

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

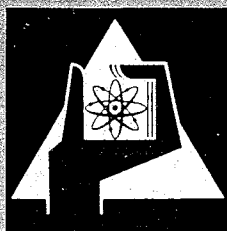
Januar 1969

KFK 717

Institut für Reaktorentwicklung

Die obere und untere Grenze der Schallgeschwindigkeit in Wasserdampf/Wasser-  
Gemischen unter Berücksichtigung der Kompressibilität des Wassers

H. Sameith



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Januar 1969

KFK 717

Institut für Reaktorentwicklung

Die obere und untere Grenze der Schallgeschwindigkeit  
in Wasserdampf/Wasser-Gemischen unter Berücksichtigung  
der Kompressibilität des Wassers

---

H. Sameith

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe



## Inhalt

	<u>Seite</u>
1. Einleitung und Überblick	1
2. Die obere Grenze der Schallgeschwindigkeit	1
2.1 Annahmen	1
2.2 Zustandsgleichung	2
2.3 Isentrope	3
2.4 Schallgeschwindigkeit	4
3. Die untere Grenze der Schallgeschwindigkeit	6
3.1 Annahmen	6
3.2 Zustandsgleichung	6
3.3 Isentrope	6
3.4 Schallgeschwindigkeit	7
4. Literatur	7

## 1. Einleitung und Überblick

Mit dem allgemeinen Ansatz

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.1)$$

als Ausgangsbeziehung wurden Ausdrücke für die Schallgeschwindigkeit in Zweiphasengemischen, insbesondere in 2-Komponenten-Systemen, bereits von mehreren Forschern abgeleitet. Eine Zusammenstellung dieser Beziehungen findet man im Bericht von Gouse und Evans [1]. Bei einer näheren Prüfung der einzelnen Arbeiten stellt man jedoch fest, daß in keiner der Ableitungen die Kompressibilität der Flüssigkeit durch Einführen einer entsprechenden Zustandsgleichung explizite berücksichtigt wurde. Dies führt u. a. dazu, daß unter der Annahme einer inkompressiblen Flüssigkeit im Falle eines echten oder eines Pseudo-2-Komponenten-Systems (1-Komponenten-System im vollständigen Phasenungleichgewicht) die Schallgeschwindigkeit gegen  $\infty$  geht, wenn der Dampfgehalt gegen 0 strebt. Da dieses Verhalten nicht der Wirklichkeit entspricht, soll in die folgenden Überlegungen auch der Kompressibilitätseinfluß der flüssigen Phase einbezogen werden.

Mit den gewonnenen Resultaten ist ein erster Schritt im Hinblick auf eine Erweiterung des von Dr. Fischer aufgestellten Modells getan [2].

## 2. Die obere Grenze der Schallgeschwindigkeit

### 2.1 Annahmen

[1.1] Das Wasserdampf/Wasser-Gemisch möge sich in Ruhe befinden.

[1.2] Das Wasserdampf/Wasser-Gemisch sei ein physikalisch-homogenes Gemisch.

[1.3] Phasenumwandlungen seien in dem betrachteten Volumen ausgeschlossen.

[2.1] Der Dampfgehalt möge an allen Stellen des betrachteten Raumes denselben Wert haben.

[2.2] Der Dampf genüge der idealen Zustandsgleichung:

$$v_g = \frac{RT}{p} \quad (2.1)$$

[2.3] Das Wasser gehorche der Zustandsgleichung von Plank [3]:

$$v_f = \left\{ \frac{A-BT^2}{2C} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{A-BT^2}{C} \right)^2 + \frac{4p}{C} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{3}} \quad (2.2)$$

mit

$$A = 1,063 \cdot 10^4$$

$$B = 2,375 \cdot 10^{-2}$$

$$C = 8,35 \cdot 10^3$$

$$p_f \text{ in } \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \text{ bzw. } v_f \text{ in } \frac{\text{cm}^3}{\text{g}}$$

$$p \text{ in at}$$

$$T \text{ in } ^\circ\text{K}$$

## 2.2 Zustandsgleichung

Mit [1.2] und [2.1] gilt für das spezifische Volumen des Zweiphasengemisches:

$$v = xv_g + (1-x)v_f \quad (2.3)$$

Wenn man (2.1) und (2.2) in (2.3) einsetzt, folgt sofort die Zustandsgleichung für das Wasserdampf/Wasser-Gemisch:

$$v \equiv \frac{1}{\rho} = x \frac{RT}{p} + (1-x) \left\{ \frac{A-BT^2}{2C} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{A-BT^2}{C} \right)^2 + \frac{4p}{C} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{3}} \equiv F(p, T) \quad (2.4)$$

### 2.3 Isentrope

Für geschlossene Systeme gilt der 1. Hauptsatz immer in der Form:

$$dq = de + da \quad (3.1)$$

Mit der Annahme,

[3.1] alle Zustandsänderungen erfolgen reversibel,

läßt sich der 1. Hauptsatz schreiben:

$$dq_{\text{rev}} = de + p \cdot dv \quad (3.2)$$

Für die innere Energie gilt allgemein:

$$e = e(T, v, o) \quad (3.3)$$

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{v, o} dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_{T, o} dv + \left(\frac{\partial e}{\partial o}\right)_{T, v} do \quad (3.4)$$

Wie beim idealen Gas machen wir die Annahme, daß die innere Energie der beiden Phasen und des Gemisches nur von der Temperatur abhängt oder anders ausgedrückt:

$$[3.2] \quad e \neq e(v) \longrightarrow \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_{T, o} = 0 \quad (3.5)$$

$$[3.3] \quad e \neq e(o) \longrightarrow \left(\frac{\partial e}{\partial o}\right)_{T, v} = 0 \quad (3.6)$$

Damit folgt aus (3.4):

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{v, o} dT = c_{vo} dT \equiv c_v dT \quad (3.7)$$

Mit [1.2] und [3.3] kann für die innere Energie des Gemisches der Ansatz gemacht werden:

$$e = x e_g + (1-x) e_f \quad (3.8)$$

Mit [1.3] und (3.7) folgt daraus:

$$de = [x c_{vg} + (1-x) c_{vf}] dT \quad (3.9)$$



Setzt man (3.9) und

$$dv = - \frac{1}{\rho^2} d\rho \quad (4.1)$$

in (3.2) ein, so erhält man:

$$dq_{\text{rev}} = \left[ x c_{\text{vg}} + (1-x) c_{\text{vf}} \right] dT - p \frac{1}{\rho^2} d\rho \quad (4.2)$$

Die Gleichung der Isentrope folgt aus (4.2), wenn man

$$dq_{\text{rev}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.3)$$

setzt:

$$\left[ x c_{\text{vg}} + (1-x) c_{\text{vf}} \right] dT = p \frac{1}{\rho^2} d\rho \equiv p \cdot F^2(p, T) \cdot d\rho \quad (4.4)$$

#### 2.4 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit ergibt sich nach Gl. (1.1) aus der Differentialgleichung für die Isentrope (4.4), wenn man  $dT$  mit Hilfe der Zustandsgleichung (2.4) eliminiert:

$$dT = - \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial T}} (F^2 \cdot d\rho + \frac{\partial F}{\partial p} dp) \quad (4.5)$$

Nach einigen Umformungen erhält man aus (4.4):

$$a^2 = - \frac{F^2(p, T)}{\frac{\partial F}{\partial p}} \left[ 1 + \frac{p}{x c_{\text{vg}} + (1-x) c_{\text{vf}}} \cdot \frac{\partial F}{\partial T} \right] \quad (4.6)$$

Für die graphische Darstellung ist es zweckmäßig, den Dampfanteil  $\alpha$  einzuführen. Dies gelingt über die für homogene Gemische gültige Beziehung

$$x = \frac{\alpha \rho_g}{\rho_f - \alpha(\rho_f - \rho_g)} \quad (4.7)$$

Im Bild 5.1 ist die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit  $a$  vom Dampfanteil  $\alpha$  für  $p = 1 \text{ at}$  und  $T = 373 \text{ }^\circ\text{K}$  aufgetragen. Man sieht, daß die Schallgeschwindigkeit für die beiden Grenzfälle  $\alpha \rightarrow 0$  und  $\alpha \rightarrow 1$  gegen die der reinen Phasen strebt.

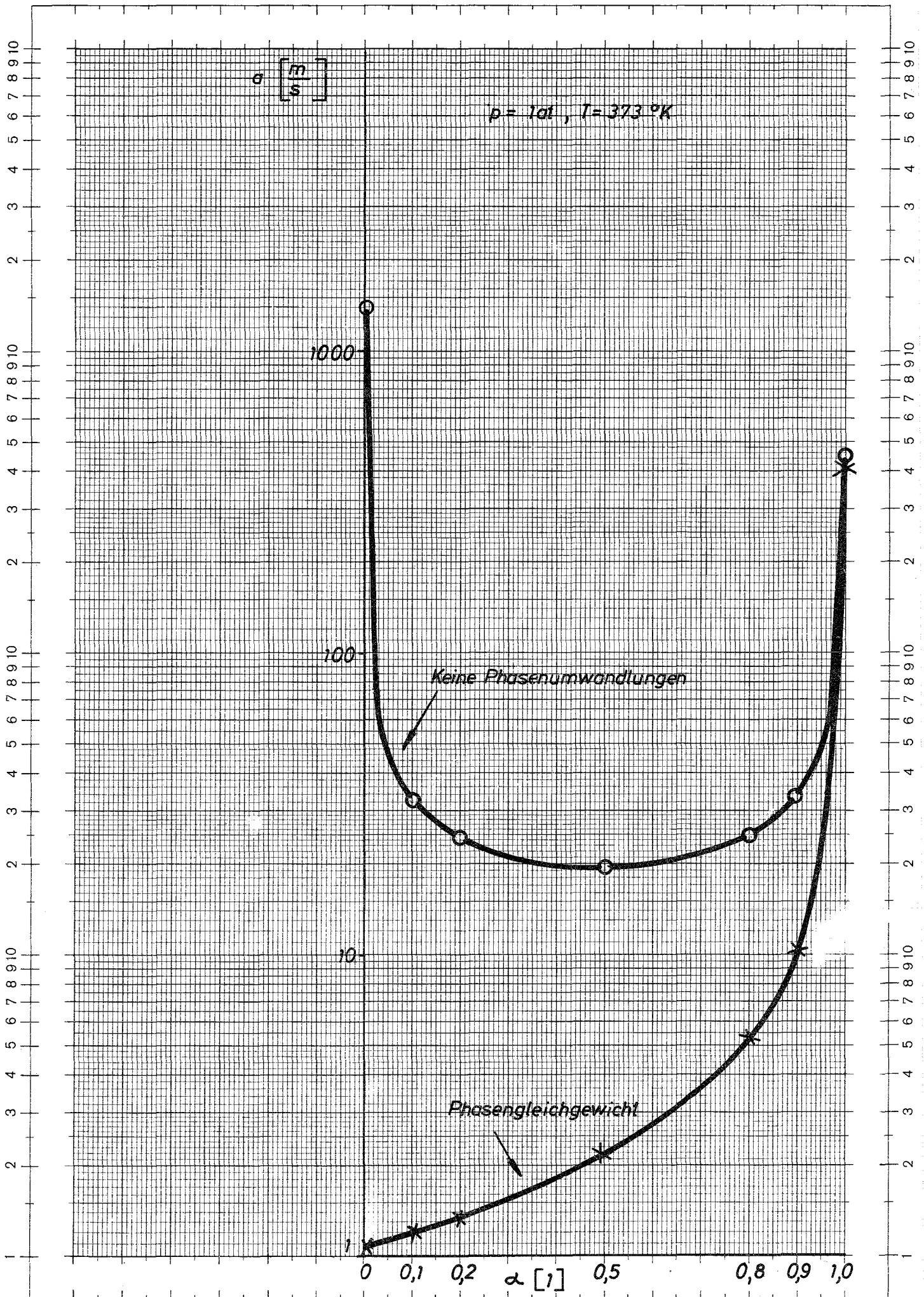


Bild 5.1

### 3. Die untere Grenze der Schallgeschwindigkeit

#### 3.1 Annahmen

Es werden alle bisherigen Annahmen beibehalten bis auf die Annahme [1.3]. An ihre Stelle tritt:

[6.1] Es herrsche ständig Phasengleichgewicht.

Unter dieser Voraussetzung besteht zwischen Druck und Temperatur ein eindeutiger Zusammenhang, der in differentieller Form durch die Beziehung von Clausius-Clapeyron gegeben ist:

$$dT = \frac{v_g - v_f}{h_g - h_f} T dp \quad (6.1)$$

Weiterhin ist dem T,s-Diagramm leicht zu entnehmen, daß eine isentrope Druckänderung nicht nur eine entsprechende Temperaturänderung, sondern auch eine Änderung des Dampfgehaltes bewirkt.

#### 3.2 Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung (2.4) bleibt erhalten, nur ist der Dampfgehalt x jetzt als zusätzliche Variable aufzufassen:

$$v \equiv \frac{1}{\rho} = x \frac{RT}{p} + (1-x) \left\{ \frac{A-BT^2}{2C} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{A-BT^2}{C} \right)^2 + \frac{4p}{C} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{3}} \equiv F(p, T, x) \quad (6.2)$$

#### 3.3 Isentrope

Da x veränderlich ist, tritt an die Stelle von Gl. (3.9):

$$de = \left[ x c_{vg} + (1-x) c_{vf} \right] dT + \left[ e_g - e_f \right] dx \quad (6.3)$$

Die Gleichung der Isentrope lautet nun:

$$\left[ x c_{vg} + (1-x) c_{vf} \right] dT = p \cdot F^2(p, T) \cdot d\varphi - \left[ e_g - e_f \right] dx \quad (6.4)$$

### 3.4 Schallgeschwindigkeit

Durch Bildung des vollständigen Differentials folgt aus (6.2):

$$dv \equiv - F^2(p, T) d\varphi = \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad (7.1)$$

(6.4) wird nach  $dx$  aufgelöst und in (7.1) eingesetzt.

Verwendet man noch die Beziehung (6.1), so erhält man die Schallgeschwindigkeit:

$$a^2 = - F^2(p, T) \frac{1 + \frac{p}{\Delta h - p \cdot \Delta v} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\Delta v}{\Delta h} \cdot T \cdot \left[ \frac{\partial F}{\partial T} - \frac{x c_{vg} + (1-x) c_{vf}}{\Delta h - p \cdot \Delta v} \frac{\partial F}{\partial x} \right]} \quad (7.2)$$

mit

$$\Delta h \equiv h_g - h_f \quad (7.3)$$

$$\Delta v \equiv v_g - v_f \quad (7.4)$$

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit vom Dampfanteil ist für den Fall des ständigen Phasengleichgewichtes ebenfalls im Bild 5.1 eingetragen. Man bemerkt sofort, daß die theoretische Schallgeschwindigkeit für  $\alpha \rightarrow 1$  gegen die wirkliche Schallgeschwindigkeit der Gasphase strebt. Dagegen erhält man für  $\alpha \rightarrow 0$  einen Wert, der sogar noch weit unterhalb von  $a_g$  liegt.

### 4. Literatur

[1] Gouse, W.S.Jr; Evans, R.G.:  
Acoustic Velocity in Two-Phase Flow  
Symposium on Two-Phase Flow Dynamics, Eindhoven  
September 1967

[2] Fischer, M.:  
Zur Dynamik der Wellenausbreitung in der Zweiphasenströmung  
unter Berücksichtigung von Verdichtungsstößen  
Externer Bericht 8/67-4, Kernforschungszentrum Karlsruhe,  
Institut für Reaktorentwicklung, August 1967

[3] Plank, R.:

Eine Zustandsgleichung für flüssiges Wasser gültig bis  
300 °C und 1200 at

BWK 12, 7

1960