

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

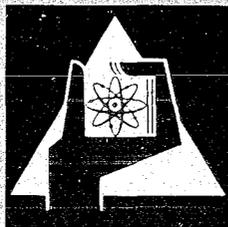
April 1969

KFK 994

Institut für Experimentelle Kernphysik

Eine empirische Methode zur Bestimmung der Verteilung des  
Energieverlustes für ionisierende Teilchen bei Durchgang durch Materie

Ch. Weddigen



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

April 1969

KFK 994

Institut für Experimentelle Kernphysik

---

EINE EMPIRISCHE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER  
VERTEILUNG DES ENERGIEVERLUSTES FÜR IONISIE-  
RENDE TEILCHEN BEI DURCHGANG DURCH MATERIE

---

Ch. Weddigen

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H. Karlsruhe



## Abstract

An empirical method to calculate energy distributions for charged Particles after passage through an absorber is given. On this subject, only theoretical treatments are known. The method is based on the fact that range distributions are - within a few percent - gaussian shaped and that relative range straggling is practically independent of absorber material. Thus, by using graphs for particle range, differential energy loss, and relative range straggling energy distributions for small up to complete energy losses can be easily calculated. This paper gives a brief historical review on theoretical and experimental work published on this subject. A description of the method is given and the influence of asymmetries in range distributions is discussed. It is shown how the method can be inversed, in order to obtain range straggling from experimental results for energy straggling. Finally, formulae are given for correction with respect to experimental sources of error. The influence of reaction losses on energy distributions has not been taken into account.

<u>Inhalt:</u>	Seite
1. Einführung	1
2. Historischer Überblick	2
3. Darstellung der Methode für symmetrische Ortsverteilungen	5
4. Der Einfluss von Asymmetrien in den Ortsverteilungen	8
5. Bestimmung der Reichweitestreuung aus der Restenergieverteilung	12
Anhang: Der Einfluss experimenteller Störungen	15
Literaturverzeichnis	17
Tabelle und Figuren	18

## 1. Einführung

Wird ein monoenergetischer Strahl ionisierender Teilchen durch einen Absorber teilweise abgebremst, so erleidet er auf Grund der Statistik der elementaren Abbremsprozesse eine Energieverbreiterung. Die Verteilung des Energieverlustes oder der Restenergie hängt von der Anfangs- und der Restenergie sowie von dem Absorbermaterial ab. Diese Verteilung tritt als Störeffekt bei jedem Experiment auf, bei welchem Transmissionszähler verwendet werden. Ferner bestimmt dieser Effekt die Energieschärfe, welche sich bei der Variation der Strahlenergie durch Absorber an energiefixen Teilchenbeschleunigern einstellt.

Obwohl also in einer großen Anzahl von Experimenten wesentlich, ist praktische keine systematische experimentelle Untersuchung dieses Effektes bekannt. Dagegen interessierten sich die Theoretiker schon sehr früh für diese Erscheinung. Ihre Ergebnisse sind für den Experimentator jedoch nicht ohne größeren Rechenaufwand und Nachschlagen von material-spezifischen Ionisierungspotentialen anwendbar.

Die vorgeschlagene Methode geht zunächst von einer als gaussförmig angenommene Reichweiteverteilung für Anfangs- und Restenergie aus. Quadratische Subtraktion der betreffenden Reichweitestreuungen ergibt die Breite der Verteilung des Ortes in einem unendlich dicken Absorber, an dem die einfallenden Teilchen auf eine scharfe Energie (= mittlere Restenergie) abgebremst sind. Division dieser Ortsbreite durch den differentiellen Energieverlust liefert die gesuchte Breite der Verteilung für die Restenergie.

Der Handhabung der Methode kommt es entgegen, daß die relative Reichweitenstreuung  $\alpha = \Delta R/R$  für eine Teilchenart wenig energieabhängig und praktisch materialunabhängig ist /1/. Auch bei Auftreten unsymmetrischer Orts- und Energieverteilungen bleibt die Methode mit einer Genauigkeit von einigen % anwendbar /2/.

Eine andere Anwendung der Methode besteht darin, daß sie mit geringem experimentellem Aufwand präzise Messungen der Energieabhängigkeit der Reichweitestreuung bei fester Primärenergie ermöglicht.

Im Folgenden wird zunächst ein historischer Überblick gegeben, der sich mangels bekannter experimenteller Untersuchungen im wesentlichen auf die Diskussion theoretischer Arbeiten beschränken muss. Darauf folgt die Darlegung der Methode selber, und zwar für symmetrische Reichweiteverteilungen. Im vierten Abschnitt wird auf ein Verfahren zur Behandlung unsymmetrischer Ortsverteilungen eingegangen.

Abschließend wird auf die Umkehrung der vorgeschlagenen Methode eingegangen, nämlich auf die Bestimmung der Reichweitestreuung durch Messung der Restenergieverteilung. In dem Anhang werden Beziehungen zur Berücksichtigung experimenteller Störeffekte angegeben.

## 2. Historischer Überblick

Die ersten bekannten Behandlungen der Verteilung der Restenergie von  $\alpha$  und  $\beta$ -Teilchen nach Durchtritt durch Absorber stammen von Bohr /3/ aus den Jahren 1913 und 1915. Unter Berücksichtigung relativistischer Effekte fand Bohr für die Restenergie  $e$  - außer für sehr dünne Absorberschichten - eine Gaussverteilung

$$W(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta E} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e-E}{\Delta E}\right)^2} \quad (1)$$

mit der Streuung (Varianz)  $\Delta E$  um eine mittlere Restenergie  $E$ . Es konnte im Rahmen der damaligen Messgenauigkeit zufriedenstellende Übereinstimmung mit einigen wenigen experimentellen Daten gefunden werden.

Erst ab 1929 folgten weitere theoretische Arbeiten, von denen die wichtigsten hier kurz aufgeführt werden.

Zunächst war es Wilson /4/, der die Bohr'schen Ansätze für die Abbremsung von  $\beta$ -Teilchen erweiterte und die zwischenzeitlich beobachtete Asymmetrie experimenteller Verteilungen qualitativ richtig wiedergab. Seine Ergebnisse erbrachten jedoch für die Breite der Verteilungen einen um einen Faktor 2,3 zu kleinen Wert. Diese Diskrepanz wurde von Williams /5/ in weiteren Arbeiten und durch Möller /6/ behoben, und zwar durch eine genauere Berücksichtigung der Atomhülleneigenschaften und durch eine strengere relativistische Behandlung des Problems.

1944 behandelte Landau /7/ den Grenzfall sehr dünner Absorberschichten. Er setzte dabei voraus, daß die Geschwindigkeit der ionisierenden Teilchen klein ist gegenüber Elektronengeschwindigkeit in den Hüllen der Absorberatome. 1948 erweiterte Symon /8/ die Ansätze von Landau auf dicke Absorberschichten und schwere Teilchen mit kinetischen Energien zwischen  $10^{-2}$  und 10 Mal ihrer Ruhemasse.

Neun Jahre später gab Vasilov /9/ eine Anwendung der von Landau benutzten Technik der Laplace Transformationen auf den Fall mäßig starker Absorption. Hier wie bei der folgenden Arbeit fehlen allerdings Vergleiche mit experimentellen Daten.

Die letzten theoretischen Arbeiten stammen von Tschalaer (1968). Zunächst gab er für eine Vielfalt von Teilchen (Protonen bis K-Mesonen), sowie für Restenergien herab bis 10 % der Primärenergie reduzierte Verteilungen der Restenergie an /10/, welche durch zwei Parameter gekennzeichnet sind. Diese Parameter sind Breite und Schiefheit. Dabei unterscheidet Tschalaer zwei Gebiete der Energieabsorption:

- 1 Abbremsung bis zu etwa 50 % der Anfangsenergie (stochastic region). Hier ist die Verteilung des Energieverlustes im wesentlichen durch die Statistik der elementaren Abbremsprozesse bestimmt. Die Schiefheit der Verteilungen nimmt mit abnehmender Restenergie monoton ab. Für sehr geringen Energieverlust stimmt die Tschalaer'sche Verteilung mit der Landau-Verteilung zufriedenstellend überein. Die auftretenden Schiefheiten in diesem Bereich sind im wesentlichen dadurch bedingt, daß der Energieverlust für einen elementaren Abbremsprozess nicht fest ist, sondern zwischen einem Maximal- und einem Minimalwert schwankt, und daß in diesem Intervall große Energieverluste wahrscheinlicher sind als kleine.
- 2 Abbremsung auf weniger als 50 % der Anfangsenergie (bulk region). Ab etwa 50 % Energieabsorption gewinnt die Energieabhängigkeit des differentiellen Energieverlustes im Bereich der Energieverteilung an Bedeutung. Es resultiert eine mit abnehmender Restenergie zunehmende Schiefheit der Verteilungen.

In einer weiteren Arbeit schränkt Tschalaer /11/ die Anwendbarkeit seiner Energieverteilungen hinsichtlich der minimalen Restenergien ein. Eine zusätzliche Korrektur für teilweise vollständige Abbremsung von Teilchen bei starker Energieabsorption ergibt sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten von Raju /12/ für die Abbremsung von 49 MeV Protonen auf etwa 5 MeV. Diese Messungen waren die einzigen, welche zum Vergleich mit Tschalaers Rechnungen herangezogen werden konnten. Laufende Messungen /2/ für die Abbremsung von 8,8 MeV  $\alpha$ -Teilchen zeigten, daß für diesen Fall die berechneten Breiten der Restenergieverteilungen etwas zu klein sind.

### 3. Darstellung der Methode für symmetrische Ortsverteilungen

Die theoretischen Methoden verfolgen die statistischen Schwankungen des Teilchenenergieverlustes auf dem Weg von Absorberanfang bis -ende. Die angegebenen reduzierten Verteilungen werden durch Varianz und Schiefheit charakterisiert. Die zur Berechnung dieser Parameter erforderlichen Daten sind Teilchensorte, Anfangsenergie, Endenergie und mittleres Ionisierungspotential der Absorberatome. Anstelle der Endenergie tritt praktisch die Absorberdicke sowie die Energie-Reichweitebeziehung für das Absorbermaterial. Das mittlere Ionisierungspotential ist keine häufig tabellierte Größe und nur für wenige Materialien zugänglich. Hierdurch sowie durch die erforderlichen Umrechnungen erhalten die theoretischen Ergebnisse in ihrer Anwendbarkeit eine gewisse Schwerfälligkeit.

Bei der vorgeschlagenen empirischen Methode tritt an Stelle des mittleren Ionisierungspotentials die relative Reichweite-streuung  $\alpha = \Delta R/R$ , welche zwar eine geringe Energieabhängigkeit besitzt, aber praktisch materialunabhängig ist. Ferner entfallen umständliche Rechnungen. Als Parameter für die Verteilungen wird die  $e^{-1/2}$ -Breite verwendet, welche für gaussförmige Verteilungen mit der Varianz identisch ist, ferner die mittlere relative Asymmetrie  $\epsilon$  bei der  $e^{-1/2}$ -Breite (siehe Abschnitt 4).

Im Folgenden wird die empirische Methode unter Voraussetzung symmetrischer Ortsverteilungen entsprechend (1) erläutert. Bestimmt werden die Verteilungen der absorbierten oder Restenergie, welche bei der Abbremsung monoenergetischer Teilchen der Anfangsenergie  $E_0$  durch einen homogenen Absorber der Dicke  $X$  auf eine mittlere Restenergie  $E$  auftreten. In die Überlegungen gehen fünf verschiedene Verteilungen ein, und zwar drei Orts- und zwei Energieverteilungen (siehe auch Fig. 1):

- 1 Verteilung  $W_1(r_0)$  der Reichweite  $r_0$  für monoenergetische Teilchen der Energie  $E_0$  mit der mittleren Reichweite  $R_0$  und der Streuung  $\Delta R_0$  in einem unendlich dicken Absorber.
- 2 Verteilung  $W_2(r)$  der Reichweite  $r$  für monoenergetische Teilchen der Energie  $E$  mit der mittleren Reichweite  $R$  und der Streuung  $\Delta R$  in einem unendlich dicken Absorber ( $E$  ist der Mittelwert der gesuchten Restenergieverteilung).
- 3 Verteilung  $W_3(x)$  des Ortes  $x$ , an dem die Teilchen in einem unendlich dickem Absorber von der Anfangsenergie  $E_0$  genau auf die Energie  $E$  abgebremst worden sind. Der Mittelwert  $X$  ist gleich der Absorberdicke. Die Streuung der Verteilung sei  $\Delta X$ .

Da  $r_0 = x + r$  ist und die Verteilungen  $W_2$  und  $W_3$  statistisch unabhängig sind, geht  $W_1$  aus dem Faltungsintegral

$$W_1(r_0) = \int W_2(r) W_3(r_0 - r) dr$$

hervor. Da sich die Varianzen von Gaussverteilungen quadratisch addieren, ergibt sich mit den relativen Reichweitestreuungen  $\alpha_0 = \Delta R_0 / R_0$  und  $\alpha = \Delta R / R$

$$W_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \Delta X} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-X}{\Delta X}\right)^2},$$

$$\Delta X^2 = (\alpha_0 R_0)^2 - (\alpha R)^2. \quad (2)$$

- 4 Verteilung  $W_4(e_a)$  der in dem Absorber der Dicke  $X$  absorbierten Energie  $e_a$  mit dem Mittelwert  $E_a = E_0 - E$ . Es wird  $W_4(e_a) = W_3(x(e_a)) (+dE/dx)_{e_0 - e_a}$ , wobei  $x$  gemäß der Beziehung  $x = X + R(E_0 - E_a) - R(E_0 - e_a)$  einzusetzen ist;  $dE/dx < 0$  ist der differentielle Energieverlust.

5 Verteilung  $W_5(e)$  der Restenergie  $e$  mit dem Mittelwert  $E$ .  
Hier lauten die entsprechenden Beziehungen

$$W_5(e) = W_3(x(e)) / (-dE/dx)_e, \quad (3a)$$

$$x(e) = X + R(e) - R(E), \quad (3b)$$

$$X = R(E_0) - R(E). \quad (3c)$$

Die Verteilungen  $W_4$  und  $W_5$  unterscheiden sich - abgesehen von ihren verschiedenen Mittelwerten - bei Auftreten von Asymmetrien. Ferner ergeben sich Unterschiede bei der Berücksichtigung einer im Experiment auftretenden Verteilung der Primärenergie (siehe Tab. I).

Die Beziehung (3) ist gut geeignet, die asymmetrischen Energieverteilungen bei Abbremsung auf niedrige Restenergien zu beschreiben (bulk region). Die Voraussetzung symmetrischer Reichweiteverteilungen ist nämlich gut erfüllt (siehe Abschnitt 4), so daß die erwähnte Asymmetrie vorwiegend von der Energieabhängigkeit des differentiellen Energieverlustes in (3a) und der Nichtlinearität der Energie-Reichweite-Beziehung in (3b) herrührt.

Besonders übersichtlich werden die Verhältnisse, wenn der differentielle Energieverlust über die Breite der Restenergieverteilung als konstant angesehen werden kann. Man erhält dann eine gaussförmige Verteilung für die Restenergie mit einer in (2) definierten Breite

$$\Delta E(E_0, E) = (-dE/dx)_E ((\alpha_0 R_0)^2 - (\alpha R)^2)^{1/2} \quad (4)$$

- $\Delta E$  = Breite der Restenergieverteilung  
 $E_0$  = Anfangsenergie  
 $E$  = mittlere Restenergie  
 $dE/dx$  = differentieller Energieverlust ( $< 0$ )  
 $\alpha_0, \alpha$  = relative Reichweitestreuung bei den  
Energien  $E_0$  und  $E$   
 $R_0, R$  = Reichweiten bei den Energien  $E_0$  und  $E$ .

Wie bereits erwähnt, ist die relative Reichweitestreuung wenig energieabhängig. Sie beträgt beispielsweise 0.03, 0.024 und 0.02 für Protonen, Deuteronen und  $\alpha$ -Teilchen bei einer Teilchenenergie von 10 MeV. Bei 100 MeV sind die entsprechenden Werte nur um etwa 20 bis 30 % kleiner /1/.

Hieraus ergeben sich aus (4) für zwei häufig auftretende Sonderfälle die folgenden Näherungen:

- 1 Bei großen Absorberdicken ( $R_0^2 \gg R^2$ ) erhält man

$$\Delta E(E_0, E) \approx (-dE/dx)_E \alpha_0 R_0 \quad (5)$$

- 2 Für geringe Absorberdicken ( $E_0 - E \ll E_0$ ) wird  $\alpha = \alpha_0$   
 $R_0^2 - R^2 \approx 2R_0(E_0 - E) / (\frac{dE}{dx})_{E_0}$  und somit

$$\Delta E(E_0, E) \approx \alpha_0 (2(-dE/dx)_{E_0} R_0 (E_0 - E))^{1/2}. \quad (6)$$

#### 4. Der Einfluss von Asymmetrien in den Ortsverteilungen

Wie in Abschnitt 3 gezeigt wurde, können auch bei symmetrischen Ortsverteilungen aufgrund der Energieabhängigkeit des differentiellen Energieverlustes und der Nichtlinearität zwischen Teilchenreichweite und Teilchenenergie unsymmetrische Energieverteilungen auftreten. Die Ermittlung dieser Asymmetrien ist im Rahmen der gemachten Voraussetzungen exakt möglich.

Anders liegen die Verhältnisse bei Auftreten von Asymmetrien in den Ortsverteilungen. Diese Asymmetrien sind:

- 1 Asymmetrische Ortsverteilung der Teilchenreichweiten und damit asymmetrische Verteilung  $W_3$  in (2). Diese Asymmetrien haben bei der  $e^{-1/2}$ -Breite der Verteilungen die Größe von einigen Prozent /2/, /13/.
- 2 Asymmetrische Energieverteilung des einfallenden Teilchenstrahles. Diese Asymmetrie wirkt sich wie eine asymmetrische Ortsverteilung aus (siehe Anhang).

Eine exakte analytische Beschreibung des Einflusses dieser Asymmetrien ist schon wegen der dabei auftretenden mathematischen Schwierigkeiten nicht möglich. Man kann diesen Einfluss jedoch empirisch untersuchen, indem man Meßergebnisse für die Restenergieverteilung bei symmetrischer Primärenergieverteilung mit solchen bei asymmetrischer Primärenergieverteilung vergleicht. Vorläufige Messungen /2/ haben ergeben, daß man zu konsistenten Ergebnissen bei der Bestimmung der relativen Reichweitestreuung gelangt, wenn man die asymmetrischen Verteilungen in der Nähe ihres Maximums durch die Verteilungsfunktion

$$W(y) = \frac{1 + 2\varepsilon(y-Y)/\Delta}{\sqrt{2\pi} \Delta} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y-Y}{\Delta} + \varepsilon \left( \frac{y-Y}{\Delta} \right)^2 \right)^2} \quad (8)$$

beschreibt und die Größe  $\Delta$  wie die Varianz einer Gaussverteilung behandelt.

Diese Verteilung (8) ist auf 1 normiert und stellt einen Sonderfall einer veränderten Verteilungsfunktion nach Johnson /14/ dar.

Unter Berücksichtigung nur des exponentiellen Faktors in (8) haben  $\Delta$  und  $\epsilon$  die Bedeutung der  $e^{-1/2}$ -Breite und der relativen Asymmetrie bei dieser Breite der Verteilungen (siehe Fig. 2):

$$W(Y+\Delta) + W(Y-\Delta) \approx e^{-1/2} \cdot 2 W(Y)$$

$$W(Y+\Delta (1-\epsilon)) \approx W(Y-\Delta (1+\epsilon)) \approx e^{-1/2} W(Y)$$

Während  $\Delta$  der Varianz einer Gaussverteilung entspricht und wie diese behandelt wird, charakterisiert  $\epsilon$  das asymmetrische Verhalten der Verteilung in unmittelbarer Umgebung ihres Maximums. Die Einführung von  $\epsilon$  an Stelle der Schiefeit ist insofern sinnvoll, als die asymmetrischen Ausläufer der Verteilungen, welche stärker durch die nach theoretischen Methoden gewonnenen Schiefeiten beschrieben werden, wegen Untergrundproblemen experimentell schwer zugänglich und vor allem bei höheren Teilchenenergien durch Reaktionsverluste in den Zählern verfälscht werden.

Figur 3 zeigt die Abhängigkeit der Asymmetrie  $\epsilon$  der Restenergieverteilung bei der Abbremsung von  $\alpha$ -Teilchen der Primärenergie  $E_0 = 8,78$  MeV auf die Restenergie  $E$ , und zwar durch Luft (Kreise) und Helium (Dreiecke).  $\epsilon$  ist hier für  $E/E_0 < 0,9$  unabhängig von der Restenergie. Figur 4 zeigt entsprechende Ergebnisse für die Abbremsung von  $5,48$  MeV  $\alpha$ -Teilchen. Während die Werte von  $\epsilon$  in Figur 3 aufgrund des geringen Wertes bei  $E_0$  auf Asymmetrien der Reichweiteverteilungen beruhen, dominiert in Figur 4 die anfängliche Strahlasymmetrie über den gesamten Bereich der Restenergie. Weder in Figur 3 noch in Figur 4 ist im Rahmen der Messgenauigkeit ein Unterschied zwischen Absorption in He und in Luft festzustellen. Dies läßt auf eine materialunabhängige relative Asymmetrie  $\epsilon$  der Reichweiteverteilungen schliessen.

Der sich in beiden Figuren überlappende Restenergiebereich kann zu einem Test für die Addition von Asymmetrien in den Ortsverteilungen im Rahmen der beschriebenen Methode herangezogen werden. Hierzu wurden zwei Ansätze für die Addition der relativen Asymmetrie bei der Faltung zweier durch (8) angenäherte Verteilungen gemacht:

1 Der Exponent in (8) läßt sich mit  $y-Y = z$  schreiben als

$$\frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{\Delta} + \epsilon \frac{z}{\Delta^2} \right)^2 \approx \frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{\Delta^2} + 2\epsilon \frac{z}{\Delta^3} \right),$$

Der erste Ansatz besteht nun darin, daß  $2\epsilon \frac{z}{\Delta^3}$  als Korrektur zu  $1/\Delta^2$  aufgefasst wird. Bei der Faltung zweier Verteilungen, gekennzeichnet durch die Indices 1 und 2, wird die quadratische Addition der Varianzen entsprechend der Faltung von Gaussverteilungen auf die Kombination  $\left( \frac{1}{\Delta_i^2} + 2 \frac{z_i}{\Delta_i^3} \right)$  angewandt. Nach längerer Rechnung und Vernach-

lässigung höherer Glieder erhält man für die nicht-indizierten Grössen des Faltungsproduktes mit  $z_1 + z_2 = z$

$$\epsilon \Delta = \epsilon_1 \Delta_1 + \epsilon_2 \Delta_2, \quad (9)$$

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2.$$

Nach diesem Ansatz addieren sich die absoluten Asymmetrien  $\epsilon \cdot \Delta$  linear.

2 Es wird ein "asymmetrischer Kern"  $a$  definiert, welcher sich bei der  $e^{-1/2}$ -Breite mit der Varianz gemäß dem Vorzeichen der relativen Asymmetrie  $\epsilon$  quadratisch addiert:

$$\Delta(1 + \epsilon) = \sqrt{\Delta^2 + a^2} \approx \Delta \left( 1 + \frac{a^2}{2\Delta^2} \right),$$

$$a^2 = 2\Delta^2 |\epsilon|$$

Es wird angenommen, daß sich die asymmetrischen Kerne gemäß dem Vorzeichen der relativen Asymmetrien addieren oder subtrahieren. Aus diesen Vorstellungen ergibt sich eine mit  $\Delta^2$  gewichtete Addition der relativen Asymmetrien:

$$\epsilon \Delta^2 = \epsilon_1 \Delta_1^2 + \epsilon_2 \Delta_2^2 \quad (10)$$

Für diese beiden Ansätze wurde die zu erwartende Energieabhängigkeit von  $\epsilon$  in Figur 4 berechnet. Verwendet wurde die Energieabhängigkeit von  $\epsilon$  in Figur 3 sowie die strahlbedingte Anfangssymmetrie bei  $E/E_0 = 1$  aus Figur 4. Während der Ansatz 1 zu große Werte ergibt, ist die Übereinstimmung mit den Meßergebnissen für Ansatz 2 zufriedenstellend. Daher wird für die Berücksichtigung von Asymmetrien in den Ortsverteilungen in Tab. I die Beziehung (10) zugrundegelegt. Insbesondere ergeben sich für die Sonderfälle (5) und (6) gleiche relative Asymmetrien in Energie- und Reichweiteverteilung.

Die beschriebenen Ansätze sind sehr grob. Für eine genauere Behandlung asymmetrischer Ortsverteilungen wären numerische Rechnungen erforderlich mit einem plausiblen Ansatz für den Exponenten in (8) für den gesamten Bereich der unabhängigen Variablen  $y$ .

##### 5. Bestimmung der Reichweitestreuung aus der Restenergieverteilung

Die beschriebene Methode zur Berechnung der Restenergieverteilung kann umgekehrt dazu verwendet werden, aus gemessenen Restenergieverteilungen die Reichweitestreuung zu ermitteln für Teilchensorten und Energiebereiche, für welche noch keine Daten vorliegen.

Für den allgemeinen Fall (3) (Abschnitt 3) erhält man die Ortsverteilung  $W_3(x)$  (2) durch Division der gemessenen Restenergieverteilung  $W_5(e)$  durch den differentiellen Energieverlust  $(-dE/dx)_e$  und Substitution der Restenergie  $e$  nach der Beziehung

$$x(e) = R(E_0) - R(e).$$

Die  $e^{-1/2}$ -Breite der so gewonnenen Ortsverteilung liefert die quadratische Differenz  $\Delta R_0^2 - \Delta R^2$  der Reichweitestreuungen der Anfangsenergie  $E_0$  und der sich ergebenden mittleren Restenergie in (2).

Kann im Bereich der Restenergieverteilung der differentielle Energieverlust als konstant und die Energie-Reichweite-Beziehung als linear angesehen werden, so erhält man die gleiche Information gemäß (4):

$$\Delta R_0^2 - \Delta R^2 = \frac{\Delta E(E_0, E)}{-\left(\frac{dE}{dx}\right)_E} \quad (11)$$

Die bei festgehaltener Primärenergie noch erforderliche Streuung  $\Delta R_0$  kann aus den in Abschnitt 3 erwähnten Sonderfällen (5) und (6) gewonnen werden:

1 Dicke Absorber,  $R_0^2 \gg R^2$ :

$$\Delta R_0 = \Delta E(E_0, E) / (-dE/dx)_E$$

2 Dünne Absorber,  $E_0 - E \ll E_0$ :

$$\Delta R_0^2 = \frac{R_0}{2 \left(\frac{dE}{dx}\right)_E} \left(\frac{d}{dE} \Delta E(E_0, E)^2\right)_{E_0}$$

Die im Anhang angegebenen Beziehungen zur Berücksichtigung experimenteller Störeffekte sind entsprechend anzuwenden.

Obwohl schon länger hochauflösende Zähler für ionisierende Teilchen zur Verfügung stehen, wurde diese Methode zur Bestimmung der Reichweitestreuung noch nicht angewandt. Die vorgeschlagene Methode hat gegenüber der konventionellen Verfahren den Vorteil, daß zur Bestimmung der Energieabhängigkeit der Reichweite die Primärenergie nicht variiert zu werden braucht. Ferner werden die erforderlichen experimentellen Daten simultan gewonnen, während bei der konventionellen Methode eine Vielzahl unabhängiger Einzelmessungen erforderlich ist.

Anhang: Der Einfluss experimenteller Störungen

Bei der Anwendung der beschriebenen Methoden können experimentell bedingte Störungen die Ergebnisse verfälschen. Es werden die folgenden Fehlerquellen berücksichtigt:

- 1 Die apparative Energieauflösung, bestehend aus elektronischem und Zählerrauschen. Ihre Verteilung wird als gaussförmig gemäß (1), Abschnitt 2, angenommen mit der Varianz  $\Sigma$ .
- 2 Eine Unschärfe  $\Delta_0$  der Primärenergie  $E_0$ , definiert nach (8), Abschnitt 3.
- 3 Eine relative Asymmetrie  $\epsilon_0$  der Verteilung der Primärenergie, ebenfalls entsprechend (8) definiert.

Der Einfluss dieser Fehlergrößen auf die Breite  $\Delta$  und auf die relative Asymmetrie  $\epsilon$  für die fünf in Abschnitt 3 definierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist der Tabelle I zu entnehmen.

Bei der Zusammenstellung der Tabelle I wurden die Beziehungen (2), (4) und (10) zugrundegelegt. Die relativen Asymmetrien der Reichweitestreuung bei der Energie  $E_0$  und  $E$  wurden mit  $\epsilon_0$  und  $\epsilon_R$  bezeichnet, der Betrag des differentiellen Energieverlustes bei diesen Energien mit  $v_0$  und  $v$ .

Wie man der Tabelle entnehmen kann, geht beispielsweise die Beziehung (11) bei Berücksichtigung der Fehlerquellen über in

$$\Delta R_0^2 - \Delta R^2 = \left( \frac{\Delta E(E_0, E)}{v} \right)^2 - \left( \frac{\Delta E(E_0, E_0)}{v_0} \right)^2 - \left[ \frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{v^2} \right].$$

Die in Figur 4 eingetragenen Kurven wurden berechnet nach der sich aus der Tabelle ergebenden Gleichung

$$\begin{aligned} \epsilon(5.48, E) = & \epsilon(8.78, E) \left( \frac{\Delta E(8.78, E)}{\Delta E(5.48, E)} \right)^v - \epsilon(8.78, 5.48) \\ & \left( \frac{\Delta E(8.78, 5.48) v(E)}{\Delta E(5.48, E) v(5.48)} \right)^v + \\ & \epsilon(5.48, 5.48) \left( \frac{\Delta E(5.48, 5.48) v(E)}{\Delta E(5.48, E) v(5.48)} \right)^v \end{aligned} \quad (12)$$

mit den Bezeichnungen  $\epsilon = \epsilon(E_0, E)$  und  $(-dE/dx)_E = v(E)$ ,  
 $v = 1$  oder  $2$  (Energieangaben in MeV).

#### Korrekturen:

Seite 8: Die in Zeilen 9 und 10 v.o. angegebenen Zahlenwerte sind um einen Faktor 2 zu groß. Man beachte, daß die relative Reichweitestreuung  $\alpha$  in /1/ anders definiert ist als in dem vorliegenden Bericht.

Seite 16: In den Exponenten in (12) und in der letzten Zeile ist  $v$  durch  $\nu$  zu ersetzen.

Literaturverzeichnis

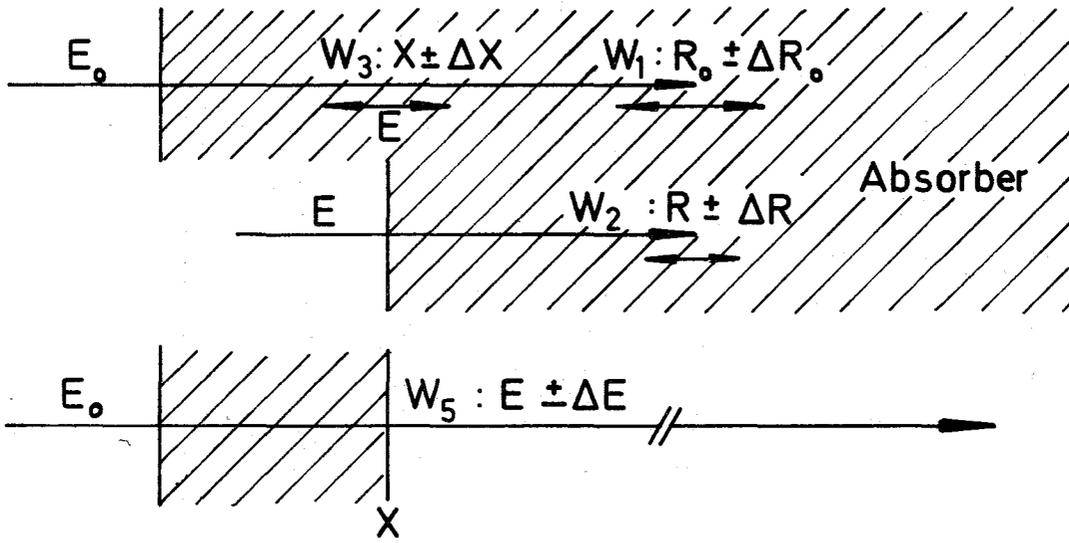
- 1 J.B. Marion, Nuclear Data Tables, Part 3 (1960) 24
- 2 I. Schouky, E. Seibt und C. Weddigen, unveröffentlicht
- 3 N. Bohr, Phil.Mag. XXV(1913)10 und Phil.Mag. XXX(1915)581
- 4 E.J. Williams, Proc.Roy.Soc. 125 (1929) 420
- 5 E.J. Williams, Proc.Roy.Soc. 130 (1931) 328  
und Proc.Roy.Soc. 135 (1932) 108
- 6 C. Möller, Ann.d.Physik, 5. Folge 14 (1932) 531
- 7 L. Landau, Journal of Physics U.S.S.R. 8 (1944) 201
- 8 K.R. Symon, Thesis 1948, Havard University, Cambridge
- 9 P.V. Vavilov, JETP 5 (1957) 749
- 10 C. Tschalaer, Nucl. Instr. and Meth. 61 (1968) 141
- 11 C. Tschalaer, Nucl. Instr. and Meth. 64 (1968) 237
- 12 M.R. Raju, UCLR 16613 (1965)
- 13 H. Bichsel, Phys. Rev. 105 (1957) 1795
- 14 N.L. Johnson, Biometr. 36 (1949) 149

Tabelle und Figuren

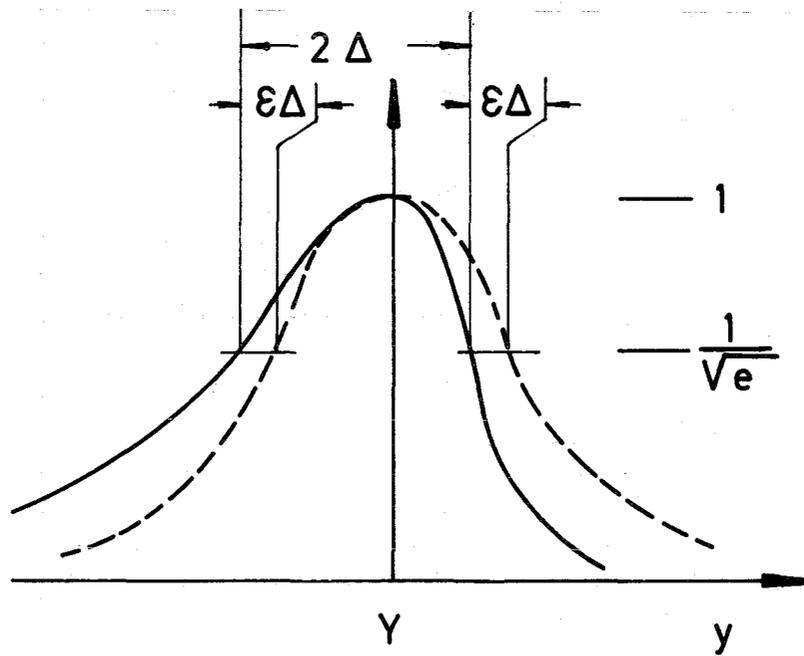
- Tab. I Zusammenstellung der in Abschnitt 3 diskutierten Verteilungsfunktionen unter Berücksichtigung der im Anhang erwähnten Fehlerquellen. Die zugrundegelegte Verteilungsfunktion  $W(y)$  mit ihren Parametern  $\Delta$  und  $\epsilon$  ist durch (8) definiert.
- Fig. 1 Erläuterung der in Abschnitt 3 definierten Ortsverteilungen.  $E_0$  und  $E$  sind die Anfangs- und mittlere Restenergie mit den mittleren Reichweiten  $R_0$  und  $R$ , die Absorberdicke  $X = R_0 - R$ .
- Fig. 2 Schematischer Vergleich der asymmetrischen Verteilungsfunktion  $W(y)$  ((8), ausgezogene Kurve) mit einer Gaussverteilung (gestrichelte Kurve) gleicher  $e^{-1/2}$ -Breite  $2\Delta$ .  $\epsilon$  ist die relative Asymmetrie bei der  $e^{-1/2}$ -Breite.
- Fig. 3 Relative Asymmetrie  $\epsilon$  in Abhängigkeit von der Restenergie  $E$  bei der Abbremsung von 8,78 MeV  $\alpha$ -Teilchen in Luft (Kreise) und Helium (Dreiecke) nach /2/. Die Kurve stellt den mittleren Verlauf der Meßpunkte dar.
- Fig. 4 Wie Fig. 3, nur für  $E_0 = 5,48$  MeV. Die große Anfangsasymmetrie bei  $E/E_0 = 1$  deutet auf eine ausgeprägte Asymmetrie der Primärenergieverteilung hin. Die eingezeichneten Kurven wurden nach (9) (gestrichelte Kurve) und (10) (ausgezogene Kurve) unter Verwendung von (12) berechnet.

Verteilung $W(y)$	unabhängige Variable $y$	Mittelwert $Y$	(Streuung) <sup>2</sup> $\Delta^2$	Relative Asymmetrie $\times$ (Streuung) <sup>2</sup> $\epsilon \Delta^2$
$W_1(r_0)$	Reichweite bei Anfangsenergie $E_0$	$R_0$	$\Delta R_0^2 + \left(\frac{\Delta Q}{v_0}\right)^2$	$\epsilon_0 \Delta R_0^2 + \epsilon_Q \left(\frac{\Delta Q}{v_0}\right)^2$
$W_2(r)$	Reichweite bei Restenergie $E$	$R$	$\Delta R^2 + \left(\frac{\Delta Q}{v}\right)^2$	$\epsilon_R \Delta R^2 + \epsilon_Q \left(\frac{\Delta Q}{v}\right)^2$
$W_3(x)$	Ort, an welchem die Teilchen genau die Ener- gie $E$ besitzen	$X = R_0 - R$	$\Delta R_0^2 - \Delta R^2 + \Delta_Q^2 \left(\frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{v^2}\right)$	$\epsilon_0 \Delta R_0^2 - \epsilon_R \Delta R^2 + \epsilon_Q \Delta_Q^2 \left(\frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{v^2}\right)$
$W_4(e_a)$	Absorbierte Energie	$E_0 - E$	$(\Delta R_0^2 - \Delta R^2)v^2 + \Delta_Q^2 \left(\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1\right) + \Sigma^2$	$-(\epsilon_0 \Delta R_0^2 - \epsilon_R \Delta R^2)v^2 - \epsilon_Q \Delta_Q^2 \left(\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1\right)$
$W_5(e)$	Restenergie	$E$	$(\Delta R_0^2 - \Delta R^2)v^2 + \Delta_Q^2 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \Sigma^2$	$(\epsilon_0 \Delta R_0^2 - \epsilon_R \Delta R^2)v^2 + \epsilon_Q \Delta_Q^2 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2$

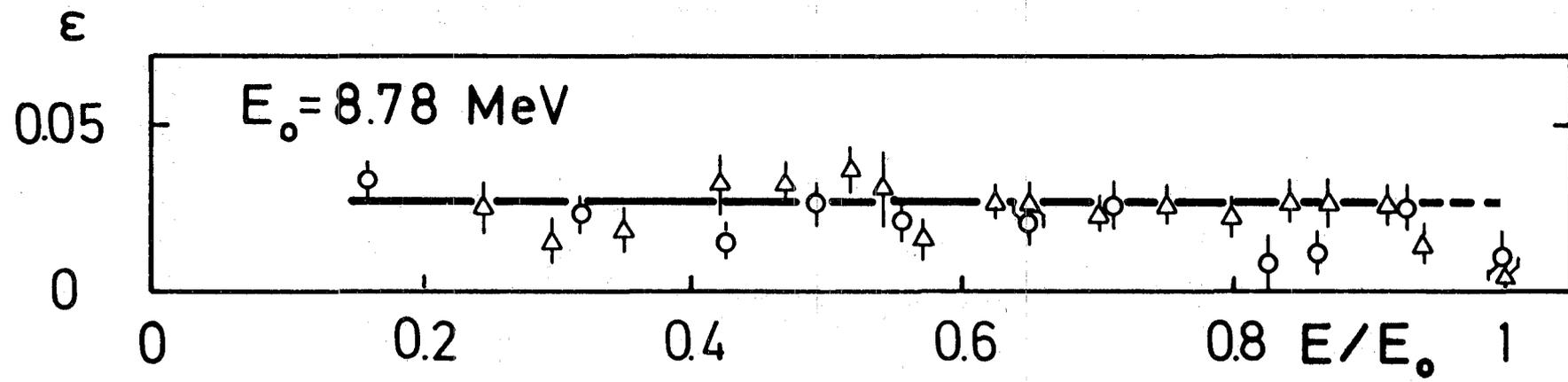
TABELLE I



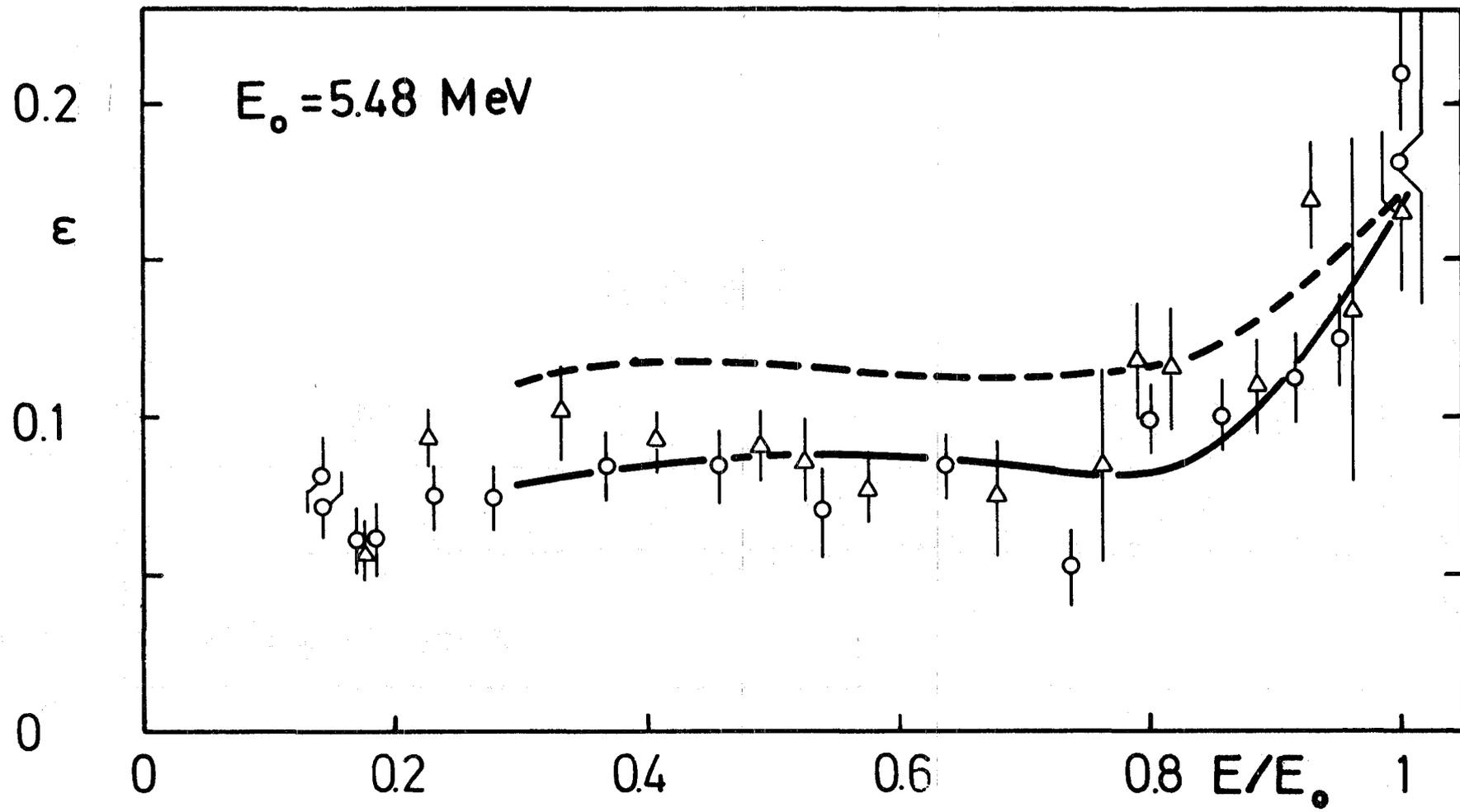
FIGUR 1



FIGUR 2



FIGUR 3



FIGUR 4