^2 - \frac{J_p}{F} \right] \quad (47)$$

ist.

Entsprechend schreibt sich

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \mathcal{J}^2 \left[v^2 - \frac{J_p}{F} \right] \quad (48)$$

Setzt man wie oben

$$\mathcal{J} = 2 \cdot \frac{2h}{L^2}$$

so erhält man schließlich

$$\sigma_u = 2 \frac{Em}{m^2-1} \frac{(2h)^2}{L^4} \left[u^2 - \frac{J_p}{F} \right] \quad (49)$$

$$\sigma_v = 2 \frac{Em}{m^2-1} \frac{(2h)^2}{L^4} \left[v^2 - \frac{J_p}{F} \right] \quad (50)$$

Die Höchstspannungen entstehen für $u = v = \frac{L}{2}$ und $u = v = 0$.

Mit

$$J_p = \frac{dL^3}{12}$$

oder

$$\frac{J_p}{F} = \frac{L^2}{12}$$

ergibt sich dann

$$\sigma_{u_{max}} = \sigma_{v_{max}} = \frac{1}{3} \frac{Em}{m^2-1} \cdot \frac{1}{L^2} (2h)^2 \quad (51)$$

$$\sigma_{u_{min}} = \sigma_{v_{min}} = -\frac{1}{6} \frac{Em}{m^2-1} \cdot \frac{1}{L^2} (2h)^2 \quad (52)$$

Für

$$u^2 = \frac{J_p}{F} \quad \text{wird } \sigma_u = \sigma_v = 0$$

d.h.

$$u_0 = \frac{L}{\sqrt{12}} \quad (53)$$

Die bestehenden Normalspannungen σ_u und σ_v und die Schubspannung τ können nach den für den ebenen Spannungszustand, der hier in erster Näherung vorliegt, nach Gleichung (10) zusammengesetzt werden. [4], S. 833

$$\sigma_I = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2}$$

Da im vorliegenden Fall aus Gründen der Symmetrie auf den x-y Achsen überall $\sigma_u = \sigma_v$ ist, ergibt sich für diese Orte die Spannung

$$\sigma_{I_{x,y}} = \sigma_u + \tau$$

$$\sigma_{II_{x,y}} = \sigma_u - \tau$$

Für die u-v-Achsen gilt, da dort $\sigma_u = 0$ bzw. $\sigma_v = 0$ ist

$$\sigma_{I u;v} = \frac{\sigma_u}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{II u;v} = \frac{\sigma_u}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau^2}$$

Man kann sofort erkennen, daß auf den x-y-Achsen die größten Spannungen entstehen. Die beiden mit I und II versehenen Spannungen stehen senkrecht zueinander und unter 45° zur u-v-Achse, wobei die größere Spannung senkrecht zur betreffenden x- bzw. y-Achse steht.

Mit den oben gegebenen Beziehungen für σ_u und σ_v als Funktion des jeweiligen Ortes kann das ganze Spannungsfeld über die Scheibe ermittelt werden. Es ist dies jedoch weniger interessant, da die Höchstspannungen, wie sich leicht aus einer Betrachtung des Verlaufes $\sigma_u = F(u)$ ergibt, an den Spitzen der Scheibe, d.h. den Lastangriffspunkten einen Größtwert erreichen.

Damit können nunmehr die Zusatzmomente ermittelt werden. Diese werden für jeweils eine Drehachse, also für u bzw. v getrennt gerechnet, z.B. zunächst für die u-Achse.

Nach Weber S. 63, 193 ist das von den Normalspannungen herführende Moment

$$M_v = \int u \sin \beta \sigma_u dF$$

(54)

hierin ist

$$dF = d \cdot du$$

$$\sin \beta = \sin u \vartheta$$

$$\sin \beta = u \vartheta$$

Mit

$$J_p = \frac{dL^3}{12}$$

erhält man für die Spannungen entsprechend (47)

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 \left[u^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \quad (54a)$$

Damit wird

$$M_v = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^3 d \int_{-L/2}^{+L/2} \left[u^4 - \frac{1}{3} u^2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] du$$

das Integral ausgeführt und die Grenzen eingeführt ergibt für dieses

$$\int_{-L/2}^{+L/2} = \frac{L^5}{180}$$

und damit wird

$$M_v = \frac{1}{360} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^3 L^5 d \quad (55)$$

Die Verdrillung durch die Durchbiegung (Verwölbung) (2h) der Platte ersetzt,

d.h.

$$\vartheta = 2 \cdot \frac{2h}{L^2}$$

erhält man

$$M_v = \frac{2}{90} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L} (2h)^3 \quad (56)$$

Dieses Moment ist dem Moment der äußeren Kräfte P_N gleich

$$M_{N\phi} = \frac{R_N L}{2} = \frac{2}{90} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L} (2h)^3 \quad (57)$$

und damit hat man

$$P_{N\phi} = \frac{4}{90} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} (2h)^3 \quad (58)$$

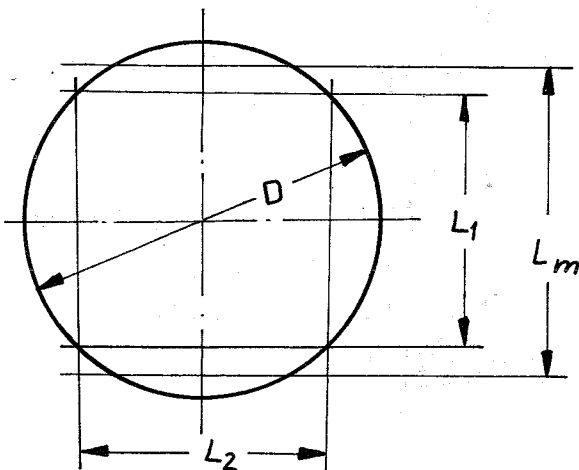
Für die ebene quadratische Platte wird die Gesamtkraft für die Durchbiegung $(2h)$ somit

$$P_{\phi} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h) + \frac{4}{90} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} (2h)^3 \quad (59)$$

B_{1.3.3} Für die ebene, kreisrunde Platte ergeben sich folgende Verhältnisse.

Zur Berechnung soll das gleiche Rechenverfahren wie für die quadratische, ebene Platte benutzt werden.

Es werden also zunächst die reinen Schubmomente und dann die Normalzusatzmomente ermittelt.



Die Bezeichnungen wie bei der ebenen, quadratischen Platte. Also Plattendicke d , Wölbungspfeil h , Durchfederung $(2h)$.

$$n = \frac{L}{d} > 10$$

Dann werden die

Schubspannungen

entsprechend

$$\tau_{max} = G d \vartheta \quad (\text{Weber S. 51})$$

oder mit den hier vorliegenden Beziehungen

$$\tau_{max} = \frac{E m}{m+1} \frac{d}{L^2} (2h)$$

schreibt man noch

$$L^2 = \frac{D^2}{2}$$

so ergibt sich

$$\tau_{max} = 2 \frac{E m}{m+1} \frac{d}{D^2} (2h) \quad (60)$$

Diese Beziehung ist mit der entsprechenden Gl. 13 aus der Plattentheorie gewonnenen identisch. Man sieht, daß die Spannungen über die ganze Fläche von gleicher Höhe sind.

Durch Probieren wurde gefunden, daß bezüglich der Momente aus den Schubspannungen sich die runde Platte wie eine flächengleiche rechteckige behandeln läßt, deren Kantelänge l_2 und l_m sind, wobei die Kraftangriffspunkte in ihrer alten Lage, also im Abstand $l_1 = l_2$ voneinander liegen.

Es kann also gesetzt werden

$$\boxed{L_m = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{L_2}} \quad (61)$$

Es wird wieder ausgegangen von der Beziehung (37)

$$M = \frac{1}{3} n d^4 G \vartheta$$

Mit $n = \frac{1}{d}$, wo $L = L_m$ ist, ergibt sich

$$\boxed{M = \frac{1}{3} G L_m d^3 \vartheta} \quad (62)$$

setzt man hier nach (26) und (27) für

$$\vartheta = 2 \frac{2h}{L_1^2}$$

und führt für L_m den oben gegebenen Wert ein, so erhält man mit dem Wert für G aus (30)

$$M = \frac{1}{6} \frac{E_m}{m+1} \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{L_2} d^3 \frac{(2h)}{L_1^2}$$

Es ist aus Symmetriegründen $l_1 = l_2$ und

$$2 L_{1,2}^2 = D^2$$

so daß sich ergibt

$$\boxed{M = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi \frac{E_m}{m+1} \frac{d^3}{D} (2h)} \quad (63)$$

Dieses Moment ist wieder dem der äußeren Kräfte gleichzusetzen.

Also

$$M = \frac{P_S L}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{D} (2h) \quad (64)$$

oder

$$P_S = \frac{2}{3} \pi \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h) \quad (65)$$

Auch diese Beziehung ist ebenfalls identisch mit der aus der Plattentheorie gefundenen. Gl. (20)

Normalspannungen und Zusatzmomente

Die unmittelbare Ermittlung der Normalspannungen und die diesen entsprechenden Momente nach der oben bei der quadratischen Platte geübten Methode, führt bei der kreisförmigen Platte nicht zum Ziel, da die Drillquerschnitte sich längs der Drehachse fortlaufend ändern.

Eine einfache Überlegung sagt dann schon aus, daß sich unter diesen Umständen die Verdrillung, also längs der Drillachse laufend ändern muß.

Setzt man voraus, daß das Drillmoment längs der Drillachse einen konstanten Wert hat, so könnte man in erster Näherung die Größe der jeweiligen örtlichen Verdrillung ermitteln, wenn man sich die kreisrunde Platte in genügend schmale Streifen senkrecht zur Drillachse zerlegt denkt und jeden Streifen wie eine rechteckige Platte behandelt. Man erhält dann die Verdrillung als Funktion von u und v.

Für einen solchen rechteckigen Streifen gilt nach (38a) und (55) für die v-Achse die Beziehung

$$M_v = \frac{1}{6} \frac{Em}{m+1} L_u d^3 \vartheta_v + \frac{1}{360} \frac{Em}{m^2-1} L_u^5 d (\vartheta_v^3) \quad (66)$$

Hierin ist das erste Glied der von den Schubspannungen, das zweite Glied das von Normalspannungen herrührende Momentenanteil.

Ist damit die Drillung in einem Querschnitt, z.B. auf einer Achse bekannt, so kann damit jeder andere Drillwert über der ganzen Fläche ermittelt werden.

Dieses Verfahren ist allerdings umständlich und aufwendig, so daß es vorteilhafter ist, zunächst ein mehr empirisches Verfahren zur Ermittlung der Momente zu verwenden.

Für diesen Rechnungsweg wird in erster Näherung unterstellt, daß die Drillung über der ganzen Fläche konstant den Wert ϑ_m habe. Dieser Wert sei gleichzeitig identisch mit der Drillung der rechteckigen Ersatzplatte nach B.1.3.3 mit der Kantenlänge L_m nach Gl. (61).

D.h., die von den Schubspannungen herrührenden Momente werden als bekannt vorausgesetzt.

Für die Berechnung des Normalspannungsmomentes führt man als erste Näherung eine der kreisrunden, flächengleiche quadratische Platte deren Kantenlänge L_x ist ein und rechnet die Normalspannungen und Momente für diese quadratische Platte.

Das Moment ist entsprechend Gl. (55)

$$M_{N\phi} = \frac{1}{360} \frac{Em}{m^2-1} (L_x)^5 d \vartheta_m^3 \quad (67)$$

Die Ersatzlänge L_x ergibt sich aus

$$L_x^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

bzw.

$$L_x = \frac{D}{2} \sqrt{\pi}$$

Mit diesem Wert und mit dem Wert von

$$\mathcal{J}_m = 2 \frac{2h}{L^2}$$

ergibt sich dann, wenn L durch D ersetzt wird

$$M = \frac{1}{180} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D} (2h)^3 \quad (68)$$

Dieses Moment ist dem der äußeren Kräfte gleich, also

$$M = \frac{PL}{2} = \frac{1}{180} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D} (2h)^3 \quad (69)$$

oder hieraus

$$P_{N\phi} = \frac{\sqrt{2}}{90} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D^2} (2h)^3 \quad (70)$$

Damit ergibt sich die Gesamttragfähigkeit der ebenen, kreisrunden Platte zu

$$P_\phi = \frac{2}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h) + \frac{\sqrt{2}}{90} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D^2} (2h)^3 \quad (71)$$

Damit ist auch das Moment M_ϕ in Abhängigkeit von der Durchfederung (2h) bei sonst festliegenden Abmessungen bekannt.

Da das Moment über die Länge der Drillachse konstant ist, kann damit aus der Beziehung (66) die jeweilige örtliche Drillung in Funktion von u bzw. v ermittelt werden.

Schreibt man (66) mit den Abkürzungen

$$A = \frac{1}{6} \frac{Em}{m+1} \quad ; \quad B = \frac{1}{360} \frac{Em}{m^2-1}$$

in der Form

$$\boxed{AL_u d^3 \mathcal{V}_v + BL_u^5 d \mathcal{V}_v^3 = M_\phi} \quad (72)$$

und bringt die Streifenbreite L_u in Abhängigkeit zu v durch die Beziehung

$$\frac{L_u^2}{4} + v^2 = \frac{D^2}{4}$$

bzw.

$$\boxed{L_u = (D^2 - 4v^2)^{1/2}} \quad (73)$$

so erhält man

$$\boxed{Ad^3 (D^2 - 4v^2)^{1/2} \mathcal{V}_v + Bd (D^2 - 4v^2)^{5/2} (\mathcal{V}_v)^3 = M_\phi} \quad (74)$$

eine Gleichung 3. Grades für $\mathcal{V}_v = f \cdot (v)$

Beachtet man weiter, daß

$$\mathcal{V}_v = \frac{d\psi}{dv}$$

ist,

so erhält man eine Diff.Gl. für die örtliche Verdrillungs $\neq \psi$

$$Ad^3 (D^2 - 4v^2)^{1/2} \frac{d\psi}{dv} + Bd (D^2 - 4v^2)^{5/2} \left(\frac{d\psi}{dv} \right)^3 = M\phi \quad (75)$$

Auf eine Integration dieser Differenz-Gleichung soll an dieser Stelle vorerst verzichtet werden, um den Umfang der Arbeit nicht zu groß werden zu lassen. Diese Untersuchung soll ebenfalls Gegenstand einer späteren Arbeit sein.

Es kann jedoch der Beziehung jetzt schon entnommen werden, daß die Drillung längs der Drehachsen keinen konstanten Betrag hat und daß die Fläche der verformten kreisrunden Scheibe von der Form des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides leicht abweichen wird.

Die örtlichen Normalspannungen ergeben sich nach (54a) zu

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \mathcal{V}_u^2 \left[u^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \quad (76)$$

bzw.

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \mathcal{V}_v^2 \left[v^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right]$$

Die Spannungen am Rand der Scheibe ergeben sich dann zu

$$\sigma_{uR} = \frac{1}{12} \frac{Em}{m^2-1} L_{uR}^2 \cdot \vartheta_u^2$$
$$\sigma_{uR} = \frac{1}{12} \frac{Em}{m^2-1} L_{vR}^2 \vartheta_v^2$$

Aus dem oben angegebenen Grund wird vorläufig auch hier zunächst auf eine Durchrechnung des gesamten Spannungsfeldes der kreisförmigen Federplatte verzichtet. Sie soll ebenfalls einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

B_{1.3.4} Die verwölbte Platte

Die verwölbte Platte ist in ihrem spannungslosen Ausgangszustand bereits um das Maß (2h) durchgewölbt.

Sie wird durch die Belastung zur ebenen Platte hinführend verformt.

Bei dieser Verformung entstehen, wie bei der Platte mit ebenem Ausgangszustand, wieder 2 Arten von Momenten.

1. Die von den Schubspannungen herrührenden Momente

und

2. die von den Normalspannungen kommenden Zusatz-Momente.

Die Größe der Schubspannungsmomente und die ihnen entsprechenden äußeren Kräfte sind völlig die gleichen wie bei der ebenen Platte. Anders jedoch dagegen die Zusatzmomente, und zwar aus folgendem Grund:

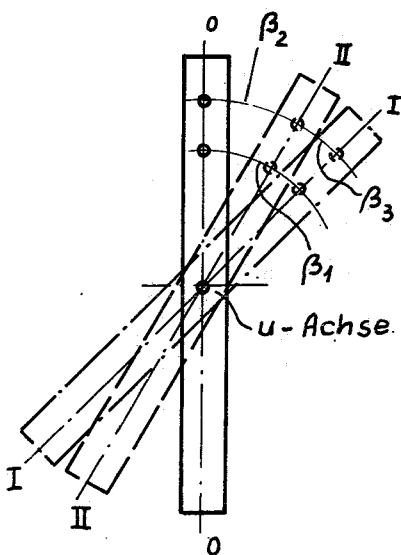
Im verwölbten Ausgangszustand ist die Platte spannungslos. Hier sind Momente und äußere Kräfte Null. Bei der Durchfederung zur Ebene hin entstehen in gleicher Weise wie bei der Auslenkung der ebenen Platte zusätzliche Normalspannungen. Diese Normalspannungen wirken jedoch an einem Hebelarm, der mit zunehmender Durchbiegung immer kleiner wird, um beim Erreichen des ebenen Zustandes ganz 0 zu werden.

In diesem Punkt werden also die Zusatzmomente ebenfalls 0. Das bedeutet, daß hier nur noch das reine Schubspannungsmoment wirkt.

Die Kennlinie der Platte schneidet daher die Gerade der Schubmomente an 2 Punkten, und zwar einmal im Ausgangspunkt und dann, wenn die Platte zur Ebene verformt ist.

Es genügt daher zur Ermittlung der Kennwerte, sowohl der quadratischen als auch der kreisrunden Platte, die Zusatzmomente zu ermitteln.

Die Ermittlung dieser Momente geschieht nach folgender grundsätzlicher Überlegung.



Die nebenstehende Skizze zeigt einen Schnitt durch die Platte parallel zur v-Achse im Abstand u von dieser. Die mit 0-0 bezeichnete Lage ist die der ebenen Platte. Die mit I-I bezeichnete Lage ist die Ausgangslage der vorverwölbten Platte. Die Lage II-II ist eine Zwischenlage; sie entspricht einer gewissen an sich beliebigen Verformung. Die Verdrillwinkel sind:

β_1 = der Winkel zwischen der vorverwölbten Lage (Ausgangslage) und der Lage der ebenen Platte.

β_2 = der Winkel zwischen der Zwischenlage und der Lage der ebenen Platte.

β_3 = der Winkel zwischen dem der Ausgangslage der vorverwölbten Platte und dem der Zwischenlage.

Es ist also

$$\beta_3 = \beta_1 - \beta_2$$

Die Größe der Winkel β_1 ; β_2 ; β_3 ist wie oben analog definiert.

$$\beta_1 = \vartheta_1 \text{ u}$$

$$\beta_2 = \vartheta_2 \text{ u}$$

$$\beta_3 = \vartheta_3 \text{ u}$$

Basis der Rechnung ist der Zustand der Lage 0-0, also die ebene Platte. Ausgangslage ist die Lage I-I. In diesem Zustand ist aufgrund der praktischen Vorverformung die Platte spannungslos.

Bezogen auf die Rechnungsbasis, die Lage 0-0, hat die Platte jedoch eine Verformung erlebt, die sich in einer Normalspannung σ_1 niederschlägt. Für die Rechnung wird nun so vorgegangen, daß unterstellt wird, diese Spannungen bliebe in der Platte als konstante Spannung weiterbestehen.

Wird die Platte in gleicher Weise in einer Zwischenlage II-II verformt, so besteht dann in dieser die Spannung σ_2 .

Die Differenz beider Spannungen ist dann die Spannung σ_3 , die bei der Verformung der Platte aus der Lage I-I in die Lage II-II entsteht, d.h. die gesuchte Größe, die zur Ermittlung des Momentes erforderlich ist.

Also

$$\boxed{\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2} \quad (78)$$

Nach Gl. (47) gilt für die Spannungen allgemein

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \nu_2^2 \left[u^2 - \frac{Jp}{F} \right]$$

Damit wird

$$\boxed{\sigma_3 = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \left[u^2 - \frac{Jp}{F} \right] \left[\nu_1^2 - \nu_2^2 \right]} \quad (79)$$

Dann ergibt sich das Moment analog zur bekannten Beziehung zu

$$M_N = \int u \sin \beta_2 \sigma_3 \cdot df$$

$$\text{mit } \beta_2 = \nu_2 u$$

$$df = d \cdot du$$

und man erhält

$$\sin \beta \approx \nu_2 \cdot u$$

$$M_N = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} d \nu_2 (\nu_1^2 - \nu_2^2) \int_{-1/2}^{+1/2} u^2 \left(u^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) du$$

Ausgewertet für die angegebenen Grenzen ergibt sich dann

$$M_N = \frac{1}{360} \frac{Em}{m^2-1} dL^5 \nu_2 (\nu_1^2 - \nu_2^2)$$

Setzt man für

$$v_1 = 2 \frac{2h_0}{L^2} ; v_2 = 2 \frac{(2h_0)-(2h)}{L^2}$$

wo

(2h₀) die Durchwölbung von der Ausgangslage bis zur ebenen Platte ist und

(2h) eine beliebige Durchwölbung zu einer zwischenliegenden Lage

so erhält man schließlich für quadratische Platten

$$M_{N\phi} = \frac{1}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L} (2h_0 - 2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0 - 2h)^2 \right] \quad (80)$$

Dieser Wert dem äußeren Moment gleich gesetzt ergibt

$$M_{N\phi} = \frac{P_N L}{2} = \frac{2}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L} (2h_0 - 2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0 - 2h)^2 \right] \quad (81)$$

und daraus

$$P_{N\phi} = \frac{4}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} (2h_0 - 2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0 - 2h)^2 \right] \quad (82)$$

Für die kreisrunde Platte schreibt sich das Moment mit (69) analog

$$M_{N\phi} = \frac{1}{180} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D} (2h_0 - 2h) \left[2h_0^2 - (2h_0 - 2h)^2 \right] \quad (83)$$

Dieses Moment dem äußeren Moment gleich gesetzt, erhält man

$$P_{N\phi} = \frac{\sqrt{2}}{45} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D^2} (2h_0-2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0-2h)^2 \right] \quad (84)$$

Damit ergeben sich für die Kennlinien der verwölbten Platten folgende Beziehungen

1.) Quadratische, verwölbte Platte

$$P_{\phi} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h) + \frac{4}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} (2h_0-2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0-2h)^2 \right] \quad (85)$$

2.) Kreisrunde, verwölbte Platte

$$P_{\phi} = \frac{2}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h) + \frac{\sqrt{2}}{45} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D^2} (2h_0-2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0-2h)^2 \right] \quad (86)$$

B_{1.4} Formänderungsarbeit

Die bei der Durchfederung der Federscheiben gespeicherte Arbeit kann nach Weber, S. 64 (197/198), ermittelt werden. Es soll die Formänderungsarbeit nur für die vorverwölbten Scheiben, die ja als Federelemente in erster Linie interessant sind, beschrieben werden.

1.) Quadratische Platte:

Es ist

$$FA_{\phi} = \frac{1}{2} M_{S\phi} 2 \cdot \frac{2h}{L} + \frac{1}{4} M_{N\phi} 2 \cdot \frac{2h}{L}$$

durch Einsetzen der Werte aus (38a) und (80) ergibt sich

$$FA_{\phi} = \frac{1}{3} \frac{Em}{m+1} d^3 \frac{(2h)^2}{L^2} + \frac{8}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} 2h(2h_0-2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0-2h)^2 \right] \quad (87)$$

2.) Kreisrunde Platte:

$$FA_{\phi} = \frac{1}{2} M_S \phi \cdot 2 \cdot \frac{2h}{L} + \frac{1}{4} M_N \phi \cdot 2 \cdot \frac{2h}{L}$$

Die Werte aus (63) und (83) eingesetzt, erhält man

$$FA_{\phi} = \frac{2}{6} \pi \frac{Em}{m+1} d^3 \frac{(2h)^2}{D^2} + \frac{2\sqrt{2}}{45} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D^3} 2h(2h_0-2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0-2h)^2 \right] \quad (88)$$

Von weiterem Interesse ist noch die spezifische, d.h. auf das Volumen der Federscheibe bezogene Formänderungsarbeit für die Durchfederung $(2h) = 1$.

1.1 Quadratische Platte

$$FA'_{\phi} = \frac{1}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^2}{L^4} + \frac{8}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{1}{L^4} (2h_0-1) \left[(2h_0)^2 - (2h_0-1)^2 \right] \quad (88)$$

2.1 Kreisrunde Platte

$$FA'_{\phi} = \frac{4}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^4} + \frac{8\sqrt{2}}{45} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{3/2} \frac{1}{D^5} (2h_0-1) [(2h_0)^2 - (2h_0-1)^2] \quad (89)$$

Man ersieht aus diesen Beziehungen, daß die spezifische Formänderungsarbeit mit Verkleinerung der ϕ bzw. L zunimmt, desgleichen mit der Vergrößerung der Dicke d .

D.h. kleinere Federscheiben bauen leichtere Federelemente.

B_{1.5.1} Modelle und Versuche

Wie eingangs kurz erwähnt, wurden Modelle der Federelemente aus Plexiglas gefertigt. Plexiglas ist wie bekannt, wegen seiner leichten Bearbeitbarkeit und wegen seiner Durchsichtigkeit für den Modellbau ein beliebter und attraktiver Werkstoff. Für den vorliegenden Fall war es besonders vorteilhaft, daß dieses Material durch Erwärmen auf ca. 150 - 160°C verformbar wird, leicht in beliebige Formen gebracht werden und durch Abkühlen dort erhärten kann. Es war damit möglich, in Plexiglas funktionsfähige Federelemente und Federpakete ohne besonders großen Aufwand herzustellen.

Die Fertigung der Modell-Federelemente geschah in Gipsformen, deren maßgebende Oberfläche nach der Form des hyperbolischen Paraboloides (Sattelfläche) gestaltet war. Die Fläche des hyperbolischen Paraboloides ist eine sogenannte Regelfläche, d.h. eine solche, deren Erzeugende eine gerade Linie ist, wobei die Führung dieser Erzeugenden durch zwei in parallelen Ebenen liegende, sich kreuzende Geraden erfolgt.

Das Gießen der Gipsformen wurde in einem Blechkasten vorgenommen, bei dem die Oberkanten von 2 gegenüberliegenden parallelen Wänden zueinander windschief lagen. Der in den Kasten gegossene Gipsbrei wurde beim Erhärten über die windschiefen Kanten mit einem Lineal abgezogen.

Zwischen einem Paar solcher Gipsformen wurden die in einem Wärmeschrank auf Erweichungstemperatur gebrachten Plexiglasplatten dann verformt, Abb.11. Nach dem Verformen wurden aus den einzelnen Platten die Federelemente entweder ausgesägt oder bei runden Elementen paketweise zwischen Matrizen auf Form gedreht und falls erforderlich, ebenfalls zwischen diesen Matrizen paketweise mit Führungsnuten versehen.

Zum vorläufigen Studium des Verhaltens eines Federpaketes wurden zwei verschiedene Modelle solcher Pakete hergestellt.

Abb. 5 zeigt im Foto ein aus 8 Scheiben aufgebautes Hand- und Anschauungsmodell.

Abb. 6 zeigt im Foto ein größeres Federpaket in einem Dämpfergefäß, das mit gefärbtem Wasser als Dämpfungsflüssigkeit gefüllt ist.

B_{1.5.2} Belastungsversuche

Orientierende Belastungsversuche an den gefertigten Modellscheiben zeigten, daß an diesen recht gute Meßergebnisse zu erzielen waren. Es wurden deshalb weitere Federplatten hergestellt mit dem Ziel, an diesen Kennwerte zu ermitteln, die u.U. für die Kontrolle der Rechnungen benutzbar wären.

Gemessen wurde das Kraft-Weg-Diagramm kreisrunder und quadratischer Platten.

Die Platten hatten die Abmessungen:

1. ebene, quadratische Platte: Kantenlänge L = 72 mm
 Stützweite D_{st} = 96 mm
 Plattendicke d = 0,296 mm

2. ebene, kreisrunde Platte: Plattendurchmesser D = 100 mm
 Stützweite D_{st} = 96 mm
 Plattendicke d = 0,296 mm

3. verwölbte, quadratische Platte: Kantenlänge l = 72 mm
 Stützweite D_{st} = 96 mm
 Plattendicke d = 0,283 mm
 Verwölbung ($2h$) = 7,8 mm

4. vorverwölbte, kreisrunde Platte: Plattendurchmesser D = 100 mm
 Stützweite D_{st} = 96 mm
 Plattendicke d = 3,05 mm
 Verwölbung $2h$ = 7,8 mm

Die Messungen wurden auf einer Werkstoffprüfmaschine (Bauart Zwick) mit elektronischer Kraftmessung und elektromechanischer Wegaufzeichnung durchgeführt.

Das Aufbringen der Last auf die Platten geschah durch eine Belastungseinrichtung entsprechend Abb.12.

Den Einbau der Belastungseinrichtung in der Maschine mit eingelegter Federplatte zeigt für die quadratische Platte Abb.13, für die runde Platte Abb. 14 und zwar je einmal in vorverwölbtem und in flachgedrücktem, dh. belastetem Zustand der Platte. Wie sich später herausstellte, ist diese Art Last auf die Platten aufzubringen, nicht sehr glücklich. Durch die Reibung der kleinen Kugeln in den Pfannen der Einrichtung entstehen an dem Lastangriffspunkt zusätzliche Momente, die das Messergebnis fälschen.

Da die Messungen jedoch nur orientierenden, keinen abschließenden Charakter haben sollten, schien diese Art der Lastübertragung zunächst vertretbar. Wie sich unten zeigt, sind die gefundenen Meßergebnisse durchaus befriedigend und für die Beurteilung der Rechnung zunächst ausreichend.

B_{1.5.3} Meßergebnisse

Die Meßergebnisse sind in den Abb. 15 und 18 dargelegt und mit den Ergebnissen der Rechnung verglichen. In allen vier Kurvenblättern gibt die ausgezogene Kurve den gemessenen Kraft-Weg-Verlauf an, die gestrichelte zeigt den Verlauf nach der Rechnung. Die strichpunktierte gerade Linie ist die Federsteife der ebenen Platte für den Ausschlag 0, also die Kurve, die sich aus den reinen Schubmomenten ergibt.

ist Abb.15 das Diagramm einer ebenen quadratischen Platte

Abb.16 das einer ebenen, kreisrunden Platte

Abb.17 das Diagramm einer vorverwölbten, quadratischen Platte

Abb.18 das einer vorverwölbten, kreisrunden Platte.

Bei allen 4 Fällen ist zu erkennen, daß

1. der charakteristische Verlauf der gerechneten mit den gemessenen Kurven fast völlig übereinstimmt,
2. bezüglich der Absolutwerte teilweise gute, teilweise mindere Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung besteht.

Diese Diskrepanz dürfte ihre Ursache in folgenden Umständen haben:

1. In der bereits erwähnten Mangelhaftigkeit der Versuchseinrichtung,
2. Plexiglasplatten sind selten in ihrer Dicke konstant, sondern meist über die Fläche verteilt von unterschiedlicher Dicke. Die Dickenunterschiede können in Extremfällen einige Prozente ausmachen. Da die Dicke mit der dritten Potenz in die Rechnung eingeht, können hier starke Abweichungen ursächlich bedingt sein.
3. Die Stoffwerte E und m von Plexiglas mußten Tabellen entnommen werden; sie streuen meist sehr stark. Es ist auch nicht bekannt, ob und wie weit die Stoffwerte von Plexiglas durch eine Warmbehandlung beeinflusst werden.
4. Die verschiedenen gemessenen Platten wurden aus verschiedenen Rohplatten ausgearbeitet.

Trotz dieser verschiedenen Fehlermöglichkeit kann abschließend festgestellt werden, daß die Messung Rechenweg und Rechenergebnis als zulässig und brauchbar bestätigt haben. Es ist beabsichtigt, zu gegebener Zeit die Messungen unter Vermeidung der angeführten Schwierigkeiten und Fehlermöglichkeiten an Stahlplatten zu wiederholen.

B₂ Dämpfungseigenschaften

Wie oben kurz beschrieben, geschieht die hydraulische Dämpfung des Federpaketes auf zweierlei Art.

Die eine Art soll als

a) Plattendämpfung bezeichnet werden.

Sie liegt dann vor, wenn das Dämpfungsmedium bei der Verringerung des Abstandes zwischen den Federscheiben aus dem Zwischenraum herausgequetscht wird.

Die andere Art soll als

b) Kolbendämpfung bezeichnet werden.

Sie ist dann gegeben, wenn die Federscheibe in dem Dämpfungsgefäß axial verschoben wird und dabei das verdrängte Flüssigkeitsvolumen durch den Spalt zwischen Federscheibenwand und Gehäusewand nach außen abströmt.

Die beiden Dämpfungsarten sollen getrennt betrachtet werden.

B_{2.1} Plattendämpfung

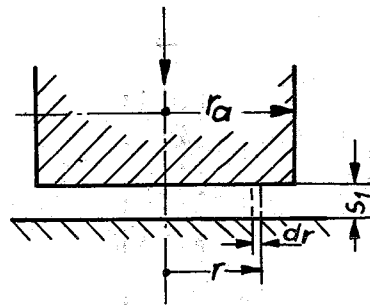
Für eine allererste Näherung wird angenommen, die Federscheiben seien eben und parallel, d.h. der Abstand zwischen den Scheiben sei überall gleich dick. Auf die Tatsache, daß der Spalt eine Funktion des Ortes ist und sich über die Platte hin ändert und sich außerdem bei der Annäherung zweier Platten proportional seiner Ausgangsweite ändert, soll in einer Korrekturbetrachtung eingegangen werden. Zwei kreisrunde Flächen von $\varnothing D = 2r_0$, zwischen denen sich eine Flüssigkeit mit der Zähigkeit η befindet, bewegen sich mit der Geschwindigkeit v gegeneinander. Es sind

der entstehende Verschiebungswiderstand
(Dämpfungskraft),

die Druckverteilung über der Fläche und
der Weg-Zeitverlauf der Bewegung

zu ermitteln.

Bei der Verschiebung der oberen Fläche (gegen die untere) (Verkleinerung der Weite s) wird bei der Verschiebegeschwindigkeit U_0 innerhalb des Radius r das Volumen



$$Q_r = \pi r^2 \cdot U_0$$

(90)

verdrängt.

Diese Menge wird durch den Querschnitt F_1

$$F_1 = 2\pi r s_1$$

nach außen abgedrängt.

In diesem Querschnitt entsteht dann die Durchtrittsgeschwindigkeit U_1 , und zwar ist

$$U_1 = \frac{Q_r}{F_1}$$

$$U_1 = \frac{r U_0}{2 s_1}$$

(91)

Beim Durchtritt der Flüssigkeit durch diesen Querschnitt von der Länge dr entsteht ein Druckgefälle d_p . Für die Betrachtung wird zunächst ausgebildete Strömung vorausgesetzt. Dann gilt für das Druckgefälle

$$\frac{dp}{dr} = \frac{12 \eta U_1}{s_1^2}$$

(92)

oder

$$\frac{dp}{dr} = \frac{12 \eta U_0}{2 s_1^3}$$

bzw.

$$dp = \frac{6\eta U_0}{S_1^2} r \cdot dr$$

Integriert ergibt sich

$$p = \frac{6\eta U_0}{S_1^3} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=r}$$

Die Randbedingungen sind

$$\text{für } r = r_a \quad p = p_a = 0$$

$$r = r \quad p = p$$

$$r = 0 \quad p = p_i$$

Mit diesen erhält man

$$p_i - p = \frac{3\eta U_0}{S_1^3} (r^2)$$

$$p - p_a = \frac{3\eta U_0}{S_1^3} (r_a^2 - r^2)$$

Daraus

$p_i = - \frac{3\eta U_0}{S_1^3} r_a^2$	(93)
---	------

$p = - \frac{3\eta U_0}{S_1^3} (r_a^2 - r^2)$	(94) Die Beziehung für den Druckverlauf über den Radius
---	---

Die Gesamtkraft über der Fläche ergibt sich zu

$$P_1 = \int_0^{r_a} P dF$$

worin

$$F = 2 \pi r dr$$

damit

$$P_1 = 2 \pi \int_0^{r_a} P r dr$$

p eingeführt erhält man

$$P_1 = \frac{6 \pi \eta v_0}{s_1^3} \int_0^{r_a} (r_a^2 - r^2) r dr$$

integriert ergibt sich

$$P_1 = \frac{3}{2} \frac{\pi \eta v_0 r_a^4}{s_1^3} \quad (95)$$

Man erkennt, daß die charakteristische Größe für die Dämpferkraft der Ausdruck

$$\frac{r_a^4}{s_1^3}$$

ist.

Dies bedeutet, daß schon mit relativ kleinen Abmessungen der Federscheiben große Dämpferkräfte zur Verfügung stehen. Weiter, daß mit der Verkleinerung der Spaltweiten zwischen den Platten eine erhebliche Zunahme der Dämpferkräfte entsteht. (Progressive Zunahme der Dämpfungskraft). Außerdem ist zu ersehen, daß relativ große Spalte nur geringe Dämpferkräfte ergeben, wogegen kleine Spalte große Dämpferkräfte zur Verfügung stellen.

Korrektur

Die praktisch vorliegenden Federscheiben sind jedoch nicht eben, sondern sind nach der Form eines hyperbolischen Paraboloides (Sattelfläche) geformt. Der Raum zwischen den Scheiben ist also nicht gleich dick, sondern er hat eine vom Ort abhängige Dicke. Außerdem ist auch die Geschwindigkeit, mit der sich die Begrenzungsflächen des Zwischenraumes gegeneinander bewegen, ebenfalls von Ort zu Ort verschieden.

Es ergibt sich daher beim Zusammenpressen der Federscheiben im Zwischenraum anstelle einer zweidimensionalen Strömung, wie sie bei ebenen Scheiben vorliegt, eine dreidimensionale. Eine solche dreidimensionale Strömung ist mathematisch, wenn überhaupt, nur unter größten Schwierigkeiten zu behandeln. Es soll deshalb versucht werden, mittels einer Näherungsrechnung den Verhältnissen etwa gerecht zu werden.

Betrachtet man hierfür die Beziehung für die Gesamtdämpferkraft aus Gl. (95)

$$P_1 = 1,5 \pi \eta r_a^4 \frac{U_0}{S_1^3}$$

so sind in dieser Beziehung bei der verwölbten Platte die Größen U_0 und S diejenigen, die vom jeweiligen Ort auf der Fläche abhängen. Diese Tatsache ist leicht einzusehen, wenn man beachtet, daß dort, wo sich zwei Platten berühren, keine relative Verschiebungsgeschwindigkeit vorliegt und umgekehrt, an den Stellen, an denen der größte Abstand vorliegt, auch die größte Verschiebegeschwindigkeit ist. Die Veränderlichkeit der Spaltweite ergibt sich daher ohne weiteres aus der Charakteristik der Fläche.

Für die Näherungsrechnung geht man auf die Beziehung für die Dämpferkraft der ebenen Platte zurück, rechnet jedoch mit den Mittelwerten für U_0 und S_1^3 .

Die mittlere Geschwindigkeit U_0 ergibt sich, wie sofort einzusehen ist, aus der Gesamtverschiebegeschwindigkeit des Federpaketes durch die Zahl der Federscheiben. Sie entspricht der Geschwindigkeit, mit der sich die Sattelpunkte zweier gegenüberliegender Federscheiben gegeneinander bewegen.

Für die Ermittlung der dritten Potenz der Spaltweite muß man von der Gleichung der Sattelfläche ausgehen.

Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid (Sattelfläche) wird beschrieben durch die Beziehung

$$\boxed{x^2 - y^2 = \alpha^2 z} \quad (96)$$

Für die kreisrunde Berandung gilt ferner

$$\boxed{x^2 + y^2 = r_a^2} \quad (97)$$

Die Anordnung der Koordinaten kann wieder der Abb. 8 bzw. 9 entnommen werden.

Bezeichnet man die Pfeilhöhe der Durchwölbung einer Scheibe mit h und bezieht diese auf den Radius r_a der runden Scheibe, so ist die relative Pfeilhöhe

$$\boxed{\xi = \frac{h}{r_a}} \quad (98)$$

Für $y = 0$, d.h. für die x - z Ebene gilt

$$x^2 = \alpha^2 z \quad (99)$$

(Das gleiche gilt analog für die y - z Ebene)

In dieser Beziehung kann für $x^2 \rightarrow r_a^2$ und für $z \rightarrow h$ gesetzt werden,

so daß dann gilt

$$r_a^2 = a^2 h$$

oder

$$h = \frac{r_a^2}{a^2}$$

ersetzt man den Wert für h aus (98), so ergibt sich schließlich

$$\boxed{a^2 = \frac{r_a}{\xi}} \quad (100)$$

und damit erhält man die Gleichung der Fläche in der Form

$$x^2 = y^2 = \frac{r_a}{\xi} \cdot z$$

und daraus

$$\boxed{z = \frac{\xi}{r_a} (x^2 - y^2)} \quad (101)$$

Für die Ermittlung der Spaltweite wird als Bezugsebene diejenige angesetzt, die durch die Berührungspunkte zweier Scheiben hindurchgeht. Diese Ebene hat von den Sattelpunkten der beiden Flächen jeweils den Abstand h.

Der Abstand zweier Sattelpunkte ist daher 2h.

Aus Symmetriegründen ergibt sich sofort, daß der mittlere Abstand einer zum Koordinaten-Mittelpunkt symmetrischen Sattelfläche von der x-y-Ebene den Wert 0 hat.

Damit ist der mittlere Abstand aller Punkte zweier sich in 2 Punkten berührenden Flächen

$$\boxed{S_m = 2h} \quad (102)$$

Mit dem Abstand z eines diskreten Punktes der Sattelfläche von der x - y -Ebene ergibt sich für diesen Punkt die Spaltweite zwischen zwei Scheiben

$$s_p = 2(h+z) \quad \text{wo } z (+) \text{ und } (-) \text{ Werte annimmt.} \quad (103)$$

Die dritte Potenz, für die der Mittelwert zu bilden ist, ist

$$s_p^3 = 8(h+z)^3$$

Die Mittelwertbildung erfolgt in bekannter Weise nach der Beziehung

$$s_m^3 = \frac{1}{F_L} \int_0^y \int_0^x s_p^3 dx dy$$

worin F_L die Fläche der Federscheibe ist: (Die Rechnung wird nur für einen Quadranten durchgeführt).

$$F_L = \frac{\pi r_a^2}{4}$$

mit dem Wert für s_p ergibt sich dann

$$s_m^3 = \frac{3z}{\pi r_a^2} \int_0^y \int_0^x (h+z)^3 dx dy$$

Integriert und die Grenzen

$$y_u = 0 \quad y_o = r_a$$

$$x_u = 0 \quad x_o = r_a$$

eingeführt, ergibt sich für die Kreisplatte

$$S_m^3 = 10 r_a^3 \xi^3$$

oder

$$\boxed{S_m^3 = 10h^3} \quad (104)$$

Damit ergibt sich für die Dämpferkraft

$$\boxed{P_{01} = 0,15 \frac{\pi \eta r_a^4}{h_0^3} U_0} \quad (105)$$

B.2.2 Kolbendämpfung

Bei der Durchfederung des Paketes wirkt jede Federscheibe wie ein in einen Zylinder mit einem Spalt gedichteter Kolben. Die unter der Federscheibe herausgepreßte Flüssigkeit muß entgegen der Bewegung des Kolbens durch den Spalt in den Raum über der Feder abströmen. Dabei gelten für jede einzelne Federscheibe andere Bedingungen, da

- 1) die Relativgeschwindigkeit zwischen jeder einzelnen Scheibe und der Zylinderwand, von der ruhenden Scheibe her betrachtet, ständig zunimmt,
- 2) die den jeweiligen Spalt zwischen Scheibe und Zylinderwand, durchfließende Flüssigkeitsmenge von Scheibe zu Scheibe (beginnend von der ruhenden Federscheibe), zunimmt.

Ist die Verschiebegeschwindigkeit des Belastungskolbens an der obersten Federscheibe U_g und sind im Paket n Scheiben, so ist die Relativgeschwindigkeit der einzelnen Scheiben gegeneinander

$$\boxed{U_r = U_g \frac{1}{n}} \quad (106)$$

Die Geschwindigkeit der Scheibe i relativ zur Zylinderwand ist

$$\boxed{v_i = v_g \frac{i}{n}} \quad (107)$$

Ist die bei der Geschwindigkeit v_i unter der Scheibe 1 abströmende Menge Q_1 , so ist die unter der Scheibe i abströmende Menge ebenfalls Q_1 .

Die an der Scheibe i vorbeifließende Menge dagegen ist dann

$$Q_i = Q_1 \cdot i$$

Bei einem Durchmesser $D = 2r_a$ der Federscheibe ist

$$Q_1 = \pi r_a^2 \frac{v_g}{n}$$

oder

$$\boxed{Q_i = \pi r^2 \frac{v_g}{n} \cdot i} \quad (108)$$

Die Relativgeschwindigkeit der Menge Q_1 im Spalt zwischen Wand und der Scheibe $i = 1$ ist

Sie ist bei einer Spaltweite S_2

$$\boxed{W_1 = \frac{r_a v_g}{2n S_2}} \quad (109)$$

Da sich die Scheibe entgegen der Strömungsrichtung bewegt, ist die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Scheibenrand und einem dort vorbeiströmenden Flüssigkeitsteilchen

$$W_i = W_1 + W_{i1}$$

Da die Zylinderwand ruht, ergibt sich im Spalt schließlich eine mittlere Geschwindigkeit

$$W_{1m} = \frac{W_1 + v_{i1}}{2}$$

$$W_{1m} = \frac{r_a + 2s_2}{4n s_2} \cdot U_g \quad (110)$$

Analog ergibt sich für die Federscheibe i

$$W_{im} = \frac{r_a + 2s_2}{4n s_2} U_g \cdot i \quad (111)$$

Bei der Strömung durch den Spalt zwischen Scheibenrand und Wand handelt es sich wegen der relativen Kürze des Strömungskanales (Kanallänge = d, Dicke der Federscheibe) um eine Kanal- Einlauf- und Anlaufströmung. Die exakte Erfassung der Strömungsverhältnisse hängt von der genauen Kenntnis des Zuströmverhaltens im einzelnen ab. Es ist jedoch nicht möglich, diese so zu übersehen und zu erfassen, daß sie der Rechnung zugänglich gemacht werden können.

Es wird deshalb für die Durchrechnung näherungsweise das allgemeine Gesetz der Kanal- und Rohrströmung eingesetzt. Dieses lautet

$$\Delta p = \lambda \frac{d}{s_2} \frac{\rho}{2} W_m^2 \quad (112)$$

Man muß sich dabei im Klaren sein, daß λ ein von Scheibe zu Scheibe veränderlicher Wert -entsprechend der veränderten Re-Zahl- ist, daß außerdem die Zuströmverhältnisse sich ebenfalls von Scheibe zu Scheibe ändern und daß schließlich die Abstände zwischen den Scheiben sich mit der Durchfederung verkleinern.

Da die vorliegende Betrachtung jedoch nur einen Überblick über das Verhalten des Federelementes geben soll, erscheint oben gemachter Ansatz vernünftig und vertretbar.

Für die Rechnung wird man daher ein mittleres λ_m , das für das ganze Paket gilt, einsetzen und dessen Zahlenwert durch das Experiment ermitteln.

Das so gefundene Druckgefälle ergibt unter jeder Federscheibe eine der Bewegung entgegengerichtete Druckkraft, die sich der bei der Plattendämpfung entstehenden überlagert.

Diese Kraft ist

$$P_{02} = F \Delta p$$

$$P_{02} = \pi r_a^2 \lambda_m \frac{d}{S_2} \frac{S}{2} W_{im}^2 \quad (113)$$

Mit dem Wert für W_{im} Gl. (111) ergibt sich

$$P_{02} = \pi r_a^2 \lambda_m \frac{d}{S_2} \frac{S}{2} \left(\frac{r_a + 2S_2}{4nS_2} \right)^2 v_g^2 i^2 \quad (114)$$

oder

$$P_{02} = A \cdot i^2$$

worin A den Wert

$$A = \pi r_a^2 \lambda_m \frac{d}{S_2} \frac{S}{2} \left(\frac{r_a + 2S_2}{4nS_2} \right)^2 v_g^2$$

hat, der nicht von der Nummer i der Scheibe abhängt.

Die Gesamtkraft für P, P_{ges} ist die Summe der Kräfte von n einzelnen Scheiben.

Also

$$P_{0ges} = A \sum_{i=1}^n i^2 \quad (115)$$

Der Wert für die Summe ist (Hütte) 26. Aufl., S. 69

$$\left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

und damit erhält man als Gesamtkraft

$$P_{0ges} = \frac{\pi d r_a^2 (r_a + 2s_2)^2}{96 s_2^3} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \lambda_m \frac{S}{2} v_g^2 \quad (116)$$

In dieser Beziehung ist

das erste Glied eine feste Größe, die nur von den Scheibenabmessungen bzw. dem Gehäusedurchmesser abhängt, das zweite Glied betrifft die Zahl der Federscheiben und das dritte Glied beschreibt das Strömungsverhalten.

Die Gesamtdämpfungskraft ergibt sich dann aus der Summe der beiden Anteile. Sie ist

$$P_{0ges} = 0,15 \pi \eta r_a^4 \frac{v_g}{h^3} + \frac{\pi r_a^2 d (r_a + 2s_2)^2}{96 s_2^3} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \lambda_m \frac{S}{2} v_g^2 \quad (117)$$

B_{2.3}

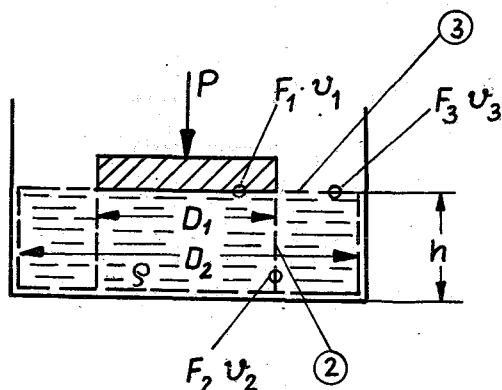
Massendämpfung

Beim Verschieben zweier Federplatten relativ zueinander bzw. beim Verschieben eines ganzen Paketes wird Flüssigkeit beschleunigt oder verzögert. Für diese Beschleunigung ist eine Kraft aufzubringen, die im System als Dämpfungskraft wirksam

ist, d.h. es ist eine Kraft, die den von außen aufgeprägten Kräften entgegenwirkt.

Die Größe dieser Kraft kann nach dem Impulssatz der Strömungslehre berechnet werden.

Als erstes wird eine einzelne Federscheibe in einem Flüssigkeitsgefäß betrachtet. Für diesen Fall wird die verwölbte Federscheibe durch eine ebene Platte ersetzt, die sich in der Symmetrieebene der verwölbten Scheibe befindetet.



Es sind 2 Fälle zu untersuchen:

1. Der Durchtritt der Flüssigkeit durch den Spalt (2);
2. der Durchtritt der Flüssigkeit durch den Spalt (3).

Fall 1: Nach dem Impulssatz der Strömungslehre ist

$$P = \rho F_1 v_1^2 - \rho F_2 v_2^2$$

Aus der Kontinuitätsbeziehung ergibt sich

$$F v_1 = F_2 v_2$$

Ferner gilt

$$F_2 = \pi D_1 h$$

Damit

$$v_2 = \frac{F_1 v_1}{\pi D_1 h}$$

Dann erhält man

$$P = \rho \left[F_1 v_1^2 - \frac{F_2 F_1^2 v_1^2}{\pi^2 D_1^2 h^2} \right]$$

oder

$$P = \rho F_1 v_1^2 \left[1 - \frac{F_1}{\pi D_1 h} \right] \quad (118)$$

Man erkennt, daß in diesem Fall die Kraft, abgesehen von der Verschiebegeschwindigkeit, auch noch von der Spaltweite abhängig ist.

Fall 2: Hier ergibt sich

$$P = \rho F_1 v_1^2 - \rho F_3 v_3^2$$

Die Kontinuitätsbeziehung ergibt

$$F_1 v_1 = F_3 v_3$$

$$v_3 = v_1 \frac{F_1}{F_3}$$

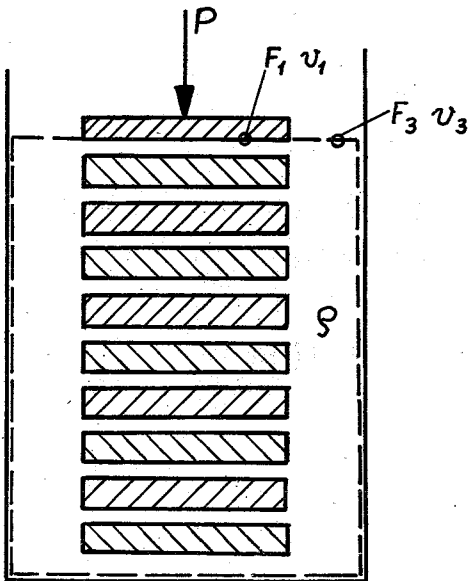
und damit

$$P = \rho F_1 v_1^2 \left[1 - \frac{F_1}{F_3} \right] \quad (119)$$

Fall 3: Das gesamte Federpaket

Für das gesamte Federpaket kann die Kontrollfläche in das ganze Gefäß gelegt werden.

Es ergibt sich hier die gleiche Beziehung wie unter (2), jedoch mit der entsprechenden Bezeichnung. Also



$$P = \rho F_1 v_1^2 \left[1 - \frac{F_1}{F_3} \right]$$

(120)

B₃ Dynamisches Verhalten der Feder

Nachdem nunmehr sämtliche Einflußgrößen auf die Bewegung eines in einer Flüssigkeit befindlichen Federpaketes bekannt sind, kann die Bewegungsgleichung aufgestellt werden. Es ergibt sich die folgende Gleichung:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + D_1 \frac{1}{x^3} \frac{dx}{dt} + D_2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + K_g \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + C(x)X = P(x,t) \quad (121)$$

Diese Diff.-Gleichung beschreibt zunächst das Verhalten einer einzelnen Federscheibe.

Die einzelnen Konstanten sind

m = Masse einer Federscheibe

$D_1 = 0,15 \pi \eta \frac{r_a^4}{h^3}$ Dämpfungskonstante der Plattendämpfung

$D_2 = \rho \frac{\pi r_a^4 d (r_a + 2s_2)^2}{96 s_2^3} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \lambda_m \frac{g}{2}$

Dämpfungskonstante der Kolbendämpfung.

$$K_g = \rho \pi r_a^2 \left[1 - \frac{\pi r_a^2}{F_R} \right]$$

Dämpfungskonstante der Massendämpfung

wo F_R = Abströmquerschnitt der Flüssigkeit ist.

$C(x)$ = Federkonstante der Federscheibe

$P(x,t)$ = Äußere Kraft

Eine, auch nur kurze Betrachtung der Bewegungsgleichung zeigt, daß diese einmal wegen der Nichtlinearität einiger Konstanten und dann wegen des quadratischen Gliedes der Veränderlichen in geschlossener Form nicht lösbar ist. Wie weit durch Linearisieren oder abschnittsweises Integrieren

der Gleichung eine angenäherte Lösung gefunden werden kann, sollen anschließende theoretische Untersuchungen, denen Modellversuche parallel laufen, ausweisen.

Zu gegebener Zeit wird über die gefundenen Ergebnisse weiter berichtet.

C Zusammenfassung

Im Core eines Kernreaktors werden an 2 Stellen gedämpfte Federelemente benötigt.

1. Im Abschaltstab zum Abbremsen des im Scram-Fall eingeschlossenen Stabes,
2. unterhalb der Brennstoffbündel zum Abfangen etwa abgerissener Bündel, so daß bei deren freiem Fall es weder zu einer Zerstörung von Teilen des Cores noch zu einer solchen des Bündels kommen kann.

Zweckmäßigerweise geschieht ein solches Abbremsen bzw. Abfangen durch eine gedämpfte Elastizität. Derartige Abfangelemente bestehen daher aus einer Feder, die mit einer Dämpfung gekoppelt ist. Bei flüssigkeitsgekühlten bzw. moderierten Reaktoren ist es vorteilhaft, eine hydraulische Dämpfung, die als Medium die Kühl- bzw. Moderatorflüssigkeit benutzt, einzusetzen. Bei dampfgekühlten Reaktoren ist diese Flüssigkeit Wasser, also eine solche relativ geringer Zähigkeit, besonders dann, wenn diese bei höherer Temperatur verwendet wird.

Bei den üblichen konventionellen Bauformen von Flüssigkeitsdämpfern ist es nur bei einigem konstruktivem Aufwand möglich, mit Wasser ausreichende Dämpfungskräfte zu bekommen.

Es wurde deshalb eine von den bisherigen, völlig abweichende Form einer Feder mit Dämpfung entwickelt und in einem Plexiglasmodell erprobt.

Die Feder besteht aus einzelnen sattelförmig verwölbten Scheiben, die, ähnlich Tellerfedern, zu einem Paket zusammengesetzt und in ein Gefäß eingebaut werden. Die Dämpfung geschieht durch das Herauspressen der Flüssigkeit zwischen den einzelnen Federscheiben und der Gefäßwand.

Die Federkenngrößen wurden theoretisch ermittelt und durch Messungen an einem Plexiglasmodell bestätigt.

Der Vorteil der vorliegenden Feder gegenüber anderen, z.B. Schraubenfedern besteht in dem einfachen Aufbau der Dämpfungseinrichtung, der Unempfindlichkeit gegen Federbruch und dem mehrfach besseren Arbeitsvermögen gegenüber Tellerfedern.

Literatur

- [1] Bronstein-Semendjadjew
Taschenbuch der Math., S. 197

- [2] Reutter, Darstellende Geometrie II
Karlsruhe 1958, S. 42

- [3] Biezeno/Grammel
Technische Dynamik, 2. Aufl. II, S. 487

- [4] Hütte I, 26. Aufl., 1936
S. 833, S. 69

- [5] Nadai, Elastische Platten
Berlin 1925, S. 39

- [6] C. Weber; Die Lehre der Drehungsfestigkeit,
VDI-Forschungsheft 249/1921

- [7] L. Föppl, Drang und Zwang III, S. 9

Formelzeichen

A	Konstante; Abkürzung
a	Konstante der Sattelfläche; $m^{1/2}$
B	Abkürzung
B(r)	Radiusfunktion
c	Federkonstante; kp/m
c	Konstante
D	Durchmesser der Kreisplatte; m
D ₁	Dämpfungskonstante
D ₂	
d	Dicke der Platte; m
E	Elastizitätsmodul; kp/m^2
F	Drillquerschnitt; Strömungsquerschnitt; m^2
f	Querschnittsfläche des Drillquerschnittes; m^2
FA	Formänderungsarbeit; mK
G	Gleitmodul; kp/m^2
h	Wölbung der Platte bezogen auf die Mittelebene; m
h _o	Vorverwölbung der Federplatte; m
(2h)	Durchfederung der Platte; m
J _p	polares Trägheitsmoment; m^4
i	Nummer der jeweiligen Federscheibe
K _g	Dämpfungskonstante der Massenkraft
L	Kantenlänge der quadratischen Platte; m
L _m	Ersatzlänge; m
ΔL	Dehnung
M	Momente; mkp
m	Querkontraktionszahl
n	Seitenverhältnis des Drillquerschnittes; Zahl der Federscheiben im Paket
P	Kraft auf die Platte; kp
P _s	Kräfte aus Schubspannungen; kp
P _N	Kräfte aus Normalspannungen; kp
P _D	Dämpfungskräfte; kp
p	Flächendruck; kp/m^2
Δp	Druckgefälle in der Strömung; kp/m^2
Q	Durchflußvolumen; m^3/sec
R	Radius der Kreisplatte; m
r	Radiuskoordinate; m

s_1	Weite des Plattenzwischenraumes; m
s_2	Randspaltweite; m
s_p	örtliche Spaltweite; m
s_m	mittlere Spaltweite; m
u_o	Durchsenkung eines Plattenpunktes gegenüber der Mittelpunktebene; m
v_o	Örtliche relative Verschiebegeschwindigkeit zweier Platten; m/sec
v_g	Verschiebegeschwindigkeit des Paketes; m/sec
w	Strömungsgeschwindigkeit zwischen Platte und Gehäuse; m/sec
$u; v;$ $x; y; z$	Plattenkoordinaten; m

β	Verformungswinkel
\mathcal{J}	Drillung/Längeneinheit
φ	Winkelcoordinate der Kreisplatte
ψ	Verdrehungswinkel
ξ	relative Verwölbung
η	Zähigkeit; kp
λ	Widerstandsbeiwert der Strömung
ρ	Wichte der Flüssigkeit;
σ	Normalspannungen; kp/m^2
τ	Schubspannungen; kp/m^2

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \text{Laplac-Operator}$$

\emptyset	betr. Kreisplatte
Φ	betr. quadratische Platte

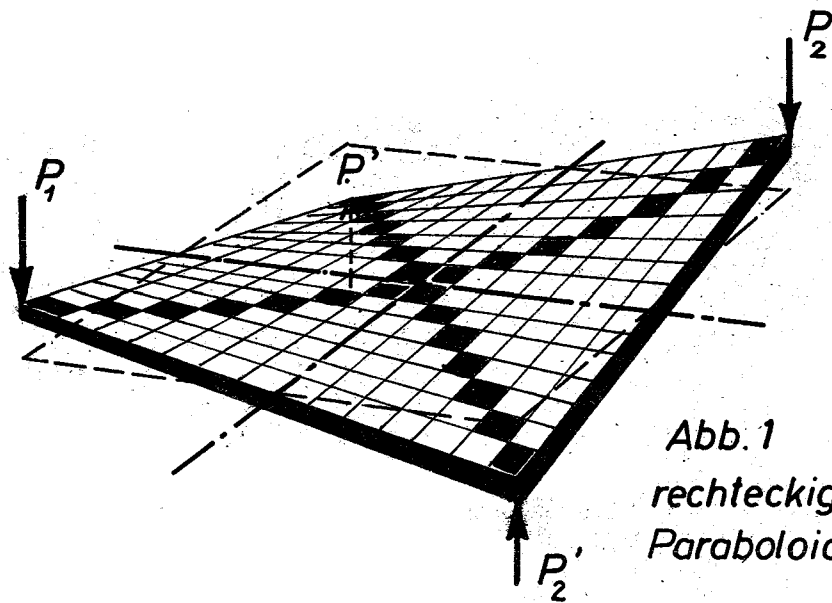


Abb. 1
 rechteckiges hyperbolisches
 Paraboloid. (Sattelfläche)

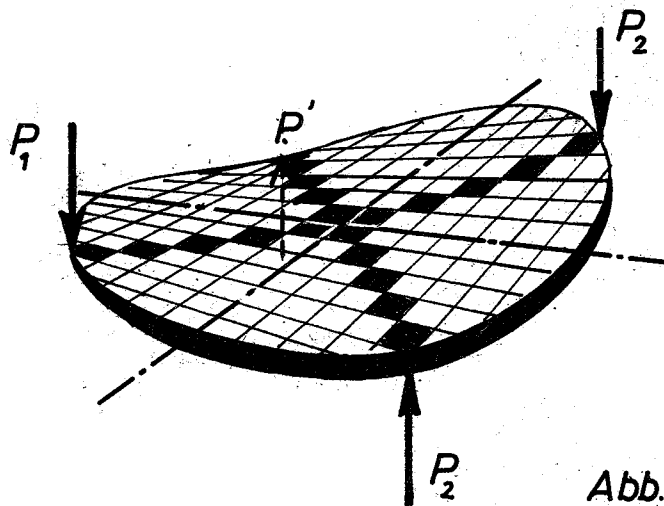
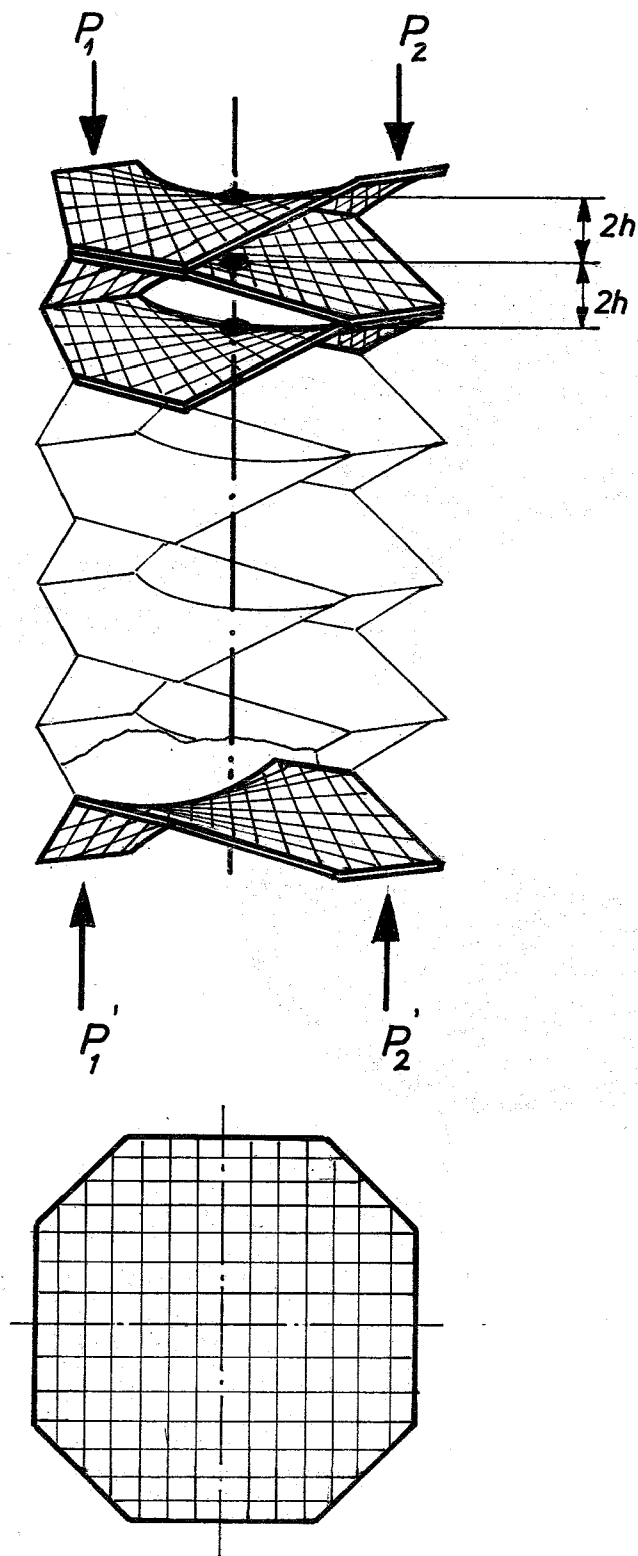


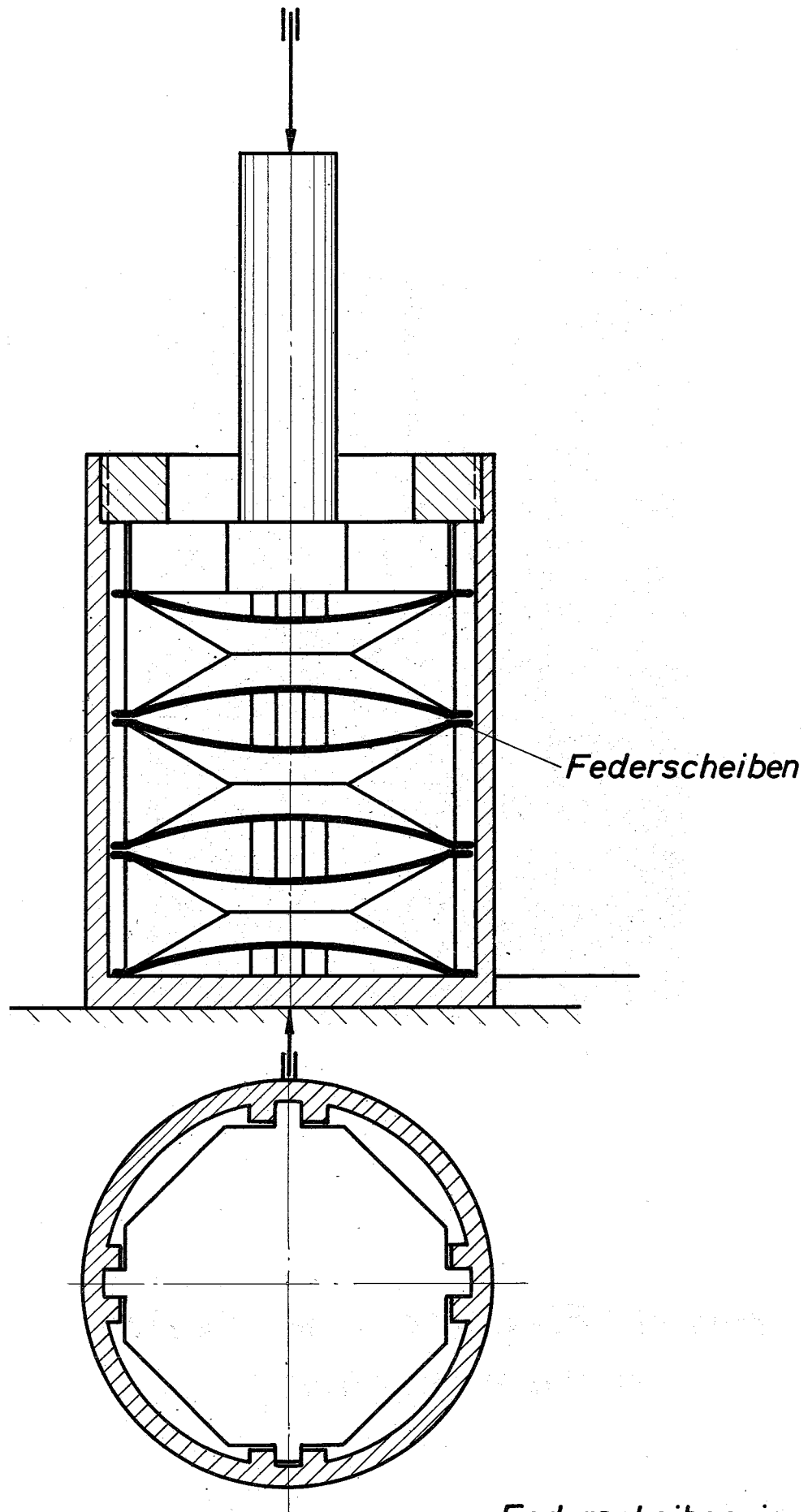
Abb. 2
 rundes hyperbolisches
 Paraboloid.

Abb. 1 u. 2



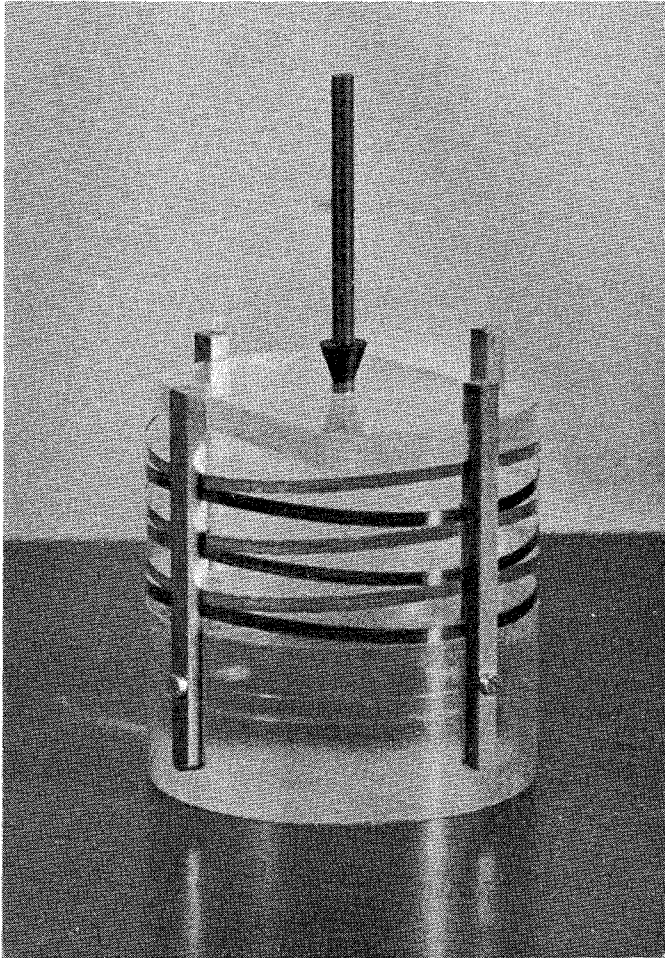
Übereinander - Schichtung mehrerer
Sattelflächen - Scheiben.

Abb. 3



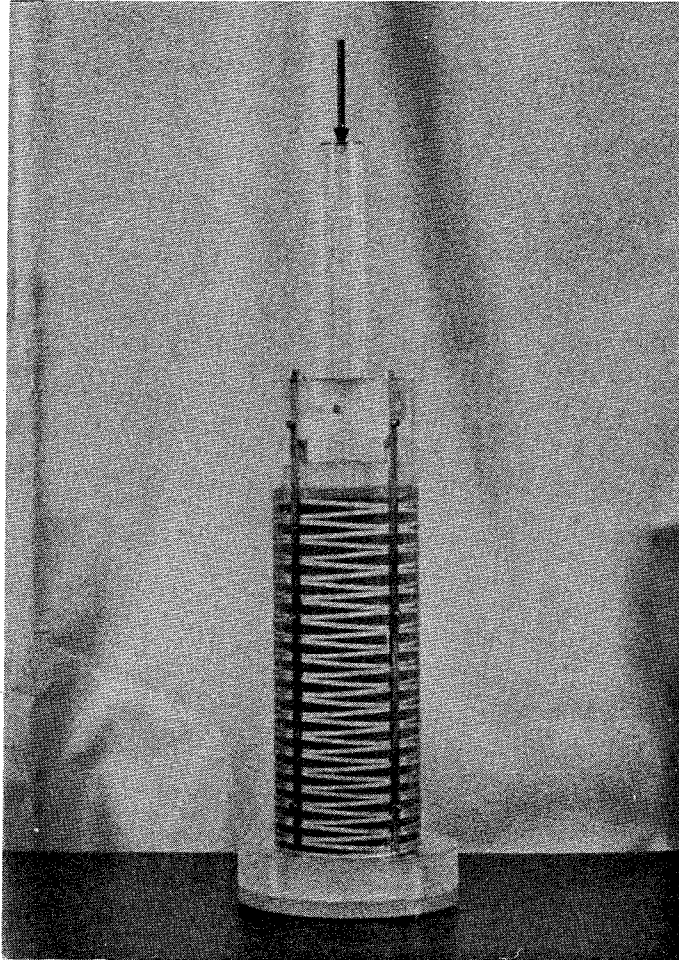
*Federscheiben in
zylindr. Gehäuse*

Abb. 4



*Modell (Plexiglas) einer Feder-
scheibenanordnung*

Abb. 5



***Federscheibenanordnung in zylindr.
Gehäuse mit Dämpf­flüssigkeit***

Abb. 6

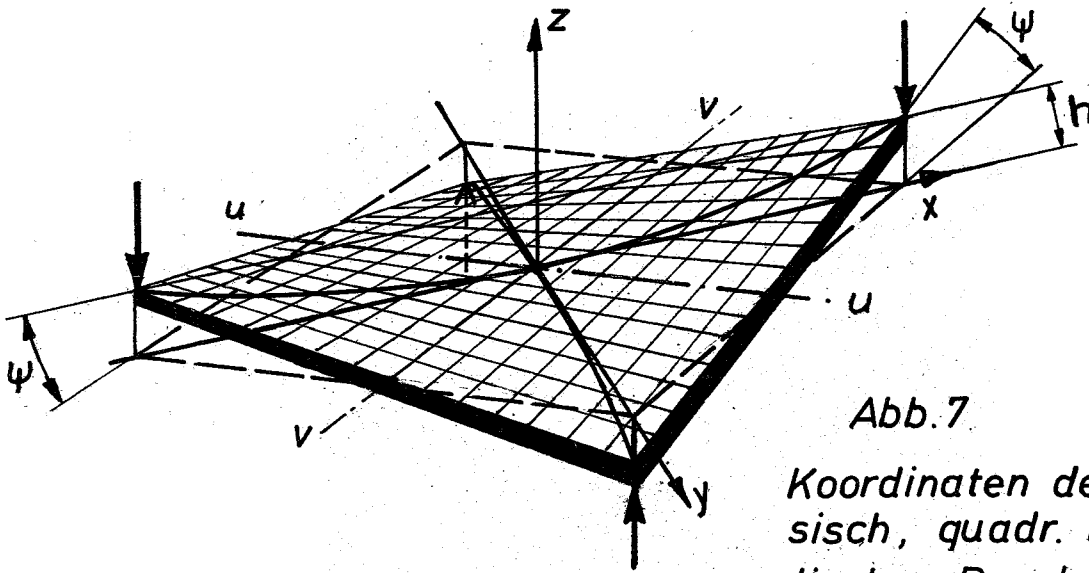


Abb.7

Koordinaten des kartesisch, quadr. hyperbolischen Paraboloids.

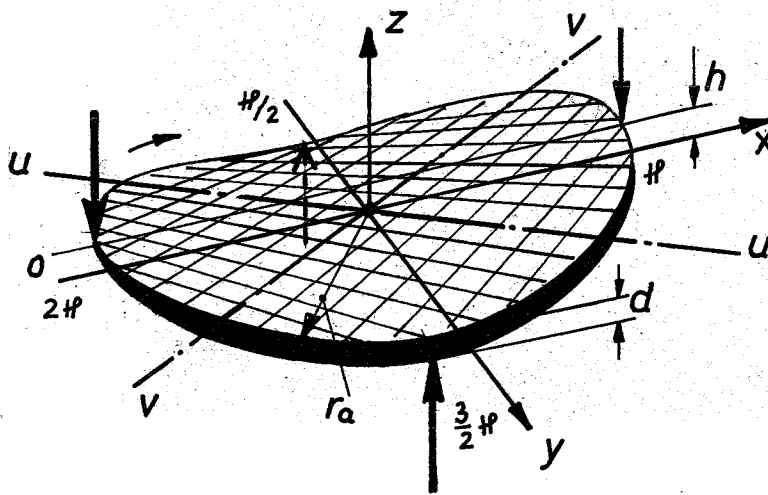


Abb.8

Polarkoordinaten des runden, hyperbolischen Paraboloids.

Abb.7u.8

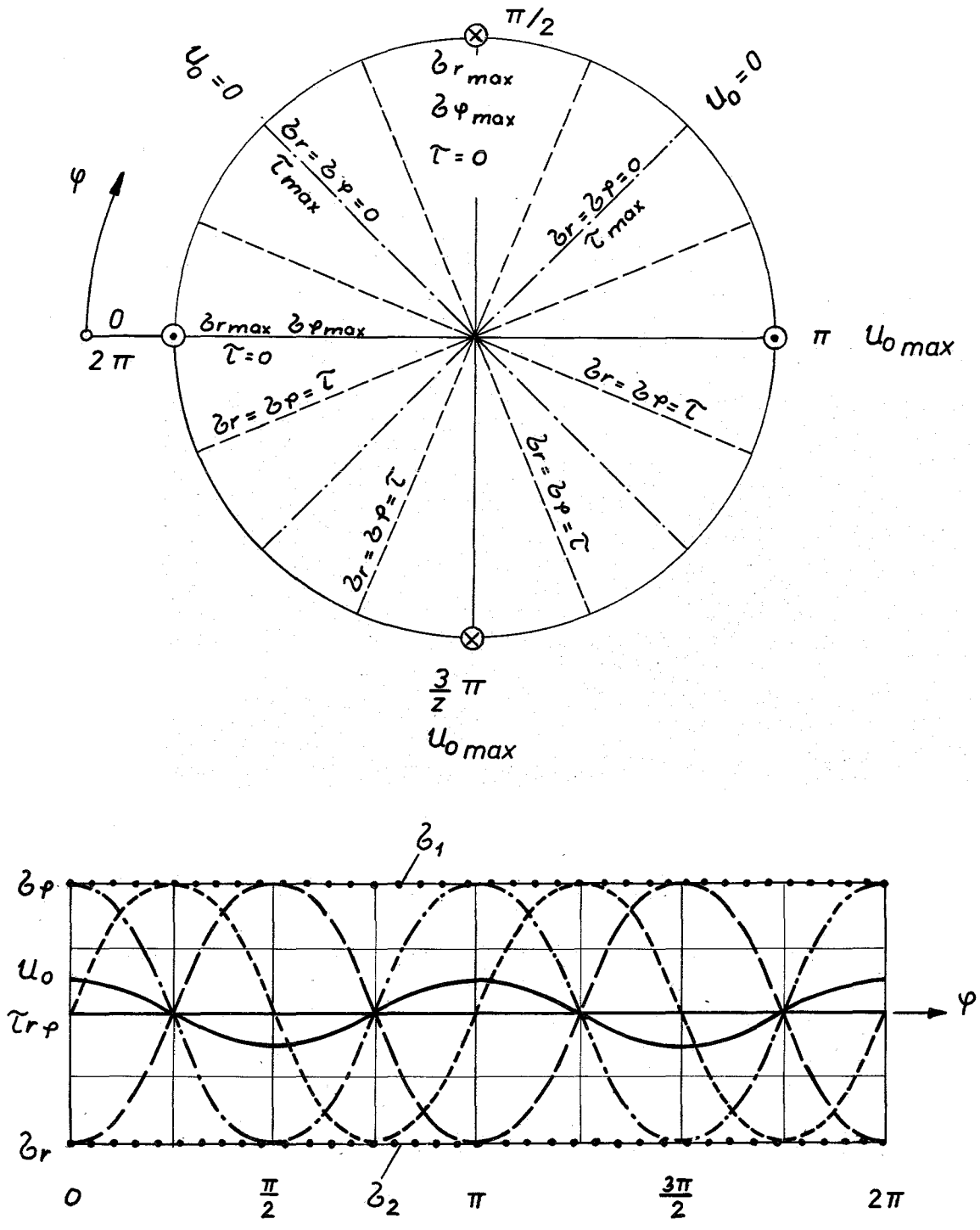


Abb. 9 Draufsicht und Randabwicklung der kreisförmigen Plattenfeder mit Darstellung der Spannungs- und Wölbungsfunktionen

Erläuterung:

- Biegespannung radial σ_r -----
- Biegespannung tangential σ_φ -.-.-.-
- Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ - - - - -
- Hauptspannung $\sigma_{1,2}$
- (Vergleichsspannung)
- Durchsenkung u_0 ———

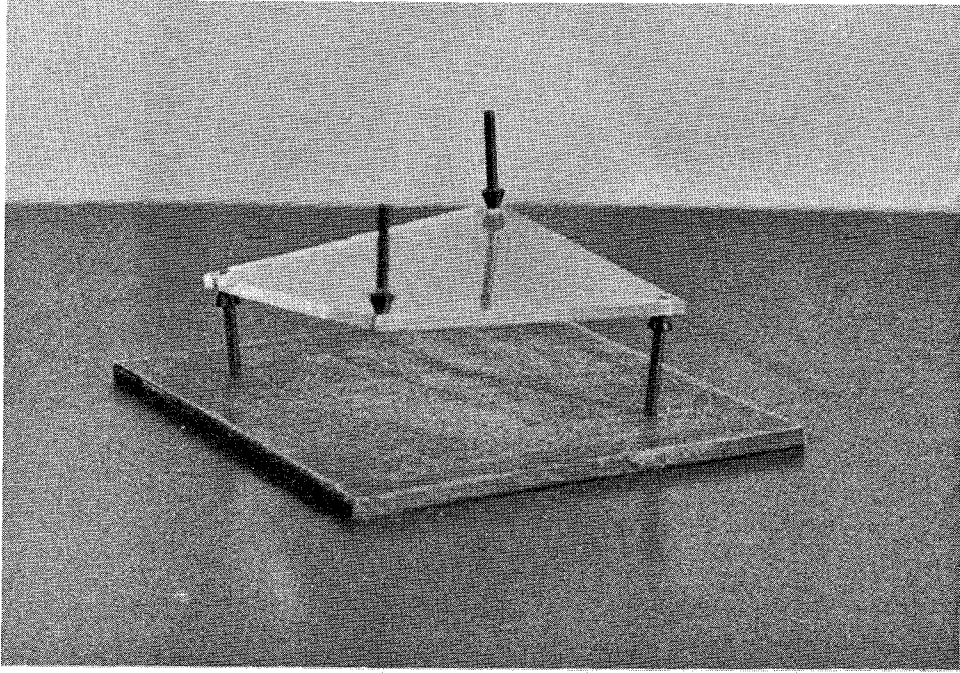
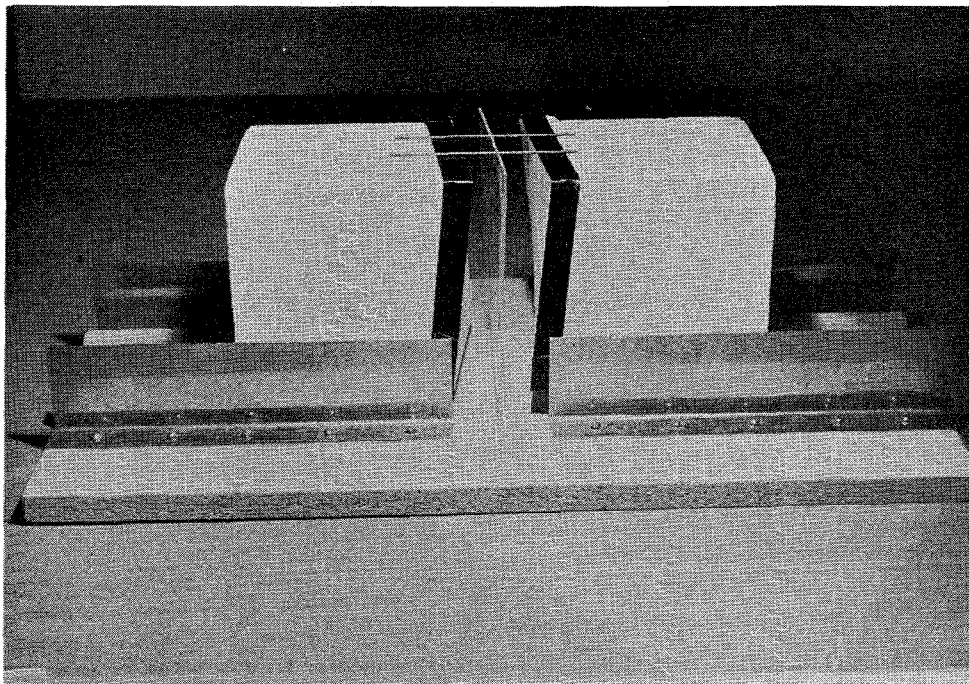
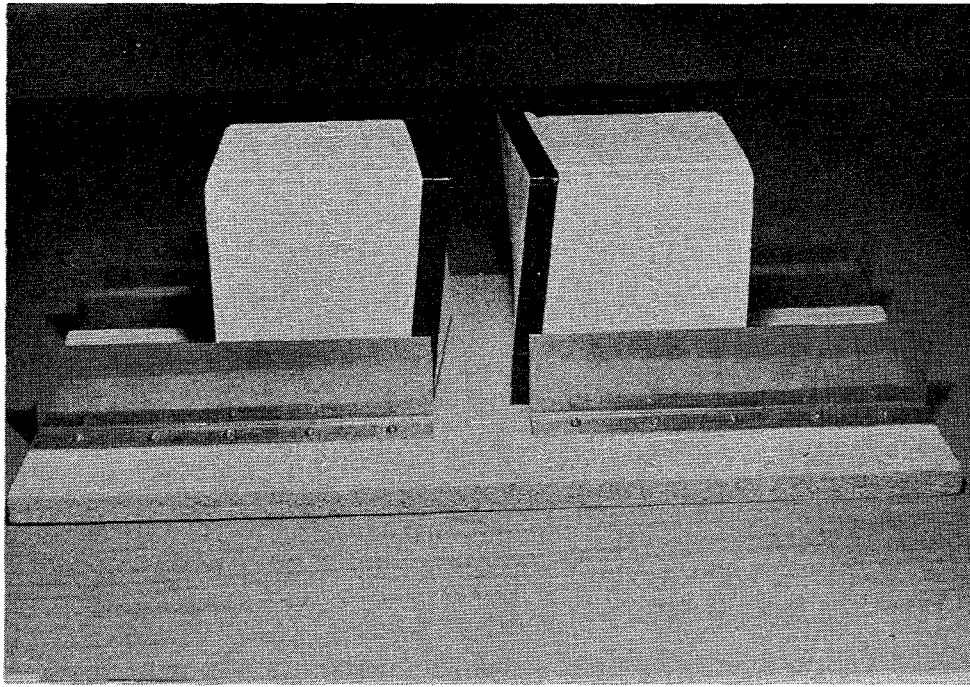
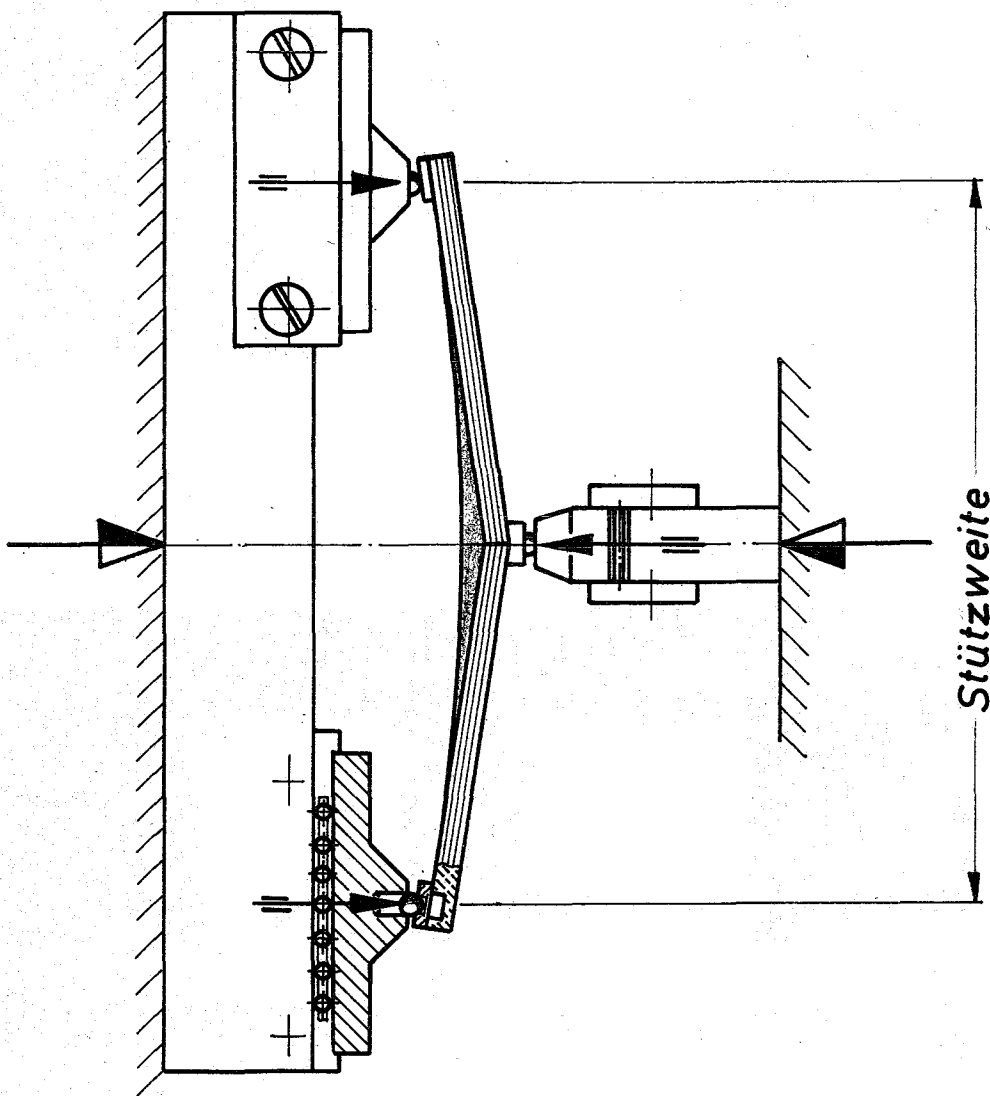


Abb. 10



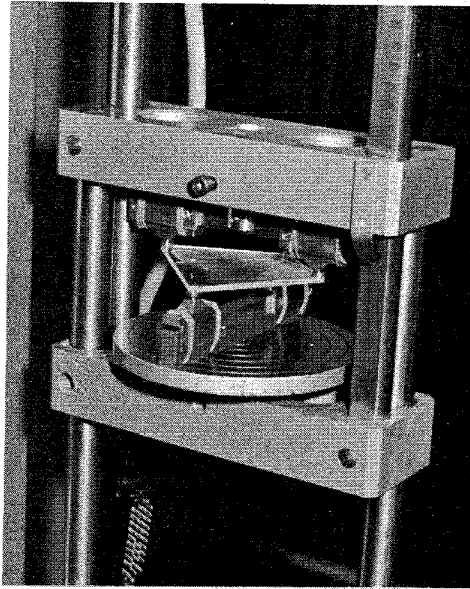
Gipsformen zum Prägen der Federscheiben



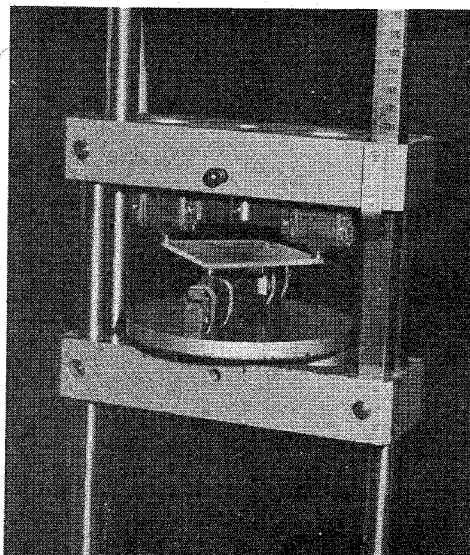
Belastungseinrichtung

Stützweite

Abb. 12

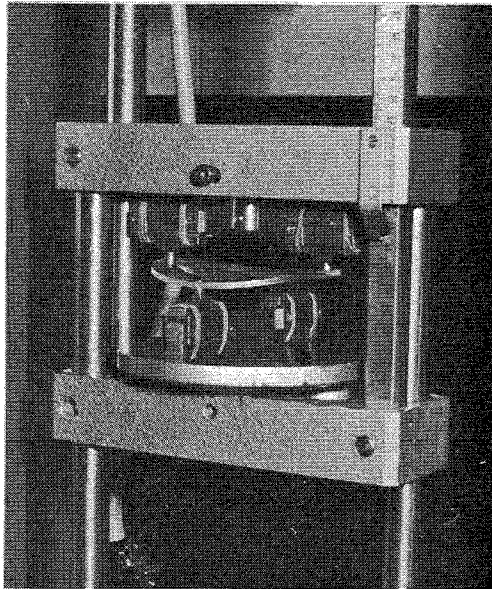


unbelastet

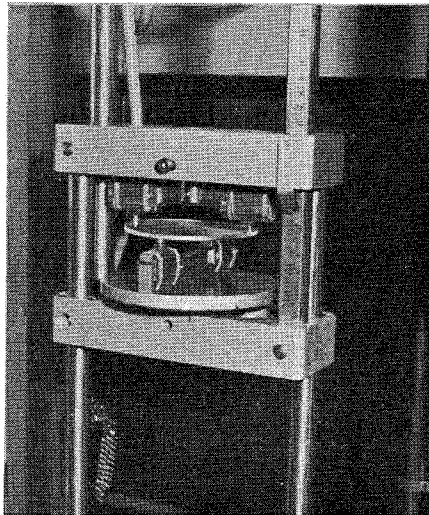


belastet

Belastungsmessung an Federscheibe
aus Plexiglas, 72 mm \varnothing , 3 mm dick



unbelastet



belastet

*Belastungsmessung an Federscheibe
aus Plexiglas, 100 mm ϕ , 3 mm dick*

Abb. 14

P_{KP}

Plexiglas ϕ

ebene Platte
quadratisch : $L = 72 \text{ mm}$
Stützweite : $D_{St} = 96 \text{ mm}$
Plattenst. : $d = 2,96 \text{ mm}$

20

15

10

5

4

3

2

1

0

5

10

$\epsilon = (2h) \text{ mm}$

gemessen

gerechnet

Abb. 15

P_{KP}

Plexiglas ϕ

verwölbte Platte

quadratisch : $L = 72 \text{ mm}$

Stützweite : $D_{st} = 96 \text{ mm}$

Wölbung : $2h_0 = 7,8 \text{ mm}$

Plattenst. : $d = 2,9 \text{ mm}$

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

5

10

$\epsilon = (2h) \text{ mm}$

gemessen

gerechnet

Abb. 16

Plexiglas ϕ

P_{KP}

ebene Platte
kreisrund : $D = 100 \text{ mm}$
Stützweite : $D_{St} = 96 \text{ mm}$
Plattenst. : $d = 2,96$

20

15

10

5

4

3

2

1

0

5

10

$E = (2h) \text{ mm}$

gemessen

gerechnet

Abb. 17

R_{KP}

Plexiglas \emptyset

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

gerechnet

gemessen

verwölbte Platte
kreisrund : $D=100\text{mm}$
Stützweite : $D_s=96\text{mm}$
Wölbung : $2h_0=78\text{mm}$
Plattenst. : $d=3,05\text{mm}$

5

10

$\xi=(2h)\text{mm}$

Abb. 18

