KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

März 1969

KFK 944

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

GEBCB, GCB1, SHØRT, DGCB1 und DSHØRT Fortran-IV-Subroutinen zur Erzeugung von Besselfunktionen für die Fortranbibliothek der 360/65

C. Günther

GESELLSCHAFT FUR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

K E R N F O R S C H U N G S Z E N T R U M

K A R L S R U H E

März 1969 KFK- 944

Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik

GEBCR, GCB1, SHØRT, DGCB1 und DSHØRT Fortran-IV-Subroutinen zur Erzeugung von Besselfunktionen für die Fortranbibliothek der 360/65.

von

C. Günther

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung

Die hier beschriebenen Routinen GCB1, GEBCB, SHØRT, DGCB1 und DSHØRT sind Fortran-IV-Programme für die IBM 360/65, die Besselfunktionen erzeugen. Genauer, GCB1 und GEBCB berechnen ebenso wie ihre doppelt-genaue Version DGCB1 wahlweise Besselfunktionen $J_v(z)$ mit beliebig reellen nichtnegativen v und komplexem Argument z oder einen ganzen Vektor $(J_v(z), J_{v+1}(z),\ldots,J_{v+n}(z))$ solcher Funktionen. GCB1 und GEBCB unterscheiden sich nur in einer Hinsicht; GEBCB ist in BASIC-Fortran-IV geschrieben, während GCB1 in 360/Fortran-IV verfaßt ist. SHØRT ebenso wie DSHØRT kann dasselbe mit der Einschränkung, daß z reell sein muß.

Die Routinen behandeln nahezu alle in der Praxis vorkommenden Fälle. Eine Lücke besteht insofern, als sich die Besselfunktionen zweiter Art ganzzahliger Ordnung (in der Literatur meist $Y_o(z)$, $Y_1(z)$,... und $K_o(z)$, $K_1(z)$,... genannt) nicht mit den genannten Routinen erzeugen lassen.

2. Methode

Die in den vorliegenden Programmen benutzte Methode zur Erzeugung von Besselfunktionen ist der Rekursionsalgorithmus von J.C.P. Miller [1]. Diese Methode wurde im wesentlichen in [1] beschrieben. Eine kurze Übersicht soll hier jedoch noch einmal skizziert werden.

Zunächst die Definition: $J_v(z)$ ist definiert als

$$J_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \sum_{r=o}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^r}{r!\,\Gamma(r+v+1)}$$

Vgl. z.B. [2], p. 360.

Das Berechnungsverfahren kann man so formulieren: (Ganzzahlige Indizes seien der Einfachheit halber angenommen.) Mit irgend zwei Startwerten $V_{n+1}(z)=\alpha$ und $V_n(z)=\beta$ führt man den Berechnungsprozeß

$$V_{n-j}(z) = \frac{2(n-j+1)}{z} V_{n-j+1}(z) - V_{n-j+2}(z),$$

j=1,2,...n durch. Es läßt sich zeigen, daß wenn n genügend groß gewählt war, die $V_o(z)$, $V_1(z)$,...,$V_n(z)$ für ein bestimmtes N<n den $J_o(z)$, $J_1(z)$,......,$J_N(z)$ innerhalb einer bestimmten Genauigkeit proportional sind. Um

die i.a. komplexe Proportionalitätskonstante α, $V_j(z)=\alpha J_j(z)$, $j=0,1,\dots,N$, zu berechnen, bedient man sich sogenannter "Additionstheoreme", denen die $J_v(z)$ genügen, z.B.

$$1 = J_0(z)+2J_2(z)+2J_4(z)+2J_6(z)+\dots \tag{1}$$

oder

$$e^{-iz} = J_0(z)-2iJ_1(z)-2J_2(z)+2iJ_3(z)+2J_4(z)-\dots \tag{2}$$

Diese beiden Formeln lassen sich aus der Entwicklung der erzeugenden Funktion $\exp\{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\}$ nach t berechnen, [2], p. 361

$$\{\exp \frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\} = J_0(z) + \sum_{r=1}^{\infty}(t^r+(-t)^{-r})J_r(z) \tag{3}$$

und zwar (1) für t=1 und (2) für t=-i.

Die Anwendbarkeit dieser Formeln zur Berechnung von α kann beschränkt sein. Wie bei der Berechnung von Funktionswerten mittels alternierender Reihen werden die Fehler durch Stellenverluste groß, wenn die Beträge der Einzelsummanden groß werden im Verhältnis zum Gesamtwert der Summe. So ist z.B. Gleichung (1) nicht geeignet zur Berechnung von $J_v(z)$ auf der imaginären Achse.

In den Routinen wurden zur Berechnung von α folgende Formeln verwendet:

$$e^{iz\cos\rho} = 2^v\Gamma(v)\sum_{m=0}^{\infty}(v+m)i^m\frac{J_{v+m}(z)}{z^v}C_m^v(\cos\rho)$$

[3], p. 368, hier ist $C_m^v(\cos\rho)$ definiert durch

$$(1-2\alpha\cos\rho+\beta^2)^{-v} = \sum_{m=0}^{\infty}C_m(\cos\rho)\beta^v$$

Für $\cos\rho=1$ erhält man $C_m^v(1) = \frac{\Gamma 2(v+m)}{m!\Gamma(2v)}$, $m=0,1,\dots,$

für $\cos\rho=-1$ $\qquad C_m^v(-1)= (-1)^m\frac{\Gamma(2v+m)}{m!\Gamma(2v)}$, $m=0,1,\dots;$

und deshalb

$$e^{\pm iz} \cdot \frac{(z/2)^v}{\Gamma(v)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2v+m)}{m!\,\Gamma(2v)} (v+m)(\pm i)^m J_{v+m}(z) \qquad (4)$$

Um Stellenverluste zu vermeiden, muß man bei der Berechnung die linke Seite dieser Gleichung möglichst groß machen, solange die Beträge auf der rechten Seite dieselben sind. Dies führt dazu, für $\mathrm{Im}z \geq 0$ das Minuszeichen, für $\mathrm{Im}z<0$ das Pluszeichen in dieser Gleichung gelten zu lassen.

Ein weiterer Freiheitsgrad in der Benützung der Formel (4) liegt darin, daß man v frei wählen kann. Es liegt nahe, v von $|z|$ abhängen zu lassen. Eine grobe Abschätzung zeigt, daß für reelles z die Wahl $v=\frac{z}{2}$ günstig ist, während für imaginäres z (:= Berechnung der Iv(x), x=Imz) die Reihe in (4) nicht alterniert und deshalb, abgesehen von Rundungsfehlern für zu extrem gewählte v, v beliebig wählbar ist.

In GEBCB, GCB1 und DGCB1 wurde v immer =0 gesetzt, während im SHØRT und DSHØRT $v=0.6*|z|$ gesetzt wurde.

Für betragskleine z empfiehlt es sich, die Funktionswerte $J_v(z)$ aus der Reihenentwicklung dieser Funktion zu bestimmen, und zwar, indem nur der größte Summand berücksichtigt wird,

$$J_v(z) \approx \frac{(z/2)^v}{\Gamma(v+1)} .$$

Diese Formel wurde in den Routinen GEBCB, GCB1, DGCB1 verwendet, und zwar in den einfach genauen für $|z| \leq 3.*10^{-5}$, in den doppelt genauen Versionen für $|z| \leq 3.*10^{-12}$.

3. Aufruf

a) GEBCB:

CALL GEBCB(X,Y,GN,N,A,B,KEN)

GEBCB berechnet zum komplexen Argument z=X+iY die Werte der Besselfunktionen $J_v(z)$ für v=GN, GN+1,...,GN+N-1; N ist INTEGER,und zwar $2 \leq N \leq 10$, GN ist REAL und $0. \leq GN \leq 1$. Es soll $|z|<25.$ sein.

Das Programm liefert die Werte A, B, KEN. A und B sind REAL-Felder der Länge N. Nach dem Aufruf von GEBCB ist

$$A(1) = \mathrm{Re}\ J_{GN}(z),\quad B(1) = \mathrm{Im}\ J_{GN}(z)$$
$$A(2) = \mathrm{Re}\ J_{GN+1}(z), B(2) = \mathrm{Im}\ J_{GN+1}(z)$$
$$\vdots$$

KEN ist ein Indikator für den vorschriftsmäßigen Ablauf in GEBCB

KEN = 0 normal

KEN = 1 es ist nicht $2\leq N\leq 10$

KEN = 2 " " " $0\leq GN\leq 1$.

KEN = 3 $|z|=X^2+Y^2$ zu groß

KEN = 4 es wurde nicht die vorgeschriebene Genauigkeit erreicht.

In den Fällen KEN=1,2,3 werden die Felder A und B mit Nullen gefüllt. Bei KEN=4 wird mit den berechneten Werten ins rufende Programm zurückgegangen.

b) GCB1:

Aufruf: CALL GCB1(Z,N,GN,ZA,KEN)
Benutzung wie GEBCB. Es sind jedoch Z und das Feld ZA vom Typ COMPLEX*8.
Der Indikator KEN arbeitet nicht wie in GEBCB.

Wenn KEN = 1 : normal

KEN teilbar durch 2 : nicht $2\leq N\leq 10$

KEN " " 3 : nicht $0.\leq GN\leq 1$.

KEN " " 5 : $|z|$ zu groß

KEN = 7 : Genauigkeit nicht erreicht.

c) DGCB1:

Aufruf: CALL DGCB1(Z,N,GN,ZA,KEN)
Benutzung wie GCB1, Z und ZA sind COMPLEX*16, GN ist REAL.

d) SHØRT

Aufruf: CALL SHØRT (X,GNUE,N,A,KEN)

SHØRT berechnet die Werte Besselfunktionen $J_{GNUE}(x)$, $J_{GNUE+1}(x)$,...., $J_{GNUE+N-1}(x)$ für das reelle Argument x=X(REAL), N INTEGER, GNUE REAL.
Das Feld A ist ebenfalls REAL und enthält die genannten Funktionswerte.
Der Indikator KEN hat dieselbe Funktionsweise wie in GEBCB.

e) DSHØRT:

Aufruf: CALL DSHØRT(X,GNUE,N,A,KEN)

Die Benutzung erfolgt wie bei SHØRT, X und A sind jedoch vom Typ Real*8.

Anmerkung

Bestimmung der modifizierten Besselfunktionen 1. Art und der Kelvin-Funktionen mit den Routinen GEBCB usf.

Die modifizierten Besselfunktionen 1. Art, $I_v(x)$, sind definiert als $I_v(x)=e^{-v/2\pi i}J_v(xe^{\pi/2vi}) = (-i)^v J_v(ix)$, die Kelvin-Funktionen $\mathrm{ber}_v x$ und $\mathrm{bei}_v x$ als $\mathrm{ber}_v x + i\,\mathrm{bei}_v x = J_v(xe^{3\pi i/4}) = e^{v\pi 2}J_v(xe^{-\pi i/4})$;

Demnach sieht ein Aufruf zur Bestimmung von $I_o(1.),\ldots$ mit GEBCB folgendermaßen aus:

```
CALL GEBCB(0.,1.,0.,N,A,B,KEN)
```

Es ist dann $A(1) = I_o(1)$, $B(2) = -I_1(1)$, $A(3) = -I_2(1),\ldots$ Bestimmung von $\mathrm{ber}_o x$ und $\mathrm{bei}_o x$ für $x=1$.

```
CALL GEBCB(-0.70710678,+0.70710678,0.,N,A,B,KEN).
```

4. Literaturverzeichnis

|1| BAMT (= British Association Mathematical Tables), X, Part II, published 1952.

|2| Handbook of Mathematical Functions, NBS, Applied Mathematics Series 55.

|3| G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, Second edition, University Press 1958.

A n h a n g I

Programmlisten

```
      SUBROUTINE DGCB1(Z,N,AGN,ZA,KEN)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C     GCB1 CALCULATES COMPLEX BESSEL FUNCTIONS OF FIRST KIND AND FRAC-
C     TIONAL ORDER (N+GN),(N+1+GN),..... WITH COMPLEX ARGUMENT Z.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C
      IMPLICIT COMPLEX*16(W-Z),COMPLEX*8(V),REAL*4(A),REAL*8(B-H,O-U)
      DIMENSION ZA(N),ZARR(300),ZAPP(2)
      BNULL=0.0D+00
      KEN=1
      IKEN=1
      INDZ=1
      GNUE=DBLE(AGN)
      GAM=DGAMMA(1.+GNUE)
C
      IF((N-2)*(10-N).LE.0)KEN=KEN*2
      IF(GNUE*(1.D+00-GNUE).LE.-1.D-12)KEN=KEN*3
C
      BZ=CDABS(Z)
      AZ=SNGL(BZ)
      BZRE=Z
      BZIM=Z*(0.,-1.)
      IF(AZ.GT.30.)KEN=KEN*5
      IF(KEN.GT.1)GOTO1000
      IF(AZ.GE.3.E-12)GOTO2
C
C------PROCEDURE FOR SMALL ARGUMENTS-------------------------------------
C
      IF(GNUE.GE.3.D-12)GOTO3
      ZA(1)=(1.,0.)
      GOTO19
    3 IF(BZRE**2.GE.1.D-8)GOTO13
      PHI=1.57079632679489
      GOTO14
   13 PHI=DATAN2(BZRE,BZIM)
   14 CONTINUE
      BS=((AZ/2.)**GNUE)/GAM
      ZA(1)=BS*CDEXP(DCMPLX(BNULL,GNUE*PHI))
   19 GG=GNUE*2.+2.
      JN=N-1
      DO 15 I=1,JN
      ZA(I+1)=(Z*ZA(I))/GG
   15 GG=GG+2.
      RETURN
C
    2 FAC=1.
      IF(GNUE.GT.1.E-2) GAM=GAM/GNUE
      IF(GNUE-1.E-2)23,23,24
   23 IKEN=23
      GNUE=GNUE+1.
   24 IF(BZIM.GE.1.D-8)GOTO22
      Z=DCONJG(Z)
      FAC=-1.
   22 ZINV=DCONJG(Z)/BZ**2
      FAKT=1.
   54 B=(BZ/2.)**GNUE/GAM
```

```
      IF(BZRE**2-1.E-17)60,60,61
   60 PHI=1.57079632679489 *GNUE
      GOTO262
   61 PHI=DATAN2(BZIM,BZRE)*GNUE
  262 IF(BZIM**2-1.)263,69,69
   69 FAKT=-1.
  263 CONTINUE
C
C
C-----POSITIONAL PARAMETERS-------------------------------------------
C
      EPS=1.D-13
      JANFG=MAX1(24.,16.+2.*(AZ-AMOD(AZ,4.)))
C
C
      UHU=Z*(0.,-1.)
      UHU=UHU*FAKT*(-1.)
      GMULL=R*DEXP(UHU)
      PHI=PHI+BZRE*FAKT
      Z11=CDEXP(DCMPLX(BNULL,PHI))
   26 ZARR(1)=(0.,0.)
      ZARR(2)=(1.D-65,0.D+00)
      IF(JANFG-298)27,27,28
   28 KEN=KEN*7
      GOTO1001
   27 DO 30  I=1,JANFG
      HN=JANFG+1-I
      GI=2.*(HN+GNUE)
      ZARR(I+2)=ZARR(I+1)*ZINV*GI-ZARR(I)
      IF(CDABS(ZARR(I+2)).LE.1.D65)GOTO30
   39 ZFAC=(1.D-65,0.D+00)
      DO 32  IP=1,I
      ZARR(I+3-IP)=ZARR(I+3-IP)*ZFAC
      IF(CDABS(ZARR(I+3-IP)).LE.1.)ZFAC=(0.,0.)
   32 CONTINUE
   30 CONTINUE
C
C
      ZSUM1=(0.,0.)
      ZSUM2=(0.,0.)
      INIT=JANFG/2
      HAN=GNUE
      GGG=2.*GNUE
      PEN=-GGG*(GNUE+1.)
      DO 52  I=1,INIT
      INDI=JANFG+4-2*I
      GI=2*I
      ZSUM1=ZSUM1+HAN*ZARR(INDI)
      ZSUM2=ZSUM2+PEN*ZARR(INDI-1)
      HAN=PEN*(1.+1./(GNUE+GI-1.))*(1.+(GGG-1.)/GI)
      PEN=-PEN*(1.+2./(GNUE+GI-1.))*(1.+GGG/GI)*(1.+(GGG-2.)/(GI+1.))
   52 CONTINUE
   56 CONTINUE
C
C
C-----NORMING---------------------------------------------------------
      GEPS=0.
      GNOM=0.1
```

```
      TS1=ZSUM1
      TS4=ZSUM2
      TS3=ZSUM1*(0.,-1.)
      TS2=ZSUM2*(0.,-1.)
      ZSU=(TS1+FAKT*TS2)+(0.,1.)*(TS3-TS4*FAKT)
      DON=CDABS(ZSU)
      GMUL=(GMULL/DON)
      ZZZ=ZSU/DON
      ZZR=ZZZ/Z11
      DO 142 I=1,N
      IT=JANFG+3-I
  142 ZA(I)=GMUL*ZARR(IT)/ZZR
      IF(FAC.GT.0.0) GOTO145
      DO 146 I=1,N
  146 ZA(I)=DCONJG(ZA(I))
  145 IBIS=MIN0(N,2)
      IF(INDZ-2) 124,124,121
  121 DO123 I=1,IBIS
      GEPS=GEPS+CDABS(ZA(I)-ZAPP(I))
  123 GNOM=GNOM+CDABS(ZA(I))
      IF(GEPS-EPS*GNOM) 1001,1001,124
  124 JANFG=JANFG+8
      INDZ=3
       DO 125 I=1,IBIS
  125 ZAPP(I)=ZA(I)
      GOTO26
C
C
C
C-----RETURNS-----------------------------------------------------
 1000 DO 1004 I=1,3
 1004 ZA(I)=(0.,0.)
      RETURN
 1001 IF(IKEN.NE.23)GOTO1200
      DO 1100 I=2,N
      IT=N+2-I
 1100 ZA(IT)=ZA(IT-1)
      GL11=2.*GNUE
      ZA(1)=GL11*ZINV*ZA(2)-ZA(3)
 1200 RETURN
C----------------------------------------------------------------
      END
```

```
C
      SUBROUTINE GCB1(Z,N,GN,ZA,KEN)
C
C-----------------------------------------------------------------------
C     GCB1 CALCULATES COMPLEX BESSEL FUNCTIONS OF FIRST KIND AND FRAC-
C     TIONAL ORDER (N+GN),(N+1+GN),..... WITH COMPLEX ARGUMENT Z.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C
      IMPLICIT COMPLEX(V-Z)
      COMPLEX*8 ZA(N),ZARR(122),ZAPP(3)
      KEN=1
      IKEN=1
      EPS=1.E-5
      INDZ=1
      GNUE=GN
      GAM=GAMMA(1.+GNUE)
C
      IF((N-2)*(10-N).LE.0)KEN=KEN*2
      IF(GNUE*(1.-GNUE).LE.(-EPS))KEN=KEN*3
C
      AZ=CABS(Z)
      AZRE=REAL(Z)
      AZIM=AIMAG(Z)
      IF(AZ.GT.30.)KEN=KEN*5
      IF(KEN.GT.1)GOTO1000
      IF(AZ.GE.3.*EPS)GOTO2
C
C------PROCEDURE FOR SMALL ARGUMENTS------------------------------------
C
      IF(GNUE.GE.3.*EPS)GOTO3
      ZA(1)=(1.,0.)
      GOTO19
    3 IF(AZRE**2.GE.1.E-8)GOTO13
      PHI=1.570796
      GOTO14
   13 PHI=ATAN(AZIM/AZRE)
   14 CONTINUE
      BZ=((AZ/2.)**GNUE)/GAM
C     VIELLEICHT IST DIESE FORMEL NICHT RICHTIG$$$$$$
      ZA(1)=BZ*CEXP(CMPLX(0.,GNUE*PHI))
   19 GG=GNUE*2.+2.
      JN=N-1
      DO 15 I=1,JN
      ZA(I+1)=(Z*ZA(I))/GG
   15 GG=GG+2.
      RETURN
C
    2 FAC=1.
      IF(GNUE.GT.1.E-2) GAM=GAM/GNUE
      IF(GNUE-1.E-2)23,23,24
   23 IKEN=23
      GNUE=GNUE+1.
   24 IF(AZIM.GE.EPS)GOTO22
      Z=CONJG(Z)
      FAC=-1.
   22 ZINV=CONJG(Z)/AZ**2
      FAKT=1.
```

```
   54 R=(AZ/2.)**GNUE/GAM
      IF(AZRE**2-1.E-17)60,60,61
   60 PHI=1.570796*GNUE
      GOTO262
   61 PHI=ATAN(AZIM/AZRE)*GNUE
  262 IF(AZIM**2-1.)263,69,69
   69 FAKT=-1.
  263 CONTINUE
C
C
C-----POSITIONAL PARAMETERS------------------------------------------
C
      FEPS=1.E-5
      JANFG=MAX1(24.,16.+2.*(AZ-AMOD(AZ,4.)))
C
C
      UHU=AIMAG(Z)
      UHU=UHU*FAKT*(-1.)
      GMULL=R*EXP(UHU)
      PHI=PHI+AZRE*FAKT
      Z11 =CEXP(CMPLX(0.,PHI))
   26 ZARR(1)=(0.,0.)
      ZARR(2)=(1.E-65,0.)
      IF(JANFG-120)27,27,28
   28 KEN=KEN*7
      GOTO1001
   27 DO 30 I=1,JANFG
      HN=JANFG+1-I
      GI=2.*(HN+GNUE)
      ZARR(I+2)=ZARR(I+1)*ZINV*GI-ZARR(I)
      IF(CABS(ZARR(I+2)).LE.1.E65)GOTO30
   39 ZFAC=(1.E-65,0.)
      DO 32 IP=1,I
      ZARR(I+3-IP)=ZARR(I+3-IP)*ZFAC
      IF(CABS(ZARR(I+3-IP)).LE.1.)ZFAC=(0.,0.)
   32 CONTINUE
   30 CONTINUE
C
C
      ZSUM1=(0.,0.)
      ZSUM2=(0.,0.)
      INIT=JANFG/2
      HAN=GNUE
      GGG=2.*GNUE
      PEN=-GGG*(GNUE+1.)
      DO 52 I=1,INIT
      INDI=JANFG+4-2*I
      GI=2*I
      ZSUM1=ZSUM1+HAN*ZARR(INDI)
      ZSUM2=ZSUM2+PEN*ZARR(INDI-1)
      HAN=PEN*(1.+1./(GNUE+GI-1.))*(1.+(GGG-1.)/GI)
      PEN=-PEN*(1.+2./(GNUE+GI-1.))*(1.+GGG/GI)*(1.+(GGG-2.)/(GI+1.))
      IF(ABS(PEN).LT.1.E-65)GOTO56
   52 CONTINUE
   56 CONTINUE
C
C
C-----NORMING--------------------------------------------------------
```

```
      GEPS=0.
      GNOM=0.1
      TS1=ZSUM1
      TS4=ZSUM2
      TS3=ZSUM1*(0.,-1.)
      TS2=ZSUM2*(0.,-1.)
      ZSU=(TS1+FAKT*TS2)+(0.,1.)*(TS3-TS4*FAKT)
      DON=CABS(ZSU)
      GMUL=(GMULL/DON)
      ZZZ=ZSU/DON
      ZZR=ZZZ/Z11
      DO 142 I=1,N
      IT=JANEG+3-I
  142 ZA(I)=GMUL*ZARR(IT)/ZZR
      IF(FAC.GT.0.0) GOTO145
      DO 146 I=1,N
  146 ZA(I)=CONJG(ZA(I))
  145 IBIS=MINO(N,3)
      IF(INDZ-2) 124,124,121
  121 DO123 I=1,IBIS
      GEPS=GEPS+CABS(ZA(I)-ZAPP(I))
  123 GNOM=GNOM+CABS(ZA(I))
      IF(GEPS-EPS*GNOM) 1001,1001,124
  124 JANEG=JANEG+8
      INDZ=3
       DO 125 I=1,IBIS
  125 ZAPP(I)=ZA(I)
      GOTO26
C
C
C
C-----RETURNS-----------------------------------------------------------
 1000 DO 1004 I=1,3
 1004 ZA(I)=(0.,0.)
      RETURN
 1001 IF(IKEN.NE.23)GOTO1200
      DO 1100 I=2,N
      IT=N+2-I
 1100 ZA(IT)=ZA(IT-1)
      GL11=2.*GNUE
      ZA(1)=GL11*ZINV*ZA(2)-ZA(3)
 1200 RETURN
C----------------------------------------------------------------------
      END
```

```
      SUBROUTINE GEBCB(X,Y,GN11,N,A,B,KEN)
C
C-----BESSEL FUNCTIONS OF FIRST KIND, FRACTIONAL ORDER--------------------
      DIMENSION A(10),B(10),YR(122),ZI(122),APPRE(3),APPIM(3)
      REMUL(A1,A2,A3,A4,A5)=A1*A2+A3*A4*A5
C       GENERATION OF PARAMETRES
      EPS=1.E-5
C-----INPUT CONTROL-------------------------------------------------------
C
C
      EI=1.
      ZE=2.
      KEN=0
      GNUE=GN11
      IF((N-2)*(10-N)) 1,2,2
    1 KEN=1
      GOTO1000
    2 IF(GNUE*(1.001-GNUE)) 4,3334,3334
    4 KEN=2
      GOTO1000
 3334 ZZ=X*X+Y*Y
       IF(ZZ-800.) 5,5,7
    7 KEN=3
      GOTO1000
    5 Z=SQRT(ZZ)
      IF(Z-3.E-5)6,6,20
C
C-    ----PROCEDURE FOR SMALL ARGUMENTS----------------------------------
    6 IF(          GNUE-1.E-8)18,18,11
   18 A(1)=EI
      B(1)=0.
      GOTO19
   11 IF(X*X-1.E-8)12,12,13
   12 PHI=1.5707963
      GOTO14
   13 PHI=ATAN(Y/X)
   14 GAM=GAMMA(1.+GNUE)
      Z1=((Z/ZE)**GNUE)/GAM
      A(1)=Z1*COS(GNUE*PHI)
      B(1)=Z1*SIN(GNUE*PHI)
   19 GG=ZE*GNUE+ZE
      N1=N-1
      DO 15 I=1,N1
      A(I+1)=REMUL(A(I),X,B(I),Y,-1.)  /GG
      B(I+1)=REMUL(A(I),Y,B(I),X,+1.)       /GG
   15 GG=GG+ZE
      RETURN
C
C
   20 FAC=1.
      IF(GNUE-1.E-2)23,23,24
   23 KEN=6
      GNUE=GNUE+EI
   24 YH=Y
      IF(YH) 21,22,22
   21 YH=-YH
      FAC=-1.
   22 XINVRE=X/ZZ
```

```
      XINVIM= -YH/ZZ
      FAKT=1.
   54 R=(Z/2.)**GNUE/GAMMA(GNUE)
      IF(X*X-1.E-17) 60,60,61
   60 PHI=1.5707963*GNUE
      GO TO 262
   61 PHI=ATAN(Y/X)*GNUE
  262 IF(Y*Y-1.)263,69,69
   69 FAKT=-1.
  263 CONTINUE
      NANFG=MAX1(16.,8.+2.*(Z-AMOD(Z,4. )))
      NANFG=NANFG+8
      GMUL11=EXP(-YH*FAKT)*R
      PHI=PHI+X*FAKT
      COS2=COS(PHI)
      SIN2=SIN(PHI)
C
C
      INDZ=1
   26 YR(1)=0.
      YR(2)=1.E-65
      ZI(1)=0.
      ZI(2)=0.
      IF(NANFG-120)27,27,28
   28 KEN=4
      GO TO 1001
   27 DO 30 I=1,NANFG
      GN=NANFG+1-I
      GI=2.*(GN+GNUE)
      YR(I+2)=REMUL(XINVRE,YR(I+1),XINVIM,ZI(I+1),-1.)*GI-YR(I)
      ZI(I+2)=REMUL(XINVRE,ZI(I+1),XINVIM,YR(I+1),+1.)*GI-ZI(I)
      IF(ABS(YR(I+2))+ABS(ZI(I+2))-1.E68) 30,30,39
   39 UFACRE=1.E-67
      UFACIM=1.E-67
      DO 32 IP=1,I
      YR(I+3-IP)=YR(I+3-IP)*UFACRE
      ZI(I+3-IP)=ZI(I+3-IP)*UFACIM
      IF(ABS(YR(I+3-IP)).LT.1.)UFACRE=0.
      IF(ABS(ZI(I+3-IP)).LT.1.0)UFACIM=0.
   32 CONTINUE
   30 CONTINUE
C
      TS1=0.
      TS2=0.
      TS3=0.
      TS4=0.
      NIT=NANFG/2
      HAN=GNUE
      GGG=2.*GNUE
      PEN=-GGG*(GNUE+1.)
      DO 52 I=1,NIT
      INDI=NANFG+4-2*I
      GI=2*I
      TS1=TS1+HAN*YR(INDI)
      TS3=TS3+HAN*ZI(INDI)
      TS2=TS2+PEN*ZI(INDI-1)
      TS4=TS4+PEN*YR(INDI-1)
      HAN=PEN*(1.+1./(GNUE+GI-1.))*(1.+(GGG-1.)/GI)
```

```
      PEN=-PEN*(1.+2./(GNUE+GI-1.))*(1.+GGG/GI)*(1.+(GGG-2.)/(GI+1.)
   52 CONTINUE
C
C
C     NORMING-----------------------------------------------
      GEPS=0.
      GNOM=0.1
      SUM1RE=TS1+TS2*FAKT
      SUM1IM=TS3-TS4*FAKT
C
C
  162 GOL=ABS(SUM1RE)+ABS(SUM1IM)
      IF(GOL-1.E-24) 143,143,139
  139 IF(GOL-1.E24)140,140,141
  140 DON=SQRT(SUM1RE**2+SUM1IM**2)
      GOTO144
  141 DON=1.E26*SQRT((1.E-26*SUM1RE)**2+(1.E-26*SUM1IM)**2)
       GOTO144
  143 DON=1.E-26*SQRT((1.E26*SUM1RE)**2+(1.E26*SUM1IM)**2)
  144 GMUL=GMUL11/DON
      COS1=SUM1RE/DON
      SIN1=SUM1IM/DON
      COSB=REMUL(COS1,COS2,SIN1,SIN2,+1.)
      SINB=REMUL(SIN1,COS2,SIN2,COS1,-1.)
      DO 142 I=1,N
      IT=NANEG+3-I
      A(I)=GMUL*REMUL(YR(IT),COSB,ZI(IT),SINB,+1.)
  142 B(I)=GMUL*REMUL(ZI(IT),COSB,SINB,YR(IT),-1.)      *FAC
C
      IF(INDZ-2) 124,124,121
  121 DO 123 I=1,2
      GEPS = GEPS + ABS(A(I)-APPRE(I))+ABS(B(I)-APPIM(I))
  123 GNOM=GNOM+ABS(A(I))+ABS(B(I))
      IF(GEPS-EPS*GNOM)1001,1001,124
  124 NANEG=NANEG+8
      INDZ=INDZ+2
      DO 125 I=1,2
      APPRE(I)=A(I)
  125 APPIM(I)=B(I)
      GOTO26
 1000 DO 1004 I=1,3
      A(I)=0.
 1004 B(I)=0.
      RETURN
 1001 IF(KEN-6) 1200,1002,1200
 1002 DO 1100 I=2,N
      IT=N+2-I
      A(IT)=A(IT-1)
 1100 B(IT)=B(IT-1)
      KEN=0
      GL11=2.*GNUE
      A(1)=GL11*REMUL(A(2),XINVRE,B(2),XINVIM,-1.)-A(3)
      B(1)=GL11*REMUL(A(2),XINVIM,B(2),XINVRE,+1.)-B(3)
 1200 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SHORT(X,GNUE,N,A,KEN)
C
C
C
C
C     MODIFIED GENERATION OF BESSEL FUNCTIONS
      DIMENSION A(10),YR(122),C(2)
C
C*****PARAMETER SETTING********
 1307 CONTINUE
      EPS=1.E-5
C
C*****INPUT CONTROL*****
      IF((N-2)*(10-N))1,6,6
    6 IF(X.LT.1.E-10) GO TO 1
   62 ZZ=X*X
      IF(ZZ-1000.) 2,2,1
    2 Z=0.5*X
      IF(Z-1.E-5) 1,1,63
    1 KEN=1
      DO 4 I=1,2
    4 A(I)=0.
      RETURN
   63 IF(GNUE*(1.-GNUE)) 1,3,3
    3 KEN=0
C      PARAMETERS
      INDEX=1
      L=1.2*Z
      L1=L+1
      GL1=L1
      FL=GAMMA(GL1+GNUE
      GLU=L
      GLU=GLU+GNUE
      RR=Z**GLU
      XINVRE=1./X
      NANFG=MAX1(16.,8.+2.*(Z-AMOD(Z,4.)))
   26 YR(1)=0.
      YR(2)=1.E-46
      IF(NANFG-120) 27,27,28
   28 KEN=4
      RETURN
   27 DO 30 I=1,NANFG
      GN=NANFG+1-I
      GI=2.*(GN+GNUE)
      YR(I+2)=XINVRE*YR(I+1)*GI-YR(I)
      IF(ABS(YR(I+2)) -1.E70) 30,30,39
   39 UFAC=1.E-70
      DO 32 IP=1,I
      YR(I+3-IP)=YR(I+3-IP)*UFAC
      IF( ABS(YR(I+3-IP)).LT.1.)UFAC=0.
   32 CONTINUE
   30 CONTINUE
      NUN=NANFG+2-L
      SURF=YR(NUN)
      XF=1.
C
      NUL1=NUN-1
C
```

```
C
       DO 367 I=1,NUL1
      GI=I
      IND1=NUN-I
      XF=XF*Z
      XF=XF/GI
      YRS=YR(IND1)*XF
      IF( ABS(YRS).LT.1.E-65) GO TO 368
      SURE=SURE+YRS
  367 CONTINUE
  368 CONTINUE
      GDON=SURE
C
      UNEN1=SURE*FL
      IF(INDEX-2) 200,200,202
  200 DO 203 I=1,2
 3000 N376=NANFG+3-I
 3001 GRE1=YR(N376)/UNEN1
  203 C(I)=((GRE1*SURE)*RR)/GDON
  223 INDEX=INDEX+2
      NANFG=NANFG+8
      GO TO 26
  202 DO 206 I=1,N
      N376=NANFG+3-I
      GRE1=YR(N376)/UNEN1
  206 A(I)=((GRE1*SURE)*RR)/GDON
      GEPS=0.
      GNOM=0.1
      DO 207 I=1,2
      GEPS=GEPS+ABS(A(I)-C(I))
  207 GNOM=GNOM+ABS(A(I))
      IF(GEPS-EPS*GNOM) 209,209,210
  209 CONTINUE
      RETURN
  210 DO 211 I=1,2
  211 C(I)=A(I)
      GO TO 223
      END
```

```
      SUBROUTINE DSHORT(X,BNUE,N,A,KEN)
C
C
C
C     MODIFIED GENERATION OF BESSEL FUNCTIONS
C      DOUBLE PRECISION
C
      IMPLICIT REAL*8(A,E-H,O-Z),REAL*4(B-D)
      DIMENSION A(10),YR(300),F(2)
C
C*****PARAMETER SETTING*****
      EPS=1.D-13
      GNUE=BNUE
C*****INPUT CONTROL*****
C
      IF((N-2)*(10-N))1,6,6
    6 IF(X.LT.EPS) GO TO 1
   62 ZZ=X*X
      IF(ZZ-1000.) 2,2,1
    2 Z=0.5*X
      IF(Z-1.E-5) 1,1,63
    1 KEN=1
      DO 4 I=1,2
    4 A(I)=0.
      RETURN
   63 IF(GNUE*(1.-GNUE)) 1,3,3
    3 KEN=0
C      PARAMETERS
      INDEX=1
      L=1.2*Z
      L1=L+1
      GL1=L1
      FL=DGAMMA(GL1+GNUE)
      GLU=L
      GLU=GLU+GNUE
      RR=Z**GLU
      XINVRE=1./X
      B=Z
      NANFG=MAX1(16.,8.+2.*(B-AMOD(B,4.)))
   26 YR(1)=0.
      YR(2)=1.D-65
      IF(NANFG-298) 27,27,28
   28 KEN=4
      RETURN
   27 DO 30 I=1,NANFG
      GN=NANFG+1-I
      GI=2.*(GN+GNUE)
      YR(I+2)=XINVRE*YR(I+1)*GI-YR(I)
      IF(DABS(YR(I+2))-1.D+70) 30,30,39
   39 UFAC=1.D-70
      DO 32 IP=1,I
      YR(I+3-IP)=YR(I+3-IP)*UFAC
      IF(DABS(YR(I+3-IP)).LT.1.)UFAC=0.
   32 CONTINUE
   30 CONTINUE
      NUN=NANFG+2-L
      SURE=YR(NUN)
      XF=1.
```

```
C
      NUL1=NUN-1
C
C
       DO 367 I=1,NUL1
      GI=I
      IND1=NUN-I
      XF=XF*Z
      XF=XF/GI
      YRS=YR(IND1)*XF
      SURE=SURE+YRS
      IF(DABS(YRS).LT.1.D-65) GO TO 368
  367 CONTINUE
  368 CONTINUE
      GDON=SURE
C
      UNEN1=SURE*FL
      IF(INDEX-2) 200,200,202
  200 DO 203 I=1,2
 3000 N376=NANFG+3-I
 3001 GRE1=YR(N376)/UNEN1
  203 F(I)=((GRE1*SURE)*RR)/GDON
  223 INDEX=INDEX+2
      NANFG=NANFG+8
      GO TO 26
  202 DO 206 I=1,N
      N376=NANFG+3-I
      GRE1=YR(N376)/UNEN1
  206 A(I)=((GRE1*SURE)*RR)/GDON
      GEPS=0.
      GNOM=0.1
      DO 207 I=1,2
      GEPS=GEPS+DABS(A(I)-F(I))
  207 GNOM=GNOM+DABS(A(I))
      IF(GEPS-EPS*GNOM) 209,209,210
  209 RETURN
  210 DO 211 I=1,2
  211 F(I)=A(I)
      GO TO 223
      END
```

Anhang II

Beispiel

Das folgende Fortranprogramm ergab das dahinterfolgende Ergebnis. Es handelt sich dabei, wie man aus den Aufrufen erkennen kann, um die Werte $J_o(1.)$, $J_o(4.)$, $J_o(7.)$ und $J_o(10.)$, die von jeder Routine berechnet werden.

```
C
C     MAINPROGRAM TO CALL SHORT,DSHORT,GEBCB,GCB1 AND DGCB1
C
      IMPLICIT COMPLEX*16(Y-Z),COMPLEX*8(U-W),REAL*8(A-D)
      DIMENSION Z(10),U(10),A(10),H(10),G(10),E1(10),E2(10)
      KWT=6
      GNU=0.0
      N=5
C
C     REAL AXIS OF THE COMPLEX PLANE
C
      WRITE(KWT,99)
      DO 1 I=1,10,3
      X=I
      AX=I
      UX=I
      ZX=I
      XX=0.0
      CALL SHORT(X,GNU,N,G,KEN1)
      WRITE(KWT,100) X,G(1),KEN1
      CALL DSHORT(AX,GNU,N,A,KEN2)
      WRITE(KWT,101) X,A(1),KEN2
      CALL GEBCB(X,XX,GNU,N,E1,E2,KEN3)
      WRITE(KWT,102)X,E1(1),E2(1),KEN3
      CALL GCB1(UX,N,GNU,U,KEN4)
      WRITE(KWT,103)X,U(1),KEN4
      CALL DGCB1(ZX,N,GNU,Z,KEN5)
      WRITE(KWT,104)X,Z(1),KEN5
    1 CONTINUE
C
C
   99 FORMAT(1H1)
  100 FORMAT(1X,F6.2,4X,E15.8,39X,I2,2X,5HSHORT)
  101 FORMAT(1X,F6.2,4X,D23.16,31X,I2,2X,6HDSHORT)
  102 FORMAT(1X,F6.2,4X,2(E15.8,12X),I2,2X,5HGEBCB)
  103 FORMAT(1X,F6.2,4X,2(E15.8,12X),I2,2X,4HGCB1)
  104 FORMAT(1X,F6.2,4X,2(D23.16,4X),I2,2X,5HDGCB1//)
C
      STOP
      END
```

1.00	0.76519763E 00		0	SHORT
1.00	0.7651976865579665D 00		0	DSHORT
1.00	0.76519823E 00	-0.13682802E-06	0	GEBCB
1.00	0.76519823E 00	-0.32294803E-07	1	GCB1
1.00	0.7651976865579667D 00	0.9023051332370716D-16	1	DGCB1
4.00	-0.39714921E 00		0	SHORT
4.00	-0.3971498098638472D 00		0	DSHORT
4.00	-0.39715087E 00	0.97055272E-06	0	GEBCB
4.00	-0.39715070E 00	-0.84060537E-06	1	GCB1
4.00	-0.3971498098638475D 00	-0.3062044139130317D-15	1	DGCB1
7.00	0.30007923E 00		0	SHORT
7.00	0.3000792705195554D 00		0	DSHORT
7.00	0.30007857E 00	0.39349362E-06	0	GEBCB
7.00	0.30007857E 00	-0.35580587E-06	1	GCB1
7.00	0.3000792705195555D 00	0.8757659308059548D-16	1	DGCB1
10.00	-0.24593651E 00		0	SHORT
10.00	-0.2459357644513482D 00		0	DSHORT
10.00	-0.24593675E 00	0.22281638E-05	0	GEBCB
10.00	-0.24593675E 00	-0.22292325E-05	1	GCB1
10.00	-0.2459357644513484D 00	-0.3724531060911143D-15	1	DGCB1