

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

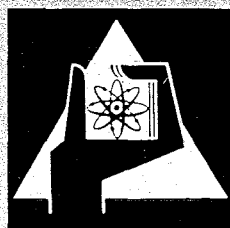
Mai 1969

KFK 968

Institut für Reaktorbauelemente

Überblick über theoretische und experimentelle Ergebnisse dynamischer  
Radial- und Axiallager im laminaren und turbulenten Bereich  
(Literaturstudie)

G. Rothley



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Mai 1969

KFK 968

Institut für Reaktorbauelemente

Überblick über theoretische und experimentelle  
Ergebnisse dynamischer Radial- und Axiallager  
im laminaren und turbulenten Bereich.  
(Literaturstudie)

von

G. Rothley

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG MBH., KARLSRUHE



## Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	1
II. Vergleich der physikalischen Eigenschaften von Öl, Natrium, Wasser und Helium	5
1. Dynamische Viskosität	5
2. Kinematische Viskosität	6
3. Spezifische Wärme	9
4. Wärmeleitvermögen	9
5. Literatur	10
III. Zylindrische, hydrodynamische Radiallager mit laminarer Strömung	11
1. Reynoldsche Differentialgleichung	11
2. Unendlich breites zylindrisches Radiallager	13
2.1 Unendlich breites 360°-Lager	13
2.1.1 Geschlossene Lösung von Sommerfeld	13
2.1.2 Berechnungsverfahren von Gümbel	23
2.2 Unendlich breites 180°-Lager	26
3. Zylindrisches Radiallager endlicher Breite	28
3.1 Grundgleichung und Ähnlichkeits- größen	28
3.2 Randbedingungen	30
3.3 Gleichgewichtsbedingungen	31

	Seite
3.4 Ergebnisse von Sassenfeld und Walther	32
3.4.1 Ganzumschlossenes ( $360^{\circ}$ -)Lager	33
3.4.2 Halbumschlossenes ( $180^{\circ}$ -)Lager	38
3.5 Reibungsverhalten von $360^{\circ}$ -Lagern und $180^{\circ}$ -Lagern	43
3.6 Näherungsberechnung für schmale Lager	44
3.7 Lager mit kleineren Umschliessungs- winkeln	47
3.7.1 Lösungen für $150^{\circ}$ -, $100^{\circ}$ -, und $75^{\circ}$ -Lager mit beliebiger Lastrichtung	48
3.7.2 Ergebnisse von Frössel für beliebige Umschliessungs- winkel	50
4. Literatur	52
 IV. Hydrodynamische Axiallager mit laminarer Strömung	 55
1. Ebener keilförmiger Schmierpalt unendlicher Breite	55
2. Ebener keilförmiger Schmierpalt endlicher Breite	59
2.1 Überblick	59
2.2 Berechnungsverfahren von Schiebel/ Drescher für ebenen Schmierkeil	61
2.3 Berechnungsverfahren von Frössel für ebenen Schmierkeil	66
3. Ebener keilförmiger Schmierpalt mit Rastfläche	75
3.1 Unendliche Breite	76
3.2 Endliche Breite	77

	Seite
4. Andere Schmierspaltformen	78
4.1 Stufenförmiger Schmierspalt	78
4.2 Tragschuhe mit gewölbten Gleit- flächen	81
4.2.1 Unendliche Breite	81
4.2.2 Endliche Breite	84
a) Exponentielle Schmierspaltform	84
b) Balliger Gleitschuh	85
c) Sphärischer Gleitschuh	87
5. Literatur	87
 V. Selbsterregte Schwingungen	 92
1. Schwingungsmodell	92
2. Charakteristische Erscheinungsformen	94
3. Theorie der selbsterregten Schwingungen	97
3.1 Einleitung	97
3.2 Theorie von Hori	99
3.3 Someyas Theorie des unwuchtfreien Rotors	102
4. Lagerbauarten mit erhöhter Stabilität	119
5. Literatur	128
 VI. Berechnung von Mehrkeilflächenlagern	 133
1. Rechnerische und experimentelle Er- gebnisse beim Lager mit Zitronenspiel	133
1.1 Geometrische Zusammenhänge	133
1.2 Experimentelle Ergebnisse	136
a) Ergebnisse von Rumpf	136
b) Ergebnisse von Glienicke	137

	Seite
1.3 Ergebnisse theoretischer Berechnungen	140
2. Rechnerische und experimentelle Ergebnisse beim Dreikeillager	143
2.1 Geometrische Zusammenhänge beim symmetrischen Lager	143
2.2 Experimentelle Ergebnisse	146
2.3 Ergebnisse theoretischer Berechnungen	148
3. Berechnung des Vierkeillagers	152
3.1 Geometrische Zusammenhänge	152
3.2 Berechnungsverfahren	154
4. Literatur	155
 VII. Turbulente Lagerströmung	 156
1. Einleitung	156
2. Strömungsinstabilitäten	158
3. Navier-Stokessche Bewegungsgleichungen für turbulente Strömung	162
4. Stabilitätskarten	166
5. Massenträgheitseffekte	168
6. Turbulente Strömung zwischen parallelen Platten	170
6.1 Couette-Strömung	170
6.2 Poiseuille-Strömung	174
7. Theorie der turbulenten Lagerschmierung (dünne Filme)	175
7.1 Überblick	175
7.2 Verteilung von Geschwindigkeit, Schubspannung und Verhältnis der turbulenten Austauschgrösse zur dynamischen Zähigkeit	177



	Seite
7.3 Theorie des Lagers ohne Seitenfluss von Ng	180
7.4 Linearisierte Theorie des Lagers mit Seitenfluss nach Ng und Pan	187
7.5 Allgemeine Theorie von Elrod u. Ng	195
8. Experimentelle Ergebnisse turbulenter Radiallager	210
8.1 Versuche von Wilcock	210
8.2 Versuche von Smith u. Fuller	211
8.3 Versuche mit 60°-Lager	215
8.4 Versuche von McHugh	217
8.5 360°- und 100°-Lager	218
8.6 Kippsegmentlager mit 4 Tragschuhen	220
9. Ergebnisse bei Axiallagern mit tur- bulenter Strömung	223
9.1 Versuche von Abramovitz	223
9.2 Versuche von Ketola und McHugh	225
9.3 Vergleich von Kippsegmentlagern mit einem Hybridlager	230
9.4 Staurand-Hybridlager	239
10. Ausblick	245
11. Literatur	247
VIII. Bezeichnungen	255

## Zusammenfassung

Es wird versucht, einen Überblick über die Probleme und den Stand der Technik von hydrodynamischen Gleitlagern von Turbomaschinen in der Reaktortechnik zu geben, soweit sie mit Reaktorkreislaufmedien geringer Viskosität geschmiert werden.

Nach einem Vergleich der physikalischen Daten der bei den Schnellen Brutreaktoren konkurrierenden Kühlmedien Natrium, Wasser und Helium mit einem konventionellen Turbinenschmieröl, folgt ein Überblick über die Theorie und Versuchsergebnisse von zylindrischen Radiallagern und von Axiallagern mit laminarer, hydrodynamischer Schmierung.

Zwei weitere Kapitel sind theoretischen und experimentellen Arbeiten über selbsterregte Schwingungen und Lagerbauarten erhöhter Stabilität gewidmet.

Es schliesst sich ein Kapitel über turbulente Lagerströmung an, in dem ausführlich auf die Theorie und Versuchs- und Rechenergebnisse von Radial- und Axiallagern mit turbulenter Strömung eingegangen wird.

## I. Einleitung

Die hohe Leistungsdichte moderner Reaktoren erfordert zur Abführung der grossen Wärmemengen aus dem Reaktor-core Umwälzaggregate in Form von Turbogebläsen bei Helium-, Dampf- oder CO<sub>2</sub>-Kühlung und von Pumpen bei Kühlung mit flüssigen Metallen wie z.B. Natrium. Diese Aggregate stellen gewissermassen das Herz des Reaktor-kreislaufes dar und verlangen deshalb nach besonders hoher Betriebssicherheit bei hoher spezifischer Leistung.

Aus Sicherheitsgründen werden die Umwälzaggregate innerhalb des Containments angeordnet oder bei Vorhandensein eines Druckbehälters an diesen angeflanscht. Die Aggregate kommen also mit radioaktiven Substanzen in Berührung oder sind der Strahlung direkt ausgesetzt. Aggregate mit ölgeschmierten Lagern kommen also kaum in Frage, da sich Öl unter dem Einfluss der Strahlung zersetzt und auch komplizierte Abdichtsysteme erfordert. Die Konsequenz daraus ist, die Lager der Umwälzaggregate mit einem der Kreislaufmedien selbst zu schmieren.

Bei Natriumkühlung kommt nur Flüssignatrium als Schmiermittel in Frage, bei Dampfkühlung Kondensat oder Dampf und bei Heliumkühlung Gaslagerung mit Helium oder Wasserlagerung. Lagerungen von Turboaggregaten, die mit Flüssignatrium, auch anderen Alkalimetallen und Wasser betrieben werden, sind bereits ausgeführt und werden bei niedrigen und mittleren Umfangsgeschwindigkeiten erfolgreich betrieben. Gaslagerung ist bisher nur bei relativ kleinen Maschinen angewendet worden, da die Tragfähigkeit, Steifigkeit und Dämpfung wegen der sehr geringen dynamischen Zähigkeit gering ist. Dampfschmierung ist wegen der zusätzlichen Probleme durch den möglichen Phasenwechsel bisher noch nicht verwendet

worden. Die Vorteile der Gas- oder Dampf Lagerung bestünden darin, dass die Lager auf dem selben Temperaturniveau wie die anderen Teile der Maschine arbeiten könnten und die Reibungsverluste sehr gering wären.

Mitentscheidend für die Wahl des Schmiermittels ist auch die Art des Antriebes der Umwälzaggregate. Da diese fast immer mit Drehzahlen weit über 3000 bzw. 3600 U/min betrieben werden müssen, sind elektromotorische Antriebe ungünstig, da sie entweder ein zusätzliches Getriebe oder einen zusätzlichen Schnellfrequenzgenerator erfordern und deshalb auf kleinere Leistungen beschränkt bleiben. Bei Dampf- und bei Heliumkühlung wird man bei grösseren Leistungen auf alle Fälle eine Turbine für den Antrieb des Gebläses verwenden, deren Lager mit Wasserschmierung ausgerüstet werden können [1], [2]. Da bei Heliumkühlung vorerst noch ein sekundärer Dampfkreislauf vorgesehen ist, kann ein Teil dieses Dampfes die Gebläseturbine antreiben (z.B. HTGR-Projekt).

Wasser und die flüssigen Alkalimetalle haben den Nachteil, dass sie in dem zur Anwendung kommenden Temperaturbereich eine relativ geringe dynamische Viskosität aufweisen, die gegenüber der von konventionellem Turbinenöl je nach Temperatur um eine bis zwei Zehnerpotenzen niedriger liegt, wodurch die Belastbarkeit der Lager entsprechend herabgesetzt wird. Ausreichende Reserve an Tragfähigkeit ist besonders für die hoch belasteten Axiallager wichtig, aber auch für die Radiallager, weil bei Verschlechterung des ursprünglichen Wuchtzustandes eine umlaufende Last entsteht, die noch ohne Berührung von Welle und Lagerschale aufgenommen werden muss.

Da die Läufer relativ leicht sind und die Wellen oft vertikal angeordnet werden, ist die äussere statische Belastung der Radiallager gering bzw. fehlt im letzteren Fall. Es müssen deshalb zur Vermeidung der sog. selbsterregten Schwingungen, die auf den Schmierfilm zurückzuführen sind, Lager mit besonderen Profilen in der Bohrung verwendet werden.

In engem Zusammenhang mit der Tragkraftreserve eines Radiallagers stehen die Dämpfungs- und Federungseigenschaften des Schmierfilms. Insbesondere letztere haben sehr grossen Einfluss auf die Lage der kritischen Drehzahlen.

Ein Problem, das bei ölgeschmierten Lagern nur in Extremfällen eine Rolle spielt, ist bei Schmierung mit Wasser oder Flüssignatrium schon bei relativ geringen Umfangsgeschwindigkeiten akut. Es ist das Auftreten von Turbulenz im Schmierpalt aufgrund der sehr niedrigen kinematischen Viskosität dieser Schmiermittel, die relativ hohe Reynoldszahlen zur Folge hat. Daraus resultiert eine Erhöhung der Reibungsleistung, die bei hohen Drehzahlen das 20-fache der Reibleistung erreichen kann, die bei laminarer Strömung vorhanden wäre.

Wegen der geringen Zähigkeit des Wassers und der Flüssigmetalle entstehen noch dünnere Schmierfilme als bei Öl, wodurch die Anforderungen an deren Reinheit und an die Masshaltigkeit und Oberflächengüte der Lagerflächen erhöht werden.

Die Wahl der Lagermaterialien wird vor allem durch Verschleiss- und Korrosionswiderstand bestimmt. Weiche Lagerwerkstoffe, in die sich Schmutzteilchen einbetten können und die durch Einlaufen ihre Oberflächengüte und geometrische Form verbessern, haben sich bei Schmierung mit Wasser und Flüssigmetallen nicht bewährt. Es kommen

nur harte Werkstoffe in Frage und die Lager müssen schon von Anfang an hohe Form- und Oberflächengüte aufweisen.

Da Umwälzpumpen für flüssiges Natrium auf einem Temperaturniveau von ungefähr 400 °C arbeiten, liegt die Zähigkeit des Lagerschmiermittels im selben Bereich wie bei einem wassergeschmierten Dampfumwälzgebläse, wo die Wassereintrittstemperatur 100 bis 150 °C betragen dürfte. Damit sind die Probleme bezüglich der Tragkraft und Stabilität die gleichen. Darüber hinaus sind auch die spezifischen Gewichte von Wasser und Natrium wenig verschieden, so dass auch die Reynoldszahlen in der gleichen Größenordnung liegen. Die Probleme der Tragfähigkeit, Stabilität, Feder- und Dämpfungseigenschaften und der Turbulenz können also bei Natriumlagern durch Versuche mit Wasser als Schmiermittel untersucht werden.

Neben den bereits genannten Gründen, die ein Abgehen von der Öllagerung notwendig machen, bietet die Schmierung mit dem Kreislaufmedium weitere Vorteile. Es entfallen nicht nur die komplizierten Abdichtungssysteme mit Sperrgas, sondern es können auch die Hilfsaggregate für die Ölschmierung eingespart werden. Darüber hinaus werden die Maschinen kürzer, leichter und weniger platzraubend. Ein weiterer Vorteil ist die geringere Reibleistung gegenüber der Öllagerung. Die schwierige Abscheidung von Ölnebel aus dem Sperrgas und die Gefahr der Verunreinigung des Kreislaufmediums durch Öl entfällt.

#### Literatur:

- [1] Shapiro, W.: "Water-Lubricated Thrust Bearings for a Helium Circulator". Aus "Bearing and Seal Design in Nuclear Power Machinery" Conf. - 670 601, Juni 1967, S. 140/167
- [2] Sternlicht, B.; Schwarz, H. und S. Luchter: "Process Fluid Lubricated Turbomachinery in Nuclear Applications" Conf. - 670 601, S. 1/22

## II. Vergleich der physikalischen Eigenschaften von Öl, Natrium, Wasser und Helium.

Zum leichteren Verständnis der speziellen Probleme der Schmierung mit Kreislaufmedien geringer Zähigkeit werden im Folgenden die physikalischen Eigenschaften von einem Turbinenöl mit 4,25 °E/50 °C, von Natrium, Wasser und Helium miteinander verglichen. Turbinenöl ist dabei ein Beispiel für ein konventionelles Schmiermittel, Natrium und Wasser für ein flüssiges Schmiermittel geringer Zähigkeit und Helium für die Gaslagerung (Tabelle 1).

### 1. Dynamische Viskosität

Die dynamische Viskosität (Zähigkeit) ist die wichtigste Eigenschaft und physikalische Grösse eines Schmiermittels. Sie ist eine der Haupteinflussgrössen für die Tragkraft, die Federzahlen und die Dämpfungskonstanten der Lager. Im deutschen Schrifttum wird sie meistens mit  $\eta$  bezeichnet. Sie ist nur sehr schwach vom Druck abhängig, solange sich der Aggregatzustand nicht ändert, aber sehr stark von der Temperatur. Folgende Einheiten sind gebräuchlich: im technischen Mass-System  $\text{kp}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ , im physikalischen Poise (P) bzw. Zentipoise (cP), im angelsächsischen Reyn bzw. Mikroreyn. Die Umrechnung geht aus folgenden Beziehungen hervor:

$$1 \text{ P} = 1 \text{ dyn}\cdot\text{s}/\text{cm}^2 \quad 1 \text{ Reyn} = 1 \text{ lb}\cdot\text{s}/\text{in}^2 \\ = 10^6 \text{ Mikroreyn}$$

$$1 \text{ kp}\cdot\text{s}/\text{m}^2 = 0,981\cdot 10^4 \text{ cP} = 1422 \text{ Mikroreyn}$$

Wie gross die Unterschiede in den dynamischen Viskositäten der einzelnen Medien sind, wird am besten veranschaulicht, wenn man ihre Werte zueinander ins Verhältnis setzt. Für Wasser wurden die Werte bei 100 ata als mittlere Werte verwendet. Es gilt für verschiedene Temperaturen:

$$20\text{ }^{\circ}\text{C}: \eta_{\text{W}} : \eta_{\text{Öl}} : \eta_{\text{He}} = 1 : 158,3 : 0,0195$$

$$100\text{ }^{\circ}\text{C}: \eta_{\text{W}} : \eta_{\text{Na}} : \eta_{\text{Öl}} : \eta_{\text{He}} = 1 : 2,4 : 22,7 : 0,0814$$

$$160\text{ }^{\circ}\text{C}: \eta_{\text{W}} : \eta_{\text{Na}} : \eta_{\text{Öl}} : \eta_{\text{He}} = 1 : 2,94 : 15,8 : 0,147$$

Bei 20 °C liegt die dynamische Viskosität der drei Vergleichsmedien Wasser, Öl und Helium um jeweils 2 Zehnerpotenzen auseinander, bei 160 °C nur noch um 1 Zehnerpotenz. Die Abnahme der dynamischen Zähigkeit ist bei Wasser nicht ganz so gross wie bei Öl. Bei 160 °C beträgt sie bei dem gewählten Turbinenöl nur noch 1/57 des Wertes bei 20 °C, bei Wasser von 160 °C dagegen immerhin noch 1/5,7 des Wertes bei 20 °C.

## 2. Kinematische Viskosität

Die kinematische Viskosität  $\nu$  ist als das Verhältnis der dynamischen Viskosität zur Dichte definiert:

$$\nu = \eta/\rho$$

Von den vier einander gegenübergestellten Medien ist die kinematische Zähigkeit bei Wasser am kleinsten. Helium hat wegen seiner geringen Dichte eine verhältnismässig hohe kinematische Zähigkeit, die ab  $\sim 30\text{ }^{\circ}\text{C}$  schon höher als die des Turbinenöls ist.



$$20\text{ }^{\circ}\text{C}: \nu_{\text{W}} : \nu_{\text{Öl}} : \nu_{\text{He}} = 1 : 181,7 : 120,7$$

$$100\text{ }^{\circ}\text{C}: \nu_{\text{W}} : \nu_{\text{Na}} : \nu_{\text{Öl}} : \nu_{\text{He}} = 1 : 2,48 : 26,45 : 617$$

$$160\text{ }^{\circ}\text{C} \quad \nu_{\text{W}} : \nu_{\text{Na}} : \nu_{\text{Öl}} : \nu_{\text{He}} = 1 : 5,7 : 18,2 : 1228$$

Die Verhältniszahlen der kinematischen Viskositäten der verschiedenen verglichenen Medien wie auch ihre Abhängigkeit von der Temperatur liegen, mit Ausnahme des Heliums, sehr nahe bei denen der dynamischen Viskositäten.

Die Einheiten der kinematischen Viskosität sind im technischen Mass-System  $\text{m}^2/\text{s}$ , im physikalischen Stokes (St) bzw. Zentistokes (cSt). Daneben sind, nach den entsprechenden Messverfahren benannt, im Handel noch weitere Einheiten in Gebrauch; in Deutschland der Englergrad (E), in Amerika die Saybolt-Universal-Viskosität (SUV) oder Saybolt-Sekunde (SUS) und in England die Redwood-Sekunde (R). Der Zusammenhang ist durch folgende Beziehungen gegeben:

$$1\text{ St} = 100\text{ cSt} \quad 1\text{ cSt} = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$$

$$= 7,60 \cdot E \cdot \left(1 - \frac{1}{E^3}\right) \text{ in cSt}$$

Für Sayboltsekunden und Redwoodsekunden ist der Zusammenhang mit cSt in jedem Fachbuch in Diagramm- oder Nomogrammform zu finden. Mathematische Beziehungen werden wegen der starken Abweichungen nicht angegeben. (Siehe [2]. S. 23).

Tabelle 1: Physikalische Daten von Öl, Natrium, Wasser und Helium  
Entnommen aus [1], [2], [3] und [4]

Medium		Öl	Na	Wasser					Helium	
physik. Grösse	Temp. in °C	1 ata	1 ata	1 ata	50 ata	100 ata	150 ata	200 ata	1	50
$10^6 \cdot \eta$ kps/m <sup>2</sup>	20	16147	fest	102	102	102	102	102	1,99	1,99
	40	5080	"	66,6	66,6	66,6	66,6	66,6	2,08	2,08
	60	2152	"	48,0	48,0	48,1	48,2	48,2	2,15	2,15
	80	1112	"	36,2	36,3	36,4	36,5	36,6	2,26	2,26
	100	658	69,6	1,22	28,9	29,0	29,1	29,2	2,36	2,36
	120	428	63,1	1,30	24,3	24,4	24,6	24,7	2,45	2,45
	140	326	57,5	1,38	20,6	20,8	20,9	21,0	2,54	2,54
	160	284	53,0	1,46	17,8	18,0	18,1	18,2	2,64	2,64
	180		49,2	1,55	15,7	15,9	15,9	16,0	2,72	2,72
	200		45,9	1,63	14,0	14,1	14,2	14,4	2,81	2,81
	300		34,7	2,05	2,11	2,10	2,10	2,10	3,24	3,24
	400		28,4	2,47	2,52	2,59	2,67	2,86	3,64	3,64
	500		24,4	2,89	2,93	2,98	3,04	3,13	4,00	4,00
600		21,6	3,31	3,34	3,38	3,43	3,50	4,33	4,33	
$10^6 \cdot \nu$ m <sup>2</sup> /s	20	182,6	fest	1,002	1,005	1,004	1,001	0,999	121,2	2,425
	40	58,2	"	0,658	0,661	0,659	0,658	0,657	135,5	2,71
	60	25,0	"	0,479	0,481	0,481	0,481	0,480	149,0	2,98
	80	13,1	"	0,365	0,368	0,368	0,368	0,368	166,1	3,32
	100	7,85	0,735	20,70	0,297	0,297	0,298	0,298	183,2	3,665
	120	5,18	0,67	23,35	0,254	0,254	0,255	0,256	200,3	4,005
	140	4,00	0,62	26,08	0,219	0,220	0,221	0,221	218,3	4,36
	160	3,53	0,57	28,98	0,193	0,194	0,195	0,196	238,1	4,76
	180		0,53	32,20	0,174	0,176	0,175	0,176	261,3	5,125
	200		0,50	35,44	0,155	0,160	0,160	0,162	266,5	5,53
	300		0,39	54,1	0,96	0,125	0,1245	0,1246	386,5	7,71
	400		0,33	76,6	1,46	0,688	0,422	0,289	509,3	10,2
	500		0,29	103,0	2,008	0,978	0,635	0,465	643,5	12,9
600		0,26	133,3	2,627	1,296	0,854	0,636	786	15,7	
$\rho \cdot g^*$ kp/m <sup>3</sup>	20	867	968,4	998,4	1000,5	1002,7	1004,9	1007,0	0,161	8,05
	40	856	964,2	992,3	994,4	996,5	998,6	1000,7	0,151	7,53
	60	845	959,9	983,1	985,2	987,4	989,4	991,5	0,142	7,08
	80	833	955,5	971,5	973,7	975,9	978,1	980,2	0,134	6,68
	100	823	928	0,578	960,3	962,6	964,9	967,1	0,126	6,32
	120	811	922	0,546	945,1	947,6	950,0	952,4	0,120	6,00
	140	799	917	0,519	928,2	930,9	933,5	936,1	0,114	5,71
	160	788	912	0,494	909,7	912,6	915,4	918,2	0,109	5,44
	180		907,5	0,472	889,4	892,6	895,7	898,8	0,104	5,205
	200		903,5	0,451	867,1	870,7	874,3	877,7	0,100	4,985
	300		874	0,372	21,55	716	726	735	0,082	4,12
	400		854	0,316	16,95	36,93	62,05	97,0	0,070	3,505
	500		829	0,275	14,32	29,87	47,0	66,0	0,061	3,05
600		805	0,2435	12,49	25,6	39,4	54,0	0,054	2,70	
$c_p$ kcal/kgK	20	0,448		1,000	0,997	0,994	0,989	0,985	1,242	1,242
	40	0,470		0,999	0,996	0,993	0,990	0,987	"	"
	60	0,492		0,998	0,996	0,994	0,991	0,989	"	"
	80	0,514		1,002	0,998	0,997	0,994	0,993	"	"
	100	0,536	0,331	0,553	1,004	1,002	0,999	0,997	"	"
	120	0,558	0,328	0,482	1,011	1,008	1,006	1,003	"	"
	140	0,569	0,326	0,469	1,020	1,016	1,013	1,010	"	"
	160	0,604	0,324	0,468	1,032	1,028	1,024	1,021	"	"
	180		0,322	0,468	1,048	1,043	1,034	1,034	"	"
	200		0,320	0,470	1,068	1,062	1,056	1,051	"	"
	300		0,312	0,480	0,745	1,361	1,311	1,272	"	"
	400		0,306	0,494	0,582	0,733	1,006	1,470	"	"
	500		0,302	0,509	0,556	0,611	0,683	0,777	"	"
600		0,300	0,526	0,554	0,584	0,617	0,655	"	"	
$\lambda_w$ kcal/mhK	20			0,515	0,517	0,518	0,520	0,522	0,133	
	40			0,546	0,547	0,549	0,551	0,554	0,138	
	60			0,567	0,569	0,571	0,572	0,575	0,143	
	80	≈ 0,12		0,581	0,582	0,584	0,586	0,589	0,147	
	100		73,8	0,0205	0,590	0,592	0,594	0,597	0,1525	
	120		73,0	0,0220	0,593	0,596	0,599	0,602	0,157	
	140		72,0	0,0232	0,593	0,596	0,599	0,602	0,162	
	160		71,3	0,0255	0,590	0,594	0,597	0,599	0,167	
	180		70,4	0,0273	0,584	0,588	0,591	0,594	0,171	
	200		69,5	0,0291	0,574	0,578	0,581	0,585	0,176	
	300		65,5	0,0380	0,0478	0,469	0,477	0,483	0,198	
	400		61,2	0,0485	0,0540	0,0612	0,0712	0,0885	0,219	
	500		57,2	0,0590	0,0630	0,0680	0,0730	0,0790	0,24	
600		52,9	0,0705	0,0740	0,0777	0,0820	0,0870	0,26		

### 3. Spezifische Wärme

Der Einfluss der Temperatur auf die spezifische Wärme  $c_p$  ist bei Wasser, Helium und Natrium sehr gering, nur bei Wasserdampf und Öl ist er auch bei überschlägigen Rechnungen nicht mehr zu vernachlässigen. Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme des Wassers vom Druck ist vernachlässigbar gering. Die Änderungen betragen nur maximal  $\pm 3\%$  im erfassten Bereich.

Die spezifische Wärme ist bei Helium mit 1,242 kcal/kp·K am grössten. Es folgen Wasser mit ca. 1,000 kcal/kp·K, Turbinenöl mit 0,45 bis 0,60 und Natrium mit 0,32 bis 0,33.

Hohe spezifische Wärme ist gerade bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten wegen der hohen Reibleistung wünschenswert, da bei Annahme der gleichen im Schmierpalt entstandenen Wärmemenge die Erwärmung des Öls umgekehrt proportional zu  $c_p$  ist. Geringere Temperaturerhöhung des Schmiermittels bedeutet geringeren Zähigkeitsabfall und damit Erhöhung der Tragfähigkeit.

### 4. Wärmeleitvermögen

Hohe Wärmeleitzahlen wirken in der selben Richtung wie hohe spezifische Wärmekapazität. Wenn auch bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten der Anteil der an die Lagerschale abgegebenen Wärmemenge an der gesamten Reibungswärme gering ist, so ist sie doch nicht so unwesentlich für den Austausch der Wärme

im Schmierfilm, zumal wenn man bedenkt, dass in den Schmiertaschen nicht die ganze schon im vorherigen Schmierkeil erwärmte Schmiermittelmenge durch frisches Schmiermittel ersetzt wird.

Vergleicht man die Werte der Tabelle, so fällt auf, dass Natrium mit  $\lambda_{w \max} = 73,8 \text{ kcal/m} \cdot \text{h} \cdot \text{K}$  ein extrem hohes Wärmeleitvermögen hat. Es folgt in weitem Abstand Wasser mit ca. 0,5 bis 0,6 kcal/m · h · K. Die Wärmeleitzahl von Öl ist sehr niedrig, nur 1/4 bis 1/5 trotz nur wenig niedriger Dichte. Die niedrigen Werte bei Dampf und Helium sind, soweit es die Anforderungen als Schmiermittel betrifft, nicht gravierend, da die dynamische Zähigkeit gering ist und damit die Reibungswärme niedrig bleibt.

## 5. Literatur

- [1] VDI-Wasserdampf tafeln, 6. Auflage, Ausgabe A, Springer-Verlag und Oldenburg-Verlag 1963
- [2] Vogelpohl, G. "Betriebssichere Gleitlager" Springer-Verlag 1958
- [3] Hütte I, Theoretische Grundlage, 28. Auflage, S. 765
- [4] Franze: "Zusammenstellung technisch wichtiger Stoffwerte und thermodynamische Zustandsgrößen" PSB-Bericht Nr. 57 vom 29.1.63

### III. Zylindrische, hydrodynamische Radiallager mit laminarer Strömung

#### 1. Reynoldssche Differentialgleichung

Reynolds [1] ging von den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen aus, die für inkompressible Strömung mit konstanter Zähigkeit  $\eta$  wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= K_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= K_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Ausserdem gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Reynolds zeigte nun, dass man die Trägheitsglieder und die Schwereglieder bei der Schmierspaltströmung vernachlässigen kann, womit man folgende Bewegungsgleichungen erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

u, v, w sind dabei die Geschwindigkeitskomponenten in x-, y- und z-Richtung, p der statische Druck und  $\eta$  die dynamische Zähigkeit. Da es sich beim Schmierespalt immer um eine dünne Flüssigkeitsschicht zwischen nahezu parallelen Flächen handelt, deren Krümmungsradien gross gegenüber der Schichtdicke sind, ist v immer klein gegen u und w, und die Veränderungen von u und w in den Richtungen x und z sind klein gegen ihre Änderungen in der y-Richtung, wenn x in Richtung der Relativbewegung der einen Fläche weist, y senkrecht auf den Flächen und z senkrecht zu x und y steht.

Mit diesen vereinfachenden Annahmen wird aus (3)

$$\begin{aligned}\eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \\ \eta \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\tag{4}$$

Da  $\partial p / \partial x$  und  $\partial p / \partial z$  nicht von y abhängen, können diese Gleichungen sofort integriert werden, wobei folgende Grenzbedingungen gelten:

Bei  $y = 0$  ist  $u = U_1$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$  und

bei  $y = h$  ist  $u = U_2$ ,  $v = V$ ,  $w = 0$

Durch Integration der Gleichungen (4) erhält man

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h \cdot y) + U_1 \frac{h-y}{h} + U_2 \cdot \frac{y}{h} \\ v &= V \cdot \frac{y}{h} \\ w &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - h \cdot y)\end{aligned}\tag{5}$$

Bildet man die entsprechenden Ableitungen und setzt diese in die Kontinuitätsgleichung (2) ein, so resultiert eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (h^3 \frac{\partial p}{\partial z}) = 6 \cdot \eta \cdot (U_1 + U_2) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \cdot \eta \cdot V \quad (6)$$

Dies ist die allgemeine von Reynolds abgeleitete Gleichung, die im Falle des stationären Betriebes ( $V = 0$ ) und, wenn eine Gleitfläche in Ruhe ist ( $U_2 = 0, U_1 = U$ ), die bekanntere Form

$$\frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (h^3 \frac{\partial p}{\partial z}) = 6 \cdot \eta \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7)$$

annimmt.

## 2. Unendlich breites zylindrisches Radiallager

Da später bei der theoretischen Behandlung der turbulenten Strömung immer wieder das unendlich breite Lager, auch Lager ohne Seitenfluss genannt, zum Vergleich herangezogen wird und auch bei laminarer Strömung einen interessanten Grenzfall darstellt, wird im Folgenden zunächst auf diesen Sonderfall eingegangen.

### 2.1 Unendlich breites 360°-Lager

#### 2.1.1 Geschlossene Lösung von Sommerfeld

Sommerfeld [2] leitet die Reynoldssche Differentialgleichung für den Fall des unendlich breiten Lagers durch eine vereinfachte Betrachtung eines Volumenelementes des Schmierfilms her, wobei er die gleichen vereinfachenden Annahmen wie Reynolds macht, und erhält

$$\frac{d}{dx} \left( h^3 \frac{dp_\infty}{dx} \right) = 6 \cdot \eta \cdot U \cdot \frac{dh}{dx} \quad (8)$$

Da  $h$  nur eine Funktion von  $x$  ist, lässt sich diese Gleichung leicht integrieren

$$h^3 \frac{dp_\infty}{dx} = 6 \cdot \eta \cdot U \cdot h + C$$

Den Wert für  $C$  erhält man, wenn man  $dp_\infty/dx = 0$  setzt:

$$C = - 6 \cdot \eta \cdot U \cdot h_\infty^*$$

$h_\infty^*$  ist diejenige Schmierschichtdicke, bei der  $dp_\infty/dx = 0$  ist, d.h. wo der Druck ein Maximum oder Minimum besitzt. Die dazugehörige  $x$ -Koordinate ist  $x_\infty^*$ . Der Wert für den Druckgradient selbst wird

$$\frac{dp_\infty}{dx} = 6 \cdot \eta \cdot U \cdot \frac{h - h_\infty^*}{h^3} \quad (9)$$

Mit dem Ansatz von Newton für die Schubspannung

$$\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy} \quad (10)$$

und der aus (5) folgenden Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung

$$u = U \frac{h-y}{h} - \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} (h \cdot y - y^2) \quad (11)$$

folgt für die Schubspannungsverteilung am Zapfen ( $y = 0$ )

$$\tau = - \frac{\eta \cdot U}{h} - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{h}{2} \quad (12)$$

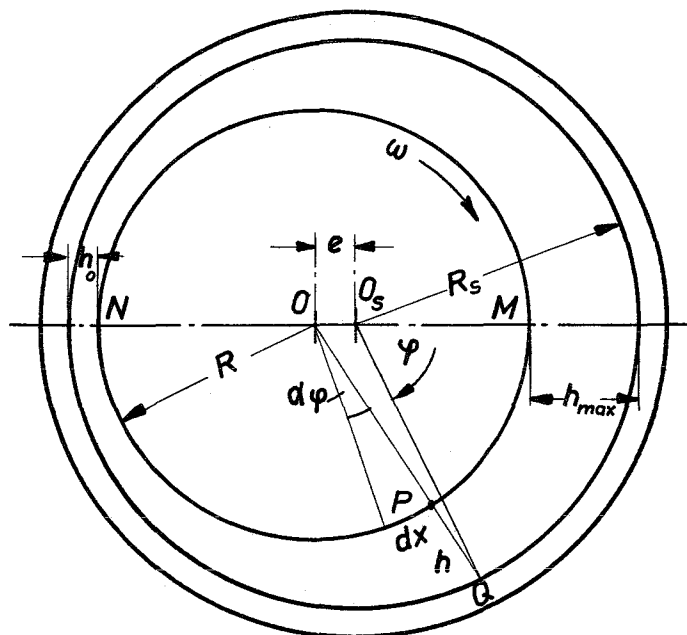


Die Flüssigkeitsmenge pro Breitereinheit wird

$$Q_B = \int_0^h u \cdot dy = U \cdot \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (13)$$

Die Grössen der Gleichungen (11) bis (13) hängen von der bis jetzt noch nicht festgelegten Schmier-schichtdickenverteilung und von  $dp/dx$  ab.

Diese Gleichungen sind deshalb noch allgemein gül-tig.  $dp_\infty/dx$  ist nach (9) eine Funktion von  $h$  und dem ebenfalls noch unbekanntem  $h_\infty^*$ . Es folgt die Anwendung dieser Gleichungen auf das zylindrische Zapfenlager.



- $D = 2R$  Durchmesser des Zapfens
- $R =$  Radius des Zapfens
- $R_s =$  Radius der Schale
- $e =$  Exzentrizität des Zapfens
- $\Delta R = R_s - R$   
= radiales Lager-spiel
- $\psi = \frac{\Delta R}{R}$  = relatives Lagerspiel
- $\epsilon = \frac{e}{\Delta R}$  = relative Exzentrizität
- $U = \omega \cdot R =$  Umfangs-geschwindigkeit des Zapfens
- $\omega =$  Winkelgeschwin-digkeit des Zapfens

Abb. 1: Geometrie und Bezeichnungen beim zyl. Radiallager

Zunächst benötigt man die Schmierschichtdicke  $h$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ . Aus Dreieck  $O O_s Q$  folgt näherungsweise

$$h = \Delta R + e \cdot \cos \varphi \quad (14)$$

bzw. 
$$h = \Delta R (1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi) \quad (15)$$

Für die engste Schmierschichtdicke  $h_0$  und die grösste  $h_{\max}$  erhält man mit

$$\varphi = \pi \quad h_0 = \Delta R - e = \Delta R (1 - \varepsilon) \quad (16)$$

$$\varphi = 0 \quad h_{\max} = \Delta R + e = \Delta R (1 + \varepsilon) \quad (17)$$

Mit  $dx = R \cdot d\varphi$  folgt aus (9)

$$\frac{dp_\infty}{d\varphi} = 6 \cdot \eta \cdot U \cdot R \frac{h-h_\infty^*}{h^3} \quad (18)$$

Sommerfeld macht nun die für die Lösbarkeit der Gleichung (18) wichtige Voraussetzung, dass das Schmiermittel den ganzen Zwischenraum zwischen Zapfen und Lagerschale allseitig ausfüllt, dann gelten nämlich die Randbedingungen

$$p_\infty(\varphi + 2\pi) = p_\infty(\varphi) \quad (19)$$

und speziell 
$$p_\infty(2\pi) = p_\infty(0) \quad (20)$$

Sommerfeld führt nun wegen der bequemeren Schreibweise die Abkürzung

$$a = \frac{\Delta R}{e}, \quad 1 \leq a = \infty \quad (21)$$

ein, die den Kehrwert der relativen Exzentrizität darstellt. Es gilt:

zentrische Lage:  $e = 0$     $a = \infty$     $\varepsilon = 0$

Berührung mit Schale:  $e = \Delta R$     $a = 1$     $\varepsilon = 1$

Die Integration der Gleichung (18) zwischen den Grenzen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 2\pi$  führt auf folgende Gleichung

$$p_{\infty}(2\pi) - p_{\infty}(0) = 0 = 6\eta \cdot U \cdot R \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} - h_{\infty}^* \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3} \right\}$$

Daraus folgt mit (14) und (21)

$$\frac{h_{\infty}^*}{e} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + \cos\varphi)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + \cos\varphi)^2} \quad (22)$$

Hiermit bestimmt man  $h_{\infty}^*/e$  zu

$$\frac{h_{\infty}^*}{e} = \frac{2a(a^2 - 1)}{2a^2 + 1} = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{2 + \varepsilon^2} \quad (23)$$

und mit  $h_{\infty}^* = \Delta R + e \cdot \cos\varphi_{\infty}^*$  (24)

$$\cos\varphi_{\infty}^* = \frac{-3a}{2a^2 + 1} = \frac{-3\varepsilon}{2 + \varepsilon^2} \quad (25)$$

Damit ist  $h_{\infty}^*$  und  $\varphi_{\infty}^*$ , wo der Druck einen Extremwert hat, in Abhängigkeit von der Exzentrizität bekannt. Bei  $\varepsilon = 0$  wird  $\varphi_{\infty}^* = \pm \pi/2$ , die Extremwerte liegen also einander diametral gegenüber. Bei  $\varepsilon = 1$  wird  $\varphi_{\infty}^* = \pm \pi$ , der Extremwert tritt also an der Berührungsstelle auf.

Da  $h_{\infty}^*/e$  bekannt ist, kann man die Druckverteilung durch Integration der Gleichung (18) zwischen den Grenzen  $p$  und  $p_0$  wieder unter Berücksichtigung von (14) und (21) und ausserdem von (23) bestimmen.

$$\begin{aligned} \Delta p_{\infty} = p_{\infty}(\varphi) - p_0 &= \frac{6 \cdot \eta \cdot \omega}{\psi^2} \cdot \frac{a^2}{2a^2+1} \cdot \frac{\sin \varphi}{a+\cos \varphi} \left(1 + \frac{a}{a+\cos \varphi}\right) \\ &= \frac{6 \cdot \eta \cdot \omega}{\psi^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \varphi}{(2 + \varepsilon^2) \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Da  $\Delta p_{\infty}$  eine ungerade Funktion von  $\varphi$  ist, gilt

$$\Delta p (+\varphi) = - \Delta p (-\varphi) \quad (27)$$

Das bedeutet, dass die Druckverteilung dem Betrage nach symmetrisch zur Richtung  $\varphi = 0$  ist (Linie MN in Abb. 1). In der unteren Hälfte sind die Drücke positiv, in der oberen Hälfte negativ. Aus diesen Gründen ist die resultierende Druckkraft nach oben gerichtet und geht durch den Wellenmittelpunkt.

Für die Schubspannungsverteilung erhält man aus (12) und (9)

$$\tau_{\infty} = - \eta \cdot U \cdot \frac{4h - 3 h_{\infty}^*}{h^2} \quad (28)$$

Mit (14), (21) und (23) ergibt sich

$$\tau_{\infty} = - \eta \cdot U \cdot \frac{4(a+\cos \varphi)(2a^2+1) - 6a(a^2-1)}{e \cdot (a+\cos \varphi)^2 \cdot (2a^2+1)} \quad (29)$$

Die Schubspannung ist eine gerade Funktion von  $\varphi$ , das bedeutet

$$\tau_{\infty}(\varphi) = \tau_{\infty}(-\varphi) \quad (30)$$

Die Resultierende der Schubspannungen ist ebenfalls senkrecht nach oben gerichtet, geht aber nicht durch den Wellenmittelpunkt, so dass ausserdem noch ein Drehmoment  $M_w$  auf den Zapfen ausgeübt wird. Da die Resultierende aller Ölfilmkräfte, die gleich der Summe aus den Resultierenden der Dücke und der Schubspannungen ist, ebenfalls nach oben gerichtet ist, muss man den Schluss ziehen, dass die Lagerbelastung pro Längeneinheit  $P_\infty$ , die bei stationärer Zapfenlage mit der Gesamresultierenden im Gleichgewicht steht, unter den gemachten Voraussetzungen immer senkrecht auf der Richtung der Verschiebung des Zapfenmittelpunktes steht.

Dieses Ergebnis steht mit der Erfahrung im Widerspruch und ist darauf zurückzuführen, dass Sommerfeld auch negative  $\Delta p$ -Werte zulässt. Da die im Schmierfilm auftretenden Drücke wesentlich höher sind als der Zuführdruck  $p_0$ , müssten in der oberen Lagerhälfte negative Drücke, d.h. Zugspannungen auftreten. Diese können aber von flüssigen Schmiermitteln normalerweise nicht ertragen werden.

Die Lagerbelastung berechnet Sommerfeld zu

$$\frac{P_\infty \cdot \psi^2}{6 \cdot \eta \cdot \omega \cdot R} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \cdot \frac{a^2}{2a^2 + 1} \quad \begin{matrix} (P_\infty = \\ \text{Kraft pro Längeneinheit}) \end{matrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} P_\infty &= \frac{12 \cdot \pi \cdot \eta \cdot U \cdot R^2 \cdot e}{(2 \cdot \Delta R^2 + e^2) \cdot \sqrt{\Delta R^2 - e^2}} \\ &= \frac{12 \cdot \pi \cdot \eta \cdot U \cdot \epsilon}{(2 + \epsilon^2) \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2}} \cdot \left(\frac{R}{\Delta R}\right)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Das Reibungsmoment pro Zapfenlängeneinheit  $M_\infty$  erhält man durch Integration der Schubspannungen über den Zapfenumfang:

$$\begin{aligned}
 M_\infty &= R^2 \int_0^{2\pi} \tau_\infty d\varphi = \frac{\eta \cdot U \cdot R^2}{\Delta R} \cdot \frac{4\pi a}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{a^2+2}{2a^2+1} \\
 &= \frac{4\pi\eta \cdot U \cdot R^2}{\sqrt{\Delta R^2 - e^2}} \cdot \frac{\Delta R^2 + 2e^2}{2\Delta R^2 + e^2} \quad (32) \\
 &= \frac{4\pi \cdot \eta \cdot U \cdot R^2}{\Delta R \sqrt{1 - \epsilon^2}} \cdot \frac{1 + 2 \cdot \epsilon^2}{2 + \epsilon^2}
 \end{aligned}$$

In der hydrodynamischen Lagertheorie ist es üblich, den Reibungskoeffizienten  $\mu$  anzugeben, der als das Verhältnis der am Zapfen auftretenden Reibkraft  $F$  zur Lagerbelastung  $P$  definiert ist:

$$\begin{aligned}
 \mu_\infty &= \frac{F_\infty}{P_\infty} = \frac{M_\infty}{P_\infty \cdot R} = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{a^2+2}{3a} \\
 &= \frac{(\Delta R^2 + 2e^2)}{3e \cdot R} = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{(1 + 2 \cdot \epsilon^2)}{3\epsilon} \quad (33)
 \end{aligned}$$

Interessant ist nun der Fall des vollkommen zentrischen Laufes der Welle. Aus (31) folgt mit  $\epsilon = 0$   $P = 0$ , d.h. in diesem Fall kann das Lager keine Last tragen oder die Umfangsgeschwindigkeit muss unendlich gross sein. Aus Gleichung (26) geht hervor, dass in diesem Fall auch kein Druck erzeugt wird. Für das Drehmoment erhält man

$$M_\infty = \frac{2\pi\eta \cdot U \cdot R^2}{\Delta R} \quad (34)$$

Die Schubspannungen sind überall gleich und die Geschwindigkeitsverteilung quer zum Schmierpalt linear und überall gleich.

Gleichung (34) ist auch eine Näherungsformel für einen schnellaufenden, schwach belasteten Zapfen in einer Lagerschale endlicher Breite.

Das Drehmoment ist dann

$$M_o = M_\infty \cdot B = \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega \cdot R^3}{\Delta R} \cdot B \text{ und} \quad (35)$$

$$\mu_o = \frac{F_o}{P} = \frac{M_o}{P \cdot R} = \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega \cdot R^2 \cdot B}{\Delta R \cdot P} \quad (36)$$

Führt man die später noch zu erläuternde Sommerfeldzahl ein

$$S_o = \frac{P}{B \cdot D} \cdot \frac{\psi^2}{\eta \cdot \omega} = \frac{\bar{p} \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega}, \quad (37)$$

dann erhält man die bekannte

$$\text{Petroffsche Formel } \mu_o = \pi \cdot \frac{\eta \cdot \omega}{\bar{p} \cdot \psi} \quad (38)$$

und folgende Beziehung für die häufig benutzte

$$\text{Reibungskennzahl } \frac{\mu_o}{\psi} = \frac{\pi}{S_o} \quad (39)$$

Interessant ist auch die Frage einer optimalen Auslegung bezüglich der Reibung, d.h. die Frage, ob ein Reibungsminimum existiert. ( $d\mu/d\varepsilon = 0$ ;  $d^2\mu/d\varepsilon^2 > 0$ ). Das Ergebnis ist, dass dies für

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,707 \quad (40)$$

der Fall ist. Dies ergibt eine optimale Lagerbelastung von

$$P_{\infty \text{opt}} = \frac{24}{5} \cdot \pi \cdot \frac{\eta \cdot R^2 \cdot U}{\Delta R^2} = \frac{24}{5} \cdot \pi \cdot \frac{\eta \cdot U}{\psi^2}, \quad (41)$$

wenn die Drehzahl gegeben ist. Ist die Drehzahl noch frei wählbar und die Belastung gegeben, dann ist

$$U_{\text{opt}} = \frac{5}{24 \cdot \pi} \cdot \frac{\psi^2 \cdot P}{\eta} \quad (42)$$

Meist ist aber die Drehzahl und die Belastung gegeben, dann kann man das relative Lagerspiel optimal wählen:

$$\psi_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{24 \cdot \pi \cdot \eta \cdot U}{P_{\infty}}} \quad (43)$$

Aus (33) erhält man das Minimum für den Reibungskoeffizienten

$$\mu_{\infty, \text{min}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\Delta R}{R} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \cdot \psi \quad (44)$$

Die Reibung ist also um so kleiner, je kleiner das relative Lagerspiel ist. Entsprechend wird

$$M_{\infty, \text{min}} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \cdot P_{\infty} \cdot \Delta R \quad (45)$$



### 2.1.2 Berechnungsverfahren von Gümbel

Die Ergebnisse von Sommerfeld, dass der Zapfen senkrecht zur Lastrichtung ausweicht und eine symmetrische Druckverteilung mit negativen Drücken in der oberen Lagerhälfte entsteht, stimmen mit der Wirklichkeit nicht überein. Im allgemeinen Fall beginnt die Druckentwicklung nicht an der Stelle der grössten Spaltweite ( $\varphi=0$ ), sondern an der Stelle  $\varphi_1$ , wo das Schmiermittel zugeführt wird. Da sich der Verlagerungswinkel  $\gamma$  und damit der Anfangspunkt  $\varphi=0$  mit der Belastung ändert, ist  $\varphi_1$  veränderlich und zunächst unbekannt. Das gleiche gilt für das Ende der Druckentwicklung. Die Beobachtungen zeigten nämlich, dass die Druckentwicklung da aufhört, wo die Druckdifferenz  $\Delta p$  gegenüber dem Umgebungsdruck  $p_0$  Null erreicht ( $\varphi=\varphi_2$ ). Im Rest des Schmierpaltes herrscht der Umgebungsdruck  $p_0$ . Auch die Lage des Druckmaximums ( $\varphi=\varphi^*$ ) ist nicht mehr sofort als reine Funktion von der relativen Exzentrizität  $\epsilon$  zu bestimmen.

Gümbel [3] greift bei seinem Berechnungsverfahren auf die Randbedingungen zurück, die schon Reynolds angegeben hat. Da das Schmiermittel häufig am höchsten Punkt der oberen Lagerschale zugeführt wird, wird für den Beginn der Druckentwicklung die Stelle  $\varphi = 0$  angenommen:

$$\Delta p_{\infty} = p_{\infty} - p_0 = 0 \quad \text{für } \varphi = \varphi_1 = 0 \quad (46)$$

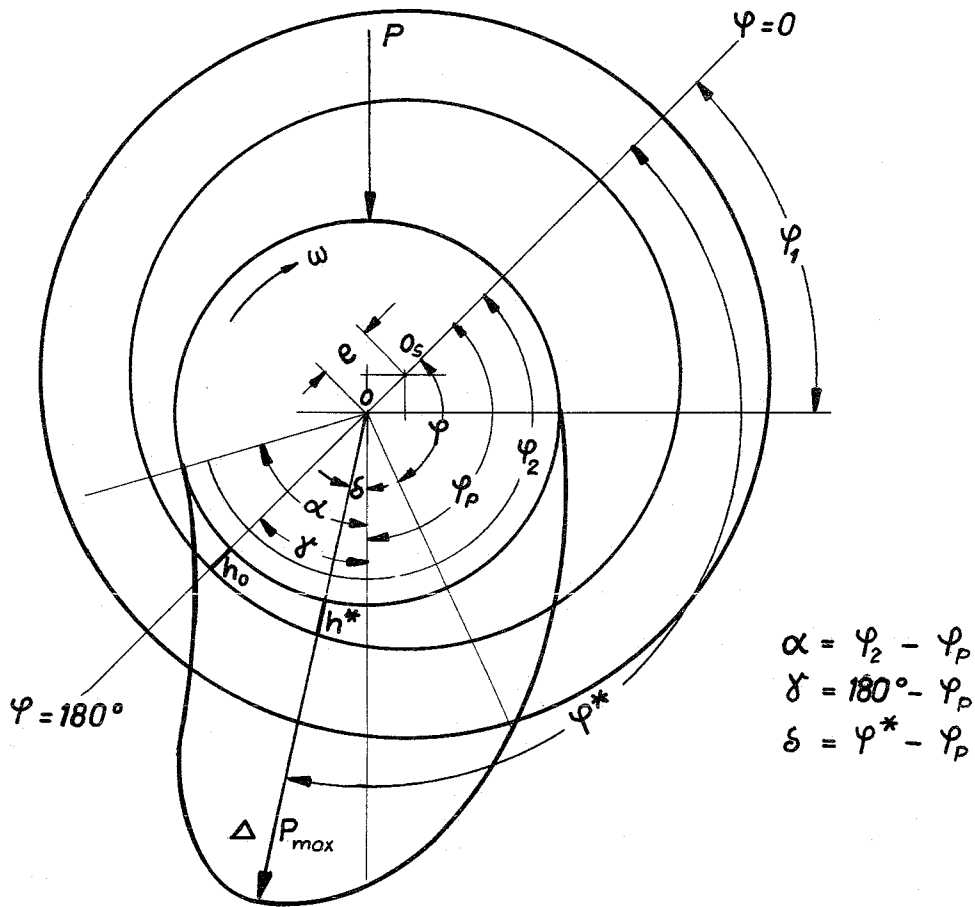


Abb. 2: Verlagerung und Druckentwicklung im allgemeinen Fall

Die zweite Bedingung ist, dass am Ende der Druckentwicklung auch der Druckgradient verschwindet:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_\infty = p_\infty - p_0 = 0 \\ \frac{dp_\infty}{d\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \text{für } \varphi = \varphi_2 \quad (47)$$

Ausgangsgleichung für die Bestimmung der Druckverteilung ist wiederum Gleichung (9). Gümbel formt sie um, indem er das noch unbekannte  $h_\infty^*$  durch  $h_\infty^*/h_0$  ausdrückt.

$$\frac{dp_{\infty}}{d\varphi} = \frac{6\eta \cdot \omega}{\psi^2} \cdot \frac{(1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi) - h_{\infty}^*/h_0 (1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi)^3} \quad (48)$$

$h_0$  ist dabei die Schmierschichtstärke an der engsten Stelle, die bei gegebenem Lagerspiel  $\Delta R$  und gewählter relativer Exzentrizität  $\varepsilon$  sich wie folgt berechnet:

$$h_0 = \Delta R - e = \Delta R (1 - \varepsilon) \quad (49)$$

Für die Druckdifferenz  $\Delta p_{\infty}$  erhält man folgende Gleichung

$$\Delta p_{\infty} = p_{\infty} - p_0 = \frac{6\eta \cdot \omega}{\psi^2} \left[ \int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi)^2} - \frac{h_{\infty}^*}{h_0} \int_0^{\varphi_2} \frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi)^3} d\varphi \right] \quad (50)$$

Gümbel beschreitet nun folgenden Lösungsweg: Zunächst wird  $h_{\infty}^*/h_0$  angenommen und für ein bestimmtes  $\varepsilon$  aus Gleichung (48) mit  $dp_{\infty}/d\varphi = 0$  das dazugehörige  $\varphi_2$  ermittelt. Mit diesen Werten wird die Integration in Gleichung (50) durchgeführt und  $\Delta p_{\infty}$  ermittelt. Ist dieses von Null verschieden, dann wird  $h_{\infty}^*/h_0$  solange iterativ verändert und die Rechnung wiederholt, bis auch  $\Delta p_{\infty}$  Null wird. Dann hat man für das gewählte  $\varepsilon$   $\varphi_2$  und  $h_{\infty}^*$  bzw.  $\varphi_{\infty}^*$  gefunden, womit man dann die Druckverteilung für laufendes  $\varphi$  durch Integration zwischen den Grenzen 0 und  $\varphi$  bestimmen kann. Die geometrische Addition der Drücke rund um den Zapfen ergibt dann die Grösse und Richtung der Resultierenden, die der äusseren Belastung  $P$  das Gleichgewicht hält.

$\varepsilon$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95
$S_0$	1,125	2,53	4,08	7,55	15,5	25,5
$\mu/\psi$	2,10	1,18	0,94	0,72	0,52	0,44
$\gamma$	63,7	60	54,5	42,8	28,7	20,3
$\delta$	2,4	13,4	22,0	22,7	15,5	11,4
$\alpha$	125,4	106,8	87,9	63,3	42,1	28,3

Tab. 2: Kennwerte des unendlich breiten 360°-Lagers nach Gümbel [3]

Die Schubspannungsverteilung erhält man durch Integration der Gl. (28) und wie später unter 3.3 gezeigt wird das Reibmoment bzw. die Reibungskennzahl  $\mu/\psi$  durch Integration der Schubspannungen und der Druckanteile rund um den Zapfen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

## 2.2 Unendlich breites 180°-Lager

Schon Reynolds [1] und Sommerfeld [2] gaben Lösungen für das unendlich breite 180°-Lager an. Dabei wurde vorausgesetzt, dass sich die Druckentwicklung immer über die ganze Lagerfläche erstreckt. Vogelpohl [4] unterscheidet zwei Bereiche, nämlich Bereich A, wo  $\varepsilon < 0,425$ , und Bereich B  $\varepsilon > 0,425$ . Im Fall A umfasst der Bereich der Druckentwicklung die ganze Gleitfläche. Es gelten dann die Randbedingungen

$$\Delta p_{\infty} = p_{\infty} - p_0 = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_1 = \varphi_p - \frac{\pi}{2} & \text{und} \\ \varphi = \varphi_2 = \varphi_p + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Mit der Bestimmung von  $\varphi_p$  ist dann  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bekannt. Die Lösung ist die von Sommerfeld für das halbumschliessende Lager gegebene.

Im Fall B gelten die Randbedingungen

$$\Delta p_\infty = 0 \quad \text{für } \varphi = \varphi_1$$

$$\Delta p_\infty = 0 \quad \text{und } dp_\infty/d\varphi = 0 \quad \text{für } \varphi = \varphi_2$$

$\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind noch unbekannt.  $\varphi_2$  wird durch die Lage des Druckminimums bestimmt. Aus Gl. (18) folgt für  $dp_\infty/d\varphi = 0$  mit (15)  $\varphi = \varphi^*$  für das Maximum und  $\varphi = 2\pi - \varphi^*$  für das Minimum. Es ist also  $\varphi_2 = 2\pi - \varphi^*$ . Es sind jetzt 2 Gleichungen zur Bestimmung von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  notwendig.

Der Rechnungsgang ist bei Vogelpohl [4] für beliebige Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  entwickelt und wird für den vorliegenden Fall B angewendet. Die Ergebnisse werden in tabellarischer Form mitgeteilt.

		$S_0$	$\mu/\psi$	$\varphi_p$	$\gamma$	$\varphi_1$	$\delta$	$\alpha$
Randbe- dingung A	0,1	0,4584	3,56	107°27'	72°33'	17°27'	1°37'	90°
	0,2	0,8819	2,02	118°49'	61°11'	28°49'	3°25'	90°
	0,3	1,3038	1,53	125°42'	54°18'	35°42'	5°29'	90°
	0,4	1,7740	1,29	130°1'	49°59'	40°1'	7°51'	90°
Randbe- dingung B	0,5	2,3181	1,11	133°14'	46°46'	43°14'	10°26'	83°6'
	0,6	3,0480	0,97	136°53'	43°07'	46°53'	12°22'	83°52'
	0,7	4,1641	0,85	141°15'	38°45'	51°15'	13°34'	63°56'
	0,8	6,2842	0,72	146°40'	33°20'	56°40'	13°53'	52°47'
	0,9	12,470	0,54	154°30'	25°30'	64°30'	12°31'	38°29'
	0,95	24,734	0,40	160°44'	19°16'	70°44'	10°22'	28°10'
	0,99	122,65	0,20	170°23'	9°37'	80°23'	5°44'	13°30'

Tab. 3: Kennwerte des unendlich breiten 180°-Lagers nach Vogelpohl [4]

### 3. Zylindrisches Radiallager endlicher Breite

Seit Reynolds [1] die allgemein gültige Differentialgleichung für die Druckverteilung im ebenen und zylindrischen Schmierpalt aufstellte, gibt es eine grosse Zahl von Arbeiten, die sich mit der Lösung dieser Gleichung für den Fall des Zapfenlagers endlicher Breite befassen. Obwohl viele dieser Arbeiten neue Erkenntnisse brachten, stimmen ihre Ergebnisse doch nicht genügend mit der Wirklichkeit überein, da die Voraussetzungen, die bei den verschiedenen Lösungsmethoden gemacht wurden, zu ungenau waren. Erst die Anwendung moderner elektrischer Rechenmaschinen ermöglichte, genauere Rechenverfahren und wirklichkeitsgetreuere Randbedingungen zu verwenden.

#### 3.1 Grundgleichung und Ähnlichkeitsgrössen

Ausgangspunkt aller Rechenverfahren für das stationär belastete Lager ist die Reynoldssche Differentialgleichung (7). Sie wird meist durch Einführung dimensionsloser Grössen dimensionslos gemacht. Es ist

$$\Pi = \frac{p \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega} \quad \text{der dimensionslose Druck,} \quad (51)$$

$$H = \frac{h}{\Delta R} = 1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi \quad (52)$$

die dimensionslose Spalthöhe  
(od. dimensionslose Schmierschichtdicke)

$$\beta = \frac{B}{D} \quad \text{das Breitenverhältnis} \quad (53)$$

$$Z = \frac{z}{B/2} \quad \text{die dimensionslose axiale Koordinate} \quad (54)$$

Mit diesen dimensionslosen Grössen und unter Berücksichtigung von  $x = R \cdot \varphi$ ,  $U = \omega \cdot R$  und  $\psi = \Delta R/R$  lautet die Reynoldssche Gleichung in dimensionsloser Form

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (H^3 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}) + \frac{1}{\beta z} \frac{\partial}{\partial z} (H^3 \frac{\partial \Pi}{\partial z}) = 6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (55)$$

Diese Form der Reynoldsschen Gleichung spiegelt das Ähnlichkeitsverhalten des Druckes  $p$  in Form des dimensionslosen Druckes  $\Pi$  wieder. Diese vereinigt den örtlichen Druck  $p$ , die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Zapfens, die dynamische Zähigkeit  $\eta$  und das relative Lagerspiel  $\psi$  zu einer einzigen Einflussgrösse, die letzten Endes nur noch von  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  und dem Breitenverhältnis  $\beta$  abhängig ist. Allerdings ist die Abhängigkeit, die durch Gl. (55) gegeben ist, kompliziert. Die explizite Abhängigkeit, d.h. die Lösung  $\Pi = f(\varepsilon, \varphi, \beta)$  ist gesucht.

Da der dimensionslose Druck nur eine Funktion von  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  und  $\beta$  ist, so muss die in ähnlicher Weise definierte dimensionslose Lagerbelastung, Sommerfeldsche Kennzahl oder Sommerfeldzahl  $S_o$  genannt,

$$S_o = \frac{\bar{p} \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega} = \frac{P}{B \cdot D} \cdot \frac{\psi^2}{\eta \cdot \omega} = f(\varepsilon, \beta) \quad (56)$$

nur eine Funktion von  $\varepsilon$  und  $\beta$  sein, da  $P$  durch Integration des Druckes über  $\varphi$  und  $z$  gewonnen wird.

Die Sommerfeldzahl ist die wichtigste Ähnlichkeitskenngrösse eines zylindrischen Gleitlagers. Sie ist massgebend für die Tragkraft und das Reibungsverhalten des Lagers. Lager gleicher Sommerfeldzahl und gleichen Breitenverhältnisses sind hydrodynamisch ähnlich, d.h. sie haben die gleiche relative Exzentrizität und auch die gleiche Reibungskennzahl.

Der Reibungsbeiwert ist als Verhältnis der Reibkraft  $F$  zur Lagerbelastung  $P$  in Analogie zur Festkörperreibung definiert:

$$\mu = \frac{F}{P} \quad (57)$$

Das Verhältnis  $\mu/\psi$  wird Reibungskennzahl genannt. Sie ist bei konstantem Breitenverhältnis nur eine Funktion von der Sommerfeldzahl.

### 3.2 Randbedingungen

Meist wird angenommen, dass der Zuführdruck gleich dem Umgebungsdruck ist ( $p_1 = p_0$ ). Da für die Tragkraft nur die Überdrücke gegenüber dem Umgebungsdruck  $p_0$  massgebend sind, wählt man diesen als Bezugspunkt, d.h.  $p_0 = 0$ .

In axialer Richtung sind die Randbedingungen eindeutig:  $p(\varphi, z) = 0$  für  $z = \pm B/2$  oder für  $z = 0$  und  $z = B$ , je nach Lage des Ursprungs. In Umfangsrichtung sind die Randbedingungen nicht mehr eindeutig und auch von der Lage der Ölzuführungsnut abhängig. Ist diese bei vertikal belastetem Lager oben, dann setzt man den Beginn der Druckentwicklung an der Stelle des grössten Schmierpaltes  $h_{\max}$  an und es gilt dann

$$p = 0 \text{ für } \varphi = 0 \quad (58)$$

Liegt die Zuführungsnut senkrecht zur Last in Drehrichtung, dann lautet die Randbedingung

$$p = 0 \text{ für } \varphi = \varphi_1 \quad (59)$$

Für das Ende der Druckentwicklung werden auch heute noch häufig die "Gümbelschen angenäherten Randbedingungen"



verwendet. Sie besagen, dass die Druckentwicklung an der engsten Stelle des Schmierpaltes endet:

$$p = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pi \quad (60)$$

In den neueren Arbeiten wird fast nur noch die von Reynolds schon als richtig erkannte Bedingung verwendet, dass das Druckende an der Stelle erreicht wird, wo auch der Druckgradient verschwindet, d.h.

$$p = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \varphi_2 \quad (61)$$

wobei das zunächst unbekannte  $\varphi_2$  auch noch eine Funktion von  $z$  ist.

### 3.3 Gleichgewichtsbedingungen

#### a) Kräftegleichgewicht

Das Gleichgewicht am Zapfen erfordert, dass die Resultierende aus den Flüssigkeitsdrücken und den Schubspannungen der äusseren Lagerbelastung  $P$  entgegengesetzt gleich ist:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^B (p \cdot \cos \varphi - \tau_w \sin \varphi) \cdot R \cdot d\varphi \cdot dz = -P \cdot \cos \gamma \quad (62)$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^B (p \cdot \sin \varphi + \tau_w \cos \varphi) \cdot R \cdot d\varphi \cdot dz = P \cdot \sin \gamma$$

Die Schubspannungen sind

$$\begin{aligned} \text{an der Welle:} \quad \tau_w &= - \eta \frac{U}{h} - \frac{h}{2R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \text{an der Schale:} \quad \tau_s &= + \eta \frac{U}{h} - \frac{h}{2R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (63)$$

b) Momentengleichgewicht

Das Drehmoment an der Welle bezüglich des Wellenmittelpunktes ist

$$M_W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^B \tau_w \cdot R^2 \cdot d\varphi dz = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^B \left( \eta \frac{U}{h} R + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \cdot R \cdot d\varphi dz \quad (64)$$

Das Drehmoment an der Schale bezüglich des Wellenmittelpunktes lautet

$$M_S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^B e(p \cdot \sin \varphi + \tau_s \cos \varphi) \cdot R_s \cdot d\varphi \cdot dz + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^B \tau_s \cdot R_s^2 \cdot d\varphi dz$$

$$M_S = P \cdot e \cdot \sin \varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^B \left( \eta \cdot \frac{U}{h} R_s - \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \cdot R_s \cdot d\varphi \cdot dz \quad (65)$$

$$M_W + M_S = 0 \quad (66)$$

Diese beiden Momente sind entgegengesetzt gleich. Berechnet oder misst man das an der Schale angreifende Moment um den Schalenmittelpunkt, so unterscheidet sich dieses vom ersteren [4].

3.4 Ergebnisse von Sassenfeld und Walther

Sassenfeld und Walther [5] lösen die dimensionslose Reynoldssche Differentialgleichung (55) nach Anwendung einer Transformation näherungsweise mit Hilfe eines Differenzenverfahrens.

3.4.1 Ganz umschlossenes (360°-) Lager

Beim 360°-Lager werden folgende Randbedingungen verwendet:

Beginn der Druckentwicklung bei  $\varphi = 0$ , d.h.

$$p(\varphi, z) = p(0, z) = 0$$

Ende der Druckentwicklung bei  $\varphi_2$ :  $p(\varphi_2(z), z) = 0$

Verschwinden des Druckgradienten bei  $\varphi_2$ :  $\frac{\partial p}{\partial \varphi}(\varphi_2(z), z) = 0$

Die Ergebnisse sind in tabellarischer Form angegeben:

Tabelle 4: Sommerfeldzahl  $So = f(\varepsilon)$  beim 360°-Lager

$\varepsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,1	0,645	0,118	0,037	0,017	0,010	0,0063	0,0045	0,0034	0,0025
0,2	1,29	0,252	0,079	0,036	0,021	0,0136	0,0095	0,0071	0,0054
0,3	1,90	0,417	0,129	0,0585	0,034	0,0225	0,0155	0,0115	0,0089
0,4	2,53	0,61	0,203	0,0955	0,056	0,036	0,0256	0,0188	0,0145
0,5	3,30	0,80	0,320	0,153	0,0895	0,0575	0,042	0,0305	0,0233
0,6	4,09	1,32	0,498	0,248	0,149	0,098	0,069	0,0515	0,039
0,7	5,35	2,08	0,86	0,45	0,27	0,18	0,13	0,0975	0,0735
0,8	7,55	3,55	1,73	0,96	0,60	0,41	0,293	0,22	0,1705
0,9	13,9	8,35	5,1	3,20	2,16	1,53	1,125	0,865	0,68
0,95	26,3	18,6	13,4	9,40	6,9	5,25	4,035	3,15	2,54

Tabelle 5: Reibungskennzahl  $\mu/\psi$  beim  $360^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,2	2,57	12,90	40,9	87	153	234	337	450	599
0,3	1,90	8,04	25,7	56	98,5	150	214	285	371
0,4	1,53	5,80	17,11	35,5	61,4	94	135	180	236
0,5	1,32	4,31	11,95	23,8	40,0	61	88	119	155
0,6	1,20	3,21	8,08	15,9	26,7	40,3	57,3	77	101
0,7	1,10	2,36	5,48	10,1	16,6	24,7	34,6	46	60
0,8	0,962	1,71	3,25	5,6	8,93	13,1	18,1	24	30,9
0,9	0,721	1,06	1,59	2,37	3,49	5,0	6,57	8,6	10,76
0,95	0,568	0,675	0,869	1,18	1,58	2,06	2,62	3,3	4,08

Tabelle 6: Verlagerungswinkel  $\gamma$  beim  $360^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0	71	86	88	90	90	90	90	90	90
0,1	69	79	81	83	83	83	83	83	83
0,2	67	74	75	75	75	75	75	75	75
0,3	64	68	68	68	68	68	68	68	68
0,4	62	62	62	62	61	61	61	61	61
0,5	58	56	55	54	54	54	54	54	54
0,6	54	50	48	47	47	47	47	47	47
0,7	49	43	41	40	39	39	39	39	39
0,8	42	36	33	32	31	31	31	31	31
0,9	32	25	23	22	21	21	21	21	21
0,95	23	16	15	15	15	15	15	15	15

Tabelle 7: Winkel  $\delta$  zwischen der Stelle des Druckmaximums und der Lastrichtung beim  $360^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,1	3	5	6	7	8	9	9	9	9
0,2	7	9	11	12	13	14	14	14	14
0,3	11	13	14	15	15	15	15	15	15
0,4	15	16	16	16	16	16	16	16	16
0,5	18	18	17	16	16	16	16	16	16
0,6	21	19	17	16	16	16	16	16	16
0,7	22	19	16	15	15	15	15	15	15
0,8	22	18	15	13	13	12	12	12	12
0,9	18	12	10	9	8	8	8	8	8
0,95	14	7	6	6	6	6	6	6	6

Tabelle 8: Winkel  $\alpha$  zwischen der Stelle des Druckbergendes und der Lastrichtung beim  $360^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0	148	120	108	102	98	95	94	94	94
0,1	139	112	100	95	92	89	88	87	87
0,2	128	105	93	87	84	82	81	80	80
0,3	118	97	86	80	77	75	73	73	73
0,4	108	89	79	73	70	68	66	65	64
0,5	98	82	71	66	63	61	60	60	59
0,6	87	74	64	59	56	53	52	52	52
0,7	76	64	56	51	48	46	45	44	44
0,8	62	53	47	43	40	38	36	36	36
0,9	45	39	35	33	29	28	27	26	26
0,95	32	27	24	22	20	20	20	20	20

Tabelle 9: Maximalwerte der dimensionslosen Druckzahl  $\Pi^*$  beim  $360^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,2	1,58	0,476	0,155	0,073	0,0427	0,0278	0,0195	0,0144	0,0110
0,3	2,36	0,806	0,272	0,129	0,077	0,051	0,0355	0,0262	0,0199
0,4	3,32	1,27	0,457	0,225	0,134	0,090	0,0628	0,0465	0,0354
0,5	4,48	1,98	0,77	0,395	0,236	0,161	0,112	0,083	0,064
0,6	6,16	3,16	1,37	0,73	0,443	0,298	0,211	0,158	0,123
0,7	9,0	5,60	2,70	1,52	0,95	0,64	0,455	0,34	0,268
0,8	15,13	11,2	6,43	3,85	2,52	1,75	1,28	0,97	0,766
0,9	38,5	34,2	23,8	16,6	12,0	8,8	6,68	5,2	4,19
0,95	103	99,0	84	66	50,4	39,5	31,8	25,8	21,2

Zur Veranschaulichung der Ergebnisse dienen die folgenden Abbildungen:

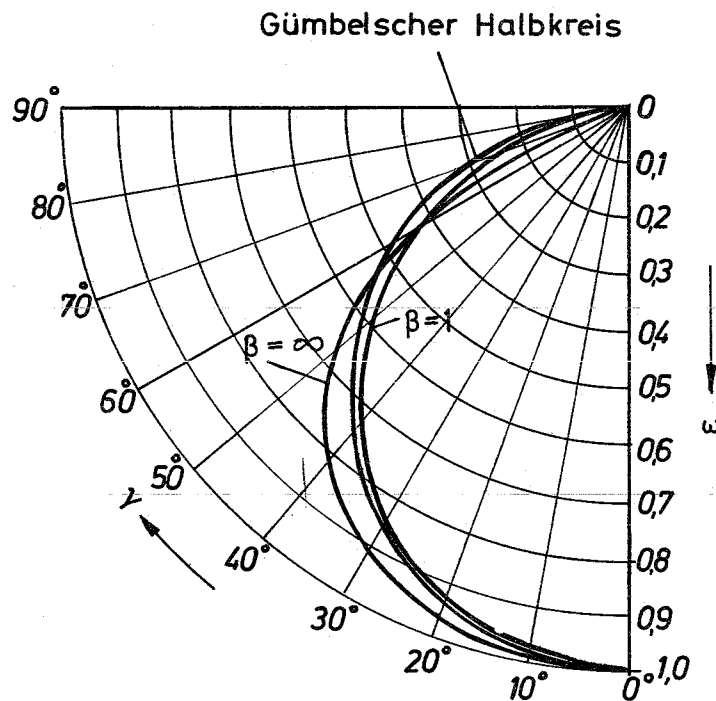


Abb. 3: Verlagerungskurve beim  $360^\circ$ -Lager

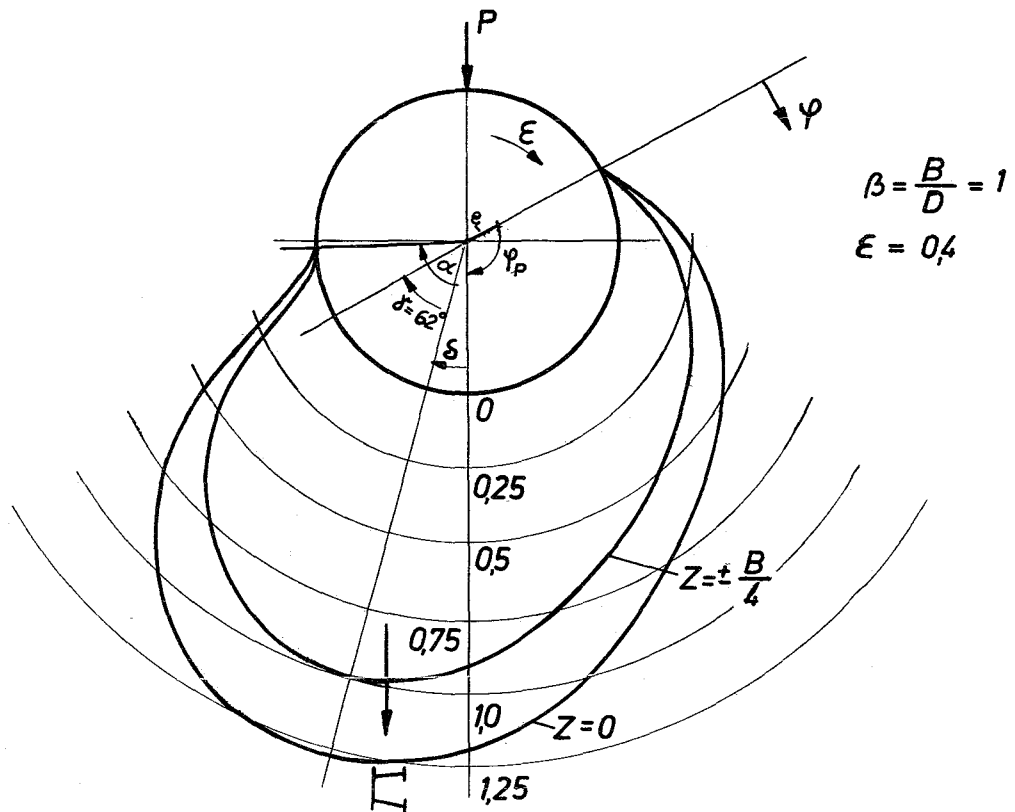


Abb. 4: Polardarstellung der Druckzahl  $\Pi$  beim  $360^\circ$ -Lager

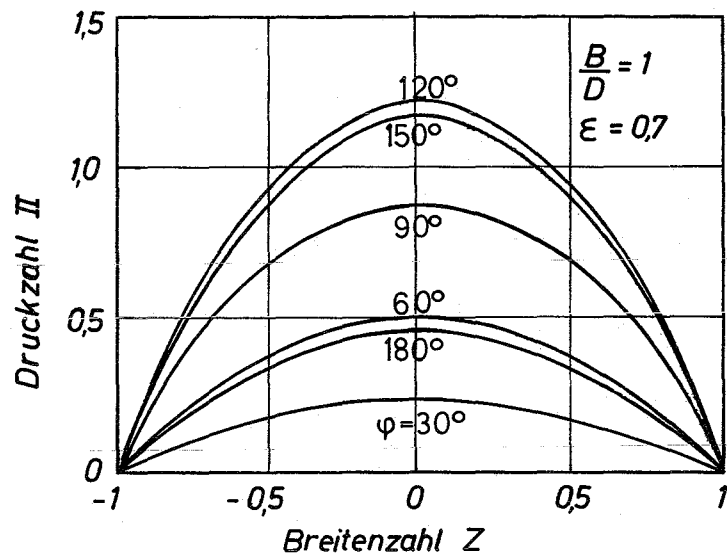


Abb. 5: Abhängigkeit der Druckzahl an verschiedenen Stellen des Umfangs von der dimensionslosen Breite ( $360^\circ$ -Lager)

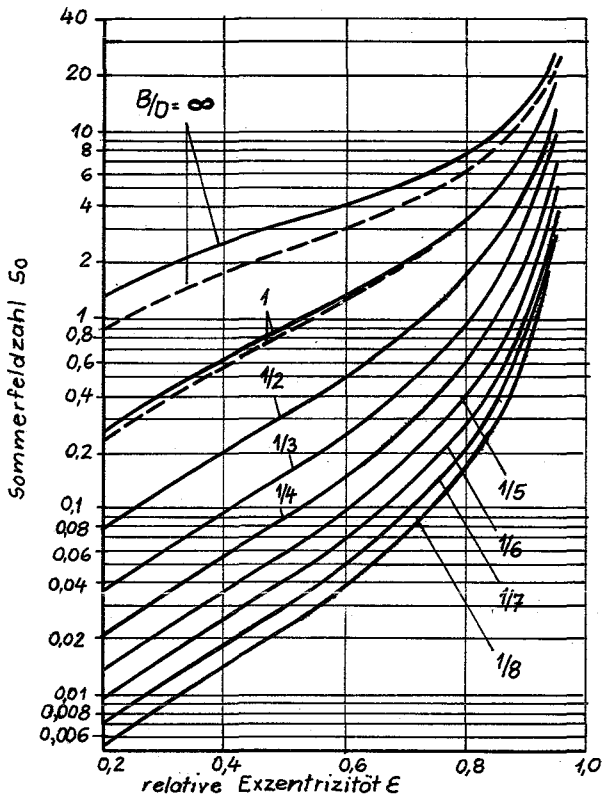


Abb. 6: Abhängigkeit der Sommerfeldzahl  $S_o$  von der relativen Exzentrizität bei verschiedenen Breitenverhältnissen  $\beta$  für  $360^\circ$ -Lager und  $180^\circ$ -Lager (---)

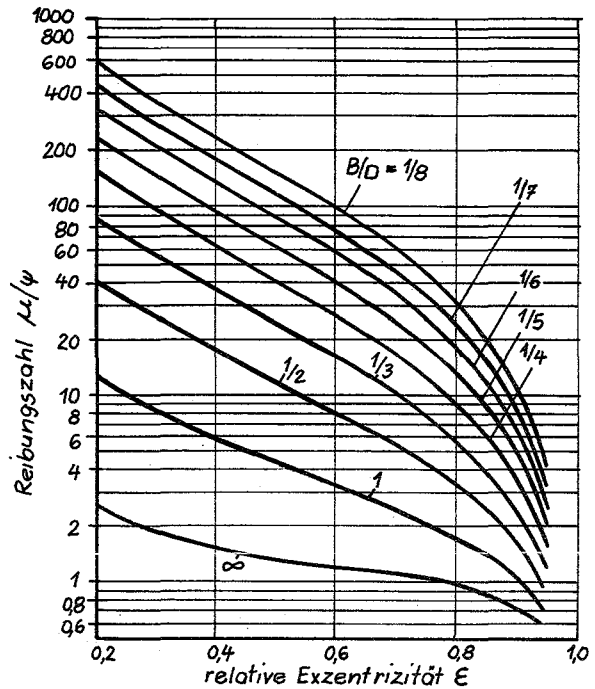


Abb. 7: Abhängigkeit der Reibungskennzahl von der relativen Exzentrizität bei verschiedenen Breitenverhältnissen  $\beta = B/D$  beim  $360^\circ$ -Lager

### 3.4.2 Halb umschlossenes ( $180^\circ$ ) Lager

Beim  $180^\circ$ -Lager werden folgende Randbedingungen verwendet:

Beginn der Druckentwicklung bei  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma$   $p(\frac{\pi}{2} - \gamma, z) = 0$

Ende der Druckentwicklung:

$$\alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad p(\varphi_2(z), z) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi}(\varphi_2(z), z) = 0$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \quad p(\varphi = \frac{3}{2} \cdot \pi - \gamma, z) = 0$$

Die letzte Bedingung gilt für kleine relative Exzentrizitäten (etwa  $\epsilon < 0,3$ ), wo  $\varphi_2$  in die obere Halbschale fallen würde. In diesen Fällen verlangt man, dass der Druck am linken oberen Rand der Halbschale



verschwindet, ohne noch etwas über den Druckgradienten aussagen zu können. Die Ergebnisse werden in den Tabellen 10 bis 15 angegeben und in der Abb. 6, 8 und 9 dargestellt.

Tabelle 10: Sommerfeldzahl  $S_o = f(\epsilon)$  beim  $180^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,1	0,645	0,118	0,037	0,017	0,010	0,0063	0,0045	0,0034	0,0025
0,2	0,88	0,240	0,0775	0,036	0,021	0,0136	0,0095	0,0071	0,0054
0,3	1,305	0,380	0,1265	0,0585	0,034	0,0225	0,0155	0,0115	0,0089
0,4	1,77	0,570	0,200	0,0955	0,056	0,036	0,0256	0,0188	0,0145
0,5	2,32	0,835	0,320	0,153	0,0895	0,0575	0,042	0,0305	0,0233
0,6	3,045	1,235	0,4945	0,248	0,149	0,098	0,069	0,0515	0,039
0,7	4,16	1,950	0,865	0,450	0,27	0,18	0,13	0,0975	0,0735
0,8	6,30	3,445	1,71	0,96	0,60	0,41	0,293	0,220	0,1705
0,9	12,45	8,20	5,06	3,2	2,16	1,53	1,125	0,865	0,68
0,95	24,75	18,25	13,1	9,4	6,90	5,25	4,035	3,15	2,54

Tabelle 11: Reibungskennzahl  $\mu/\psi$  beim  $180^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,2	2,02	7,10	21,5	44	74	114	164	224	290
0,3	1,59	4,84	13,8	28	47	72	103	141	180
0,4	1,29	3,44	9,0	18	30	46	66	89	114
0,5	1,10	2,59	6,25	12,0	20	31	43	58	75
0,6	0,97	2,00	4,36	8,2	13,5	20,2	28,6	38	50
0,7	0,84	1,53	3,14	5,3	8,5	12,6	17,6	23,6	31
0,8	0,71	1,11	1,95	3,11	4,7	6,8	9,3	12,4	16,1
0,9	0,55	0,72	0,99	1,41	2,0	2,6	3,4	4,4	5,6
0,95	0,40	0,48	0,59	0,75	0,9	1,2	1,4	1,8	2,2

Tabelle 12: Verlagerungswinkel  $\gamma$  beim 180°-Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,1	73	74	77	80	81	82	82	82	82
0,2	61	68	71	73	74	75	75	75	75
0,3	54	62	64	65	66	67	67	67	67
0,4	50	56	58	59	59	59	59	59	59
0,5	47	50	51	51	52	52	52	52	52
0,6	43	45	45	45	45	45	45	45	45
0,7	39	38	38	38	38	37	37	37	37
0,8	33	32	31	31	31	30	30	30	30
0,9	26	25	22	21	21	21	21	21	21
0,95	19	18	17	16	16	15	15	15	15

Tabelle 13: Winkel  $\delta$  zwischen der Stelle des Druckmaximums und der Lastrichtung beim 180°-Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,2	3	5	8	11	13	13	14	14	14
0,3	6	8	11	14	15	15	15	15	15
0,4	8	12	14	15	16	16	16	16	16
0,5	10	14	15	16	16	16	16	16	16
0,6	12	15	15	16	16	16	15	15	15
0,7	14	15	15	15	15	15	14	14	14
0,8	14	14	13	13	13	13	12	12	12
0,9	13	11	10	10	10	10	9	9	9
0,95	10	9	7	7	7	7	7	7	7

Tabelle 14: Winkel  $\alpha$  zwischen der Stelle des Druckberg-  
Endes und der Lastrichtung beim  $180^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,2	90	90	89	83	80	80	80	80	80
0,3	90	89	83	78	74	74	74	74	74
0,4	90	82	76	72	69	69	69	69	69
0,5	83	76	69	65	63	63	63	63	63
0,6	74	69	61	57	56	56	56	56	56
0,7	64	61	54	49	49	48	48	48	48
0,8	53	51	45	41	40	39	39	39	39
0,9	39	38	33	30	29	27	26	26	26
0,95	28	27	25	23	21	19	18	18	18

Tabelle 15: Maximalwerte der dimensionslosen Druckzahl  
 $\Pi_{\max}$  beim  $180^\circ$ -Lager

$\epsilon \backslash \beta$	$\infty$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0,2	1,16	0,467	0,155	0,073	0,0427	0,0278	0,0195	0,0144	0,0110
0,3	1,78	0,78	0,268	0,129	0,077	0,051	0,0355	0,0262	0,0199
0,4	2,53	1,23	0,457	0,225	0,134	0,090	0,0628	0,0465	0,0354
0,5	3,49	1,91	0,77	0,395	0,236	0,161	0,112	0,083	0,064
0,6	5,02	3,10	1,37	0,73	0,443	0,298	0,211	0,158	0,123
0,7	7,71	5,40	2,68	1,52	0,95	0,64	0,455	0,34	0,268
0,8	13,69	11,2	6,33	3,85	2,52	1,75	1,28	0,97	0,766
0,9	36,65	33,9	24,4	16,6	12,0	8,8	6,68	5,2	4,19
0,95	101,0	98,4	82,6	66	50,4	39,5	31,8	25,8	21,2

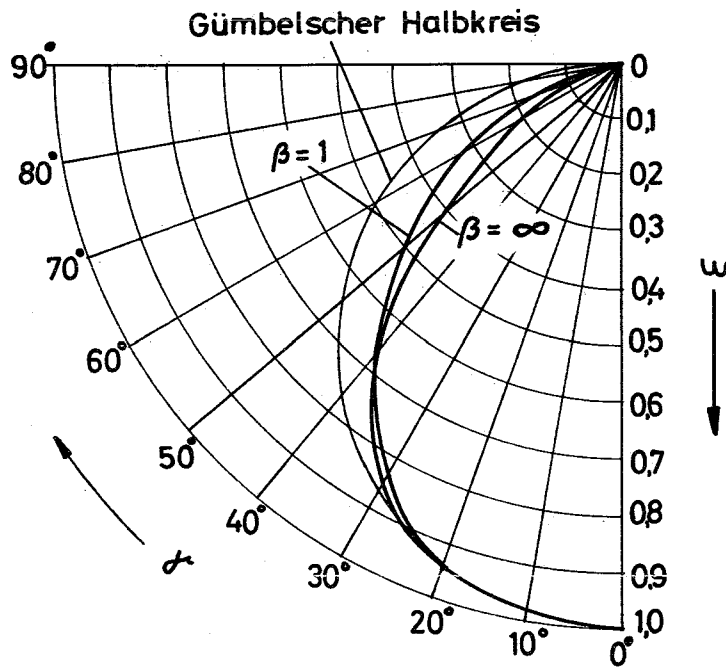


Abb. 8: Verlagerungskurve beim 180°-Lager

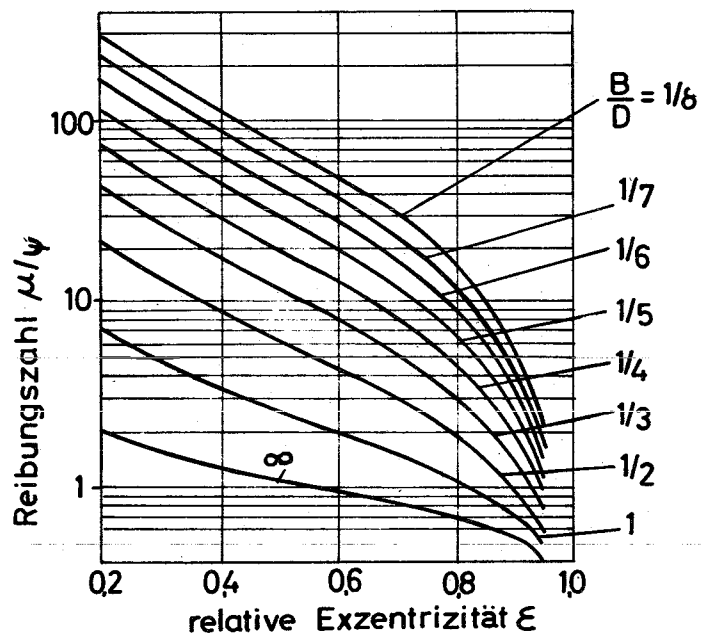


Abb. 9: Abhängigkeit der Reibungskennzahl für das 180°-Lager von der relativen Exzentrizität bei verschiedenen Breitenverhältnissen

### 3.5 Reibungsverhalten von 360°- und 180°-Lagern

Die meisten zylindrischen Lager liegen bezüglich der Reibung zwischen den beiden Extremen des 360°- und des 180°-Lagers, je nachdem, wieviel der reibenden Fläche durch Nuten und sonstige Aussparungen in der oberen Lagerschale ausgespart ist. So gab Vogelpohl [7], [8] bei leicht belasteten Lagern ( $S_o < 1$ ) die Reibungsformel nach Petroff (38) für das 360°-Lager als obere Grenze und für das 180°-Lager als untere Grenze an:

$$\frac{\pi}{2 \cdot S_o} \leq \frac{\mu}{\psi} \leq \frac{\pi}{S_o} \quad \text{für } S_o < 1 \quad (67)$$

Als Näherungswert empfiehlt er in seinem Buch [9] mit

$$\frac{\mu}{\psi} = \frac{3}{S_o} \quad \text{für } S_o < 1 \quad (68)$$

zu rechnen.

Für schwer belastete Lager ( $S_o > 1$ ) empfiehlt Vogelpohl die von Gümbel [10] abgeleitete Formel

$$\frac{\mu}{\psi} = \frac{K_2}{\sqrt{S_o}}, \quad (69)$$

wobei sich der Faktor  $K_2$  in den Grenzen  $2 \leq K_2 \leq 4$  ändert, und als Näherungsformel

$$\frac{\mu}{\psi} = \frac{3}{\sqrt{S_o}} \quad \text{für } S_o > 1$$

Alle von einer beträchtlichen Zahl von Autoren angegebenen Versuchswerte fallen in das Gebiet zwischen den von Vogelpohl angegebenen Grenzen, soweit die hydrodynamische Schmierung gewährleistet war.

### 3.6 Näherungsberechnung für schmale Lager

Du Bois und Oevirk [11] gehen davon aus, dass bei einem schmalen Lager in der in Abschnitt 2.1.1 abgeleiteten Beziehung (13) für die Schmiermittelmenge pro Breitereinheit

$$Q_B = U \cdot \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{dp}{dx}$$

das zweite Glied vernachlässigt werden kann, woraus durch eine weitere Betrachtung folgt, dass dies gleichbedeutend mit der Vernachlässigung von  $dp/dx$  ist. Die Reynoldssche Differentialgleichung vereinfacht sich dann zu

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \cdot \eta \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (70)$$

Da  $h$  nicht von  $z$  abhängt (kein Verkanten der Welle vorausgesetzt), lässt sich diese Gleichung integrieren. Mit den Randbedingungen  $dp/dz = 0$  bei  $z = 0$  und  $p = p_0$  bei  $z = \pm B/2$  erhält man für die Druckverteilung

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{3\eta \cdot U}{h^3} \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \left( z^2 - \frac{B^2}{4} \right)$$

Mit  $dx = R \cdot d\varphi$  und  $h = \Delta R (1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi)$  bzw.  $dh/d\varphi = -\Delta R \cdot \varepsilon \cdot \sin\varphi$  wird

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{3 \cdot \eta \cdot U}{R \cdot \Delta R^2} \left( \frac{B^2}{4} - z^2 \right) \frac{\varepsilon \cdot \sin\varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi)^3} \quad (71)$$

Wie beim unendlich langen Lager ist dies wieder eine ungerade Funktion mit  $\Delta p(\varphi) = -\Delta p(-\varphi)$ . Das bedeutet, dass im Bereich zwischen  $180^\circ$  und  $360^\circ$  wieder negative Druckdifferenzen gefordert werden. Aus den

gleichen Gründen wie früher wird der negative Bereich vernachlässigt und man erhält durch Integration für die Lagerbelastung

$$P = \frac{\eta \cdot U \cdot B^3}{4 \cdot \Delta R^2} \cdot \frac{\epsilon \cdot \sqrt{\pi^2(1-\epsilon^2) + 16\epsilon^2}}{(1-\epsilon^2)^2} \quad (72)$$

Mit  $P = \bar{p} \cdot B \cdot D$ ,  $U = \omega \cdot R$ ,  $\beta = B/D$  und  $S_o = \bar{p} \cdot \psi^2 / \eta \cdot \omega$  wird die Gleichung dimensionslos gemacht:

$$S_o \cdot \frac{1}{\beta^2} = \frac{\epsilon \cdot \sqrt{\pi^2(1-\epsilon^2) + 16\epsilon^2}}{(1-\epsilon^2)^2} \quad (73)$$

Der Verlagerungswinkel  $\gamma$  ist im betrachteten Fall unabhängig vom Breitenverhältnis  $\beta$  und nur eine Funktion der relativen Exzentrizität  $\epsilon$ :

$$\tan \gamma = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}{\epsilon} \quad (74)$$

Für den Reibungskoeffizienten  $\mu$  bekommt man

$$\mu = \frac{F}{P} = \frac{\eta \cdot U \cdot B \cdot R}{P \cdot \Delta R} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad (75)$$

und in dimensionsloser Form

$$\frac{\mu}{\psi} = \frac{1}{S_o} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad (76)$$

Die Reibungskennzahl  $\mu/\psi$  ist nur eine Funktion von  $\epsilon$  und  $\beta$ , da  $S_o = f(\epsilon, \beta)$ .

Die Reibungskennzahl  $\mu/\psi$  ist zwar unbestritten eine echte Ähnlichkeitskenngrösse, aber nur dann anschaulich, wenn man stark belastete Lager betrachtet und die Last  $P$  als gegeben, d.h. konstant ansehen kann. Bei leicht belasteten Lagern spielt die Lagerbelastung von der Aufgabenstellung her zunächst eine untergeordnete Rolle. Bei verschwindender Belastung wird  $\mu/\psi$  gar unendlich. Du Bois und Ocvirk führen wohl aus diesen Gründen eine neue, "Reibungsverhältnis" genannte Kennzahl ein, indem sie die am Zapfen wirkende Umfangskraft  $F$  auf die bei zentrischem Lauf  $F_0$  beziehen, die schon von Petroff abgeleitet worden ist:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\frac{\mu}{\psi}}{\frac{\mu_0}{\psi}} = \frac{\pi}{S_0 \sqrt{1 - \epsilon^2}} \bigg/ \frac{\pi}{S_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (77)$$

Kiese Kennzahl ist beim schmalen Lager nur von  $\epsilon$  abhängig.

Für die aus dem Gebiet positiver Druckdifferenz axial seitlich ausströmende Schmiermittelmenge ergab sich

$$Q_0 = U \cdot \Delta R \cdot \epsilon \cdot B = \omega \cdot R \cdot \Delta R \cdot \epsilon \cdot B \quad (78)$$

Die gesamte Schmiermittelmenge  $Q$  wird auf  $Q_p$  bezogen und das Verhältnis  $q$  Durchflussfaktor genannt

$$q = \frac{Q}{Q_p} = \frac{Q}{\omega \cdot R \cdot \Delta R \cdot \epsilon \cdot B} \quad (79)$$



Für das Druckmaximum errechnet man

$$p^* = \frac{3 \cdot \eta \cdot U \cdot B^2}{4 \cdot R \cdot \Delta R^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^3} \quad (80)$$

$$\text{mit } \varphi^* = \arccos \left[ \frac{1}{4\varepsilon} (1 - \sqrt{1 + 24 \cdot \varepsilon^2}) \right] \quad (81)$$

Ferner definieren die Verfasser das Maximaldruck-Verhältnis  $k$ :

$$k = \frac{p^*}{p} = \frac{\beta^2}{2 \cdot \pi \cdot S_0} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \sin \varphi^*}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi^*)^3} \quad (82)$$

Die Theorie des schmalen Lagers gibt bis zu Breitenverhältnissen von  $\beta = B/D = 1$  brauchbare Ergebnisse, die oft zu Vergleichen herangezogen werden.

### 3.7 Lager mit kleineren Umschliessungswinkeln

Zylindrische Lager mit kleineren Umschliessungswinkeln als  $180^\circ$  sind in diesem Zusammenhang nur interessant als Teile eines Mehrflächenlagers. Dabei interessieren vor allem  $150^\circ + 160^\circ$ -Lager als Teile eines Lagers mit Zitronenspiel,  $100^\circ$ -Lager als Teile eines symmetrischen 3-Flächenlagers und  $75^\circ$ -Lager als Teile eines symmetrischen 4-Flächenlagers. Die Bauformen dieser Lager werden in Kapitel V, Abschnitt 4 besprochen.

Es gibt mehrere Arbeiten, die Spezialfälle von Lagern mit kleineren Umschliessungswinkeln als  $180^\circ$  lösen. So veröffentlichte Needs [12] schon 1934 Ergebnisse für ein  $120^\circ$ -Lager, die er mit Hilfe der Methode der Analogie des elektrolytischen Troges gewann. Wilcock und Rosenblatt [13] gewannen Lösungen für das

150°-Lager und Pinkus [14] für 100°- und 75°-Lager. Diesen Arbeiten ist gemein, dass nur in der Mitte belastete Lager untersucht werden. Bei Mehrflächenlagern ist die Belastung im allgemeinen nach Richtung und Grösse für jede Tragfläche verschieden und ändert sich mit der Exzentrizität, weshalb auf diese Arbeiten nicht näher eingegangen wird.

3.7.1 Lösungen für 150°-, 100°- und 75°-Lager mit beliebiger Lastrichtung

Pinkus [15] macht die Reynoldssche Differentialgleichung (7) dimensionslos, indem er die folgenden Substitutionen einführt:  $X' = x/D$ ,  $Z' = z/B$ ,  $H' = h/2\Delta R$ ,  $\eta' = \eta/\eta_m = 1$ ,  $\Pi' = p \cdot (\Delta R/R)^2 / \eta_m \cdot n_s$  und  $U = \pi \cdot D \cdot n_s$  und erhält damit

$$\frac{\partial}{\partial X'} (H'^3 \frac{\partial \Pi'}{\partial X'}) + (\frac{D}{B})^2 \cdot \frac{\partial}{\partial Z'} (H'^3 \frac{\partial \Pi'}{\partial Z'}) = 6\pi \frac{\partial H'}{\partial X'} \quad (83)$$

wobei  $\eta_m$  der örtliche Mittelwert der Zähigkeit  $\eta$  ist.

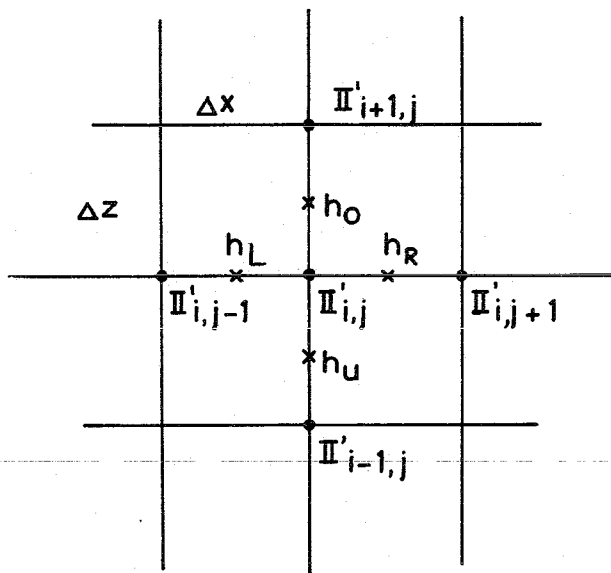


Abb. 10: Element des Quadratnetzwerkes

Die Glieder der Gleichung (83) werden in Differenzenform entwickelt:

$$\frac{\partial}{\partial X'} (H, \frac{\partial \Pi'}{\partial X'}) = \frac{h_R^3 \cdot (\frac{\Pi'_{i,j+1} - \Pi'_{i,j}}{\Delta x}) - h_L^3 \cdot (\frac{\Pi'_{i,j} - \Pi'_{i,j-1}}{\Delta x})}{\Delta x} \quad (84)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z'} (H, \frac{\partial \Pi'}{\partial Z'}) = \frac{h_O^3 \cdot (\frac{\Pi'_{i+1,j} - \Pi'_{i,j}}{\Delta z}) - h_U^3 \cdot (\frac{\Pi'_{i,j} - \Pi'_{i-1,j}}{\Delta z})}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial H'}{\partial X'} = \frac{h_R - h_L}{\Delta x}$$

Diese 3 Ausdrücke werden in Gl. (83) eingesetzt und nach  $\Pi'_{i,j}$  aufgelöst. Man erhält für  $\Pi'_{i,j}$  einen Ausdruck der Form

$$\Pi'_{i,j} = a_0 + a_1 \cdot \Pi'_{i-1,j} + a_2 \cdot \Pi'_{i,j+1} + a_3 \cdot \Pi'_{i+1,j} + a_4 \cdot \Pi'_{i,j-1} \quad (85)$$

Für n-Punkte des Netzwerks erhält man n algebraische Gleichungen mit n Unbekannten, die nach einer analogen oder Relaxationsmethode mit Hilfe eines Computers gelöst werden können, womit man die Druckverteilung erhält. Die Drücke werden ebenfalls auf einer Rechenmaschine numerisch integriert. Das Ergebnis ist die Belastung und die Belastungsrichtung in Abhängigkeit von der relativen Exzentrizität.

Die Lösungen wurden für 150°-, 100°- und 75°-Lager jeweils für die Breitenverhältnisse B/D = 3/2, 1, 1/2 und 1/4, für verschiedene Belastungsrichtungen in Abhängigkeit von ε, das zwischen 0,2 und 0,95 variiert wurde, durchgeführt. Die Ergebnisse sind in umfangreichen Tabellen niedergelegt.

### 3.7.2 Ergebnisse von Frössel für beliebige Umschliessungswinkel

Frössel [16] verwendet in seiner Arbeit die Berechnungsmethode von Vogelpohl [4] zur Bestimmung der Belastungs- und Reibungsverhältnisse bei Lagern beliebiger Umschliessungswinkel unterhalb  $180^\circ$ . Vogelpohl geht von der Lösung für das unendlich breite Lager aus und setzt den Druckverlauf in Umfangsrichtung beim endlich breiten Lager dem des unendlich breiten Lagers proportional. Es wird der Lösungsansatz

$$p = p_\infty \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \cdot \sin \left( \nu \cdot \frac{\pi \cdot z}{B} \right) \quad (\nu = 1, 3, 5, 7 \dots) \quad (86)$$

verwendet, womit man affine Druckverteilungen von  $p$  und  $p_\infty$  über  $\varphi$  voraussetzt. Es gilt dann  $\varphi_2 = \varphi_{2\infty}$ ,  $\varphi = \varphi_\infty^*$ . Diese Voraussetzungen sind nicht so exakt wie die von Pinkus, aber die Abweichungen der Vogelpohlschen Ergebnisse von denen von Sassenfeld und Walther sind sehr gering, so dass die Genauigkeit bei Mehrflächenlagern auch ausreichend sein dürfte. Die  $C_\nu$ -Werte werden mit Hilfe des Ritz-Galerkinschen Verfahrens bestimmt.

Die Gesamtkraft ist nach Vogelpohl

$$P = p_\infty \cdot \frac{2}{\pi} \sum \frac{C_\nu}{\nu} \quad (87)$$

Eine entsprechende, jedoch kompliziertere Beziehung, wird von Frössel für den Anteil  $T$  der Reibung gemacht, der im Druckbereich zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  auftritt. Für den Bereich, wo die Strömung für  $\varphi > \varphi_2$  aufreißt, wird der Ansatz

$$dT' = - \frac{\eta \cdot U \cdot b \cdot R}{h} \cdot d\varphi \quad (88)$$

für die Zusatzreibung  $T'$  gemacht, wobei die noch mit Öl beaufschlagte Breite  $b$  aus der Kontinuität folgt:

$$b \cdot h = B \cdot h_2 \quad (89)$$

$h_2$  ist die Schmierschichtstärke an der Stelle  $\varphi = \varphi_2$ , wo die Druckentwicklung zu Ende geht.

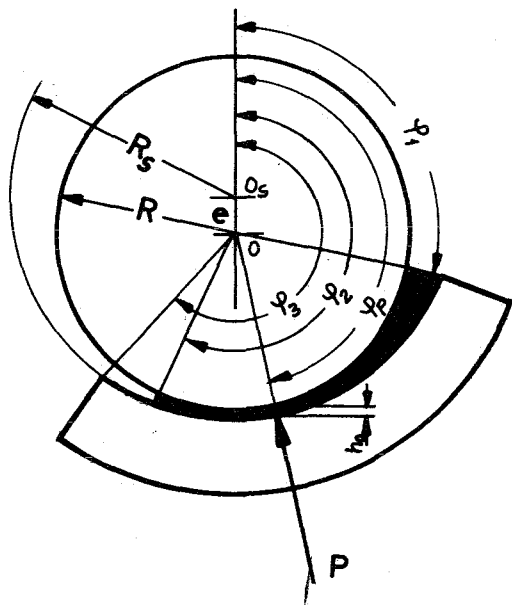


Abb. 11: Geometrie des Teillagers

Da der Umschliessungswinkel  $\varphi_3 - \varphi_1$  nicht wesentlich für die Druckentwicklung ist, solange  $\varphi_3 > \varphi_2$  ist, und die Verlagerung durch  $\varphi_1$  und  $\varepsilon = e/(R_s - R) = e/\Delta R$  erfasst werden kann, denn  $\varphi_1$  hängt nicht mehr wie beim  $360^\circ$ -Lager von der Verschiebungsrichtung selbst ab, kann man die dimensionslose Tragkraft und die dimensionslos gemachte Reibungszahl  $T$  in Abhängigkeit von  $\varphi_1$  und  $\varepsilon$  berechnen. Die Zusatzreibung erhält man durch Integration der Gleichung (88) zwischen den Grenzen  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$ .

Frössel hat die Lösungen für die Winkel  $\varphi_1 = 110^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $150^\circ$  und  $160^\circ$  durchgeführt und zwar für die Breitenverhältnisse 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,5; 2; 3 und  $\infty$ . Die Ergebnisse für die dimensionslose Tragkraft, die dimensionslose Reibkraft und mit  $\varphi_3$  als Parameter für die dimensionslose Zusatzreibung werden in Diagrammen mitgeteilt. Benötigt man Ergebnisse, die von den Parametern  $\varphi_1$  abweichen, dann muss man interpolieren.

In je einem Diagramm sind noch die Winkel  $\varphi_2$  (Druckbergende) und der Lastwinkel  $\varphi_p$  in Abhängigkeit von der relativen Exzentrizität und dem Winkel  $\varphi_1$  angegeben.

In Ergänzung der für die Auslegung wichtigen Kennwerte sind dann noch die Druckverteilung über  $\varphi$  und in Achsrichtung für die verschiedenen Parameter aufgetragen.

#### 4. Literatur:

- [1] Reynolds, O.: "On the Theory of Lubrication" Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. 177 (1886), S. 157 - 234, auch: Papers on Mechanical and Physical Subjects, vol. 2 (1901), S. 228 - 310, Macmillan. Übersetzung in: "Theorie der Schmiermittelreibung", Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 218, Akademische Verlagsgesellschaft mbH., Leipzig, 1927
  
- [2] Sommerfeld, A.: "Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung" Z.f.Math. u. Phys. Bd 50 (1904), H.1 und H.2 Abdruck in Ostwald's Klassiker Nr. 218, wie [1]

- [3] Gümbel, L. u. E. Everling: "Reibung und Schmierung im Maschinenbau" Berlin: M. Krayn, 1925
- [4] Vogelpohl, G.: "Zur Integration der Reynoldsschen Gleichung für das Zapfenlager endlicher Breite" Ingenieur-Archiv XIV. Bd. (1943), S. 192 - 212
- [5] Sassenfeld, H.u.A. Walther: "Gleitlagerberechnungen" VDI-Forschungsheft 441, Bd. 20 (1954)
- [6] Cameron, A. u. W.L. Wood: "The Full Journal Bearing" Inst. Mech. Eng. Proc., vol. 161 (1949), S. 59-72 W.E.P. Nos. 48
- [7] Vogelpohl, G.: "Das Reibungsverhalten von Gleitlagern" Konstruktion 8 (1956), S. 81 - 86
- [8] Vogelpohl, G.: "Ähnlichkeitsbeziehungen der Gleitlagerreibung und untere Reibungsgrenze" Z.-VDI Bd. 91 (1949), S. 379 - 384
- [9] Vogelpohl, G.: "Betriebssichere Gleitlager" Springer-Verlag 1958
- [10] Gümbel, L.: "Der Einfluss der Schmierung auf die Konstruktion" Jb. Schiffbautechn. Ges. Bd. 18 (1917) S. 236 - 322
- [11] Du Bois, G.B. u. F.W. Oevirk: "Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings" NACA-Report 1157, 1953  
Trans. ASME, vol. 77 (1955), S. 1173 - 1178
- [12] Needs, S.J.: "Effects of Side Leakage in 120-Degree Centrally Supported Journal Bearings." Trans. ASME, vol. 56 (1934), S. 721 - 734

- [13] Wilcock, D.F. u. M. Rosenblatt: "Oil Flow, Key Factor in Sleeve Bearing Performance"  
Trans. ASME, vol. 74 (1952), S. 849 - 866
- [14] Pinkus, O.: "Solution of Reynolds' Equation for Finite Journal Bearings".  
Trans. ASME, vol. 80 (1958), S. 858 - 864
- [15] Pinkus, O.: "Solution of Reynolds' Equation for Arbitrarily Loaded Journal Bearings"  
Trans. ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, vol. 83 (1961), S. 145 - 152
- [16] Frössel, W.: "Berechnung von Gleitlagern mit radialen Gleitflächen"  
Konstruktion 14 (1962), S. 169 - 180



IV. Hydrodynamische Axiallager mit laminarer Strömung

1. Ebener keilförmiger Schmierpalt unendlicher Breite

Die Lösung der Reynoldsschen Differentialgleichung (Gl. 6, Kap. III, 1) wurde für den Fall des unendlich breiten, ebenen Gleitschuhes von Reynolds [1] selbst angegeben. Da  $\partial p / \partial z = 0$ , lässt sich diese Differentialgleichung geschlossen integrieren und man erhält die Gleichung für den Druckgradienten ( $U_2 = 0, V = 0, U_1 = -U$ ):

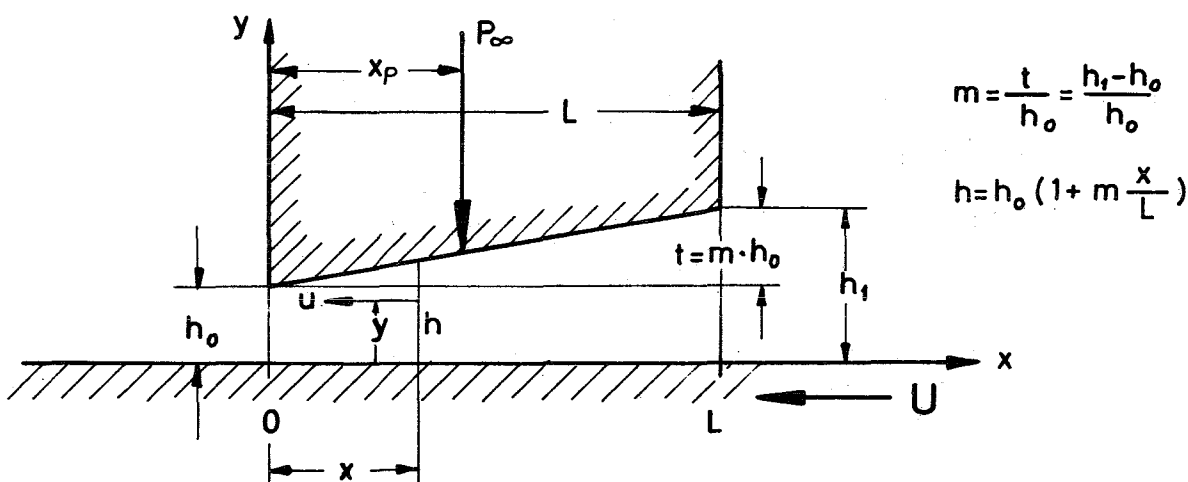


Abb. 12: Bezeichnungen beim ebenen Schmierkeil

$$\frac{dp_{\infty}}{dx} = -6 \cdot \eta \cdot U \cdot \frac{h - h_{\infty}^*}{h^3} \quad (1)$$

$h_{\infty}^*$  ist diejenige Schmier-schichtdicke, bei der  $dp_{\infty}/dx$  gleich Null ist, d.h. der Druck einen Extremwert hat. Die dazugehörige x-Koordinate ist  $x_{\infty}^*$ . Die Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung lautet

$$u = -(h-y) \cdot \left( \frac{U}{h} + \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y \right) \quad (2)$$

und die Gleichung für die Schubspannungsverteilung längs der bewegten Wand ( $y = 0$ )

$$\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy} = \eta \cdot \frac{U}{h} - \frac{h}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (3)$$

Dabei lauten die Randbedingungen für

$$y = 0 \quad u = -U \quad \text{und} \quad y = h \quad u = 0, \quad (4)$$

ausserdem für

$$x = 0 \quad p_{\infty} = p_0 \quad \text{und} \quad x = L \quad p_{\infty} = p_0 \quad (5)$$

Nach Abb.12 ändert sich die Spalthöhe  $h$  nach der Beziehung

$$h = h_0 \left( 1 + m \cdot \frac{x}{L} \right) \quad (6)$$

An der Stelle des Extremwertes gilt

$$h_{\infty}^* = h_0 \left( 1 + m \frac{x_{\infty}^*}{L} \right) \quad (7)$$

Setzt man die beiden letzten Beziehungen in Gleichung (1) ein, integriert diese nach  $x$  und setzt die beiden Randbedingungen  $p = p_0$  für  $x = 0$  und  $x = L$  ein, dann erhält man die Stelle des Druckextremwertes (Druckmaximums)

$$x_{\infty}^* = \frac{L}{2 + m} \quad (8)$$

Damit erhält man für die Druckverteilung selbst

$$p_{\infty} - p_0 = \Delta p_{\infty} = \frac{6 \cdot \eta \cdot U \cdot L}{h_0^2 \cdot m} \left[ \frac{1}{1 + m \frac{x}{L}} - \frac{1+m}{2+m} \cdot \frac{1}{\left(1 + m \frac{x}{L}\right)^2} - \frac{1}{2+m} \right] \quad (9)$$

Der maximale Druck an der Stelle  $x_{\infty}^*$  beträgt

$$\Delta p_{\infty, \max} = \frac{6 \cdot \eta \cdot U \cdot L}{h_0^2} \cdot \frac{m}{4(1+m)(2+m)} \quad (10)$$

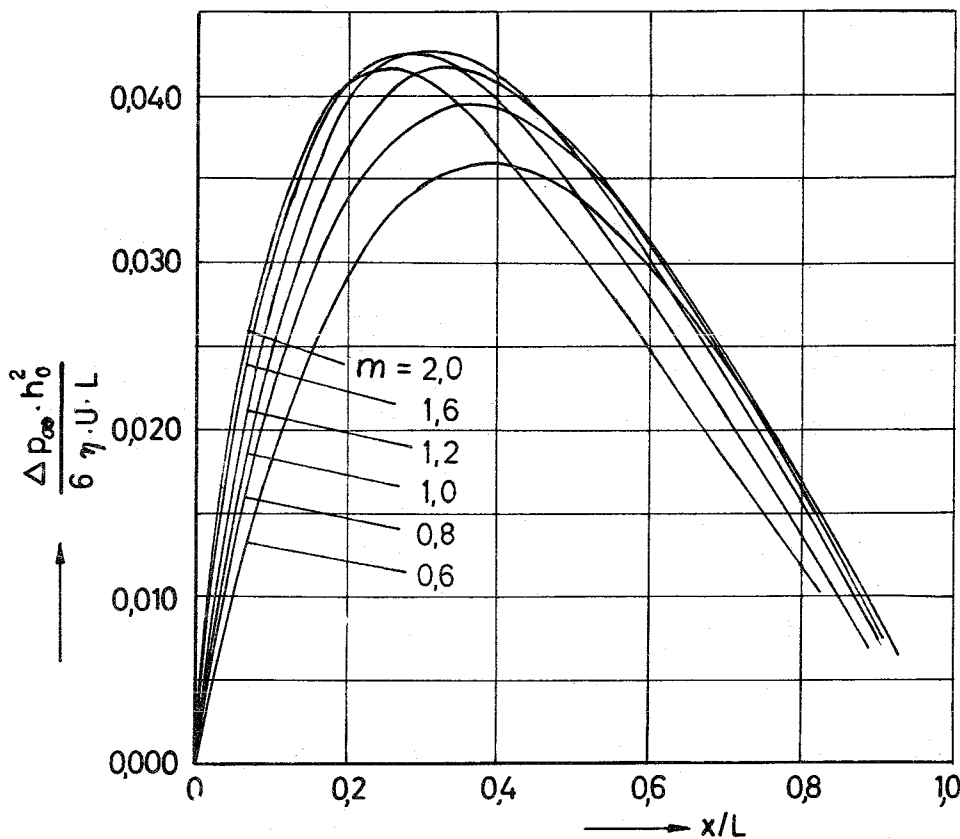


Abb. 13: Druckverteilung in Abhängigkeit von  $m$

Die Tragkraft pro Breitereinheit  $P_{\infty}$  lässt sich durch Integration von  $\Delta p_{\infty}$  zwischen den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = L$  leicht berechnen:

$$P_{\infty} = \frac{6 \cdot \eta \cdot U \cdot L^2}{h_0^2 \cdot m^2} \cdot \left[ \ln(1+m) - \frac{2m}{2+m} \right] \quad (11)$$

Die Tragkraft ist ein Maximum, wenn bei möglichst grosser Gleitschuhlänge  $L$  und möglichst kleinem engstem Schmierspalt  $h_0$   $m$  den Optimalwert

$$m_p = 1,1886 \quad (12)$$

erreicht. Die maximale Tragkraft ergibt sich damit zu

$$P_{\infty, \max} = 0,1615 \cdot \eta \cdot U \cdot \left(\frac{L}{h_0}\right)^2 \quad (13)$$

Aus (3) und (1) folgt für die Schubspannung

$$\tau = \eta \cdot U \cdot \frac{4h - 3h^*}{h^2}, \quad (14)$$

woraus man die Reibkraft pro Breitereinheit  $F_{\infty}$  durch Einsetzen der Ausdrücke für  $h$  und  $h^*$  und Integration zwischen den Grenzen  $x = 0$  und  $x = L$  erhält:

$$F_{\infty} = 2 \cdot \eta \cdot U \cdot \frac{L}{h_0 \cdot m} \left[ 2 \cdot \ln(1+m) + \frac{3m}{2+m} \right] \quad (15)$$

Der Reibungskoeffizient ergibt sich zu

$$\mu_{\infty} = \frac{F_{\infty}}{P_{\infty}} = \frac{h_0 \cdot m}{3 \cdot L} \cdot \frac{2(2+m) \cdot \ln(1+m) + 3m}{(2+m) \cdot \ln(1+m) - 2m} \quad (16)$$

Für alle Werte  $L/h_0$  hat  $\mu_{\infty}$  ein Minimum bei

$$m_F = 1,536 \quad (17)$$

$$\mu_{\infty, \min} = 26,15 \cdot \frac{h_0}{L} \quad (18)$$

Der Angriffspunkt der Tragkraft  $P_{\infty}$  als Resultierende des hydrodynamischen Druckes errechnet sich aus der Momentengleichung

$$P_{\infty} \cdot x_{p_{\infty}} = \int_0^L \Delta p_{\infty}(x) \cdot x \cdot dx$$

$$\frac{x_{p_{\infty}}}{L} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (6+m) - (2m+3) \cdot \ln(1+m)}{m \cdot (2+m) \ln(1+m) - 2 \cdot m^2} \quad (19)$$

Bei den kippbaren Michell-Lagern erhebt sich die Frage, wo man die Unterstützung am günstigsten anbringt. Da  $m = m_p$  immer die günstigste Tragkraft ergibt, und zwar bei jedem  $U$ ,  $h_0$  und  $L$ , muss auch

$$\frac{x_{p\infty}}{L} (m_p) = 0,4226 \quad (20)$$

der bezüglich der Tragkraft günstigste Kippunkt sein, durch den bei allen Betriebszuständen die Resultierende der Schmierfilmdrücke geht.

Die durch das Lager fließende Ölmenge ist in  $x$ -Richtung überall gleich und lässt sich sehr leicht an der Stelle des Druckmaximums bestimmen, wo das Geschwindigkeitsprofil linear ist. Es gilt dann

$$Q_B = 1 \cdot h_{\infty}^* \cdot \frac{U}{2} = U \cdot h_0 \cdot \frac{1+m}{2+m} \quad (21)$$

Die vorangestellten Ableitungen und Gleichungen finden sich nur zum Teil in den Arbeiten von Reynolds. Die Theorie wurde vor allem von Gümbel [2] und Schiebel [3] ausgebaut und wurde von Steller [4] in übersichtlicher Form dargestellt.

Steller benutzt zur Darstellung seiner Ergebnisse die Veränderliche  $\varepsilon = h_1/h_0 = 1 + m$ .

## 2. Ebener keilförmiger Schmierspalt endlicher Breite

### 2.1 Überblick

Zum ersten Mal gelang es Michell [5], die Reynoldssche Differentialgleichung mit Hilfe einer Reihenentwicklung für den Fall des ebenen, rechteckigen Schmierkeiles endlicher Breite zu lösen,

d.h. die Druckverteilung in Abhängigkeit von  $\eta$ ,  $U$  und dem Keilwinkel  $\delta$  zu bestimmen. Für die Fälle  $B/L = 1$ ,  $B/L = 1/3$ ,  $B/L = 0$  und  $B/L = \infty$  werden der mittlere Druck  $\bar{p} = P/B \cdot L$  und der Reibungskoeffizient  $\mu = F/P$  in Abhängigkeit von  $\eta$ ,  $U$  und  $\delta$  angegeben. Dabei wird das Verhältnis von  $(e_1 - L)/e_1 = h_0/h_1 = 1+m=2$  angenommen, das dem Optimum beim unendlich breiten Gleitschuh von  $1+m_p = 2,1886$  sehr nahe kommt.

Kingsbury [6] beschrieb eine Analogiemethode, bei der mit Hilfe eines elektrolytischen Troges Ergebnisse gewonnen wurden, die sich auf die Lagerströmung übertragen lassen.

Duffing [7] fand eine Lösung für den Fall, dass sich die Viskosität in der Bewegungsrichtung linear ändert.

Bei den Näherungslösungen von Gümbel [2] und Schiebel [3] wird angenommen, dass die Form des Druckverlaufes in der Bewegungsrichtung mit der beim Gleitschuh unendlicher Breite bis auf einen Proportionalitätsfaktor übereinstimmt und senkrecht dazu nach einer Kosinuskurve (Gümbel) oder einer Parabel (Schiebel) abnimmt.

Genauere Lösungen ohne willkürliche Voraussetzungen, mit Ausnahme der konstanten Viskosität, wurden von Muskat, Morgan und Meres [8] und unabhängig davon von Frössel [9] angegeben. Frössel prüft seine theoretischen Ergebnisse in einer anschließenden Arbeit [10] nach und gibt in einer späteren Veröffentlichung [11] praktische Anleitungen zur Berechnung. Konstruktive Anleitungen für Axiallager mit festen Keilflächen findet man bei Gersdorfer [12], der auch Berechnungsunterlagen für gekoppelte Axiallager zusammenstellt [13].

2.2 Berechnungsverfahren von Schiebel/Drescher f. ebenen Schmierkeil

Drescher greift in seiner Arbeit [14] auf die Lösung von Schiebel [3] zurück und gibt eine Beziehung für die dimensionslose Belastungskennzahl an:

$$\frac{\bar{p} \cdot h_o^2}{\eta \cdot U \cdot B} = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sigma}{1+a \cdot \sigma^2} \left[ \frac{\bar{p} \cdot h_o^2}{\eta \cdot U \cdot L} \right]_{\infty} \quad (22)$$

$\bar{p} = P/B \cdot L$  ist dabei die spezifische Lagerbelastung eines Gleitschuhs,  $h_o$  wieder der engste Schmierpalt,  $\sigma = L/B$  das Breitenverhältnis und der Klammerausdruck die Belastungskennzahl des unendlich breiten Gleitschuhs. Drescher verwendet als unabhängige Variable die relative Schmierpaltweite  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{h_o}{t} = \frac{h_o}{h_1 - h_o} = \frac{1}{m} \quad (23)$$

Mit  $\bar{p} = P_{\infty}/L$  folgt aus (11) mit (23) für die Belastungskennzahl des unendlich breiten Gleitschuhs (Abb. 13)

$$\left[ \frac{\bar{p} \cdot h_o^2}{\eta \cdot U \cdot L} \right]_{\infty} = 6 \cdot \varphi^2 \cdot \left[ \ln \frac{1+\varphi}{\varphi} - \frac{2}{1+2\varphi} \right] \quad (24)$$

Der Faktor  $a$  eine Funktion von  $\varphi$  (Abb. 13)

$$a = \frac{10}{(1+2\varphi)^2} \cdot \left[ (\varphi + \varphi^2)^2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - 2(\varphi + \varphi^2)}{(1+2\varphi) \cdot \ln \frac{1+\varphi}{\varphi} - 2} \right] \quad (25)$$

Zur Berechnung des Reibungskoeffizienten  $\mu$  wird eine dimensionslose Reibungskennzahl angegeben, die unabhängig vom Breitenverhältnis  $\sigma$  und nur eine Funktion von  $\varphi$  ist (Abb. 13a)

$$\mu \frac{\bar{p} \cdot h_0}{\eta \cdot U} = \frac{4\varphi}{1+2\varphi} \left[ (1+2\varphi) \ln \frac{1+\varphi}{\varphi} - \frac{3}{2} \right] \quad (25)$$

Elimination der Spaltweite  $h_0$  mit Hilfe der Belastungskennzahl führt zu der Funktion

$$\mu \cdot \sqrt{\frac{\bar{p} \cdot B}{\eta \cdot U}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 1+a \cdot \sigma^2}{5 \cdot \sigma(1+2\varphi)} \cdot \frac{\left[ (1+2\varphi) \cdot \ln \frac{1+\varphi}{\varphi} - 1,5 \right]^2}{(1+2\varphi) \cdot \ln \frac{1+\varphi}{\varphi} - 2}} \quad (26)$$

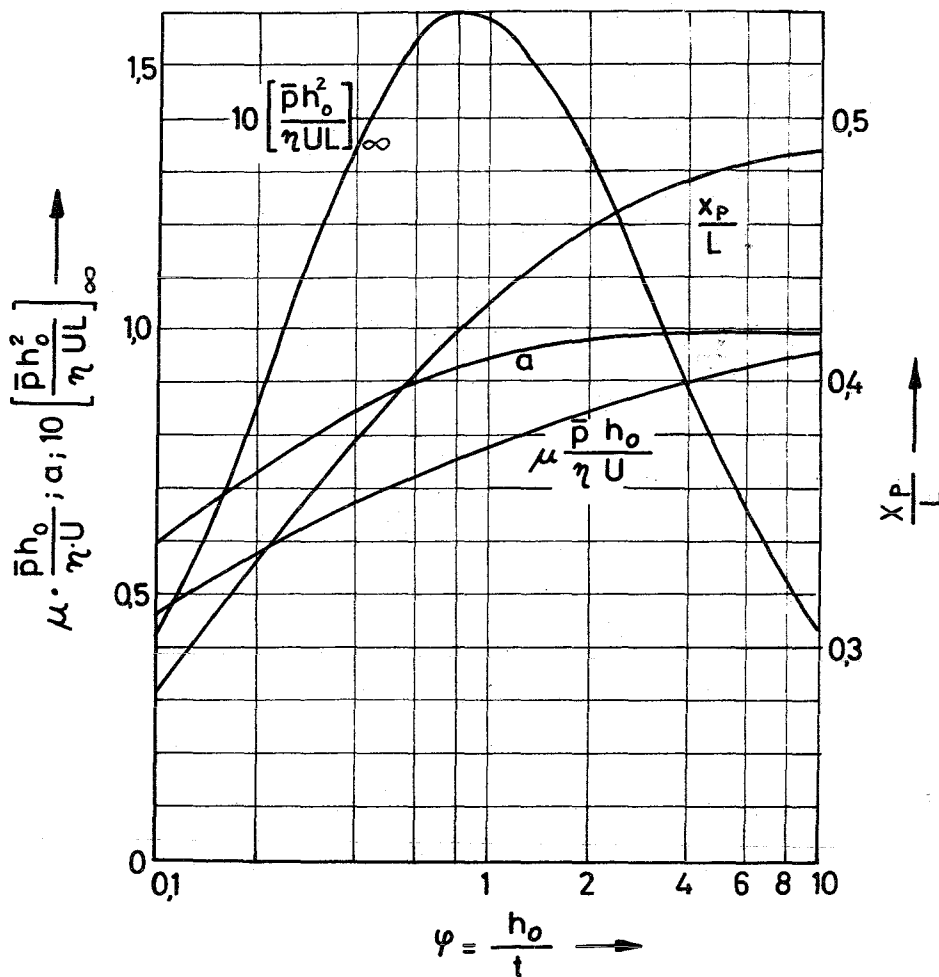


Abb. 13a: Kennlinien des ebenen Schmierkeiles



Da der Druckverlauf proportional dem des Gleit-  
schuhes unendlicher Breite angenommen wird, gilt  
für den Abstand des Druckmittelpunktes von der  
Hinterkante die selbe Beziehung wie beim Gleit-  
schuh unendlicher Breite, die in der Schreibweise  
von Drescher lautet

$$\frac{x_p}{L} = \frac{\frac{1}{2} + 3\varphi - (2\varphi + 3\varphi^2) \ln \frac{1+\varphi}{\varphi}}{(1 + 2\varphi) \cdot \ln \frac{1+\varphi}{\varphi} - 2} \quad (27)$$

mit dem Optimalwert  $(x_p/L)_P = 0,42$  entsprechend  
einem  $\varphi = 0,841$ .

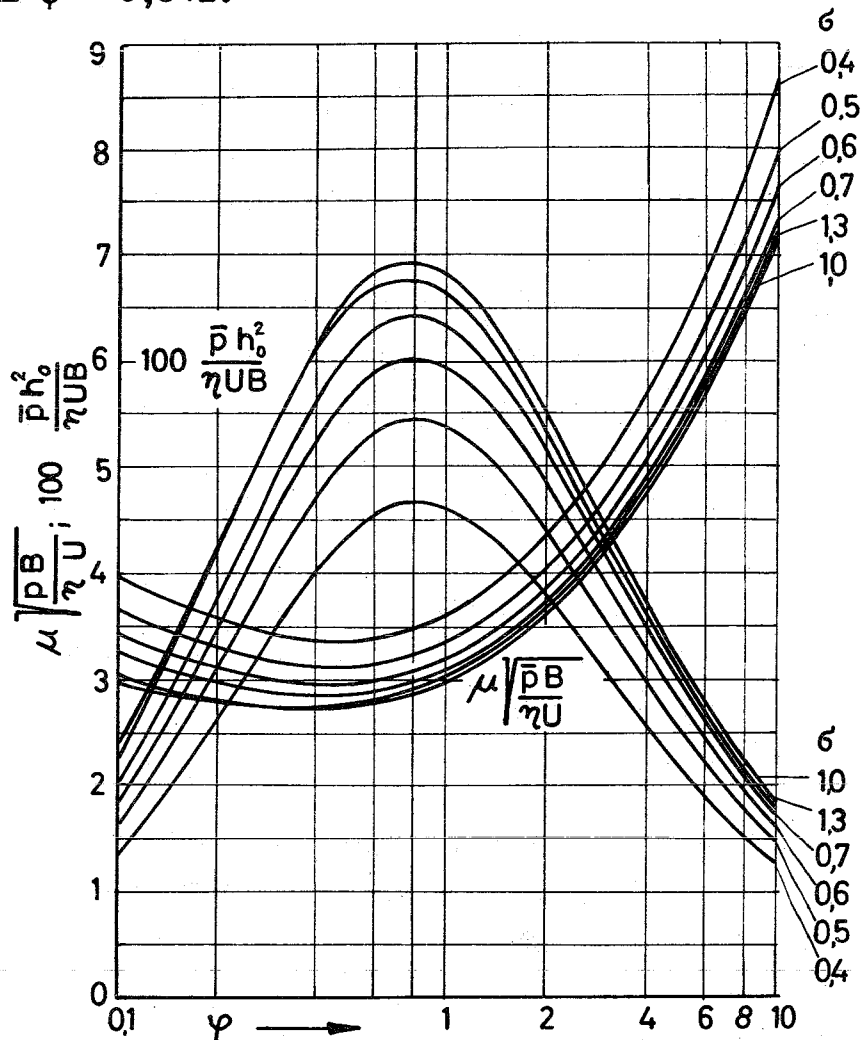


Abb. 14: Belastungs- und Reibungskennzahlen des  
ebenen Schmierkeils bei verschiedenen  
Breitenverhältnissen

In Abb. 13 sind die Grössen aufgetragen, die nur von  $\varphi$  abhängen, wie die Belastungskennzahl des unendlich breiten Lagers,  $x_p/L$ ,  $a$  und  $\mu \cdot \bar{p} \cdot h_0 / \eta \cdot U$ . Abb. 14 zeigt die Belastungskennzahl und die Reibungskennzahl in Abhängigkeit von  $\varphi$  bei verschiedenen Breitenverhältnissen. Die Maxima bzw. Minima verschieben sich nur sehr wenig mit  $\sigma$ , so dass  $\varphi$ -Werte um 0,8 bei allen Breitenverhältnissen günstige Belastungskennzahlen ergeben, während die Reibungsoptima bei  $\varphi = 0,3$  bis 0,5 liegen.

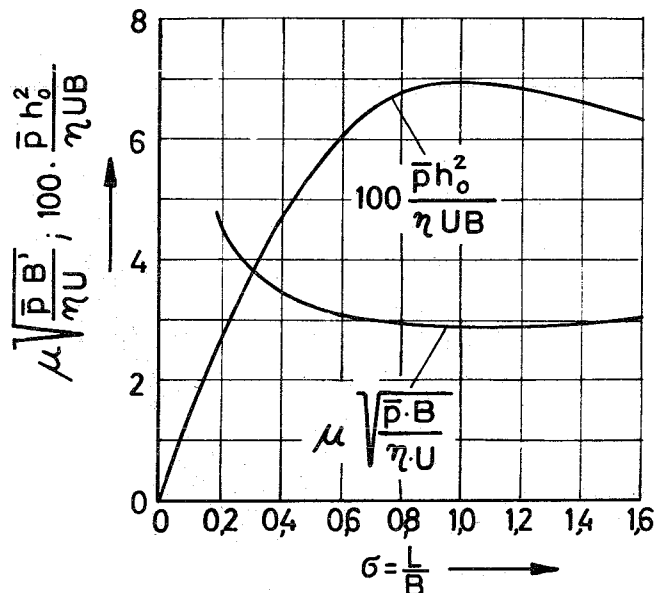


Abb. 15: Einfluss des Seitenverhältnisses auf die maximale Tragkraft und die zugehörige Reibung

Das günstigste Breitenverhältnis liegt nach Abb.15 bei  $\sigma \approx 1,0$ , was auch in etwa niedrigste Reibung ergibt.

Die Belastungskennzahl zeigt, dass die Belastung umgekehrt proportional zum Quadrat der kleinsten Schmierschichtdicke  $h_0$  ist. Vom Standpunkt

möglichst hoher Tragfähigkeit sind also möglichst kleine Schmierschichtdicken erwünscht. Diese sind aber durch die Forderung nach ausreichender Sicherheit nach unten begrenzt. Bei der Berechnung der Axiallager wird vorausgesetzt, dass die Spaltweiten  $h_o$  an den engsten Stellen aller Gleitschuhe untereinander genau gleich gross sind. Es treten aber Abweichungen auf, die durch die Ungenauigkeiten bei der Herstellung und Montage und durch Verformungen, die im Betrieb durch die mechanische Beanspruchung und die Erwärmung entstehen. Als kleinstzulässige Schmierschichtstärke  $h_{o,zul}$  ist der Mittelwert der kleinsten Schmierschichtdicken aller Tragflächen eines Axiallagers zu definieren, bei dem gerade noch Mischreibung vermieden wird. Mit diesem Wert kann man die Grenzlast  $P_{g,max}$  berechnen, die das Lager gerade noch aufnehmen kann. Die Werte für  $h_{o,zul}$  hängen vor allem von der Lagergrösse, der Bauart der Lager, der Abstützung des Lagers im Gehäuse und der Umfangsgeschwindigkeit der Spurscheibe ab. Drescher gibt als ungefähren Richtwert

$$h_{o,zul} = \left(1 + \frac{D_m}{400}\right) \cdot (5 \mu\text{m} \div 15 \mu\text{m}) \quad (28)$$

an, wobei  $D_m$  in mm einzusetzen ist. Andere Verfasser geben folgende Werte an

- Falz [15]  $h_{o,zul} > 4 \mu\text{m} \dots 10 \mu\text{m}$ , je nach Baustoff und Bearbeitung
- Gersdorfer [12]  $h_{o,zul} > 3 \mu\text{m} \dots 10 \mu\text{m}$
- Niemann [16]  $h_{o,zul} > 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot D_m$
- Frössel [11]

$h_{o,zul}$	U
mm	m/s
0,001	0 ... 1
0,002	> 1 ... 5
0,003	> 5 ... 10
0,004	> 10 ... 30
0,005	> 30

Tabelle 16:  
Kleinstzulässige  
Schmierschicht-  
dicken

Die Grenzbelastung  $P_{g,max}$ , die man mit  $h_{o,zul}$  berechnet, sollte normalerweise das 5- bis 10-fache der Nennbelastung  $P_{g,N}$  betragen.

### 2.3 Berechnungsverfahren von Frössel für ebenen Schmierkeil

Berücksichtigt man, dass die Schmierpaltweite  $h$  nur eine Funktion von  $x$  und unabhängig von  $z$  ist, so kann man die Reynoldssche Differentialgleichung weiterentwickeln:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{3}{h} \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{6\eta \cdot U}{h^3} \cdot \frac{dh}{dx} = 0 \quad (29)$$

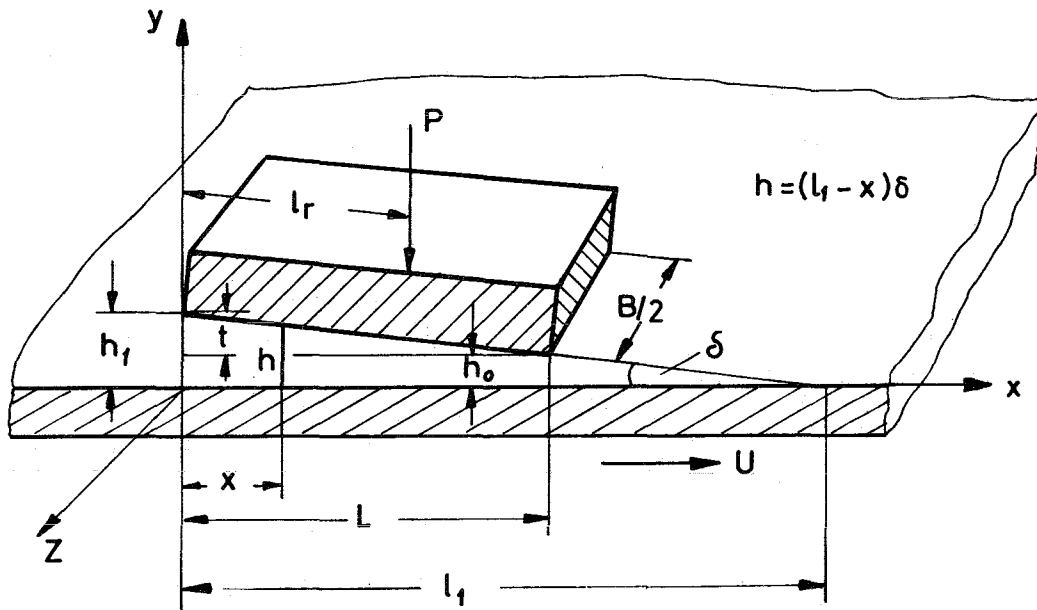


Abb. 16: Schematische Darstellung des ebenen Gleitsystems

Frössel verwendet in seiner grundlegenden Arbeit [9] eine neue unabhängige Variable  $a$ , die definiert ist zu

$$a = \frac{\ell_1}{L} = 1 + \frac{h_0}{\delta \cdot L} \quad (30)$$

Die Ableitungen und Berechnungen werden für  $L = 1$ , also  $a = \ell_1$  durchgeführt. Die Variable  $a$  hängt mit den von Reynolds, Steller und Drescher benutzten wie folgt zusammen:

$$a = \frac{m+1}{m} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} = 1 + \varphi \quad (31)$$

Da der Winkel  $\delta$  immer sehr klein ist, gilt  $\tan \delta \approx \delta$ . Damit folgt für die Schmierpaltfunktion ( $L = 1$ ,  $\ell_1 = a$ ):

$$h = (a - x) \delta \quad (32)$$

Damit erhält die Reynoldssche Differentialgleichung (29) folgende Form

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{3}{a-x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{6 \cdot \eta \cdot U}{\delta^2 (a-x)^3} = 0 \quad (33)$$

Als Lösung wird dafür folgende Funktion für  $p(x, z)$  angesetzt

$$p = \left( 1 - \frac{\cosh \lambda_0 z}{\cosh \lambda_0 b} \right) \cdot f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cosh \lambda_{n-1} z}{\cosh \lambda_{n-1} b} - \frac{\cosh \lambda_n z}{\cosh \lambda_n b} \right) f_n(x) \quad (34)$$

die als neue Größen die halbe dimensionslose Gleit-  
schuhbreite  $b = B/2L$ , die noch zu bestimmenden Wert  $\lambda_i$   
und die noch unbekanntenen Funktionen  $f_i$  enthält.

Die Grenzbedingungen lauten

$$p = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, x = 1 \quad \text{und} \quad z = \pm b$$

Werden nun die ersten und zweiten Ableitungen nach  $x$  und  $z$  von Gl. (34) in die Differentialgleichung (33) eingesetzt, so wird diese erfüllt, wenn jeder der daraus entnommenen, nachstehend aufgeführten Ausdrücke verschwindet. Diese sind gleichzeitig die Differentialgleichungen für die  $f_i$ -Funktionen und heissen

$$f_0'' - \frac{3}{a-x} f_0' + \frac{6 \cdot \eta \cdot U}{\delta^2 (a-x)^3} = 0$$

$$\frac{\cosh \lambda_0 z}{\cosh \lambda_0 b} (f_1'' - \frac{3}{a-x} f_1' + \lambda_0^2 f_1 - f_0'' + \frac{3}{a-x} f_0' - \lambda_0^2 f_0) = 0$$

$$\frac{\cosh \lambda_1 z}{\cosh \lambda_1 b} (f_2'' - \frac{3}{a-x} f_2' + \lambda_1^2 f_2 - f_1'' + \frac{3}{a-x} f_1' - \lambda_1^2 f_1) = 0 \quad \text{(35)}$$

$$\frac{\cosh \lambda_2 z}{\cosh \lambda_2 b} (f_3'' - \frac{3}{a-x} f_3' + \lambda_2^2 f_3 - f_2'' + \frac{3}{a-x} f_2' - \lambda_2^2 f_2) = 0$$

.....  
 .....

Die erste dieser Gleichungen (35) ist die Differentialgleichung für den unendlich breiten, ebenen Schmierkeil mit zweidimensionaler Strömung und der Länge  $L = 1$ . Sie hat die Lösung

$$f_0 = \frac{6 \cdot \eta \cdot U}{\delta^2 (2a-1)} \cdot \frac{x(1-x)}{(a-x)^2} = p_{\infty} \quad (36)$$

Bei den übrigen Gleichungen ist jeweils der erste Faktor von Null verschieden, so dass die Klammerausdrücke Null sein müssen. Diese lassen durch die gleichgebaute Form der ersten und zweiten Hälfte sofort den Wert  $f_n = f_{n-1}$  als partikuläre Lösung erkennen. Für die allgemeine Lösung wird nun die Beziehung

$$f_n = f_{n-1} - \varepsilon_{n-1}$$

angesetzt, die nach Einsetzen der entsprechenden Ableitungen die Klammerausdrücke der Gl. (35) auf die einfachere Form

$$\varepsilon_{n-1}'' - \frac{3}{a-x} \varepsilon_{n-1}' + \lambda_{n-1}^2 \varepsilon_{n-1} = 0 \quad (38)$$

bringt, welche die Lösung

$$\varepsilon_{n-1} = \frac{A_{n-1} \cdot J_1 \cdot \{\lambda_{n-1}(a-x)\} + B_{n-1} \cdot N_1 \cdot \{\lambda_{n-1}(a-x)\}}{a-x} \quad (39)$$

hat ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), worin  $A_{n-1}$ ,  $B_{n-1}$  und  $\lambda_{n-1}$  noch verfügbare Konstanten und  $J_1$  und  $N_1$  Besselsche Funktionen sind. Wie die Funktionen  $f$  müssen auch die Funktionen  $g$  an den Rändern verschwinden. Das bedeutet homogene Randbedingungen, die für die Lösungen einer homogenen Differentialgleichung wie Gl. (38) nur Eigenfunktionen zulassen. Gl. (39) wird noch durch  $A_{n-1}$  dividiert:

$$G_{n-1} = \frac{G_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{J_1 \cdot \{\lambda_{n-1}(a-x)\} + C_{n-1} N_1 \cdot \{\lambda_{n-1}(a-x)\}}{a-x} \quad (40)$$

$C_{n-1}$  sowie  $\lambda_{n-1}$  lassen sich allein mit den schon angegebenen Grenzbedingungen  $G_{n-1} = 0$  für  $x = 0$  und  $x = 1$  berechnen. Ihre Bestimmungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & \frac{J_1 \cdot \{\lambda_{n-1} a\} + C_{n-1} \cdot N_1 \{\lambda_{n-1} a\}}{a} = 0 \\ x = 1: \quad & \frac{J_1 \cdot \{\lambda_{n-1} (a-1)\} + C_{n-1} \cdot N_1 \cdot \{\lambda_{n-1} (a-1)\}}{a - 1} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Die Ermittlung der Eigenwerte  $\lambda_{n-1}$  folgt dann aus

$$J_1 \cdot \{\lambda_{n-1} (a-1)\} - \frac{J_1(\lambda_{n-1} a)}{N_1(\lambda_{n-1} a)} \cdot N_1 \cdot \{\lambda_{n-1} (a-1)\} = 0 \quad (42)$$

mit  $n = 1, 2, 3, \dots$

Die noch verfügbaren Faktoren  $A_{n-1}$  werden in geeigneter Weise so gewählt, dass der Ansatz (34) schnell konvergiert (Siehe [9], S. 325).

Sobald die  $\lambda_{n-1}$  und mit den  $g_{n-1}$  die  $f_n$ -Werte für  $n = 1, 2, \dots$  berechnet sind, lässt sich die Druckverteilung für die verschiedenen  $a$ -Werte in Abhängigkeit von  $x$  und  $z$  bestimmen.

Die nächsten Schritte bestehen nun darin, die Tragkraft, die Lage der Resultierenden und die Reibung zu bestimmen. Tragkraft  $P$  und Reibung werden durch die Breite  $B = 2b$  dividiert, womit man wegen  $L = 1$  gleich den mittleren Druck  $\bar{p}$  und die mittlere Schubspannung  $\tau_0$  erhält.



Die dimensionslose Belastungskennzahl  $\bar{p}\delta/6\eta\cdot U$  und die dimensionslose Reibungskennzahl  $\tau_o\delta/\eta\cdot U$  sind in Diagrammen in Abhängigkeit von  $a$  für verschiedene Breitenverhältnisse  $b = B/2L$  aufgetragen. Die Kurven bleiben die selben und gelten für beliebige Gleitschuhllängen  $L$ , wenn man  $\bar{p}\delta/6\eta\cdot U$  durch  $P\delta^2/6\eta UB$  und  $\tau_o\cdot\delta/\eta\cdot U$  durch  $F\delta/\eta U\cdot B$  ersetzt, wie dies in der neueren Veröffentlichung [11] von Frössel geschehen ist. Wegen der besseren Ablesbarkeit sind die Diagramme für verschiedene  $a$ -Bereiche aufgeteilt: Abb. 17, 18, 19 und 20.

Diese Diagramme ermöglichen nun, ohne grosse Rechnung und Zeitaufwand die wichtigsten Grössen eines gegebenen Axiallagers zu ermitteln. Insbesondere lässt sich hiermit der Einfluss einer Spaltveränderung auf die Trag- und Reibungskräfte feststellen. Bei festgehaltenem  $a$  (Michell-Lager) bewirkt eine Spaltveränderung eine Veränderung des Winkels und umgekehrt bei festem  $a$  (Lager mit festen Keilflächen) eine Veränderung der Grösse  $a$ .

Bei der Frösselschen Darstellungsweise der Belastungskennzahl fällt im Vergleich mit der Arbeit von Drescher auf, dass die Belastungskennlinien keine Maxima aufweisen. Das liegt an der Definition der Belastungskennzahl, die sich von der bei Drescher verwendeten wie folgt unterscheidet:

$$\frac{P \cdot \delta^2}{6 \cdot \eta \cdot U \cdot B} = \frac{\bar{P} \cdot h_o^2}{\eta U \cdot B} \cdot \frac{B}{6L(a-1)^2} \quad (43)$$

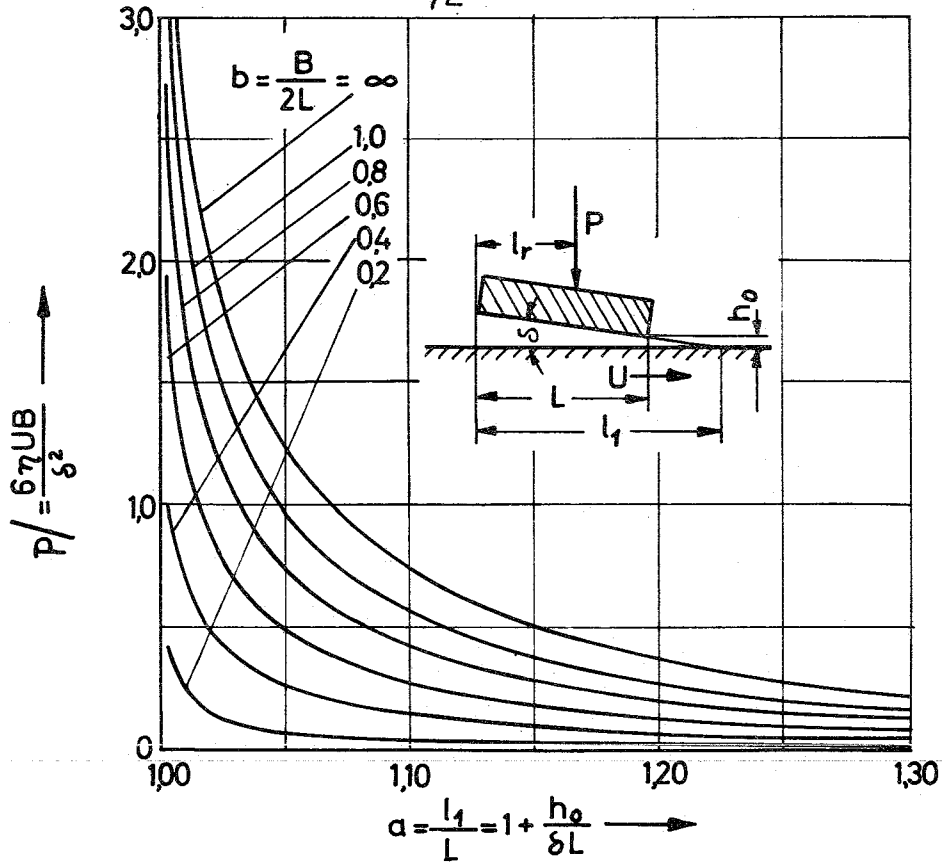


Abb. 17: Kurven zur Berechnung der Tragkraft eines ebenen Gleitsystems bei hydrodynamischer Schmierung für  $a = 1 \dots 1,3$

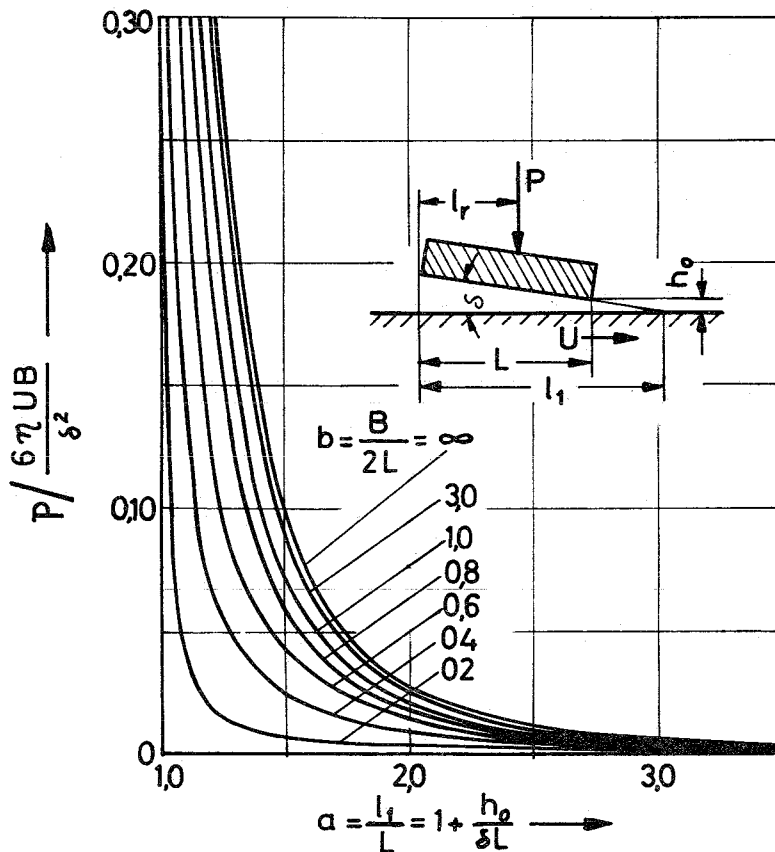


Abb. 18: Kurven zur Berechnung der Tragkraft eines ebenen Gleitsystems bei hydrodynamischer Schmierung für  $a = 1 \dots 3,5$

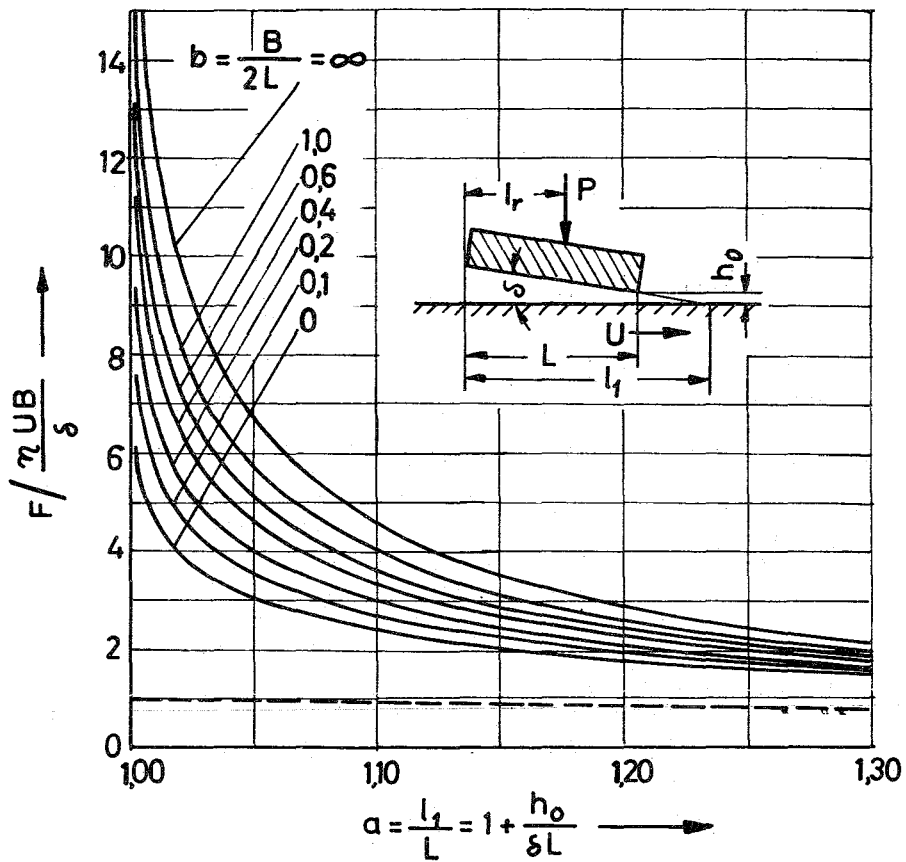


Abb. 19: Kurven zur Berechnung der Reibung eines ebenen Gleitsystems bei hydrodynamischer Schmierung für  $a = 1 \dots 1,3$

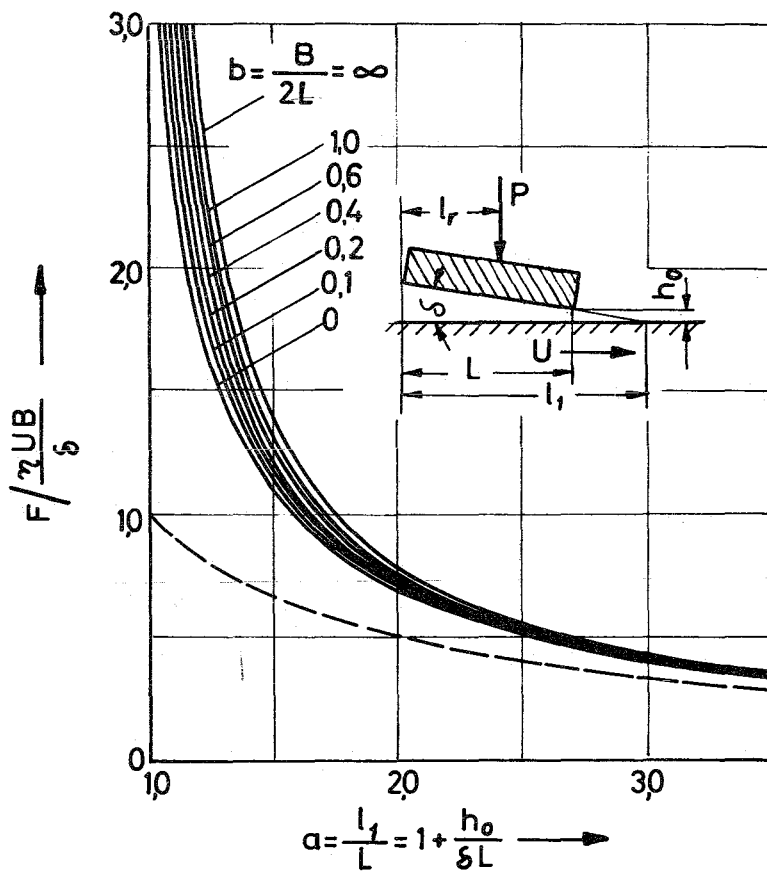


Abb. 20: Kurven zur Berechnung der Reibung eines ebenen Gleitsystems bei hydrodynamischer Schmierung für  $a = 1 \dots 3,5$

Interessant ist die in Abb. 21 gezeigte Darstellung von  $P/\eta \cdot U$  über dem Keilwinkel  $\delta$  für einen Gleitschuh mit  $L = 20 \text{ mm}$  und  $B = 40 \text{ mm}$ .

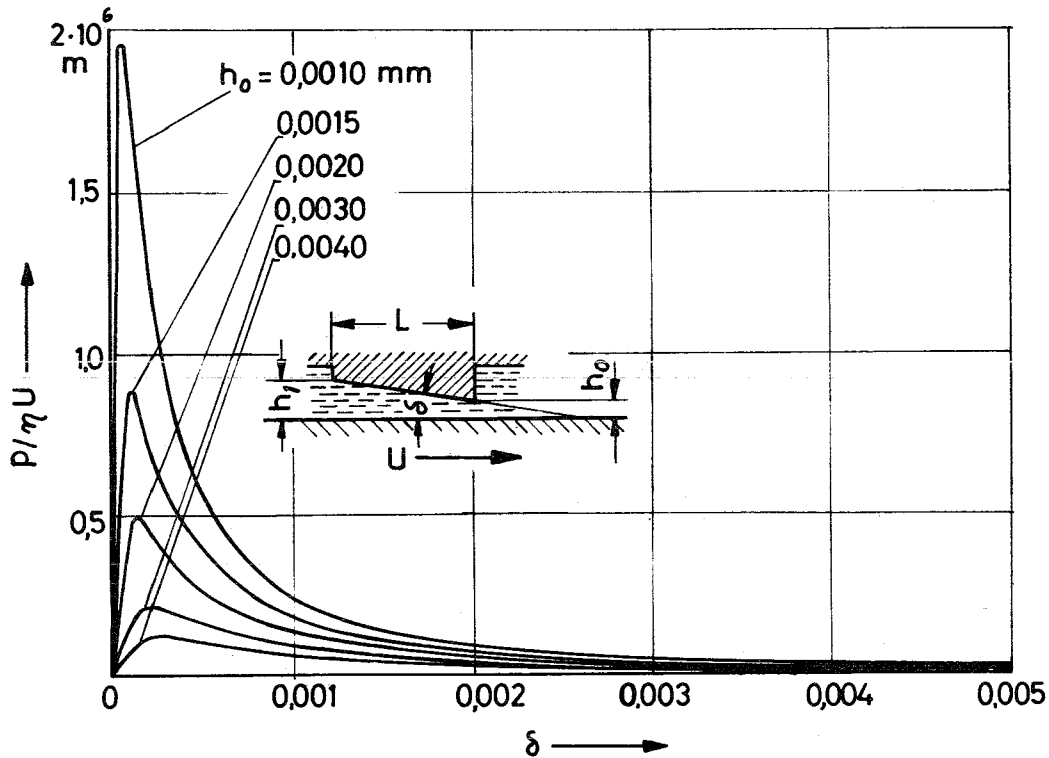


Abb. 21: Veränderung der Tragkraftzahl  $P/\eta \cdot U$  mit dem Keilwinkel  $\delta$  bei verschiedenen Spaltweiten  $h_0$  für ein Lager mit  $L = 20 \text{ mm}$  und  $B = 40 \text{ mm}$

Bei dieser Darstellung erscheinen Maximalwerte, die aber bei sehr kleinen Keilwinkeln von  $\delta = 0,00005 = 1 : 20\ 000$  bis  $\delta = 0,0003 = 1 : 3\ 000$  liegen, die sich bei festen Keilflächen nicht verwirklichen lassen. Frössel gibt als wirtschaftlich verwirklichtbare Keilwinkel  $\delta = 0,001 \div 0,005 = 1/1000 \div 1/200$  an. Für die Keiltiefen empfiehlt er  $t = 0,03 \div 0,05 \text{ mm}$ . Damit sind auch die Grenzen für die Gleitschuhlänge  $L$  gesteckt:

$$L = \frac{t}{\delta} = \frac{0,03 \dots 0,05}{\delta} \quad (44)$$

Weiter empfiehlt Frössel die dimensionslose Breite  $b = B/2L = 1/2\sigma$  nicht unter 0,5 zu wählen, weil sonst die hydrodynamische Druckentwicklung zu empfindlich gegen Störungen wird.

### 3. Ebener keilförmiger Schmierspalt mit Rastfläche

Bei Lagern mit feststehenden Keilflächen schliessen sich sehr häufig sog. Rast- oder Planflächen an die Keilflächen an, gegen die sich der Wellenbund im Ruhezustand legen kann. Die Rastflächen liegen alle in einer Ebene senkrecht zur Lagerachse. Bei genauem Fluchten von Lager und Spurscheibe sind im Idealfall die Rastflächen und die Spurscheibe parallel und die Spaltweite zwischen beiden konstant (Abb. 22).

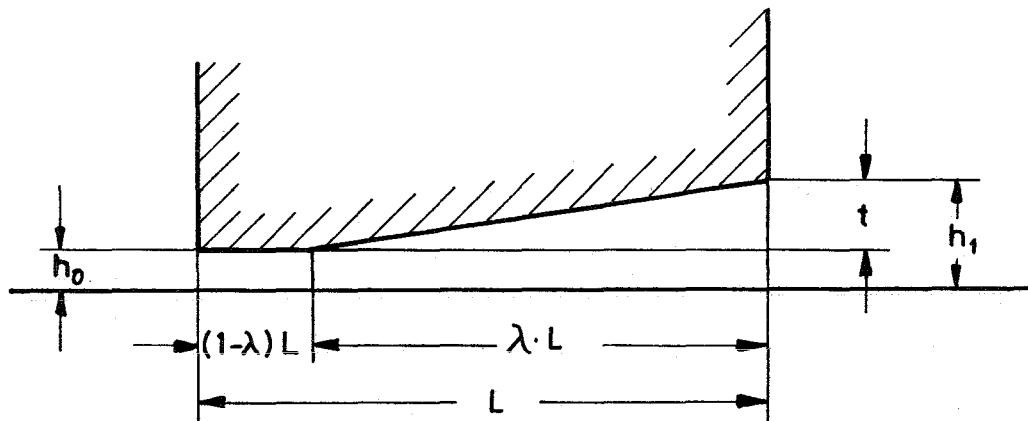


Abb. 22: Ebener keilförmiger Schmierspalt mit Rastfläche

### 3.1 Unendliche Breite

Die Berechnung des unendlich breiten ebenen Schmierkeils mit anschliessender Rastfläche geht auf Bower [17] zurück. Die Ergebnisse werden von Drescher [14] mitgeteilt. Für die Belastungs- und Reibungskennzahlen sind folgende Beziehungen angegeben:

$$\left[ \frac{\bar{p} \cdot h_0^2}{\eta \cdot U \cdot L} \right]_{\infty} = 6 \cdot \lambda^2 \varphi^2 \ln \frac{1+\varphi}{\varphi} + \frac{3 \cdot \lambda (1-\lambda)^2 - 6 \cdot \lambda^2 [2 + 3(1-\lambda)]}{2^2 + (4-3\lambda) + 2(1-\lambda)} \quad (45)$$

$$\mu \frac{\bar{p} \cdot h_0^2}{\eta \cdot U} = 4\lambda \cdot \ln \frac{1+\varphi}{\varphi} + (1-\lambda) - \frac{3\lambda\varphi [2\varphi + 3(1-\lambda)]}{2\varphi^2 + (4-3\lambda)\varphi + 2(1-\lambda)} \quad (46)$$

Diese Gleichungen sind in Abb. 23 für die  $\lambda$ -Werte  $1/4$ ,  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $4/5$  und  $1$  ausgewertet. Den Einfluss der Rastflächengrösse zeigt Abb. 24. Die optimale Tragkraft liegt wieder bei  $\varphi = 0,8$  und der optimale Rastflächenanteil  $(1-\lambda)$  bei  $0,2$  bzw. bei  $\lambda = 0,8$ .

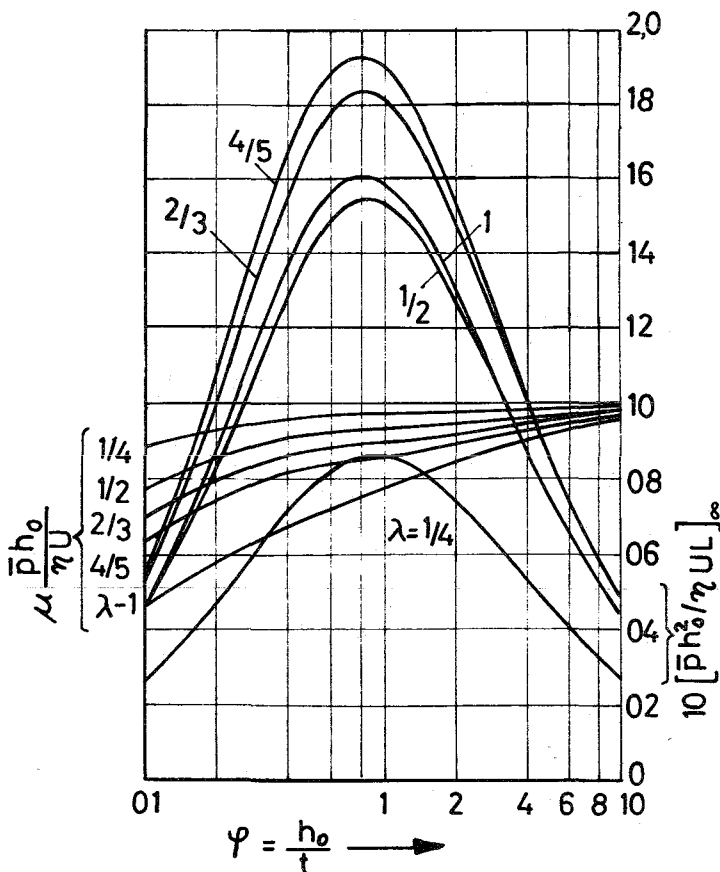


Abb. 23: Kennlinien für den ebenen schrägen Gleitschuh mit Rastfläche ( $B/L = \infty$ )

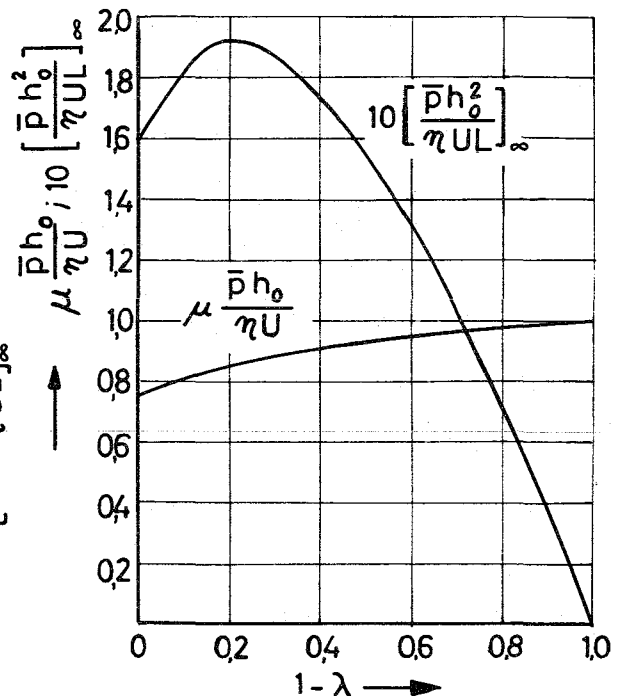


Abb. 24: Einfluss der Rastflächengrösse auf Tragkraft und Reibung beim schrägen, ebenen Gleitschuh ( $\varphi = 0,8$ )

### 3.2 Endliche Breite

Drescher [14] empfiehlt, die Werte für die unendliche Breite zugrunde zu legen und dann in der selben Weise wie beim ebenen Schmierkeil ohne Rastfläche auf endliche Breite umzurechnen.

Eine analytische Berechnungsmethode veröffentlichte Kettleborough [18]. Im Gebiet des sich verengenden Schmierpaltes gilt die Reynoldssche Differentialgleichung unverändert. Für das Gebiet der Rastfläche ist  $dh/dx = 0$ , so dass die Reynoldssche Differentialgleichung sich zu

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (47)$$

vereinfacht. Aus der Bedingung, dass an der Grenze die aus dem ersten Gebiet einströmende gleich der in das zweite Gebiet einströmenden Schmiermittelmenge sein muss, folgt aus Gl. (13) im Abschnitt III,2

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 \quad (48)$$

d.h. der Druck geht ohne Knick vom 1. in den 2. Bereich über. Die Lösung erfolgt mit Hilfe der von Christophersen [19] entwickelten Relaxationsmethode.

Die Rechnung wird für optimales Breitenverhältnis  $B/L = 1$  und die Rastflächenanteile  $(1-\lambda) = 0, 1/8, 1/4, 3/8$  und  $1/2$  durchgeführt.  $1-\lambda = 1/4$  ergibt die maximale Tragfähigkeit bei  $h_1/h_0 = \varepsilon = 2,3$  ( $\varphi = 0,77$ ) in Höhe von

$$\frac{\bar{p} \cdot h_0^2}{\eta \cdot U \cdot L} = 0,1823 \quad (49)$$

Dieser Wert ist um 14 % höher als der des einfachen ebenen Schmierkeils ohne Rastfläche bei sonst gleichen Voraussetzungen.

#### 4. Andere Schmierspaltformen

##### 4.1 Stufenförmiger Schmierspalt

Lord Rayleigh [20] untersuchte schon 1918 den stufenförmigen Schmierspalt unendlicher Breite und fand, dass die optimale Tragkraft pro Breitereinheit in Höhe von

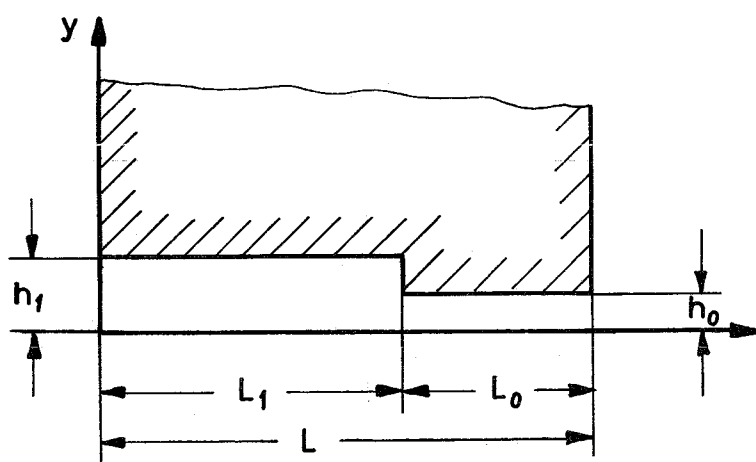


Abb. 25: Stufenförmiger Schmierspalt

$$P_{\infty, \max} = 0,20626 \cdot \frac{\mu \cdot U \cdot L^2}{h_0^2} \quad (50)$$

bei  $\varepsilon = h_1/h_0 = 1,87$  ( $m = 0,87$ ,  $\varphi = 1,15$ ,  $a = 2,15$ ) und  $L_1/L_0 = \varepsilon^2(2\varepsilon - 3) = 2,588$  auftritt. Das ist immerhin ein um ca. 28 % höherer Wert als beim ebenen schrägen Schmierkeil nach Gl. (13). Archibald [21] zeigte, dass bei endlicher Breite dieser Vorteil vollkommen zusammenschrumpft und ein solches Lager bei kleinem Breitenverhältnis  $B/L$  sogar schlechter als das Michell-Lager wird, weil der höchste Druck an der Stufe auftritt, wo der Schmiermittel-Abflussquerschnitt gross ist. Er schlug deshalb eine parabelförmige Stufenform nach Abb. 26,A vor, um den Seitenfluss zu begrenzen.



Diese Idee wurde von Kettleborough [22] aufgegriffen und für Form A mit Hilfe der Relaxationsmethode gelöst. Für die in Abb. 26, a + g gezeigten Stufenformen teilt er in einer weiteren Arbeit [23] Rechenergebnisse mit, die nach der selben Methode gewonnen wurden, und vergleicht sie mit experimentellen Ergebnissen, die mit Hilfe der "Elektrolytischen Tank-Analogiemethode" gewonnen wurden. Es wurden Belastungskennzahlen, Reibungskennzahlen und Öldurchflusskennzahlen ermittelt. Bei allen Formen von b + f ist die Belastungskennzahl höher als beim normalen kippbaren Michell-Tragschuh. Form d ergab die höchste Belastungskennzahl, die im Optimum das 1,67-fache des Optimalwertes beim Michell-Tragschuh betrug. Allerdings bewirkt die Tragkraft-erhöhung auch eine höhere Reibung. Neuerdings hat sich Drescher [33] mit solchen Lagern wieder befasst.

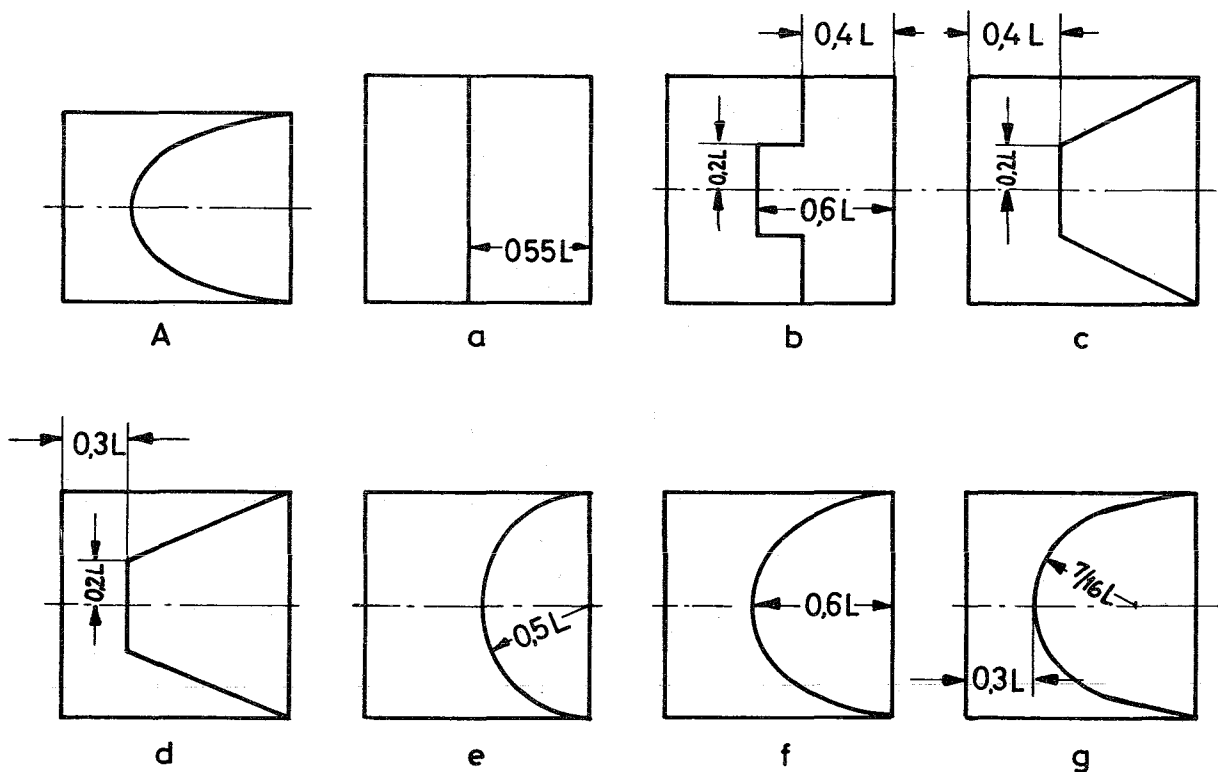


Abb. 26: Von Kettleborough untersuchte Stufenformen

Um den Nachteil der Reibung auszugleichen, hat man in Strömungsrichtung vor der Stufe Taschen angebracht (Abb. 27), in deren Bereich man die Reibung vernachlässigen kann. Ein solches Stufen-Taschen-Lager wurde erstmals von Wilcock [24] untersucht und von Kettleborough [25], [26] weiterverfolgt. Wird ein solches Lager reibungsoptimal ausgelegt, dann hat es eine sehr geringe Tragfähigkeit. Man kann es aber auch so auslegen, dass die Tragfähigkeit so hoch wie beim einfachen schrägen Gleitschuh ist, wobei dann die Reibung nur 62 % desselben beträgt. Dass sich Lager dieser Bauart nicht durchgesetzt haben, liegt an dem ungünstigeren Verhalten bei Abweichungen vom Auslegungspunkt. Ausserdem erfordern sie die Herstellung von Stauräumen sehr geringer Tiefe, die in der Grössenordnung der engsten Schmierpalte  $h_0$  liegen und auch nicht einfach zu fertigen sind.

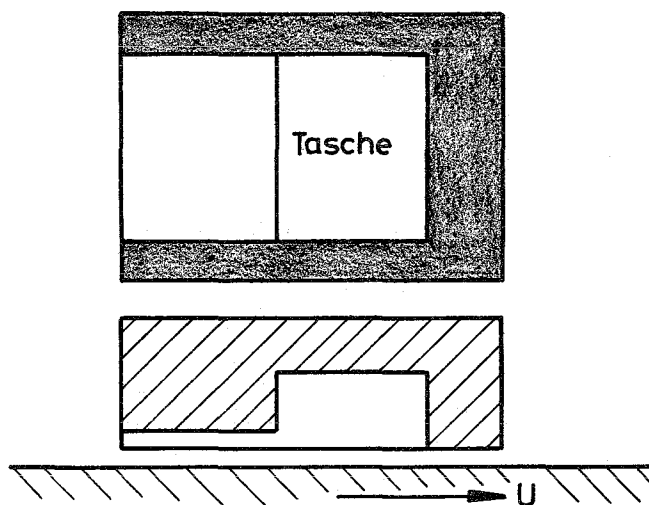


Abb. 27: Stufenlager mit Tasche

## 4.2 Tragschuhe mit gewölbten Gleitflächen

### 4.2.1 Unendliche Breite

Lord Rayleigh [20] untersuchte 2 Schmierpaltformen für unendlich breite Tragschuhe:

a)  $\underline{h = a \cdot x^n}$

Dieser Fall lässt sich geschlossen integrieren und man erhält für die Tragkraft

$$P_{\infty} = \frac{6\eta \cdot U \cdot L^2}{(\epsilon^{1/n-1})^2 \cdot h_0^2} \left\{ \frac{3n-1}{(2n-1)(3n-2)} \cdot \frac{(\epsilon^{-2+1/n-1})(\epsilon^{-3+2/n-1})}{\epsilon^{-3+1/n}} - \frac{\epsilon^{-2+2/n-1}}{2n-2} \right\} \quad (51)$$

Für  $n=2$  (Parabel) erhält man für das Maximum bei  $\epsilon = 2,3$

$$P_{\infty, \max} = 0,163 \frac{\eta \cdot U \cdot L^2}{h_0^2} \quad (52)$$

Der Gewinn gegenüber dem ebenen, schrägen Gleit-  
schuh ist gering (Faktor 0,1615).

b)  $\underline{h = e^{b \cdot x} = \epsilon^{x/L}}$

Dieser Fall lässt sich ebenfalls geschlossen integrieren:

$$P_{\infty} = \frac{3 \cdot \eta \cdot U \cdot L^2}{\epsilon^2 \cdot (\ln \epsilon)^2 \cdot h_0^2} \left\{ \frac{\epsilon^2 - 1}{6} - \frac{\epsilon^2 (\epsilon - 1) \cdot \ln \epsilon}{\epsilon^3 - 1} \right\} \quad (53)$$

Das Maximum liegt wieder bei  $\epsilon = 2,3$  und beträgt

$$P_{\infty, \max} = 0,165 \cdot \frac{\eta \cdot U \cdot L^2}{h_0^2} \quad (54)$$

Raimondi und Boyd [27] untersuchten den in der Mitte kippbar gelagerten balligen Gleitschuh unendlicher Breite. Die Gleitfläche ist ein Teil eines parabolischen Zylinders. Die Abweichungen von der Ebene sind klein, in der Grössenordnung des engsten Schmier- spaltes.

Die Schmierspaltfunktion lautet

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2 \cdot r'}$$

wobei  $r'$  der Krümmungsradius der Gleitfläche ist. Die Druckverteilung lässt sich noch durch geschlossene Integration ermitteln, ergibt aber schon verwickelte Ausdrücke. Die Ermittlung der Druckresultierenden  $P$  erfolgt dann numerisch. Der Abstand von der Vorder- bzw. Hinterkante muss so gewählt werden, dass die Resultierende durch den Kippunkt geht.

Die Untersuchung zeigt, dass der in der Mitte unter- stützte konvexe Gleitschuh fast genau die gleiche Tragkraft wie der optimal unterstützte ebene kippbare Gleitschuh hat, gleichen engsten Schmierspalt  $h_0$  vorausgesetzt.

Der in der Mitte unterstützte konvexe Gleitschuh ist ein Modellfall des in der Mitte unterstützten ebenen Gleitschuhes, wie er in USA häufig wegen der Arbeits- möglichkeit in beiden Drehrichtungen verwendet wird. Bei hoch belasteten Lagern verformt sich nämlich der ebene Gleitschuh elastisch infolge der Belastung und thermisch durch die zunehmende Erwärmung im Schmier- spalt in Bewegungsrichtung, wodurch der ebene Gleit- schuh konvex wird. Dadurch erklärt sich die Tatsache, dass ein in der Mitte unterstützter ebener Gleit- schuh überhaupt funktioniert, denn bei Voraussetzung konstanter Viskosität wäre die Tragkraft Null.

Für geringe Belastungen und Schmiermittel geringer Viskosität (Wasserlagerung!) sind die elastischen und thermischen Verformungen gering. Hier bringt der von vorneherein konvex ausgeführte Gleitschuh einen wichtigen Vorteil dadurch, dass er wesentlich schneller abhebt. Optimale Tragkraftbedingungen herrschen, wenn die Überhöhung durch die Wölbung ungefähr der halben minimalen Schmierschichtdicke  $h_0$  ist.

Drescher [14] gibt Beziehungen für den unendlich langen einseitigballigen Gleitschuh mit Rastfläche an:

$$\left[ \frac{\bar{p} \cdot h_0^2}{\eta U \cdot L} \right]_{\infty} = \frac{3\lambda^2 \cdot \varphi}{2(1+\varphi)^2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{p_z \cdot h_0^2}{\eta \cdot U \cdot L} \right]_{\infty} \left[ (1-\lambda) - \frac{\lambda^2 \cdot \varphi (2\varphi + 1)}{2(1+\varphi)^2 (1-\lambda)} \right] \quad (55)$$

Die Beziehungen sind die gleichen wie beim ebenen keilförmigen Schmierspalt.  $p_z$  ist der Zwischendruck am Ende der balligen Fläche:

$$\left[ \frac{p_z \cdot h_0^2}{\eta U \cdot L} \right]_{\infty} = \frac{6\lambda \cdot (\sqrt{\varphi} \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \frac{\varphi}{1+\varphi} - \frac{2\varphi^2}{(1+\varphi)^2}) \cdot (1-\lambda)}{8(1-\lambda) + (\sqrt{\varphi} \arctan \frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \frac{\varphi}{1+\varphi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\varphi^2}{(1+\varphi)^2})} \quad (56)$$

Die Umrechnung auf endliche Breite geht dann in der gleichen Weise wie beim ebenen keilförmigen Schmierspalt.

4.2.2. Endliche Breite

a) Exponentielle Schmierspaltform

Charnes und Saibel [28] veröffentlichen eine sog. exakte Lösung der Reynoldsschen Differentialgleichung für den Fall eines exponentiellen Schmierspaltens

$$h = a \cdot e^{bx}$$

mit Hilfe eines schnell konvergierenden Reihenansatzes für den Druck. Der Lösungsweg wird angegeben und die Rechnung zunächst für  $h_1/h_0 = 2$  und 3 und die Breitenverhältnisse  $B/L = 1$  und 0,5 durchgeführt und mit den von Boegli [29] nach einer Näherungsmethode ermittelten Werten sowie denen von Michell [5] verglichen (Tabelle 17). Die Ergebnisse weichen nicht viel von denen des ebenen Gleitschuhes ab, wie dies auch schon Raimondi und Boyd [27] feststellten.

Fall	$\frac{h_1}{h_0}$	$\frac{B}{L}$	$\frac{\bar{p} \cdot h_0^2}{\eta \cdot U \cdot L} \Big _{-\infty}$	$\frac{\bar{p} \cdot h_0^2}{\eta U \cdot L}$ Charnes u. Saibel	$P/P_\infty \cdot B$		
					Boegli	Charnes u. Saibel	Michell
1	2	1	0,1615	0,0678	0,421	0,423	0,434
2	3	1	0,1518	0,0725	0,493	0,477	0,460
3	2	0,5	0,0800	0,0148	0,168	0,1845	0,185
4	3	0,5	0,0760	0,0162	0,219	0,213	0,208

Tabelle 17: Vergleich der Ergebnisse mit anderen Autoren

Ein weiterer Vergleich wurde noch mit den Ergebnissen von Muskat, Morgan und Meres [8] durchgeführt, die in der Tabelle 18, in die Drescherschen Kennwerte umgerechnet, gegenübergestellt werden.

$\frac{B}{L}$	$\varphi$	$\bar{p} \cdot h_o^2 / \eta U L$		$\mu \cdot \bar{p} \cdot h_o / \eta \cdot U$	
		Charnes u. Saibel	Muskat u. andere	Charnes u. Saibel	Muskat u. andere
$\infty$	0,5	0,1515	0,143	0,7425	0,7575
$\infty$	1,0	0,1600	0,167	0,800	0,800
$\infty$	1,4	0,1474	0,1507	0,821	0,7895
$\infty$	2,4	0,1158	0,1200	0,9605	0,869
1	0,5	0,0725	0,0714	0,681	0,725
1	1,0	0,0678	0,0667	0,753	0,746
1	1,4	0,0643	0,0594	0,801	0,780
0,5	0,5	0,0325	0,0313	0,639	0,584
0,5	1,0	0,0295	0,0286	0,729	0,723
0,5	1,4	0,0274	0,0269	0,7285	0,764

Tabelle 18: Vergleich mit den Ergebnissen von Muskat, Morgan und Meres [8]

Auch hier sind die Abweichungen gegenüber den Werten nach Muskat, Morgan und Meres, die für den ebenen Gleitschuh gerechnet wurden, gering.

b) Balliger Gleitschuh

Der ballige Gleitschuh endlicher Breite wurde erstmals von Frössel in seiner grundlegenden Arbeit von 1941 [9] nach dem gleichen Verfahren wie der ebene Schmierkeil berechnet. Die Lagerfläche (Abb. 28)

ist Teil eines Kreiszyllinders und wird durch einen parabolischen Zylinder angenähert:

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2r'} \quad (57)$$

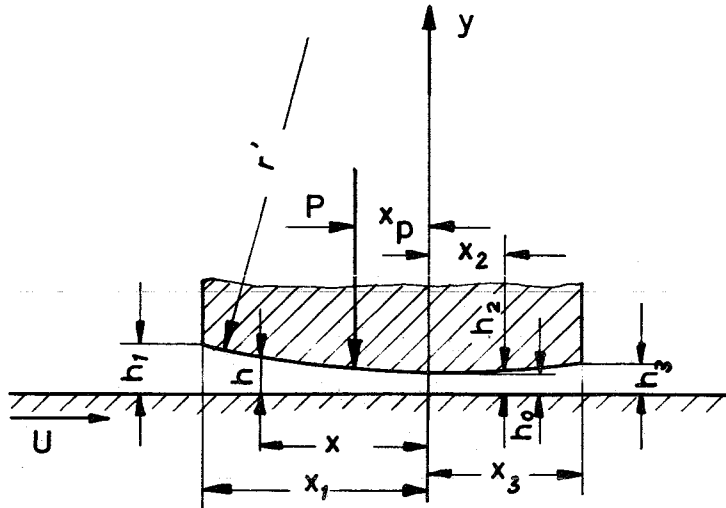


Abb. 28: Bezeichnungen beim balligen Gleitschuh

Es werden die dimensionslosen Grössen

$$\xi = \frac{x}{2r' \cdot h_0} \quad \xi_n = \frac{x_n}{2r' \cdot h_0} \quad \text{bzw.} \quad (58)$$

$$\zeta = \frac{z}{2r' \cdot h_0} \quad \zeta_b = \frac{B/2}{2r' \cdot h_0} \quad (59)$$

eingeführt.



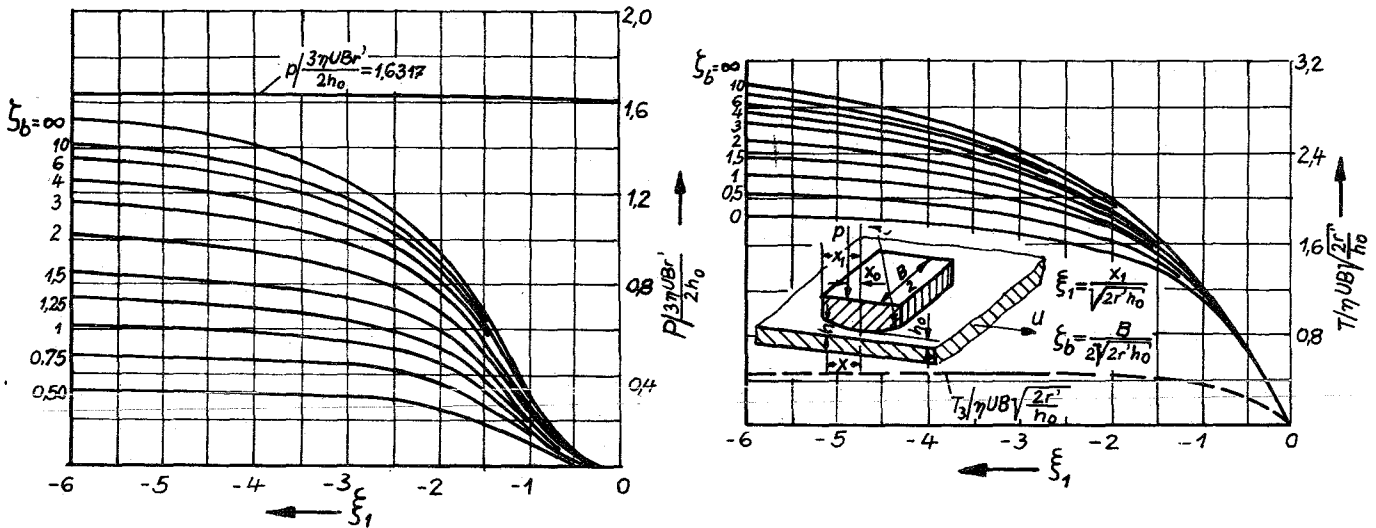


Abb. 29: Tragkraft und Reibung beim balligen Schmierspalt nach Frössel [30]

In einer neueren Veröffentlichung [30] zeigt Frössel noch die Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen.

c) Sphärischer Gleitschuh

Zwei Arbeiten befassen sich mit Gleitschuhen, die in beiden Richtungen gekrümmt sind. Es sind dies eine weitere Arbeit von Charnes, Saibel und Ying [31] und eine von Raimondi [32].

5. Literatur

[1] Reynolds, O.: "Theorie der Schmiermittelreibung" Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 218, Akademische Verlagsges. Leipzig, 1927

- [2] Gümbel, L u. E. Everling: "Reibung und Schmierung im Maschinenbau"  
Berlin: M. Krayn, 1925
- [3] Schiebel, A.: "Die Gleitlager" Springer, Berlin 1933
- [4] Steller, A.: " Der Einfluss von Länge, Neigung und kleinster Spaltweite auf Tragfähigkeit, Reibungsbeiwert und hydrodynamischen Höchstdruck beim ebenen, keilförmigen Schmierpalt"  
Maschinenbau und Wärmewirtschaft, 5. Jg. (1950),  
S. 113 - 119
- [5] Michell, A.G.M.: "The Lubrication of Plane Surfaces"  
Z.Math. u. Phys., Bd. 52 (1905), S. 123 - 137  
Ostwald's Klassiker Nr.218, 1927, S. 202 - 219
- [6] Kingsbury, A.: "On Problems in the Theory of Fluid-Film Lubrication, With an Experimental Method of Solution"  
Trans ASME, A.P.M. 53, 59 (1931), S. 59 - 75
- [7] Duffing, G.: "Die Schmiermittelreibung bei Gleitflächen von endlicher Breite" Auerbach-Hort,  
Handbuch d. physikalischen und technischen Mechanik,  
Bd. 5, Leipzig 1931
- [8] Muskat, M., F. Morgan u. M.W. Meres:  
"Studies in Lubrication, VII. The Lubrication of Plane Sliders of Finite Width"  
J.Appl. Physics, vol. 11 (1940), S. 208 - 219
- [9] Frössel, W.: "Berechnung der Reibung und Tragkraft eines endlich breiten Gleitschuhes auf ebener Gleitbahn"  
ZAMM 21 (1941), H.6, S. 321 - 340

- [10] Frössel, W.: "Reibungswiderstand und Tragkraft eines Gleitschuhes endlicher Breite"  
Forschg. Ing.-Wes., Bd. 13 (1942), S. 65 - 75
- [11] Frössel, W.: "Berechnung axialer Gleitlager mit ebenen Gleitflächen"  
Konstruktion 13 (1961), S. 138 - 148, 192 - 198
- [12] Gersdorfer, O.: "Axialdruck - Gleitlager"  
Konstruktion 8 (1956), S. 87 - 94
- [13] Gersdorfer, O.: "Lagerspiel, Belastbarkeit und Reibung von gekoppelten Axiallagern (Axial-Wechsel-lagern)"  
VDI-Berichte, Bd. 36, 1959, S. 45 - 50
- [14] Drescher, H.: "Zur Berechnung von Axial-Gleitlagern mit hydrodynamischer Schmierung"  
Konstruktion 8 (1956), S. 94 - 104
- [15] Falz, E.: "Grundzüge der Schmiertechnik" 2. Aufl.  
Berlin, Springer 1931
- [16] Niemann, G.: "Maschinenelemente" I. Bd. Springer 1950
- [17] Bower, G.S.: "Film Lubrication of Parallel Thrust Surfaces" Diskussion eines Aufsatzes von A. Fogg unter dem gleichen Titel  
Proc. Inst. Mech. Engrs. 155 (1946), S. 49
- [18] Kettleborough, C.F. "The Tapered-Land Thrust Bearing"  
J. Appl. Mech. 23 (1956), S. 581 - 583
- [19] Christopherson, D.G.: "A New Mathematical Method for the Solution of Film Lubrication Problems"  
Proc. Inst. Mech. Engrs. 146 (1941), S. 126

- [20] Lord Rayleigh, O.M.: "Notes on the Theory of Lubrication" Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. 35 (1918), S. 1 - 12
- [21] Archibald, F.R.: "A Simple Hydrodynamic Thrust Bearing" Trans. ASME, vol. 72 (1950), S. 393 - 400
- [22] Kettleborough, C.F.: "The Stepped Thrust Bearing - A Solution by Relaxation Methods" J. Appl. Mech., vol. 21 (1954), S. 19 - 24
- [23] Kettleborough, C.F.: "An Electrolytic Tank Investigation into Stepped Thrust-Bearings" Proc. Inst. Mech. Engrs. 169 (1955), H. 36, S. 679 - 688  
Auszug: Konstruktion 9 (1957), S. 72 und 73
- [24] Wilcock, D.F.: "The Hydrodynamic Pocket Bearing" Trans ASME, vol. 77 (1955), S. 311 - 319
- [25] Kettleborough, C.F.: "The Hydrodynamic Pocket Thrust-Bearing", Proc. Inst. Mech. Engrs. 170 (1956) S. 535 - 544
- [26] Kettleborough, C.F.: "An Approximate Analytical Solution for the Stepped Bearing" Trans. ASME, Series E, J. Applied Mech., vol. 28 (1961), S. 507 - 510
- [27] Raimondi, A.A. u. J. Boyd: "The Influence of Surface Profile on the Load Capacity of Thrust Bearings With Centrally Pivoted Pads" Trans. ASME, vol. 77 (1955), S. 321 - 330
- [28] Charnes, A.u.E. Saibel: "On the Solution of the Reynolds Equation for Slider-Bearing Lubrication-I" Trans. ASME, vol. 74 (1952), S. 867 - 873

- [29] Boegli, Ch.P.: "The Hydrodynamic Lubrication of Finite Sliders"  
J.Appl. Phys. 18 (1947), S. 482 - 488
- [30] Frössel, W.: "Berechnung axialer Gleitlager mit balligen Gleitflächen"  
Konstruktion 13 (1961), H. 7, S. 253 - 267
- [31] Charnes, A., Saibel, E.u.A.S.C. Ying:  
"On the Solution of the Reynolds Equation for Slider-Bearing Lubrication-III, Effect of Transverse Curvature"  
Trans ASME, vol. 75 (1953), S. 507 - 513
- [32] Raimondi, A.A.: "The Influence of Longitudinal and Transverse Profil on the Load Capacity of Pivoted Pad Bearings."  
Trans. ASLE, vol. 3 (1960), S. 265 - 276
- [33] Drescher, H.: "Axial-Gleitlager mit stufenförmigem Schmierpalt (Staurandlager)"  
Konstruktion 17 (1965), S. 341/349 und 393/402

## Selbsterregte Schwingungen

Beim Betrieb von schnelllaufenden Strömungsmaschinen kommt es oft zu unangenehmen Störungen in Form von Schwingungen. Diese lassen sich je nach Ursache in folgende Arten unterteilen:

- a) Resonanzschwingungen
- b) selbsterregte Schwingungen
- c) Schwingungen aufgrund von Press-Sitz-Reibung
- d) subharmonische Schwingungen
- e) Schwingungen bei trockener Reibung im Lager
- f) Schwingungen durch ungleichmässige Beaufschlagung.

Die beiden ersten Schwingungsarten sind die wichtigsten, weil sie am häufigsten auftreten und am schwierigsten zu bekämpfen sind. Im Folgenden soll auf die selbsterregten Schwingungen näher eingegangen werden.

### 1. Schwingungsmodell

Alle Autoren, die sich sowohl theoretisch als auch experimentell mit der Klärung des Problems der selbsterregten Schwingungen bei Maschinenrotoren befassen, legen ihren Untersuchungen das vereinfachte Modell einer Scheibe mit der Masse  $m$ , die auf einer elastischen Welle in der Mitte zwischen den beiden Lagern befestigt ist, zugrunde (Abb. 30). Für die theoretische Behandlung ist

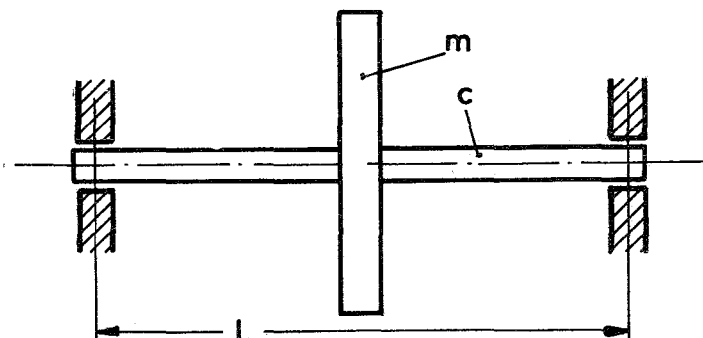


Abb. 30

damit der idealisierte Fall des Massenpunktes auf einer masselosen Feder angenähert. Ist dieser einfache Ersatzrotor in radial starren Lagern gelagert, dann ist die 1. biegekritische Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz)

$$\omega_K = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (1)$$

Dabei ist  $c$  die Federzahl der Welle, die bei einem prismatischen Stab

$$c = \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (2)$$

beträgt.  $E$  ist der Elastizitätsmodul,  $L$  der Lagerabstand und  $I$  das äquatoriale Trägheitsmoment, das im Falle der kreiszylindrischen Welle  $I = \pi \cdot d^4 / 64$  ist.

Da im konkreten Fall die Welle ebenfalls massebehaftet ist, lässt sich die 1. Biegekritische nicht so einfach exakt berechnen, da man es bei Querschwingungen von Stäben mit Problemen vierter Ordnung zu tun hat. Im einfachen Fall einer an ihren Enden drehbar aufgestützten Welle mit überall gleichem Querschnitt ist das Ergebnis relativ einfach und sei zum Vergleich für die Grundschwingung angegeben [1, S. 199]:

$$\omega_K = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^3}} \quad (3)$$

Zum Vergleich mit dem Fall der Scheibe auf masseloser Welle wird Gleichung (1) auf die gleiche Form gebracht:

$$\omega_K = 6,928 \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^3}} \quad (4)$$

## 2. Charakteristische Erscheinungsformen

Um einen besseren Überblick über die charakteristischen Merkmale der selbsterregten Schwingungen zu bekommen, werden zunächst nur die Experimente ausgewertet, deren Ergebnisse mit einfachen zylindrischen Gleitlagern mit 1 Ölzufuhr zu den Gleitflächen und höchstens 1 Öllängsnut gewonnen wurden. Versuche mit solchen Lagern wurden von Newkirk/Taylor [2], Hagg [3], Pinkus [4], Hagg/Warner [5], Shawki [6], Newkirk/Lewis [7] und Tondl [8] durchgeführt.

Die Untersuchungen erstreckten sich auf Lager mit 40 bis 101,6 mm Durchmesser, Breitenverhältnissen  $B/D$  von 0,5 bis 1,5 und relativen Lagerspielen von  $\psi = 1,11 \pm 20\%$ . Der untersuchte Drehzahlbereich ging bis 14 000 U/min entsprechend einer höchsten Umfangsgeschwindigkeit von 37,2 m/s. Die biegekritischen Drehzahlen lagen zwischen 180 und 9600 U/min. Dies waren allerdings gemessene Werte, die sich von den theoretischen kritischen Drehzahlen etwas unterscheiden können, da die Lager nicht starr sind und der Lagerabstand bei grösseren elastischen Biegepeilen der Welle nicht mehr genau definiert ist. Die spezifischen Lagerbelastungen wurden von  $\bar{p} = 0 \text{ kp/cm}^2$  im Falle der senkrechten Welle bis  $\bar{p} = 10,3 \text{ kp/cm}^2$  variiert ( $\bar{p} = P/B \cdot D$ ).

Die Beobachtungen der vorgenannten Autoren werden im Folgenden zusammengefasst: Es wurden 2 Arten von selbsterregten Schwingungen beobachtet, der sog. "Halbfrequenzwirbel" (half-speed whirl) und der sog. "Resonanzwirbel" (resonant whip oder resonant whirl).

Die Schwingung des Halbfrequenzwirbels ist dadurch gekennzeichnet, dass die Kreisfrequenz  $\Omega$  der Schwingung etwas kleiner oder gleich der halben Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Wellenzapfens ist.



$$\Omega \approx 0,5 \omega \quad \text{mit } \omega = \frac{\pi \cdot n}{30} < 2 \cdot \omega_K \quad (5)$$

Sie kann bei allen Drehzahlen auftreten. Hat sie einmal eingesetzt, dann bleibt sie mit steigender Drehzahl erhalten, wenn die sonstigen Betriebsbedingungen nicht verändert werden. Die Einsatzdrehzahl  $n_E$ , bei der die Schwingung einsetzt, ist um so höher, je höher die spezifische Lagerbelastung  $\bar{p}$ , je kleiner das relative Lagerspiel  $\psi$  und je kleiner die dynamische Zähigkeit  $\eta$  ist.

Bei senkrechter Welle, wo die statische Lagerbelastung Null ist, läuft die Welle bei allen Drehzahlen instabil. Die Wellenbahn ist dann bei isotropem Lager, d.h. einem Lager, das in allen Richtungen die selben Eigenschaften hat, ein Kreis. Ein Lager mit solchen Eigenschaften wird durch ein kreiszylindrisches Lager verwirklicht, das keine Längsnuten sondern nur Ölzuführungsbohrungen besitzt [6].

Die Grösse der Amplituden des Lagerzapfens und der Rotorscheibe wächst mit zunehmender Drehzahl und erreicht bei der 1. kritischen Drehzahl ein relatives Maximum. Grössere Restunwucht erhöht die Amplituden, hat aber keinen Einfluss auf die Einsatzdrehzahl der Schwingung.

Die Schwingungen der beiden Wellenzapfen in den Lagern und des Rotors haben die selbe Richtung wie die Drehbewegung der Welle und sind alle konphas.

Der Halbfrequenzwirbel wird neben dem Fall der senkrechten Welle vor allem bei sehr leichten waagerechten Rotoren beobachtet, die in relativ schmalen Lagern mit grossem Spiel laufen. Bei Lagern mit grossem Breitenverhältnis und kleinem Lagerspiel wird der Halbfrequenzwirbel meist durch die Dämpfung unterdrückt.

Überschreitet die Drehzahl das 2-fache der kritischen Drehzahl  $n_k$ , dann geht der Halbfrequenzwirbel in den Resonanzwirbel über. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass die Kreisfrequenz der Schwingung nicht mehr mit der Drehzahl anwächst, sondern bei ansteigender Drehzahl konstant bleibt und zwar gleich der 1. biegekritischen Kreisfrequenz  $\omega_k$  ist (Abb. 31).

$$\Omega = \omega_k, \text{ wenn } \omega > 2 \cdot \omega_k \quad (6)$$

Die Amplituden wachsen mit der Drehzahl stark an und können deshalb sehr gefährlich werden. Normalerweise besteht Gleichgewicht zwischen der Erregung und Dämpfung. Ist letztere aber nicht ausreichend, dann steigen die Amplituden bei konstanter Drehzahl stetig an und führen zur Zerstörung der Lager, wenn die Anlage nicht rechtzeitig abgestellt wird.

Der Resonanzwirbel tritt aber nicht immer knapp oberhalb  $2 \cdot \omega_k$  auf. Ob er auftritt, hängt wieder von den Betriebsbedingungen der Lagerung ab, und zwar wirkt alles was beim Halbfrequenzwirbel die Einsatzdrehzahl erhöht, beim Resonanzwirbel in Richtung einer Unterdrückung oder Dämpfung der Schwingung. Newkirk und Lewis [7] berichten von einem Fall, wo die Resonanzschwingung erst oberhalb des Fünffachen der kritischen Drehzahl einsetzte. Es handelte sich dabei um einen sehr leichten Rotor, der in schmalen Lagern mit grossem Spiel lief. Auch schlechtes Fluchten der Lager konnte die selbst-erregte Schwingung verhindern. Es wurde häufig beobachtet, dass ein Resonanzwirbel, der mit steigender Drehzahl erst weit oberhalb  $2 \cdot n_k$  einsetzte, bei Absenken der Drehzahl erhalten blieb und erst bei  $2 \cdot n_k$  wieder verschwand. Pinkus [4] schildert mehrere Fälle, wo der Resonanzwirbel oberhalb der 3. kritischen Drehzahl aussetzte, also im Gegensatz zu den sonstigen Beobachtungen eine obere Grenze hatte.

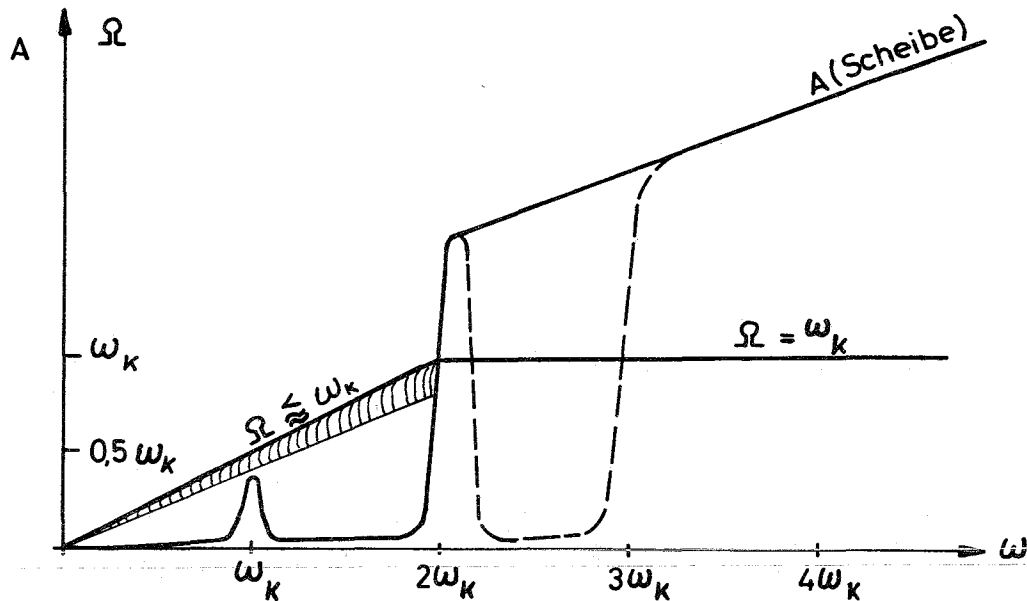


Abb. 31:

Im labilen Bereich genügt oft ein äusserer Stoss, um eine selbsterregte Schwingung in Gang zu bringen.

Die Schwingung hat wieder die selbe Drehrichtung wie die Welle und die Bewegungen der Zapfen in den Lagern und der Rotorschale sind konphas.

### 3. Theorie der selbsterregten Schwingungen

#### 3.1 Einleitung

Die ersten rechnerischen Untersuchungen über die Zapfenbewegung im Lager wurden bereits 1919 von Harrison [9] durchgeführt. Durch diese Untersuchungen angeregt, entwickelte Robertson [10] später die sog. Kontinuitätsmethode, die das Ergebnis brachte, dass die Frequenz der Schwingung gleich der halben Drehfrequenz ist. Er zeigte auch, dass die Reibungskräfte gegenüber den Druckkräften vernachlässigt werden können. Beim Vergleich seiner Theorie mit den experimentellen Ergebnissen von Newkirk und Taylor [2] kam er zu dem Schluss, dass der Rotor bei allen Drehzahlen instabil sein müsste.

Für den Fall der starren Welle in halbumschlossenen Lagern gewannen Stodola [11] und Hummel [12] Stabilitätsbedingungen, indem sie die Gleichgewichtskurve durch einen Halbkreis annäherten, für die Tragkraft des endlich breiten Lagers eine Näherungsformel nach Gümbel anwendeten und die Annahme machten, dass die resultierende Ölfilmkraft der gestörten Wellenlage dem Betrage nach gleich der resultierenden Ölfilmkraft derjenigen Gleichgewichtslage ist, welche die gleiche Exzentrizität wie die gestörte Wellenlage hat. Hummel kam zu dem Ergebnis, dass die Exzentrizität eine massgebliche Grösse für die Stabilitätsgrenze ist und oberhalb einer Exzentrizität von 0,7 keine Instabilität auftritt, während das Gebiet darunter labil ist.

Hagg [3] kam durch stark vereinfachte Ansätze der Bewegungsgleichungen ebenfalls zu dem Ergebnis, dass die Schwingungsfrequenz ungefähr gleich der halben Drehfrequenz ist. Aufbauend auf der "Federmethode" von Stodola/Hummel gewann er Stabilitätsbedingungen, wobei er als erster die Dämpfung berücksichtigte. Hagg und Warner [5] erweiterten das Kriterium von Hagg empirisch für den Fall der elastischen Welle und gewannen Stabilitätskarten jeweils für Lager mit konstantem Breitenverhältnis, indem sie die von Needs für das 120°-Lager gewonnenen Daten zugrunde legten.

Poritzky [13] zeigte, indem er eine zusätzliche radiale Kraft zu der Ölfilmkraft hinzufügte, dass Instabilität nur bei Drehzahlen oberhalb dem Doppelten der ersten kritischen Drehzahl auftritt, aber auch, je nach Ölfilmbedingung, auf Null abfallen kann.

Cameron [14] erweiterte die Methode von Hummel und zeigte, dass unterhalb einer Exzentrizität von 0,7 nur 1 kritische Frequenz auftritt. Unter Verwendung der Werte von Sassenfeld und Walther für das 180°-Lager gewann Cameron eine Stabilitätskarte, bei der verschiedene Breitenverhältnisse berücksichtigt sind.

### 3.2 Theorie von Hori

Eine gute qualitative Erklärung aller charakteristischen Erscheinungen der selbsterregten Schwingungen gelang erstmals Hori [15], der bei der Entwicklung seiner Theorie für das unendlich breite Lager voraussetzte, dass der Öldruck in einer Lagerhälfte Null ist, so dass die Komponenten der Ölreaktionskraft durch Integration über einen Bereich von  $180^\circ$  gewonnen wurden. Die Bewegungsgleichungen wurden dadurch vereinfacht, dass einmal der Fall der kleinen Schwingungen, zum anderen nur grosse Schwingungen betrachtet wurden. Im ersten Fall kann man dann die Bewegungsgleichung linearisieren, im zweiten Fall die Schwerkraft gegenüber der Trägheitskraft vernachlässigen und annehmen, dass die Kreisfrequenz der zirkular polarisierten Schwingung gleich der kritischen Kreisfrequenz  $\omega_k$  des Systems ist. Die Ableitungen sind in etwas anderer Form im II. Band des Buches von Traupel [16] aufgeführt. Für die kleinen Schwingungen wurde das Hurwitz-Kriterium auf die charakteristische Gleichung angewandt, wodurch die folgende Stabilitätsbedingung erhalten wurde:

$$\frac{1}{\omega^2} \left( \frac{P_{st}}{m \cdot \Delta R} \right) > K_1 (\epsilon_0) \left[ K_2 (\epsilon_0) + \frac{1}{\omega_k^2} \left( \frac{P_{st}}{m \cdot \Delta R} \right) \right] \quad (7)$$

Dabei ist  $P_{st}$  die statische Lagerbelastung,  $m$  die Rotormasse,  $\Delta R$  das radiale Lagerspiel,  $K_1$  und  $K_2$  Konstanten die nur von der statischen Verlagerung  $\epsilon_0$  abhängen und Abkürzungen für Glieder bei der Lösung der charakteristischen Gleichung darstellen. Die Auswertung der Stabilitätsbedingung führt zur Stabilitätskarte Abb. 32.

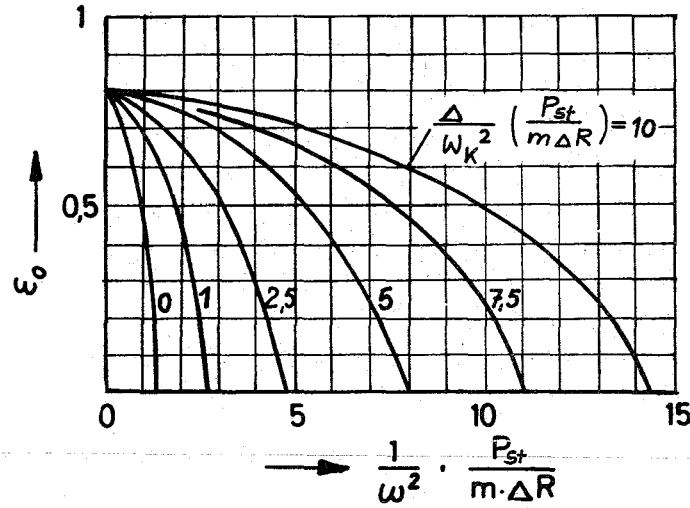


Abb. 32: Stabilitätskarte nach Hori [15]

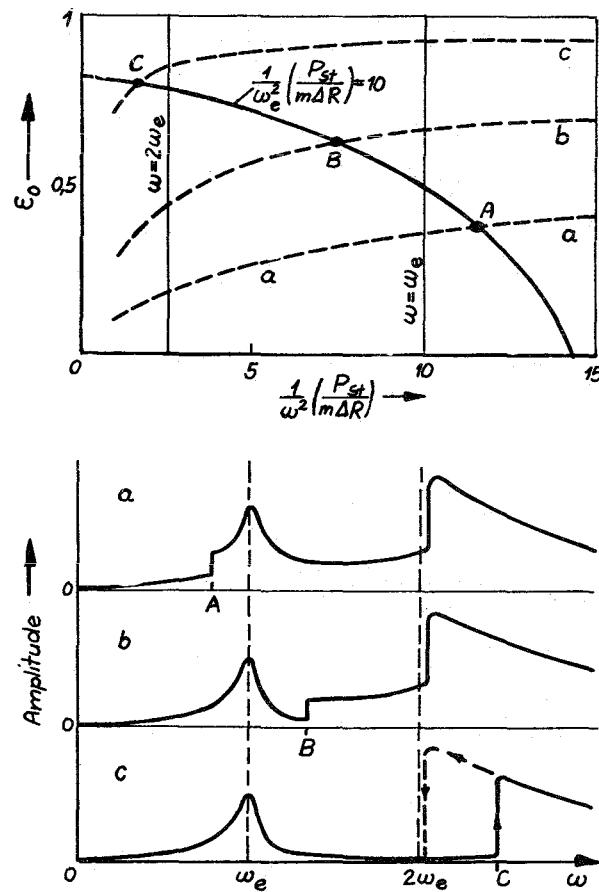


Abb. 33: Übersicht über das dynamische Verhalten von Wellen mit verschiedener Lagerbelastung nach Hori [15]

Die Stabilitätskarte zeigt, dass der Rotor oberhalb  $\varepsilon_0 = e/\Delta R \approx 0,8$  immer stabil ist. Das Ergebnis beim Fall der grossen Schwingung ist, dass ein Rotor nur oberhalb der 2-fachen kritischen Drehzahl mit solch grossen Amplituden schwingen kann.

Um die Stabilitätskarte anschaulicher zu machen, betrachtete Hori 3 Fälle, einen sehr leichten, einen mittelschweren und einen schweren Rotor, die so ausgelegt waren, dass bei allen dreien der Ausdruck  $P_{st}/m \cdot \Delta R \cdot \omega_k^2 = 10$  war. Ihnen entsprechen die Kurven a, b und c der Abb. 33, die im Sinne der angegebenen Pfeile durchlaufen werden, wenn die Drehzahl steigt. Beim schwach belasteten Lager, Kurve a, fängt die Welle bei einer Steigerung der Drehzahl bereits im Punkt A, also schon unterhalb der ersten kritischen Drehzahl an, unruhig zu laufen, da die Stabilitätsgrenze überschritten wird. Eine sehr starke selbsterregte Schwingung ist aber noch nicht möglich, weil  $\Omega < 2 \cdot \omega_k$ . Es stellt sich also eine Schwingung mittlerer Amplitude ein, die so schwach sein kann, dass sie nicht stört oder überhaupt nicht bemerkt wird. Beim Durchschreiten von  $\omega_k$  geht der Schwingungsausschlag durch ein Maximum. Kurz nach Überschreitung von  $2\omega_k$  tritt eine starke selbsterregte Schwingung auf, die mit weiter zunehmendem  $\omega$  im allgemeinen wieder mehr oder weniger stark zurückgeht.

Beim mittelstark belasteten Lager, Kurve b, erscheint unterhalb der kritischen Drehzahl keine Instabilität. Beim Durchschreiten von  $\omega_k$  tritt wie vorher das Maximum des Ausschlages auf, worauf sich die Welle wieder beruhigt. Erst bei Erreichung des Punktes B wird der Lauf erneut etwas unruhig. Erst bei Überschreitung von  $\omega = 2 \cdot \omega_k$  tritt wieder die starke selbsterregte Schwingung

auf. Beim stark belasteten Lager, Kurve c, wird wieder bei  $\omega_k$  das übliche Maximum des Ausschlages festgestellt, während die Welle beim weiteren Ansteigen von  $\omega$  ruhig läuft, selbst wenn  $\omega = 2 \cdot \omega_k$  schon wesentlich überschritten ist. Erst im Punkt C wird die Stabilitätsgrenze überschritten, wobei nun sofort eine starke Schwingung auftritt. Bei Absenken von  $\omega$  bleibt die selbsterregte Schwingung erhalten bis fast auf  $\omega = 2 \cdot \omega_k$ . Im Gebiet zwischen dieser Grenze und dem Punkt C kann die Schwingung auch künstlich durch einen Stoss eingeleitet werden, wenn  $\omega$  von unten her in dieses Gebiet eintritt.

### 3.3 Someyas Theorie des unwuchtfreien Rotors

Die Arbeit von Someya [17] behandelt ebenfalls die Theorie der selbsterregten Schwingungen eines einfach besetzten symmetrischen Rotors in zylindrischen Gleitlagern. Er baut auf den Dissertationen von Ott [18] und Hahn [19] auf, die die Bahnkurven des Zapfenmittelpunktes im Lager bei zeitlich veränderlicher Belastung berechneten und somit den Weg zur Erfassung der dynamischen Lagerprobleme öffneten.

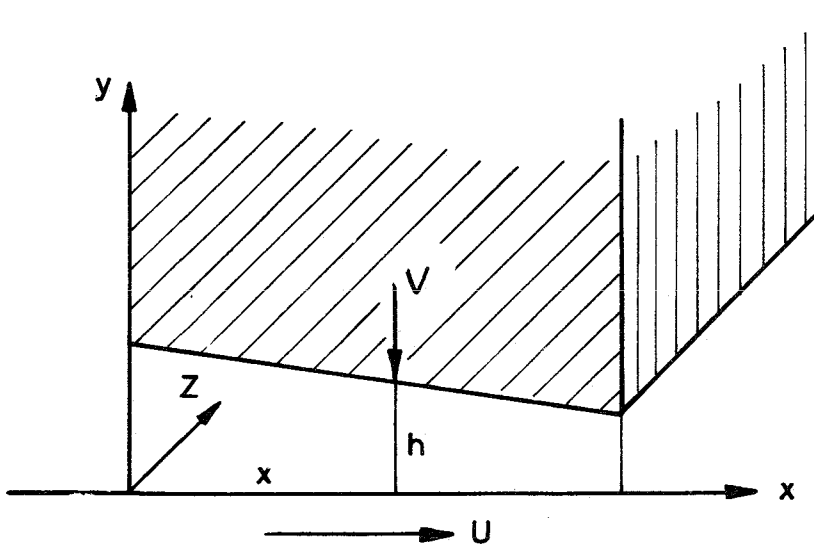


Abb. 34: Ebener Schmierkeil



a) Lösung der Reynoldsschen Differentialgleichung

Die Reynoldssche Differentialgleichung [20] (Ableitung in III.1) lautet für einen ebenen Schmierkeil nach Abb. 34 bei Annahme konstanter Zähigkeit:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial z}) = 6 \cdot \eta \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \cdot \eta \cdot V \quad (8)$$

Da man beim Zapfenlager die Krümmung vernachlässigen kann, kann man Gleichung (8) dafür anwenden, indem man unter Verwendung der Bezeichnungen von Abb. 35 folgende Umformungen durchführt:

$$x = R \cdot \delta \quad h = \Delta R - e \cdot \cos \delta \quad -V = \dot{e} \cdot \cos \delta + e \cdot \dot{\gamma} \sin \delta \quad (9)$$

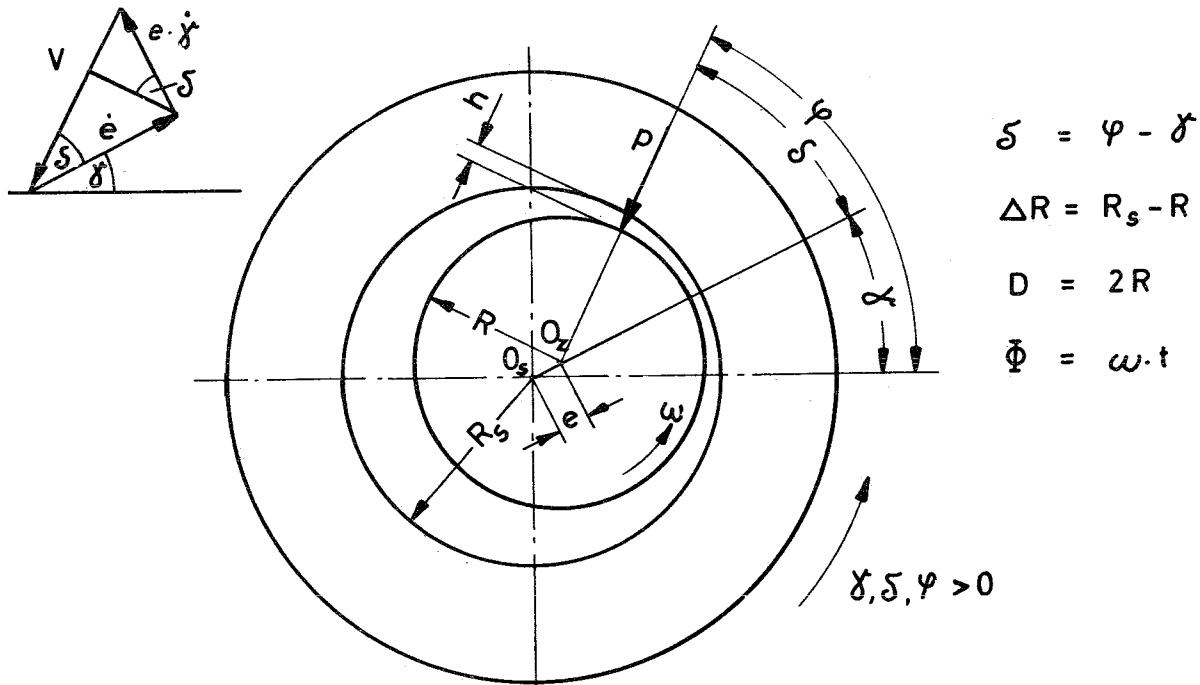


Abb. 35: Bezeichnungen beim zyl. Lager nach Someya [17]

Zu den bereits bekannten dimensionslosen Größen kommt noch

$$\zeta \equiv \frac{z}{R} \quad \text{dimensionslose axiale Koordinate}$$

Ausserdem werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$E = \frac{2}{\omega} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{2}{\omega} \cdot \dot{\varepsilon} = 2 \cdot \varepsilon' = 2 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi}$$

$$G^* = 1 - 2 \cdot \gamma' = 1 - 2 \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} = 1 - \frac{2}{\omega} \cdot \dot{\gamma} = 1 - \frac{2}{\omega} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

Dabei ist  $\omega$  die Drehwinkelgeschwindigkeit des Zapfens,  $p$  der Schmiermitteldruck,  $\eta$  die mittlere dynamische Zähigkeit,  $t$  die Zeit,  $D$  der Innendurchmesser der Lagerschale,  $R$  der Radius des Zapfens,  $\Delta R = R_s - R$  das radiale Lager Spiel,  $z$  die axiale Koordinate,  $h$  die Spalthöhe,  $e$  die Exzentrizität des Zapfenmittelpunktes,  $B$  die Breite der Lagerschale und  $\phi$  der Drehwinkel des Zapfens.

Setzt man die vorgenannten Beziehungen in Gleichung (8) ein, dann erhält man die Reynoldssche Differentialgleichung in folgender Form

$$\frac{\partial}{\partial \delta} (H^3 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \delta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (H^3 \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta}) = 6 \cdot (-E \cdot \cos \delta + \varepsilon \cdot G^* \cdot \sin \delta) \quad (9)$$

Bei der Lösung dieser Gleichung setzt Someya die Randbedingungen ein, dass der dimensionslose Druck  $\Pi$  an den beiden Lagerenden verschwindet und die Lösung in Umfangsrichtung die Periode  $2\pi$  hat. Es wird folgender Lösungsansatz verwendet:

$$\Pi = \sum_{j=1}^J \frac{E(\bar{a}_{0j} + \sum_{i=1}^I \bar{a}_{ij} \cdot \cos i\delta) + G^* \cdot (\sum_{i=1}^I \bar{b}_{ij} \cdot \sin i\delta)}{(1 - \varepsilon \cdot \cos \delta)^2} \cdot \sin \frac{\pi \cdot j\zeta}{2 \cdot \beta} \quad (10)$$

Setzt man diese Gleichung in (9) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich je ein System von linearen Gleichungen für die Konstanten  $\bar{a}_{ij}$  und  $\bar{b}_{ij}$ , die man für bestimmte Breitenverhältnisse  $\beta$  und bestimmte relative Exzentrizitäten  $\varepsilon$  berechnen kann. Die Rechnung wurde für  $\beta = 1/4, 1/2, 1, 2$  und  $\infty$  und für  $\varepsilon = 0; 0,01; 0,05; 0,1; 0,2 \dots 0,9; 0,95$  und  $0,99$  durchgeführt.

b) Resultierende Druckkraft, Feder- und Dämpfungs-  
konstanten

Zerlegt man den Druck  $p$  in Komponenten in Richtung der Exzentrizität  $e$  und senkrecht dazu (Abb. 36) und integriert man diese über den Bereich positiven Druckes, denn bei flüssigen Schmiermedien werden keine Unterdrücke im Schmierpalt beobachtet, dann erhält man die Komponenten des resultierenden Schmiermitteldruckes  $P_e$  und  $P_\gamma$ , womit man den resultierenden Schmiermitteldruck  $P$  selbst und den sog. Voreilwinkel  $\lambda$  bestimmen kann. Ebenso ermittelt man aus  $P_e$ ,  $P_\gamma$  und  $\gamma$  die Komponenten  $P_x$  und  $P_y$ . Durch Multiplikation dieser Kräfte mit  $\psi^2/D \cdot B \cdot \eta \cdot \omega$  bekommt man die entsprechenden dimensionslosen Kräfte  $\Pi_e \equiv f$ ,  $\Pi_\gamma \equiv g$ ,  $\bar{\Pi}$ ,  $\Pi_x \equiv \Pi_1$  und  $\Pi_y \equiv \Pi_2$

$$\Pi_e = f = \frac{-1}{4\beta} \iint_{\Pi \geq 0} \Pi \cos \delta \cdot d\delta \cdot d\zeta \quad (11)$$

$$\Pi_\gamma = g = \frac{-1}{4\beta} \iint_{\Pi \geq 0} \Pi \sin \delta \cdot d\delta \cdot d\zeta \quad (12)$$

$$\Pi_x = \Pi_1 = \Pi_e \cdot \cos \gamma - \Pi_\gamma \cdot \sin \gamma \quad (13)$$

$$\Pi_y = \Pi_2 = \Pi_e \cdot \sin \gamma + \Pi_\gamma \cdot \cos \gamma \quad (14)$$

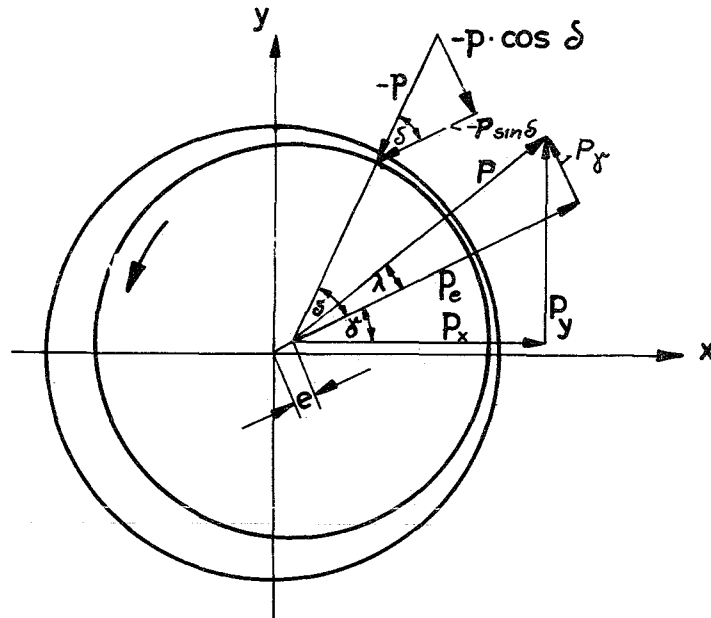


Abb. 36

Zieht man in (11) und (12) den Faktor  $G^*$  aus dem Integrand aus und setzt

$$q = \frac{E}{|G^*|} = q(\varepsilon', \gamma'), \quad (15)$$

dann lässt sich  $\bar{\Pi}$  als Funktion von  $|G^*|$  und der Funktion  $\sigma(\varepsilon, q)$  ausdrücken

$$\bar{\Pi} = \sqrt{\Pi_e^2 + \Pi_\gamma^2} = |G^*| \cdot \sigma(\varepsilon, q, \beta) \quad (16)$$

Ebenso ist der Voreilwinkel  $\lambda = \lambda(\varepsilon, q)$ .

Für das Lager mit  $\beta = 1/2$  rechnete Hahn [19], indem er die Reynoldssche Gleichung über Differenzgleichungen löste, die Grössen  $\sigma$  und  $\lambda$  für 45 Werte von

q aus. Damit kann man die Abhängigkeit der Druckkomponenten  $\Pi_x$  und  $\Pi_y$  von der Verlagerung ( $\varepsilon, \gamma$ ) und der Verlagerungsgeschwindigkeit ( $\varepsilon', \gamma'$ ) des Zapfenmittelpunktes angeben:

$$\Pi_x = \Pi_1 = \Pi_1 (\varepsilon, \gamma, \varepsilon', \gamma') \quad (17)$$

$$\Pi_y = \Pi_2 = \Pi_2 (\varepsilon, \gamma, \varepsilon', \gamma') \quad (18)$$

In der linearen Theorie wird die Abhängigkeit der Druckkraft von der Verlagerung und der Verlagerungsgeschwindigkeit des Zapfens linearisiert. Man nennt die entsprechenden Proportionalitätsfaktoren Feder- bzw. Dämpfungskonstanten des Schmierfilms. Kennzeichnet man nämlich die horizontale bzw. vertikale Richtung mit 1 bzw. 2, so lassen sie sich komponentenweise definieren:

dimensionslose Federkonstanten:

$$\gamma_{ij} = \frac{\Delta R}{P} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\overline{\Pi}} \cdot \frac{\partial \Pi_i}{\partial \xi_j} \quad (19)$$

dimensionslose Dämpfungskonstanten:

$$\beta_{ij} = \frac{\omega \cdot \Delta R}{P} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{\overline{\Pi}} \cdot \frac{\partial \Pi_i}{\partial \xi'_j} \quad (20)$$

mit ( $i, j = 1, 2$ ).

Ferner sind

$$\overline{\Pi} = \frac{P \cdot \psi^2}{DB \cdot \eta \cdot \omega} \quad (21)$$

$$\text{und } (x_1, x_2) = e(\cos \gamma, \sin \gamma) = \Delta R(\xi_1, \xi_2) \quad (22)$$

Die Ableitungen in (19) und (20) sind an der stationären Stelle  $\varepsilon' = \gamma' = 0$  zu bilden, für die  $f$  und  $g$  aus Gleichung (11) und (12) bestimmbar sind. Ebenso lassen sich die Ableitungen  $f_\varepsilon$ ,  $g_\varepsilon$  und  $f_\gamma$ ,  $g_\gamma$ , berechnen, die Someya für  $\beta = 1/4, 1/2, 1, 2$  und  $\infty$  in Tabellenform angibt.

Durch Differentiation von  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  (Gl. 13 und 14) erhält man Rechenformeln für die vier dimensionslosen Federkonstanten  $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$  und die vier dimensionslosen Dämpfungskonstanten  $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}$ , die sich in Abhängigkeit von  $\varepsilon, \bar{\Pi}, f, g, f_\varepsilon, g_\varepsilon, f_\gamma, g_\gamma$ , darstellen.

c) Bewegungsgleichungen des einfach besetzten symmetrischen Rotors

Es wird wieder eine biegsame Welle, die in der Mitte durch eine Masse  $m$  ohne Unwucht besetzt ist, mit der Biegefederkonstanten  $c$  vorausgesetzt. An ihren Enden ist sie in zwei zylindrischen Gleitlagern waagrecht, frei kippbar gelagert (Abb. 37). Die vertikal gelagerte Welle lässt sich als Sonderfall (Erdbeschleunigung  $g^* = 0$ ) betrachten. Die Koordinaten des Zapfenmittelpunktes  $O_z$  und des Rotormittelpunktes  $O_m$  seien auf den ortsfesten Schalen-Mittelpunkt  $O_s$  bezogen und polar

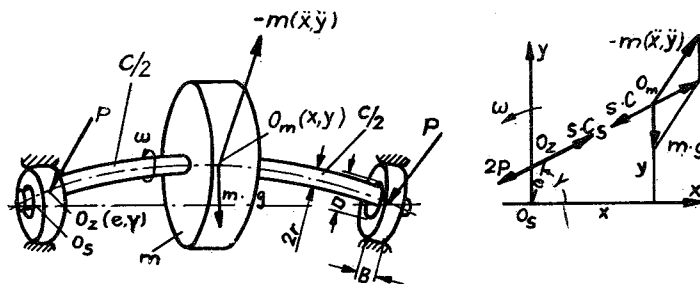


Abb. 37: Schwingungssystem und seine axiale Projektion

mit  $e$ ,  $\gamma$  bzw. kartesisch mit  $x$ ,  $y$  bezeichnet.  
Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -c (x - e \cdot \cos \gamma) \quad (23)$$

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -c (y - e \cdot \sin \gamma) - m \cdot g^* \quad (24)$$

für die Scheibe und für das Kräftegleichgewicht  
im Lager

$$P_x + \frac{c}{2} (x - e \cdot \cos \gamma) = 0 \quad (25)$$

$$P_y + \frac{c}{2} (y - e \cdot \sin \gamma) = 0 \quad (26)$$

Drückt man  $P_x$  und  $P_y$  durch die entsprechenden dimensionslosen Drücke  $\Pi_x$  und  $\Pi_y$  aus und führt folgende Abkürzungen ein,

$$a \equiv c/m \cdot \omega^2 = (\omega_k/\omega)^2 \quad (27)$$

$$b \equiv c \cdot \psi^3/4 B \eta \cdot \omega = (\Lambda/\sqrt{\mu^*})(\omega_k/\omega) \quad (28)$$

$$\bar{g} \equiv 2g^*/\psi \cdot D \cdot \omega^2 = \mu^*(\omega_k/\omega)^2 = (\omega_o/\omega)^2 \quad (29)$$

dann erhält man die Bewegungsgleichungen in dimensionsloser Form:

$$\xi'' + a (\xi - \varepsilon \cdot \cos \gamma) = 0 \quad (30)$$

$$\eta'' + a (\eta - \varepsilon \cdot \sin \gamma) + \bar{g} = 0 \quad (31)$$

$$\Pi_x + b (\xi - \varepsilon \cdot \cos \gamma) = 0 \quad (32)$$

$$\Pi_y + b (\eta - \varepsilon \cdot \sin \gamma) = 0 \quad (33)$$

mit  $\xi = x/\Delta R$  und  $\eta = y/\Delta R$  (34)

Ausserdem werden noch folgende Kenngrössen verwendet:

$$\omega_k \equiv \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{Biegekritische Winkelgeschw. der punktförmig gelagerten Welle} \quad (1)$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g^*}{\Delta R}} \quad \text{Bezugswinkelgeschwindigkeit.} \quad (35)$$

$$\mu^* \equiv \frac{m \cdot g^*}{c \cdot \Delta R} = \left( \frac{\omega_0}{\omega_k} \right) \quad \text{bezogene Wellendurchbiegung} \quad (36)$$

$$S_0 \equiv \frac{m \cdot g^*}{2} \cdot \frac{\psi^2}{D \cdot B \cdot \eta \cdot \omega} \quad \text{Sommerfeldzahl} \quad (37)$$

$$\left( = \frac{\bar{p} \cdot \psi^2}{\eta \cdot \omega} \quad \text{mit } \bar{p} = \frac{P_{st}}{B \cdot D} \right)$$

$$\Lambda \equiv \frac{m \cdot g^*}{2} \cdot \frac{\psi^2}{D \cdot B \cdot \eta \cdot \omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot S_0 \quad (38)$$

Lagerbelastungskennzahl

Die Sommerfeldzahl ist die Ähnlichkeits-Kenngrösse bei stationärem Gleichgewicht, wo der Zapfenmittelpunkt ruht. Bei allen rein zylindrischen Lagern gleichen Breitenverhältnisses ist sie nur eine Funktion der relativen Exzentrizität  $\epsilon$ .

d) Lineare Stabilitätsrechnung, Stabilitätskarten

Unter Annahme kleiner Störbewegungen kann man die Bewegungsgleichungen linearisieren. Durch den Exponentialansatz  $e^{\lambda \phi}$  für die Störbewegung erhält man eine Frequenzgleichung sechsten Grades:

$$C_6 \lambda^6 + C_5 \lambda^5 + C_4 \lambda^4 + C_3 \lambda^3 + C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda + C_0 = 0 \quad (39)$$



Die Konstanten  $C_i$  sind hierbei Funktionen von  $a$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $f_\varepsilon$ ,  $g_\varepsilon$ ,  $f_{\varepsilon'}$ ,  $g_{\varepsilon'}$ ,  $f_{\gamma'}$  und  $g_{\gamma'}$ .

Ist nun der Realteil aller Wurzeln der Frequenzgleichung negativ, dann ist das Gleichgewicht stabil. Durch Anwendung des Lagenkriteriums von L. Cremer erhält Someya die Stabilitätsbedingung

$$\frac{\omega}{\omega_k} < \frac{1}{\sqrt{\frac{m' \cdot S(\varepsilon)}{\mu^*} + n}}, \quad (40)$$

$m'$  und  $n'$  hängen natürlich von den selben Grössen ab wie die Konstanten  $C_i$  und sind als Funktion von  $\varepsilon$  in den von Someya aufgestellten Tabellen angegeben.  $S(\varepsilon)$  ist die weiter oben erwähnte Funktion  $\sigma(\varepsilon, q)$  für den stationären Fall

$$S(\varepsilon) \equiv \sigma(\varepsilon, q)/q = 0, \quad (41)$$

also nur eine Funktion von  $\varepsilon$ . Sie ist im stationären Fall ( $\varepsilon' = \gamma' = 0$ ) mit der Sommerfeldzahl identisch. Es gilt dann

$$\frac{\omega}{\omega_k} = \frac{\Delta \cdot \sqrt{\mu^*}}{S(\varepsilon)} \quad (42)$$

In der  $\omega/\omega_k$ -Ebene stellt diese Formel die sogenannten Anfahrkurven dar, die als gestrichelte Kurven in Abb. 38 und 39 für die Breitenverhältnisse  $\beta = 1/2$  und  $\infty$  dargestellt sind. Die ausgezogenen Kurven stellen den Stabilitätsrand dar und werden aus der Stabilitätsbedingung (40) ermittelt, wenn man das Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzt. Für gegebene Parameterwerte  $\mu^*$  und  $\Delta$  sind die Betriebspunkte im Drehzahlbereich unterhalb des Schnittpunktes der beiden zugehörigen

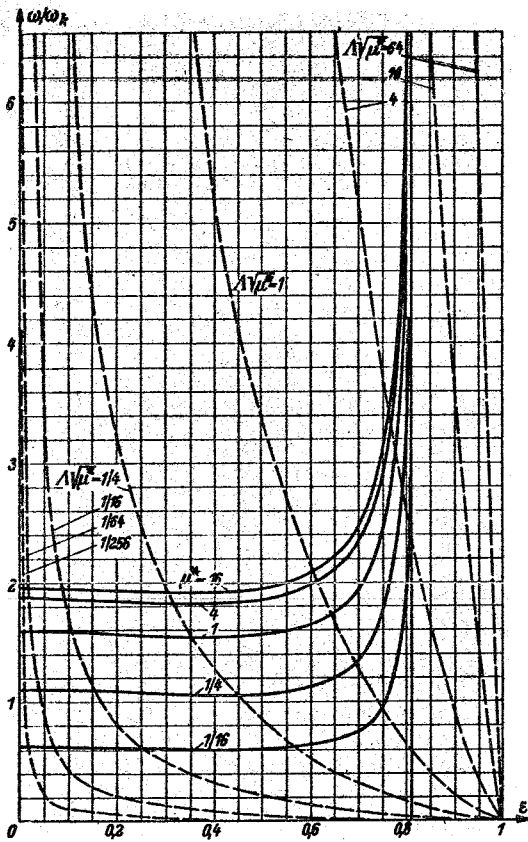


Abb. 38: Stabilitätskarte  $\beta = 1/2$

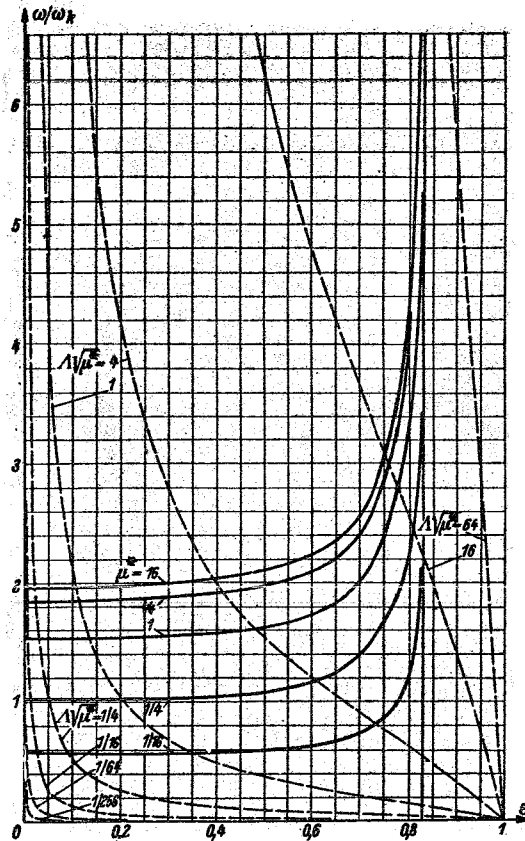


Abb. 39: Stabilitätskarte  $\beta = \infty$

Kurven stabil, labil, wenn sie darauf fallen, und instabil, wenn sie darüber liegen.

Die Stabilitätsgrenzkurven ( $\mu^* = \text{const.}$ ) ändern ihre Gestalt nur sehr wenig mit dem Breitenverhältnis  $\beta$ . Sie verlaufen im Bereich kleiner Exzentrizitäten sehr flach und steigen dann anschliessend sehr steil an und schmiegen sich an eine senkrechte Asymptote an. Die Anfahrkurven dagegen ändern ihre Lage sehr stark mit dem Breitenverhältnis.

Wenn man daher Massnahmen treffen will, um aus dem instabilen Bereich in den stabilen zu gelangen, ist es entscheidend, ob der Betriebspunkt über dem flachen oder steilen Gebiet der Grenzkurven liegt. Im Falle eines leicht belasteten Lagers wirkt sich die übliche Stabilisierungsmassnahme, bei der man durch Vergrössern von  $\Lambda\sqrt{\mu^*}$  oder Verkleinern von  $\beta$  die Anfahrkurve etwas nach rechts verschiebt, kaum aus. Hier muss man  $\mu^*$  vergrössern, d.h. das Lagerspiel  $\Delta R$  verkleinern.

Bei einem stärker belasteten Lager wirkt ein Vergrössern von  $\Lambda\sqrt{\mu^*}$  oder ein Verkleinern von  $\beta$  sehr stabilisierend, da man hier wegen des steilen Verlaufs der Grenzkurve diese leicht überschreiten kann, indem man die Schmiermittelzähigkeit  $\eta$  verkleinert oder die Lagerbreite  $B$  oder das Lagerspiel  $\Delta R$  erhöht.

e) Ergebnisse der nichtlinearen Schwingungsrechnung

Die Einschränkung der kleinen Störbewegung wird fallen gelassen und die nichtlinearen Bewegungsgleichungen werden numerisch nach dem Runge-Kutta-Verfahren Schritt für Schritt über der Zeit integriert. Das komplizierte Berechnungsverfahren lässt die Berechnung der Bahnkurven des Zapfenmittelpunktes und des Rotors zu. Sie werden für eine Reihe von  $\mu^*$ - und  $\Lambda$ -Kombinationen bestimmt unter Konstanthaltung des Breitenverhältnisses  $\beta = 0,5$ . Aus den Bahnkurven lässt sich auch die Frequenz der Schwingung bestimmen.

Ein Gleichgewicht, das nach linearer Rechnung instabil ist, ist dies auch nach nichtlinearer Rechnung. Unabhängig von der Grösse der Anfangsstörung entsteht dann eine angefachte Schwingung. Bei hinreichend

kleiner Störung ist ein nach linearer Rechnung stabiles Gleichgewicht auch nach nichtlinearer Rechnung stabil. Hingegen verschwindet bei einer nicht hinreichend kleinen Störung und zugleich bei höheren Drehzahlen die Wellenschwingung möglicherweise nicht mehr, auch wenn das Gleichgewicht nach linearer Rechnung stabil ist.

Bei einer angefachten Schwingung werden die Bahnkurven des Zapfen- und Rotormittelpunktes immer kreisförmiger. Dies beruht darauf, dass das Schwingungssystem an sich um seine Achse drehsymmetrisch ist. Lediglich die Rotorschwere bringt eine Asymmetrie mit sich. Mit fortschreitender Anfachung nehmen jedoch die am Rotor wirkenden Fliehkräfte und die Wellenrückstellkraft immer mehr zu, und das Rotorgewicht verliert an Einfluss.

Man findet zunächst für die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  der Schwingung

$$\Omega \leq \omega_k \quad (43)$$

und ferner; je grösser  $\mu^*$  ist, desto kleiner wird der Einfluss der nachgiebigen Zapfen-Lagerung durch den Schmierfilm, so dass gilt

$$\Omega \rightarrow \omega_k \quad (44)$$

für grosse Werte von  $\mu^*$ .

Solange die Amplituden klein sind, bleibt die nicht-linear berechnete Frequenz konstant und ist gleich der linear aus der Frequenzgleichung ermittelten Frequenz. Hat die Amplitude so zugenommen, dass

der Zapfenmittelpunkt den Schalenmittelpunkt umkreist, dann beginnt die Frequenz und die Amplitude merklich zu steigen. Es gilt bei angefachter Schwingung mit  $t \rightarrow \infty$  (Abb. 40)

$$\Omega \approx 0,5 \omega \quad \text{bei} \quad \omega \leq 2 \cdot \omega_k \quad (45)$$

$$\Omega \approx \omega_k \quad \text{bei} \quad \omega \leq 2 \cdot \omega_k \quad (46)$$

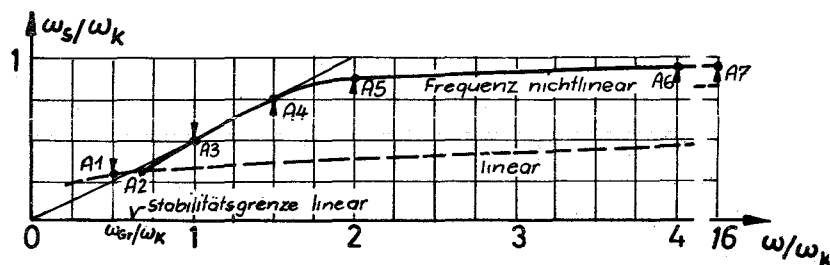


Abb. 40: Nichtlinear berechnete Frequenz der Wellenschwingung für einen kleinen  $\mu^*$ -Wert.  
 $\mu^* = 1/16, \Lambda = 1, \beta = 1/2$

Diese Ergebnisse stimmen mit denen der experimentellen Arbeiten überein. Es handelt sich wieder im ersten Fall um den "Halbfrequenzwirbel" und im zweiten um den "Resonanzwirbel". Je grösser  $\mu^*$  ist, desto schmaler wird der Drehzahlbereich für den Halbfrequenzwirbel, da mit steigendem  $\mu^*$  die Grenzkurve weiter nach oben wandert. Bei genügend grossem  $\mu^*$  kann daher nur der Resonanzwirbel entstehen.

Ist das Gleichgewicht instabil, so nähert sich die Zapfenamplitude im allgemeinen dem radialen Lagerpiel. Die Rotoramplitude  $\ell$  erreicht dabei einen endlichen Wert oder wächst unaufhörlich an, je nachdem, ob die Drehfrequenz  $\omega$  unter oder über  $2 \cdot \omega_k$  liegt.

Es gilt

$$\frac{\ell}{\Delta R} \approx \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_k}\right)^2} \quad \text{bei} \quad \omega \leq 2 \cdot \omega_k \quad (47)$$

$$\frac{l}{\Delta R} \longrightarrow \infty \quad \text{bei} \quad \omega \geq 2 \cdot \omega_k \quad (48)$$

Bei angefachter Schwingung stellt gerade die Druckkraft des Schmiermittels die treibende Kraft und nicht die dämpfende dar. Soll die Rotoramplitude nicht unbegrenzt anwachsen, bis es zum Schaden kommt, dann muss eine äussere Dämpfung am Rotor angreifen. Diese wird definiert mit

$$\chi \equiv \frac{K \cdot \Delta R}{m} = \psi \cdot \frac{K \cdot (R \cdot \omega_k)^2}{R \cdot c} \quad (49)$$

Die dimensionslose Dämpfungszahl ist in der Regel sehr klein. Für verschiedene Dämpfungsgrössen  $\chi$  ist in Abb. 41 der Verlauf der Frequenz, der Zapfen- und der Rotoramplitude dargestellt. Die Zapfenamplitude  $\epsilon$  strebt bei abnehmenden  $\chi$  gegen 1. Die Rotoramplitude nimmt mit abnehmendem  $\chi$  zu und strebt bei  $\chi = 0$  im Drehzahlbereich über  $2 \cdot \omega_k$  gegen  $\infty$ , bei  $\omega < 2 \cdot \omega_k$  bleibt sie endlich und genügt der Beziehung (47).

Abb. 42 zeigt den Einfluss des Parameters  $\Lambda / \sqrt{\mu^*}$  auf den Verlauf der Frequenz und der Amplituden.  $\chi$  ist dabei konstant gehalten. Die Rotoramplitude  $l / \Delta R$  hat bei einer bestimmten Drehzahl ein Maximum. Vergrössert man  $\Lambda / \sqrt{\mu^*}$ , so verschiebt sich der Maximalpunkt immer weiter nach rechts, bis er im praktischen Drehzahlbereich nicht mehr auftritt. Die Rotoramplitude nimmt dann mit der Drehzahl zu, was mit den Beobachtungen von Newkirk/Taylor [2] und Newkirk/Lewis [7] übereinstimmt. Ist dagegen  $\Lambda / \sqrt{\mu^*}$  hinreichend klein, so nimmt die Rotoramplitude nach Überschreiten eines Maximums wieder ab. Diese Tendenz wurde von Pinkus [4, 21] und Hori [15] beobachtet.

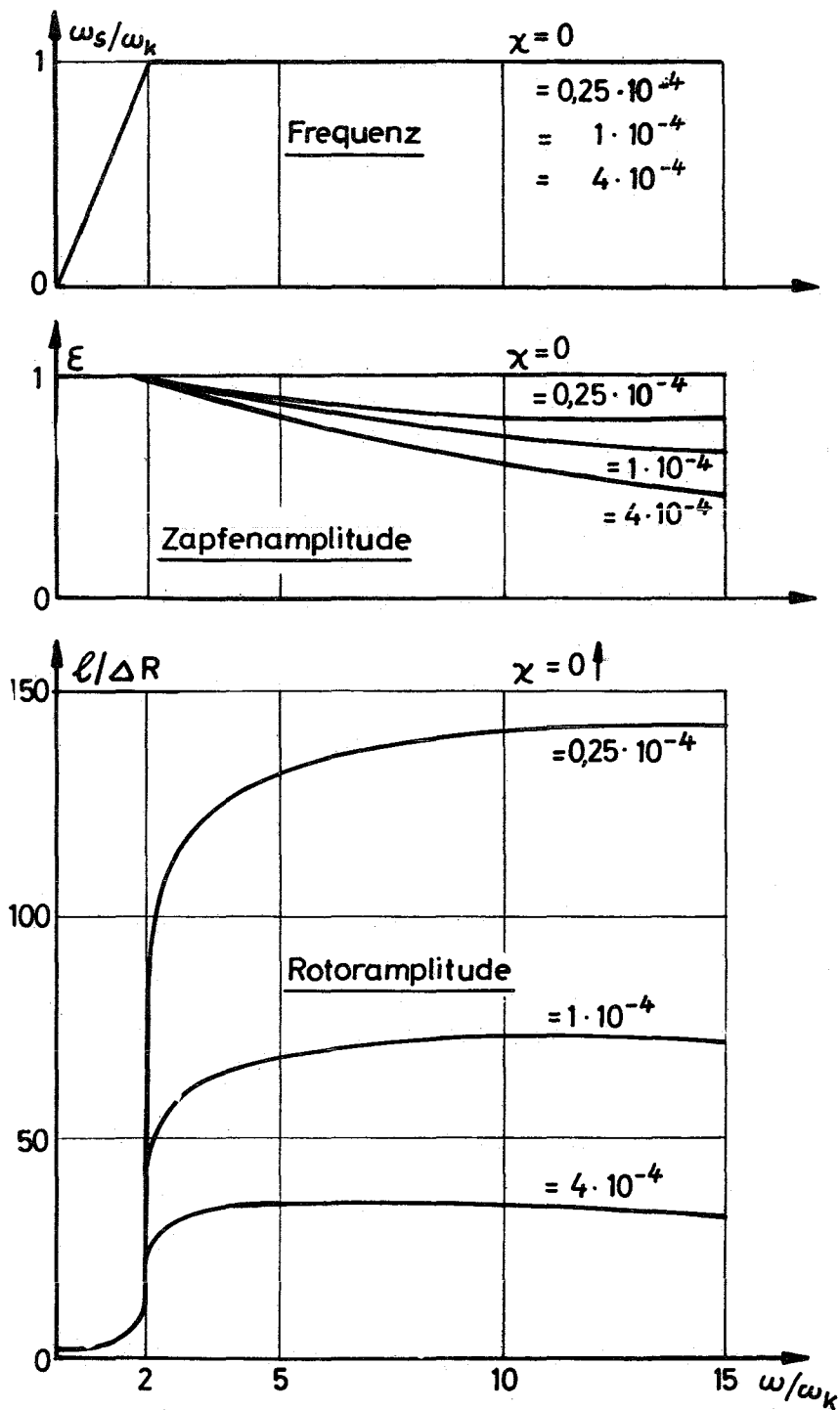


Abb. 41: Frequenz und Amplituden der kreisförmigen Wellenschwingung für verschiedene Dämpfungswerte  $\chi$ ;  $\Lambda/\sqrt{\mu^*} = 1/10$ ;  $\beta = 1/2$

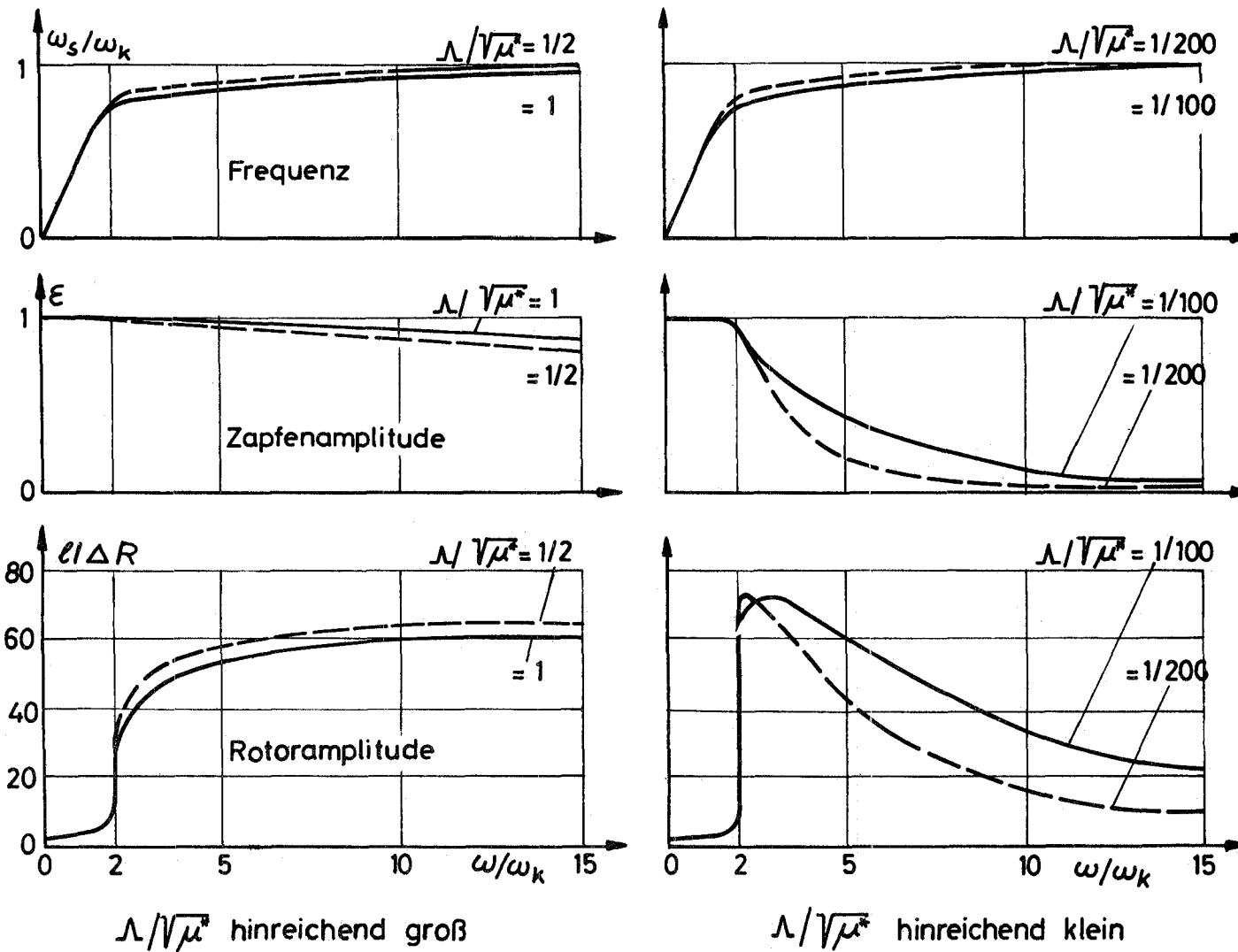


Abb. 42: Frequenz und Amplituden der kreisförmigen Wellenschwingung für verschiedene  $\Lambda/\sqrt{\mu^*} = 10^{-4}$ ;  $\beta = 1/2$ . Der Abstand zwischen den Frequenzkurven ist deuthlichkeitshalber übertrieben dargestellt.



Der Grund für das äusserlich unterschiedliche Schwingungsverhalten in den oben genannten beiden Fällen lässt sich also auf die Verschiedenheit der Parametergrösse  $\Lambda/\sqrt{\mu^*}$  zurückführen.

#### 4. Lagerbauarten mit erhöhter Stabilität

Schon Newkirk und Taylor [2] hatten erkannt, dass alle Faktoren, welche den Überschuss an Tragkraft eines Lagers abbauen, den Stabilitätsbereich erhöhen. So gibt es eine ganze Anzahl von Bauarten, die das zylindrische Lager mit einer Ölbohrung und einer Längsnut (Abb. 43) abwandeln. Eine der ältesten Methoden ist, mehrere Längsnuten anzubringen, so dass zylindrische Gleitlager mit 2, 3, 4 (Abb. 44) oder 6 Längsnuten entstehen, wodurch die Länge der Gleitfläche in Bewegungsrichtung verkürzt und der Druckberg verkleinert wird. Beim zylindrischen Lager mit Ringnut (Abb. 45) wird die zylindrische Gleitfläche durch die Nut in zwei sehr schmale zylindrische Lager aufgespalten, wodurch ebenfalls die Tragfähigkeit abgebaut wird. Newkirk und Grobel [22] entwickelten Lager, die nur in der unteren Lagerschale eine Umfangsnut und in der Oberschale Aussparungen hatten (Abb. 46). Damit erreichten sie Stabilität bis zu Drehzahlen von 30 000 U/min, was bei einem Lagerdurchmesser von 2 inch einer Umfangsgeschwindigkeit von 80 m/s entspricht, bei einem relativen Lagerspiel von 2,5 % und sehr geringer Lagerbelastung. Ein im Turbinenbau häufig angewandtes Lager ist das Taschenlager, wie es von Glienicke [23] untersucht wurde. Es ist als eine weitere Abwandlung des zylindrischen Lagers zu betrachten, da als aktive Teile im wesentlichen die zylindrischen Teilflächen jeweils in der Mitte der oberen und unteren Lagerschale wirken (Abb. 47). Die von beiden Nuten in der horizontalen

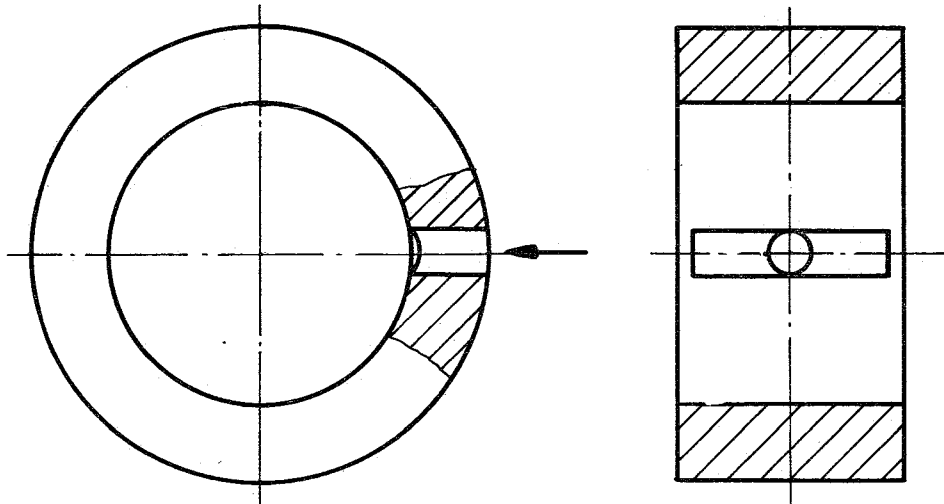


Abb. 43: Übliches zylindrisches Gleitlager

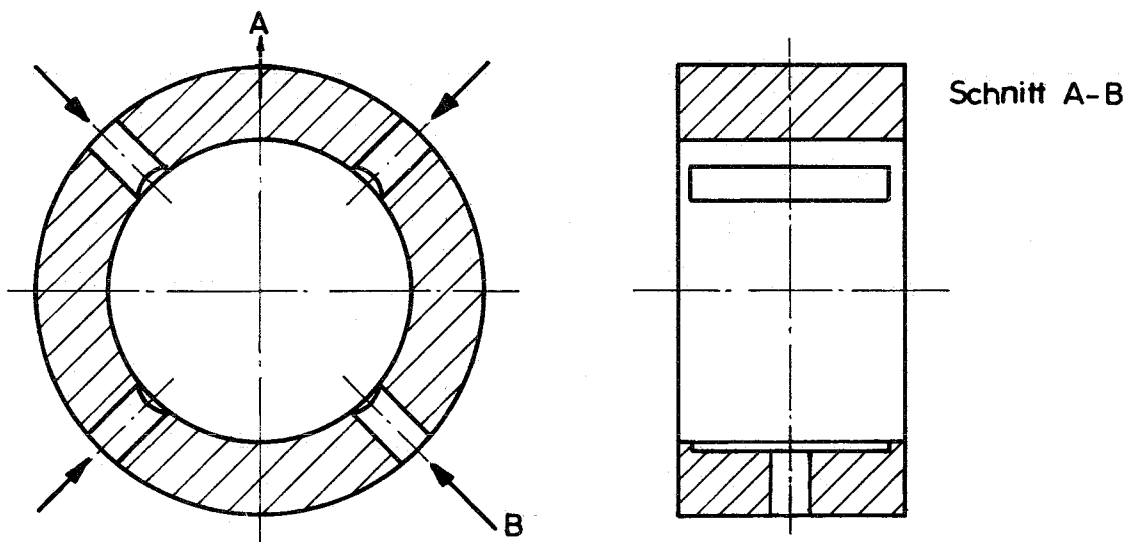


Abb. 44: Zylindrische Gleitlager mit 4 Längsnuten

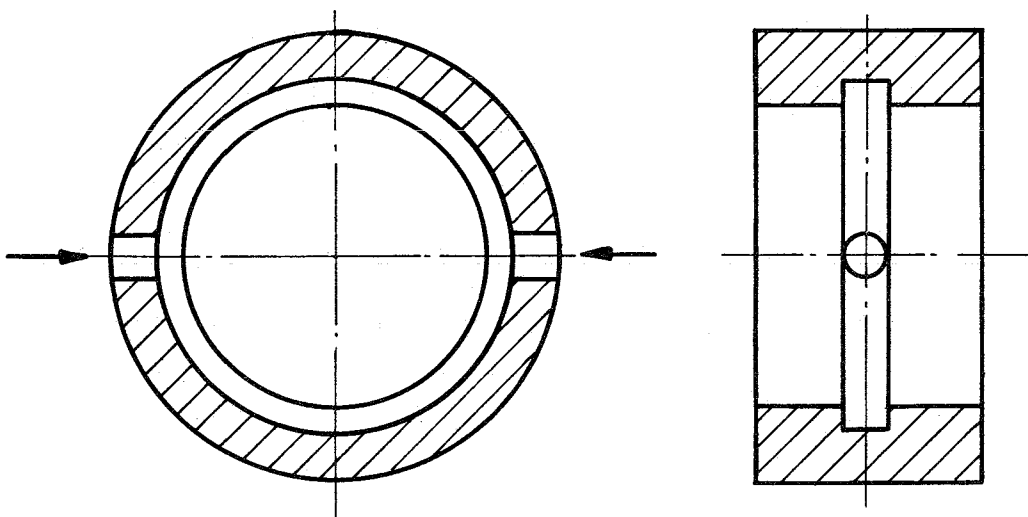


Abb. 45: Zylindrisches Lager mit Ringnut

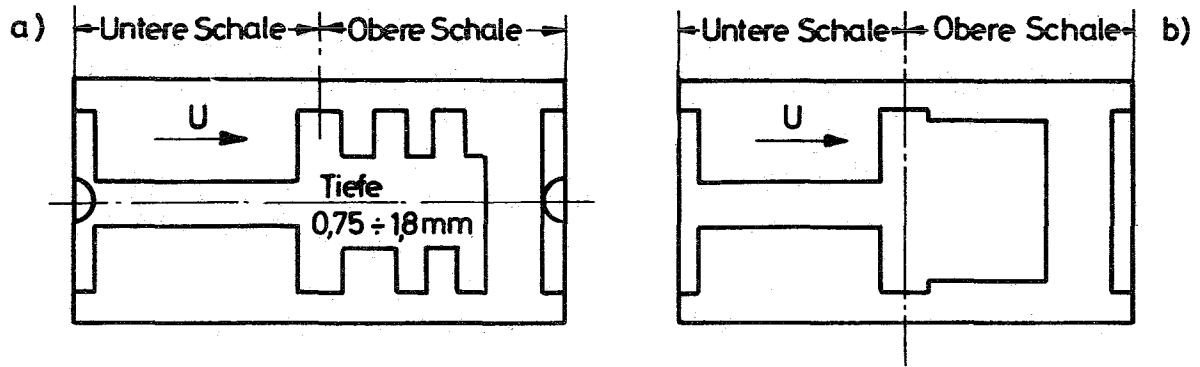


Abb. 46 a u. b: Lager mit Aussparungen

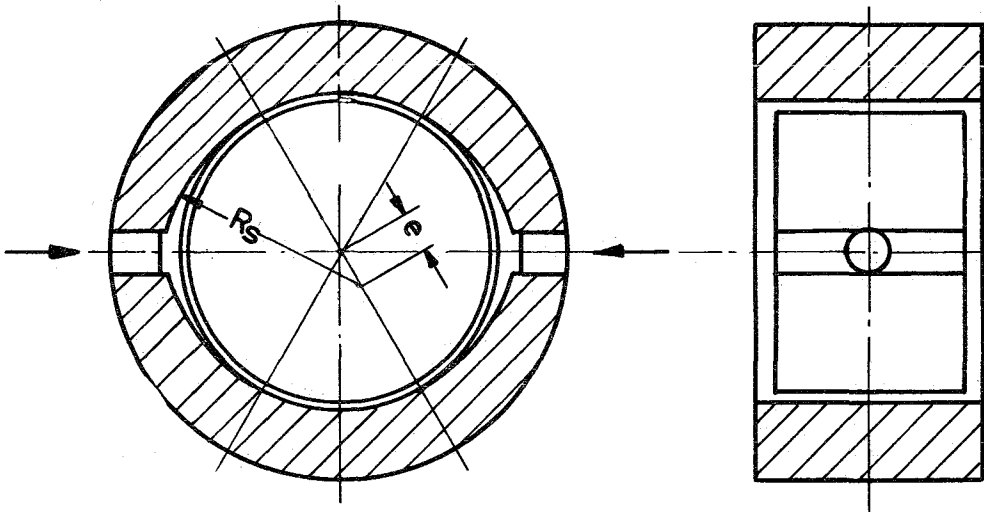


Abb. 47: Taschenlager

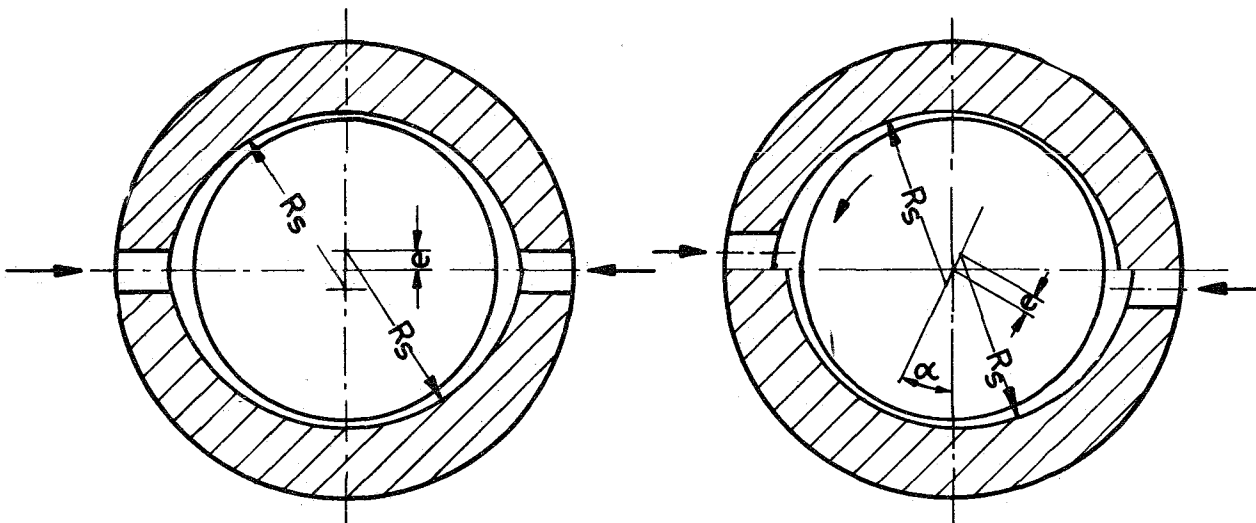


Abb. 48:  
Elliptisches Lager

Abb. 49:  
Versetztes elliptisches Lager

Teilung jeweils  $60^\circ$  nach beiden Seiten sich erstreckenden Taschen sind relativ zum Lagerspiel sehr tief, so dass sie die selbe Funktion wie die Aussparungen der beiden zuvor beschriebenen Lager haben.

Wie bei der Theorie der selbsterregten Schwingungen gezeigt wurde, liegt man bei Exzentrizitäten über  $\epsilon \approx 0,83$  immer im stabilen Gebiet. Bei der im Folgenden beschriebenen Gruppe von Lagern wird die hohe Exzentrizität des Zapfens dadurch erzielt, dass man die Lagerfläche in zwei oder mehr Flächen aufteilt, die nicht mehr auf einem gemeinsamen Kreiszyylinder liegen, sondern gegenüber diesem einbeschriebenen Kreiszyylinder eine Steigung aufweisen, weshalb man diese Arten von Lagern gemeinsam als Mehrkeilflächenlager bezeichnet (Abb. 47 bis 60). Bei den meisten Lagertypen dieser Art bestehen die einzelnen Lagerflächen ebenfalls aus Teilen von Kreiszyindern, die aber einen grösseren Radius als der einbeschriebene Kreiszyylinder haben. Man kann also ein solches Mehrkeilflächenlager prinzipiell als mehrere Einzellager auffassen, die gegenüber dem gemeinsamen Lagerzapfen bei allen Betriebszuständen grosse Exzentrizität aufweisen. Während im normalen zylindrischen Lager bei zentrischer Wellenlage kein Druck entsteht, sind beim Mehrkeilflächenlager schon so viel Druckberge wie Lagerflächen vorhanden, die dem Zapfen von mehreren Seiten eine Vorspannung geben (Abb. 55). Bei Exzentrizitäten über 0,8 ergibt eine weitere Verschiebung des Zapfens eine relativ grosse Änderung der resultierenden Kräfte pro Lagerfläche, da die Belastungskennlinien in diesem Bereich sehr steil ansteigen, wie Abb. 50 zeigt.

Die einfachste Art von Mehrkeilflächenlagern, auch in der Herstellung, ist das elliptische Lager, auch Zitronenlager oder Lager mit Zitronenspiel genannt, wie es von Ott [24], Pinkus [25] und Glienicke [23] untersucht wurde.

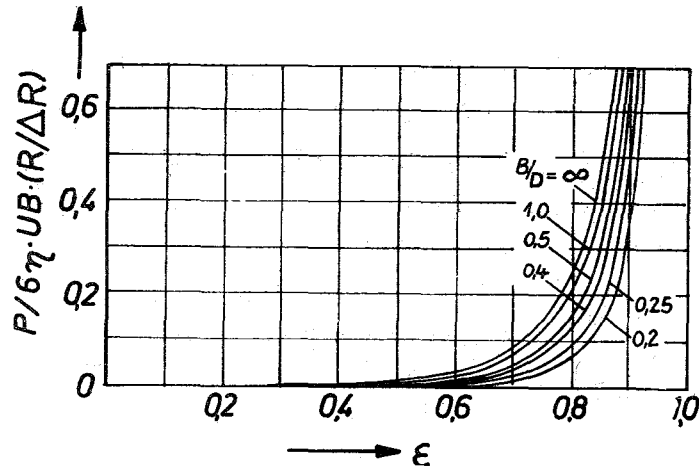


Abb. 50: Berechnungskurven für die Tragkraft;  
 $\varphi_1 = 150^\circ$ ;  $\epsilon = 0$  bis 1

Die Herstellung erfolgt, indem bei einem horizontal geteilten Lager vor dem Ausdrehen eine Blechbeilage mit bestimmter Dicke zwischen die beiden Lagerhälften gelegt wird, das beim Zusammenbau weggelassen wird (Abb. 48). Eine Variante davon, bei der die Oberschale in Querrichtung etwas versetzt ist, wurde von Hugh [26] im Hinblick auf ihre Eignung als Lager für flüssige Metalle erprobt (Abb. 49).

Weitere Bauformen von Mehrkeilflächenlagern mit festen Lagerflächen sind die von Dr. Frössel im Max-Planck-Institut für Strömungsforschung in Göttingen entwickelten 3- und 4-Flächenlager (Abb. 51 und 55), die von der Gleitlagergesellschaft m.b.H.-Göttingen hergestellt und vertrieben werden ([27] und [28]). Diese Lager sind, da sie achsensymmetrisch sind, für beide Drehrichtungen geeignet. Während bei diesen Lagern das Profil einen einzigen Kreisbogen pro Lagerfläche aufweist, setzt sich dieses bei den von Gersdorfer [29] beschriebenen und von den Enzesfeld-Caro-Metallwerken in Wien hergestellten Lagern aus zwei oder drei Kreisbögen pro Fläche zusammen (Abb. 52 und 56). Die durch  $R_F$  gekennzeichneten sog. Rastflächen liegen auf einer gemeinsamen Zylinderfläche. Die selben Konstruktionsprinzipien

sind bei dem asymmetrischen Dreikeillager von Brown u. Boveri angewandt. Ein solches Lager wurde von Ott [32], [33], experimentell und auch theoretisch untersucht (Abb. 54).

Eine sehr einfach herstellbare Variante des Mehrkeilflächenlagers, das sehr kleine Spiele zulässt, ist das von Steller [30] erfundene Verbundlager (Abb. 53). Es besteht aus 3 nebeneinander angeordneten zylindrischen 360°-Lagern, deren Achsen exzentrisch verschoben sind. Die Exzentrizitäten sind gegeneinander um 120° versetzt. Die englische Firma Cammel Laird a. Co Ltd. in Birkenhead hat diese Lagerart vor ein paar Jahren in ihr Fertigungsprogramm aufgenommen [31].

Das Kippsegment-Radiallager (Abb. 57), das nach dem selben Prinzip wie die Michell- oder Kingsbury-Axiallager arbeitet, wird in USA viel häufiger angewandt als in Deutschland. Es hat meist 6 drehbar unterstützte Lagerschuhe, die sich von selbst unter der Belastung so einstellen, dass sehr flache Schmierkeile hoher Tragkraft entstehen. Sollen sie für beide Drehrichtungen geeignet sein, dann werden die Kippschuhe in der Mitte unterstützt. In Bezug auf Schwingungen sind es wohl die stabilsten Lager.

Ebenfalls zu den Mehrkeilflächen-Lagern kann man noch zwei von Pinkus [21] untersuchte Lagerformen rechnen. Bei der ersten (Abb. 58) sitzt in der oberen Lagerhälfte eine lose eingelegte Halbschale, die von aussen durch Öldruck gegen den Zapfen gepresst wird. Das Drucköl kann dabei von einer fremden Druckquelle kommen oder an eine Stelle hohen Druckes aus dem Schmierspalt entnommen werden. Bei der zweiten Lagerform ist der grösste Teil der oberen Lagerschale federnd gestaltet und wird ebenfalls durch Öldruck von aussen angepresst (Abb. 59).

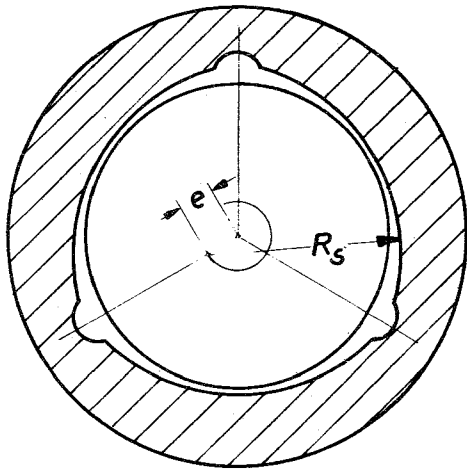


Abb. 51

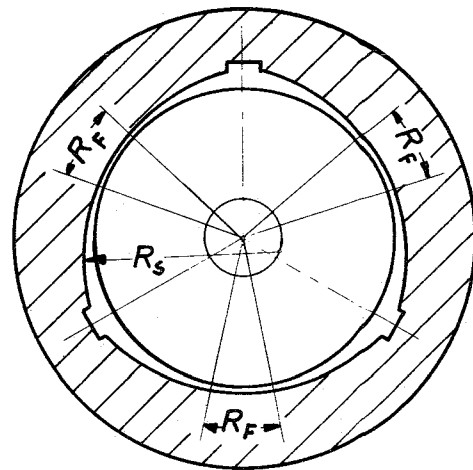


Abb. 52

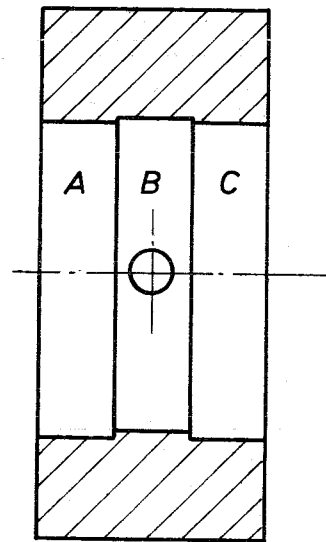
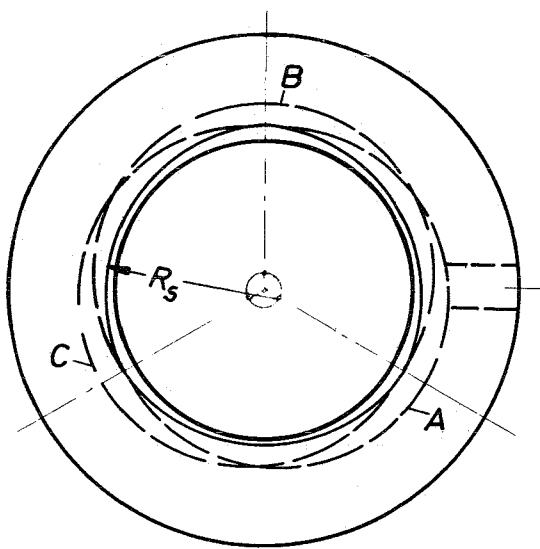


Abb. 53: Verbundlager

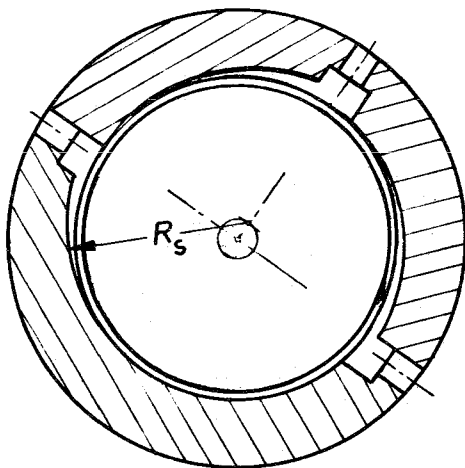


Abb. 54

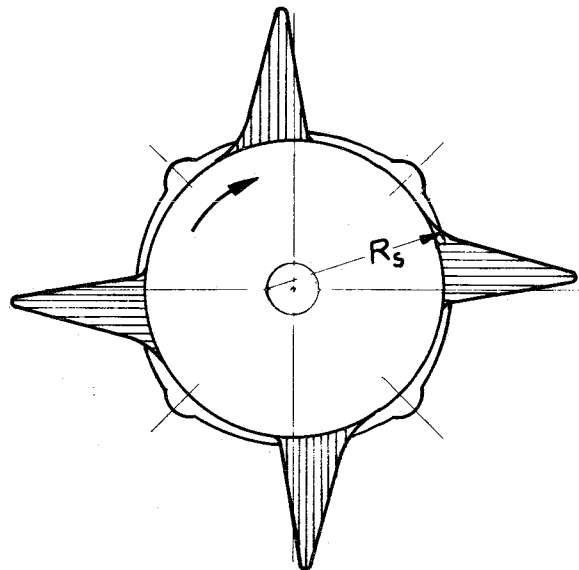


Abb. 55

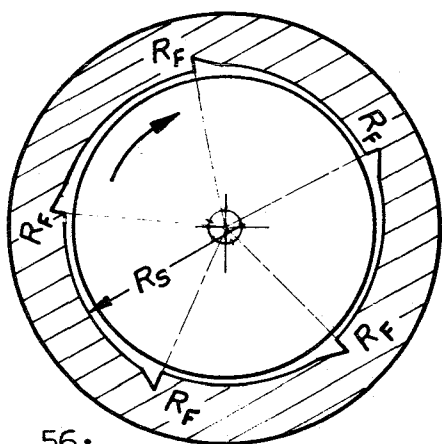


Abb. 56:  
radialsymmetr. 5-Flächenlager

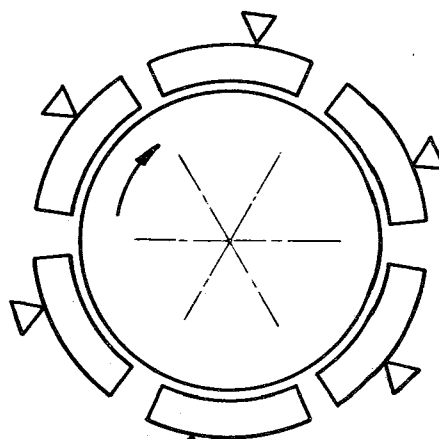


Abb. 57:  $\triangle$   
Kippsegment-Lager

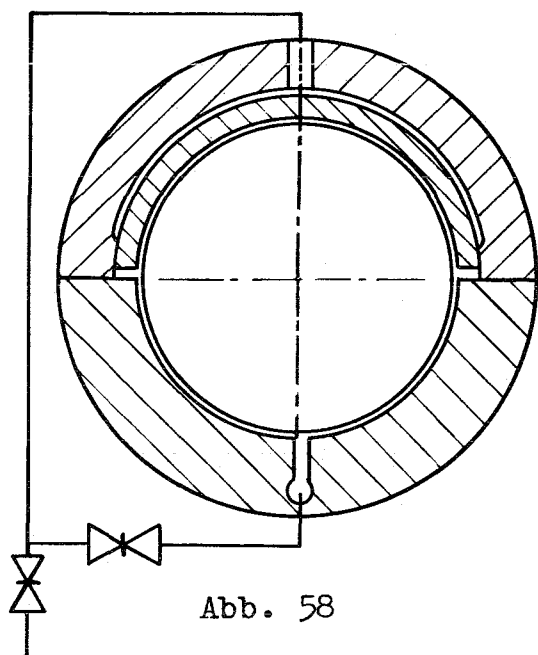


Abb. 58

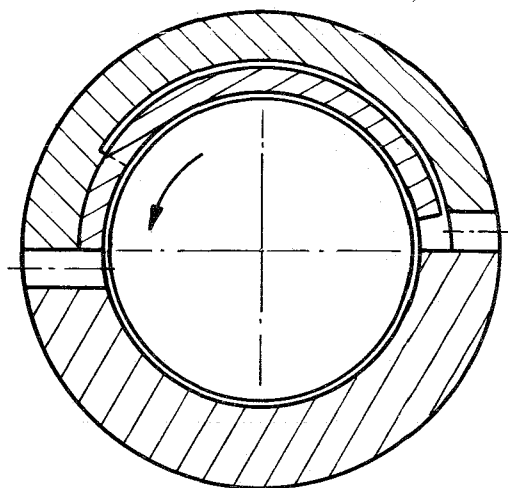


Abb. 59

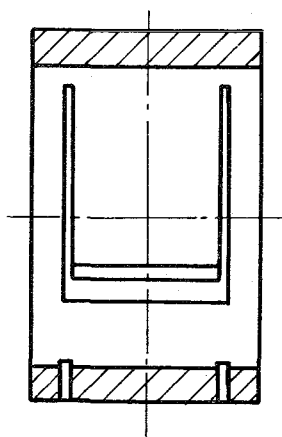
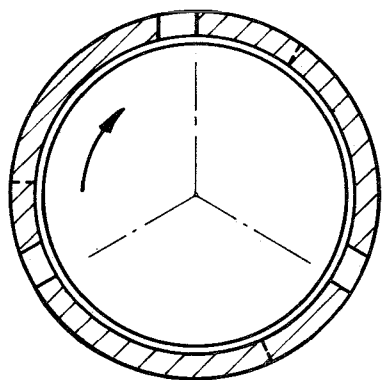


Abb. 60



Lässt man den äusseren Öldruck weg und gestaltet auch die untere Schale flexibel, dann hat man die von Tondl [8] patentierte Bauart mit federnden Elementen gewonnen (Abb. 60).

Ebenfalls von Tondl wurden schwimmende Büchsen untersucht, die im Turboladerbau häufig verwendet werden (Abb. 31). Sie haben sehr gute Stabilitätseigenschaften. Der Nachteil ist, dass man ein grösseres Gesamtspiel benötigt. Auch muss man dafür sorgen, dass die Büchsen auch wirklich abheben und mit ungefähr halber Wellendrehzahl umlaufen können. Erst dann hat man im Prinzip zwei zylindrische Gleitlager, die hintereinander geschaltet sind und bei denen die Umfangsgeschwindigkeit pro Lager auf die Hälfte reduziert ist. In der Arbeit von Tondl findet man dann auch noch die Kombination der beiden letztgenannten Lagerbauarten in Form von schwimmenden Büchsen mit federnden Elementen.

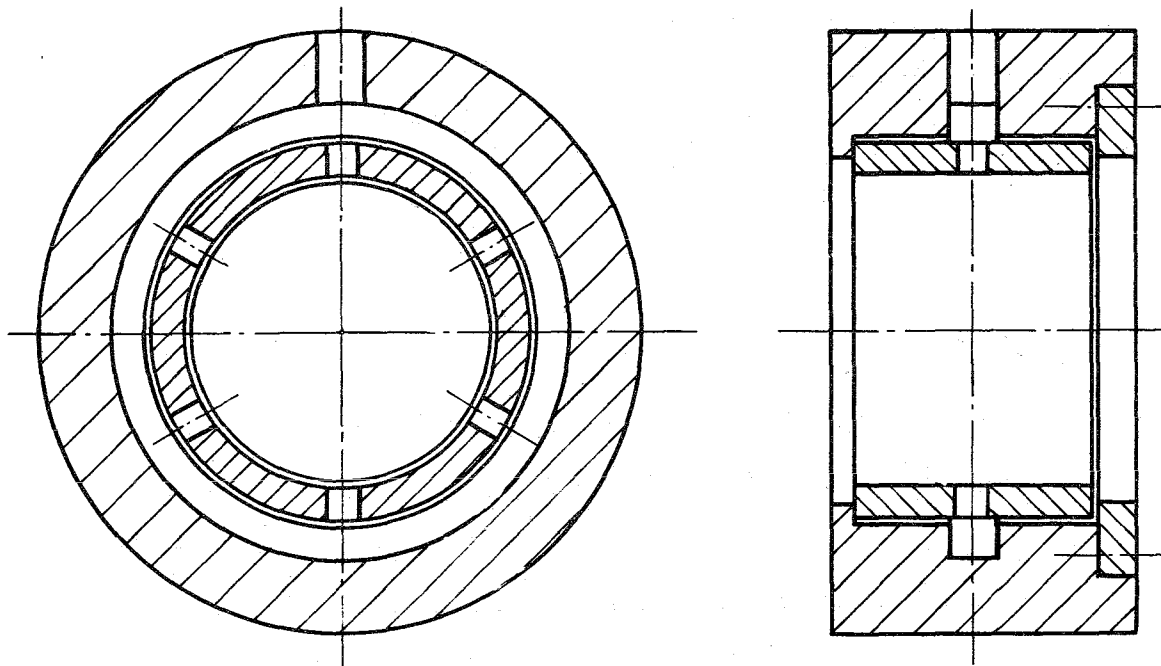


Abb. 61: Lager mit schwimmender Büchse

Dieser Überblick über die bekannt gewordenen Bauformen von Lagern, die zur Unterdrückung von selbstregten Schwingungen herangezogen wurden, zeigt eine grosse Vielfältigkeit. Da die Lagerformen unter sehr unterschiedlichen Bedingungen untersucht wurden, kann die im Folgenden aufgestellte Liste zwar keine streng gültige Rangliste sein, aber doch immerhin einen Anhaltspunkt bei der Auswahl von Lagern für gering belastete Wellen mit relativ hohen Drehzahlen geben. Die Bauformen werden in der Reihenfolge steigender Stabilität aufgeführt:

Zylindrisches 360°-Lager  
Zylindrisches Lager mit mehreren Längsnuten  
Zylindrisches Lager mit Umfangsnut  
Taschenlager, Lager mit Aussparungen  
Lager mit Zitronenspiel  
3-Keilflächenlager  
4-Keilflächenlager  
Lager mit federnden Elementen  
Verbundlager  
Lager mit schwimmender Büchse  
Lager mit schwimmender Büchse mit federnden Elementen  
Kippsegment-Lager

## 5. Literatur

- [1] Biezeno/Grammel: "Technische Dynamik, II. Bd."  
2. Auflage, Springer-Verlag 1953
- [2] Newkirk, B.L. u. Taylor, H.D.: "Shaft Whipping Due to Oil Action in Journal Bearings",  
General Electric Review, vol. 28, No. 8, S. 559/568

- [3] Hagg, A.C.: "The Influence of Oil-Film Journal Bearings on the Stability of Rotating Machines" Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, vol. 68 (1946), S.A-211/220
  
- [4] Pinkus, O.: "Note on Oil Whip" Trans. ASME, Journ. of Applied Mechanics, vol. 75 (1953), S. 450/451
  
- [5] Hagg, A.C. u. Warner, P.C.: "Oil Whip of Flexible Rotors" Trans. ASME, vol. 75 (1953), S. 1339/44
  
- [6] Shawki, G.S.A.: "Whirling of a Journal Bearing - Experiments Under No-Load Conditions" Engineering, vol. 179 (1955), S. 243/246
  
- [7] Newkirk, B.L. u. Lewis, J.F.: "Oil-Film Whirl - An Investigation of Disturbances Due to Oil Films in Journal Bearings" Trans. ASME, vol. 78 (1956), S. 21/27
  
- [8] Tondl, A.: "Experimental Investigation of Self-Excited Vibrations of Rotors Due to the Action of Lubricating Oil Film in Journal Bearings" The National Research Institute of Heat Engineering, Monographs and Memoranda No. 1, Prague 1961
  
- [9] Harrison, W.J.: "The Hydrodynamical Theory of the Lubrication of a Cylindrical Bearing Under Variable Load, and of a Pivot Bearing" Trans. Cambridge Philosophical Soc., vol. 22 (1912-1923) 1919, S. 373/388
  
- [10] Robertson, D.: "Whirling of a Journal in a Sleeve Bearing" Philosophical Magazine, vol. 15, 1933, S.113/130

- [11] Stodola, A.: "Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Ölpolsters im Lager"  
Schweizer Bauzeitung 85 (1925), S. 265/66  
Abdruck: VDI-Forschungsheft 287, VDI-Verlag 1926, S. 45/48
- [12] Hummel, Ch.: "Kritische Drehzahlen als Folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im Lager"  
VDI-Forschungsheft 287, VDI-Verlag 1926
- [13] Poritzky H.: "Contribution to the Theory of Oil Whip"  
Trans. ASME, vol. 75 (1953), S. 1153/61
- [14] Cameron, A.: "Oil Whirl in Bearings - Theoretical Deduction of a Further Criterion"  
Engineering, vol. 179 (1955), Nr. 4648, S. 237/239
- [15] Hori, Y.: "A Theory of Oil Whip"  
Trans. ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics, vol. 81 (1959), S. 189/198
- [16] Traupel, W.: "Thermische Turbomaschinen, Band 2"  
Springer-Verlag 1960, S. 393/400.
- [17] Someya, T.: "Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden, unwuchtfreien Welle"  
Diss. TH Karlsruhe 1962,  
Auszug: Ingenieur-Archiv XXXIII (1963), S. 85/108
- [18] Ott, H.H.: "Zylindrische Gleitlager bei instationärer Belastung"  
Diss. ETH Zürich, 1948
- [19] Hahn, H.W.: "Das zylindrische Gleitlager endlicher Breite unter zeitlich veränderlicher Belastung"  
Diss. T.H. Karlsruhe, 1957

- [20] Reynolds, O.: "On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. B. Towers Experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil"  
Phil. Trans Roy. Soc., London, vol. 177 (1886), S. 157/234  
Deutsch: Ostwald's Klassiker 218
- [21] Pinkus, O.: "Experimental Investigation of Resonant Whip"  
Trans. ASME, vol. 78 (1956), S. 975/983
- [22] Newkirk, B.L. u. Grobel, L.P.: "Oil-Film Whirl - A Non-Whirling Bearing"  
Trans. ASME, vol. 56 (1934), S. 607/615
- [23] Glienicke, J.: "Feder- und Dämpfungskonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors".  
Diss. TH Karlsruhe 1966
- [24] Ott, H.H.: "Reibungszahl und Wellenlage in Turbinenlagern mit vermindertem Vertikalspiel"  
Brown-Boveri-Mitteilung, Bd. 41 (1954), S. 256/264
- [25] Pinkus, O.: "Power Loss in Elliptical and 3 - Lobe Bearings"  
Trans. ASME, vol. 78 (1956) S. 899/904
- [26] Hugh, J.D.: "Low Viscosity Bearing Stability Investigation" Final Report, Advanced Technology Laboratory, Space Power and Propulsion Section, Missile and Space Division, General Electric, prepared for NASA under Contract NAS 3-2111, N 64 - 19224 Code-1 (NASA-CR-54039) April 1964

- [27] Frössel, W.: "Rein hydrodynamisch geschmierte Gleitlager (Mehrgleitflächenlager)"  
Stahl und Eisen 71 (1951), S. 125 - 128
- [28] Frössel, W.: "Berechnung von Gleitlagern mit radialen Gleitflächen"  
Konstruktion, 14. Jg. (1962), S. 169/180
- [29] Gersdorfer O.: "Tragkraft und Anwendungsbereich von Mehrflächenlagern"  
"Konstruktion 14 (1962), S. 181/188
- [30] Steller, A.: "Beitrag zur Dynamik des Zapfens im Gleitlager"  
Maschinenbau und Wärmewirtschaft, Wien, Bd. 5 (1950), S. 169/176
- [31] - "Camella Restricted Clearance Bearings"  
Engineering, vol. 196, Sept. 1963, S. 355
- [32] Ott, H.H.: "Experimentelle Untersuchungen an einem Dreikeillager"  
Brown-Boveri-Mitteilung, Bd. 44 (1957), S. 225/234
- [33] Ott, H.H.: "Berechnung von Wellenlage und Reibung im Dreikeil-Traglager"  
Brown-Boveri-Mitteilungen, Bd. 46 (1959), S. 395/406

VI. Berechnung von Mehrkeilflächenlagern

1. Rechnerische und experimentelle Ergebnisse beim Lager mit Zitronenspiel

1.1 Geometrische Zusammenhänge

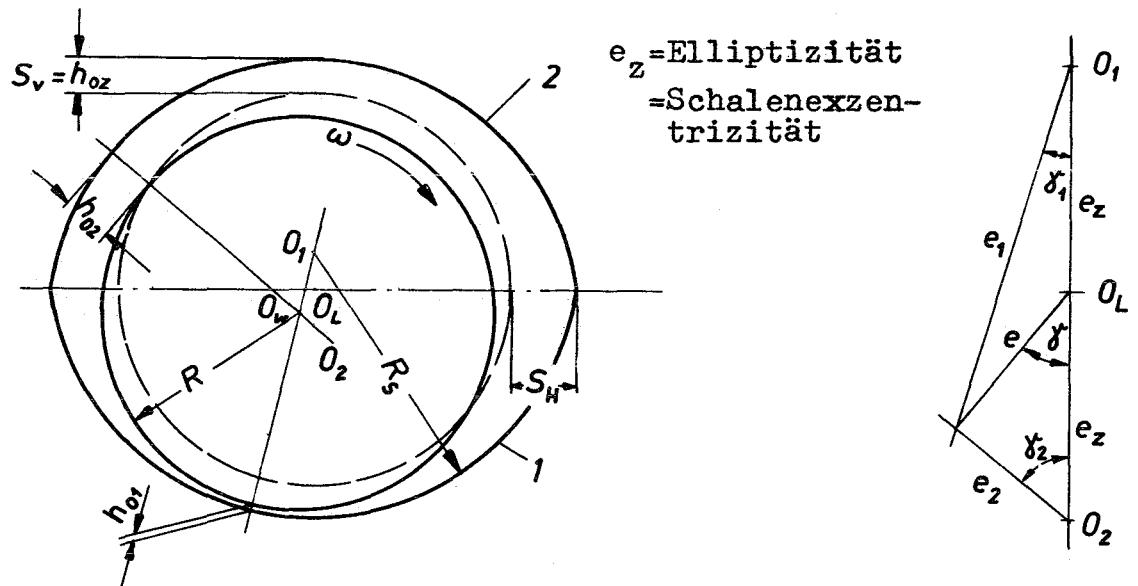


Abb. 62: Geometrie des Zweikeillagers (Zitronenlagers)

Die Größen ohne Index beziehen sich auf den geometrischen Mittelpunkt  $O_L$  des Lagers, Index 1 auf die untere Lagerschale, Index 2 auf die obere und Index z auf die zentrische Wellenlage, wo der Mittelpunkt der Welle  $O_w$  mit  $O_L$  zusammenfällt. Mit  $h$  wird die örtliche Schmierstichtdicke, mit  $e$  werden die Exzentrizitäten, mit  $\epsilon$  die relativen Exzentrizitäten und mit  $\gamma$  die Verlagerungswinkel bezeichnet.

Es gelten folgende geometrische Zusammenhänge:

$$e_1^2 = e^2 + e_z^2 + 2e \cdot e_z \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

$$e_2^2 = e^2 + e_z^2 - 2e \cdot e_z \cdot \cos \gamma \quad (2)$$

$$\Delta R \equiv R_s - R = h_{o1} + e_1 = h_{o2} + e_2 = h_{oz} + e_z \quad (3)$$

Bezieht man die Exzentrizitäten auf  $\Delta R$ , so erhält man die relativen Exzentrizitäten

$$\varepsilon \equiv \frac{e}{\Delta R}, \quad \varepsilon_1 \equiv \frac{e_1}{\Delta R}, \quad \varepsilon_2 \equiv \frac{e_z}{\Delta R} \quad \text{und}$$

$$\text{das Elliptizitätsverhältnis} \quad \varepsilon_z \equiv \frac{e_z}{\Delta R} \quad (4)$$

das eine wichtige Kenngrösse beim Zitronenlager darstellt. Mit diesen Definitionen wird

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_z^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_z \cdot \cos \gamma} \quad (5)$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_z^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_z \cdot \cos \gamma} \quad (6)$$

Für die Winkel folgt aus dem Sinussatz

$$\sin \gamma_1 = \sin \gamma \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \quad (7) \quad \sin \gamma_2 = \sin \gamma \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \quad (8)$$

In einem Teil der Arbeiten wird an Stelle der Elliptizität  $e_z$  das "Horizontalspiel"  $s_H$  zusammen mit dem Vertikalspiel  $s_V$  verwendet und die entsprechenden relativen Spiele  $\psi_H = s_V/R$  und  $\psi_V = s_H/R$  eingeführt. Der Zusammenhang mit den vorher genannten Grössen ist durch folgende Beziehungen gegeben:



$$s_H = R \cdot \psi_H = \sqrt{R_S^2 - e_z^2} - R \approx R_S - R = \Delta R \quad (9)$$

$$s_V = R \cdot \psi_V = h_{oz} = R_S - R - e_z \approx s_H - e_z \quad (10)$$

Interessant ist bei Vergleichen noch die relative Elliptizität

$$\psi_E \equiv \frac{e_z}{R} = \frac{\epsilon_z \cdot \Delta R}{R} \quad (11)$$

und das Spielverhältnis

$$\psi_H / \psi_V = \frac{1}{1 - \epsilon_z} \quad (12)$$

Neuerdings verwendet man insbesondere bei experimentellen Arbeiten das Vertikalspiel  $s_V$  als Bezugsgrösse und definiert

$$\epsilon_L = \frac{e}{s_V} \quad \text{als relative Exzentrizität} \quad (13)$$

Während beim zylindrischen Lager die Zapfenbeweglichkeit nach allen Richtungen hin gleich gross ist und der Zapfenmittelpunkt eine Kreisfläche mit dem Radius  $\Delta R$  bestreichen kann, wird die Bewegung des Zapfenmittelpunktes durch ein Kreisbogenzweieck mit den Radien  $\Delta R$  begrenzt (Abb. 63). Die grösste relative Zapfenbeweglichkeit  $\psi_B$  liegt in horizontaler Richtung und beträgt

$$\psi_B = \sqrt{2 \cdot \psi_H \cdot \psi_V - \psi_V^2} = \frac{1}{R} \sqrt{h_{oz}^2 + 2e_z \cdot h_{oz}} \quad (14)$$

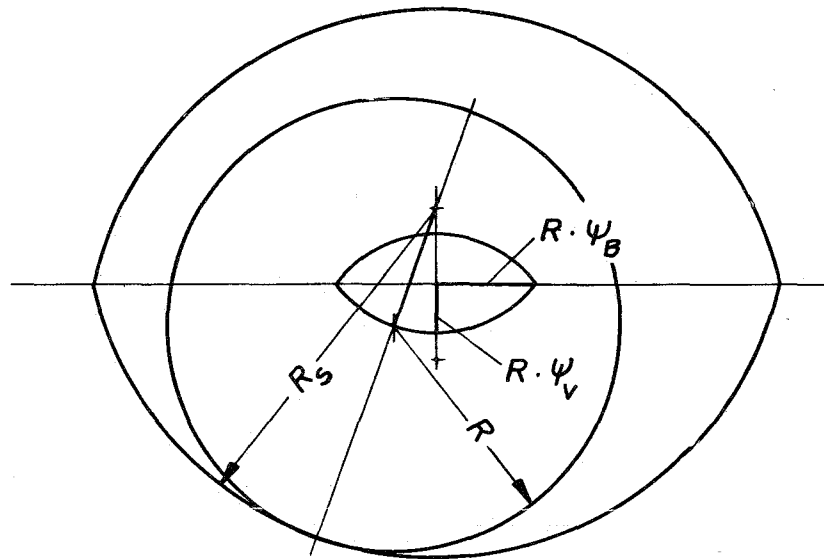


Abb. 63: Zapfenbeweglichkeit beim Zitronenlager

## 1.2 Experimentelle Ergebnisse

### a) Ergebnisse von Rumpf

Rumpf [1] untersuchte ein Lager mit  $D = 220$  mm,  $B = 300$  mm ( $B/D = 1,364$ ),  $\psi_V = 0,88$  ‰ und  $\psi_H = 1,73$  ‰. Das entspricht  $\psi_H/\psi_V = 1,966$ ,  $e_z = 0,093$  mm,  $\psi_E = 0,845$  ‰,  $\epsilon_z = 0,49$  und  $\psi_B = 1,50$  ‰.

Bei grosser Verlagerung, d.h. grosser spezifischer Belastung stimmen die Werte mit denen eines entsprechenden  $360^\circ$ - bzw.  $180^\circ$ -Lagers überein. Bei kleiner Verlagerung streuen die Punkte innerhalb eines schmalen Streifens. Alle Versuchsreihen zeigen eindeutig einen Knick in der Verlagerungslinie (Abb. 64).

In Abb. 65 ist die mit dem relativen Horizontalspiel gebildete  $So_H$  über  $1-\epsilon$  im doppelt logarithmischen Massstab aufgetragen. Für  $\epsilon \geq 0,67$  fallen die Werte aller 3 Versuchslager überein. Unterhalb des Knickpunktes weichen die Werte stärker als bei den zylindrischen Lagern von der Geraden nach unten ab.

Die Reibung (Abb. 66) steigt mit wachsendem  $\eta \cdot \omega / \bar{p}$  beim Lager mit Zitronenspiel wesentlich stärker an als bei den zylindrischen Lagern. Die Reibungskennzahl  $\mu / \psi_H$  liess sich bei grossen Exzentrizitäten unterhalb des Knickpunktes K durch die empirische Formel

$$\frac{\mu}{\psi_H} = [1 + 2\left(\frac{D}{B}\right)^2] \cdot 0,485 \cdot [0,51 + 11,9 (1 - \epsilon)^{1,7}] \quad (15)$$

oberhalb K durch

$$(16) \quad \frac{\mu}{\psi_H} = 0,51 + \frac{3,9}{So_H} \quad So_H = \frac{\bar{p} \cdot \psi_H^2}{\eta \cdot \omega} \quad (17)$$

ausdrücken.

b) Ergebnisse von Glienicke

Glienicke [2] untersuchte ein Lager mit  $R = 60$  mm,  $B/D = 0,5$ ,  $\psi_H = 3,64$  ‰,  $\psi_V = 1,35$  ‰,  $\psi_H / \psi_V = 2,7$  ( $\epsilon_z = 0,63$ ) bei verschiedenen Einbauwinkeln  $\varphi_e$ . Die Verlagerungskurven sind in Abb. 67 dargestellt. Für negative Einbauwinkel ergibt sich die grösste Schmierpaltweite  $H_o = h_o / s_V$ , also die höchste Tragfähigkeit des Lagers (Abb. 68).

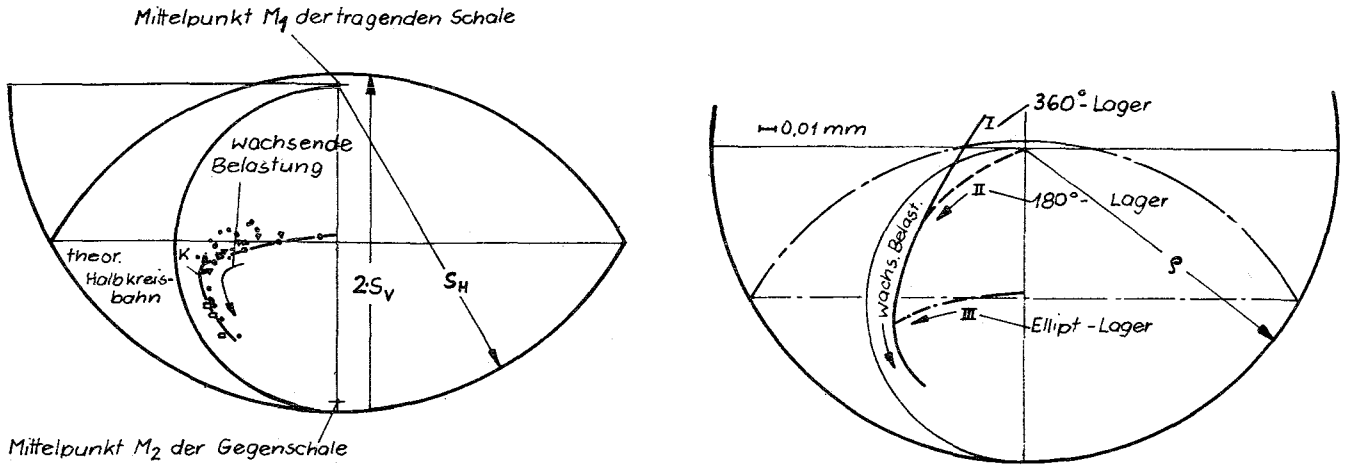


Abb. 64: Verlagerung des Wellenmittelpunktes

360°-Lager:  $D = 220 \text{ mm}$ ,  $B = 300 \text{ mm}$ ,  $\Delta R = 0,36 \text{ mm}$ ,  $\psi = 1,65 \%$   
 180°-Lager: gleiche Abmessungen, unbelastete Schalenhälfte auf 230 mm Breite 4 mm tief ausgespart  
 Zweikeillager:  $D = 220 \text{ mm}$ ,  $B = 300 \text{ mm}$ ,  $\psi_V = 0,88 \%$ ,  
 $\psi_H = 1,73 \%$

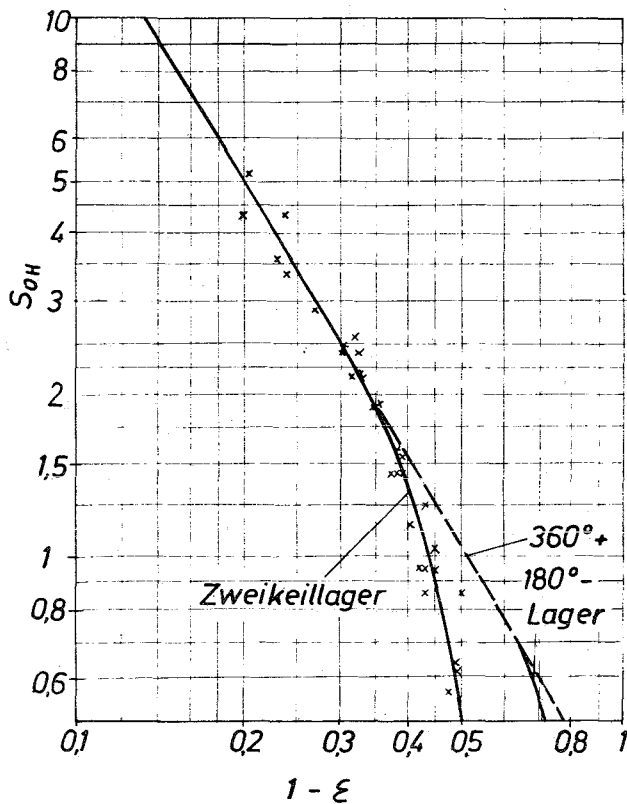


Abb. 65: Tragfähigkeit des Zweikeillagers

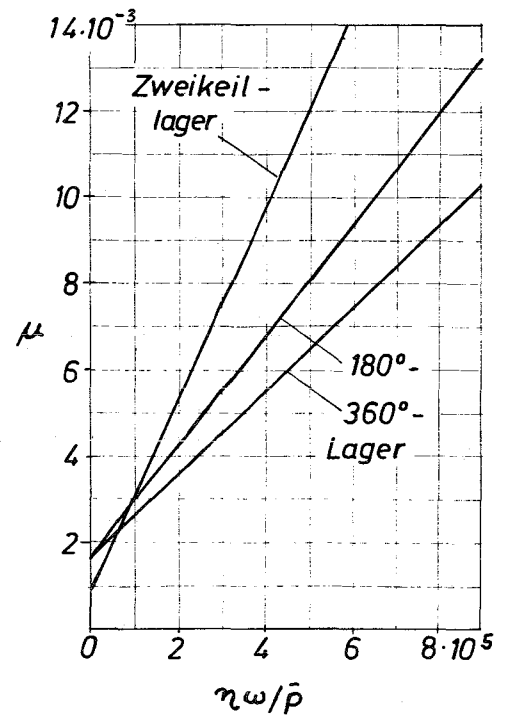


Abb. 66: Reibungsvergleich

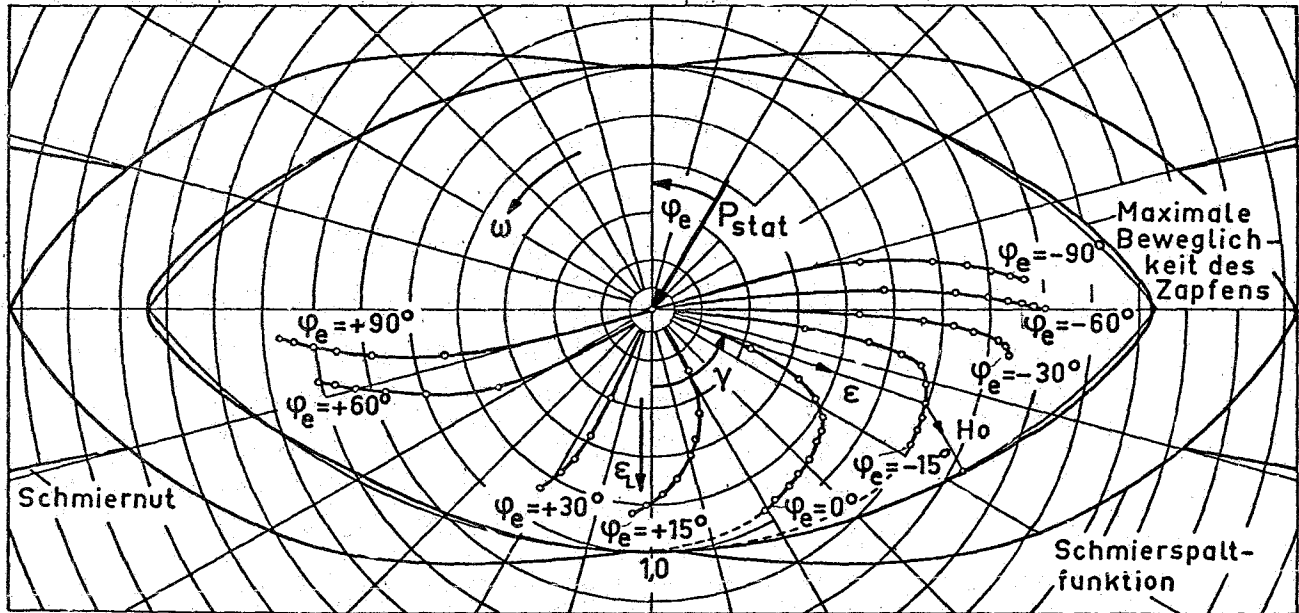


Abb. 67: Maximale Beweglichkeit des Zapfens und Verlagerungskurven des Zweikeillagers für verschiedene Belastungswinkel  $\varphi_e$  nach [2]

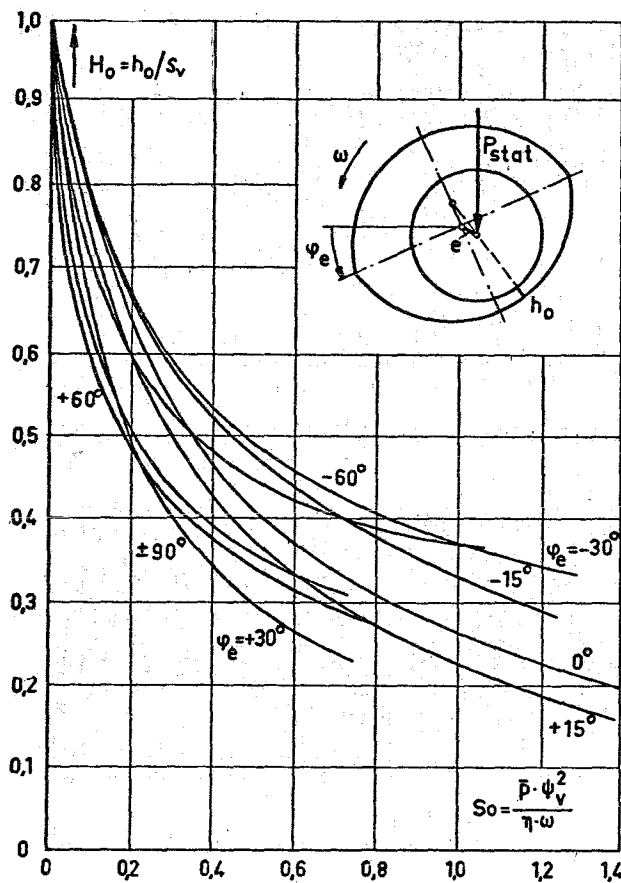


Abb. 68: Kleinster Schmierpalt  $H_0 = h_0/s_v$  in Abhängigkeit von der Sommerfeldzahl  $S_0$  bei verschiedenen Einbauwinkeln  $\varphi_e$

### 1.3 Ergebnisse theoretischer Berechnungen

Das Zweikeillager ist theoretisch als zwei Lagerschalen mit  $150^\circ + 170^\circ$  Umschliessungswinkel mit einer gemeinsamen Welle zu betrachten. Die Schwierigkeit bei der Berechnung liegt nun darin, dass man die Belastungen der einzelnen Schalen weder nach Richtung noch Grösse kennt. Man muss also die Exzentrizität  $e$  und den Verlagerungswinkel  $\gamma$  solange variieren und jeweils die Tragkräfte der beiden Schalen nach Grösse und Richtung bestimmen, bis die Resultierende beider nach Grösse und Richtung der äusseren Belastung  $P$  entgegengesetzt gleich ist. Bei vertikaler Belastung bedeutet dies, dass die Summe der beiden horizontalen Komponenten verschwinden muss.

Pinkus [3] dehnte das unter III,3 beschriebene Verfahren auf das Zweikeillager aus und baute die geometrischen Bedingungen und die Forderung, Summe der horizontalen Resultierenden gleich Null, in das Rechenprogramm ein. Er berechnete Lager mit  $150^\circ$ -Umschliessungswinkel pro Schale, den Breitenverhältnissen  $B/D = 1/4, 1/2, 1, 1\ 1/2$  und den Elliptizitätsverhältnissen  $\varepsilon_z = 0, 1/4, 1/2, 3/4$ .

Die Verlagerungslinien sind in Abb. 69 dargestellt. Den Elliptizitäten entsprechen die Spielverhältnisse  $\psi_H / \psi_V = 1, 4/3, 2$  und  $4$ .

Es überrascht das Ergebnis, dass Kurventeile oberhalb des Lagermittelpunktes liegen. Das liegt daran, dass die Welle bei geringer Belastung sehr weit nach der Seite wandert. Der konvergierende Spaltteil ist dann sehr kurz und die Kräfte der Oberschale sehr klein und umgekehrt in der Unterschale der konvergierende

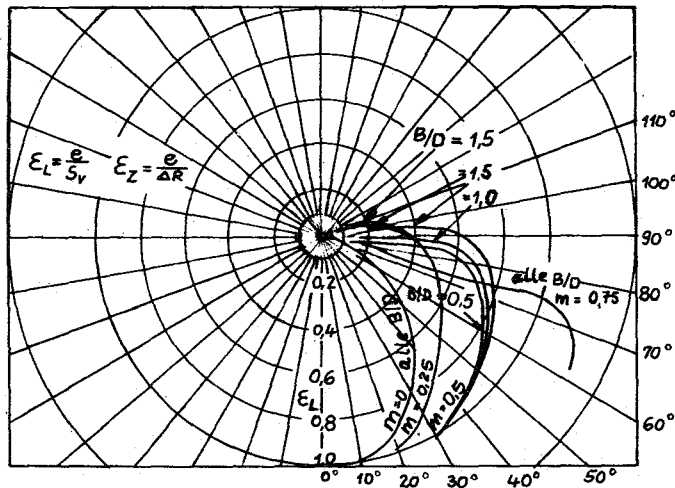


Abb. 69: Verlagerungskurven des Zweikeillagers nach Theorie Pinkus [3]

Spalt sehr lang und die Kraft sehr gross, so dass der Zapfen über die Mitte angehoben werden kann. Dieses Phänomen soll auch in nicht näher genannten experimentellen Arbeiten beobachtet worden sein, ohne dass eine Erklärung vorlag.

Die Reibleistung ist in Form des Leistungsverlustfaktors  $j$  angegeben.  $j$  ist das Verhältnis der berechneten Reibleistung  $N$  zur äquivalenten Reibung  $N_0$  nach der Petroffschen Formel (siehe Kap. II, 2.1.1., Gl.(38)).

$$N_0 = \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega^2 \cdot R^3 \cdot B}{\Delta R} \quad (18)$$

$$j = \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{b}{B} \cdot \frac{s_H}{h} \cdot d\varphi \quad (19)$$

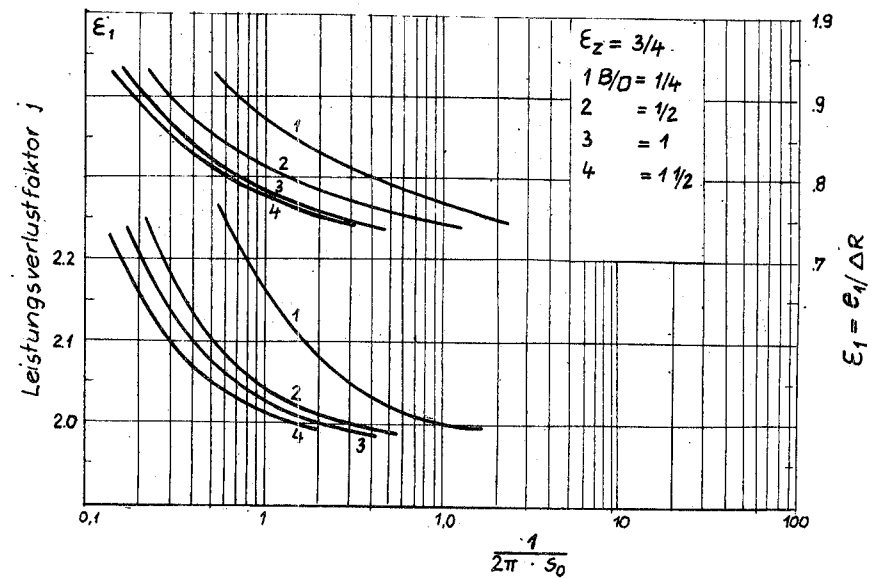
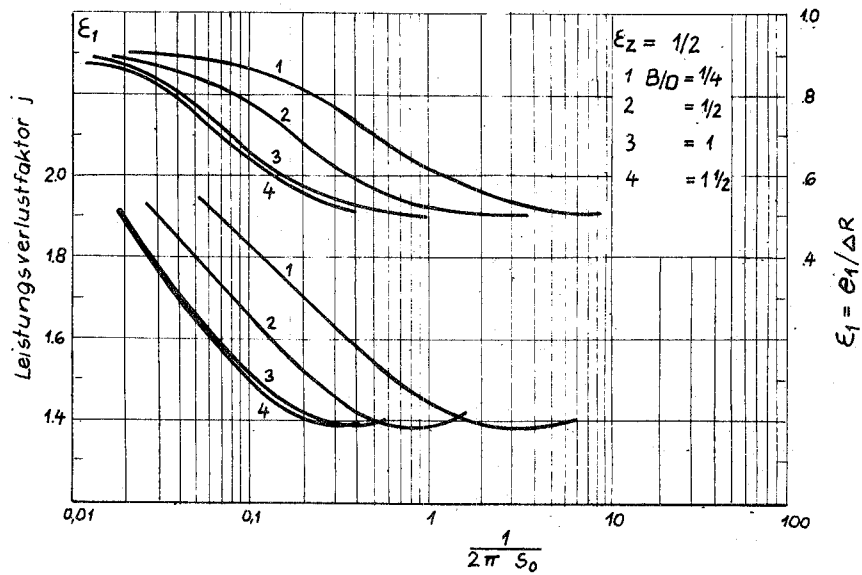
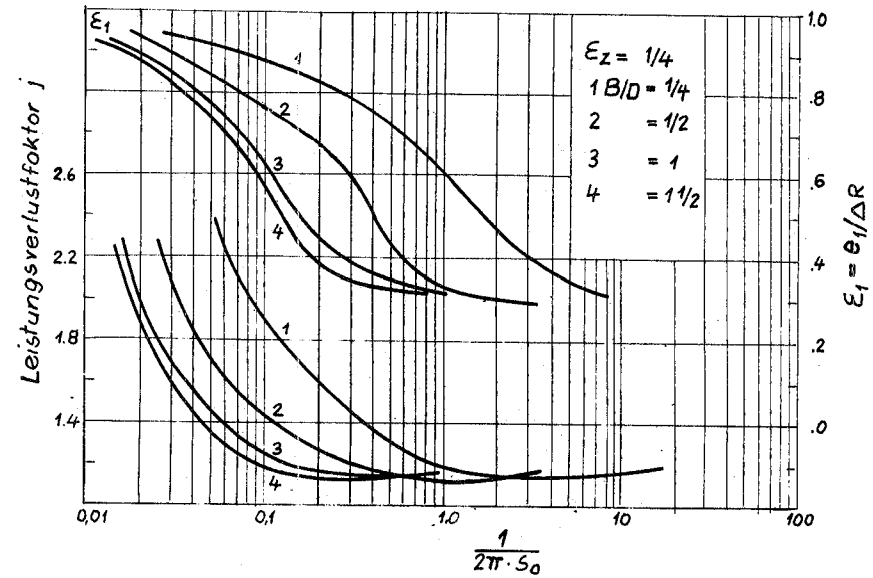
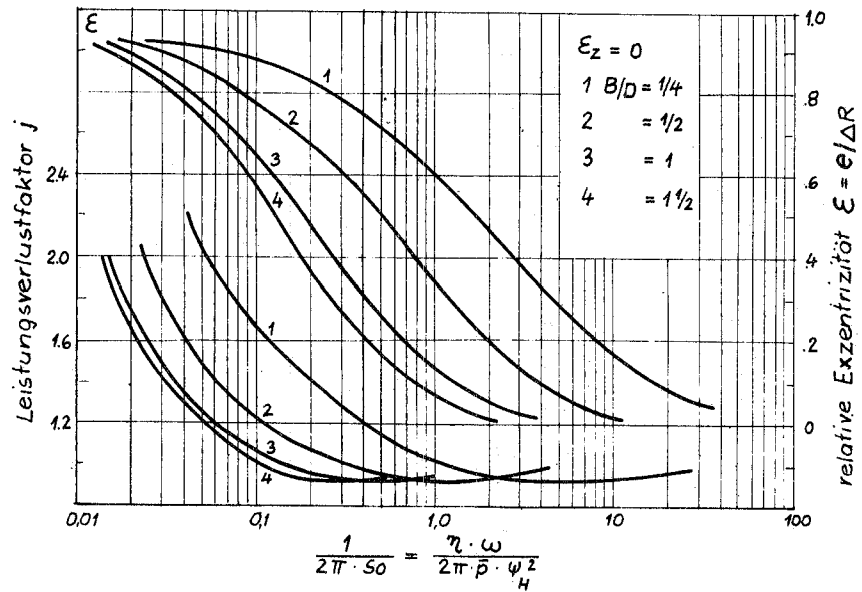


Abb. 70: Leistungsdiagramme von elliptischen Lagern



b ist die effektive Breite des Schmierfilms im Erweiterungsteil. Der Leistungsfaktor ist in Abb. 70 a ÷ d für die verschiedenen Elliptizitätsverhältnisse über der reziproken Sommerfeldzahl aufgetragen. Parameter sind die jeweiligen Breitenverhältnisse. Durch  $\epsilon_z = 0$  ist ein zylindrisches Lager mit 2 axialen Nuten miterfasst.

Es gibt noch eine Arbeit von Ott [4], worin ein Berechnungsverfahren für ein unsymmetrisches Zweikeillager beschrieben wird, bei welchem die obere Lagerhälfte in der Mitte 20 % ausgespart ist. Da es sich hier um ein spezielles Lager der Firma Brown, Boveri u. Cie handelt, soll nicht näher darauf eingegangen werden. Das grundsätzliche Vorgehen ist das selbe, nur dass zur Berechnung der Einzelschalenkräfte auf das Verfahren von Fränkel zurückgegriffen wird.

## 2. Rechnerische und experimentelle Ergebnisse beim Dreikeillager

### 2.1 Geometrische Zusammenhänge beim symmetrischen Lager

Es gilt wieder die bei allen Mehrflächenlagern gültige Beziehung

$$\begin{aligned}\Delta R &\equiv R_s - R = h_{0z} + e_z \\ &= h_{01} + e_1 \\ &= h_{02} + e_2 \\ &= h_{03} + e_3\end{aligned}\tag{20}$$

ferner

$$\begin{aligned}e_1^2 &= e^2 + e_z^2 + 2e \cdot e_z \cdot \cos\gamma \\ e_2^2 &= e^2 + e_z^2 - 2e \cdot e_z \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right) \\ e_3^2 &= e^2 + e_z^2 - 2e \cdot e_z \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\end{aligned}\tag{21}$$

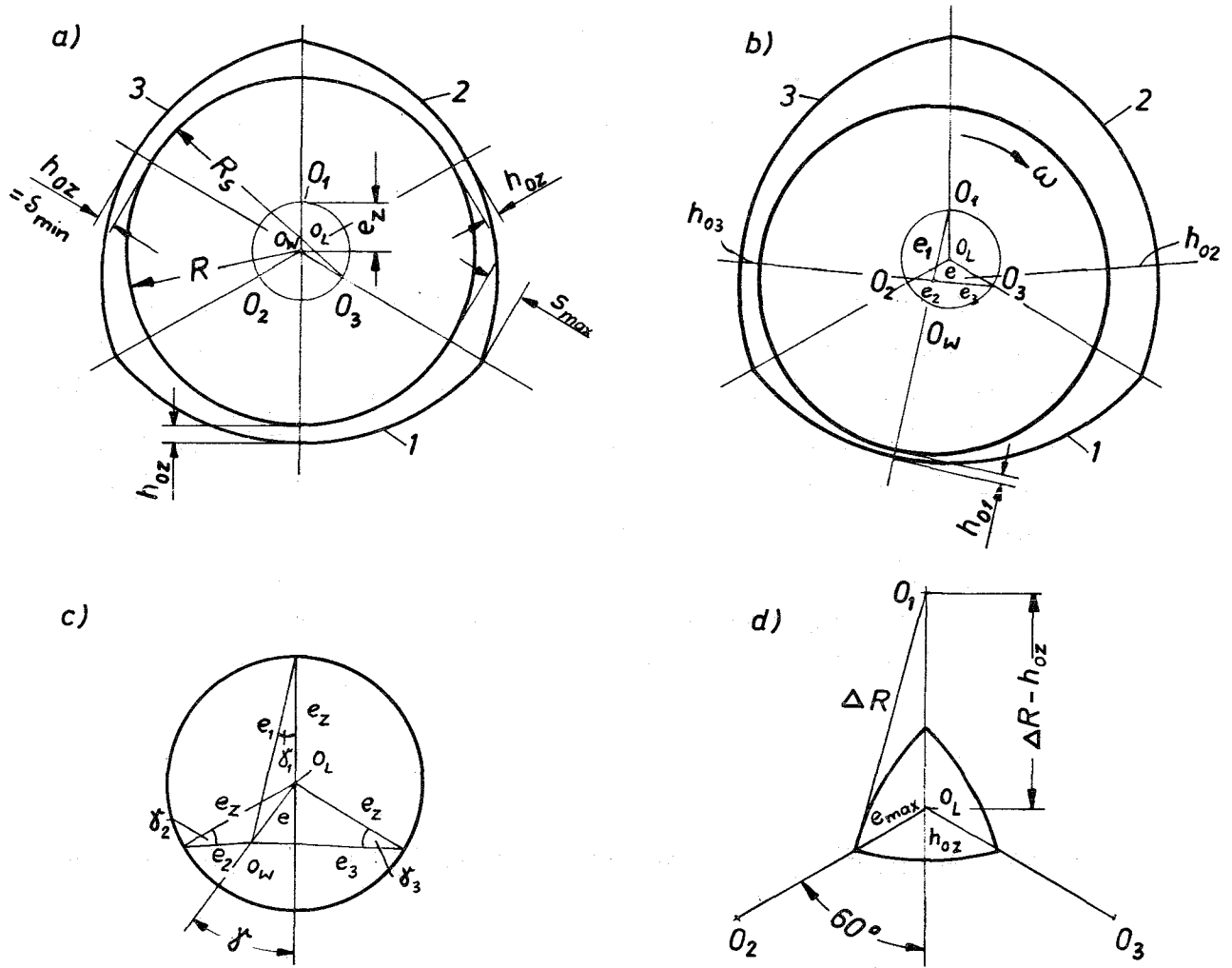


Abb. 71: Geometrie des Dreikeillagers (symmetrisch)

Bezieht man die Exzentrizitäten auf  $\Delta R$

$$\epsilon \equiv \frac{e}{\Delta R}, \quad \epsilon_1 \equiv \frac{e_1}{\Delta R}, \quad \epsilon_2 \equiv \frac{e_2}{\Delta R}, \quad \epsilon_3 \equiv \frac{e_3}{\Delta R} \text{ u. } \epsilon_z \equiv \frac{e_z}{\Delta R}, \quad (22)$$

so erhält man

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_z^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_z \cdot \cos \gamma \quad (23)$$

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_z^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_z \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} - \gamma \right) \quad (24)$$

$$\varepsilon_3^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_z^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_z \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} + \gamma \right) \quad (25)$$

$e_z$  ist wieder die Schalenexzentrizität,  $\varepsilon_z$  das Exzentrizitätsverhältnis,  $\psi_E = \frac{e_z}{R}$  die relative Schalenexzentrizität und

$$\frac{s_{\max}}{s_{\min}} = \frac{\psi_{\max} \cdot R}{\psi_{\min} \cdot R} = \frac{\psi_{\max}}{\psi_{\min}} \quad \text{das Spielverhältnis} \quad (26)$$

$$\frac{\psi_{\max}}{\psi_{\min}} = \frac{\Delta R (1 + \varepsilon_z \cdot \cos 120^\circ)}{\Delta R (1 + \varepsilon_z \cdot \cos 180^\circ)} = \frac{1 - \varepsilon_z/2}{1 - \varepsilon_z} \quad (27)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\psi_{\max} / \psi_{\min} - 1}{\psi_{\max} / \psi_{\min} - 0,5} \quad (28)$$

Beim Vergleich mit anderen Lagerbauwerten ist es günstiger, die Exzentrizität  $e$  auf das kleinste Lagerpiel  $s_{\min}$  zu beziehen, und man definiert die relative Exzentrizität  $\varepsilon_L$  ähnlich wie beim Zweikeillager

$$\varepsilon_L = \frac{e}{h_{OZ}} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon_z} \quad (29)$$

Die Beweglichkeit des Zapfens wird durch ein Bogen-dreieck mit den Radien  $\Delta R$  begrenzt. Die grösste Exzentrizität  $e_{\max}$  ist in Richtung der Spitzen möglich. Sie beträgt

$$e_{\max} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{e_z^2 + 4 (h_{oz}^2 + 2 h_{oz} \cdot e_z)} - e_z \right) \quad (30)$$

$$= \frac{\Delta R}{2} \cdot \left( \sqrt{4 - 3 \cdot \varepsilon_z^2} - \varepsilon_z \right)$$

Mit  $\Delta R = R(2 \psi_{\max} - \psi_{\min})$  (31)

erhält man mit Hilfe von Abb. 71d

$$\psi_B = \frac{e_{\max}}{R} = \sqrt{(\psi_{\max} + \psi_{\min})^2 - 3 \psi_{\min}^2} - (\psi_{\max} - \psi_{\min}) \quad (32)$$

## 2.2 Experimentelle Ergebnisse

Glienicke [2] untersuchte ein Lager mit  $R = 60$  mm,  $B/D = 0,5$ ,  $\psi_{\max} = 4,3$  ‰,  $\psi_{\min} = 1,1$  ‰,  $\psi_{\max}/\psi_{\min} = 3,9$  ( $\varepsilon_z = 0,85$ ),  $e_z = 0,363$  mm,  $\psi_B = 1,84$  ‰ und  $\psi_E = 6$  ‰.

Die Verlagerungsbahnen haben von dem Gumbelschen Halbkreis sehr stark abweichende Form (Abb. 72). Insbesondere beim Einbauwinkel  $\varphi_e = 0^\circ$  strebt der Wellenmittelpunkt mit wachsender Belastung nicht gegen  $\gamma = 0^\circ$  bei  $\varepsilon$  gegen 1. Der Zapfen hat vielmehr die Tendenz, in Richtung der Lagerecken zu wandern.

Es ergibt sich für alle Einbauwinkel annähernd die gleiche dimensionslose kleinste Schmierschichtdicke.  $\varphi_e = -30^\circ$  ist am günstigsten (Abb. 73). Allerdings ist dabei die Exzentrizität relativ gross.

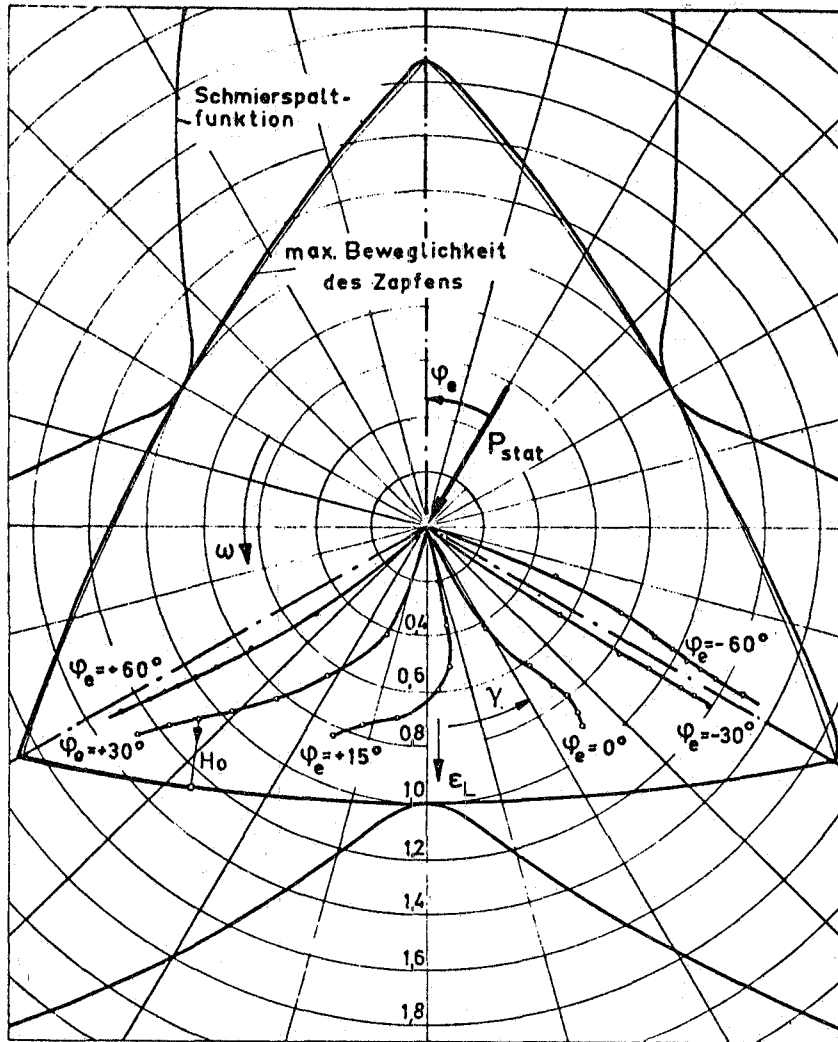


Abb. 72: Verlagerungskurven des Dreikeillagers für verschiedene Belastungswinkel

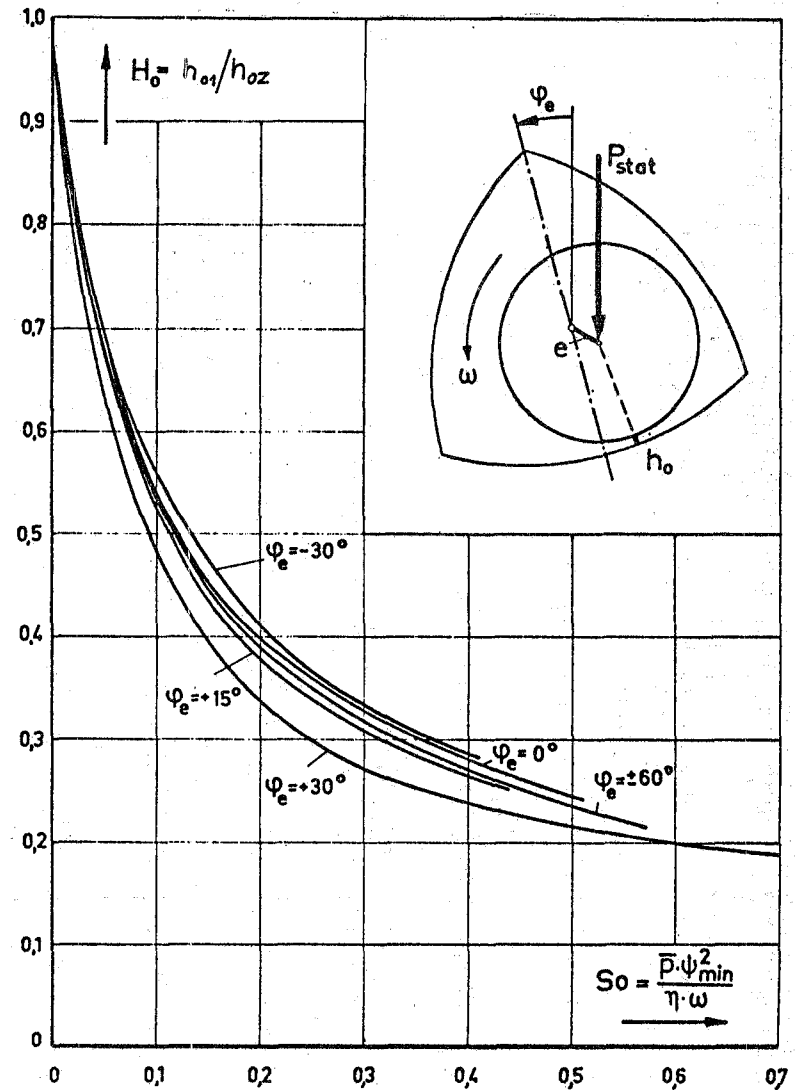


Abb. 73: Kleinster dimensionsloser Schmierspalt  $H_0$  in Abhängigkeit von der Sommerfeldzahl für das Dreikeillager bei verschiedenen Einbauwinkeln

Ergebnisse eines unsymmetrischen 3-Keilflächen-Taschenlagers werden von Ott [5] mitgeteilt. Da es sich hier wieder um eine sehr spezielle Bauweise handelt, wird nicht näher darauf eingegangen.

### 2.3 Ergebnisse theoretischer Berechnungen

Das symmetrische Dreikeillager wird theoretisch wie drei getrennte Lagerschalen mit ca.  $100^\circ$  Umschliessungswinkel mit einer gemeinsamen Welle behandelt. Das grundsätzliche Problem ist das gleiche wie beim Zweikeillager, nur müssen jetzt 3 resultierende Schalenkräfte mit der äusseren Belastung im Gleichgewicht stehen.

Pinkus [6] verwendet beim Dreikeillager das gleiche Verfahren wie bei der Berechnung des Zweikeillagers. Der einzige Unterschied sind die geometrischen Bedingungen, die um eins erhöhte Flächenzahl und der Umschliessungswinkel.

Die Berechnungen wurden für Lager mit den Breitenverhältnissen  $B/D = 1/4, 1/2$  und  $1$  und den Exzentrizitätsverhältnissen  $\epsilon_z = 0, 1/2$  und  $2/3$  in Abhängigkeit von der Exzentrizität  $\epsilon = e/\Delta R$  durchgeführt. Das Lager mit  $\epsilon_z = 0$  entspricht einem rein zylindrischen Lager mit zwei axialen Nuten.

Abb. 74 zeigt die Verlagerungsbahnen für die verschiedenen  $\epsilon_z$  und  $B/D = 1$  und  $1/2$ . Die Verlagerungen für beide Breitenverhältnisse weichen so wenig voneinander ab, dass sie durch jeweils eine Kurve erfasst werden. Der Punkt  $O_1$  gilt nur für  $\epsilon_z = 1/2$ , so dass für diesen Fall sowohl die relativen Exzentrizitäten  $\epsilon_L$  als auch  $\epsilon_1$  und die zugehörigen Winkel  $\gamma$  und  $\gamma_1$  abgelesen werden können. Die Tendenz, dass die Wellenbahn mit  $\epsilon_L$  gegen  $1.0$  nicht nach  $\gamma = 0$  strebt, wird durch die Theorie bestätigt.

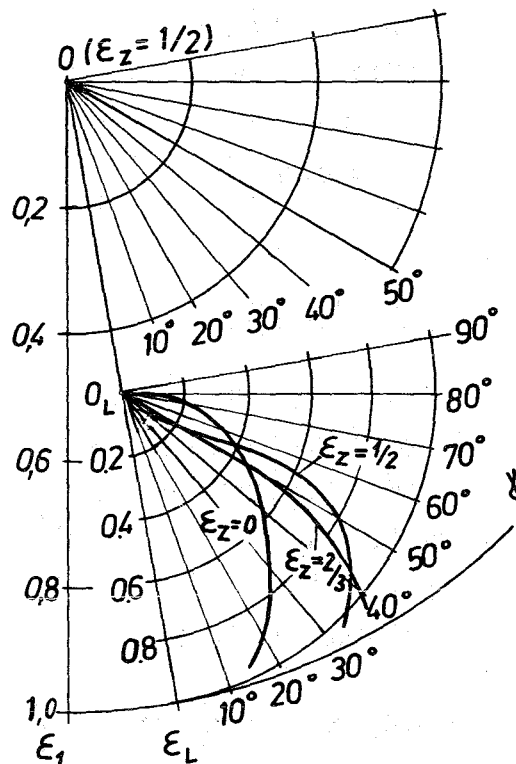


Abb. 74: Verlagerungsbahnen des Dreikeillagers für  $B/D = 1$  und  $1/2$  und  $\epsilon_z = 0, 1/2$  und  $2/3$

In Abb. 75 a bis c ist die relative Exzentrizität  $\epsilon_1$  über der reziproken Sommerfeldzahl für die verschiedenen Exzentrizitätsverhältnisse  $\epsilon_z$  aufgetragen. Parameter sind die drei ausgewählten Breitenverhältnisse. Da die relativen Exzentrizitäten  $\epsilon_1$  der unteren Schale aufgetragen sind, lassen sich die kleinsten Schmier-schichtdicken  $h_{01}$ , die einen Massstab für die Betriebssicherheit darstellen, aus der Beziehung

$$h_{01} = \Delta R(1 - \epsilon_1) \quad (33)$$

bestimmen.

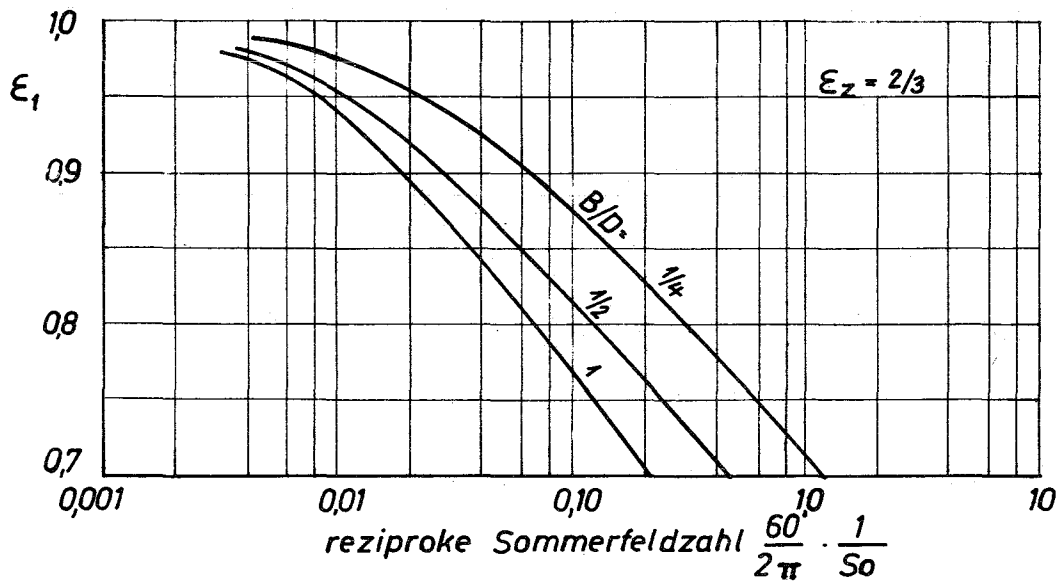
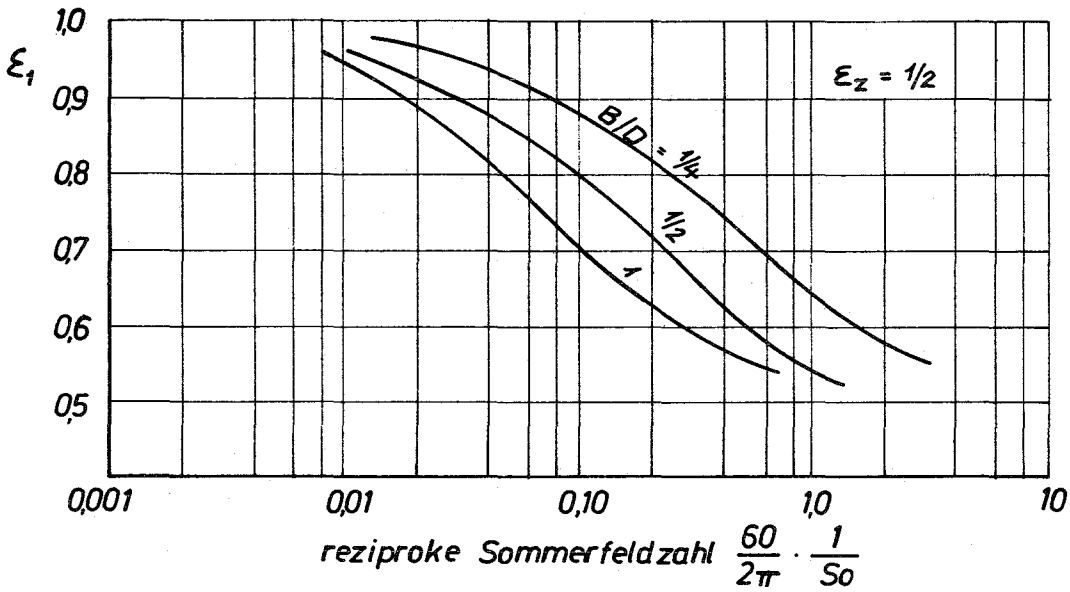
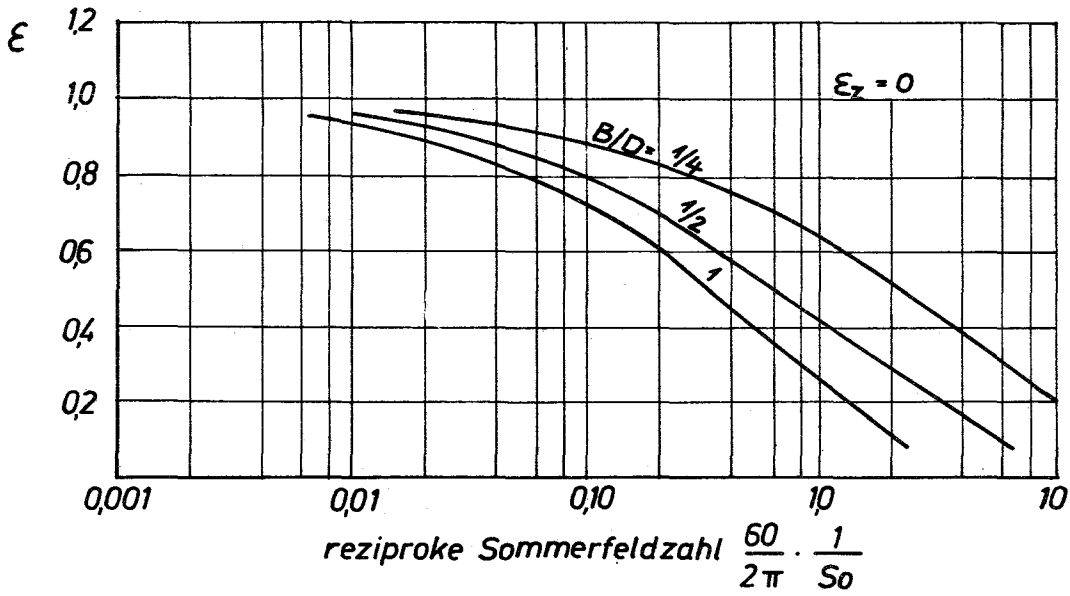


Abb. 75: Exzentrizität in Abhängigkeit von der reziproken Sommerfeldzahl beim Dreikeillager nach Pinkus [6]



Einen Vergleich der Reibleistungen bei verschiedenen Exzentrizitätsverhältnissen zeigt Abb. 76, in welcher der Reibungsverlustfaktor  $j$  über der relativen Exzentrizität  $\epsilon_L$  aufgezeichnet ist. Die Angabe, für welches Breitenverhältnis diese Kurven gelten, fehlt. Die Reibleistung steigt bei kleinen und mittleren Exzentrizitäten mit dem Exzentrizitätsverhältnis  $\epsilon_z$  sehr stark an. Es fällt auf, dass ein Minimum bei jeder Kurve zu beobachten ist, das auf die Berücksichtigung der unvollständigen Schmierfilme zurückzuführen ist.

Die in Kapitel III, Abschnitt 3.7.2 beschriebene Berechnungsmethode von Frössel [7] gestattet, bei zentrischer Wellenlage ( $e = 0$ ) sehr schnell zu brauchbaren Werten für die Kräfte der einzelnen Schalen und die Reibleistung zu kommen. Im allgemeinen Fall, wo eine äussere Belastung  $P$  auftritt, versagen die Unterlagen von Frössel, da der Winkel  $\varphi_1$  zwischen der

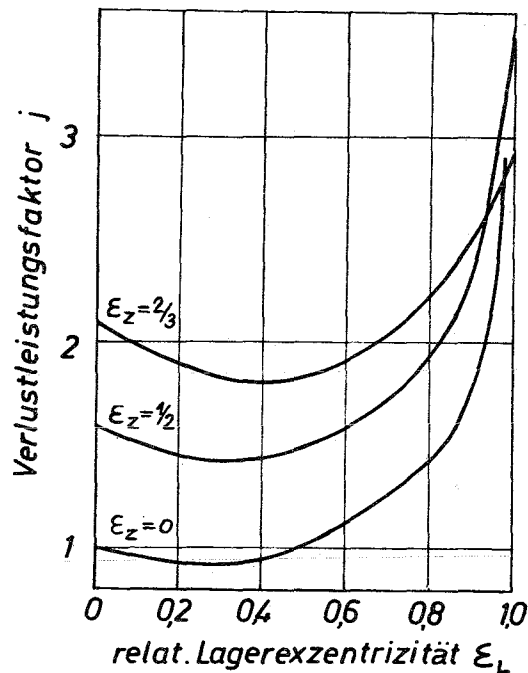


Abb. 76: Reibungsverlustfaktor

theoretisch grössten Spaltweite und dem Beginn der Druckentwicklung an der Schaleneintrittskante mit veränderlicher Belastung variiert, Frössel aber nur Diagramme für  $\varphi_1 = 110^\circ, 130^\circ, 150^\circ$  und  $160^\circ$  angegeben hat. Das von Frössel angegebene Beispiel [7, 175] ist nicht korrekt, da die Verlagerung in Richtung der Belastung angenommen wird.

Nur im Falle  $P = 0$  mit  $e = 0$ , der bei senkrechter Wellenanordnung aber tatsächlich vorliegt, ist  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_z$  und  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$  und  $\varphi_1 = \text{konstant}$ , beim Dreikeillager  $\varphi_1 \approx 110^\circ$ .

### 3. Berechnung des 4-Keillagers

#### 3.1 Geometrische Zusammenhänge

Die Bezeichnungen und Begriffe sind die gleichen wie beim Dreikeillager bzw. analog dazu.

Es gilt wieder die Beziehung

$$\Delta R \equiv R_s - R = h_{0z} + e_z \quad (34)$$

$$\text{und } \Delta R = h_{01} + e_1 = h_{02} + e_2 = h_{03} + e_3 = h_{04} + e_4, \quad (35)$$

$$\begin{array}{l} \text{ferner} \\ e_1^2 = e^2 + e_z^2 + 2e \cdot e_z \cdot \cos\gamma \\ e_2^2 = e^2 + e_z^2 - 2e \cdot e_z \cdot \sin\gamma \\ e_3^2 = e^2 + e_z^2 - 2e \cdot e_z \cdot \cos\gamma \\ e_4^2 = e^2 + e_z^2 + 2e \cdot e_z \cdot \sin\gamma \end{array} \quad (36)$$

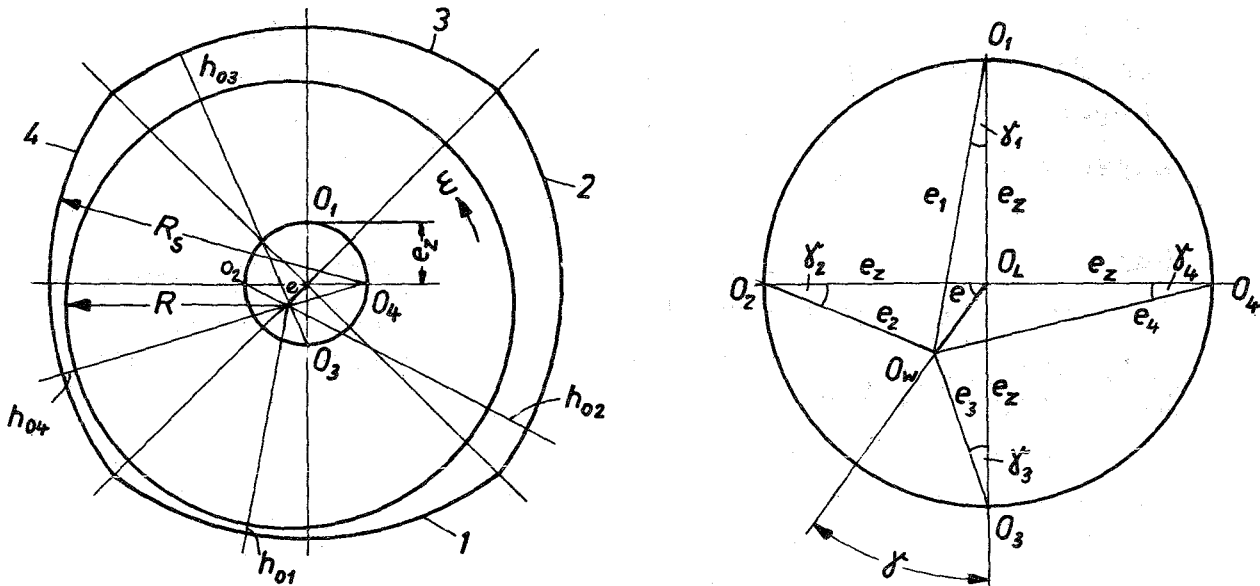


Abb. 77: Geometrie des 4-Keillagers

Der Zusammenhang zwischen Exzentrizitätsverhältnis  $\epsilon_z$  und dem Spielverhältnis ändert sich:

$$\frac{\psi_{\max}}{\psi_{\min}} = \frac{s_{\max}}{s_{\min}} = \frac{\Delta R(1 + \epsilon_z \cdot \cos 135^\circ)}{\Delta R(1 + \epsilon_z \cdot \cos 180^\circ)} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \epsilon_z}{1 - \epsilon_z} \quad (37)$$

Die Beweglichkeit des Zapfens wird durch ein Bogenviereck mit den Radien  $\Delta R$  begrenzt. Die grösste Exzentrizität  $e_{\max}$  beträgt:

$$\begin{aligned} e_{\max} &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \left( \sqrt{e_z^2 + 2(2 h_{0z} \cdot e_z + h_{0z}^2)} - e_z \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \Delta R \left( \sqrt{2 - \epsilon_z^2} - \epsilon_z \right) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{Mit } \frac{\Delta R}{R} = \frac{2 \cdot \psi_{\max} - \sqrt{2} \cdot \psi_{\min}}{2 - \sqrt{2}} \quad (39)$$

erhält man für

$$\psi_B = \frac{e_{\max}}{R} = \frac{\sqrt{2\psi_{\max}^2 - 4(\sqrt{2}-1) \cdot \psi_{\max} \cdot \psi_{\min}} - \sqrt{2}(\psi_{\max} - \psi_{\min})}{2 - \sqrt{2}} \quad (40)$$

### 3.2 Berechnungsverfahren

Grundsätzlich kann man das von Pinkus in [3], [6] und [8] angewandte Verfahren für Lager mit beliebigen Umschließungswinkeln, auch unsymmetrischen Mehrflächenlagern anwenden. Allerdings muss man dann das gesamte Verfahren programmieren, was mit erheblichem Aufwand verbunden ist. Eine andere Möglichkeit ist die, dass man die von Pinkus für 75°-Lager tabellierten Ergebnisse für das entsprechende Breitenverhältnis graphisch aufzeichnet und die Zwischenwerte, die man benötigt, durch Interpolieren gewinnt. Man ist dabei aber auf die ausgewählten Breitenverhältnisse 1 1/2, 1, 1/2 und 1/4 beschränkt.

Im Falle der unbelasteten, zentrisch laufenden Welle kann man dieses Verfahren anwenden. Geringeren Beschränkungen unterliegt man bezüglich der Breitenverhältnisse bei der Arbeit von Frössel [7], wobei für ein Vierkeillager die Werte für  $\varphi_1 = 150^\circ$  in Frage kommen.

4. Literatur

- [1] Rumpf, A.: "Reibung und Temperaturverlauf im Gleitlager"  
VDI-Forschungsheft 393, VDI-Verlag, Berlin, 1938
- [2] Glienicke, J.: "Feder- und Dämpfungskonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors"  
Diss. TH Karlsruhe 1966
- [3] Pinkus, O.: "Analysis of Elliptical Bearings"  
Trans ASME, vol. 78 (1956), S. 965/973
- [4] Ott, H.H.: "Reibungszahl und Wellenlage in Turbinenlagern mit vermindertem Vertikalspiel"  
Brown Boveri Mitt., Bd. 41 (1954), S. 256/264
- [5] Ott, H.H.: "Experimentelle Untersuchungen an einem Dreikeillager"  
Brown, Boveri Mitt. Bd. 44 (1957), S. 225/234
- [6] Pinkus, O.: "Analysis and Characteristics of the Three-Lobe Bearing"  
Trans ASME, Series D, J. Basic Engng. 81 (1959)  
S. 49/55
- [7] Frössel, W.: "Berechnung von Gleitlagern mit radialen Gleitflächen"  
Konstruktion 14 (1962), S. 169/180
- [8] Pinkus, O.: "Solution of Reynolds' Equation for Arbitrarily Loaded Journal Bearings"  
Trans ASME, Series D, J. Bas. Engng., vol. 83 (1961)  
S. 145/152

## VII. Turbulente Lagerströmung

### 1. Einleitung

Ähnlich wie bei der Strömung durch Rohre und der Umströmung von Kugeln tritt auch bei Lagern, die mit Wasser oder flüssigen Metallen geschmiert werden, auf Grund der niedrigen kinematischen Viskosität bei höheren Umfangsgeschwindigkeiten ein Umschlag von laminarer Strömung in turbulente Strömung innerhalb des Schmierfilms ein. Die kennzeichnende Grösse ist auch hier die Reynoldszahl die beim zylindrischen Radiallager wie folgt definiert ist:

$$Re^* = \frac{U \cdot \Delta R}{\nu} \quad (1)$$

für das gesamte Lager und für eine beliebige Stelle innerhalb des Spaltes.

$$Re = \frac{U \cdot h}{\nu} \quad , \quad (2)$$

wobei  $U$  wieder die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens,  $\Delta R$  das radiale Lagerspiel,  $h$  die Schmierpaltweite und  $\nu = \eta/\rho$  die kinematische Zähigkeit ist.

Eine wichtige Begleiterscheinung der Turbulenz ist die erhöhte Reibung. Während in der klassischen Lagertheorie die am Umfang auftretende Reibkraft auf die Belastung bezogen wird, ist dies insbesondere bei leicht belasteten Lagern und turbulenter Strömung nicht mehr sinnvoll, da die wesentlichste Einflussgrösse die Umfangsgeschwindigkeit ist. Bei senkrechter Welle mit der statischen Belastung Null wäre der Reibungskoeffizient  $\mu = F/P = \infty$  unabhängig von der Grösse der Reibung.

Der neue Reibungskoeffizient  $\lambda$  wird deshalb in Analogie zum Widerstandsbeiwert bei der Umströmung fester Körper definiert:

$$F = \lambda \frac{\rho}{2} U^2 \cdot \pi \cdot D \cdot B \quad (3)$$

Der Reibungskoeffizient  $\lambda$  ist also der Reibkraft  $F$  pro Flächeneinheit, d.h. der Schubspannung an der bewegten Wand (Welle)  $\tau_w$  proportional, dem Quadrat der Geschwindigkeit umgekehrt proportional:

$$\lambda = \frac{F}{\pi \cdot D \cdot B \frac{\rho}{2} U^2} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} \cdot U^2} \quad (4)$$

oder mit  $F = M/R$  und  $D = 2R$

$$\lambda = \frac{M}{\pi \cdot \rho \cdot U^2 \cdot R^2 \cdot B} \quad (5)$$

Der Reibungskoeffizient  $\lambda$  ist nicht konstant sondern für eine bestimmte Lagerbauart eine Funktion von der Reynoldszahl.

Im laminaren Bereich gilt bei geringer Belastung bzw. zentrisch laufender Welle die Petroffsche Formel (Gl. III, 38), aus der für die Reibkraft folgt:

$$F = \pi \cdot B \cdot D \cdot \frac{\rho \cdot \nu \cdot U}{\Delta R}$$

In (4) eingesetzt, erhält man damit für  $\lambda$  unter Berücksichtigung von Gl. (1) und  $\eta = \rho \cdot \nu$

$$\lambda = \frac{2}{Re^*} \quad \begin{array}{l} \text{laminarer} \\ \text{Bereich} \end{array} \quad (6)$$

## 2. Strömungsinstabilitäten

Die grundsätzlichen Erscheinungsformen der Strömung beim Übergang vom laminaren in das turbulente Gebiet können bei Lagern experimentell nicht ermittelt werden, da die Schmierspalte in der Grössenordnung von 0,8 bis 3 ‰ des Wellenradius liegen. Zu diesem Zweck wurden von einer grossen Zahl von Autoren Untersuchungen an rotierenden coaxialen Zylindern durchgeführt, bei denen der Ringraum zwischen den Zylindern wesentlich grössere radiale und axiale Erstreckung aufwies.

Zunächst wurde der Fall konzentrischer Zylinder betrachtet. Es wurde übereinstimmend beobachtet, dass bei stationärem äusseren Zylinder und rotierendem inneren Zylinder von einer bestimmten kritischen Umfangsgeschwindigkeit  $U_{kr}$  ab die erste Instabilität in Form der sog. Taylor-Wirbel auftritt. Die unterste Grenze für das Auftreten wurde von Taylor theoretisch [1] und experimentell [2] ermittelt. Sie hängt nur von der kinematischen Viskosität und dem relativen Lagerspiel  $\psi = \Delta R/R$  ab.

$$Re_{kr}^* = \frac{U_{kr} \cdot \Delta R}{\nu} = 41,1 \sqrt{\frac{R}{\Delta R}} \quad (7)$$

Die Wirbel haben Torusform. Ihre axiale Breite ist ungefähr gleich der radialen Spaltweite. Sie folgen in axialer Richtung mit abwechselnder Drehrichtung aufeinander (siehe Abb. 78).

Die Ursache für das Auftreten der Taylor-Wirbel ist im Fliehkraftfeld zu suchen. Bei ihrem ersten Auftreten sind diese Wirbel stationär, aber wenn die



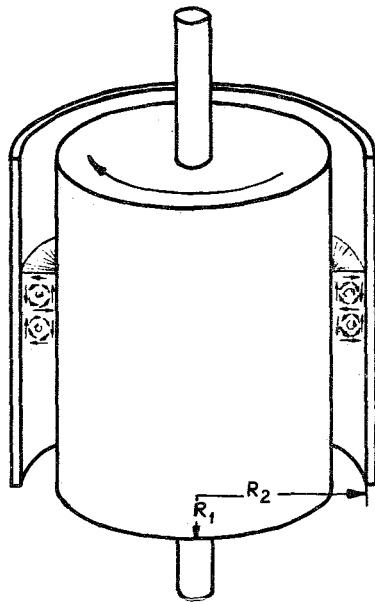


Abb. 78: Koaxiale Zylinder mit Taylorwirbeln

Umfangsgeschwindigkeit weiter gesteigert wird, tritt Zeitabhängigkeit ein und die Wirbelringe entwickeln wellenähnliche Strömungsbilder, wie bei Vohr [3] berichtet wird. Vor dem ersten Einsetzen der Wirbel ist das erforderliche Drehmoment der Drehzahl direkt proportional, oberhalb wird es einer höheren Potenz der Umfangsgeschwindigkeit proportional (Abb. 79).

Das Einsetzen der Wirbelströmung wird verzögert, d.h. die kritische Reynoldszahl bzw. Übergangsdrehzahl wird erhöht, wenn Druckgradienten in Umfangsrichtung aufgebaut werden, wie bei exzentrischer Lage des Wellenzapfens im Lager, oder wenn axiale Druckgradienten erzeugt werden, indem man z.B. ein Ende des Ringspaltes mit Druck beaufschlagt.

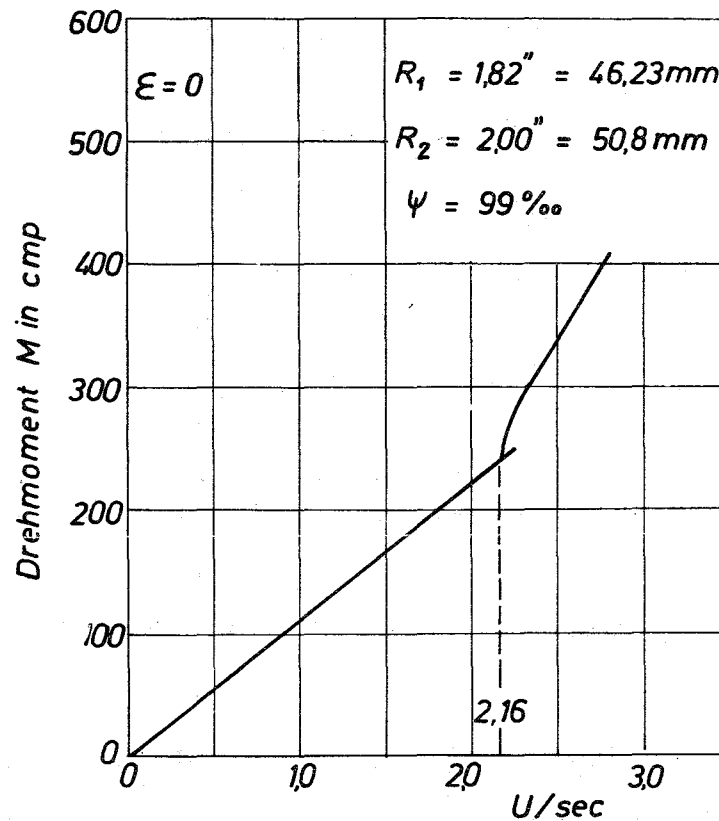


Abb. 79: Drehmoment in Abhängigkeit von der Drehzahl

Bei Lagern, die normalerweise mit einer bestimmten endlichen relativen Exzentrizität laufen und wo wegen der endlichen Breite der Lager axiale Druckgradienten existieren, tritt deshalb der Übergang zu der Wirbelströmung, bei etwas höherer Umfangsgeschwindigkeit ein.

Ist der innere Zylinder stationär und der äussere Zylinder rotiert, dann treten wegen des fehlenden Fliehkraftfeldes in der inneren Grenzschicht keine Taylor-Wirbel auf.

Die zweite Art von Strömungsinstabilität ist auf die Tendenz der Scherströmung zurückzuführen, ihre kinetische Energie in zufälligen Fluktuationen, die als Turbulenz bekannt sind, zu streuen. Ohne Turbulenz ist die laminare Schubspannung der mittleren Durchflussmenge proportional. Mit Turbulenz ist die mittlere Schubspannung mehr oder weniger der mittleren kinetischen Energie oder dem Quadrat der mittleren Durchflussmenge proportional.

Bei Radiallagern ist der Bereich der Wirbelströmung sehr schmal. Bei zentrischer Wellenlage entspricht ein relatives Lagerspiel von 1 % einer kritischen Reynoldszahl  $Re_{kr}^* = 1300$ , an der oberen Grenze von 3 %  $Re_{kr}^* = 750$ . Bei zentrischer Wellenlage ist demgemäss das Einsetzen der Taylor-Wirbel je nach Grösse des Lagerspiels im Bereich zwischen diesen beiden Reynolds-Zahlen zu erwarten. Bei Lagern mit äusserer Belastung oder bei Mehrflächenlagern ist dieser Bereich noch etwas nach oben verschoben. Andererseits tritt die volle turbulente Strömung schon bei Reynoldszahlen zwischen  $Re_{kr}^* = 1000$  und 2000 auf. Daraus erkennt man, dass die reine Wirbelströmung ohne Turbulenz bei Lagern nur innerhalb eines unbedeutend schmalen Arbeitsbereiches vorhanden ist.

Andererseits bestehen die Taylor-Wirbel bei voll entwickelter Turbulenz weiter. Vohr hat bei seinen Experimenten beobachtet, dass Taylor-Wirbel noch bis  $Re^* = 39\,800$  der turbulenten Strömung überlagert waren ([3] und [4]). Die Studien über die gegenseitigen Einwirkungen von Wirbelströmung und Turbulenz haben jedoch gezeigt, dass die turbulente Strömung dominiert, d.h. dass die Taylor-Wirbel auf die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung kaum Einfluss haben, wie bei Pan und Vohr [5] beschrieben ist.

### 3. Navier-Stokessche Bewegungsgleichungen für turbulente Strömung

Bei näherer Analyse einer turbulenten Strömung ergibt sich als ihr hervorstechendstes Merkmal, dass in einem festgehaltenen Raumpunkt die Geschwindigkeit und der Druck nicht zeitlich konstant sind, sondern sehr unregelmässige Schwankungen aufweisen. Die Flüssigkeitselemente, die als Ganzes Schwankungen in und quer zur Hauptströmung ausführen, sind mehr oder weniger kleine Flüssigkeitsballen. Obwohl die Geschwindigkeitsschwankungen nur wenige Prozent der mittleren Geschwindigkeit betragen, sind sie trotzdem von ausschlaggebender Bedeutung für den ganzen Bewegungsablauf.

Für die rechnerische Behandlung zerlegt man nach Schlichting [6] die Momentanwerte der Geschwindigkeitskomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und des Druckes  $p$  in ihre zeitlichen Mittelwerte ( $\bar{\quad}$ ) und Schwankungsgrössen ( $\prime$ ):

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' & v &= \bar{v} + v' & w &= \bar{w} + w' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (8)$$

Hierbei werden die Mittelwerte als zeitliche Mittelwerte in einem festgehaltenen Raumpunkt gebildet, also z.B.

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u \cdot dt \quad (9)$$

Die zeitlichen Mittelwerte der Schwankungsgrössen sind nach Definition gleich Null:

$$\overline{u'} = 0; \quad \overline{v'} = 0; \quad \overline{w'} = 0; \quad \overline{p'} = 0 \quad (10)$$

Durch Einführen der Ansätze Gl. (8) in die Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen und der nachfolgenden gliedweisen Bildung der zeitlichen Mittelwerte erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \rho \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (11a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \rho \left( \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right) \quad (11b)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \rho \left( \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right) \quad (11c)$$

Das Ergebnis der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen für die turbulente Strömung ist, dass die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten der turbulenten Bewegung den selben Gleichungen wie eine laminare Strömung genügen, bei denen jedoch zu den Reibungskräften der laminaren Strömung noch zusätzliche turbulente Reibungsglieder hinzukommen. Diese erhöhte scheinbare Zähigkeit der mittleren Bewegung steht im Mittelpunkt aller theoretischen Betrachtungen.

Bei den Gleichungen (11a ÷ c) sind die Schwereglieder gleich weggelassen worden, da sie keine Rolle spielen.

Die Trägheitsglieder auf der linken Seite der Gleichungen können nicht ohne weiteres weggelassen werden, da insbesondere bei den Modellversuchen mit relativ grossen Ringspalten die Trägheitskräfte mit steigender Reynoldszahl und wachsender Spaltweite an Einfluss gewinnen.

Dagegen gelten die anderen schon von Reynolds gemachten Vereinfachungen, da  $\bar{v}$  immer klein gegen  $\bar{u}$  und  $\bar{w}$  ist und die Veränderungen von  $\bar{u}$  und  $\bar{w}$  in den Richtungen  $x$  und  $z$  klein sind gegen ihre Änderungen in der  $y$ -Richtung:

$$\bar{v} \ll \bar{u}, \bar{w} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \ll \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \approx 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \ll \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \approx 0$$

Ausserdem wird wieder

$$\rho = \text{const. und } \eta = \text{const.}$$

gesetzt. Nun sind auch bei den Fluktuationsgliedern (Schwankungsgliedern) die Ableitungen nach  $x$  und  $z$  ungefähr  $10^{-3}$  mal kleiner als die Ableitungen nach  $y$ :

$$\frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x}, \frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial z}, \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial x}, \frac{\overline{\partial v'w'}}{\partial z}, \frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial x}, \frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial z} \ll \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial y}, \frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial y}, \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial y}$$

Damit reduzieren sich die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen der turbulenten Strömung auf folgende Beziehungen, die für turbulente Lagerströmungen allgemein gelten, wenn man die Querstriche bei den zeitlichen Mittelwerten der Geschwindigkeiten der Einfachheit halber weglässt:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (12)$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y}$$

Ausser den Gleichungen (12) gilt auch noch die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

Die linken Seiten der Gleichungen (12) repräsentieren die Trägheit des Strömungsmediums. Die Kriterien, ob man diese vernachlässigen darf, sind nach Pan und Vohr [5]:

$$\frac{1}{\lambda_c} \cdot \frac{\Delta R}{L} \lll 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\lambda_c} \cdot \frac{\Delta R}{U \cdot \Delta t} \lll 1 \quad (14)$$

Dabei ist  $\lambda_c$  der Wandreibungskoeffizient,  $\Delta R$  die Spaltweite (radiales Lagerspiel),  $L$  eine charakteristische Länge (z.B. Lagerbreite, Gleitschuhlänge),  $U$  die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens und  $\Delta t$  ein repräsentativer Zeitabschnitt (z.B. die Zeit, die ein Punkt der Welle benötigt, um über eine Diskontinuitätsstelle, wie z.B. eine Tasche im Lager, zu wandern).

Die Gleichungen (14) sind physikalisch wichtig und bedeutungsvoll dadurch, dass sie uns erlauben, die Grenzen für die Anwendbarkeit der turbulenten Schmierungstheorie abzuschätzen, welche die Massenträgheit des Strömungsmediums vernachlässigt. In Fällen, wo der Spalt  $\Delta R$  gross ist, werden deshalb die Trägheitseffekte von

grösserem Einfluss. In gleicher Weise wird das zweite Kriterium in Gl. (14) wichtig, wenn die Lagerflächen nicht glatt sind, sondern scharfe Diskontinuitäten wie Stufen oder Taschen haben, da Impulse von kurzer Zeitdauer  $\Delta t$  nun das Verhalten des Lagers beeinflussen.

#### 4. Stabilitätskarten

In den vorangegangenen Diskussionen sind 3 Gebiete superlaminarer Strömung festgestellt worden, deren Grenzen nochmals wie folgt zusammengefasst werden:

1. Auftreten von Wirbeln, wenn

$$Re^* = \frac{U \cdot \Delta R}{\nu} > 41,1 \sqrt{\frac{R}{\Delta R}} \quad (15)$$

2. Vorhandensein von Turbulenz, wenn

$$Re^* = \frac{U \cdot \Delta R}{\nu} > 10^3 \quad (16)$$

3. Vorherrschen von Trägheitseffekten, wenn

$$\frac{1}{\lambda_c} \cdot \frac{\Delta R}{L} \cong 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\lambda_c} \cdot \frac{\Delta R}{U \cdot \Delta t} \cong 1 \quad (17)$$

Der Reibungskoeffizient ist selbst eine Funktion der Reynoldszahl, so dass die vorstehenden Kriterien in Abhängigkeit von  $U \cdot \Delta R / \nu$ ,  $\Delta R / L$  (oder  $\Delta R / R$ ) und  $\Delta R / U \cdot \Delta t$  definiert werden können.

Eine zusammengesetzte Stabilitätskarte (Abb. 80) kann dann gezeichnet werden, auf der die Ordinate die mittlere Reynoldszahl  $U \cdot \Delta R / \nu$  und die Abszisse entweder  $\Delta R / L$ ,  $\Delta R / R$  oder  $\Delta R / U \cdot \Delta t$  darstellt.  $\lambda_c$  wurde bei der



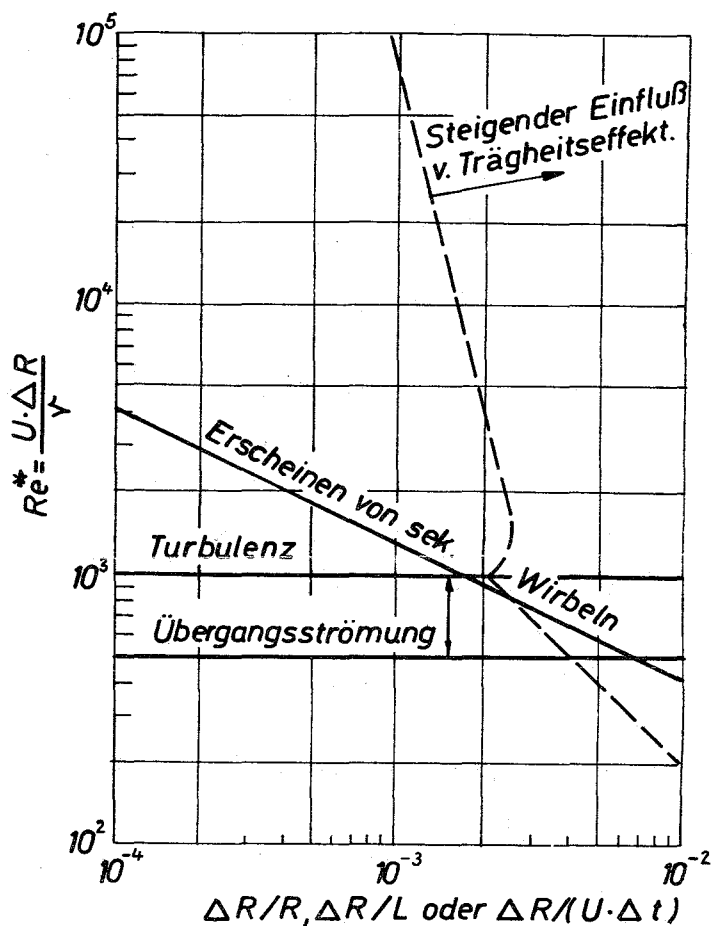


Abb. 80: Stabilitätskarte

Berechnung der Stabilitätskarte für die Couetteströmung bestimmt, die einen noch zu besprechenden Grenzfall der Lagerströmung darstellt. Mit Hilfe des Diagrammes in Abb. 80 ist man schnell in der Lage, festzustellen, ob ein Lager im superlaminaren Gebiet arbeiten wird und wenn es so ist, in welchem Gebiet.

## 5. Massenträgheitseffekte

Die Glieder auf der linken Seite der Navier-Stokes-schen Gleichungen (12) tragen den Trägheitseffekten Rechnung. Diese sind Kräfte, die mit kinetischer Energie behaftet sind, und stellen die Beschleunigungskräfte der Strömung dar. Wo diese von Bedeutung werden, sind die Filmkräfte nicht mehr allein von den Schubspannungen im Film abhängig wie bei der klassischen laminaren Schmierungstheorie. Prinzipiell können die Trägheitseffekte wichtig werden, gleichgültig ob die Strömung rein laminar oder turbulent ist, mit oder ohne Taylor-Wirbel. Die Stabilitätskarte zeigt jedoch, dass in einem Radiallager mit einem rotierenden Zapfen und einer stationären Lagerschale Trägheitseffekte selten vorhanden sind, ohne dass zugleich auch Taylor-Wirbel oder volle Turbulenz auftreten. Wenn der Wellenzapfen das stationäre Element des Lagers ist oder wenn der Flüssigkeitsfilm wie bei Axiallagern eben ist, dann können die Trägheitseffekte auch bei laminarem Schmierfilm wichtig werden.

Nach Vohr [3] und [4] und Burton und Carper [7] machen sich die Trägheitseffekte experimentell durch ein Anwachsen des Verlagerungswinkels des Wellenmittelpunktes bemerkbar, die bei einem  $100^\circ$  Kippschuhlager, z.B.  $90^\circ$  überschreiten kann. Diese Versuche wurden allerdings mit in Hohlzylindern rotierenden Walzen mit relativ grossen Ringspalten durchgeführt, bei denen die Trägheitseffekte betont werden.

Bei der Lagerauslegung, wo relative Spaltweiten von 0,8 bis 3 % des Wellenradius angewendet werden, wurde ein viel wichtigerer Effekt der Trägheit an den Kanten beobachtet, wo das Strömungsmedium in den Spalt eintritt [7]. Staudruck- und Eintrittsverlusteffekte verursachen eine Umwandlung von statischem Druck in

Strömungsgeschwindigkeitshöhen, ebenso einen Energieentzug am Eintritt zur Lagerfläche. Die Versuchsdaten können durch die folgenden Formeln näherungsweise in Beziehung gebracht werden:

$$p_g = p_o + c_e \cdot \frac{\rho}{2} U^2 = p_e + \frac{\rho}{2} U_e^2 \quad (18)$$

In Gl. (18) ist  $p_g$  der Gesamtdruck am Gleitschuheneintritt,  $p_o$  der Referenz-(Umgebungs-) Druck,  $p_e$  der statische Eintrittsdruck,  $U$  die Geschwindigkeit an der Zapfenoberfläche,  $U_e$  die mittlere Eintrittsgeschwindigkeit und  $c_e$  ein Eintrittskoeffizient.  $c_e$  ist abhängig von der Geometrie der Eintrittskante. Für eine scharfe Eintrittskante ist  $c_e \approx 0,17$ . Die Folge des Eintrittseffektes ist ein statischer Druckverlust am Eintritt, so dass in ungünstigen Fällen dort Unterdruck oder sogar negativer Druck entstehen kann. Die Folge ist, dass der Druckmittelpunkt näher zur Austrittskante der Lauffläche wandert. Dieser Eintrittseffekt kann unterbunden werden, indem man bei den Lagern die Eintrittskante der Lauffläche abrundet und Zirkulation des Schmiermittels rund um die Lauffläche ermöglicht.

Burton und Carper [7] berichten von Versuchen mit Stufenlagern, wo ein steiler Druckabfall hinter der Stufe festgestellt wurde, der auf die starke Beschleunigung der Strömung zurückzuführen ist, wenn sie in die Stufe eintritt.

## 6. Turbulente Strömung zwischen parallelen Platten

Bei der zweidimensionalen, stationären Strömung zwischen zwei parallelen Platten unendlicher Ausdehnung werden zwei Strömungsarten unterschieden, die wichtige Grenzfälle der turbulenten Lagerströmung darstellen. Im ersten Fall sind beide Platten in Ruhe und die Strömung wird durch einen Druckgradienten in einer Hauptrichtung parallel zu den Wänden verursacht. Diese Strömung wird Poiseuille-Strömung, Kanalströmung, Verdrängungsströmung (displacement-flow) oder auch Druckgradientströmung (pressure-flow) genannt. Im zweiten Fall ist eine Wand in Ruhe und die zweite bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $U$  parallel zu der ersten. Man spricht hier von einer Couette-Strömung oder Scherströmung (shear-flow).

In beiden Fällen sind alle Stromlinien der mittleren Geschwindigkeit  $u$  parallel und das Geschwindigkeitsprofil ist längs der Strömung überall gleich,  $u$  also nur eine Funktion von  $y$ . Von den Schwankungsgrößen  $u'$ ,  $v'$  und  $w'$  haben nur die Fluktuationsglieder  $\overline{u' \cdot v'}$  und  $\overline{v'^2}$  Bedeutung, alle anderen können vernachlässigt werden.

### 6.1 Couette-Strömung

Die turbulente Couette-Strömung ist dadurch gekennzeichnet, dass im ganzen Strömungsbereich die Schubspannung  $\tau$  konstant ist

$$\tau = \tau_w = \text{konstant} \quad (19)$$

Der Mittelwert des Druckes  $p$  ist längs der Hauptströmungsrichtung konstant, also unabhängig von  $x$ , variiert aber senkrecht zur Plattenoberfläche ( $y$ -Richtung). Er ist im Strömungsfeld kleiner oder gleich dem Wert an der Wand.

Für die Geschwindigkeitsverteilung ist das S-Profil charakteristisch, das mit sinkender Reynoldszahl  $Re = \frac{U \cdot h}{\nu}$  im laminaren Bereich in eine Gerade übergeht. Mit wachsender Reynoldszahl nähert sich das Profil einer  $\lrcorner$ -Form (Abb. 81). Unmittelbar an der Wand befindet sich eine sehr dünne laminare Unterschicht mit linearem Geschwindigkeitsanstieg. Daran schliesst sich ein wandnahes Gebiet an, in dem das universelle logarithmische Wandgesetz anschliesst:

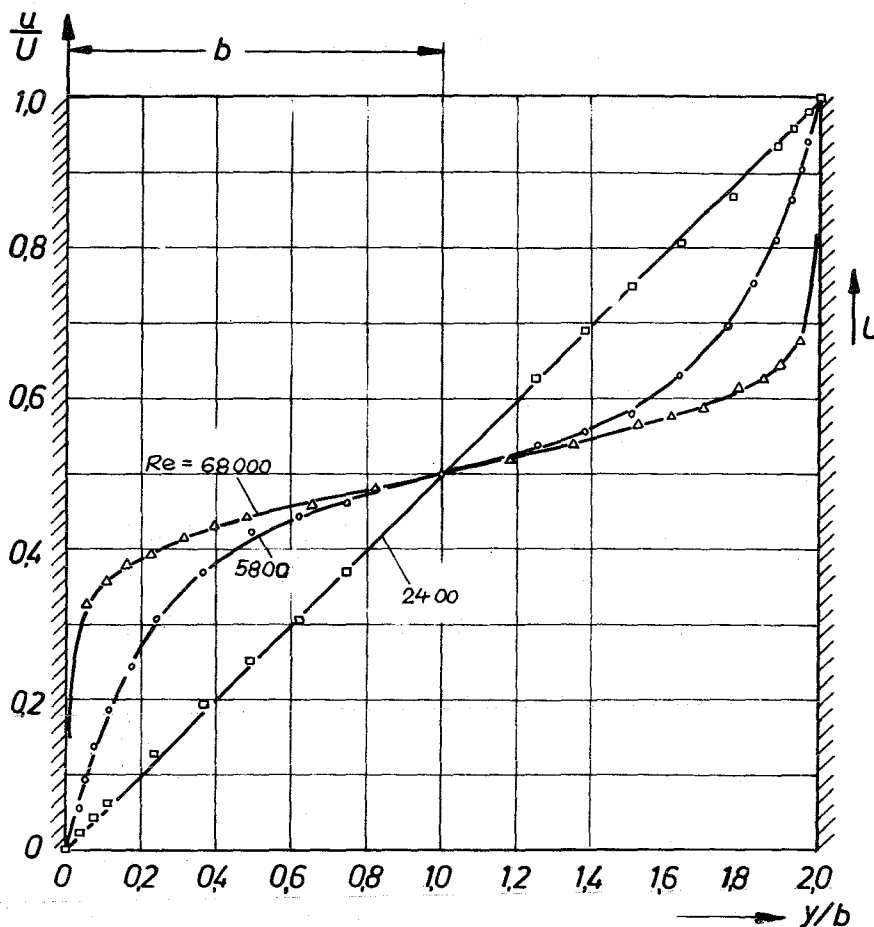


Abb. 81: Gemessene Geschwindigkeitsprofile der geradlinigen Couette-Strömung nach Reichardt [9]

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln y^+ + c \quad (20)$$

wobei  $\kappa \approx 0,4$  und  $c \approx 5,5$  einzusetzen sind.

$u_\tau$  ist dabei die sog. Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = u_{\tau w} = \sqrt{\tau_w/\rho} \quad (21)$$

und  $y^+$  der dimensionslose Wandabstand

$$y^+ = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu} \quad (22)$$

Für turbulente Strömung wird in Analogie zu dem Zähigkeitsbeiwert des Stokesschen Reibungsgesetzes der laminaren Strömung

$$\tau_e = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (23)$$

für die Schubspannung der turbulenten Scheinzähigkeit der bekannte Ansatz

$$\tau_t = A \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \cdot \epsilon^* \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (24)$$

gemacht.  $A$  wird turbulente Austauschgrösse genannt,  $\epsilon^* = A/\rho$  scheinbare kinematische Zähigkeit genannt. Für die gesamte Schubspannung  $\tau$  erhält man damit

$$\tau = (\eta + A) \frac{\partial u}{\partial y} = \eta(1 + \epsilon^*/\nu) \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (25)$$

Reichardt [9] erfasst die durch den Impulsaustausch bewirkte scheinbare turbulente Zähigkeit mit Hilfe der dimensionslosen turbulenten Austauschgrösse  $A/(\eta \cdot y_b)$ , wobei

$$y_b = \frac{b \cdot u_\tau}{\nu} \quad (26)$$

und  $b = h/2$  die halbe Kanalhöhe ist. Abb. 82 zeigt Messwerte der Austauschgrösse, die sehr nahe an der theoretischen Kurve liegen, die durch die Gleichung

$$\frac{A}{\eta \cdot y_b} = 0,4 \left[ \frac{y}{b} - 0,5 \cdot \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \quad (27)$$

gegeben ist.

Die Geschwindigkeitsprofile konnte Reichardt durch folgende Gleichung erfassen:

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{2} - \frac{u_t}{U} \cdot 5,75 \log \left( 2 \frac{b}{y} - 1 \right) \quad (28)$$

Der Übergang von laminarer in turbulente Strömung liegt bei  $Re = U \cdot h / \nu \approx 3000$ .

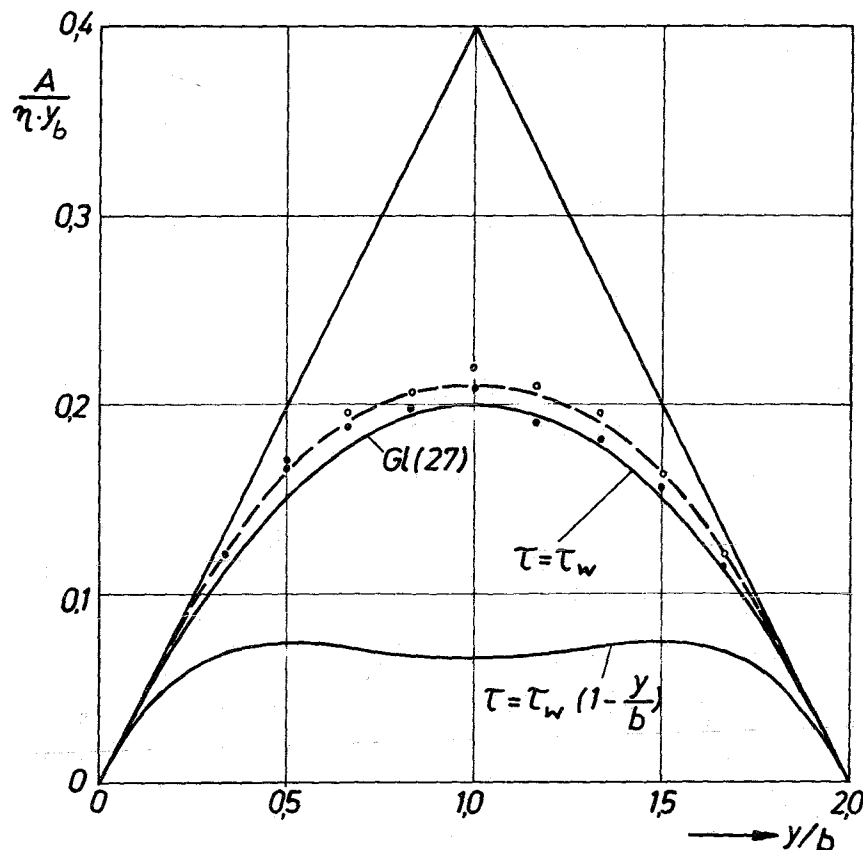


Abb. 82: Verlauf der dimensionslosen turbulenten Austauschgrösse  $A/(\eta \cdot y_b)$  über dem Wandabstand  $y/b$  nach Reichardt [9] bei Couette- und Poiseuille-Strömung

## 6.2 Poiseuille-Strömung

Bei der turbulenten Kanalströmung ist die Schubspannung nicht mehr konstant, sondern fällt linear von ihrem grössten Wert an den beiden Wänden auf Null in Kanalmitte ab:

$$\tau = \tau_w \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (29)$$

Sowohl Schubspannungs- wie auch Geschwindigkeitsverteilung sind symmetrisch zur Kanalmitte. Wie bei laminarer Strömung nimmt der Druck linear in Strömungsrichtung ab ( $dp/dx = \text{const.}$ ).

Abb. 83 zeigt die von Pai [8] gewonnenen theoretischen Geschwindigkeitsverteilungen  $u/u_{\max}$  und  $\overline{u'v'}/u_{\tau w}^2$ , die sehr gut mit den von Laufer [10] angegebenen

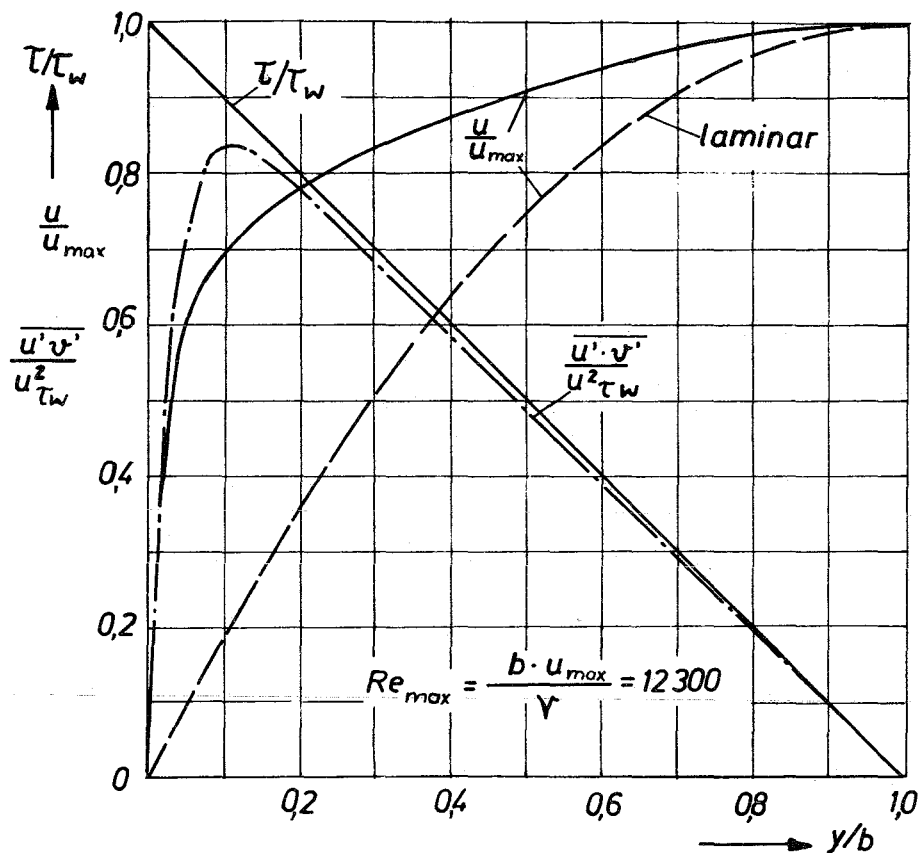


Abb. 83: Mittlere Geschwindigkeit und Korrelation zwischen Schwankungsgrössen über dem Kanalquerschnitt nach Pai [8] und Laufer [10]



Versuchswerten übereinstimmen. Im Bereich bis ungefähr  $y/b=0,01$  bis  $0,02$  erstreckt sich die laminare Unterschicht. Anschliessend folgt wieder ein Bereich, wo das logarithmische Wandgesetz gilt.

Die dimensionslose Austauschgrösse  $A/\eta \cdot y_b$  (Abb. 82) steigt anfänglich von der Wand zur Mitte zu an, erreicht ein Maximum und fällt dann bei Annäherung in die Mitte wieder auf ein relatives Minimum ab. Die turbulente Fluktuationsgrösse  $\overline{u'v'}/u_{\tau w}^2$  legt sich bei Annäherung an die Mitte immer mehr an die Schubspannungsgerade an. Die Ordinatendifferenz stellt den Anteil der Viskosität an der Schubspannung dar ( $\tau = \tau_\ell + \tau_t$ ).

## 7. Theorie der turbulenten Lagerschmierung (dünne Filme)

### 7.1 Überblick

Wie schon früher festgestellt wurde, beginnt die Turbulenz sich in Lagerschmierfilmen zu entwickeln, wenn die Reynoldszahl  $Re^* = U \cdot \Delta R / \nu > 1000$  ist. Es folgt dann ein Übergangsbereich bis ungefähr  $Re^* = 2000$ , von wo ab dann voll entwickelte Turbulenz vorhanden ist. Nur dafür gilt die im Folgenden behandelte Theorie.

Der erste Versuch, die turbulente Lagerströmung theoretisch zu erfassen, stammt von Smith und Fuller [11]. Sie machen die stark vereinfachende Annahme, dass man die Strömung eines unendlich breiten Radiallagers durch Überlagerung von Couette-Strömung und Poiseuille-Strömung näherungsweise darstellen kann. Tao hat diese Annahme auch für Strömungen

mit Seitenfluss bei einem schmalen Lager [12] und für Lager ohne Seitenfluss [13] verwendet. Dabei ermittelte er die über den Spalt gemittelte mittlere Geschwindigkeit in Richtung einer Stromlinie mit Hilfe des Widerstandsgesetzes nach Blasius. Diese Entkopplung der beiden Strömungskomponenten ist als eine brauchbare Näherungsmethode nicht haltbar. Sie vernachlässigt z.B. völlig die sehr wichtigen Einflüsse einer starken Couette-Strömung auf den Widerstand einer überlagerten, schwachen axialen und tangentialen Verdrängungsströmung (Poiseuille-Strömung). Chou und Saibel [14] waren die ersten, die die Prandtlsche Mischungsweg-Hypothese auf ein Lager ohne Seitenfluss anwendeten. Sie nahmen aber einen Verlauf des Mischungsweges an, der besonders in unmittelbarer Wandnähe sehr stark von experimentell bestimmten Verteilungen abweicht, was zu grossen Fehlern führt.

Die erste auch quantitativ brauchbare Theorie wurde in einer Reihe von Arbeiten [14] bis [23] von Constantinescu entwickelt. Er verwendete die Prandtlsche Mischungsweg-Hypothese und nahm wie ursprünglich auch Prandtl den Mischungsweg proportional dem Wandabstand an. Constantinescu berücksichtigt in seiner Theorie aber nicht, dass in unmittelbarer Wandnähe in der laminaren Unterschicht der Mischungswegverlauf nicht linear ist, wodurch die Grösse der scheinbaren kinematischen Zähigkeit überschätzt wird. Reynolds [24] war der erste, der die Strömung in die laminare Unterschicht, ein wandnahes Gebiet, wo das logarithmische Wandgesetz gilt, und ein Kerngebiet unterteilte.

## 7.2 Verteilung von Geschwindigkeit, Schubspannung und Verhältnis der turbulenten Austauschgrösse zur dynamischen Zähigkeit

Reichardt [25] versucht in einer wichtigen Arbeit die oben genannten drei Bereiche formelmässig durch eine Beziehung für den Fall der Rohrleitung zu erfassen.

### a) Laminare Unterschicht

Die laminare Unterschicht ist durch lineare Geschwindigkeitsverteilung gekennzeichnet:

$$\frac{du}{dy} = \text{const}$$

Da hier auch die Newtonsche Hypothese  $\tau = \eta \cdot du/dy$  gilt, folgt, wenn man weiterhin die Annahme konstanter Zähigkeit  $\eta$  beibehält, dass die Schubspannung in diesem Gebiet konstant ist und zwar gleich dem Wert an der Wand  $\tau_w$ . Daraus ergibt sich mit  $u = 0$  für  $y = 0$

$$u = \frac{\tau_w}{\eta} \cdot y \quad (30)$$

Mit Hilfe der Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$ , des dimensionslosen Wandabstandes  $y^+$  (Gl. 21 u. 22) und der dimensionslosen Geschwindigkeit  $u^+$  (Gl. 20) erhält man für Gl. (30)

$$u^+ = y^+ \quad (31)$$

### b) Wandnahes Gebiet

Im anschliessenden wandnahen Gebiet dominiert die turbulente Bewegung und kann die viskose Zähigkeit  $\eta$  gegenüber der turbulenten

Austauschgrösse  $A$  vernachlässigt werden. Aus Gl. (25) folgt dann

$$\frac{\tau}{\rho} = \epsilon^* \cdot \frac{du}{dy} \quad (32)$$

Die scheinbare kinematische Zähigkeit  $\epsilon^*$  ist keine Konstante. Sie ist mit dem Impulsaustausch von einer Schicht in die andere verbunden. Dieser Austausch wird durch die Diffusion von Flüssigkeitsteilchen auf Grund der Turbulenz bestimmt. Die scheinbare kinematische Zähigkeit  $\epsilon^*$  kann dem Wandabstand  $y$  proportional angenommen werden

$$\epsilon^* = \kappa \cdot u_t \cdot y \quad \text{bzw.} \quad \epsilon^*/\nu = \kappa \cdot y^+ \quad (33)$$

Die bisherigen experimentellen Untersuchungen der turbulenten Strömungen in Rohren, Kanälen, in der Reibungsschicht an einer ebenen Platte und bei der Couette-Strömung haben ergeben, dass die Geschwindigkeit in Wandnähe annähernd mit dem Logarithmus des Wandabstandes ansteigt. Es gilt deshalb auch bei der Lagerströmung, die nicht sehr stark von der Couetteströmung abweicht:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln y^+ + \text{Const.} \quad (20)$$

Bildet man die Ableitung  $du^+/dy^+$ , macht die dimensionslose Schreibweise rückgängig und setzt  $du/dy$  und den Wert für  $\epsilon^*$  in Gl. (33) in Gl. (32) ein, dann erhält man als Ergebnis

$$\tau = \text{konst} = \tau_w \quad (34)$$

Das heisst, die Schubspannung ist im wandnahen Gebiet ungefähr konstant. Dies trifft um so genauer zu, je grösser das Verhältnis  $A/\eta = \epsilon^*/\nu$  ist.

c) Kerngebiet

Das Wandgesetz gilt auch noch in grösserer Entfernung von der Wand, wo die turbulente Scheinreibung  $\tau_t$  von der Wandschubspannung  $\tau_w$  schon merklich abweicht. Erst im Innern des Strömungsquerschnittes treten grössere Abweichungen vom Wandgesetz auf und zwar sind die tatsächlichen Geschwindigkeiten grösser als die nach Gl. (20) berechneten. Wenn diese "Zusatzgeschwindigkeit im Innern" auch gering ist, so ist doch die Tatsache von grundsätzlicher Bedeutung, dass hier die dimensionslose Geschwindigkeit  $u^+$  nicht allein von  $y^+$ , sondern auch vom Wandabstand  $y$  unmittelbar abhängt.

Reichardt entwickelte zunächst eine Formel, in welcher die laminare Unterschicht und der wandnahe Bereich gemeinsam erfasst wird. Sie lautet

$$\frac{\varepsilon^*}{\nu} = \frac{A}{\eta} = \kappa (y^+ - \delta_\ell^+ \tanh \frac{y^+}{\delta_\ell^+}) \quad (35)$$

Mit  $\kappa = 0,4$  ermittelte er aus Versuchen  $\delta_\ell^+ = 11$ . Setzt man Gl. (35) in (20) ein, dann erhält man durch näherungsweise Integration

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa \cdot y^+) + 7,8 \left( 1 - e^{-\left(\frac{y^+}{\delta_\ell^+}\right)} - \frac{y^+}{\delta_\ell^+} \cdot e^{-0,33 \cdot y^+} \right) \quad (36)$$

Reichardt entwickelte weiterhin ein Mittengesetz, welches das Kerngebiet erfasst und schliesslich eine Gesamtformel für den ganzen Querschnitt, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

### 7.3 Theorie des Lagers ohne Seitenfluss von Ng

Ng [26] stellte fest, dass mit  $\kappa = 0,4$  und  $\delta_x^+ = 10,7$  bei dünnen Schmierfilmen der Strömungsbereich von den beiden Wänden bis zum Geschwindigkeitsmaximum durch die Formel Gl. (35) gut erfasst wird. Er gelangte zu diesem Ergebnis, indem er die Gl. (35) mit den Ergebnissen von Ludwig und Tillmann [27], Clauser [28] und Ross [29] verglich und gute Übereinstimmung feststellte. Der Kernbereich wird durch Gl. (35) ebenfalls näherungsweise beschrieben, da die Abweichungen vom logarithmischen Wandgesetz gering sind.

Schon Constantinescu [16] hat gezeigt, dass man die Änderungen des mittleren Druckes senkrecht zur Strömungsrichtung vernachlässigen kann:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad (37)$$

Damit bleibt von den Gleichungen (12) für eine stationäre zweidimensionale turbulente Lagerströmung, bei der man die Trägheitseffekte vernachlässigen kann, nur noch die folgende Gleichung übrig:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \cdot \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (38)$$

Dafür kann man auch schreiben

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \cdot \partial \overline{u'v'} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (39)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \cdot \epsilon^* \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \cdot f(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial p}{\partial x} \quad f(y) = 1 + \epsilon^*/\nu \quad (40)$$

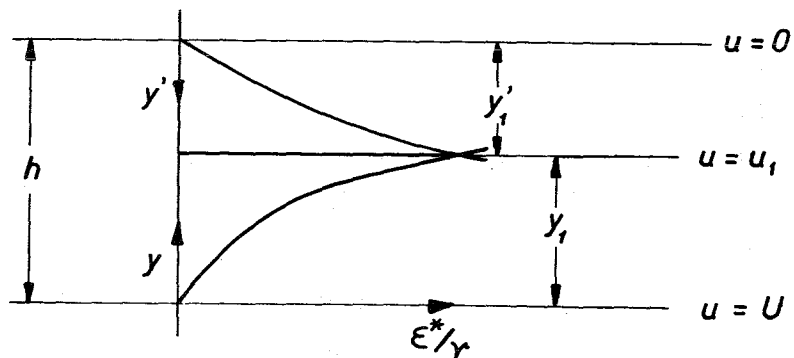


Abb. 84:  $\epsilon^*/\nu$  - Verteilung bei planarer Strömung

Der Schmierpalt wird in zwei Bereiche unterteilt, in denen die  $\epsilon^*/\nu$  - Verteilung stetig, deren Ableitung bereichsweise stetig sein soll (Abb. 84). Die Randbedingung für den unteren Bereich ist

$$\text{für } x = 0, u = U \quad \text{und} \quad y = y_1, u = u_1 \quad (41)$$

und im oberen Bereich

$$\text{für } y = y_1, u = u_1 \quad \text{und} \quad y = h, u = 0 \quad (42)$$

Mit der neuen Koordinate  $y' = h - y$  wird aus (42)

$$\begin{aligned} y' = y_1' = h - y_1, u = u_1 \quad \text{und} \\ y' = 0, u = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Mit diesen Randbedingungen erhält man nach zweimaliger Integration für die Geschwindigkeitsverteilung im unteren Bereich

$$u_o = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} y_1^2 \cdot G(y_1) \left( \frac{G(y)}{G(y_1)} - \frac{F(y)}{F(y_1)} \right) + (u_1 - U) \cdot \frac{F(y)}{F(y_1)} + U \quad (44)$$

bzw. im oberen Bereich

$$u_h = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (h-y_1)^2 \hat{G}(h-y_1) \left( \frac{\hat{G}(y')}{\hat{G}(h-y_1)} - \frac{\hat{F}(y')}{\hat{F}(h-y_1)} \right) + u_1 \frac{\hat{F}(y')}{\hat{F}(h-y_1)} \quad (45)$$

Dabei sind folgende Abkürzungen verwendet

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{y_1} \int_0^y \frac{dy}{f(y)} & G(y) &= \frac{1}{y_1^2} \int_0^y \frac{y \cdot dy}{f(y)} \\ \hat{F}(y') &= \frac{1}{h-y_1} \int_0^{y'} \frac{dy'}{f(y')} & \hat{G}(y') &= \frac{1}{(h-y_1)^2} \int_0^{y'} \frac{y' \cdot dy'}{f(y')} \end{aligned} \quad (46)$$

$$f(y) = f(y') = 1 + \varepsilon^*/v \quad (\text{siehe Gl. (35)})$$

Die Schubspannungen an den Wänden ermittelt man mit Hilfe der folgenden Relationen

$$\tau_0 = \eta f(y) \left. \frac{\partial u_0}{\partial y} \right|_{y=0} \quad \tau_h = - \eta f(y') \left. \frac{\partial u_h}{\partial y'} \right|_{y'=0} \quad (47)$$

$$\tau_0 = - y_1 \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{G(y_1)}{F(y_1)} + \eta (u_1 - U) \frac{1}{y_1 \cdot F(y_1)} \quad (48)$$

$$\tau_h = (h-y_1) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\hat{G}(h-y_1)}{\hat{F}(h-y_1)} - \frac{\eta \cdot u_1}{(h-y_1) \cdot \hat{F} \cdot (h-y_1)} \quad (49)$$



Um leicht mit den Ergebnissen von Constantinescu [16] vergleichen zu können, verwendet Ng als Parameter ebenfalls den dimensionslosen Druckgradienten

$$B_x \equiv - \frac{h^2}{\eta \cdot U} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (50)$$

und die Reynoldszahl nach Gl. (2)  $Re = U \cdot h / \nu$ .  
Ferner wird die dimensionslose Bereichsgrenze als Parameter eingeführt:

$$y_1^+ = \frac{y_1}{\nu} \sqrt{\frac{|\tau_o|}{\rho}} \quad y_1^- = \frac{h-y_1}{\nu} \sqrt{\frac{|\tau_h|}{\rho}} \quad (51)$$

Für die Bereichsgrenze muss  $y_1^+ = y_1^-$  sein, woraus folgt, dass

$$F(y_1^+) = \hat{F}(y_1^-) \quad \text{und} \quad G(y_1^+) = \hat{G}(y_1^-)$$

Nach Lösung der Integralfunktionen (46) lassen sich  $Re$ ,  $B_x$  und  $u_m/U$  als Funktionen von  $y_1^+$  und  $y_1/h$  ausdrücken, nachdem  $u_1/U$  eliminiert ist.  $B_x$  ist nur eine Funktion von  $y_1/h$ . Wählt man  $B_x$  als unabhängigen Parameter, so liegt auch  $y_1/h$  fest.

Ng berechnete die Geschwindigkeitsprofile  $u/U$  für die dimensionslosen Druckgradienten  $B_x = 20; -7,75; 2$  und  $3$  und vergleicht sie mit den Ergebnissen von Constantinescu und der Superposition von Poiseuille- und Couette-Strömung (Abb. 85).

Nun besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Druckgradienten ( $B_x$ ) und dem Mittelwert  $u_m$  der mittleren Geschwindigkeit  $u$ . Zieht man von  $u_m$  den Scheranteil der Couette-Strömung  $u_{mc}$  ab, so bleibt der Geschwindigkeitsanteil  $u_{mp}$  übrig, der dem Druckgradienten zuzuschreiben ist. Es gilt

$$u_m = u_{mc} + u_{mp} \quad (52)$$

oder in dimensionslosen Variablen

$$\frac{u_m}{U} = \frac{u_{mp}}{U} = \frac{u_m}{U} - \frac{u_{mc}}{U}$$

Bei der Couette-Strömung ist der Mittelwert über den Querschnitt gleich der halben Geschwindigkeit der bewegten Wand, also  $u_{mc}/U = 1/2$  und

$$\frac{u_m}{U} = \frac{u_m}{U} - \frac{1}{2} \quad (53)$$

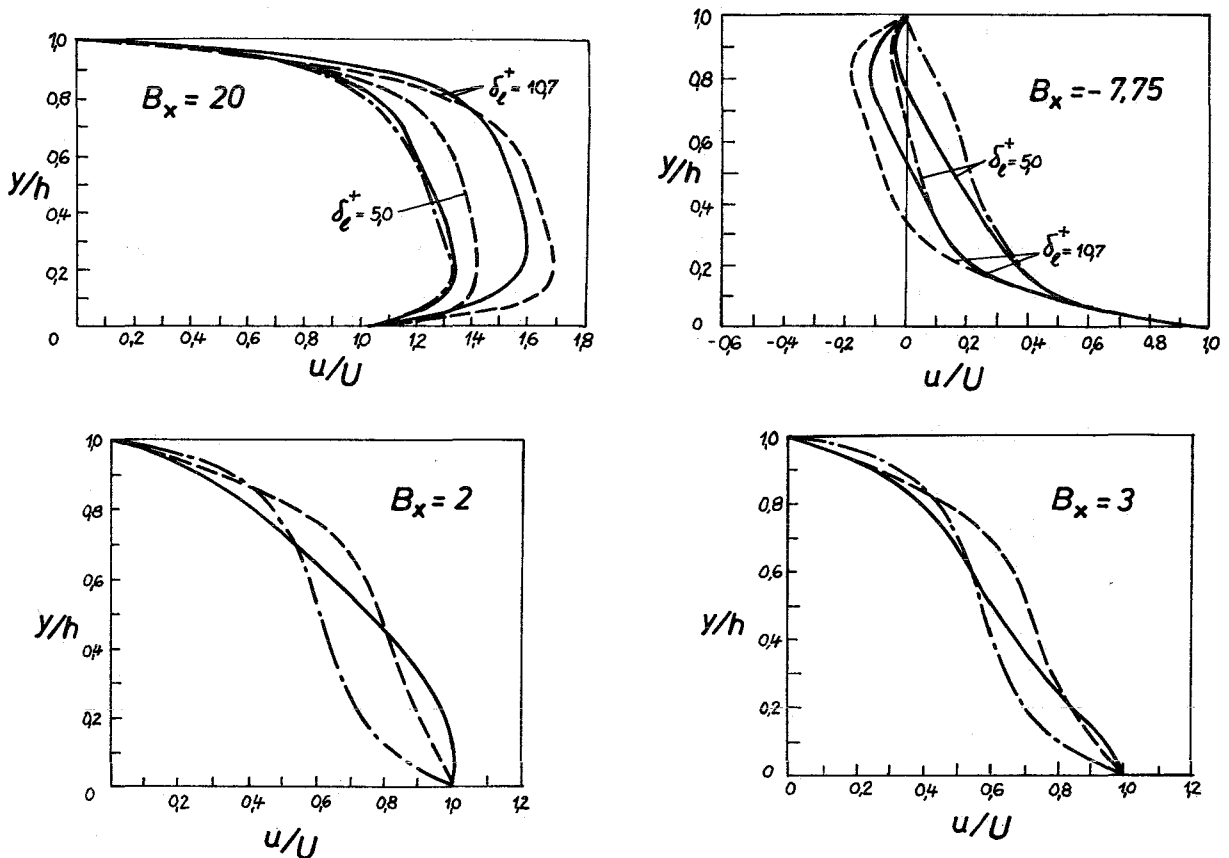


Abb. 85: Turbulente Geschwindigkeitsprofile

- Ng [26]
- - - Constantinescu [16]
- · - Superposition

Der Zusammenhang ist nun folgender

$$B_x = (K_0 + K_1 \cdot Re^n) \bar{u}_m \quad (54)$$

$K_0 = 12$  ist der Wert der laminaren Strömung. Für  $K_1$  und  $n$  gelten folgende Werte

$$\begin{array}{lll} \text{Ng: } K_1 = 0,00725 & n = 1,003 & 500 \leq Re \leq 5000 \\ K_1 = 0,0395 & n = 0,803 & 5000 \leq Re \leq 50000 \\ \text{Constan-} & & \\ \text{tinescu: } K_1 = 0,140 & n = 0,725 & 0 \leq Re \leq \infty \end{array} \quad (55)$$

Mit Gleichung (54) und (50) erhält man eine Beziehung für den Druckgradienten

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\eta \cdot U}{h^2} \cdot (K_0 + K_1 \cdot Re^n) u_m \quad (56)$$

Damit man aus Gleichung (56) die Druckverteilung bestimmen kann, muss noch eine Beziehung für  $\bar{u}_m$  aus der Kontinuitätsbedingung herangezogen werden. Die Flüssigkeitsmenge, die an einer bestimmten  $x$ -Stelle durch den Spalt strömt ist konstant und gleich der Menge an der Stelle  $x^*$ , wo  $\partial p / \partial x = 0$  (Couette-Strömung). Für diese ist aber  $u_m = u_{mc} = 0,5 U$ .

$$(u_{mc} + u_{mp}) h = 0,5 U \cdot h^* \quad (57)$$

$$u_{mp} = - 0,5 \cdot U \left(1 - \frac{h^*}{h}\right)$$

$$\bar{u}_m = - 0,5 \cdot \left(1 - \frac{h^*}{h}\right) \quad (58)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta \cdot U}{2 \cdot h^3} (K_0 + K_1 \cdot Re^n) (h - h^*) \quad (59)$$

Dies ist die Ausgangsgleichung zur Bestimmung der Druckverteilung, aus welcher durch eine weitere Integration die Lagerbelastung  $P$  gewonnen wird.

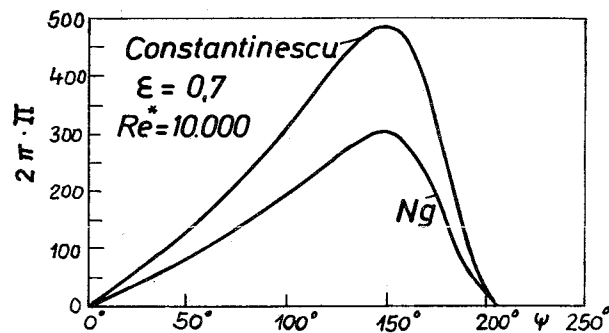


Abb. 86: Druckprofil,  $Re^* = 10.000$ ,  $\epsilon = 0,7$

Die Druckverteilung wird in dimensionsloser Form  $2\pi \cdot \Pi = 2\pi \cdot p \psi^2 / \eta \cdot \omega$  längs des Lagerumfangs in Abhängigkeit von  $\psi$  für  $Re^* = 10\ 000$  und die relative Exzentrizität  $\epsilon = e/\Delta R = 0,7$  in Abb. 86 dargestellt. Die Theorie von Ng ergibt niedrigere Drücke als Constantinescus Theorie. Das Verhältnis der Drücke, die nach den beiden Theorien gewonnen werden, ist konstant und zwar unabhängig von der relativen Exzentrizität für  $Re^* > 1000$ . In gleichem Masse ergibt die Theorie nach Ng entsprechend niedrigere Belastungsfähigkeiten, wie Abb. 87 veranschaulicht, wo die dimensionslose Belastungskennzahl  $2\pi \cdot S_0$  über der Reynoldszahl für verschiedene relative Exzentrizitäten aufgetragen ist.

Die Verlagerungswinkel, die nach den beiden Theorien gewonnen werden, stimmen weitgehend überein. Die Abweichungen sind kleiner als  $1^\circ$ .

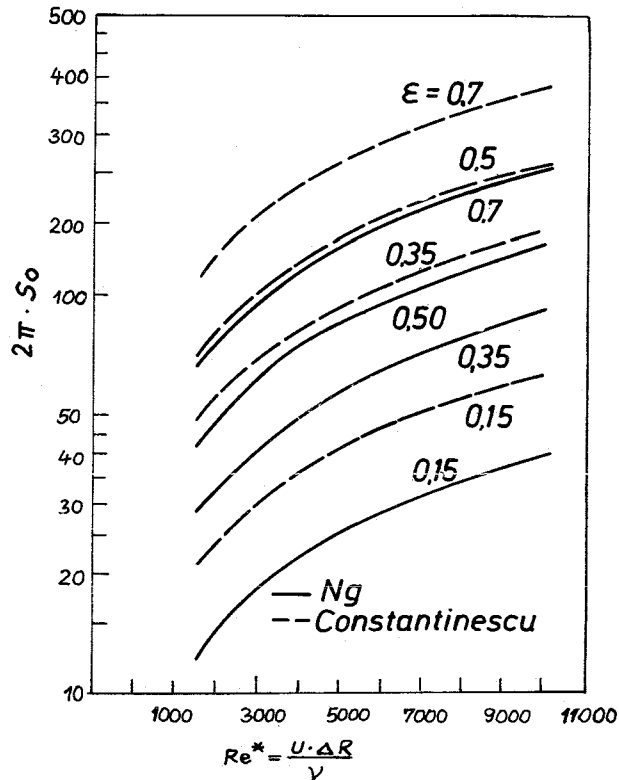


Abb. 87: Dimensionslose Belastung über Reynolds-Zahl nach Ng und Constantinescu

#### 7.4 Linearisierte Theorie des Lagers mit Seitenfluss nach Ng und Pan

Die linearisierte Theorie von Ng und Pan [30] baut auf der vorangegangenen Arbeit von Ng auf und dehnt die Theorie auf den Fall endlicher Lagerbreite aus. Es wird wieder die Gültigkeit der empirischen Formel von Reichardt Gl. (35) vorausgesetzt mit  $\kappa = 0,4$  und  $\delta_\ell^+ = 10,7$

$$\frac{\epsilon^*}{\nu} = \kappa \left[ y^+ - \delta_\ell^+ \tanh \frac{y^+}{\delta_\ell^+} \right] \quad (35)$$

Im Gegensatz zum bisher üblichen Verfahren wird die Schubspannungsgeschwindigkeit nicht mehr auf die Wandschubspannung  $\tau_w$  bezogen, sondern auf den Betrag der örtlichen Schubspannung:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} \quad (60)$$

Der Schmierfilm wird in zwei Halbkanäle getrennt, die jeweils von einer Wand bis zur Kanalmitte reichen. Der dimensionslose Wandabstand wird jeweils von der Wand aus gerechnet und deshalb für beide Kanalhälften getrennt definiert:

$$y^+ = \begin{cases} y^* \cdot \frac{h}{v} \cdot \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} & 0 \leq y^* \leq \frac{1}{2} \\ (1-y^*) \cdot \frac{h}{v} \cdot \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} & \frac{1}{2} \leq y^* \leq 1 \end{cases} \quad (61)$$

mit  $y^* = \frac{y}{h}$  (62)

Die Trägheitsglieder und die Änderung des mittleren Druckes senkrecht zur Kanalwand werden vernachlässigt. Von den Gleichungen (12) verbleiben dann noch

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \cdot \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (63)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho \cdot \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (64)$$

Es wird nun vorausgesetzt, dass der turbulente Impulsaustausch isotrop ist, d.h. sowohl in x- als auch in z-Richtung nach der gleichen Gesetzmässigkeit verläuft:

$$\tau_{xy} = \eta \left(1 + \frac{\varepsilon^*}{\nu}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (65)$$

$$\tau_{zy} = \eta \left(1 + \frac{\varepsilon^*}{\nu}\right) \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (66)$$

Integriert man die Gleichungen (63) und (64) und berücksichtigt (65) und (66), so erhält man

$$\tau_{xy}(y) = \tau_{xy}(h/2) + (y - \frac{h}{2}) \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left(1 + \frac{\varepsilon^*}{\nu}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (67)$$

$$\tau_{zy}(y) = \tau_{zy}(h/2) + (y - \frac{h}{2}) \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left(1 + \frac{\varepsilon^*}{\nu}\right) \frac{\partial w}{\partial y} \quad (68)$$

Aus einer nochmaligen Integration folgt

$$u(y) = \frac{1}{\eta} \left[ \tau_{xy}(h/2) \cdot \int_0^y \frac{dy'}{1 + \frac{\varepsilon^*}{\nu}} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \int_0^y \frac{(y' - h/2) dy'}{1 + \frac{\varepsilon^*}{\nu}} \right] \quad (69)$$

$$w(y) = \frac{1}{\eta} \left[ \tau_{zy}(h/2) \cdot \int_0^y \frac{dy'}{1 + \frac{\varepsilon^*}{\nu}} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \int_0^y \frac{(y' - h/2) dy'}{1 + \frac{\varepsilon^*}{\nu}} \right] \quad (70)$$

Um die Berechnung der Gleichungen (67) bis (70) zu erleichtern, wird die weitere wichtige Annahme gemacht, dass das Strömungsfeld durch eine nur kleine Störung der turbulenten Couette-Strömung zustande kommt. Dies wird durch die folgenden Ansätze zum Ausdruck gebracht:

$$\tau_{xy} = \tau_c + \delta \cdot \tau_x \quad (71)$$

$$\tau_{zy} = \delta \cdot \tau_z \quad (72)$$

Mit  $|\tau| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2} \quad (73)$

erhält man

$$|\tau| = \tau_c + \delta \cdot \tau_x + F_1(\delta^2) \quad (74)$$

In ähnlicher Weise wird die Reichardtsche Formel für die Verteilung der scheinbaren kinematischen Zähigkeit linearisiert, indem nur die ersten beiden Glieder des Taylorpolynoms berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^*}{\nu}(y^*, |\tau|) &= \frac{\varepsilon^*}{\nu}(y^*, \tau_c) + \delta \cdot \tau_x \left. \frac{\partial (\varepsilon^*/\nu)}{\partial |\tau|} \right|_{\tau=\tau_c} + F_2(\delta^2) \\ &= f_c(y^*) - 1 + \frac{\delta \cdot \tau_x}{\tau_c} \cdot g_c(y^*) + F_2(\delta^2) \end{aligned} \quad (75)$$

Dabei bedeuten

$$f_c(y^*) - 1 = \kappa \left( y^* \cdot h_c^+ - \delta_\ell^+ \tanh \left( y^* \cdot \frac{h_c^+}{\delta_\ell^+} \right) \right) \quad (76)$$

$$g_c(y^*) = \frac{\kappa}{2} \cdot y^* \cdot h_c^+ \cdot \tanh^2 \left( y^* \cdot \frac{h_c^+}{\delta_\ell^+} \right) \quad (77)$$

$$h_c^+ = \frac{h}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}} \quad (78)$$

Die weiteren Ableitungen führen auf folgende Gleichungen für die Geschwindigkeitsverteilung in x- und z-Richtung:

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{2} + \frac{(h_c^+)^2}{\text{Re}} \cdot \int_{1/2}^{y^*} \frac{dy'}{f_c(y')} - B_x \int_0^{y^*} \frac{(1/2 - y')}{f_c(y')} \left[ 1 - \frac{g_c(y')}{f_c(y')} \right] dy' \quad (79)$$

$$\frac{w}{U} = - B_z \int_0^{y^*} \frac{(1/2 - y')}{f_c(y')} dy' \quad (80)$$

$$B_x = \frac{h^2}{\eta \cdot U} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{und} \quad B_z = \frac{h^2}{\eta \cdot U} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad (81)$$

sind dabei die beiden dimensionslosen Druckgradienten in x- und z-Richtung.



Integriert man die beiden Gl. (79) und (80) über die Kanalbreite und berücksichtigt die Kontinuitätsbedingung, so erhält man eine Differentialgleichung für den Druck von der Form

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\eta} \cdot G_x \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\eta} \cdot G_z \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (82)$$

Bis auf die Funktionen  $G_x$  und  $G_z$  und den Faktor  $1/2$  stimmt diese Gleichung der Form nach mit der Reynoldsschen Differentialgleichung für die laminare Strömung überein.  $G_x$  und  $G_z$  sind bei der vorliegenden linearen Theorie reine Funktionen der Reynoldszahl  $Re = U \cdot h / \nu$  und in Diagramm Abb. 88 aufgetragen. Die Randbedingungen sind die gleichen wie bei laminarer Lagerströmung und die allgemein üblichen.

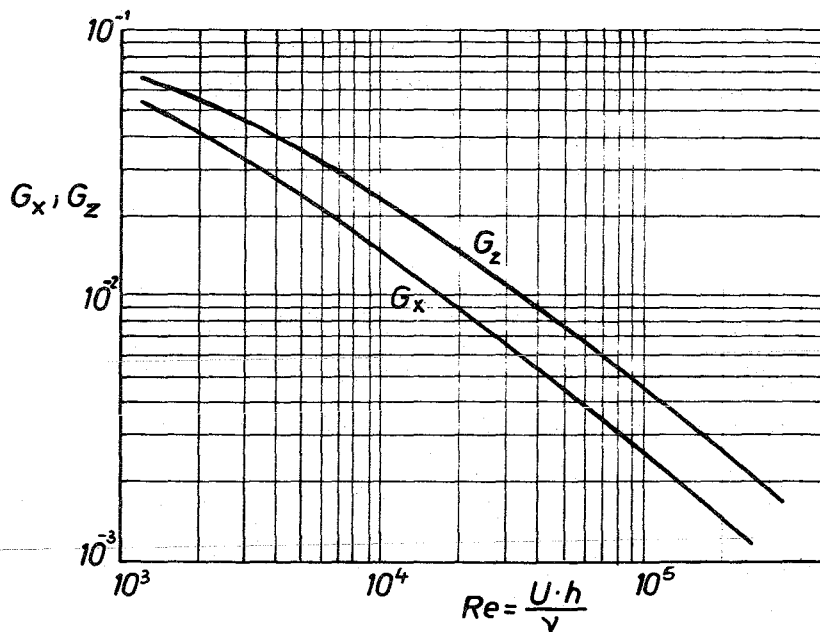


Abb. 88:  $G_x$  und  $G_z$  in Abhängigkeit von  $Re = U \cdot h / \nu$

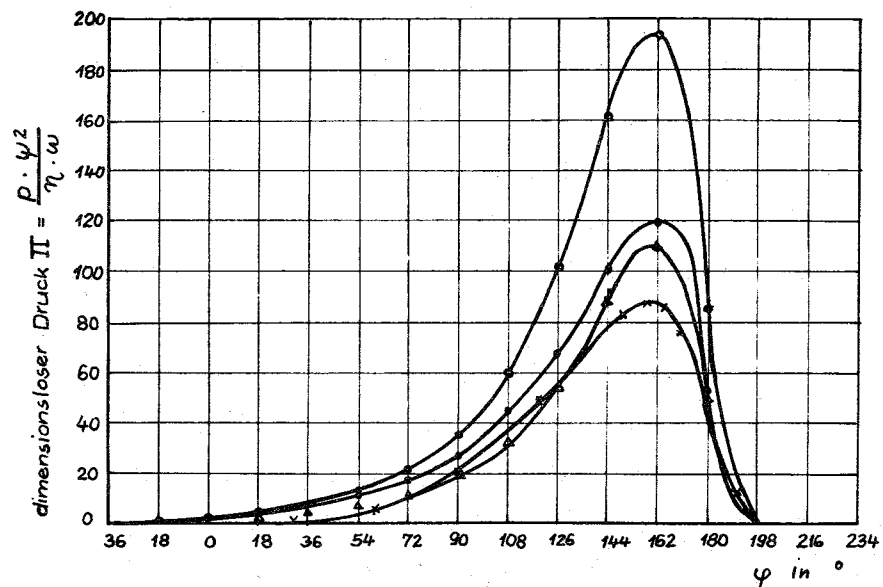


Abb. 89: Vergleich verschiedener berechneter Druckprofile mit den experimentellen Daten von Smith und Fuller [11]

- Constantinescu [16],  $\kappa = 0,4$
- △ Arwas-Sternlicht [3],  $\kappa = 0,16$
- x Smith-Fullers experimentelle Daten [11]
- Vorliegende linearisierte Theorie  
 7450 U/min,  $\epsilon = 0,8$ ,  $\psi = 2,93 \text{ ‰}$   
 $\beta = 1$ ,  $D = 3''$

Die Lösung der Gleichung (82) erfolgt nach der numerischen Differenzenmethode mit Hilfe eines digitalen Computers. Die Lösung für ein  $360^\circ$ -Lager mit einem Breitenverhältnis von  $B/D = 1$  wird mit den experimentellen Ergebnissen von Smith und Fuller [11] verglichen. Abb. 89 gibt einen Vergleich des Druckverlaufes in Lagermitte. Die Berechnung gibt 20% zu hohe Werte des Spitzendruckes an, zeigt aber einen

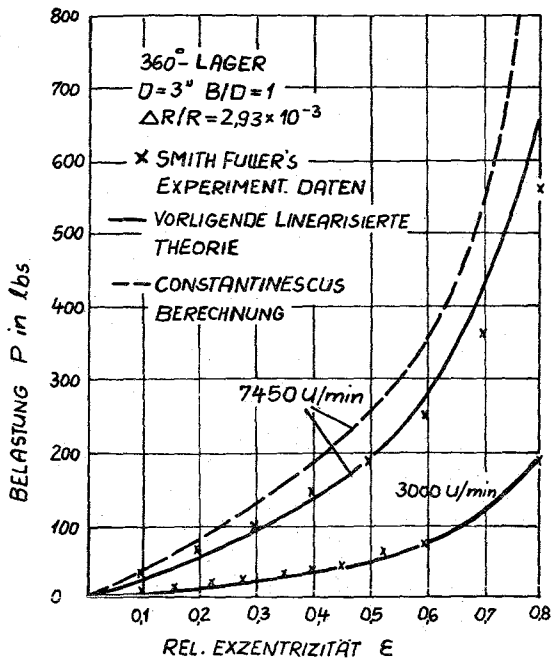


Abb. 90: Belastung über relativer Exzentrizität

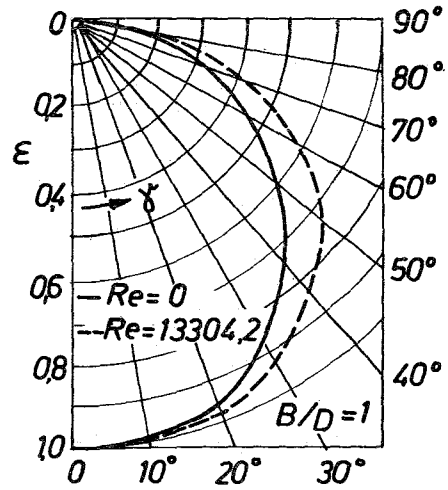


Abb. 93: Theoretische Verlagerungskurven bei verschiedenen Reynoldszahlen

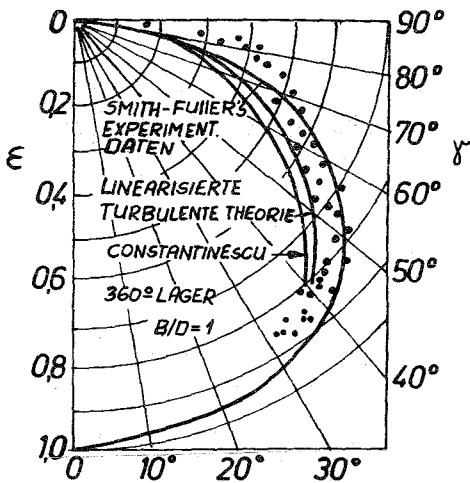


Abb. 91: Verlagerungskurven nach Theorie und Messungen

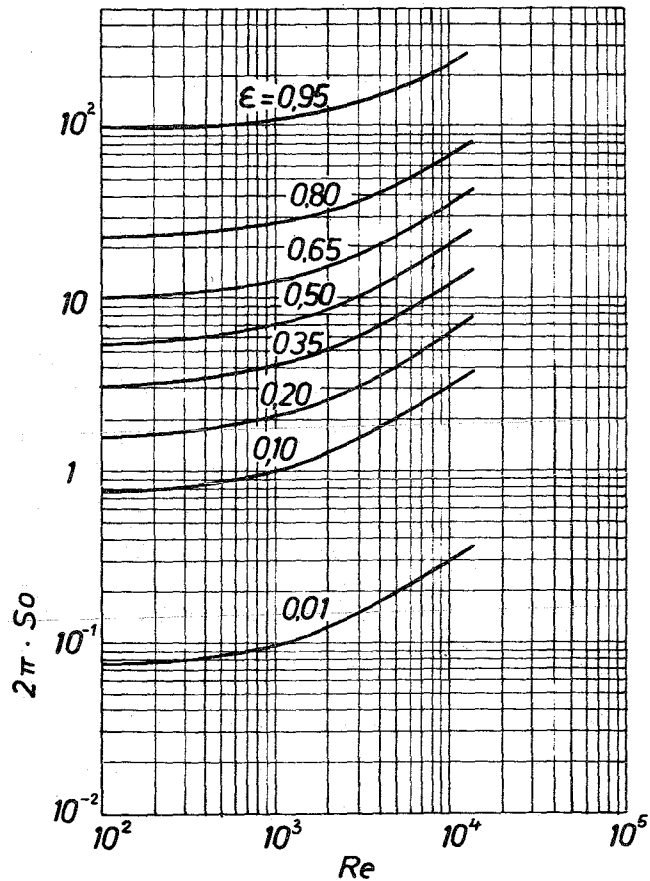


Abb. 92: Belastungsfähigkeit eines turbulenten 360°-Lagers mit B/D = 1

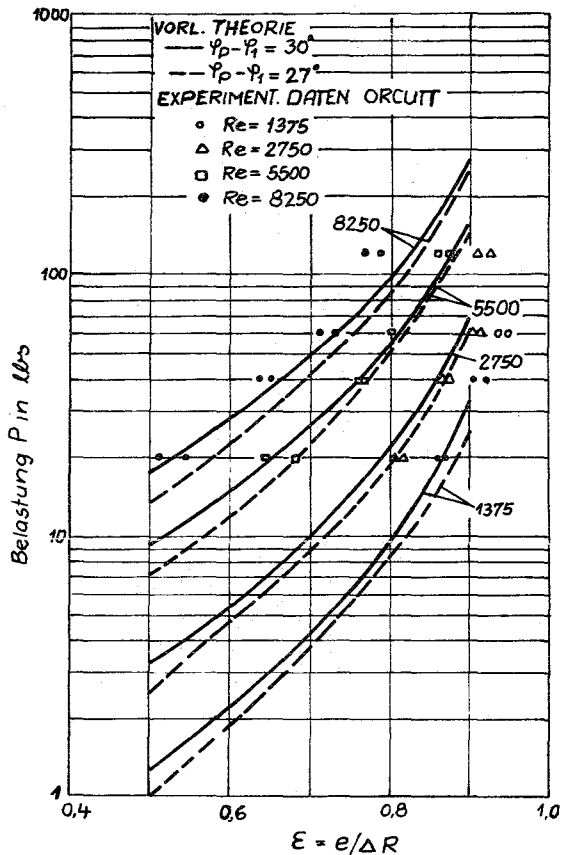


Abb. 95: Belastungskennlinie eines  $60^\circ$ -Lagers mit  $\psi = 2,9\%$

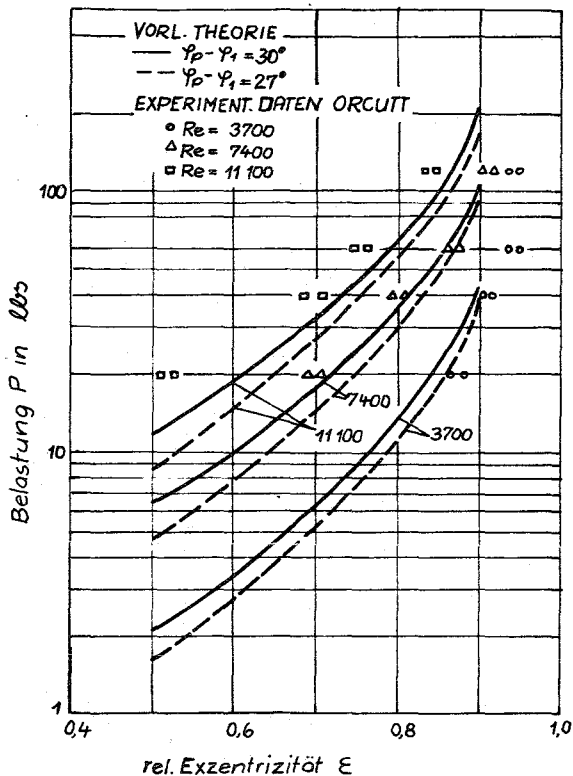


Abb. 94: Belastungskennlinie eines  $60^\circ$ -Lagers mit  $\psi = 3,9\%$

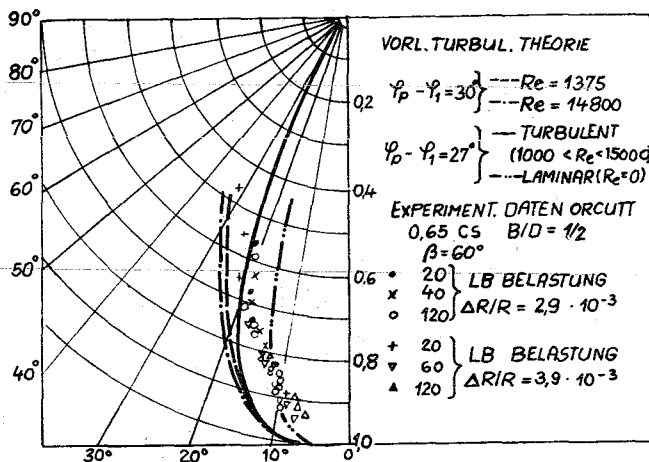


Abb. 96: Verlagerungswinkel beim  $60^\circ$ -Lager

zufriedenstellenden Verlauf, während die Methode von Constantinescu viel zu hohe Werte ergibt. Arwas und Sternlicht [31] verwenden Constantinescus Methode mit  $\kappa = 0,16$  anstatt  $\kappa = 0,4$  und erzielen damit bessere Übereinstimmung.

Den Verlauf der Belastung über der relativen Exzentrizität zeigt Abb. 90. Die Werte nach der linearisierten Theorie von Ng und Pan stimmen, mit Ausnahme grosser Exzentrizitäten, sehr gut mit den experimentellen Werten überein. Auch bei den zugehörigen Verlagerungskurven (Abb. 91) stimmt die neue Theorie besser, wenn auch noch nicht gut, mit den Messungen überein.

Abb. 92 zeigt wie die Tragkraft mit der Reynoldszahl nach der linearisierten Theorie ansteigt. Die Verlagerungsbahnen für verschiedene Reynoldszahlen sind aus Abb. 93 zu ersehen. In den Abb. 94 bis 96 wird die neue Theorie mit den experimentellen Ergebnissen von Orcutt [32] verglichen.

#### 7.5 Allgemeine Theorie von Elrod und Ng

Elrod und Ng [33] entwickeln die Theorie von Ng [26] und von Ng und Pan [30] weiter. Die auf Grund der Kopplung der Couette-Strömung mit axialen und Umfangsgradienten vorhandenen Nichtlinearitäten werden berücksichtigt, so dass die Theorie nicht nur für dynamische sondern auch für statische Lager und Hybridlager verwendet werden kann.

Elrod und Ng verwenden ebenfalls den Betrag der örtlichen Schubspannung  $|\tau|$  anstelle der Wandschubspannung  $\tau_w$  als Bezugsgrösse und schreiben für den Spannungstensor  $\tau_{ij}$

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \eta(1 + \varepsilon^*/\nu) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \rho \cdot \ell \cdot \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)\end{aligned}\quad (83)$$

Dabei sind  $i, j = 1, 2, 3$  die Richtung der kartesischen Koordinaten  $x$  und der Geschwindigkeitskomponenten  $v$  ( $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  und  $v_1 = u, v_2 = v, v_3 = w$ ).  $\ell = \kappa \cdot y = 0,4 \cdot y$  ist der Prandtl'sche Mischungsweg.

Es wird die relative Lage zwischen den Wänden

$$y^* \equiv \frac{y}{h} \quad (84)$$

und die dimensionslose Schubspannung

$$\tau^* \equiv \frac{|\tau| \cdot h^2}{\eta \cdot \nu} \quad (85)$$

eingeführt, woraus mit Gl. (60) für den dimensionslosen Wandabstand folgt

$$y^+ = y^* \cdot \sqrt{\tau^*} \quad (86)$$

Der Strömungskanal wird wieder in zwei Hälften aufgeteilt. Der relative Abstand von der näher gelegenen Wand wird mathematisch durch folgende Beziehung ausgedrückt

$$Y = \min(y^*, 1 - y^*) \quad (87)$$

Mit den neu definierten Grössen erhält man für die Reichardt'sche Formel Gl. (35), mit den Konstanten  $\kappa = 0,4$  und  $\delta_{\ell}^+ = 10,7$  nach Ng [26],

$$\epsilon_R^* (Y, y^*) = 0,4 \cdot v [Y\sqrt{\tau^*} - 10,7 \cdot \tanh \frac{Y\sqrt{\tau^*}}{10,7}] \quad (88)$$

Gleichung (88) würde, so wie sie dasteht, immer noch einen unerwünscht grossen Abfall der scheinbaren kinematischen Viskosität im Kerngebiet zulassen. Demgemäss wird als endgültiger Ausdruck für die scheinbare kinematische Viskosität in der Nähe der Wand folgende Beziehung eingeführt:

$$\epsilon_W^* (Y, y^*) = \max \epsilon_R^* (Z, Z') \quad \text{für alle } Z \leq Y \quad (89)$$

wobei

$$Z' = [Z - y^* + (1 - 2Z) \cdot Y] / (1 - 2y^*) \quad (90)$$

Die verallgemeinerte Form (89) der Gleichung (35) für die scheinbare turbulente kinematische Zähigkeit wird nur für den Bereich der laminaren Unterschicht und im wandnahen Gebiet verwendet. Im Kerngebiet wird die empirische Formel von Clauser [34]

$$\epsilon_K^* = \frac{1}{56} \int_0^\infty (u_\infty - u) dy \quad (91)$$

in verallgemeinerter Form

$$\epsilon_K^* = \frac{1}{56} \sqrt{\left[ \int_{\text{Wand A}}^{y_{\max}} (u_{\max} - u) dy + \int_{y_{\max}}^{\text{Wand B}} (u_{\max} - u) dy \right]^2 + \left[ \int_{\text{Wand A}}^{y_{\max}} (w_{\max} - w) dy + \int_{y_{\max}}^{\text{Wand B}} (w_{\max} - w) dy \right]^2} \quad (92)$$

verwendet.

Die beiden Gültigkeitsbereiche werden durch die Beziehung

$$\epsilon = \min (\epsilon_W^*, \epsilon_K^*) \quad (93)$$

gegeneinander abgegrenzt.

Die nach den vorstehenden Beziehungen berechnete  $\epsilon^*$ -Verteilung wird mit den experimentellen Ergebnissen von Page, Schlinger, Breaux und Sage [35], von Laufer [36], Nikuradse [37], Robertson [38] und Shinkle und Hornung [39] verglichen. Die Übereinstimmung ist sowohl bei niedrigen als auch hohen Reynoldszahlen gut, so dass die Verallgemeinerung der Beziehungen als zulässig betrachtet werden kann.

Die Ausgangsgleichungen und damit deren Voraussetzungen sind die gleichen wie bei der linearisierten Theorie (Gl. 63, 64 und 65). Nach Einführung der dimensionslosen Variablen

$$p^* \equiv \frac{h^2 \cdot p}{\eta \cdot v} \quad u^* \equiv \frac{u \cdot h}{v} \quad x^* \equiv \frac{x}{h} \quad z^* \equiv \frac{z}{h} \quad w^* \equiv \frac{w \cdot h}{v} \quad (94)$$

erhält man daraus

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} [(1 + \epsilon^*/v) \frac{\partial u^*}{\partial y^*}] \quad (95)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} [(1 + \epsilon^*/v) \frac{\partial w^*}{\partial y^*}] \quad (96)$$

Mit den Randbedingungen

$$u^* = 0 \text{ bei } y^* = 0; \quad u^* = Re = \frac{U \cdot h}{v} \text{ bei } y^* = 1 \text{ und}$$

$$w^* = 0 \text{ bei } y^* = 0 \text{ und } w^* = \frac{W \cdot h}{v} \text{ bei } y^* = 1$$



erhält man nach zweimaliger Integration

$$u^* = \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \left[ J(y^*) - \frac{J(1)}{I(1)} \cdot I(y^*) \right] + \frac{I(y^*)}{I(1)} \cdot \frac{U \cdot h}{v} \quad (97)$$

$$w^* = \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \left[ J(y^*) - \frac{J(1)}{I(1)} \cdot I(y^*) \right] + \frac{I(y^*)}{I(1)} \cdot \frac{W \cdot h}{v} \quad (98)$$

Macht man die dimensionslose Schreibweise rückgängig, so erhält man Ausdrücke der Form

$$u^* = \frac{u \cdot h}{v} = - \frac{h^3}{\eta \cdot v} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \left[ \frac{J(1)}{I(1)} \cdot I - J \right] + \frac{U \cdot h}{v} \cdot \frac{I}{I(1)} \quad (99)$$

$$w^* = \frac{w \cdot h}{v} = - \frac{h^3}{\eta \cdot v} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \left[ \frac{J(1)}{I(1)} \cdot I - J \right] + \frac{W \cdot h}{v} \cdot \frac{I}{I(1)} \quad (100)$$

Das wichtigste Ziel der gegenwärtigen Theorie ist, den Zusammenhang zwischen  $\varpi^*$ , dem dimensionslosen zeitlichen Mittelwert des Strömungsvektors, dessen Komponenten  $u^*$  und  $w^*$  sind, dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathcal{U}$  der bewegten Wand und dem Druckgradienten herzustellen, d.h. wir wollen kennen

$$\varpi^* = \frac{\varpi \cdot h}{v} \text{ als Funktion von } \frac{h^3}{\eta \cdot v} \cdot \nabla p \text{ und } \frac{\mathcal{U} \cdot h}{v}$$

Dabei ist  $\varpi = \eta_x \cdot u + \eta_y \cdot v + \eta_z \cdot w$ ,  $\mathcal{U} = \eta_x \cdot U +$

$$\eta_y \cdot V + \eta_z \cdot W \quad (101)$$

$$\nabla p = \left\{ \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right\} \quad (102)$$

$$I(y^*) = \int_0^{y^*} \frac{dy^*}{1 + \varepsilon^*/v} \quad J(y^*) = \int_0^{y^*} \frac{y^* \cdot dy^*}{1 + \varepsilon^*/v}$$

Eine erste Näherungslösung für  $\omega^*$  erhält man, wenn man die verallgemeinerte Reichardtsche Formel (89) für den ganzen Strömungsbereich anwendet und die Clausersche Formel für das Kerngebiet zunächst vernachlässigt. Wandelt man die Gl. (63) bis (66) in dimensionslose Form um und fasst sie zu Vektoren zusammen und integriert einmal, so erhält man:

$$\tau^* = \tau_A^* + y^* \cdot \nabla^* p^* = (1 + \varepsilon^*/\nu) \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \quad (103)$$

$\tau_A^*$  ist die dimensionslose Schubspannung an der unteren nichtbewegten Wand und

$$\nabla^* p^* = \frac{h^3}{\eta \cdot \nu} \cdot \nabla p \quad (104)$$

der dimensionslose Druckgradient. Nun erst können die Clausersche Formel (92) zur Berechnung von  $\varepsilon_K^*$  angewandt und verbesserte Funktionswerte I und J berechnet werden. Die Iteration ergibt Geschwindigkeits- und  $\varepsilon^*$ -Verteilungen, die sich gegenseitig entsprechen. Sobald man diese hat, kann man auch die zeitlichen Mittelwerte  $u^*$  und  $w^*$  berechnen. Damit hat man die gegenseitige Abhängigkeit von

$$\frac{\bar{u} \cdot h}{\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{\omega} \cdot h}{\nu} \quad \text{von} \quad \tau_A^* \quad \text{und} \quad \nabla^* p^*$$

gefunden. Eliminiert man  $\tau_A^*$ , dann erhält man

$$\bar{\omega}^* = \frac{\bar{\omega} \cdot h}{\nu} \quad \text{in Abhängigkeit von} \quad \frac{\bar{u} \cdot h}{\nu} \quad \text{und} \quad \nabla^* p^*$$

Die Abbildungen 97 bis 99 zeigen berechnete Geschwindigkeitsprofile von planaren Strömungen für verschiedene Reynoldszahlen und Druckgradienten, denen jeweils ein bestimmtes Verhältnis der Schubspannungen an der oberen zur unteren Wand entspricht. Nichtplanare Strömungsprofile sind in den Abb. 100 bis 102 dargestellt.

Ein charakteristisches Merkmal der Schmierung ist, dass die Schmierfilmdicke  $h$  sich nur wenig im Bereich von  $l$  Filmdicke ändert. Wenn die Trägheitsglieder vernachlässigbar sind, kann unter diesen Umständen die Geschwindigkeitsverteilung die gleiche wie die für parallele Platten mit der gleichen Wandgeschwindigkeit, der gleichen Filmdicke und dem gleichen Druckgradienten sein.

Der Massenerhaltungssatz führt zu

$$\nabla(\varrho \cdot h) = \text{div}(\varrho \cdot h) = 0, \quad (105)$$

wobei die Komponenten von  $\varrho \cdot h$  durch Gl. (99) und (100) gegeben sind. In Vektorschreibweise lauten diese zusammengefasst

$$\varrho \cdot h = -\frac{h^3}{\eta} \cdot \nabla p \left[ \frac{J(l)}{I(l)} I - J \right] + \mathcal{U} \cdot h \cdot \frac{I}{I(l)} \quad (106)$$

Nun ist bei der Lagerströmung im allgemeinen  $v \approx 0$  und  $V = W = 0$ , so dass  $\mathcal{U} = \eta_x \cdot U$  nur durch eine konstante Komponente  $U$  gegeben ist. Entwickelt man nun Gl. (105) mit Hilfe von Gl. (99) und (100) in kartesische Form mit  $x$  als Hauptrichtung, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \frac{J(l)}{I(l)} \cdot I - J \right\} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ \frac{J(l)}{I(l)} I - J \right\} \right] \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( h \cdot U \cdot \frac{I}{I(l)} \right) \end{aligned} \quad (107)$$

Umgeformt ergibt dies

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \frac{J(l)}{I(l)} \cdot I - J + \frac{\frac{1}{2} - \frac{I}{I(l)}}{\frac{h^3}{\eta \cdot v} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}} \cdot \frac{U \cdot h}{v} \right\} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ \frac{J(l)}{I(l)} I - J \right\} \right] = \frac{U}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \quad (108)$$

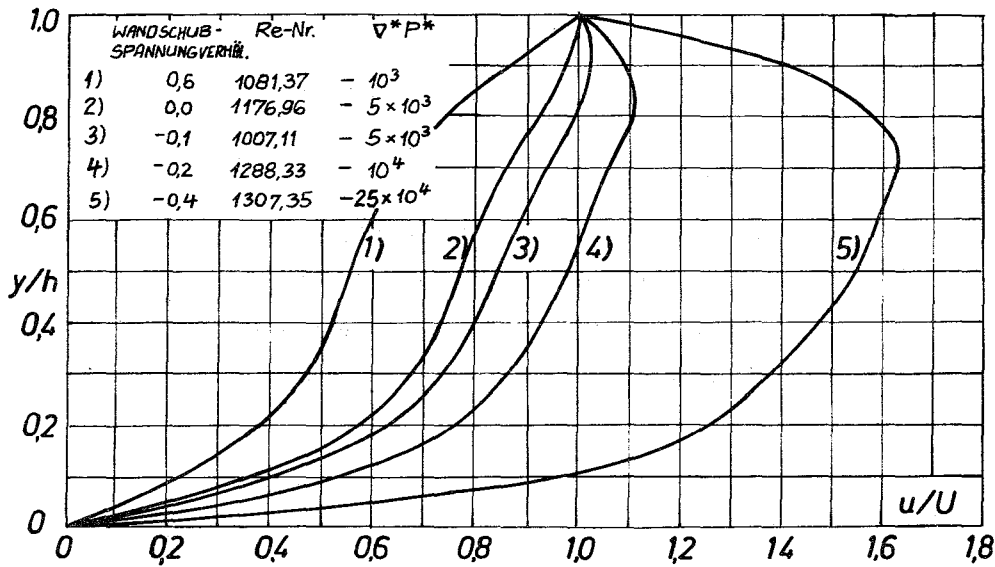


Abb. 97:  
Normierte Geschwindigkeitsprofile für planare Strömung bei verschiedenen Druckgradienten,  $Re \approx 1000$

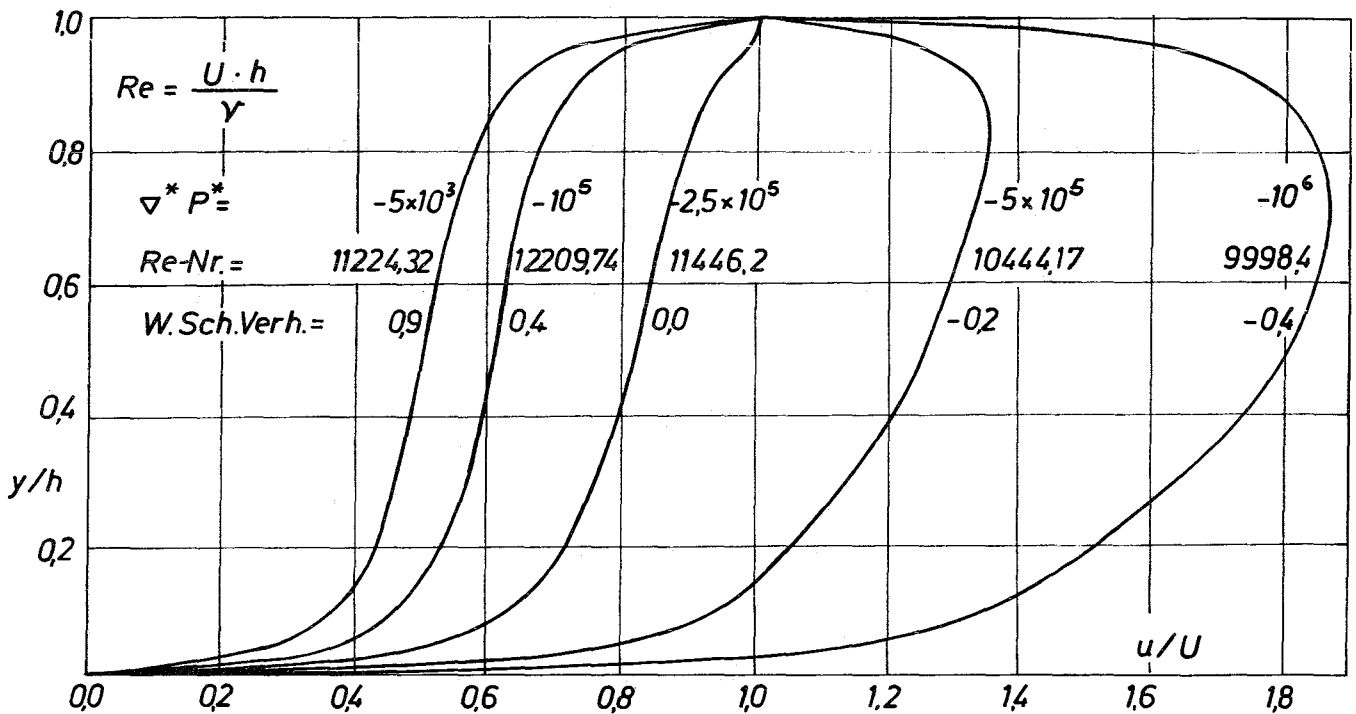


Abb. 98: Normierte Geschwindigkeitsprofile für planare Strömung bei verschiedenen Druckgradienten.  $Re \approx 10^4$

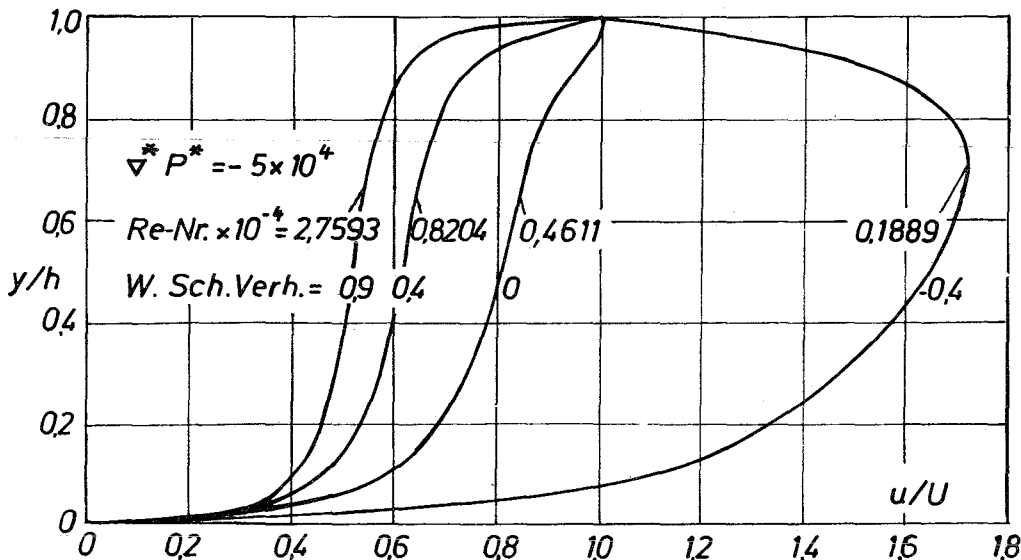


Abb. 99:  
Normierte Geschwindigkeitsprofile für planare Strömung bei verschiedenen Reynoldszahlen, dimensionsloser Druckgradient =  $5 \times 10^4$

Abb. 100:  
Normalisierte Profile der Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Wandbewegung für nichtplanare Strömungen

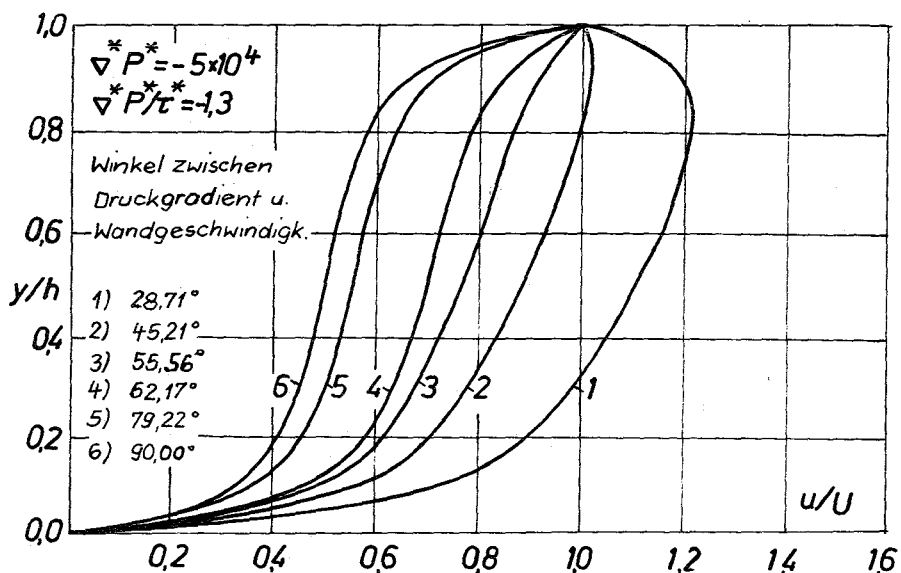


Abb. 101:  
Normalisierte Profile der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wandbewegung für nichtplanare Strömungen

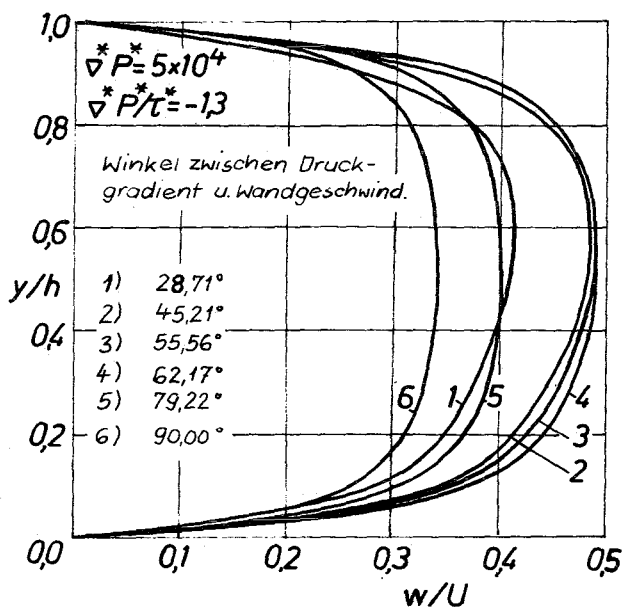
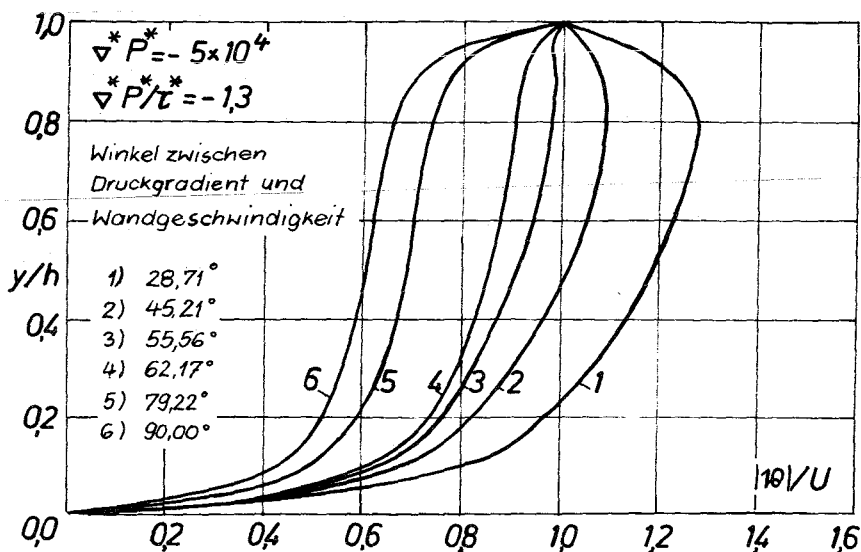


Abb. 102:  
Normalisierte Profile des Geschwindigkeitsbetrages für nichtplanare Strömungen



Diese letzte Form der Reynoldschen Gleichung ist mit der entsprechenden Gleichung (82) von Ng und Pan vergleichbar. Die beiden geschweiften Klammern entsprechen den  $G_x$ - und  $G_z$ -Werten für den nichtlinearen Fall.

$$\begin{aligned}
 G_x &= \frac{J(1)}{I(1)} \cdot I - J + \frac{\frac{1}{2} - \frac{I}{I(1)}}{\frac{h^3}{\eta \cdot v} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}} \cdot \frac{U \cdot h}{v} \\
 &= \frac{J(1)}{I(1)} \cdot I - J + \frac{\frac{1}{2} - \frac{I}{I(1)}}{\frac{\partial p^*}{\partial x^*}} \cdot Re \quad (109)
 \end{aligned}$$

$$G_z = \frac{J(1)}{I(1)} \cdot I - J \quad (110)$$

Die Koeffizienten  $G_x$  und  $G_z$  hängen nur von  $Re$ ,  $(h^3/\eta \cdot v) \cdot (\partial p/\partial x)$  und  $(h^3/\eta \cdot v) \cdot (\partial p/\partial z)$  ab. Die beiden letzteren werden mit GRADPX und GRADPZ abgekürzt.

Im Fall der zweidimensionalen Strömung ist  $\partial p/\partial z = 0$ . Die Abhängigkeit von  $G_x$  und  $G_z$  ist dafür in Abb. 103 und 104 gezeigt. Wenn  $\partial p/\partial x$  klein ist, reduzieren sich die Koeffizienten auf den von Ng und Pan [30] behandelten Fall, wo sich die Strömung der turbulenten Couette-Strömung annähert. Die Ergebnisse von Ng und Pan bilden Hüllkurven zu den Kurven aus der vorliegenden Theorie, indem die Linien für konstantes GRADP bei genügend hohen Reynolds-Zahlen verschmelzen. Bei niedrigen Reynolds-Zahlen überwiegt der Druckgradient und die Ergebnisse weichen sehr stark von der Hüllkurve (linearisierte Theorie) ab.

Die Abb. 105 und 106 zeigen den entgegengesetzten Fall, bei dem  $\partial p/\partial x = 0$  und  $\partial p/\partial z \neq 0$  ist. Die Ergebnisse von Ng und Pan erzeugen wieder eine Hüllkurve. Bei niedrigen Reynoldszahlen nähert sich die Strömung der turbulenten Poiseuille- (Kanal)-Strömung und die Strömung wird in z-Richtung turbulent.

Die Abb. 107 und 108 vergleichen Ergebnisse für die Fälle, wo die Schubspannung an der unteren Wand die gleiche Wirkungslinie haben ( $\partial p/\partial x \gg \partial p/\partial z$ ) und wo sie senkrecht aufeinander stehen ( $\partial p/\partial z \gg \partial p/\partial x$ ). Zwei Extreme des Druckgradienten wurden gewählt. Es ist bemerkenswert, dass die Kurven für jede Orientierung des Druckgradienten sehr ähnlich sind und dass der Übergang von konstantem Koeffizienten G zum linearisierten (Hüllkurve) auf kleine Gebiete beschränkt ist. Diese Tatsache hat die Aufstellung einer einfachen Interpolationsformel möglich gemacht.

Die Druckprofile für eine Reihe fluchtender Radiallager mit verschiedenen Breitenverhältnissen wurden berechnet. Der "Cavitation" wurde durch "Abschneiden" der negativen Drücke Rechnung getragen. In keinem Fall war die Differenz zwischen der vorliegenden nichtlinearen Theorie und der linearisierten Theorie von Ng und Pan gross. Tabelle 19 vergleicht die Ergebnisse für die hohe relative Exzentrizität von 0,95 und die Breitenverhältnisse  $B/D = 0,25; 0,5; 1,0$  und  $2,0$ .

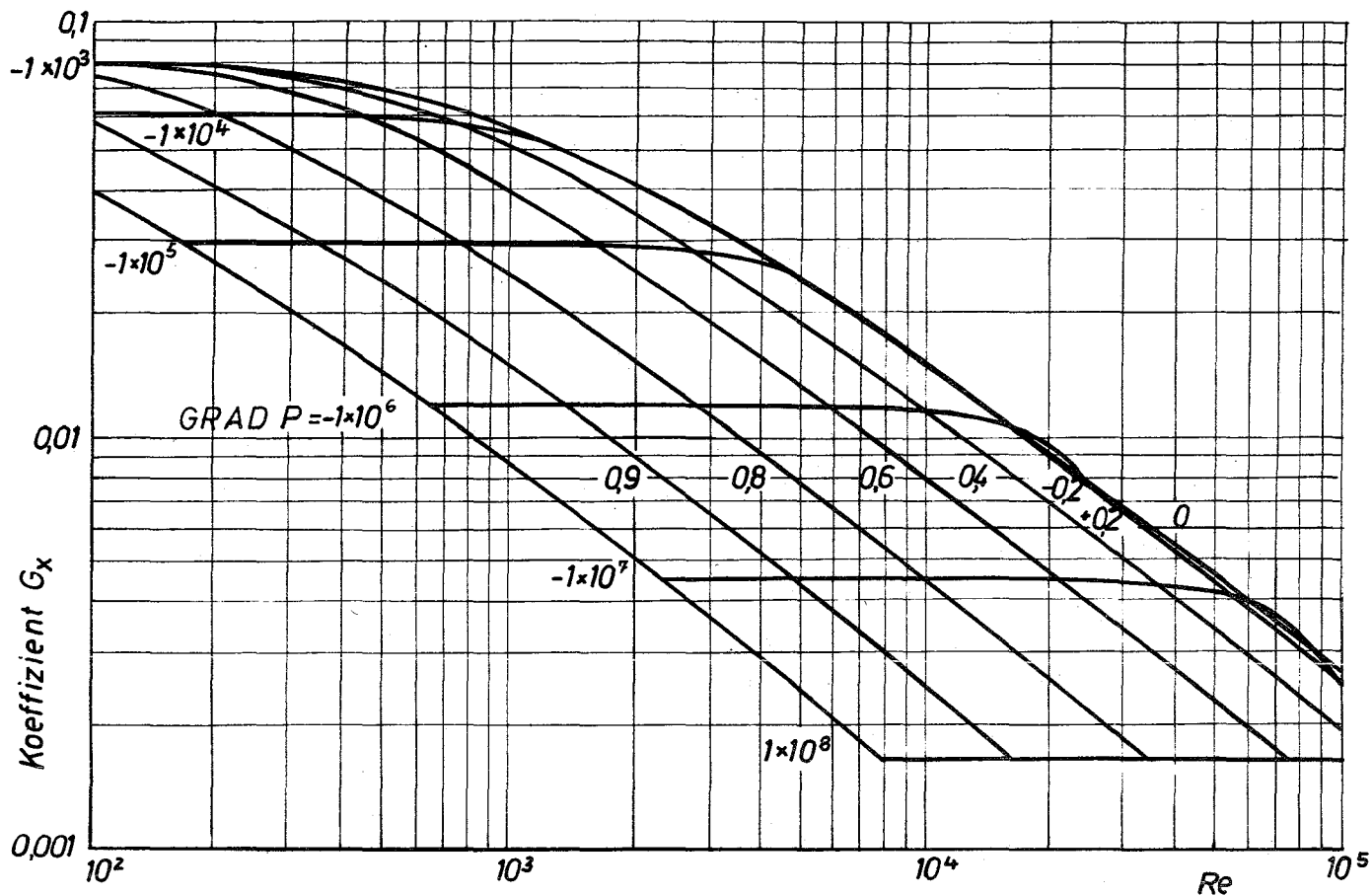


Abb. 103: Koeffizient  $G_x$  für  $\partial p / \partial x \gg \partial p / \partial z$

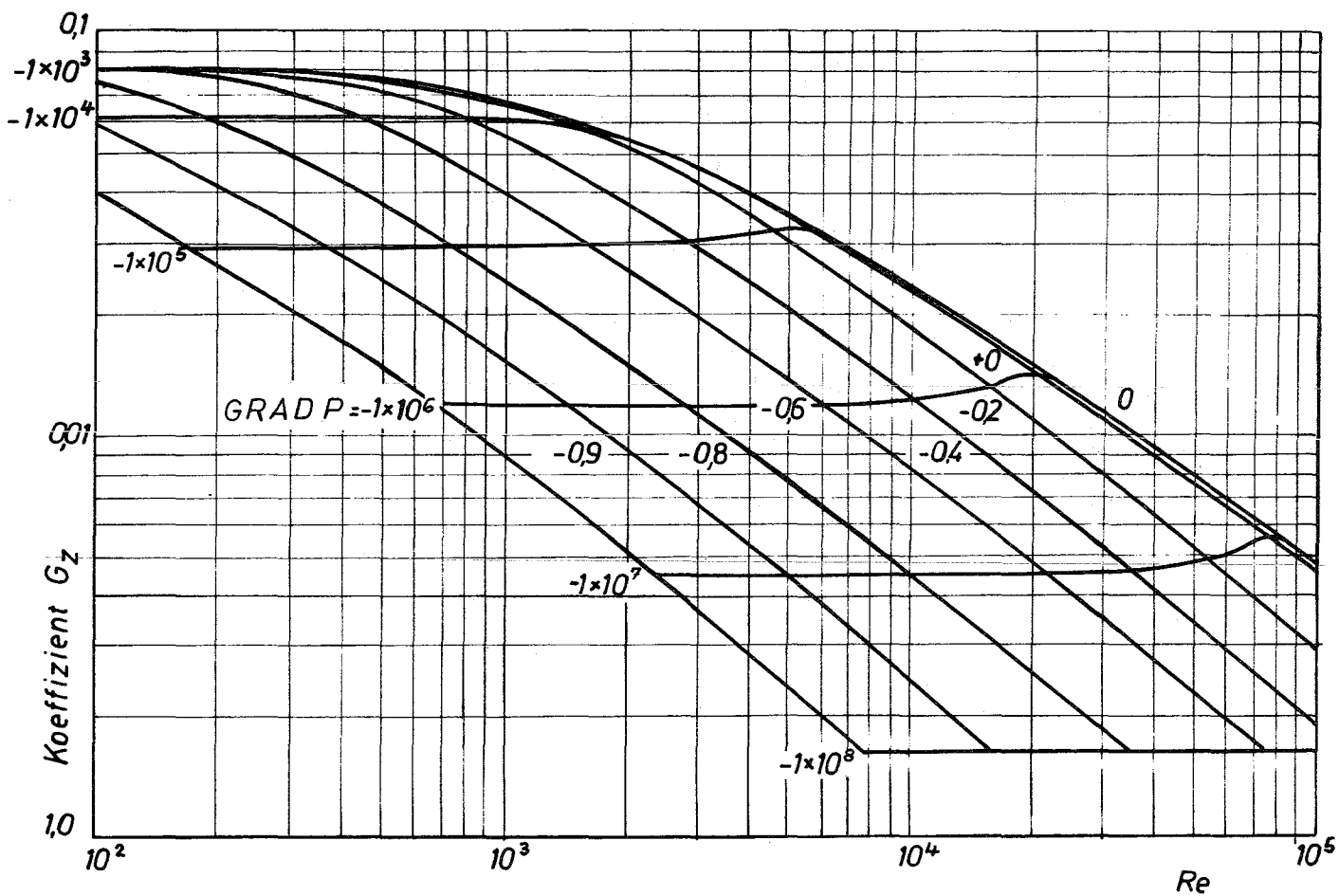


Abb. 104: Koeffizient  $G_z$  für  $\partial p / \partial x \gg \partial p / \partial z$



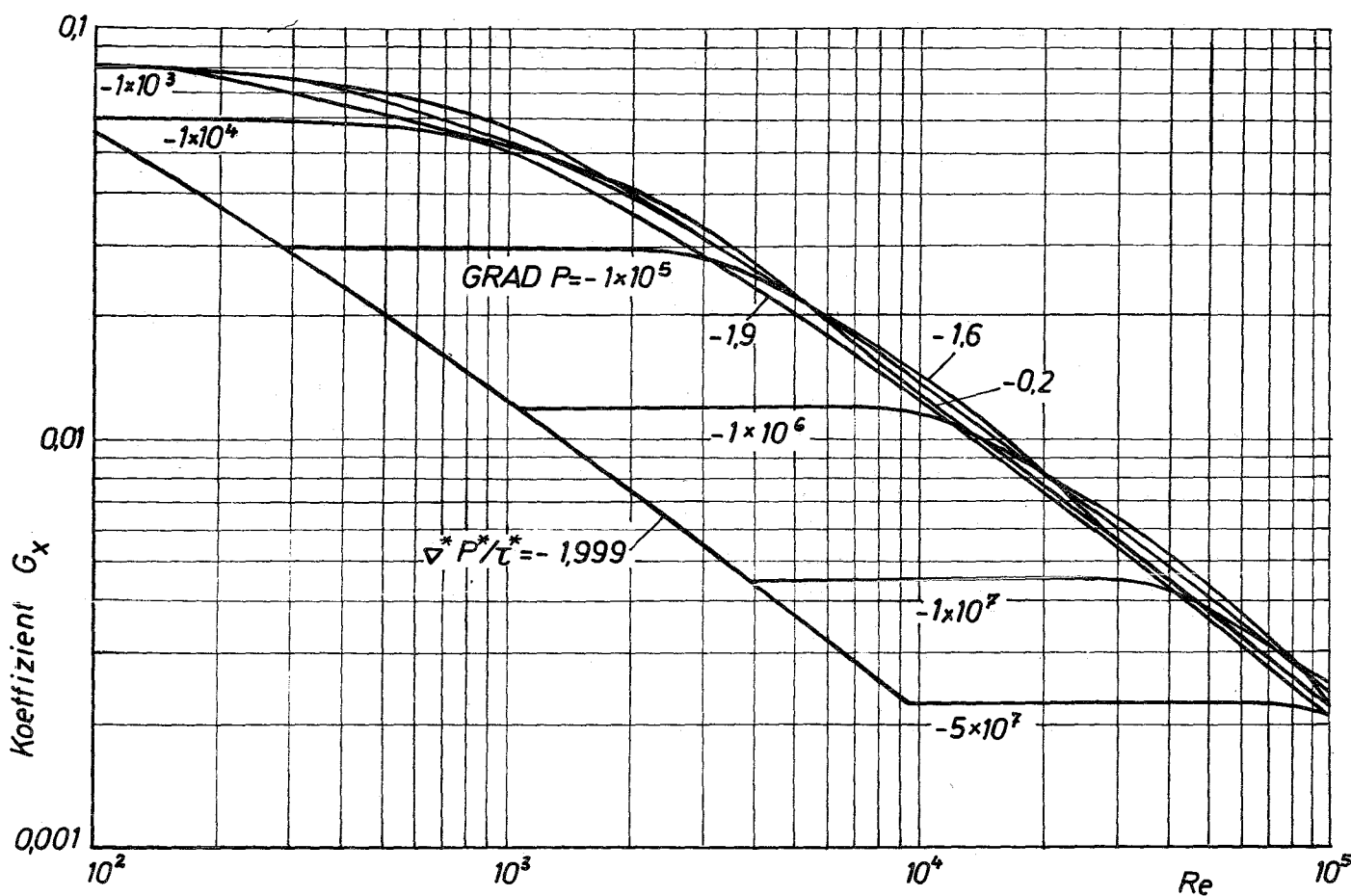


Abb. 105: Koeffizient  $G_x$  für  $\partial p / \partial z \gg \partial p / \partial x$

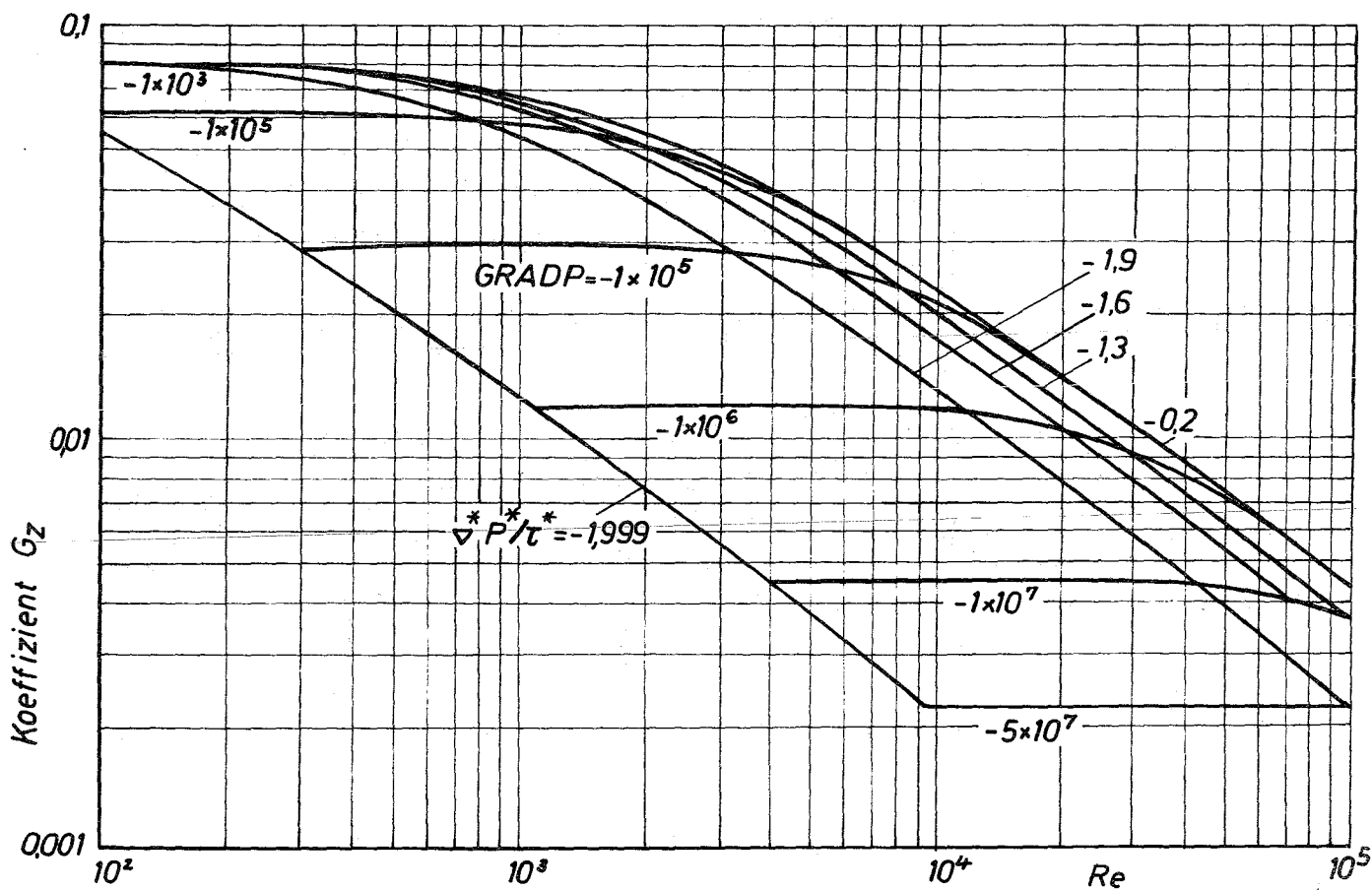


Abb. 106: Koeffizient  $G_z$  für  $\partial p / \partial z \gg \partial p / \partial x$

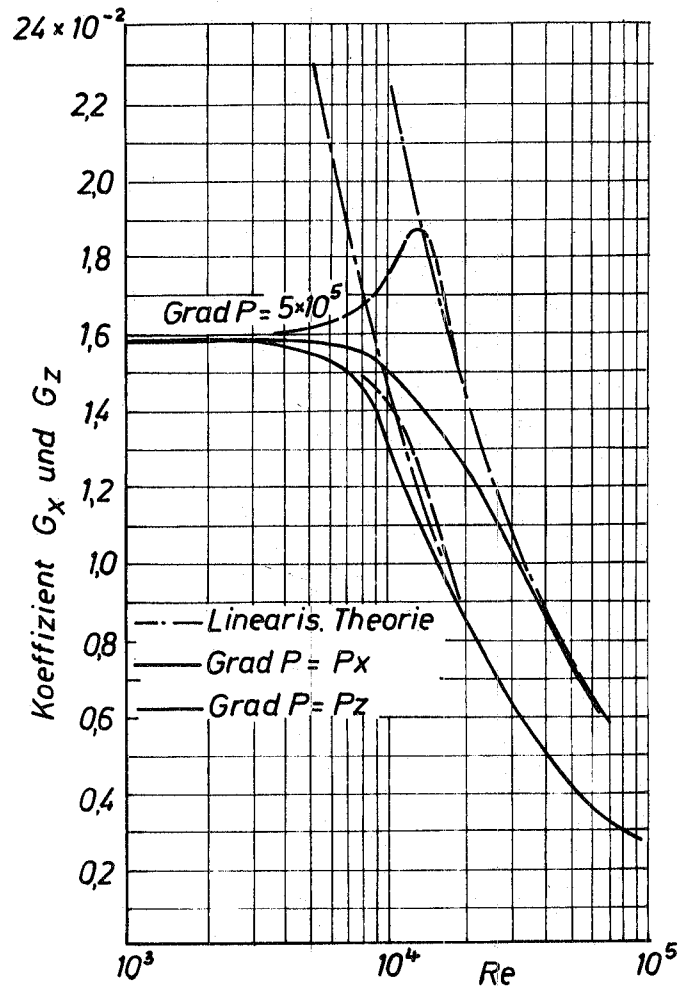


Abb. 108:  $G_x$ - und  $G_z$ -Werte für  $GRADP = -5 \times 10^5$ . Vergleich der beiden Theorien

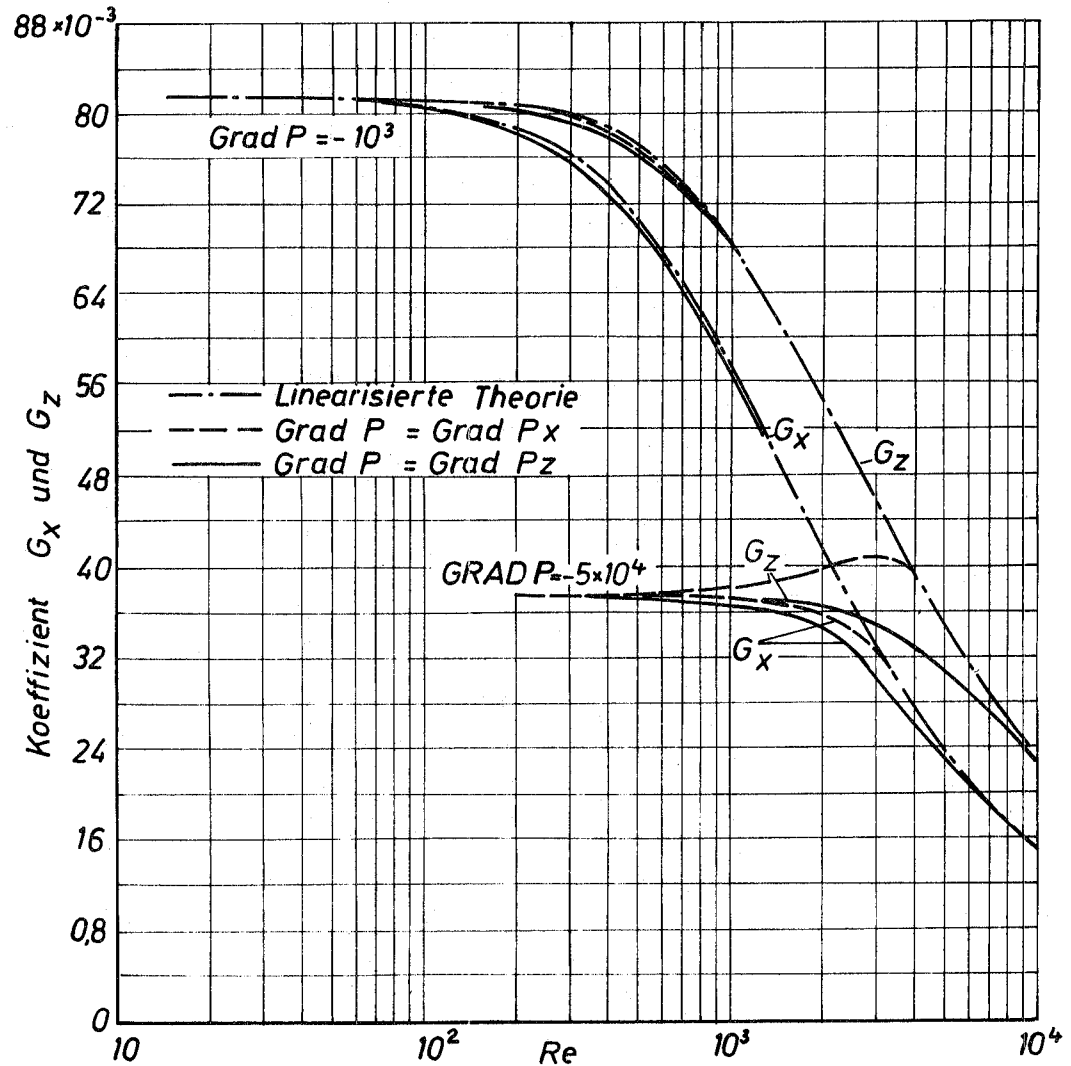


Abb. 107: Werte von  $G_x$  und  $G_z$  für  $GRADP = -10^3$  und  $-5 \times 10^4$ . Vergleich der nichtlinearen mit der linearisierten Theorie

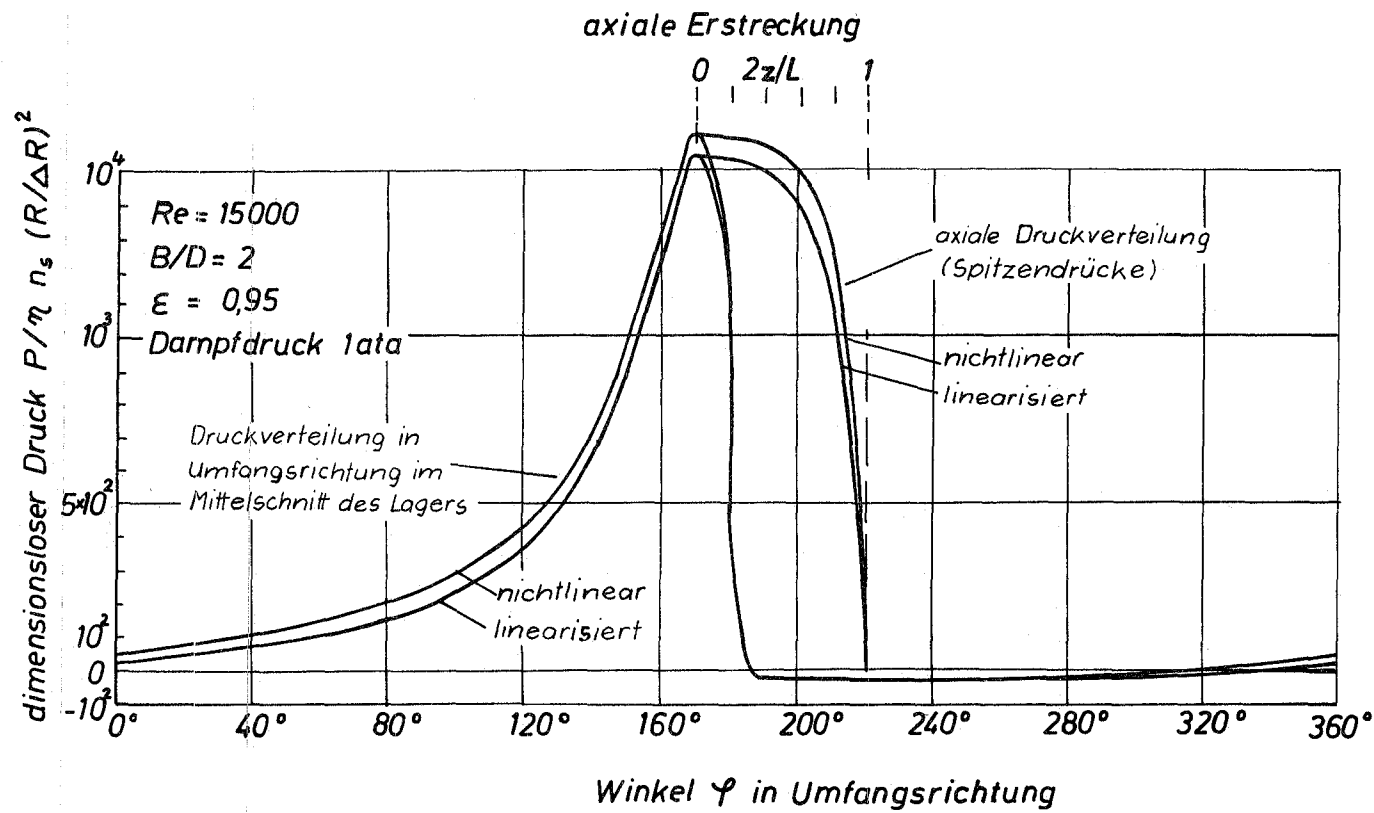


Abb. 109: Druckverteilung im Mittelschnitt in Umfangsrichtung und axiale Druckverteilung. Vergleich zwischen nichtlinearer und linearisierter Theorie

B/D	$2 \cdot \pi \cdot S_o$		Winkel $\gamma$	
	linearisiert	nichtlinear	linearisiert	nichtlinear
0,25	68,1	68,8	26,32	26,26
0,5	168,4	175,8	26,10	26,39
1,0	300,3	308,5	29,48	30,85
2,0	424,2	484,6	34,97	38,59

Tabelle 19: Vergleich der Tragkraft und des Steigungswinkels  $\gamma$  für ein  $360^\circ$ -Lager,  $\epsilon = 0,95$ ,  $Re = 15.000$

Den Druckverlauf über dem Lagerumfang für ein Lager mit  $Re = 15000$ ,  $B/D = 2,0$  und  $\epsilon = 0,95$  zeigt Abb. 109. Man erkennt, dass die Abweichungen der Ergebnisse nach der linearisierten und der nichtlinearen Theorie gering sind.

Es wird vom Verfasser empfohlen, bei hydrodynamischen Lagern bis  $\epsilon = 0,95$  die linearisierte Theorie zu verwenden, über  $0,95$  die nichtlineare Theorie. Ausschliesslich die nichtlineare Theorie soll bei hydrostatischen Lagern und Hybridlagern angewendet werden.

## 8. Experimentelle Ergebnisse turbulenter Radiallager

### 8.1 Versuche von Wilcock [40]

Die ersten Versuche an Lagern, die im turbulenten Bereich arbeiten, wurden von Wilcock mit ölschmierten zylindrischen  $360^\circ$ -Lagern mit 2 Längsnuten durchgeführt. Er untersuchte vier Lagerkombinationen. Drei davon hatten einen

Lagerdurchmesser von 8 inch und ein Breitenverhältnis von  $B/D = 0,5$ , aber verschiedene relative Lagerspiele von  $\psi = 1,61; 2,5$  und  $4,36$  ‰. Das vierte Lager hatte die gleiche Breite, aber den halben Durchmesser ( $B/D = 1$ ) und ein relatives Lagerspiel von  $3,83$  ‰. Die höchste Umfangsgeschwindigkeit betrug  $156,3$  m/s. Ihr entspricht eine höchste Reynoldszahl von  $12\ 700$ . Der Öleintrittsdruck betrug bei allen Versuchen  $0,7$  kp/cm<sup>2</sup> und die spezifische Lagerbelastung  $\bar{p} = P/B \cdot D = 10,5$  kp/cm<sup>2</sup>.

Trotz dieser Lagerbelastung und der daraus resultierenden Exzentrizität trifft die Voraussage des Umschlages von laminarer in turbulente Strömung nach dem Taylor-Kriterium Gl. (7) sehr gut zu. Die wichtigsten Erscheinungsformen der Turbulenz bzw. der Taylor-Wirbel sind ein schnelles Ansteigen des Drehmomentes, der Öltemperatur am Austritt aus dem Schmierpalt und der Lagertemperaturen sowie ein geringerer Anstieg des Durchsatzes über der Drehzahl. Das dimensionslose Drehmoment in Abhängigkeit von der Reynoldszahl  $Re^*$  zeigt Abb. 110.

## 8.2 Versuche von Smith und Fuller

Smith und Fuller [11] führten ihre Versuche mit einem zylindrischen Bronzelager mit 3" Durchmesser,  $B/D = 1$  und  $\psi = 2,93$  ‰ durch. Schmiermittel war Wasser, die Welle aus rostfreiem Stahl. Die Zufuhr des Wassers erfolgte über eine Bohrung in der Mitte der oberen Lagerhälfte. Abb. 111 zeigt die Reibungscharakteristik. Im linearen Bereich werden die Versuchspunkte durch die Beziehung Gl. (6)  $\lambda = 2/Re^*$ , die aus der Petroffschen Formel hervorgeht, sehr gut erfasst.

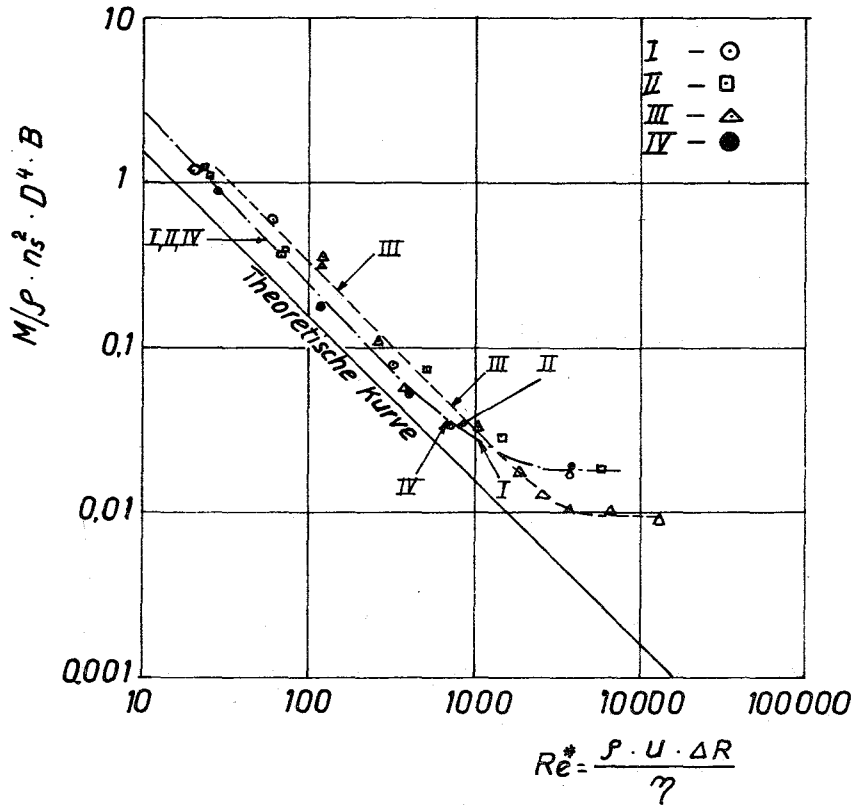


Abb. 110: Taylor-Diagramm (Zähigkeit auf Grund der maximalen Lagertemperatur berechnet)

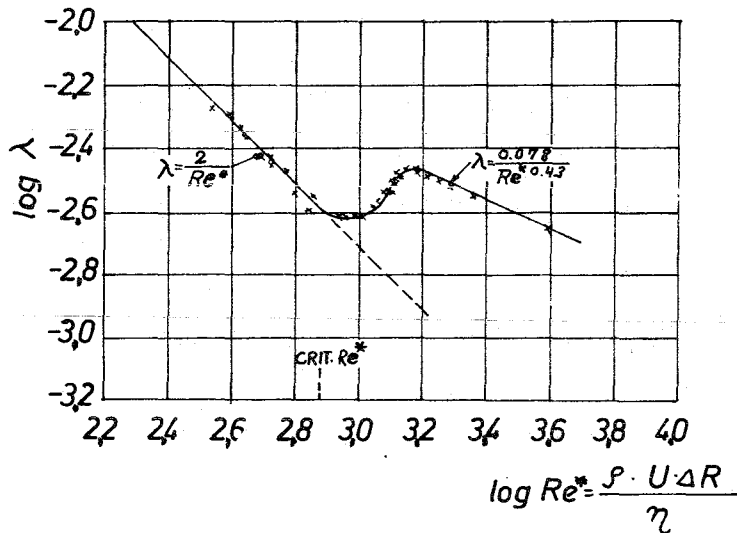


Abb. 111: Reibung als Funktion der Reynolds-Zahl

Es folgt der Übergangsbereich der Taylor-Wirbel. Darüber liegen die Versuchswerte auf der Geraden

$$\lambda = \frac{0,078}{(\text{Re}^*)^{0,43}} \quad (111)$$

In Abb. 112 ist die relative Exzentrizität für die Drehzahlen  $n = 3000$  U/min und  $7450$  U/min über der Belastung aufgetragen. Die erhöhte Tragfähigkeit bei turbulenter Lagerströmung ist aus dem Vergleich mit der laminaren Theorie (nach Cameron u. Wood, Kap. III [6]) zu ersehen. Für die gleichen Drehzahlen sind in Abb. 113 die Druckverteilungen über dem Umfang in Lagermitte aufgetragen. Zum Vergleich ist die nach Smith und Fullers einfacher Theorie gerechnete Druckverteilung eingetragen, wobei die Ordinaten in einem konstanten Verhältnis verkürzt wurden, so dass die Spitzen drücke gleich wurden. Selbst dann ist die qualitative Übereinstimmung schlecht. Die gemessenen Verlagerungswerte liegen nur bis zu relativen Exzentrizitäten von  $\varepsilon = 0,4$  auf der nach Smith u. Fuller berechneten Verlagerungsbahn. Bei grösseren relativen Exzentrizitäten liegen die Messpunkte in der Nähe einer nach Gümbel (Kap. III, [3]) für laminare Strömung berechneten Kurve.

Die mittlere Zähigkeit wurde für einen Temperaturmittelwert bestimmt, der durch Berechnung des arithmetischen Mittelwertes der Ein- und Austrittstemperatur erhalten wurde. Letztere wurde aus der Reibleistung, dem Wasserdurchsatz und den thermischen Gradienten in der Lagerschale bestimmt.

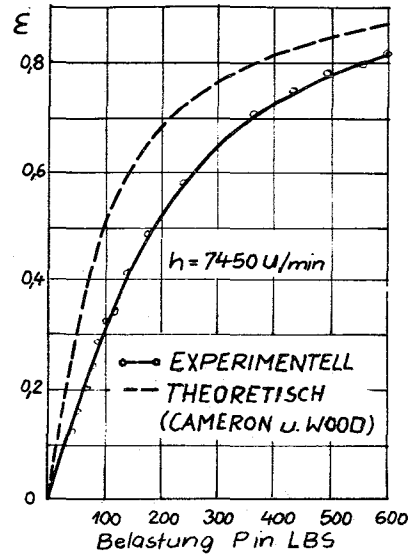
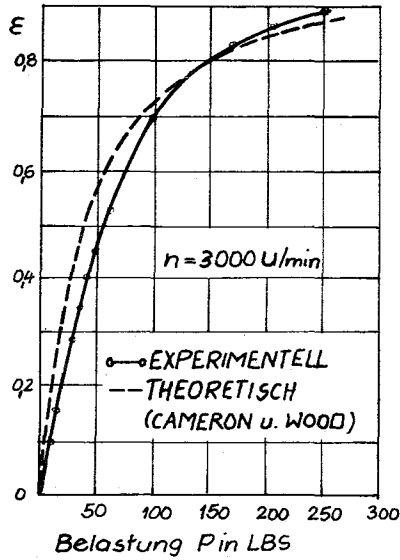


Abb. 112: Tragfähigkeit bei 3000 und 7450 U/min im superlaminaren Bereich

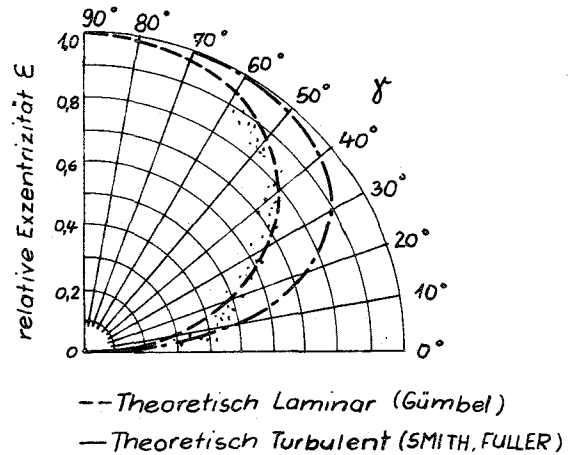
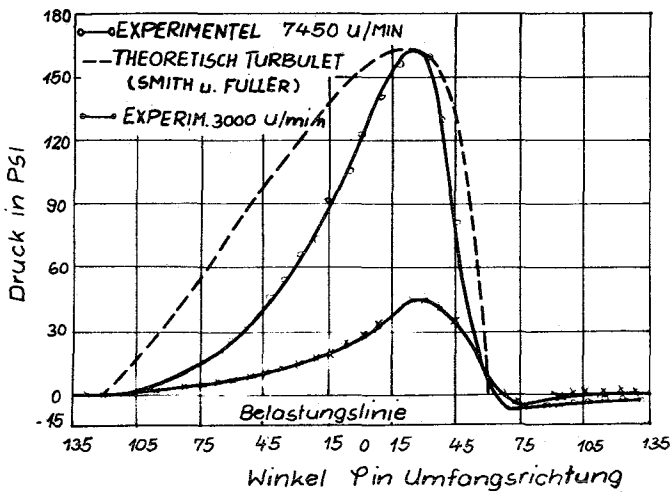


Abb. 113: Druckverteilungen über dem Umfang in Lagermitte

Abb. 114: Verlagerungspunkte im turbulenten Bereich



### 8.3 Versuche mit 60°-Lager

Orcutt [32] untersuchte zwei 60°-Lager mit einem Zapfendurchmesser von 6 inch,  $B/D = 0,5$  und den relativen Lagerspielen  $\psi = 2,9 \%$  und  $3,9 \%$ . Die Lagerschale bestand aus Bronze, die Welle trug eine Tungsten-Carbide-Schicht, die mittels eines Metallbinders auf der Aluminiumunterschicht aufgebracht war. Als Schmiermittel diente ein Silikonöl mit einer kinematischen Viskosität von  $0,65 \text{ cSt}$  bei  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Als mittlere Viskosität wurde in der Auswertung diejenige verwendet, die der Austrittstemperatur entspricht. Die maximale Drehzahl betrug  $4200 \text{ U/min}$ , der eine Umfangsgeschwindigkeit von  $33,5 \text{ m/s}$  und eine Reynoldszahl  $Re^* = 12.000$  entsprach.

Bei den Versuchen wurde jeweils die Austrittstemperatur konstant gehalten, so dass bei allen Versuchen die Zähigkeit gleich war und jeder Drehzahl eine bestimmte Reynoldszahl  $Re^* = \rho \cdot U \cdot \Delta R / \eta$  entsprach. Bei jeder Versuchsreihe wurde die Belastung konstant gehalten. Die zum Vergleich herangezogenen Werte für laminare Strömung wurden nach der Theorie von Raimondi u. Boyd [41] und von Warner [42] berechnet, die für die turbulente Strömung nach Constantinescu [23] und Arwas u. Sternlicht [31].

Die Versuchsergebnisse werden in den Diagrammen Abb. 115 bis 122 mitgeteilt. Die Übereinstimmung von Versuch und Theorie ist in den Diagrammen gut, in denen die Drehzahl bzw. Reynoldszahl über der relativen Exzentrizität aufgetragen ist. Dagegen sind die Abweichungen bei den Verlagerungsbahnen gross.

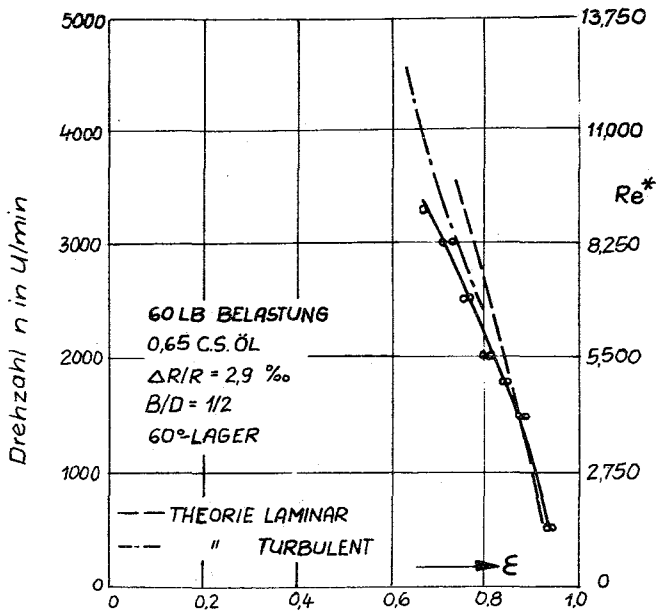


Abb. 115: relative Exzentrizität in Abh. von d. Drehzahl

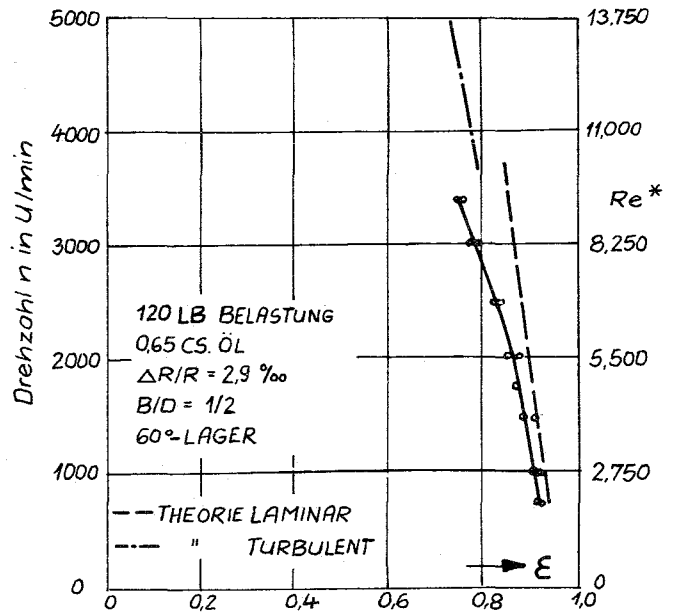


Abb. 116: rel. Exzentr. in Abh. v. d. Drehzahl,  $P=120 \text{ lb}$ ,  $\psi = 2,9 \text{ ‰}$

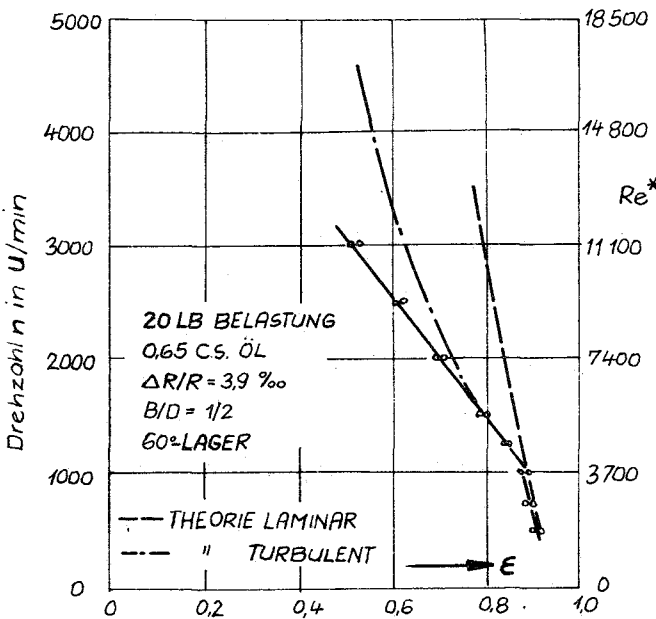


Abb. 117: rel. Exzentr. in Abh. v. d. Drehzahl,  $P=20 \text{ lb}$ ,  $\psi = 3,9 \text{ ‰}$

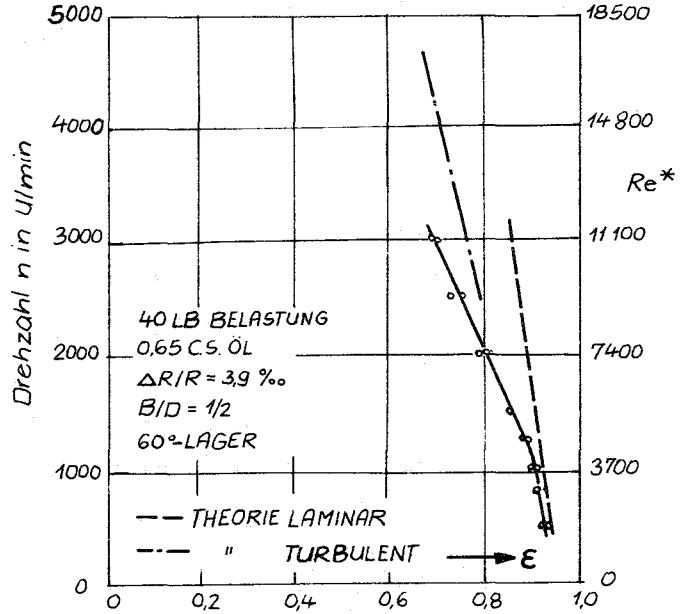


Abb. 118: rel. Exzentr. in Abh. v. d. Drehzahl,  $P=40 \text{ lb}$ ,  $\psi = 3,9 \text{ ‰}$

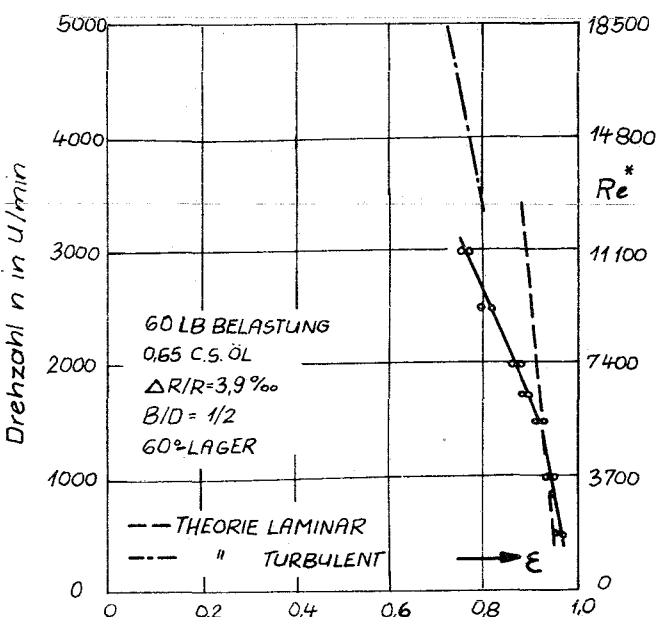


Abb. 119:  $P = 60 \text{ lb}$ ,  $\psi = 3,9 \text{ ‰}$

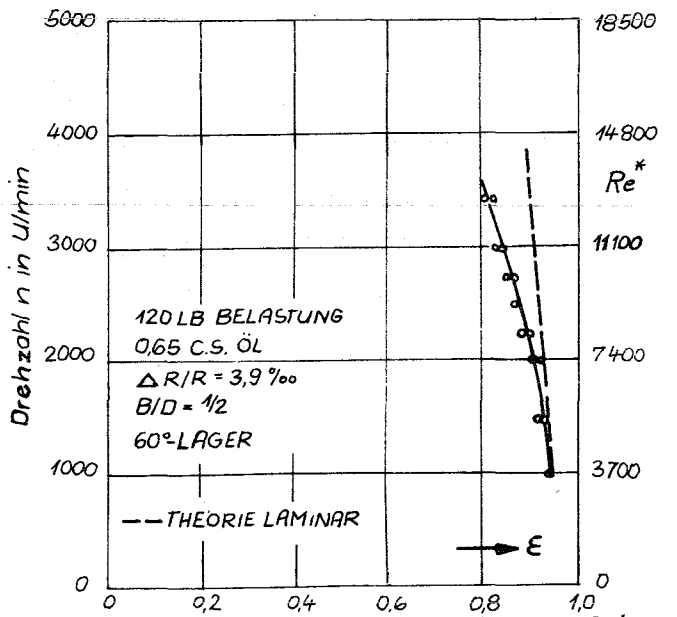


Abb. 120:  $P = 120 \text{ lb}$ ,  $\psi = 3,9 \text{ ‰}$

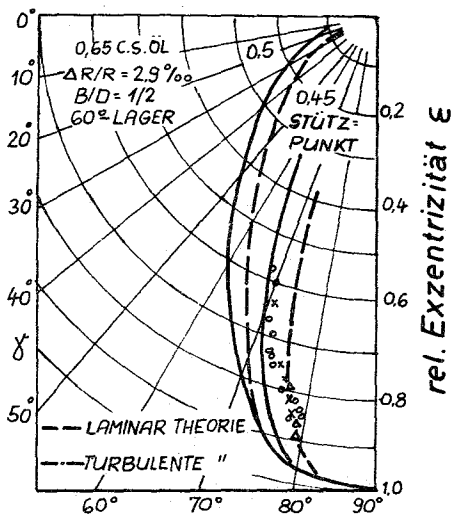


Abb. 121: Verlagerungs-  
bahnen,  $\psi = 2,9 \%$

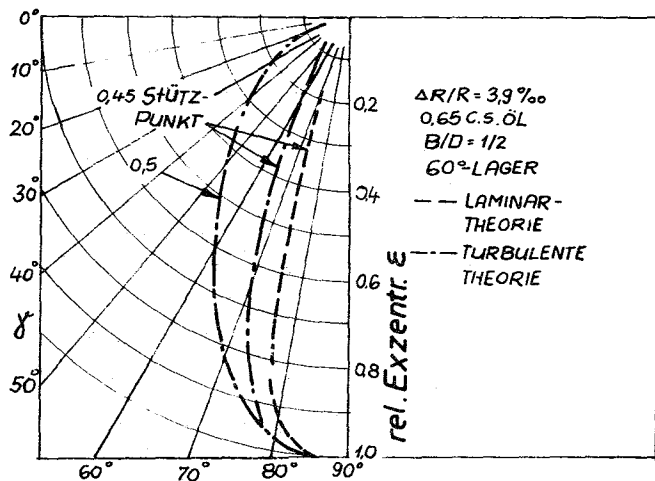


Abb. 122: Verlagerungs-  
bahnen,  $\psi = 3,9 \%$

#### 8.4 Versuche von Mc Hugh [43]

In dieser Arbeit wurden vor allem Stabilitätsuntersuchen durchgeführt. Es wurden aber auch Verlagerungsbahnen, Belastungskurven  $S_o = f(e/\Delta R)$  und Reibungskennzahlen für zylindrische Lager mit 2 axialen Nuten ( $B/D = 1$  und  $1,5$ ), Kippsegmentlager, MKF-3-Flächenlager, elliptisches Lager mit seitlich versetzter Schale und ein zylindrisches Verbundlager untersucht. Der Zapfendurchmesser betrug 1,25 inch, die maximale Umfangsgeschwindigkeit 57 m/s, das relative Lagerspiel 1,6; 2,4; und 4‰. Schmiermittel war Wasser. Wegen der Vielzahl der Messwerte wird in diesem Rahmen auf die Wiedergabe verzichtet, auch weil der Streubereich ziemlich gross ist und die Messungen nicht sehr genau sind. Ausserdem fehlen viele Angaben über die Auswertung.

### 8.5 360°- und 100°-Lager

Orcutt u. Arwas [44] untersuchten theoretisch und experimentell ein zylindrisches 360°-Lager mit Schmiermittelzufuhr durch eine Bohrung in der Mitte der Oberschale und zwei in der Mitte belastete 100°-Lager von 4 inch Durchmesser. Für die theoretische Berechnung wurde die linearisierte Theorie von Ng und Pan (Abschnitt 7.4) angewandt. Demgemäss war die maximale relative Exzentrizität auf 0,95 beschränkt. Das Breitenverhältnis war bei allen drei Lagern  $B/D = 1$ . Die Spiele betrug 4 % bei dem 360°-Lager und einem 100°-Lager, beim anderen 2 %. Die Welle trug an den Lagerstellen einen Tungstenkarbid-Überzug. Die Lagerschalen bestanden aus Bleibronze. Als Schmiermittel wurden zwei Silikonöle mit 5 cSt und 0,65 cSt bei 25 °C verwendet.

Die Versuche erstrecken sich bei beiden Lagerarten bis zu Reynoldszahlen von 13300. In Abb. 123 ist die dimensionslose Belastungskennzahl  $2\pi$  über der relativen Exzentrizität  $\epsilon = e/\Delta R$  für die beiden 100°-Lager aufgetragen. Die Übereinstimmung mit der Theorie ist als gut zu bezeichnen. Nur die Werte des Lagers mit dem grossen relativen Lagerspiel weichen bei der niedrigeren Reynoldszahl von  $Re^* = U \cdot \Delta R / v = 5820$  bei niedrigen relativen Exzentrizitäten nach oben ab. Dies wird auf Trägheitseffekte an der Eintrittskante zurückgeführt und tritt nur dann ein, wenn die spezifische Lagerbelastung gering und die Drehzahl hoch ist. Unterhalb  $\epsilon = 0,3$  konnten keine sinnvollen Werte gewonnen werden, da selbsterregte Schwingungen auftraten. Die Verlagerungskurven der beiden 100°-Lager sind in den Abb. 124 und 125 dargestellt. Die Übereinstimmung

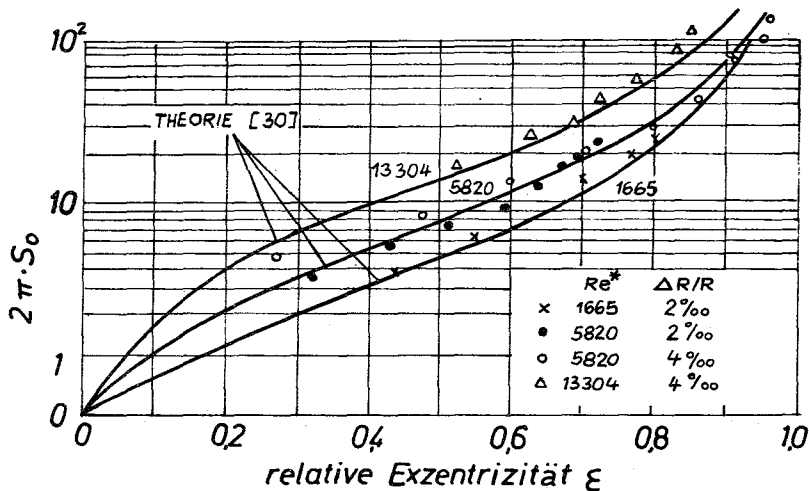


Abb. 123: Gemessene und berechnete Belastungskennzahlen in Abhängigkeit von der relativen Exzentrizität und der Reynoldszahl für beide 100°-Lager, B/D = 1

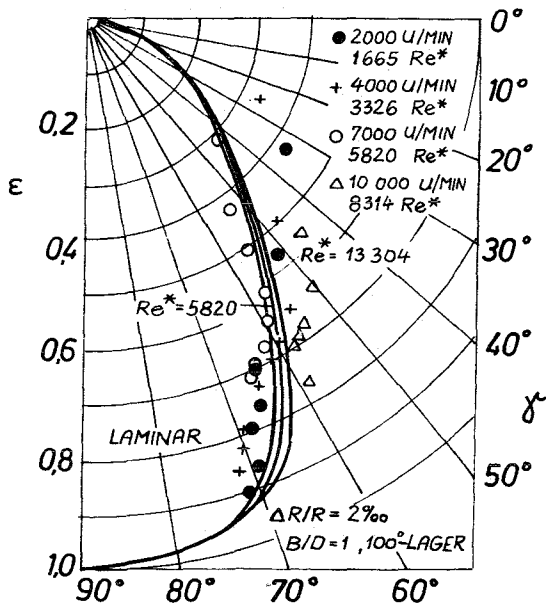


Abb. 124: Gemessene und berechnete Verlagerungswinkel beim 100°-Lager

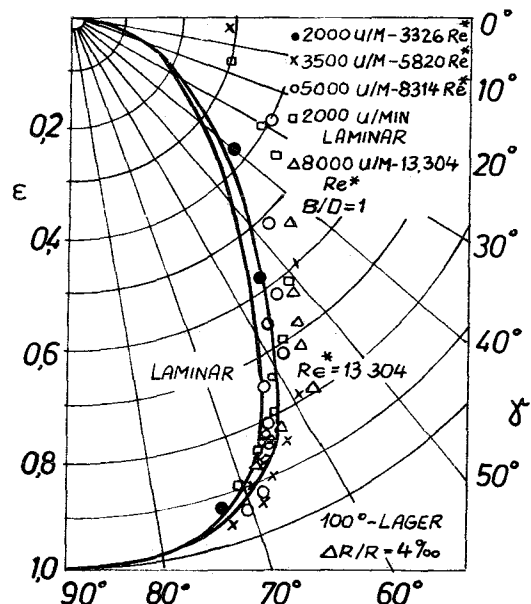


Abb. 125: Gemessene und berechnete Verlagerungswinkel beim 100°-Lager

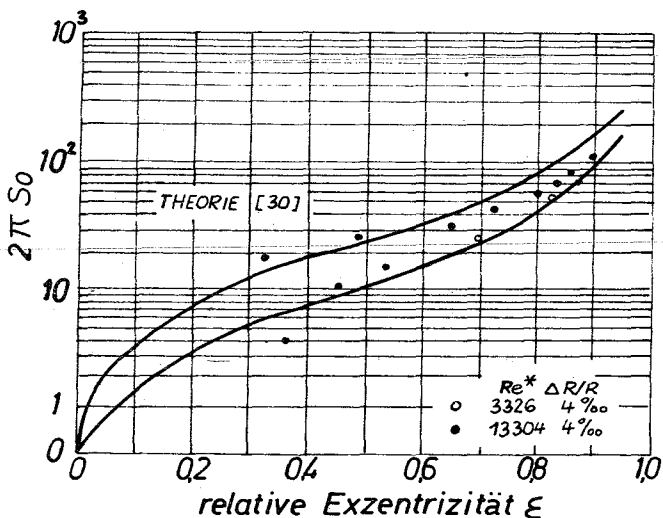


Abb. 126: Belastungscharakteristik des 360°-Lagers, B/D=1

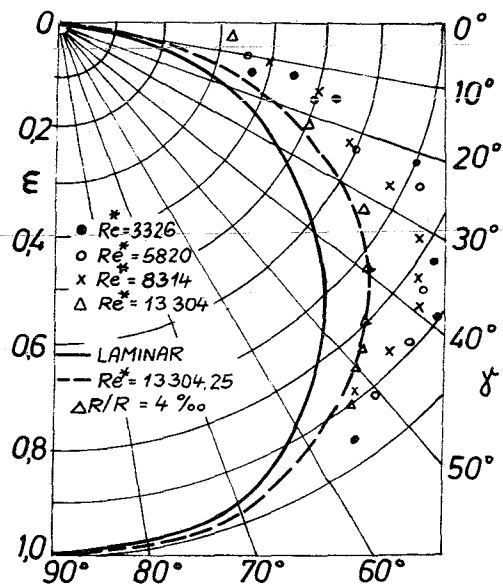


Abb. 127: Gem. u. berechn. Verlagerungsw., 360°-Lager, B/D=1

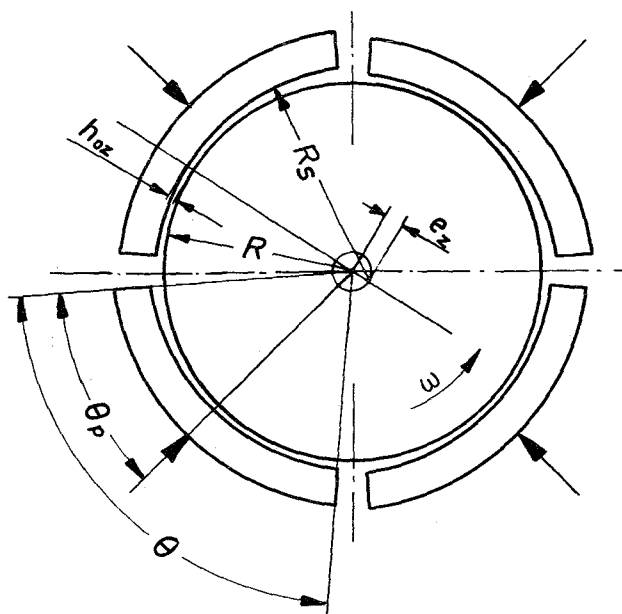
ist bei mittleren und grossen relativen Exzentrizitäten gut. Bei niedrigen Exzentrizitäten sind die gemessenen Exzentrizitäten wegen der Trägheitseffekte grösser als die theoretischen.

Beim 360°-Lager ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment nicht so gut wie bei den 100°-Lagern. Es wird vermutet, dass dies darauf zurückzuführen ist, dass die in der Theorie angenommenen Randbedingungen zu stark von den wirklichen Verhältnissen abweichen. Während die Punkte der Belastungskennzahlen noch in der Nähe der theoretischen Kurven liegen, weichen die Verlagerungswinkel beträchtlich nach oben ab (Abb. 126 und 127).

#### 8.6 Kippsegmentlager mit 4 Tragschuhen

In einer weiteren Arbeit untersuchte Orcutt [45] ein Kippschuh-Radiallager mit 4 Tragschuhen sowohl theoretisch als auch experimentell. Für die theoretische Berechnung wurde wieder die linearisierte Theorie angewendet. Das untersuchte Lager hatte einen Durchmesser von 4 inch und ein Breitenverhältnis  $B/D = 1$ .

Es bestand aus vier 80°-Lagern, die in Drehrichtung gesehen etwas hinter der Tragschuhmitte ( $\theta_p = 0,55 \cdot \theta$ ) drehbar unterstützt waren. Die relative Exzentrizität  $\epsilon_z$  der Welle gegenüber den einzelnen Schalen betrug bei zentrischer Wellenlage  $\epsilon_z = 0$  und 0,5. Die Versuche erstreckten sich bis zu Reynoldszahlen von  $Re^* = 8.000$ . Als Schmiermittel dienten zwei Silikonöle mit einer Zähigkeit von 5 bzw. 0,65 cP bei 25 °C. Die Versuchseinrichtung war die gleiche wie in 8.5. Die Kippschuhe waren aus gehärtetem Werkzeugstahl mit einem aufgespritzten Phosphorbronze-Überzug.



$$R_s = h_{0z} + e_z + R$$

$$\Delta R = R_s - R$$

$e$  = Verlagerung der Welle

$$\epsilon = \frac{e}{\Delta R} \quad \epsilon_z = \frac{e_z}{\Delta R}$$

$$\epsilon_L = \frac{e}{h_{0z}} = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon_z}$$

Abb. 128: Schema des Kippschuhlagers

In Abb. 129 und 130 sind die reziproken Sommerfeldzahlen über  $\epsilon$  für laminare Strömung,  $Re^* = 3000$  und  $Re^* = 8000$  aufgetragen. Die Versuche stimmen sehr gut mit der Theorie überein. Das gleiche gilt für die Reibungskennzahlen  $\mu/\psi$ , Abb. 131 und 132.

In einer früheren Arbeit [46] teilte Orcutt Rechenergebnisse für  $\epsilon_z = 0,3$  und  $0,7$  bei sonst gleichen Lagerabmessungen und Reynoldszahlen von 1000, 5000 und 12000 mit. Ausserdem werden darin Auslegungsdaten für Radiallager mit 3 Kippschuhen von je  $100^\circ$  Umfangserstreckung angegeben. Weitere theoretische und experimentelle Ergebnisse von Kippschuhlagern finden sich in den neuesten Veröffentlichungen von Arwas und Waldrun [53] und [54].

Als wesentliche Vorteile der Kippsegmentlager wird die immer gewährleistete Fluchtung und die hohe dynamische Steifigkeit hervorgehoben. Nachteilig für die betriebliche Seite wirkt sich nur der Verschluss der sphärischen Stützen, der aber zu beherrschen ist, aus.

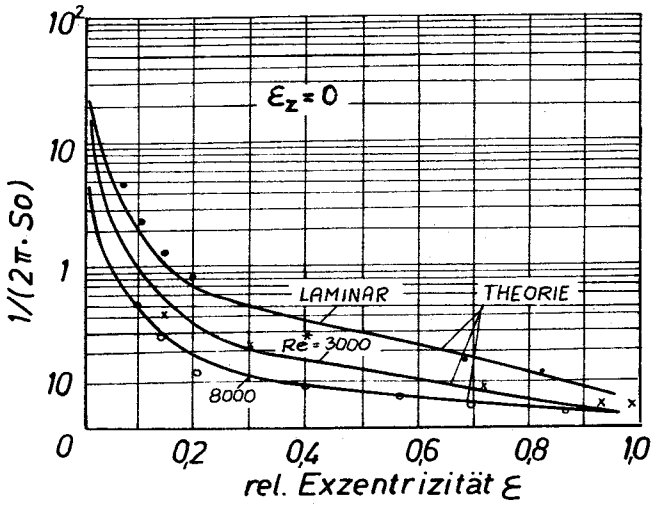


Abb. 129: Vergleich gemessener u. berechneter Lagerkennzahlen,  $\epsilon_z = 0$

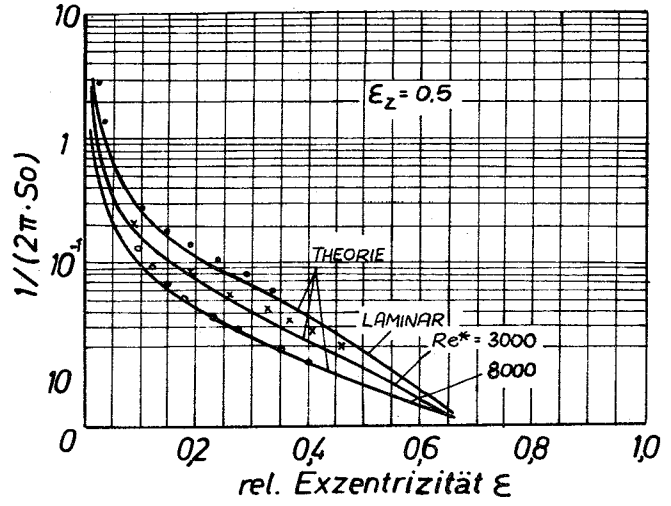


Abb. 130: Vergleich gemessener u. berechneter Lagerkennzahlen,  $\epsilon_z = 0,5$

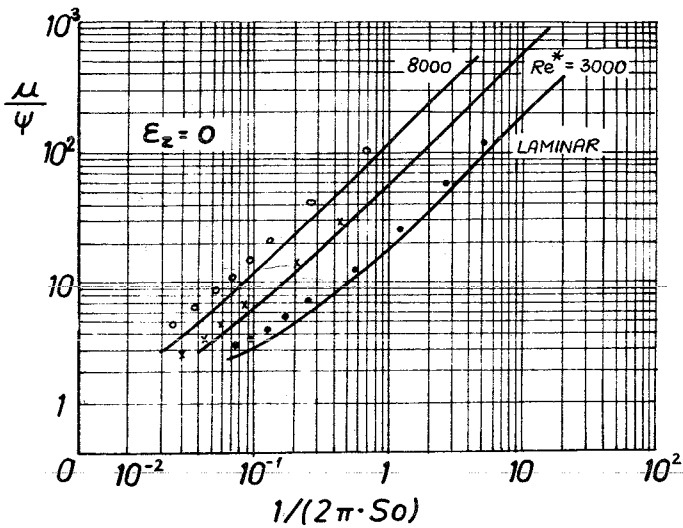


Abb. 131: Vergleich gemessener u. berechneter Lagerkennzahlen,  $\epsilon_z = 0$

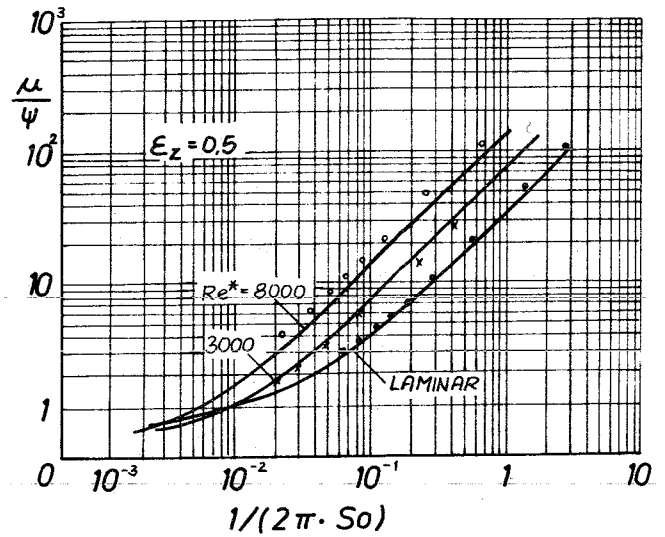


Abb. 132: Vergleich gemessener u. berechneter Lagerkennzahlen,  $\epsilon_z = 0,5$



## 9. Ergebnisse bei Axiallagern mit turbulenter Strömung

Wie bei den Radiallagern werden nur Versuchsergebnisse berücksichtigt, die von Lagern bei höheren Umfangsgeschwindigkeiten gewonnen wurden. Versuche mit Lagern, die im Auslegungspunkt im oder in der Nähe vom Mischreibungsgebiet arbeiten, scheiden also aus.

### 9.1 Versuche von Abramovitz

Abramovitz [47] untersuchte ein Michell-Lager mit 6 sektorförmigen Tragschuhen mit Sektorwinkeln von  $48^\circ$ . Der äussere Durchmesser betrug 8 in, der innere 4,5 in, die mittlere Gleitschuhlänge 2,6 in und die radiale Lagerbreite 1,75 in. Die Laufflächen waren schwach zylindrisch konvex. Die Achse des Zylinders war radial und der Krümmungsradius so gross, dass eine Überhöhung von nur rund  $8 \mu\text{m}$  vorhanden war. Die Abstützung erfolgte in der Tragschuhmitte. Als Schmiermittel diente Wasser, dessen Temperatur zwischen  $24$  und  $93^\circ\text{C}$  variierte. Der Umgebungsdruck des Lagers betrug  $2,8 \text{ atü}$ . Bei konstanter Belastung von  $\bar{p} = 1,63 \text{ kp/cm}^2$  wurde die Drehzahl variiert:  $900, 1750, 2600$  und  $3400 \text{ U/min}$  ( $\hat{=} 28,2 \text{ m/s}$ ).

Als Vergleichsbasis für die Reibleistung verwendet Abramovitz die Methode von Taylor [1], [2]. Nach Abschnitt IV, Gl. (25) gilt für konstantes  $\varphi$  ( $h_1/h_0 = \text{konst.}$ )

$$F = K_1 \cdot \frac{B \cdot L \cdot \eta \cdot U}{h_m} \quad h_m = \frac{1}{2} (h_1 + h_0) \quad (112)$$

bzw.

$$N = K_2 \cdot \frac{\eta \cdot U^2}{h_m} \quad (113)$$

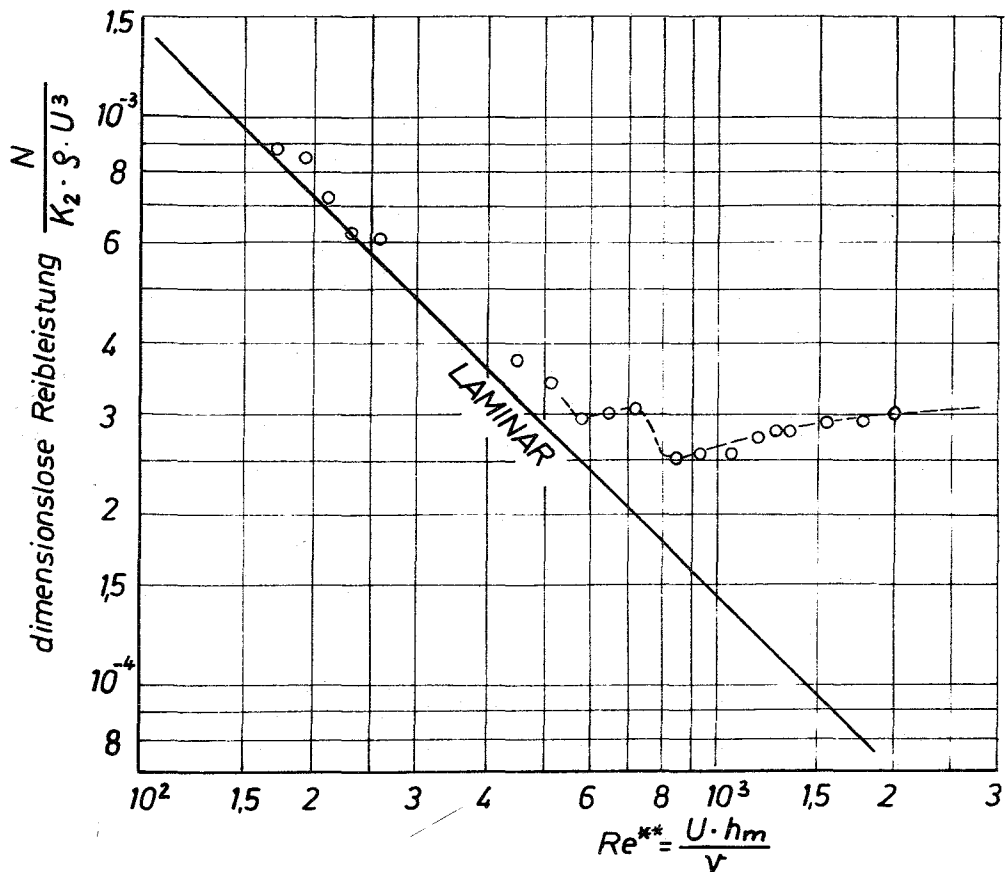


Abb. 133: Reibungscharakteristik eines Axiallagers

Dafür kann man mit  $Re^{**} = U \cdot h_m / \nu$  schreiben

$$\frac{N}{K_2 \cdot \rho \cdot U^3} \cdot Re^{**} = 1 \quad (114)$$

$K_2$  kann man dabei aus einem Messpunkt im laminaren Gebiet mit Hilfe der laminaren Theorie bestimmen.

Abb. 133 zeigt die Reibungscharakteristik des untersuchten Lagers. Es ergibt sich eine Kurve durch die Versuchswerte, die der Reibungscharakteristik bei der Kugel- und Rohrströmung ähnlich ist. Ab ca.  $Re^{**} = 600$  beginnt das Übergangsgebiet und ab  $Re^{**} = 1000$  ist voll turbulente Strömung vorhanden. Die Gerade für die laminare Strömung entspricht Gl. (114). Man sieht, dass selbst beim Axiallager das Taylor-Kriterium ungefähr zutrifft.

## 9.2 Versuche von Ketola und McHugh

Ketola und McHugh bauten einen Prüfstand für Axial- und Radiallager (Abb. 134). Dieser hat den grossen Nachteil, dass die Axiallagerversuche durch das Versuchsradiallager beeinflusst wurden. Da die äusseren Stützlager einfache zylindrische Lager waren, mussten sie mit steigender Drehzahl zunehmend durch das Versuchslager belastet werden, um selbsterregte Schwingungen zu unterdrücken. Dadurch wurde die Welle aber so stark durchgebogen, dass die Fluchtung im Axiallager beeinträchtigt wurde.

Da dynamische zylindrische Lager für höhere Umfangsgeschwindigkeiten uninteressant sind und die Versuchswerte teilweise sehr stark streuen, wird auf die Ergebnisse der Radiallageruntersuchungen nicht näher eingegangen, zumal in Abschnitt 8.5 genauere Versuchsergebnisse vorliegen.

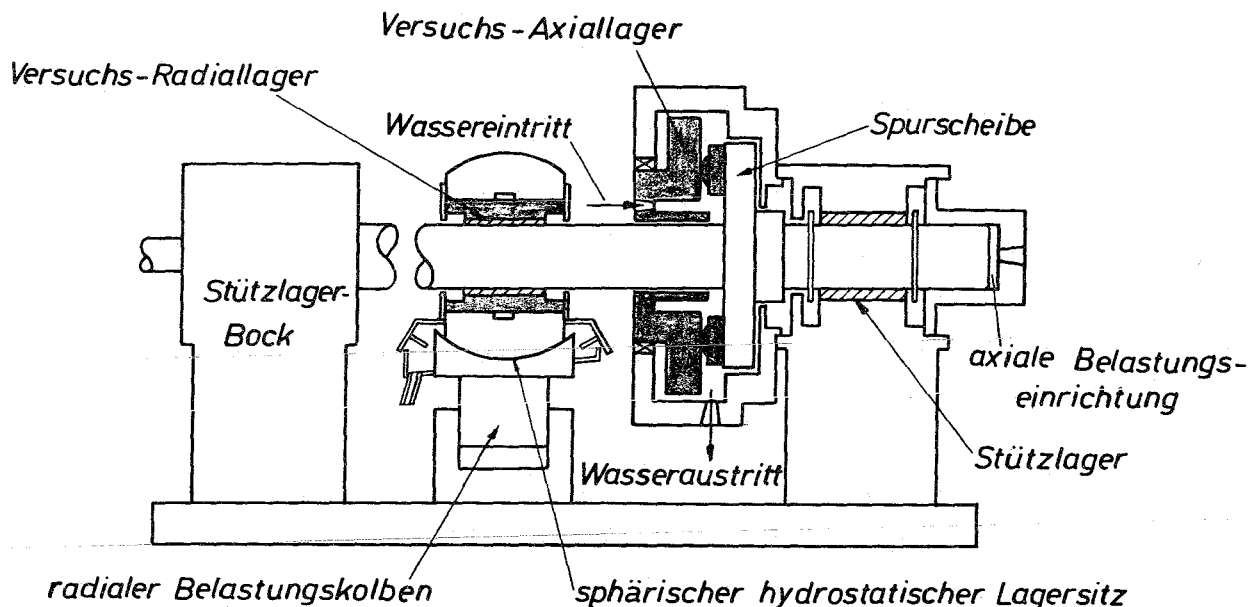


Abb. 134: Aufbau des Prüfstandes

Das untersuchte Axiallager hatte 7 in der Mitte unterstützte einstellbare Tragschuhe mit einer konvexen Überhöhung von 10 bis 25  $\mu\text{m}$ . Der Aussendurchmesser betrug 10,5", der Innendurchmesser 5,5", die Lagerlänge 3" und die maximale Drehzahl 10 000 U/min, entsprechend einer maximalen mittleren Umfangsgeschwindigkeit von ca. 106 m/s. Schmiermittel war Leitungswasser mit einem Zusatz von Natriumchromat. Ein dem Prüfstand vorgeschaltetes Filter schied Teilchen über 5 Mikron Grösse ab. Die Eintrittstemperatur wurde auf ca. 43 °C konstant gehalten.

Die axiale Belastung wurde über einen hydraulischen Zylinder am freien Wellenende, das als Kolben fungiert, aufgebracht. Das Axiallager war pendelnd aufgehängt, so dass das Reibmoment ziemlich genau gemessen werden konnte. Die Schmierschichtdicke an der Stützstelle wurde indirekt gemessen, indem mittels induktiver Weggeber die Verlagerung der Spurscheibe gegenüber dem Gehäuse ermittelt wurde. Die Eichung erfolgte durch verschiedene statische Belastungen im Stillstand. Über die mit dieser Methode erreichbare Genauigkeit wurde keine Angabe gemacht. Sie erscheint nicht besonders hoch, wenn man an die elastische und thermische Verformung des Gehäuses denkt.

Die starke Beeinflussung durch die Belastung des mittleren Radiallagers geht klar aus den Abb. 135, 138 und 139 hervor. In Abb. 136 ist die Reibleistung über der Drehzahl aufgetragen. Die Drehzahl geht wesentlich stärker ein als die Belastung. Die Reibleistung ändert sich nur wenig mit der Durchflussmenge (Abb. 137). Der Anstieg mit der Menge ist einmal auf die reine Förderleistung des Wassers,

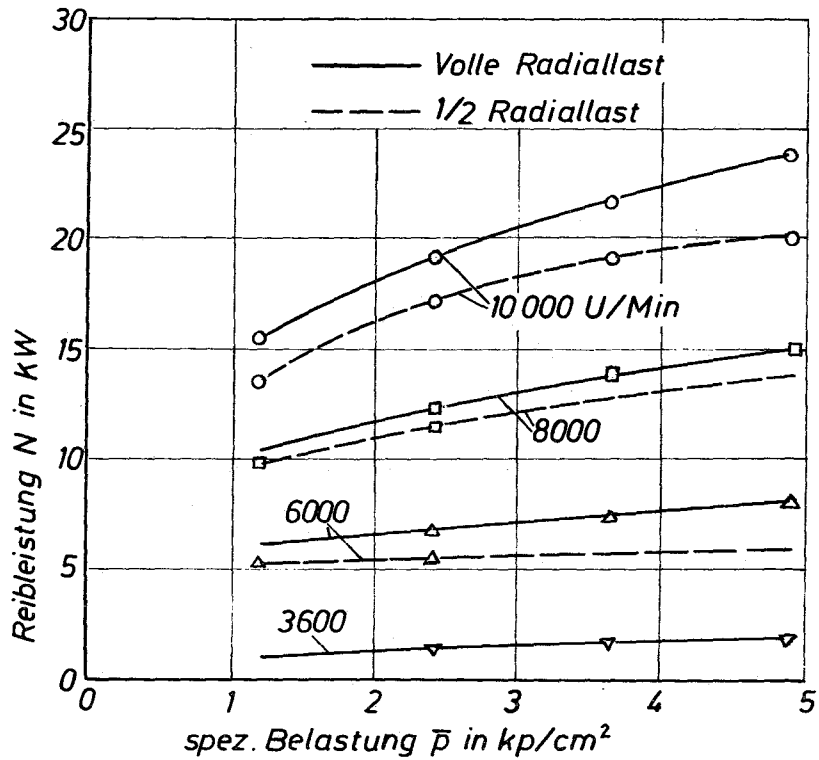


Abb. 135: Reibleistung in Abhängigkeit von der spezifischen Belastung und der Drehzahl

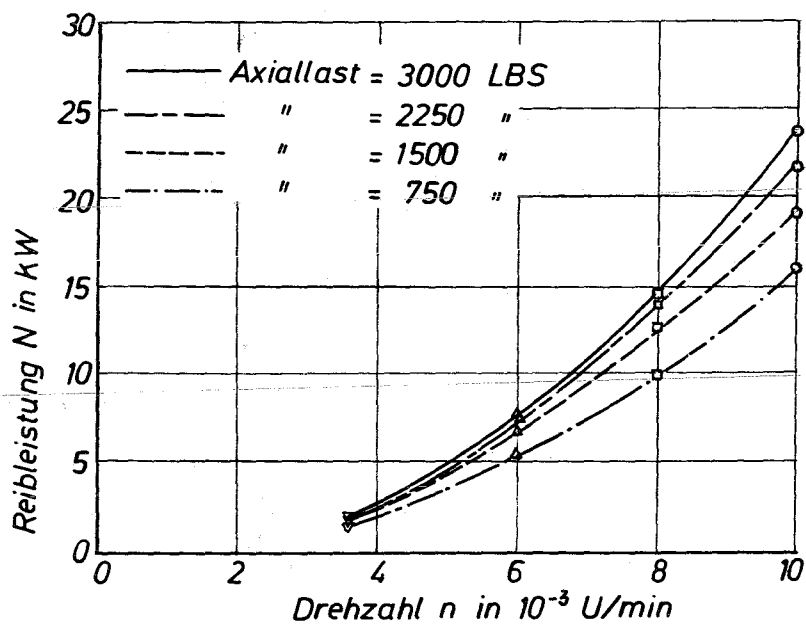


Abb. 136: Reibleistung in Abhängigkeit von der Drehzahl und der Belastung

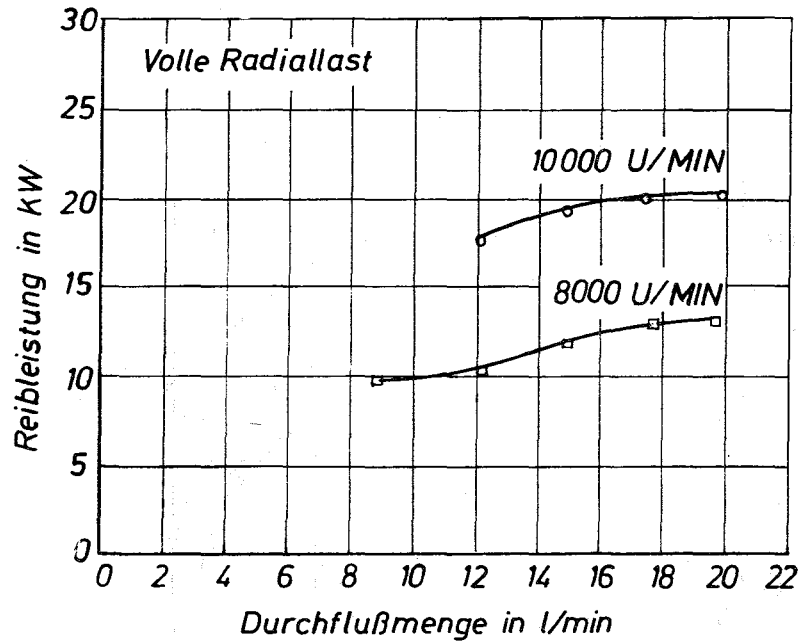


Abb. 137: Reibleistung über der Durchflussmenge

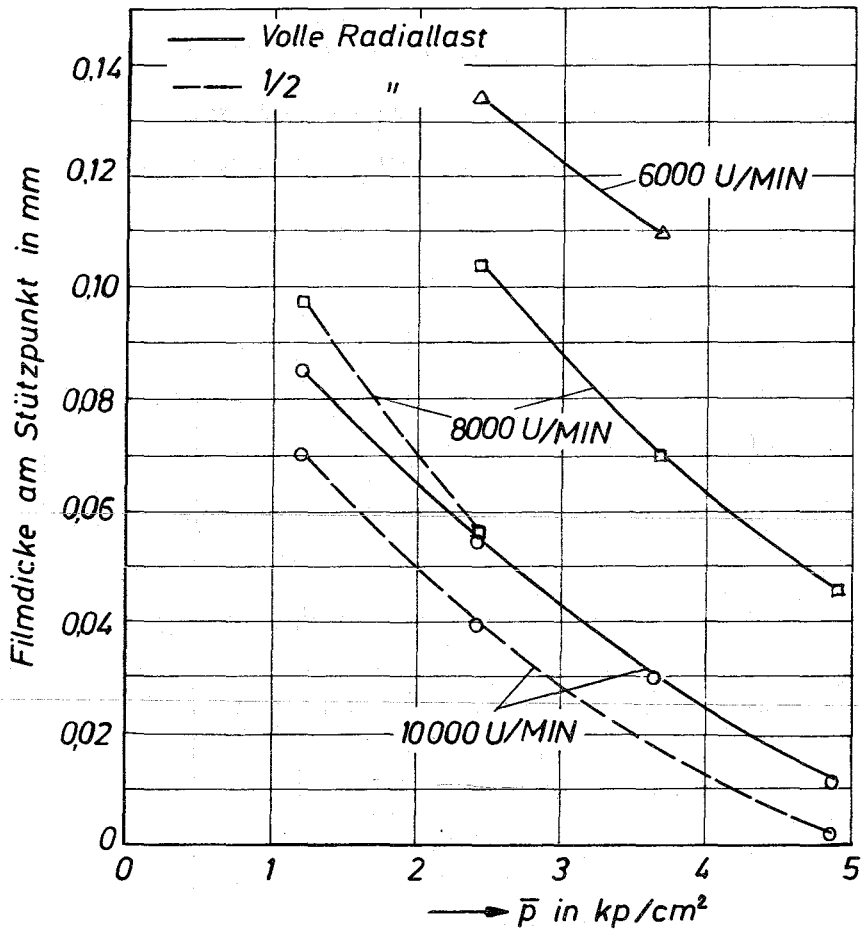


Abb. 138: Schmierfilmdicke am Stützpunkt in Abhängigkeit von der spezifischen Belastung

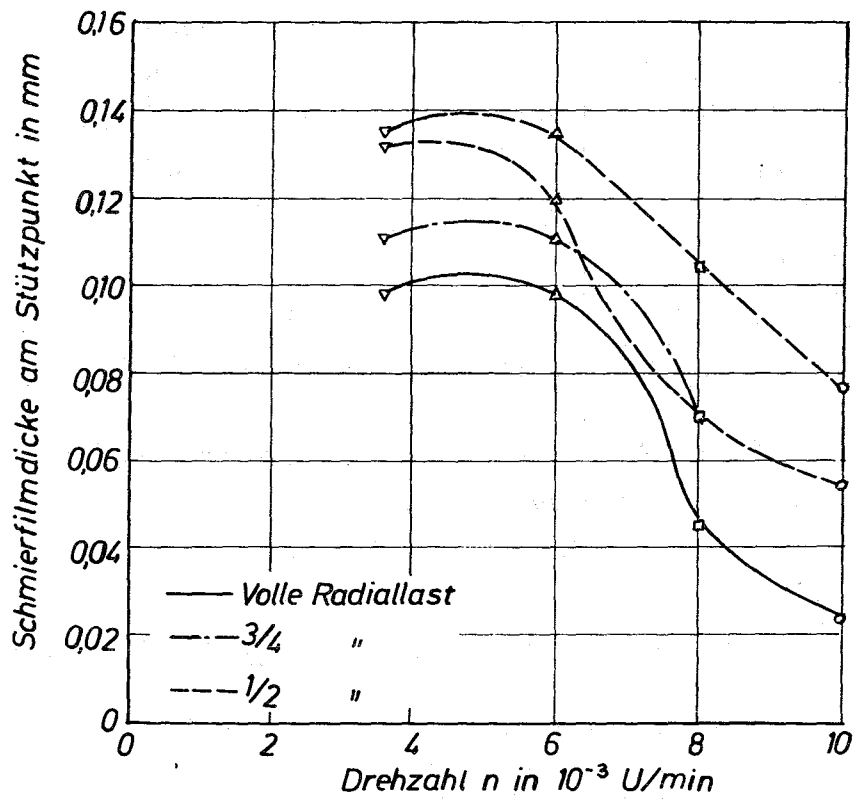


Abb. 139: Schmierfilmdicke am Stützpunkt in Abhängigkeit von der Drehzahl

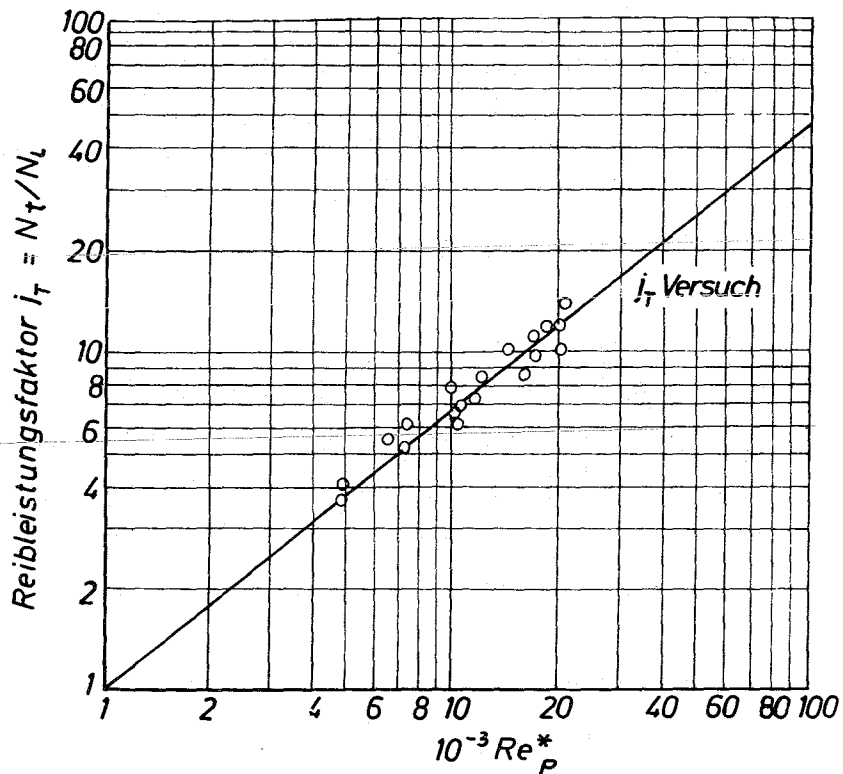


Abb. 140: Reibleistungsfaktor in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl  $Re_P^*$

zum anderen auf die Abkühlung des Schmierfilmes durch den besseren Wasseraustausch zwischen den Tragschuhen zurückzuführen. Die Veränderung der gemessenen Schmierfilmdicke mit der Belastung und der Drehzahl geht aus Abb. 138 und 139 hervor. In Abb. 140 ist ein Vergleich zwischen turbulenter und laminarer Reibung in Form des Reibleistungsfaktors  $j_T = N_t/N_\ell$  in Abhängigkeit von der Reynoldszahl  $Re_p^* = U \cdot h_p / \nu$  angestellt.  $N_\ell$  ist dabei die fiktive laminare Leistung, die nach der laminaren Theorie für den Kippschuh mit Überhöhung nach Abramovitz [49] berechnet wurde.

### 9.3 Vergleich von Kippsegmentlagern mit einem Hybrid-Lager

Shapiro stellte in einer neueren Arbeit [50] vergleichende rechnerische Untersuchungen an, die Wege für die Weiterentwicklung von hochbelasteten Axiallagern, die mit Medien geringer Viskosität wie Wasser oder Flüssigmetallen und -salzen betrieben werden, aufzeigen.

Den Untersuchungen lag eine Belastungskennlinie nach Abb. 141 zugrunde. Die Schwierigkeit ist dabei, dass der höchste Schub bei 20 % der Nenndrehzahl auftritt, wo die hydrodynamische Schmierung auf keinen Fall gesichert ist.

Zunächst verglich Shapiro drei Kippsegmentlagerarten miteinander. Diese waren ein ebenes Kippsegmentlager mit optimalem Stützpunkt für maximale Tragkraft, ein Lager mit überhöhten (balligen) Tragschuhen mit Überhöhung und Stützpunkt optimiert für maximale Tragkraft und ein Lager mit



Unterstützung in der Mitte und Überhöhung, die ebenfalls für maximale Tragkraft optimiert war. Die beiden Lager mit Überhöhung hatten ein konvexes, symmetrisches Parabolprofil in Umfangsrichtung.

Die rechnerischen Untersuchungen, die nach einer verbesserten numerischen Methode von Castelli und Shapiro [51] berechnet wurden, ergaben, dass bei rein hydrodynamischer Schmierung die kleinste Filmdicke in Abhängigkeit von der Drehzahl unter Berücksichtigung des Belastungsverlaufes beim Lager mit ebenen Gleitschuhen am geringsten ist, während sie bei beiden Bauarten mit Überhöhung fast gleich ist (Abb. 142). Ein Vergleich der Tragkraft in Abhängigkeit von der Schmierfilmdicke bei laminarer Strömung und bei Turbulenz wurde in Abb. 143 durchgeführt.

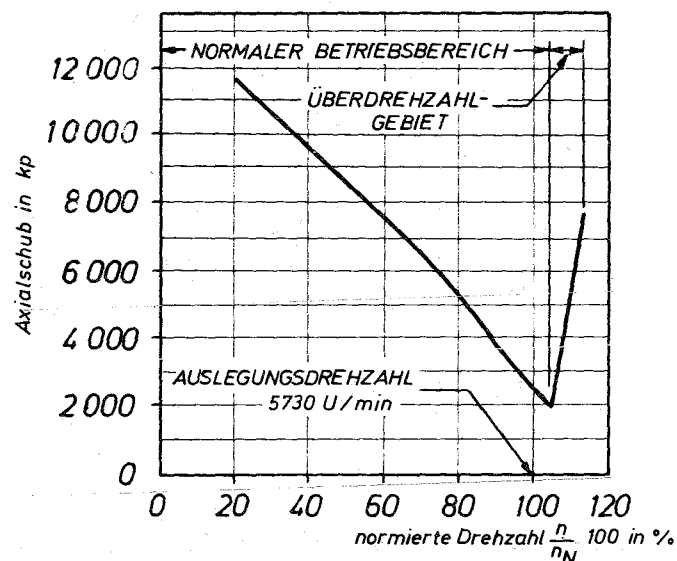


Abb. 141: Belastungskennlinie des Axiallagers eines Heliumkreislaufgebläses

Der Einfluss der verschiedenen Profilformen auf die Reibleistung (Abb. 144) ist nicht gross, dafür der Einfluss der Turbulenz um so stärker.

Zur Erzeugung hydrostatischer Tragkraft im Bereich niedriger Drehzahlen hatte jeder Gleitschuh fünf kleine kreisförmige Taschen, in die unter äusserem Druck eingespeist werden konnte (Abb. 145). Die Flächen der Taschen wurden so klein gehalten, um die hydrodynamische Druckentwicklung nicht zu stören, wenn die hydrostatische Druckversorgung abgeschaltet ist.

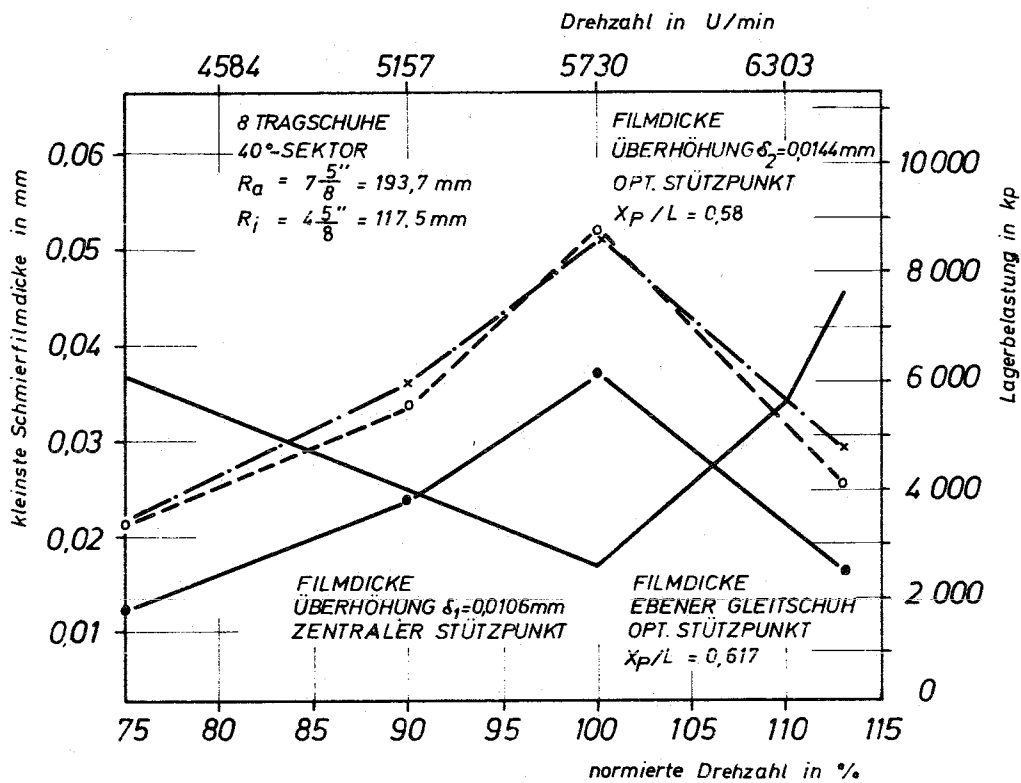


Abb. 142: Kleinste Schmierfilmdicke in Abhängigkeit von der Drehzahl

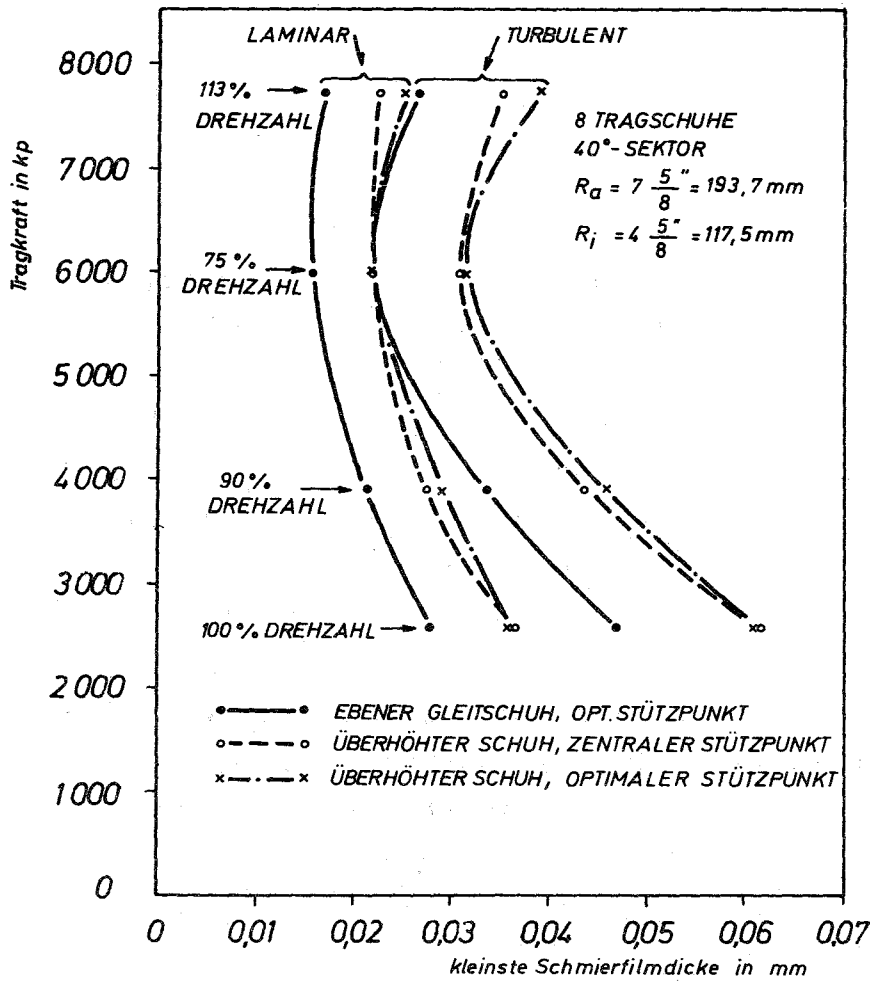


Abb. 143: Tragkraft in Abhängigkeit von der kleinsten Schmierfilmdicke bei laminarer u. turbul. Strömung

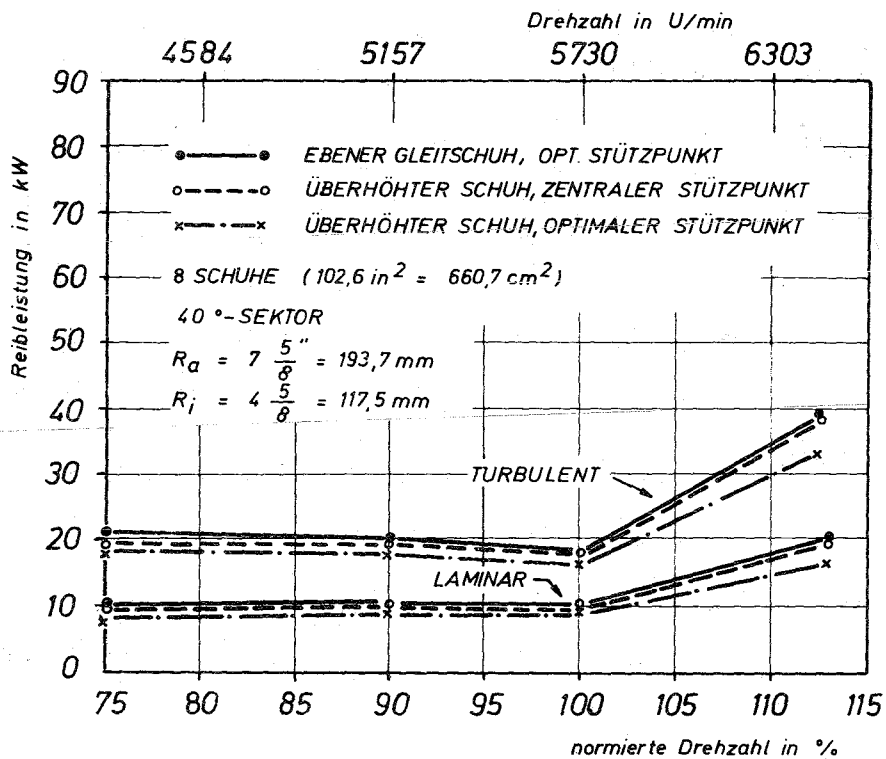


Abb. 144: Reibleistung in Abhängigkeit von der Drehzahl

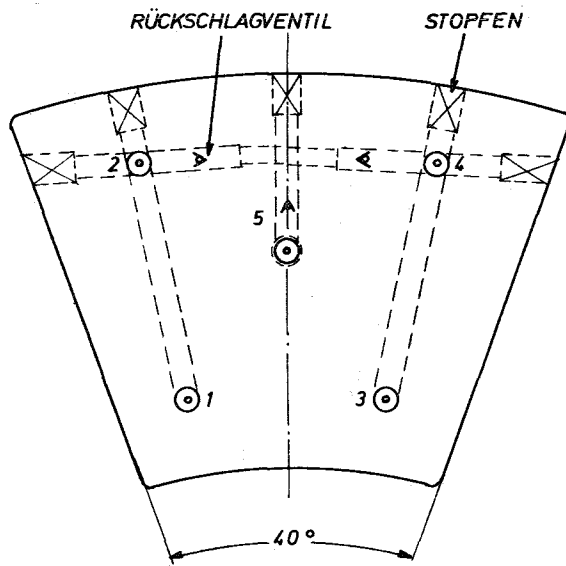


Abb. 145: Anordnung der hydrostatischen Taschen und der Schmiermittel-Zuführkanäle beim Kippsegmentlager

$$F = 102,6 \text{ in}^2 = 660,7 \text{ cm}^2$$
$$U_N = 46,6 \text{ m/s}$$

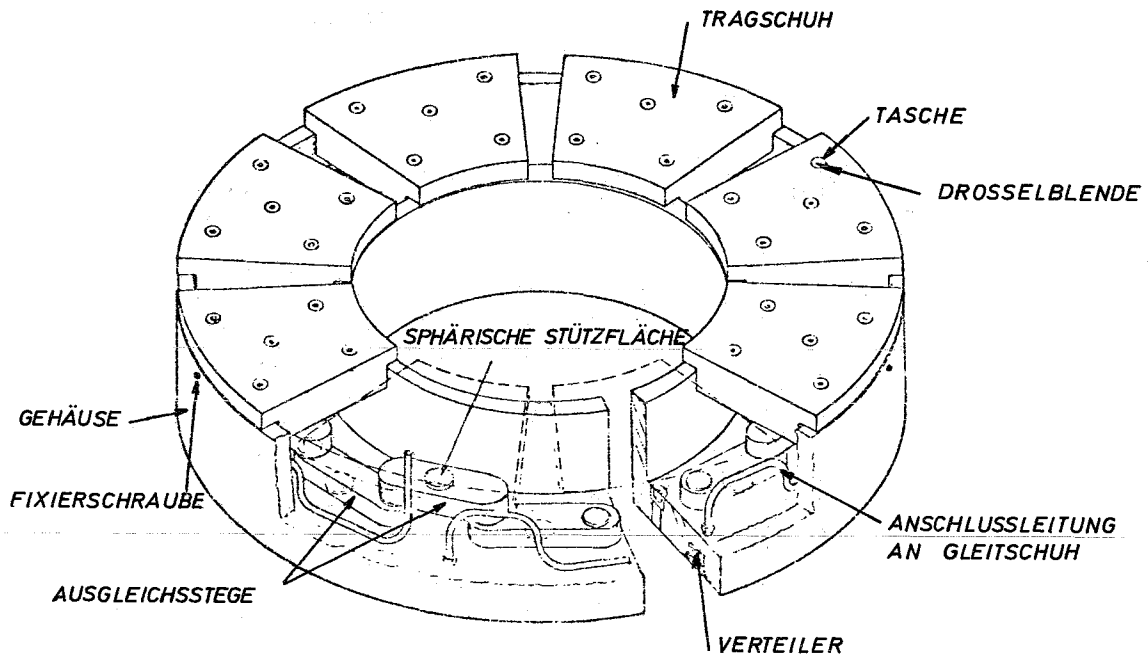


Abb. 146: Hydrodynamisches Kippsegmentlager mit hydrostatischer Tragkraftherhöhung bei niedrigen Drehzahlen

$F = 134,9 \text{ in}^2 = 870 \text{ cm}^2$   
 $U_N = 49,3 \text{ m/s}$

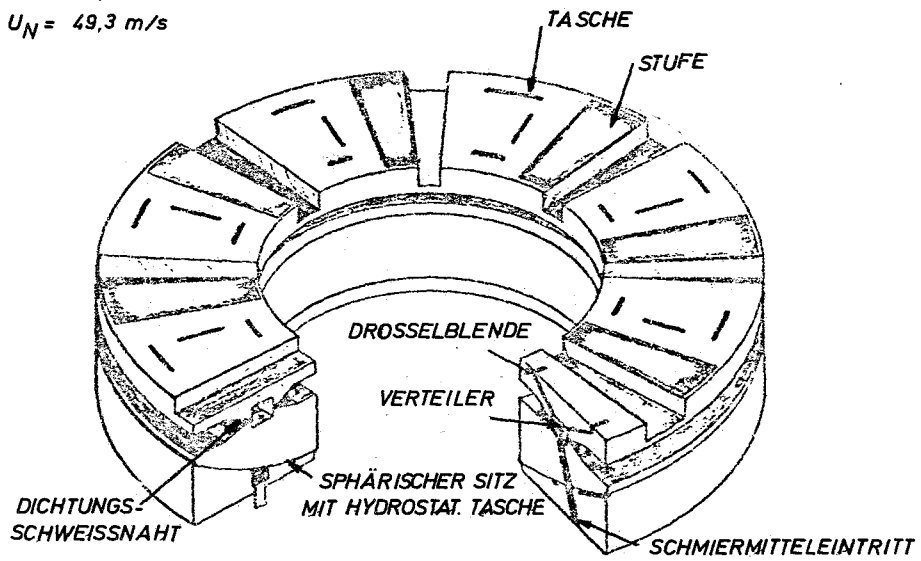


Abb. 147: Aufbau des Hybridlagers

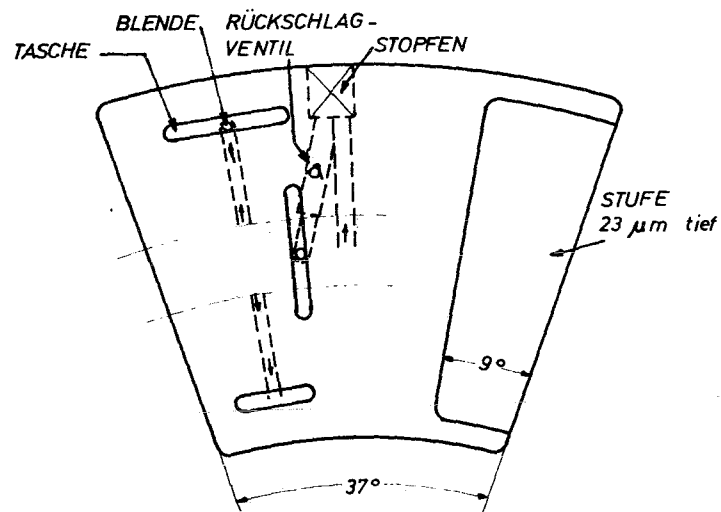


Abb. 148: Anordnung der schlitzförmigen Taschen und Zuführungen beim Hybridlager

Dem Kippsegmentlager wurde als unkonventionelle Alternative ein Hybridlager, wie es in Abb. 147 gezeigt wird, gegenübergestellt. Das Hybridlager hatte ebenfalls 8 Tragflächen, aber einen etwas grösseren Aussendurchmesser als das Kippsegmentlager. Das Lager stützte sich auf einer kugelförmigen Fläche ab, die als sphärisches hydrostatisches Lager ausgebildet war, das während des Anfahrvorganges unabhängig vom Axiallager versorgt und im normalen Betrieb ausser Funktion war. Die hydrodynamische Tragfähigkeit wurde durch die Ausbildung als Staurandlager mit einem ungefähr 23  $\mu\text{m}$  tiefen Stauraum, der sich über nur 1/4 der Tragflächenlänge erstreckt, erzielt. Zur Erhöhung der Tragkraft wurde zusätzlich in die schlitzförmigen Kammern (Abb. 148) Druckwasser eingespeist, so dass sich eine beachtliche hydrostatische Tragkraftherhöhung ergab.

Abb. 149 zeigt den Zusammenhang zwischen Schmierfilmdicke und der Drehzahl. Es wird sowohl das rein hydrodynamische als auch hybride Betriebsverhalten und der Einfluss der Turbulenz gezeigt. Beim Hybridlager ist dieser wegen der grösseren Filmdicke und der dadurch höheren Reynoldszahl stärker. Die Reibleistung (Abb. 150) fällt mit der Drehzahl infolge der stark abnehmenden Belastung etwas ab, ist im Mittel aber doppelt so hoch, wie sie bei laminarer Strömung sein würde. Der Wasserdurchsatz in Abhängigkeit von der Drehzahl geht aus Abb. 151 hervor.

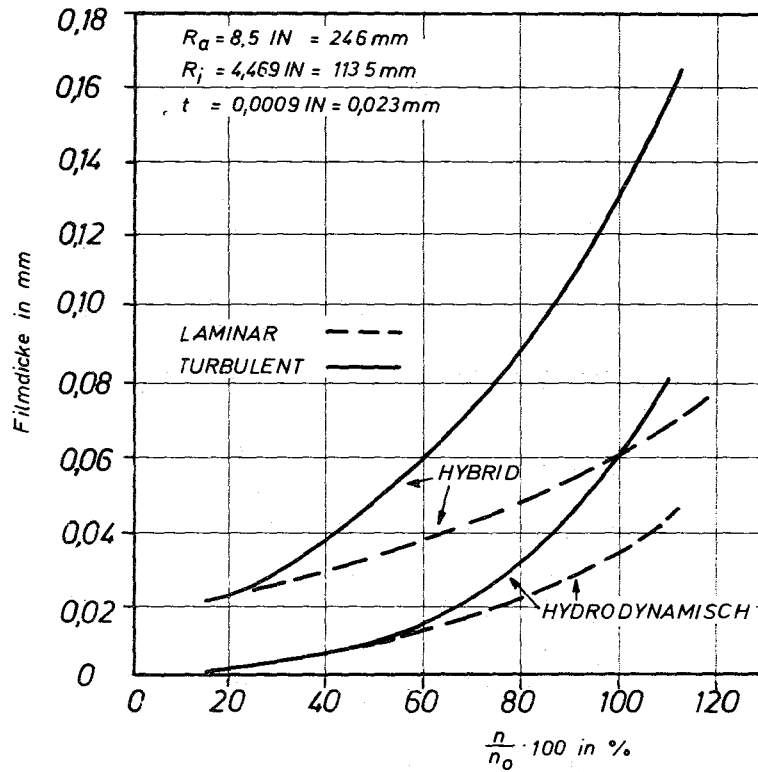


Abb. 149: Filmdicke in Abhängigkeit von der Drehzahl beim Hybridlager

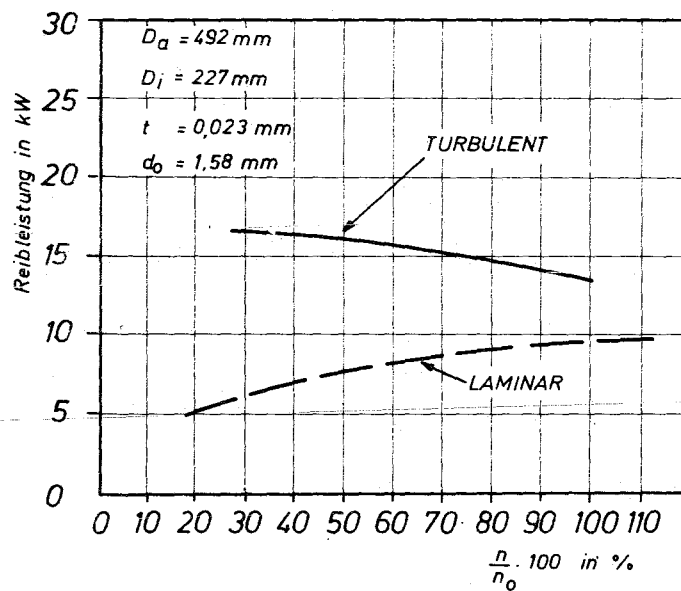


Abb. 150: Reibleistung des Hybridlagers in Abhängigkeit von der Drehzahl

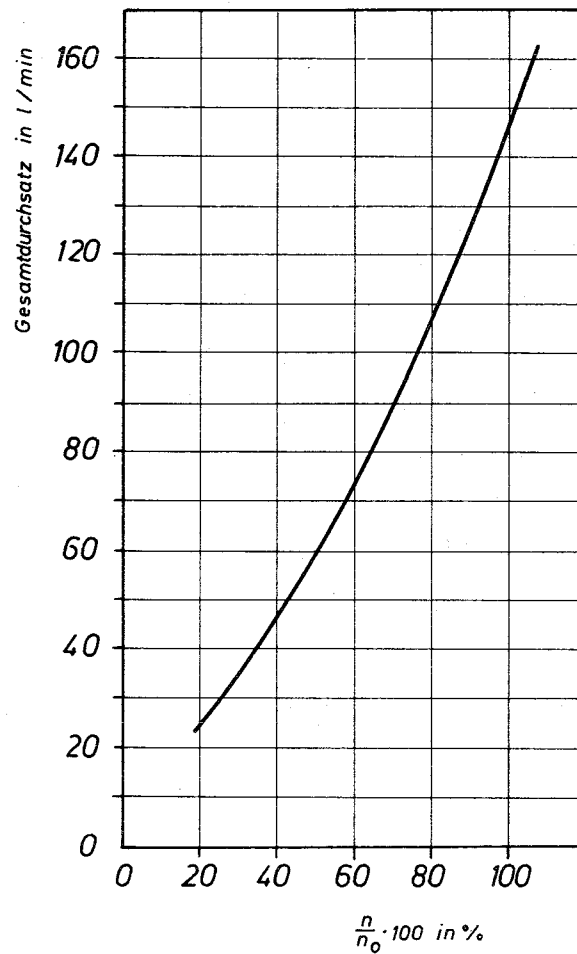


Abb. 151: Wasserdurchsatz durch das Hybridlager in Abhängigkeit von der Drehzahl

	TPTB		HTB	
	75	100	75	100
Drehzahl, %	75	100	75	100
kleinste Filmdicke, $\mu\text{m}$	31 (21)	59 (37)	81 (46)	133 (61)
Reibleistung, kW	19,5 (8,6)	17,5 (9,7)	15,2 (8,9)	13,5 (9,7)
Durchflussmenge, $\ell/\text{min}$	22,7	22,7	(100)	(147)
Zuführdruck, $\text{kp}/\text{cm}^2$	-	-	34,2	34,2
Druck in Taschen, $\text{kp}/\text{cm}^2$	-	-	(18)	(6,25)
Anfahrdruck in Taschen "	32,6		32,6	
Anfahrdurchsatz, $\ell/\text{min}$	55,2		15,1	
Anfahrspaltweite, $\mu\text{m}$	178		178	
Blendendurchmesser, mm	2,34		1,57	

Tabelle 20: Vergleich Kippsegmentlager (TPTB) mit Hybridlager (HTB), ( ) - laminare Theorie



In Tabelle 20 werden die theoretischen Ergebnisse des balligen Kippsegmentlagers mit denen des Hybridlagers verglichen. Man muss dabei aber beachten, dass das Kippsegmentlager eine um 24 % kleinere effektive Lagerfläche hat und die Umfangsgeschwindigkeiten um 5 % niedriger sind als beim Hybridlager. Trotz dieser Einschränkung schneidet das Hybridlager wesentlich besser ab als das Kippsegmentlager. Die Schmierfilmdicke ist beim Hybridlager ungefähr doppelt so gross, was die Betriebssicherheit erhöht. Würde man von gleicher Schmierfilmdicke ausgehen, wäre die Belastungsfähigkeit mindestens die doppelte eines Kippsegmentlagers mit gleichen Nennabmessungen. Trotz der grösseren Abmessungen ist der Reibungsverlust beim Hybridlager geringer. Dazu kommt als weiterer Vorteil, dass das Hybridlager in der Herstellung billiger ist. Der Vorteil des Kippsegmentlagers ist die Einstellbarkeit jedes einzelnen Tragschuhes. Bei Wasserschmierung ist dies aber nicht so ausschlaggebend, da infolge der grossen Wärmekapazität des Wassers und der geringen Zähigkeit die Erwärmung der Lagerkörper nicht so hoch ist, wie bei schwerbelasteten ölgeschmierten Axiallagern. Die thermischen und elastischen Verformungen sind deshalb bei wassergeschmierten Lagern von wesentlich geringerer Bedeutung.

#### 9.4 Staurand-Hybridlager

Wachmann, Wilcock u. Yampolsky [52] beschreiben eine Auslegungsmethode für ein Staurand-Hybrid-Axiallager mit Wasserschmierung für ein von einer Dampfturbine angetriebenes Heliumgebläse. Die Belastungskennlinie des Axiallagers geht aus Abb. 152

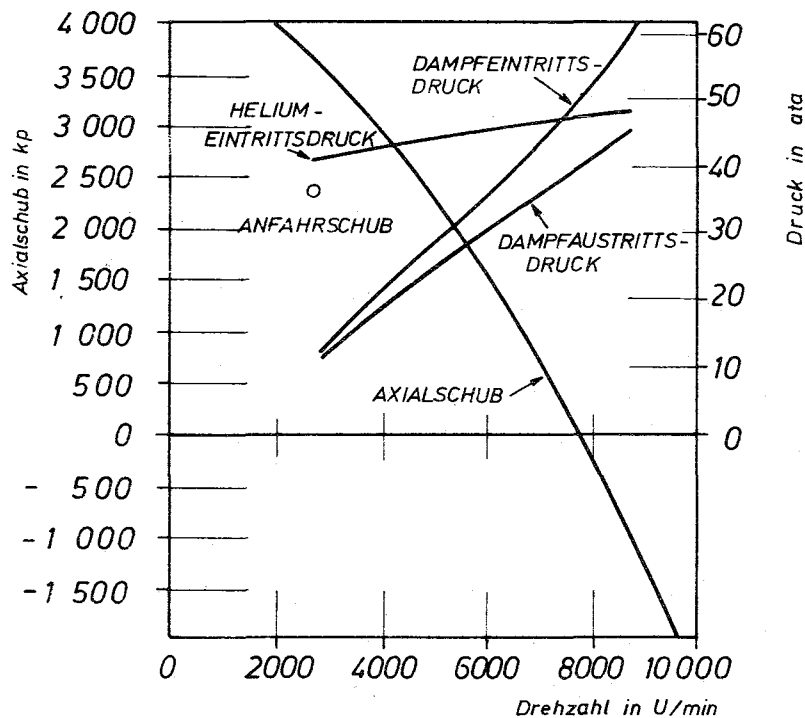


Abb. 152: Axialschub des Heliumgebläses in Abhängigkeit von der Drehzahl

hervor. Die höchste Belastung tritt hier auch bei sehr niedrigen Drehzahlen auf, weshalb in diesem Bereich hydrostatische Schmierung notwendig ist.

Die Berechnungen werden für linearisierte Laufflächen durchgeführt, d.h. für einen geraden kontinuierlichen Streifen der Breite  $B$ , an dem eine Ebene im Abstand  $h_0$  mit der Geschwindigkeit  $U$  vorbeistreicht, die dem mittleren Durchmesser  $D$  entspricht (Abb.153). Entgegen der Empfehlung von Elrod u. Ng (Abschnitt 7.5) wurden die Massenkräfte vernachlässigt und die linearisierte Methode von Ng u. Pan [30] angewandt.

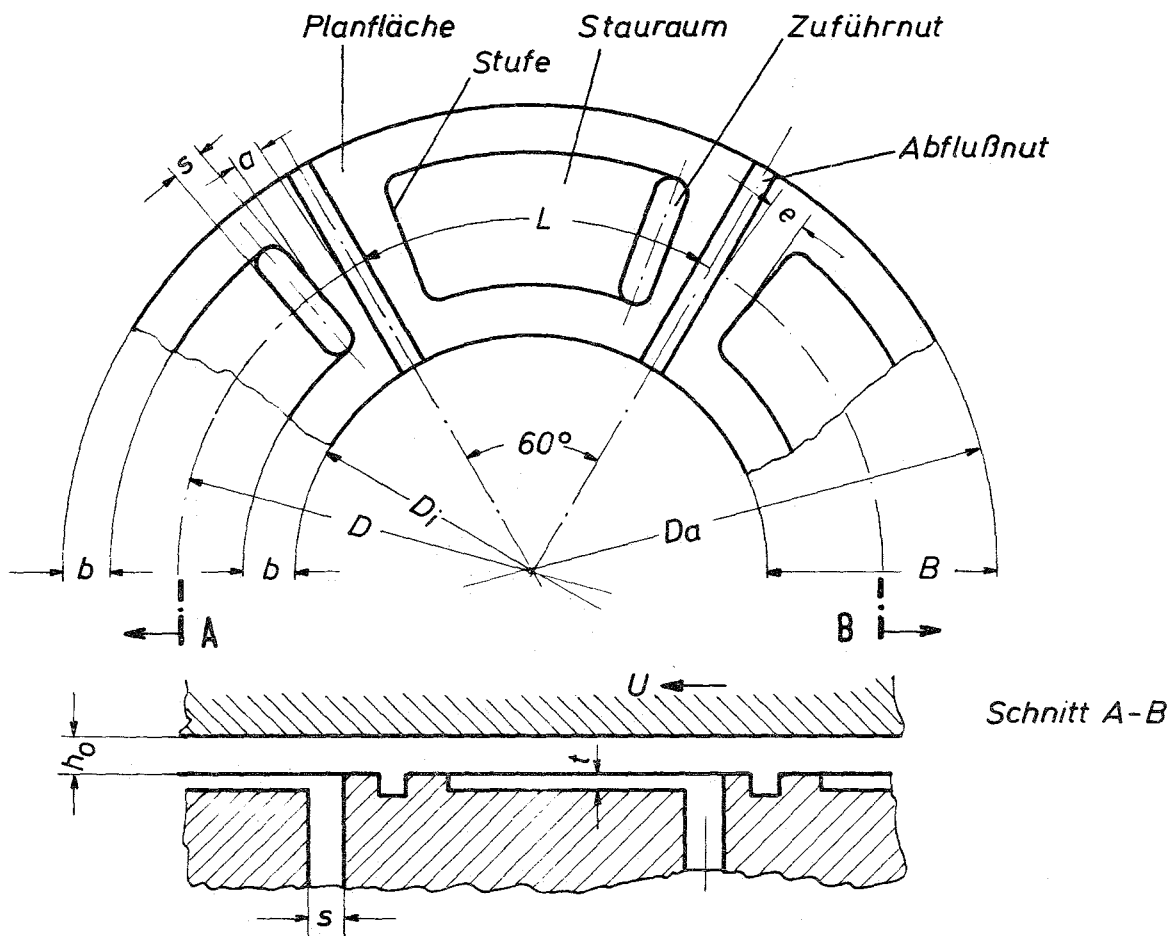


Abb. 153: Aufbau des Axiallagers

Für das Lager wurden ein Aussendurchmesser von 9,75 inch, ein Innendurchmesser von 5 inch und 6 Gleitflächen gewählt. Als Auslegungsspaltweite wurden  $h_0 = 0,002$  inch ( $\approx 51 \mu\text{m}$ ) vorausgesetzt. Der normale Betriebsbereich wurde zwischen 30 % (2865 U/min) und 100 % (9550 U/min) der Drehzahl bei Vollast des Reaktors, die Wassereintrittstemperatur zu 100 °F (38,8 °C) angenommen.

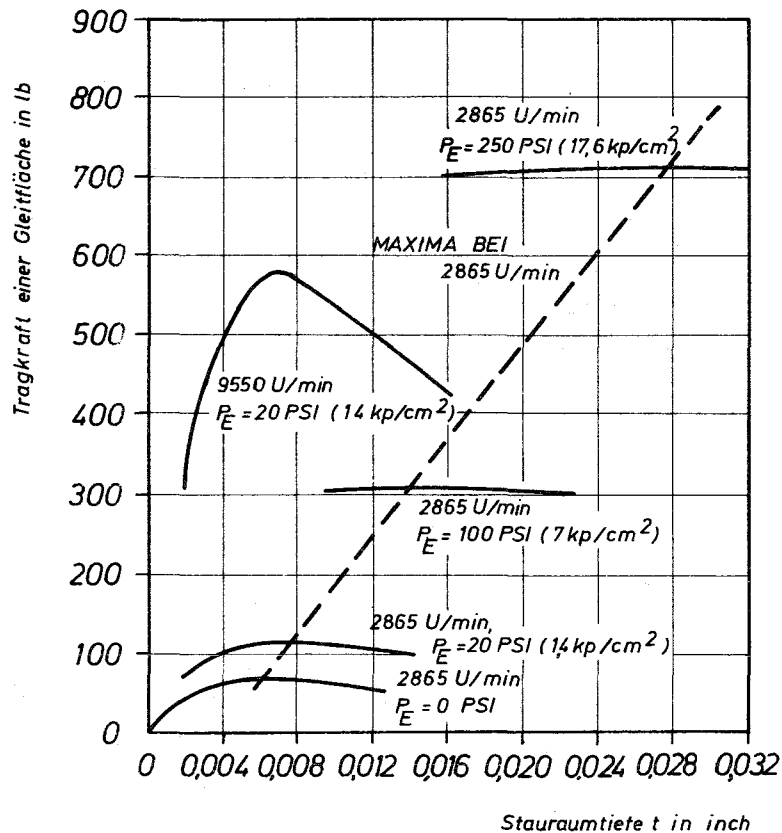


Abb. 154: Einfluss der Stauraumtiefe auf die Tragfähigkeit bei verschiedenen Eintrittsdrücken und 0,002 inch Schmier-spaltweite.

Abb. 154 zeigt den Einfluss der Stauraumtiefe  $t$  auf die Tragkraft bei Auslegungsspaltweite  $h_o = 0,002$  inch für die Wassereintrittsdrücke  $p_E = 0, 20, 100$  und  $250$  psi. Es wurde eine Stauraumtiefe von  $t = 0,012$  inch gewählt, die bei einem Eintrittsdruck von  $p_E = 200$  psi bei  $2865$  U/min die notwendige Tragkraft von ungefähr  $1330$  lbs pro Gleitfläche ergibt, was einer mittleren auf die Ringfläche bezogenen Belastung von  $\bar{p} = 10,2$   $\text{kp/cm}^2$  entspricht.

Die mittlere Gleitflächenlänge betrug  $L = 3,59$  inch, die Stege  $a = 0,32$ ,  $e = 0,42$  und  $b = 0,475$  inch. Sie resultieren aus einem Kompromiss zwischen möglichst grosser Tragfähigkeit und möglichst geringem Wasserdurchsatz.

In Abb. 155 wurde der Einfluss verschiedener Eintrittsdrücke auf die Gesamttragkraft in Abhängigkeit von der Drehzahl untersucht. Bei niedrigen Drehzahlen ist der hydrostatische Anteil dominierend. Der Anteil der hydrodynamischen Tragkraft ist bei höheren Drehzahlen doch beachtlich. Die Reibleistung (Abb. 156) ist nahezu unabhängig vom Eintrittsdruck und kann deshalb als eine einzige Kurve in Abhängigkeit von der Drehzahl angegeben werden. Infolge der Turbulenz ist sie beachtlich hoch.

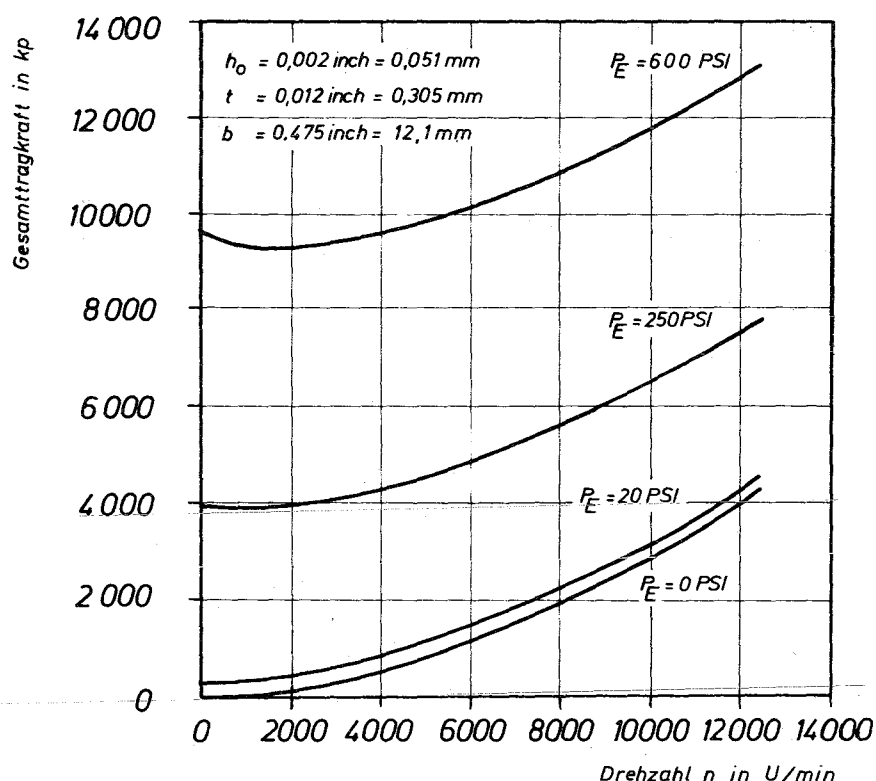


Abb. 155: Gesamtbelastung in Abhängigkeit von Drehzahl und Eintrittsdruck

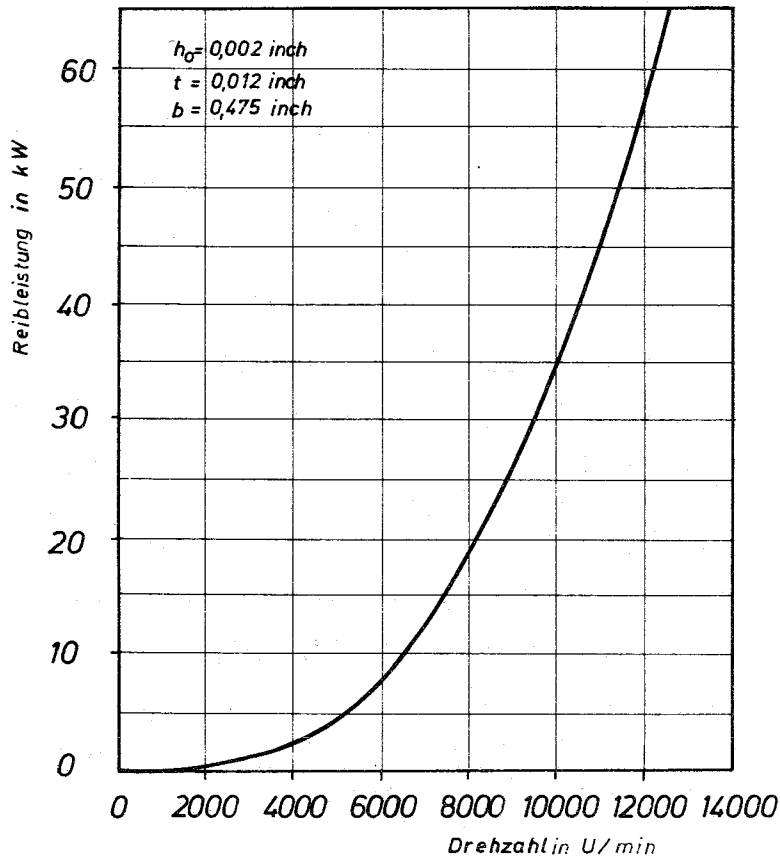


Abb. 156: Reibleistung des gesamten Lagers bei  $p_E = 0, 20, 250$  und  $600$  psi

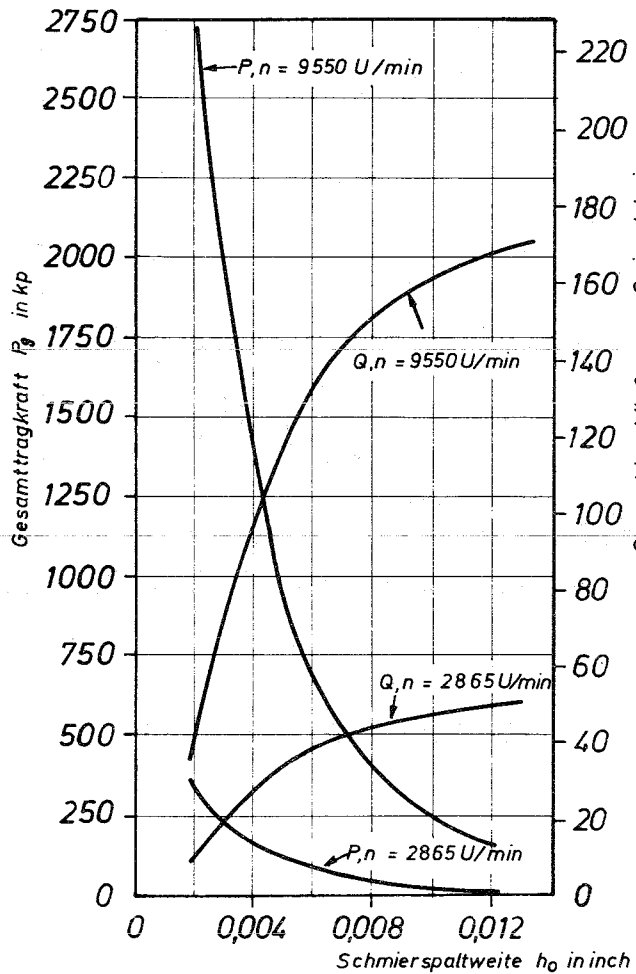


Abb. 157: Einfluss der Schmierpaltweite  $h_o$  auf die Tragkraft und den Wasserdurchsatz bei 2865 u. 9550 U/min

Der Einfluss der Schmierpaltweite auf die Tragfähigkeit und den Wasserdurchsatz geht aus Abb. 157 hervor.

Wegen der relativ grossen Stauraumtiefe und der geringen Tragkraftänderung mit der Stauraumtiefe ist das Staurandlager gegen Verschleiss sehr unempfindlich, so dass eine hohe Lebensdauer erwartet werden kann.

#### 10. Ausblick

Mit den grundlegenden Arbeiten von Ng und Pan, die die linearisierte Theorie entwickelten, und von Elrod und Ng, die die nichtlineare Theorie veröffentlichten, dürfte die Theorie der turbulenten Lager-schmierung einen gewissen Abschluss erreicht haben. Sie kann auf Grund ihrer Anwendung auf verschiedene experimentell untersuchte Lagertypen, wo sie beachtlich gute Übereinstimmungen erzielte, als gesichert gelten. Sie ist eigentlich eine halbempirische Theorie, da sie auf empirisch ermittelten Gesetzmässigkeiten aufbaut. Solange die grundlegenden Vorgänge der turbulenten Strömungen mathematisch nicht direkt erfassbar sind, dürfte sie von bleibendem Bestand sein.

Ihre Anwendung erfordert grosse Rechenanlagen. Trotzdem ist sie schon häufig angewendet worden, so bei 360°-Lagern, 60°-Lager, 100°-Lagern und bei radialen Kippschuhlagern mit 3, 4, 5 und 6 Tragschuhen, bei den Axiallagern bei balligen Michell-Lagern und den in den beiden vorangegangenen Abschnitten behandelten beiden Hybridlagerformen.

Auf der anderen Seite herrscht ein grosser Mangel an fundierten experimentellen Ergebnissen bei Lagern mit turbulenter Strömung. Lange Zeit war die 1956 veröffentlichte Arbeit von Smith und Fuller die einzige Vergleichsbasis für theoretische Arbeiten. Erst in jüngster Zeit gibt es einige experimentelle Ergebnisse von Radiallagern mit  $360^\circ$ ,  $100^\circ$  und  $60^\circ$  und in den USA bevorzugten Kippschuhlagern. Mit Ausnahme der Kippschuhlager wurde aber jeweils nur ein Breitenverhältnis untersucht.

Bei den Axiallagern herrscht ein katastrophaler Mangel an praktisch verwertbaren experimentellen Untersuchungen an Lagern, die bei relativ hohen Belastungen mit Schmiermitteln geringer Viskosität im turbulenten Bereich arbeiten. Die ersten Versuche von Abramovitz beschränkten sich praktisch auf den Nachweis der Turbulenz. Es wurden aber auch schon ballige Tragschuhe verwendet. Auch Ketola u. McHugh verwendeten in ihren Versuchen diese Profilform. Ihre Versuche sind die einzigen dem Verfasser bekannt gewordenen veröffentlichten, die sich auch auf den turbulenten Bereich mit Umfangsgeschwindigkeiten bis über 100 m/s erstrecken. Die beiden besprochenen Hybridlagerbauformen wurden zwar auch gebaut und erprobt, es wurden jedoch keine experimentellen Ergebnisse veröffentlicht.

Die erfolgreiche Anwendung von wassergeschmierten Lagern mit hohen Umfangsgeschwindigkeiten und hohen Belastungen der Axiallager erfordert weitere Versuche, vor allem auf dem Gebiete der Axiallager.



11. Literatur

- [1] Taylor, G.I.: "Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders"  
Trans. Royal Society of London, Series A,  
vol. 223 (1923), S. 289/343
  
- [2] Taylor, G.I.: "Fluid Friction between Rotating Cylinders"  
Proc. Royal Society of London, Series A,  
vol. 157 (1936), S. 546/578
  
- [3] Vohr, J.H.: "Analysis of Turbulent Lubrication. Vol. 2. An Experimental Study of Vortex Flow and Turbulence in Concentric and Eccentric Annuli"  
MTI-Report 64 TR 20, Mai 1964
  
- [4] Vohr, J.H.: "Experimental Study of Super-Laminar Flow between Non-Concentric Rotating Cylinders"  
MTI-Report 65 TR 43
  
- [5] Pan, C.H.T. u. Vohr, J.H.: "Super-Laminar Flow in Bearings and Seals"  
MTI-Report 66 TR 66, Kap. 4.1., 51 S., Nov. 1966  
Abdruck in: "Bearing and Seal Design in Nuclear Power Machinery", Burton, R.A.,  
ASME-Verlag 1967, S. 219/250
  
- [6] Schlichting, H.: "Grenzschichttheorie"  
Braun-Verlag, Karlsruhe, 3. Aufl. 1958,  
Kap. XVIII und XIX

- [7] Burton, R.A. u. Carper, H.J.: "An Experimental Study of Annular Flows with Applications in Turbulent Film Lubrication"  
ASME-Paper No. 66-Lub-14
- [8] Pai, S.I.: "On Turbulent Flow Between Parallel Plates" Journal of Applied Mechanics, vol. 20 (1953), S. 109/114
- [9] Reichardt, H.: "Gesetzmässigkeiten der geradlinigen turbulenten Couetteströmung"  
Mitt. Max-Planck-Institut f. Strömungsforschung Nr. 22, Göttingen, 1959
- [10] Laufer, J.: "Some Recent Measurements in a Two-Dimensional Turbulent Channel"  
J. Aeronautical Sciences, vol. 17 (1950), S. 277/287
- [11] Smith u. Fuller: "Journal-Bearing Operation at Superlaminar Speeds"  
Trans. ASME, vol. 78 (1956), S. 469/474
- [12] Tao, L.N.: "A Theory of Lubrication in Short Journal Bearings With Turbulent Flow"  
Trans. ASME, vol. 80 (1958), S. 1734/1740
- [13] Tao, L.N.: "A Theory of Lubrication With Turbulent Flow and Its Application to Slider Bearings"  
Trans. ASME, Series E, J. Appl. Mech., vol. 27 (1960), S. 1/4
- [14] Constantinescu, V.N.: "Influenta turbulentei asupra miscarii in stratul de lubrifiant (The Influence of the Turbulence on the Lubricant Layer Flow)"  
1958 Stud. Cercet. Mecan. Aplica., Bd. IX, Nr. 1, S. 103/87

- [15] Constantinescu, V.N.: "Studiul lubrificatiei bidimensionale in regim turbulent (Studium zweidimensionaler Schmierung im turbulenten Gebiet)"  
1958 Stud. Cercet. Mecan. Aplica.,  
Nr. 1, S. 139/162
- [16] Constantinescu, V.N.: " On Turbulent Lubrication"  
Proceed. Inst. Mech. Engrs., vol. 173 (1959)  
Nr. 38, S. 881/900d
- [17] Constantinescu, V.N.: " Sur la Lubrification non Permanente en Regime Turbulent"  
Revue de Mechanique Appliquée, vol. IV, No 1,  
1959 S. 73/96
- [18] Constantinescu, V.N.: " Consideratii asupra lubrificatiei tridimensionale în regim turbulent"  
1959 Studii si Cercetari de Mecanica aplicata  
No 4, S. 1093/1112
- [19] Constantinescu, V.N.: "Calculul lagarelor compuse din supra-fete plane, lubrificate in regim turbulent"  
1959 Studii si Cercetari de Mecanica Aplicata,  
No 3, S. 756
- [20] Constantinescu, V.N.u. Tipei, N.: "Influenta legii de variatie a lungimii de amestec asupra miscarii turbulente din stratul de Lubrifiant (Einfluss der Variation des Mischungsweges auf die turbulente Bewegung in der Schmierschicht)"  
1960 Studii si Cercetari de Mecanica Aplicata,  
No. 5, S. 1091

- [21] Constantinescu, V.N.: "O trehmernoi smazke pri turbulentom regime (Über die dreidimensionale Schmierung im turbulenten Gebiet)"  
Revue de Mecanique Appliquée, vol. V (1960),  
Nr. 1, S. 47/66
- [22] Constantinescu, V.N.: "Calculus lagarelor cu alunecare lubrificate în regime turbulent"  
Studii si Cercetari de Mecanica Aplicata, vol. XI  
(1961), No. 3
- [23] Constantinescu, V.N.: "Analysis of Bearings  
Operating in Turbulent Regime"  
Trans. ASME, Series D. J. Bas. Engng., vol. 84  
(1962) S. 139/151
- [24] Reynolds, A.J.: "Analysis of Turbulent Bearing  
Films"  
J. Mech. Engng. Science vol. 5 (1963), S.258/272
- [25] Reichardt, H.: "Vollständige Darstellung der  
turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in  
glatten Leitungen"  
ZAMM 31 (1951), S. 208/219
- [26] Ng, Ch.W.: "Fluid Dynamic Foundation of Tur-  
bulent Lubrication Theory"  
ASLE Trans. 7 (1964), S. 311/321
- [27] Ludwig, H.u.W. Tillmann: "Untersuchungen über  
die Wandschubspannungen in turbulenten Reibungs-  
schichten"  
Ingenieur-Archiv, XVII. Bd. (1949), S. 288/299
- [28] Clauser, J.: "Turbulent Boundary Layers in  
Adverse Pressure Gradients"  
J. Aeronautical Sciences 21 (1954), S. 91/108

- [29] Ross, D.: Proc. Midwestern Conf. Fluid Mech.  
3rd, Minneapolis,  
Minn. 1963, S. 651
- [30] Ng, Ch.W.u.C.H.T.Pan: "A Linearized Turbulent  
Lubrication Theory"  
Trans. ASME, Series D, J.Bas.Engng. vol. 87  
(1965), S. 675/688
- [31] Arwas, E.B.u.B.Sternlicht: "Analysis of Finite  
Length Bearings in Turbulent Regime"  
MTI-Report 63 TR 10, Juli 1963
- [32] Orcutt, F.K.: "Investigation of a Partial  
Arc Pad Bearing in the Superlaminar Flow Regime"  
Trans ASME, Series D, J.Bas.Engng. vol. 87 (1965),  
S. 145/152
- [33] Elrod, H.G.Jr. u. Ng, Ch.W.: "A Theory for  
Turbulent Fluid Films and Its Application to  
Bearings"  
Trans ASME, Series F, Journal of Lubrication  
Technology, vol. 89 (1967), S. 346/362 (ASME-  
Paper No. 66-Lub-12)
- [34] Clauser, F.H.: "The Turbulent Boundary-Layer"  
Advances in Applied Mechanics, vol. 4 (1965),  
S. 1 - 51
- [35] Page, Schlinger, Breaux u. Sage:  
"Point Values of  $\epsilon_c$  und  $\epsilon_m$  in Uniform Flow  
Between Parallel Plates"  
Indus. and Eng. Chem., vol. 44 (1952), S. 410-424
- [36] Laufer, J.: "Investigation of Turbulent Flow  
in Two-Dimensional Channel"  
NACA-Report No. 1053 (1951)

- [37] Nikuradse, J.: "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren"  
Forsch. a.d. Geb. d. Ing.-Wes., Heft 456 (1932)
- [38] Robertson, J.M.: "On Turbulent Plane Couette Flow"  
6th Midwestern Conf. on Fluid Mech., Univ. of Texas, 1959, S. 169
- [39] Schinkle J.N. u. Hornung, K.G.: "Frictional Characteristics of Liquid Hydrostatic Journal Bearings"  
Trans. ASME, Series D, J.Bas.Engng, vol. 87 (1965), S. 163/169
- [40] Wilcock, D.F.: "Turbulence in High-Speed Journal Bearings"  
Trans. ASME, vol. 72 (1950), S. 825/834
- [41] Raimondi, A.A. u. J.Boyd: "A Solution for the Finite Journal Bearing and Its Application to Analysis and Design: III"  
Trans. ASLE, vol. 1 (1958), Nr. 1, S. 159/209
- [42] Warner, P.C.: "Static and Dynamic Properties of Partial Journal Bearings"  
Trans. ASME, Series D, J.Bas.Engng, vol. 85 (1963), S. 247/257
- [43] Hugh Mc, J.D.: "Low Viscosity Bearing Stability Investigation" Final Report, Advanced Technology Laboratory, Space Power and Propulsion Section, Missile and Space Division. General Electric, NASA-Contract NAS 3-2111, N64-19224 Code-1 (NASA-Cr-54039), April 1964

- [44] Orcutt, F.K. u. Arwas, E.B. "The Steady-State and Dynamic Characteristics of a Full Circular Bearing and a Partial Arc Bearing in the Laminar and Turbulent Flow Regimes"  
Trans. ASME, Series F, J.Lubr. Techn., vol. 89 (1967), S. 143/153 (ASME-Paper No.66-Lub S 4)
- [45] Orcutt, F.K.: "The Steady-State and Dynamic Characteristics of the Tilting-Pad Journal Bearing in Laminar and Turbulent Flow Regimes"  
Trans. ASME, Series F, J.Lubr. Techn., vol 89 (1967), S. 392/404 (ASME-Paper No. 66-Lub-19)
- [46] Orcutt, F.K.: "Steady-State and Dynamic Properties of the Tilting-Pad Journal Bearing in Laminar and Superlaminar Flow Regimes"  
MTI-Report No.65 TR 32, Juni 1965
- [47] Abramovitz, St.: "Turbulence in a Tilting-Pad Thrust Bearing"  
Trans. ASME, vol. 78 (1956), S. 7/11
- [48] Ketola, H.N. u. Mc Hugh, J.D.: "Experimental Investigation of Water Lubricated Bearings in the Turbulent Regime"  
Aus: "Bearing and Seal Design in Nuclear Power Machinery" Symposium on Lubrication in Nuclear Applications 5.-7.6.1967,  
Miami Beach, Florida  
ASME-Verlag 1967, Conf.-670601
- [49] Abramovitz, St.: "Theory for a Slider Bearing with a Convex Pad Surface; Side Flow Neglected"  
Journal of the Franklin Institute, 259, No. 3,  
März 1955

- [50] Shapiro, W.: "Water-Lubricated Thrust Bearing for a Helium Circulator"  
Aus "Bearing and Seal Design in Nuclear Power Machinery"  
Conf - 670601, ASME-Verlag 1967
- [51] Castelli, V. u. W. Shapiro: "Improved Method for Numerical Solutions of the General Incompressible Fluid Film Lubrication Problem"  
ASME Paper No. 66-Lub S.14, Juni 1966  
Trans. ASME, Series F, J. Lubr. Techn., vol 89 (1967)
- [52] Wachmann, C., Wilcock, D.F. u. J.Yampolsky:  
"Design of a Process Fluid Turbulent Film Shrouded Step Thrust Bearing for Circulators for High Temperatur Helium Cooled Reactors"  
Conf-670601, ASME-Verlag 1967
- [53] Arwas, E.B. u. Waldrun, W.D. "Design of Liquid Metal Lubricated Bearings. Volume 1. Design Data for Tilting Pad Bearings in the Laminar and Turbulent Flow Regimes" Final Report  
NYO-3363-7 (vol. 1), Febr. 1968, 226 S.
- [54] Waldrun, W.D. u.a.: "Design of Liquid Metal Lubricated Bearings. Volume 2. An Experimental Investigation of NaK Lubricated Tilting Pad Bearings" Final Report  
NYO-3363-7 (vol. 2), Febr. 1968, 136 S.



VIII Bezeichnungen

c	Federzahl der Welle
$c_p$	spezifische Wärme
d	Wellendurchmesser
e	Exzentrizität
f	dimensionslose Komponente der Schmierfilmresultierenden in Richtung der Verlagerung
g	dimensionslose Komponente der Schmierfilmresultierenden in Umfangsrichtung
$g^*$	Erdbeschleunigung
h	Schmierspaltdicke, Kanalhöhe
$h_o$	kleinste Schmierspaltdicke
$h_{o,zul}$	kleinste zuläss. Schmierspaltdicke
$h_l$	Schmierspaltdicke am Eintritt in den Schmierspalt
$h^*$	Schmierspaltdicke an der Stelle des Druckmaximums
j	Leistungsverlustfaktor
l	Mischungsweg
$l_l$	Abstand vom Gleitflächenanfang bis zum Schnittpunkt beider Gleitebenen (Axiallager)
m	Verhältnis Keiltiefe zu kleinster Schmierspaltdicke ( $t/h_o$ ); Masse
$m_p$	Optimalwert von $t/h_o$
n	Drehzahl; Exponent
$n_s$	sekundliche Drehzahl, Drehzahlfrequenz
p	Schmierfilmdruck
$\Delta p$	Schmierfilmdruck gegenüber Umgebung des Lagers
$\bar{p}$	spezifische Lagerbelastung, zeitlicher Mittelwert des Druckes bei Turbulenz
$p'$	Schwankungswert des Druckes bei Turbulenz

$s_H$	Horizontalspiel
$s_V$	Vertikalspiel
$t$	Keiltiefe, Stauraumtiefe; Zeit
$u$	Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung
$\bar{u}$	zeitlicher Mittelwert von $u$
$u'$	Schwankungsanteil von $u$
$u_\tau$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$u^+$	dimensionsloses $u$ , $u/u_\tau$
$u^*$	andere dimensionslose Form von $u$ ,
$v$	Strömungsgeschwindigkeit senkrecht zur Gleitfläche bzw. Kanalwand
$\bar{v}$	zeitlicher Mittelwert von $v$
$v'$	Schwankungsanteil von $v$
$w$	Strömungsgeschwindigkeit senkrecht zu $u$ und $v$
$\bar{w}$	zeitlicher Mittelwert von $w$
$w'$	Schwankungsanteil von $w$
$w^*$	dimensionsloses $w$
$x$	Koordinate in Hauptströmungsrichtung
$x_D$	Abstand des Druckmittelpunktes vom Ende der Gleitfläche
$y$	Koordinate senkrecht zur Gleitfläche bzw. Kanalwand
$y^*$	relativer Abstand von der Gleitfläche bzw. Kanalwand
$y^+$	dimensionsloser Wandabstand
$z$	Koordinaten senkrecht auf $x$ und $y$
$z^*$	auf Schmierfilmdicke bzw. Kanalhöhe bezogene Ordinate $z$

A	turbulente Austauschgrösse
B	Lagerbreite
$B_x$	dimensionsloser Druckgradient in x-Richtung
$B_z$	dimensionsloser Druckgradient in z-Richtung
C	Konstante
D	Zapfendurchmesser, mittlerer Lagerdurchmesser
$D_a$	Aussendurchmesser des Axiallagers
$D_i$	Innendurchmesser des Axiallagers
E	Elastizitätsmodul
F	Reibkraft am Zapfen
$F_o$	Reibkraft bei zentrischem Zapfen und linearer Geschwindigkeitsverteilung (Petroff)
$G_x, G_z$	Koeffizienten, Funktionen der Reynoldszahl
H	dimensionslose Schmierfilmdicke
K	Dämpfungsfaktor für äussere Dämpfung
L	Gleitflächenlänge; Lagerabstand
M	Reibungsmoment
$M_o$	Reibungsmoment nach Petroff
N	Reibleistung
$N_o$	Reibleistung nach Petroff
P	Lagerbelastung, Schmierfilmresultierende
$P_{st}$	Statische Lagerbelastung
Q	Schmiermitteldurchsatz
$Q_B$	Schmiermitteldurchsatz pro Breitereinheit
R	Zapfenradius
$R_s$	Radius der Gleitfläche, Schalenradius
$\Delta R$	Differenz zwischen Schalen- und Zapfenradius, radiales Lagerspiel beim zylindrischen Lager

$S_o$	Sommerfeldzahl
$U$	Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens, mittlere Umfangsgeschwindigkeit der Spurscheibe
$V$	Relativgeschwindigkeit zwischen Zapfen und Schale senkrecht zum Schmierfilm
$Y$	Minimum von $y^*$ , $1-y^*$
$Z$	dimensionslose axiale Breite
$\alpha$	Winkel zwischen dem Druckbergende und Last- richtung
$\beta$	Breitenverhältnis $B/D$
$\beta_{ik}$	Dämpfungskonstanten des Schmierfilms
$\gamma$	Verlagerungswinkel
$\gamma_{ik}$	dimensionslose Federkonstanten des Schmierfilms
$\delta$	Winkel zwischen Druckmaximum und Lastrichtung (ausser bei Someya); Keilwinkel beim Axiallager
$\delta_1, \delta_2$	Überhöhung beim balligen Tragschuh
$\epsilon$	relative Exzentrizität
$\epsilon^*$	scheinbare kinematische Viskosität
$\zeta$	dimensionslose axiale Koordinate auf $R$ bezogen
$\eta$	mittlere dynamische Viskosität; dimensionslose Verlagerung in $y$ -Richtung
$\kappa$	Mischungswegkonstante
$\lambda$	Reibungskoeffizient als Widerstandsbeiwert; Verhältnis Keilflächenlänge zu Gleitschuhlänge bei Gleitschuh mit Rastfläche; Konstante; Voreil- winkel
$\lambda_w$	Wärmeleitzahl

$\mu$	Reibungskoeffizient $F/P$
$\mu^*$	bezogene Wellendurchbiegung
$\nu$	kinematische Viskosität
$\xi$	dimensionslose Verlagerung in x-Richtung
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Breitenverhältnis beim axialen Gleitschuh; dimensionslose Funktion
$\tau$	Schubspannung
$\tau_{i,j}$	Spannungstensor
$\varphi$	Winkel von der Stelle der grössten Schmier- spaltweite des zylindrischen Lagers gerechnet;
$\varphi$	relative Schmierpaltweite $h_0/t$ beim Axiallager
$\varphi^*$	Winkel zwischen grösster Schmierpaltweite und Druckmaximum
$\varphi_1$	Winkel zwischen grösster Schmierpaltweite und Beginn der Druckentwicklung
$\varphi_2$	Winkel zwischen grösster Schmierpaltweite und Ende der Druckentwicklung
$\varphi_3$	Winkel zwischen grösster Schmierpaltweite und Gleitflächenende
$\varphi_p$	Winkel zwischen grösster Schmierpaltweite und Lastrichtung
$\chi$	dimensionslose Dämpfungszahl für äussere Dämpfung
$\psi$	relatives Lagerspiel $\Delta R/R$
$\omega = 2\pi \cdot n_s$	Winkelgeschwindigkeit des Zapfens und Rotors
$\omega_k = 2\pi \cdot n_k$	kritische Winkelgeschwindigkeit
$\omega_0$	Bezugswinkelgeschwindigkeit

$\Lambda$	Lagerbelastungskennzahl
$\phi = \omega \cdot t$	Drehwinkel
$\Pi$	dimensionsloser Druck
$\Omega$	Kreisfrequenz der Schwingung

Indizes:

$\infty$	unendliche Breite, Lager ohne Seitenfluss
w	Welle
s	Schale
e	in Richtung der Verlagerung
$\gamma$	in Umfangsrichtung
l	laminar
t	turbulent
x	in x-Richtung
y	in y-Richtung
z	in z-Richtung