

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

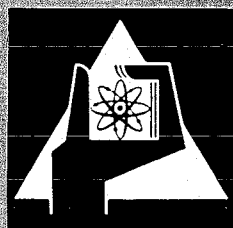
Juni 1971

KFK 1419

Institut für Reaktorbauelemente

Die Hypo-Feder
Kennzeichnung, Berechnungsgrundlagen und Meßergebnisse

O. Mühlhäuser



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

**GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H.
KARLSRUHE**

© 1975 Gesellschaft für Kernforschung M.B.H. Karlsruhe. Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, Vervielfältigung und Verbreitung, auch auszugsweise, ist ohne schriftliche Genehmigung der Gesellschaft für Kernforschung M.B.H. Karlsruhe.

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Reaktorbauelemente

Juni 1971

KFK 1419

Die Hypo-Feder

Kennzeichnung, Berechnungsgrundlagen und Messergebnisse

von

O. Mühlhäuser

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H., KARLSRUHE

Zusammenfassung

Mit der vorliegenden Arbeit wird ein neuartiges Feder-element angegeben, das aus einzelnen Federscheiben besteht, die in bekannter Weise wie Tellerfedern zu Federpaketen und Federsäulen zusammengesetzt werden können. Das Feder-element ist eine im Regelfall kreisrunde Platte, die nach einem hyperbolischen Paraboloid verformt ist. Zur Bildung von Federsäulen werden diese mit den gegeneinander hochgewölbten Randpartien aufeinander gelegt. Wechselweise angebrachte Vorsprünge und Vertiefungen fixieren die gegenseitige Lage der einzelnen Federscheiben.

Die elastischen Eigenschaften der verwölbten Platten werden rechnerisch untersucht und Formeln für die Tragfähigkeit von quadratischen und kreisrunden Federplatten aufgestellt, die durch Messungen kontrolliert wurden und recht gute Übereinstimmung ergaben. Über das Verhalten dünner Federplatten, die die Neigung zum Ausweichen haben, wurden Betrachtungen angestellt und die kritischen Abmessungen ermittelt, bei denen solche Platten auszuweichen beginnen.

Die Versuchsdurchführung und das Ergebnis der Messungen an Federplatten aus Plexiglas und Stahl werden beschrieben.

Die vorgelegten Ergebnisse sind so, daß diese ausreichen, um die für den praktischen Anwendungsfall erforderlichen Unterlagen zu schaffen.

Abstract

This report presents a new type of spring consisting of single spring plates which can be combined to sets of springs and spring columns like cup springs in a well-known way.

The spring element is a plate which, as a rule, is circular and deformed in the shape of a hyperbolic paraboloid. To result in spring columns, they are put on top of each other with the rims dished relative to each other. Alternate projections and recesses arrest the mutual positions of the individual spring plates. The elastic properties of the dished plates are investigated by calculations and formulae are set up for the load carrying capacity of square and circular spring plates. They were controlled by measurements and resulted in a rather good agreement. Considerations were made about the behavior of thin spring plates with a tendency to yield and the critical dimensions were determined at which such plates start yielding.

The experiment and the result of the measurements on spring plates made of plexiglass and steel are described.

The results are sufficient to serve as basic data for practical application.

Die Hypo-Feder

Kennzeichnung, Berechnungsgrundlagen und Messergebnisse

I. Allgemeines

1. Aufbau und Einsatzmöglichkeiten

Die Hypo-Feder - abgeleitet von

"Hyperbolisches Paraboloid"

ist ein mechanisches elastisches Federelement, das aus einzelnen Feder-Platten besteht und durch Übereinanderschichten, wie dies von Tellerfedern her bekannt ist, aufgebaut wird.

Das einzelne Federelement ist eine Platte, die nach der Form des regelmässigen hyperbolischen Paraboloides, einer Sattelfläche verwölbt ist. Die Form einer quadratischen und kreisrunden sattelförmig verwölbten Platte ist in Abb. 1 und 2 dargestellt.

Beim Übereinanderschichten stützen sich einander entgegengerichtete Randpartien der einzelnen Federelemente paarweise gegeneinander ab, so dass zwischen zwei Federplatten ein Raum bestehen bleibt, der beim Zusammendrücken der ganzen Feder sich verkleinert bzw. verschwindet. Hierzu siehe Abb. 3 bei der eine Reihe von 10 achteckigen Scheiben übereinandergeschichtet sind.

Die Art der Belastung der einzelnen Federplatten bzw. eines Paketes kann der Abb. 1 und 2 bzw. der Abb. 3 entnommen werden. Die eingepprägten Kräfte sind mit P_1 und P_2 , die Reaktionskräfte mit P_1' und P_2' bezeichnet.

Damit die Federelemente sich nicht gegeneinander verdrehen können, sind diese an geeigneten Stellen, vorzugsweise am Rand mit Nuten, Kerben oder auch mit Nasen versehen, die mit entsprechenden Teilen eines die Feder umhüllenden Gehäuses korrespondieren. Es ist auch möglich die Federn paarweise mit ineinanderpassenden Vertiefungen (Näpfchen) und Vorsprüngen (Höckern) zu versehen, die ebenfalls ein gegenseitiges Verdrehen der Platten verhüten.

Diese Feder wurde im Zusammenhang mit Arbeiten an einem Regelstabantrieb für Kernreaktoren entwickelt. Bei einem solchen Antrieb ist es nötig, rasche Stellbewegungen gedämpft abzufangen bzw. abzubremesen. Zu diesem Zweck war es vorgesehen, eine Hypo-Federsäule in ein mit einer Dämpferflüssigkeit gefülltes Gefäss zu setzen, derart, dass zwischen dem Rand der Federscheiben und der Gefässwand ein definierter Spalt bestand. Beim Zusammendrücken des Federpaketes wird die zwischen den einzelnen Scheiben befindliche Dämpfungsflüssigkeit aus diesem Zwischenraum herausgepresst und muss durch den erwähnten Randspalt abströmen. Dieser Strömungsvorgang ist mit Widerstand behaftet und bedeutet eine Dämpfung der Federverschiebung.

Die in einem Flüssigkeitsgefäss befindliche Federsäule und ihr Verhalten sollen in dieser vorliegenden Arbeit nicht behandelt werden. Die Betrachtung beschränkt sich ausschliesslich auf das mechanische Verhalten der einzelnen Federplatten bzw. einer Federsäule.

Die äussere Form der Federscheiben ist in der Regel kreisrund. Es lassen sich jedoch ebensogut Federn bauen, die eine quadratische oder sonstwie geradzahlig mehreckige Form haben, ebenso wie z. B. vierecksternförmige Federplatten möglich sind.

Auch ist es möglich die Federplatten mit einem zentralen Loch zu versehen, wobei in einem solchen Fall die gegenseitige Fixierung der Federplatten am Rand des Innenloches vorgenommen werden könnte.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich jedoch ausschliesslich auf die Untersuchung voller, quadratischer und kreisrunder Federplatten, ohne zentrales Loch.

Die Hypo-Feder kann auf sämtlichen Gebieten der Technik eingesetzt werden. Sie bietet durch ihre Kombinationsmöglichkeiten die gleichen Vorteile wie die Tellerfeder, über diese hinaus noch die der besseren Dauerhaltbarkeit. Bezüglich der Werkstoffausnutzung ist sie wegen der günstigen Spannungsverteilung im Werkstoff besser als die Tellerfeder, ebenso trifft dies für die Ausnutzung des Bauraumes zu, da ihr im Gegensatz zur Tellerfeder im Normalfall das Zentralloch fehlt.

2. Zur Geometrie des hyperbolischen Paraboloides

Das hyperbolische Paraboloid ist eine nicht abwickelbare Regelfläche. Unter Regelflächen sind dabei solche zu verstehen, die durch Scharen gerader Linien erzeugt werden. Die Fläche eines hyperbolischen Paraboloides entsteht durch die Verschiebung einer Geraden längs zweier zueinander windschiefer, in zwei parallelen Ebenen befindlichen Geraden.

Die mathematische Beschreibung und Behandlung des hyperbolischen Paraboloides kann der speziellen Literatur entnommen werden [1], [2], [3].

Die allgemeine Beziehung für diese Fläche schreibt sich nach [3]

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z} \quad (\text{I.1})$$

Im vorliegenden Fall der Feder ist die Fläche ein regelmässiges hyperbolisches Paraboloid für das sich (I.1) reduziert auf

$$\boxed{x^2 - y^2 = \pm a^2 z} \quad (\text{I.2})$$

Aus Abb. 4 ist die Lage der Koordinaten bei einer quadratischen, aus Abb. 5 bei einer kreisrunden Scheibe zu ersehen.

Beim regelmässigen hyperbolischen Paraboloid liefern ebene Schnitte parallel zur x-z-Ebene und parallel zur y-z-Ebene für gleiche y bzw. x-Abstände konkurrente jedoch spiegelbildlich liegende Parabeln.

Die x-y-Ebene schneidet die Fläche in zwei senkrecht zueinander stehende Geraden, die unter 45° gegen die x-y-Achse verdreht sind und als u und v-Achsen bezeichnet werden.

Parallele Schnitte zur x-y-Ebene ergeben Hyperbeln mit den u- und v-Achsen als Asymptoten.

Sämtliche Schnittlinien von Ebenen parallel zur u-z- und v-z-Ebene mit der Fläche des hyp. Paraboloides sind gerade, zueinander windschiefe Linien.

Das regelmässige hyperbolische Paraboloid wird also von 2 Scharen zueinander senkrechter Linien die untereinander windschief sind bedeckt, bzw. diese Fläche wird erzeugt durch die Verschiebung einer Geraden, senkrecht und längs zweier windschiefer Geraden, die in zwei parallelen Ebenen liegen.

Diese Eigenschaft der Fläche ist besonders wertvoll bei der Fertigung der Prägwerkzeuge für die Federscheiben.

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass eine solche Fläche auf sehr elegante Art und Weise entsteht, wenn eine Seifenhaut in einen windschief verwundenen Rahmen (z.B. aus Draht) gespannt wird.

Für die Kennzeichnung einer Feder ist die Grösse des Federweges bedeutsam. Bezeichnet man entsprechend Abb. 4 den Wölbungspfeil einer Schnittparabel, z.B. der x-z-Ebene zwischen den Lastangriffspunkten P_1 bzw. P_2 und dem Mittelpunkt der Fläche $(x; y; z) = 0$ mit h , so ist die ganze Aufwölbung der Fläche die dem gesamten möglichen Federweg entspricht ($2h$). Die Grösse des Wölbungspfeiles ergibt sich unmittelbar aus (I.2) wenn dort entweder x oder $y = 0$ gesetzt wird, da $z \rightarrow h$ zu

$$h = \frac{x^2}{a^2}$$

(I.3)

Also

$$\boxed{2h = 2 \frac{x^2}{a^2}} \quad (\text{I.4})$$

bzw. für die quadratische Scheibe bei der

$$x^2 = \frac{l^2}{2}$$

ist, wenn mit l die Kantenlänge des Quadrates bezeichnet wird, ergibt sich

$$\boxed{2h = \frac{l^2}{a^2}} \quad (\text{I.5})$$

Da für eine kreisrunde Scheibe $x \rightarrow r_a$ wird und $r_a = D/2$ ist, ergibt sich hier

$$\boxed{2h = \frac{D^2}{2a^2}} \quad (\text{I.6})$$

a^2 wird als Wölbungsparameter bezeichnet und hat die Dim. einer Länge.

Weitere Zusammenhänge ergeben sich aus der Betrachtung der Abb. 6, die einen Schnitt durch die Fläche des hyperb. Paraboloides durch zwei zur u - z bzw. u - z parallelen Ebene zeigt.

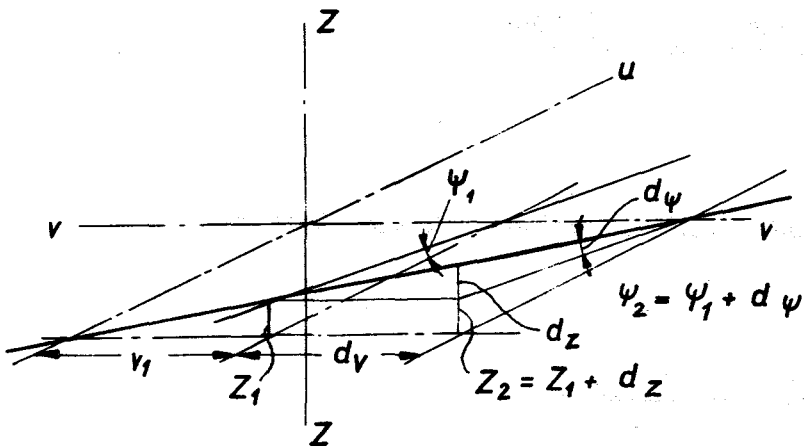


Abb. 6

Betrachtet man eine Schnittlinie einer zur u-z-Ebene parallelen Schnittebene im Abstand v_1 , so ist diese gegen die u-v-Ebene um den Winkel ψ_1 verdreht. Im Abstand u hat die Erhebung über die u-v-Ebene die Grösse z_1 und zwar ist

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{z_1}{u}$$

Eine Schnittlinie im Abstand $v_1 + dv$ hat den Verdrehungswinkel $\psi_2 = \psi_1 + d\psi$ und im Abstand u die Erhebung $z_2 = z_1 + dz$.

Dann ist

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \operatorname{tg} (\psi_1 + d\psi) = \frac{z_1 + dz}{u}$$

Es ist weiter

$$\frac{z_1}{v_1} = \frac{z_1 + dz}{v_1 + dv}$$

daraus

$$z + dz = \frac{v_1 + dv}{v_1} \cdot z_1$$

somit

$$\operatorname{tg} (\psi + d\psi) = \frac{v_1 + dv}{v_1} \cdot \frac{z_1}{u}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}(\psi + d\psi)}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{v_1 + dv}{v_1}$$

statt des tg kann man die Strecke setzen, damit ergibt sich

$$\frac{\psi + d\psi}{\psi} = \frac{v_1 + dv}{v_1}$$

oder

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{dv}{v_1}$$

und damit

$$\boxed{\frac{d\psi}{dv} = \frac{\psi}{v_1} = \mathcal{J}} \quad (\text{I.7})$$

Das Ergebnis sagt aus, dass die Neigung der Fläche über ihre ganze Ausdehnung hin einen konstanten Wert hat.

Setzt man hier für $v \rightarrow l/2$ so ergibt sich sofort

$$\boxed{\psi = \frac{l}{2} \cdot \mathcal{J}} \quad (\text{I.8})$$

Andererseits ist wie der Abb. 4 leicht entnommen werden kann

$$\psi = \frac{h}{l/2}$$

woraus sich ergibt

$$\boxed{2h = \psi l} \quad (\text{I.9})$$

bzw.

$$\boxed{2h = \frac{L^2}{2} \vartheta} \quad (\text{I.10})$$

oder

$$\boxed{\vartheta = 2 \frac{2h}{L^2}} \quad (\text{I.11})$$

Setzt man (2.5) und (2.10) gleich, so erhält man ferner

$$\boxed{\vartheta = \frac{2}{a^2}} \quad (\text{I.12})$$

Für die kreisrunde Federscheibe lauten die analogen Beziehungen wie sich sofort ergibt, wenn gesetzt wird

$$2 L^2 = D^2$$

$$\boxed{\psi = \frac{D}{2\sqrt{2}} \vartheta} \quad (\text{I.13})$$

$$\boxed{2h = \psi \frac{D}{\sqrt{2}}} \quad (\text{I.14})$$

bzw.

$$\boxed{2h = \frac{D^2}{4} \mathcal{J}} \quad (\text{I.15})$$

oder

$$\boxed{\mathcal{J} = 4 \frac{(2h)}{D^2}} \quad (\text{I.16})$$

Damit sind sämtliche für die spätere Durchrechnung der Federscheiben notwendigen grundlegenden und aus der Geometrie der Fläche ableitbaren Grössen bekannt.

3. Aufgabenstellung und Lösungsweg

Für die Beurteilung einer Feder ist von primärer Wichtigkeit, die Kenntnis der in dieser bei Belastung entstehenden Spannungen, und zwar sind die Spannungen nach Art (Zug-Druck-Schub) Richtung und Grösse zu ermitteln.

Durch entsprechende Integration der Spannungen über der Fläche bzw. dem Volumen der Federscheibe ergibt sich die Tragfähigkeit und damit die Kennlinie die das Last-Dehnungsverhalten beschreibt.

Weiterhin kann durch Integration über den Verschiebeweg die speicherbare Formänderungsarbeit gefunden werden. Schliesslich können aus Art und Richtung der Spannungen in Zusammenhang mit der Form der Feder gesehen, Rückschlüsse auf das Verhalten der Feder bei dynamischer Last gezogen werden.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich grundsätzlich auf

- 1) quadratische und
- 2) kreisrunde Federscheiben.

Es soll jedoch ein allgemeiner Rechnungsgang vorgelegt werden, der gestattet auch Federn mit von den genannten abweichenden Randformen theoretisch zu behandeln.

Die theoretischen Untersuchungen werden durchgeführt für

- 1) Platten, die im Ausgangszustand eben sind und durch die Belastung verwölbt werden.
- 2) Platten, die im Ausgangszustand nach der Form des hyperbolischen Paraboloides (Sattelfläche) verwölbt sind und bei der Belastung zur Ebene hin verformt werden.

Die Rechnung für die ebene Platte wurde durchgeführt, weil sich hier gut der Anschluss an bekannte Rechnungen der Plattentheorie schaffen liess. Ausserdem liegt es im Bereich des Möglichen, dass für gewisse Fälle auch unverwölbte Federn interessant sein können.

Im Verlaufe der Entwicklungsarbeiten wurde zunächst versucht, die Verhältnisse bei der Hypo-Feder mit Hilfe der Plattentheorie zu erfassen. Aus arbeits-technischen Gründen im Institut ergab es sich, dass diese Rechnungen nicht vom Verfasser, sondern von Herrn Dipl.-Ing. Baumann durchgeführt wurden. Der Vollständigkeit halber soll diese Rechnung dennoch hier in gekürzter Form mitgeteilt werden.

Der Gültigkeitsbereich der Plattentheorie ist für den vorliegenden Fall jedoch sehr beschränkt. Es können mit ihrer Hilfe nur Belastungsverhältnisse betrachtet werden, bei denen die Verschiebungen klein gegen die Plattendicke sind. Bei der vorliegenden Hypo-Feder sind jedoch die Verschiebewege mindestens in der Grössenordnung der Plattendicke vielfach sogar erheblich grösser. Es wäre also eine Erweiterung der Plattentheorie erforderlich gewesen, um den vorliegenden Verhältnissen gerecht zu werden. Eine solche Erweiterung führt jedoch in mathematisch sehr schwierig zu behandelnde Bereiche. Es wurde deshalb auf die Weiterführung dieses Rechenweges verzichtet [4], S. 15 und [5] S. 396.

Betrachtet man eine Federplatte nach Abb. 1 oder Abb. 2 und die dort eingezeichneten Pfeile die die Richtung der auf die Feder wirkenden äusseren Kräfte kennzeichnen, so wird man sofort erkennen, dass die Feder durch Kraft und Gegenkraft, die zusammen ein Momentenpaar bilden, auf Verdrehen beansprucht wird.

Es sollte also möglich sein, die Rechnung solcher Federplatten nach den Grundsätzen der Verdrehungsfestigkeit durchzuführen.

Diese Möglichkeiten wurden vom Verfasser untersucht. Sie führen zu recht übersichtlichen relativ einfachen Rechenverfahren, deren Richtigkeit durch eine gute Übereinstimmung mit Messergebnissen bestätigt wurde. Diese Rechenverfahren und die vergleichenden Messergebnisse sind der Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Eingangs wurde kurz erwähnt, dass die Federplatten auch mit einem zentralen Loch versehen werden können und dass die Untersuchung sich auch mit solchen Scheiben beschäftigt. Die vorliegende Arbeit wird

sich ausschliesslich mit den vollen ungelochten
Federplatten beschäftigen. Die gelochten Federplatten sollen Gegenstand einer
getrennten Abhandlung sein.

II. Die Theorie der vollen Hypo-Federplatte

1. Die Rechnungen nach der Plattentheorie

Gerechnet wurde die kreisrunde und die quadratische ebene Platte mit punktförmiger Belastung und mit den Koordinaten entsprechend Abb. 4 und 5.

Ermittelt wurden die Spannungen, der Spannungsverlauf und die Verschiebungen (Durchsenkung).

Die Platte habe die Abmessungen

Durchmesser D

bzw. Kantenlänge L

Durchsenkung an beliebigem Ort u_0

Die allgemeine Differentialgleichung für die Durchsenkung u_0 zur Plattenmittelebene lautet [6] S. 487.

$$\Delta \Delta u_0 = A p$$

(II.1)

Beschränkt man sich zunächst auf die Kreisplatte, geht zu Polarkoordinaten über und setzt, wie es dem vorliegenden Fall entspricht, die Belastung $p = 0$, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_0 = 0$$

Mit den Randbedingungen

$$u_0(R) = B(R) \cos 2 \varphi$$

wie sie aus der Symmetrie des vorliegenden Belastungsfalles resultieren, ergibt den Lösungsansatz

$$u_0(r) = B(r) \cos 2 \varphi$$

und damit die Lösungen

$$(u_0)_1 = F_1 r^2 \cos 2 \varphi \quad (\text{II.2})$$

$$(u_0)_2 = F_2 r^4 \cos 2 \varphi \quad (\text{II.3})$$

Es ist einfach nachzuweisen, dass die beiden Lösungen räumlich gekrümmte Flächen beschreiben, deren Erzeugende im 1. Fall eine Gerade, im 2. Fall eine kubische Parabel ist.^{x)}

Da aus fertigungstechnischen Gründen nur die Gerade als Erzeugende möglich ist, interessiert nur die 1. Lösung. Gl. (II.2).

^{x)} Transformiert man die Lösungen Gl. (II.2) und Gl. (II.3) in kartesische Koordinaten, so erhält man

$$(u_0)_1 = F_1 (x^2 - y^2)$$

$$(u_0)_2 = F_2 (x^4 - y^4)$$

Setzt man $y = \pm (c^* \pm x)$ so folgt

$$z_1(x) = -c^*(c^* \pm 2x)$$

$$z_2(x) = -c^*(c^{*3} \pm 4c^{*2}x + 6c^*x^2 \pm 4x^3)$$

Mit der Funktion der Plattendurchsenkung sind über die Gleichungen [6] S. 490

$$\sigma_r = \frac{mEz}{m^2-1} \left[m \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi_0} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right]$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{mEz}{m^2-1} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{m}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi_0} + \frac{m}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right]$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{mEz}{m+1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right]$$

die auftretenden Spannungen festgelegt.

Es ist

$$\sigma_r = -2 \frac{mEz}{m+1} F_1 \cos 2\varphi$$

$$\sigma_\varphi = -2 \frac{mEz}{m+1} F_1 \cos 2\varphi$$

$$\tau_{r\varphi} = 2 \frac{mEz}{m+1} F_1 \sin 2\varphi$$

Untersucht man den Verlauf der Spannungen näher, so kann man feststellen, dass

- 1) alle Spannungen vom Plattenradius unabhängig, d.h. über einem Plattendurchmesser konstant sind;
- 2) alle Spannungen periodische Funktionen von φ sind.

Insbesondere gilt:

$$a) \sigma_r = \sigma_\varphi = 0 \quad \text{für } 2\varphi = (2k-1) \frac{\pi}{2}$$

$$b) \sigma_{r \max} = \sigma_{\varphi \max} \quad \text{für } 2\varphi = k\pi$$

$$c) \tau_{r\varphi} = 0 \quad \text{für } 2\varphi = (k-1)\pi$$

$$d) \tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi \max} \quad \text{für } 2\varphi = k \frac{\pi}{2}$$

$$e) \sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} \quad \text{für } 2\varphi = k \frac{\pi}{4}$$

für $k = 1; 2; 3;$

Zur Veranschaulichung des Verlaufs diene die Abb. 7. Sie zeigt oben eine Draufsicht auf eine kreisrunde Platte mit den Arten der verschiedenen Spannungen.

Darunter eine Abwicklung der Seitenansicht über den ganzen Plattenumfang von $0 = 2\pi$.

Die Hauptspannungen für den räumlichen Spannungszustand sind gleich gross und ergeben sich nach der Formel [7] S. 590

$$\sigma_{1,2i} = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2}\right)^2 + \tau_{r\varphi}^2}$$

zu $\sigma_{1,2i} = \pm 2 \frac{Emz}{m+1} F_1$

mit Gl.

$$\sigma_{1,2i} = \pm 2 \frac{mEz}{m+1} \frac{1}{R^2} u_{0 \max} \quad (\text{II.4})$$

Man sieht, die Hauptspannungen sind vom Radius unabhängig. Die max. Vergleichsspannung tritt an der Ober- und Unterseite der Platte auf und beträgt

$$\sigma_{max} = \pm \frac{Em}{m+1} \frac{d}{R^2} u_{0max} \quad (\text{II.5})$$

Die bei der Belastung in der Platte gespeicherte Formänderungsarbeit folgt aus der Gleichung für den ebenen Spannungszustand.

$$FA = \frac{1}{2E} \int (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m} \sigma_1 \sigma_2) dv$$

Durch Integration über das Plattenvolumen erhält man

$$FA = \frac{4}{12} E d^3 F_1^3 \frac{m}{m+1} 4 \left(\frac{D}{2} \right)^2$$

bzw.

$$FA = \frac{4}{3} \mu \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} u_{0max}^2$$

Aufgrund der Linearität zwischen $\sigma \sim u_0$ Gl. (II.4) kann man die am Plattenrand angreifende Gesamtkraft setzen

$$p^* = c u_0$$

und gelangt so zur Bilanz der Formänderungsarbeit

$$FA = \int_0^{2u_{0max}} p^* du_0 = 2c u_{0max}^2$$

da

$$P = c 2 u_{0max}$$

ergibt sich für die Gesamtkraft P

$$P = \frac{FA}{u_{0max}}$$

und mit Gl.

$$P = \frac{4}{3} \# \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} u_{0max} \quad (\text{II.6})$$

Damit ist die Beziehung zwischen Kraft und Durchbiegung bzw. die Federkonstante gefunden.

Für die kreisrunde Platte gelten dann die folgenden Formeln

1)
$$\sigma_{max} = 4 \frac{Em}{m+1} \frac{d}{D^2} u_{0max} \quad (\text{II.7})$$

2)
$$P = \frac{3}{4} \# \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} u_{0max} \quad (\text{II.8})$$

3)
$$c = \frac{2}{3} \# \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} \quad (\text{II.9})$$

Für die quadratische Platte sind die analogen Formeln

1)	$\sigma_{\max} = 2 \frac{E m}{m+1} \frac{d}{L^2} u_{0 \max}$	(II.10)
----	--	---------

2)	$P = \frac{4}{3} \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{L^2} u_{0 \max}$	(II.11.)
----	--	----------

3)	$c = \frac{2}{3} \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{L^2}$	(II.12.)
----	---	----------

Auf das Ergebnis dieser Rechnung wird unten bei einem Vergleich mit nachfolgenden Rechnungen und mit Messergebnissen noch zurückgekommen.

II. 2. Rechnung nach der Lehre von der Verdrehungsfestigkeit

2.1 Allgemeines

Die von aussen auf die Platte wirkende Kraft P verformt diese um den Verschiebeweg (2h).

Die Last P spaltet sich hierbei auf in zwei gleichgrosse Einzelkräfte + P/2 die an gegenüberliegenden Lastpunkten angreifen und die zwei gleichgrosse entgegengesetzt gerichtete Reaktionskräfte - P/2 an den beiden anderen Lastpunkten der Platte hervorrufen.

Diese Kräfte wirken auf die Platte als Momentenpaar der Grösse

$M' = \frac{P}{2} \cdot L$	(II.13)
----------------------------	---------

wo L der Abstand zweier benachbarter Lastpunkte ist.

Wegen der völligen Symmetrie der Federscheiben kann die Verdrillung auch betrachtet werden, als ob sie von 2 Momenten verursacht wäre die senkrecht zueinander je um die U- und die V-Achse wirken. Jedes dieser Momente hat dann die Grösse

$$M' = \frac{M}{2} = \frac{P}{4L} \quad (\text{II.14})$$

Der theoretische Lastabstand ist L . Der praktische Lastabstand L' kann jedoch kleiner sein als der theoretische und zwar dann, wenn die gegenseitige Abstützung der Federscheiben nicht mehr an einem Punkt geschieht, sondern auf einem kurzen Randstück endlicher Länge. Dazu später eine ausführlichere Betrachtung.

Für die Ableitung der grundlegenden Beziehungen zur Durchrechnung der Hypo-Federscheibe auf Verdrehung kann auf die Arbeit von

Constantin Weber

"Die Lehre der Drehungsfestigkeit" [8]

weitgehend zurückgegriffen werden.

Der Betrachtung wird dabei folgender vereinfachter Sachverhalt zugrunde gelegt:

Bei sehr kleinen Verdrillungswinkeln entstehen in der Platte reine Schubspannungen, die über die gesamte Oberfläche mit Ausnahme der unmittelbaren

Nähe der Ecken des Querschnittes gleichmässig verteilt sind. Die Verteilung über den Querschnitt der Platte folgt dabei einer geraden Linie von τ_{\max} an der Oberfläche bis zu $\tau_{\min} = 0$ in der Mittelachse. Hierzu Weber S. 25, S. 51.

Bei grösseren Verdrillungen entstehen neben den Schubspannungen noch Normalspannungen parallel zur Drehachse (Weber S. 60). Diese Normalspannungen haben bei der im Ausgangszustand ebenen Platte in den randnahen Fasern positive Werte - Zugspannungen -, in Drehachsennähe negative Werte - Druckspannungen -. Bei im Ausgangszustand verwölbten Platten (vorverwölbten Platten) sind die Vorzeichen der Spannungen umgekehrt, d.h. in Randnähe liegen Druckspannungen, in Drehachsennähe Zugspannungen vor.

Da für den vorliegenden Fall in erster Näherung eine Überlagerung der Normal- und Schubspannungen erlaubt ist, kann die Rechnung in zwei Abschnitten durchgeführt werden. Es werden zunächst die Schubspannungen und die aus diesen abgeleiteten Momente ermittelt. Das Ergebnis gilt unter diesen Umständen dann für beliebig grosse Drillwinkel.

Als nächstes werden die Normalspannungen, ihr Verlauf und die entsprechenden Momente als Funktion der Drillwinkel ermittelt. Durch Überlagerung der Normal- und der Schubspannungen im zweiachsigen Spannungsfeld können damit der Spannungsverlauf, die Orte maximaler Spannungen sowie deren absolute Höhe gefunden werden. Die Momente aus Schub- und Normalspannungen lassen sich einfach addieren und ergeben die Tragfähigkeit bzw. das Kraft-Dehnungsverhalten der Federscheibe. Für die Formänderungsarbeit gilt das gleiche.

2.2 Schubspannungen und Schubkräfte

2.2.1 Der streifenförmige Querschnitt

Im Sinne der Lehre von der Drehungsfestigkeit kann der Drillquerschnitt gleichgültig wie die Federscheibe als Ganzes berandet ist als streifenartiger, gerader, rechteckiger Querschnitt konstanter Breite entsprechend Abb. 8 angesehen werden.

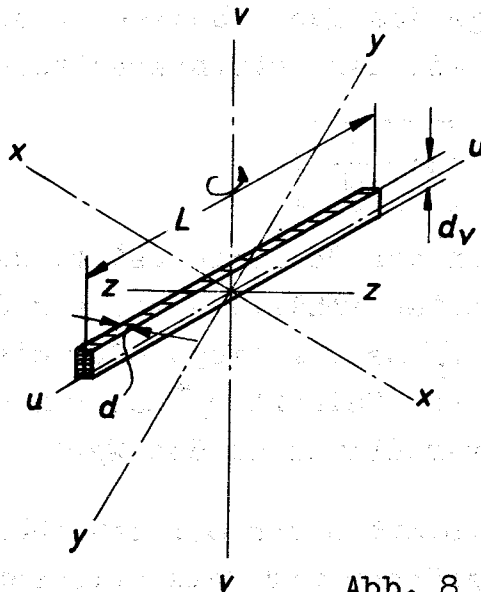


Abb. 8

Für einen solchen Querschnitt gibt Weber S. 26, S. 79 bei Verdrillung z.B. um die U-Achse für die max. Schubspannungen an der Längsseite des Querschnittes die für die Rechnungen der Praxis recht handliche Formel (angeschrieben mit der hier gültigen Koordinatenbezeichnung)

$$\tau_{yu_{max}} = \tau_{uv_{max}} = \psi_1^* G d \vartheta$$

(II.15)

Für die Spannungen der Schmalseite des Querschnittes ist die Spannung entsprechend Weber S. 26, Gl. 81

$$\tau_{zu\ max} = \tau_{uz\ max} = \tau_{min} = \psi_2^* G d \vartheta \quad (\text{II.16})$$

ψ_1^* und ψ_2^* sind vom Seitenverhältnis n des Querschnittes abhängige Beiwerte, die bei Weber auf Seite 29 in Zahlentafel 1 wiedergegeben sind.

Ist die Länge des Querschnittes L und dessen Dicke d , so ist das Seitenverhältnis

$$n = \frac{L}{d} \quad (\text{II.17})$$

Ein Vergleich der Beiwerte zeigt, dass schon bei einem Seitenverhältnis von 4 und grösser der Beiwert ψ_1^* nahe 1 liegt oder diesem gleich ist. Der Beiwert ψ_2^* hat von dem gleichen Seitenverhältnis ab den Wert = 0,7425.

Da bei Federplatten das Seitenverhältnis in jedem Fall grösser wird als 4, lassen sich die Beziehungen (2.45) und (2.46) in der Form schreiben

$$\tau_{max} = G d \vartheta \quad (\text{II.18})$$

$$\tau_{min} = 0,7425 G d \vartheta \quad (\text{II.19})$$

Für die weiteren Untersuchungen wird grundsätzlich unterstellt, dass das Seitenverhältnis immer grösser als 4, meist sogar grösser als 10 ist. In Fällen in denen diese Annahme nicht mehr vorliegt, wird besonders darauf hingewiesen.

Aus den gefundenen Schubspannungen können die Momente ermittelt werden.

Für das Moment des rechteckigen Querschnittes gibt Weber S. 26, Formel (83) an

$$M = n \psi_3^* \cdot G \mathcal{J} d^4$$

und für $n \cdot \psi_3^*$ die Näherungsbeziehung

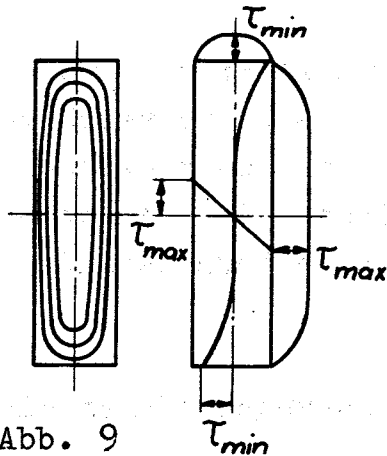
$$n \psi_3^* \approx n \psi_3' = \frac{1}{3} \left[n - 0,63 + \frac{0,025}{n^4} \right]$$

Entsprechend eben gemachten Einschränkungen $n > 4$ kann das 3te Glied der Klammer vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$n \psi_3^* \approx \frac{1}{3} [n - 0,63]$$

und daraus etwas umgeschrieben

$$M = \frac{1}{3} [L - 0,63d] G d^3 \mathcal{J} \quad (\text{II.20})$$



Den Verlauf der Schubspannungen und deren Verteilung über einen Querschnitt der Scheibe zeigt Abb. 9. Der Verlauf ist in allen Querschnitten senkrecht zur u- und senkrecht zur v-Achse der gleiche.

Man erkennt, dass die Spannungslinien über den grössten Teil des Querschnittes der Längsseiten parallel laufen; an den Schmalseiten nimmt die Spannung ab und zwar nach Formel (II.19) auf den Wert

Der Spannungsverlauf ist über den Querschnitt gradlinig; die Spannung hat an der Oberfläche den höchsten Wert, in der Symmetrieachse den Wert 0.

Von Weber wurde noch der Begriff der resultierenden Schubkraft (S. 51) benutzt, der sich für weitere Untersuchungen als recht vorteilhaft erweist.

Die resultierende Schubkraft ist eine Ersatzkraft für das Flächenintegral der Schubspannungen über der Fläche des Querschnittes. Sie wirkt längs einer geschlossenen Linie in einem bestimmten von der Form des Querschnittes abhängigen Abstand zur Umrandung.

Die resultierende Schubkraft wird auf die Längeneinheit der Schublinie bezogen und mit K bezeichnet.

Parallel zu den Längsseiten des Querschnittes verläuft diese Linie im Abstand $d/3$ von der Mittellinie. Dieser Abstand ergibt sich daraus, dass die Schubspannung von der max. Spannung an der äusseren Berandung der Längsseite auf den Betrag Null an der Mittellinie geradlinig abnimmt. Die resultierende Kraft aus diesem Spannungsverlauf liegt dann bei $2/3 \cdot d/2 = d/3$ und hat die Grösse

$$K = \frac{\tau_{\max}}{2} \cdot \frac{d}{2}$$

oder mit (II.18)

$$K = \frac{1}{4} G d^2 \mathcal{J} \quad (\text{II.21})$$

An den Schmalseiten ist der Abstand von der Mittellinie $l_t/2$

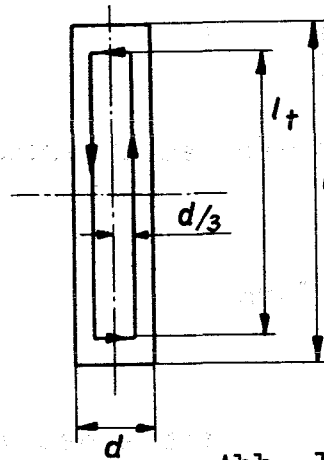


Abb. 10

Mit Hilfe der resultierenden Schubkraft kann leicht das Moment ermittelt werden.

Bezogen auf den Mittelpunkt des Querschnittes ergibt sich dies zu

$$M = 2K \cdot l_t \cdot \frac{d}{3} + 2K \frac{2}{3} d \cdot \frac{l_t}{2}$$

bzw.

$$M = \frac{4}{3} K l_t \cdot d$$

für K den Wert aus (II.21) eingeführt ergibt sich

$$M = \frac{1}{3} G d^3 l_t \cdot \mathcal{J} \quad (\text{II.22})$$

Setzt man II.22 und II.20 gleich, so ergibt sich daraus

$$l_t = l - 0,63 d \quad (\text{II.23})$$

Es ist ausserdem damit

$$l - l_t = 0,63 d \quad (\text{II.24})$$

womit der genaue Verlauf der resultierenden Schublinie bekannt ist.

l_t kann man auch in der Form

$$l_t = l \left(1 - \frac{0,63}{n} \right)$$

schreiben und

erhält dann für das Moment

$$M = \frac{1}{3} G d^3 l \cdot \mathcal{J} \left(1 - \frac{0,63}{n} \right) \quad (\text{II.25})$$

oder mit der Abkürzung

$$N = \frac{1}{3} G d^3 \left(1 - \frac{0.63}{n} \right) \quad (\text{II.26})$$

$$M = N l \mathcal{J} \quad (\text{II.27})$$

2.2.2 Die ganze Federplatte

Für die Betrachtung der ganzen Federplatte wird diese als aus in Richtung der Drillachse schmalen Streifen von der Breite dv bzw. du und der Länge L senkrecht zur Drillachse aufgebaut angesehen.

Bei rechteckigen, insbesondere bei quadratischen Scheiben ist dabei die Länge L senkrecht zur Drillachse konstant. Bei Scheiben anderer Berandung dagegen ist die Länge L veränderlich, meist eine gegebene Funktion von u bzw. v .

Für einen trapezförmigen oder ähnlich berandeten Streifen gelten dann die folgenden Zusammenhänge

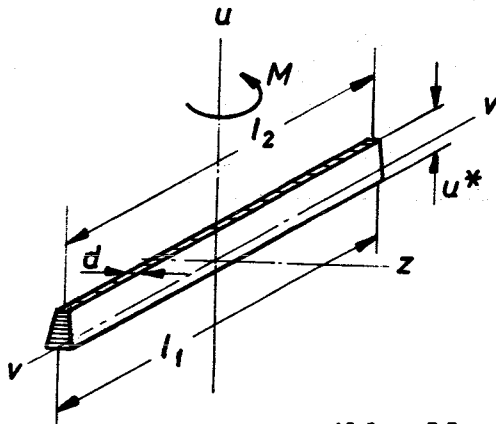


Abb. 11

Das betrachtete, z.B. trapezförmig oder sonstwie berandete Stück einer Federplatte nach Abb. 11, habe die Länge $L(u)$. Die Höhe sei u und die Dicke des Streifens d . Der Streifen wird um die u -Achse durch das Moment M verdrillt.

Dann gilt, da es sich um einen geschlossenen Querschnitt handelt, für das Moment die Beziehung (II.27)

$$M = N \cdot l \cdot \vartheta$$

mit N nach Gl. (II.26).

Nach Gl. (I.7) kann für die Verdrillung geschrieben werden

$$\vartheta = \frac{d\psi}{du}$$

Dann erhält man mit

$$l = l(u)$$

das Moment zu

$$M = N l(u) \cdot \frac{d\psi}{du}$$

oder hieraus

$$\boxed{d\psi = \frac{M}{N} \cdot \frac{du}{l(u)}} \quad (\text{II.28})$$

Integriert für einen Streifen der Breite

$$u^* = u_1 - u_2$$

ergibt sich

$$\boxed{\psi \int_{u_1}^{u_2} = \frac{M}{N} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{l(u)}} \quad (\text{II.29})$$

bzw. daraus das Moment

$$M = \frac{N \psi}{u^2 \int \frac{du}{l(u)}} \quad (\text{II.30})$$

Die Auslenkung Z eines Randpunktes im Abstand u von der V -Achse gegen die U - V -Ebene ist dann

$$\psi(u) = \frac{Z}{l(u)}$$

also damit

$$Z(u) = \frac{M}{N} l(u) \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{l(u)} \quad (\text{II.31})$$

Diese Ableitungen gelten hierbei für Federplatten beliebiger Randformen. Die wichtigsten unter diesen sind derzeit kreisrunde und quadratische Platten, darüber hinaus erscheinen auch andere Formen wie sie in Abb. 12 dargestellt sind, plausibel. Wie weit derartige Federscheiben in speziellen Fällen von Interesse sind, kann jedoch heute kaum schon festgestellt werden.

Jedenfalls lassen sich mit derartigen Formen Federscheiben mit besonderen Federkennlinien schaffen und damit bestimmten Bedürfnissen anpassen. Die Durchrechnung stützt sich auch hier entweder auf den zuvor betrachteten Streifen nach Abb. 11 ab oder greift auf den parallelen Streifen nach Abb. 8 zurück.

Grundsätzlich kann man bei beliebig berandeten Platten auf die Beziehung (II.29) zurückgreifen. Die Lösbarkeit des Integrales hängt dabei von der Art der Randform, d.h. von der Art der Fkt. $l = l(u)$ ab. Ist das Integral geschlossen direkt oder indirekt lösbar, so kann über den Streifenbereich von $u = 0$ bis zur Verbindungslinie der Lastpunkt integriert und damit das Moment für diesen Bereich unmittelbar gefunden werden.

Die Integration kann deswegen nur bis zur Lastpunktlinie geführt werden, weil Teile der Federplatte die ausserhalb dieser Linie liegen von den Momenten der zuständigen Drillachse nicht erfasst werden. Ihr Einfluss auf das Gesamtmoment der Platte wird nach einem später zu zeigenden Verfahren wahrgenommen.

Ist jedoch die Funktion $l = l(u)$ math. nicht auswertbar, so muss die Federplatte in senkrecht zur Drillachse liegende schmale gerade berandete Streifen von ausreichend geringer Breite zerlegt werden. Für jeden Streifen ist der Verdrillungswinkel ψ zu bestimmen und durch Summierung über den Bereich von $u = 0$ bis zur Lastpunkt-Verbindungslinie die Gesamtverdrehung zu ermitteln.

Es ist dann

$$\sum_{u=0}^{u=u} \psi = \frac{M}{N} \sum_{u=0}^{u=u} \frac{\Delta u}{l_i} \quad (\text{II.32})$$

bzw. umgestellt daraus das Moment

$$M = \frac{N \sum \psi}{\sum \frac{\Delta u}{l_i}} \quad (\text{II.33})$$

Die Schubspannungen ergeben sich aus den bekannten Beziehungen (II.18) und (II.19). Dort ist, sofern nach (II.29) gerechnet werden konnte

$$\mathcal{J} = \frac{d\psi}{du}$$

oder im Falle der schrittweisen Rechnung

$$\mathcal{J} = \frac{\psi_i}{\Delta u}$$

zu setzen.

Mit diesen Beziehungen die für beliebig berandete Federplatten gelten, sind die Momente jeweils um eine Drehachse bestimmt.

Es kann damit nunmehr zur Ermittlung der Momente für die ganze Platte übergegangen werden.

Betrachtet werden zwei Berandungsformen der Federplatte

1. die quadratische
2. die kreisrunde Berandung

Die Beschränkung auf diese beiden Formen ist ausreichend um das benutzte Rechenverfahren genügend klarzulegen. Ausserdem dürften diese beiden Formen diejenigen sein, die in der technischen Praxis vorzugsweise Verwendung finden.

2.2.2.1 Die quadratische Federplatte

Da bei dieser Berandungsform

$$l = l_{(u)} = \text{const.} \quad \text{ist}$$

gilt für die ganze Federplatte die Momentenbeziehung nach Gl. (II.25) bzw. Gl. (II.27).

Diese lautet

$$M_{D\phi} = \frac{1}{3} G d^3 l \left(1 - \frac{0,63}{n} \right) \mathcal{J}$$

Drückt man \mathcal{J} durch den Federweg ($2h$) aus, so ist nach Gl. (I.11)

$$\mathcal{J} = 2 \frac{2h}{(l)^2}$$

l ist der Abstand der Lastpunkte und bei dem theoretischen Lastangriffspunkt in den Ecken der quadratischen Federscheibe identisch mit der Kantenlänge des Quadrates. Setzt man also \mathcal{J} entsprechend ein, so ergibt sich

$$M_{D\phi} = \frac{2}{3} G \frac{d^3}{l} \left(1 - \frac{0,63}{n} \right) (2h) \quad (\text{II.34})$$

Vernachlässigt man das zweite Glied in der Klammer, so wird für $n > 10$ der Fehler $< 4,5 \%$ und man erhält eine einfachere Beziehung, die einen rascheren Überblick über den Einfluss der Abmessungsparameter gibt. Dann lautet die Momentengleichung

$$M_{D\phi} = \frac{2}{3} G \frac{d^3}{l} (2h) \quad (\text{II.35})$$

Die Tragfähigkeit der Federplatte, besser der Tragfähigkeitsanteil aus den Drill-Schubspannungen, lässt sich sofort finden, wenn man beachtet, dass das so aus den Spannungen gefundene Moment, dem Moment aus den äusseren Kräften entsprechen muss.

Das Moment der äusseren Kraft ist nach (II.13)

$$M = \frac{P_{D\phi}}{2} \cdot l$$

woraus sich mit Gl. (II.34) sofort ergibt

$$P_{D\phi} = \frac{4}{3} G \frac{d^3}{L^2} \left(1 - \frac{0,63}{n} \right) (2h) \quad (\text{II.36})$$

Es ist vielfach zweckmässiger, statt des Gleitmoduls G mit dem Elastizitätsmodul E zu arbeiten.

Mit

$$G = \frac{Em}{2(m+1)}$$

m = Querkontraktionszahl

ergibt sich

$$P_{D\phi} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} \left(1 - \frac{0,63}{n} \right) (2h) \quad (\text{II.37})$$

oder die vereinfachte Form

$$P'_{D\phi} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h) \quad (\text{II.38})$$

Vergleicht man (II.38) mit der nach der Plattentheorie gefundenen Beziehung (II.11) und beachtet, dass

$$u_{Vmax} = h$$

so erkennt man Identität zwischen beiden Beziehungen. Allerdings muss man auch feststellen, dass Identität nur zwischen der vereinfachten Formel aus der Drehungsfestigkeit und der der Plattentheorie besteht.

Zwischen der genaueren Beziehung (II.37) der Verdrehungstheorie und der der Plattentheorie besteht eine Diskrepanz, die auf folgendes zurückzuführen ist.

Bei der Plattentheorie geht man aus von Platten geringer Dicke, man vernachlässigt daher den Einfluss des Spannungsabfalls am Plattenrand.

Bei der Verdrehungstheorie geht man dagegen von einem Querschnitt aus, der etwa mehr dem Quadrat nahe kommt und betrachtet den Streifen des vorliegenden Falles als Grenzfall. Es ist dann der Einfluss des Spannungsabfalles am Rand bei Streckung des Querschnittes in den Ableitungen enthalten und tritt im Ergebnis in Erscheinung. Der Fehler ist jedoch bei Federscheiben gering. Meist $< 5\%$.

Es sei hier noch der Ort um kurz auf die Schubspannungen zurückzukommen.

Für den streifenförmigen Querschnitt ist die max. Schubspannung nach (II.18)

$$\tau_{max} = G d \vartheta$$

Setzt man hier wieder ϑ aus (I.11) so ergibt sich sofort

$$\tau_{\max} = 2G \frac{d}{l^2} (2h) \quad (\text{II.39})$$

Auch hier G durch E ersetzt ergibt

$$\tau_{\max} = \frac{Em}{m+1} \frac{d}{l^2} (2h) \quad (\text{II.40})$$

Vergleicht man die Spannungsbeziehung (II.10) der Plattentheorie unter Beachtung dass $n_o \max = h$ mit Gl. (II.40) so besteht auch hier Identität.

2.2.2.2 Die kreisrunde Federplatte

Verdrillt man eine kreisrunde Federscheibe durch ein Momentenpaar bei dem die Kräfte in 4 symmetrisch zueinander liegenden Randpunkten angreifen wie dies Abb. 5 zeigt, z.B. um die u-u-Achse, so wird man bei der theoretischen Betrachtung des Vorganges feststellen, dass die beiden Kreissegmente der Kreisscheibe, die ausserhalb der Verbindungslinien der Lastpunkte liegen von dem Moment nicht beaufschlagt werden. Eine Behandlung des Problems wie vorausgegangen mit Hilfe der Zerlegung der Platte in Streifen von veränderlicher Länge wird deshalb zunächst zu keinem Ergebnis führen.

Verdrillt man gleichzeitig die Platte noch um die v-v-Achse wie dies auch tatsächlich der Fall ist, so liegen auf diese Achse bezogen die gleichen Sachverhalte vor wie oben dargestellt. Es werden auch hier zwei Segmente von der Rechnung nicht

erfasst. In beiden Fällen werden jedoch die Segmente die nicht von der jeweiligen Drillachse durchstossen werden in die Rechnung mit einbezogen.

Ausgehend von diesen Zusammenhängen lässt sich ein Rechnungsweg zur Ermittlung der Momente der ganzen Federscheibe und der Drillung einzelner Zwischenpartien aufbauen.

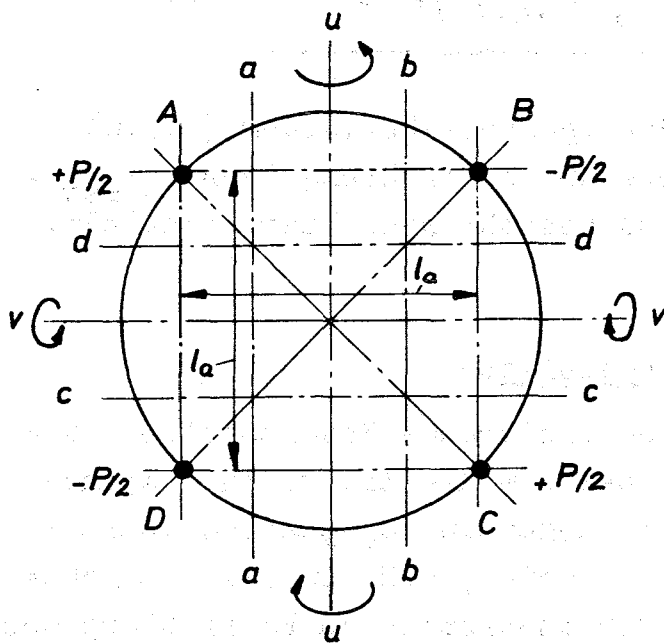


Abb. 13

Entsprechend Abb. 13 denkt man sich die Scheibe parallel zur u-u- und zur v-v-Achse durch Schnitte a-a; b-b bzw. c-c und d-d in jeweils gleich breite Streifen zerlegt. Die Streifen sind dann aussen durch Kreisbogen, d.h. Abschnitte der Kreisscheibe begrenzt.

Für jeden Streifen parallel zu der der jeweiligen Drehachse senkrechten Achse lässt sich entsprechend der Gl. (II.30) das bei gegebener Verdrillung auftretende Moment bestimmen.

Beide Momente werden addiert. Da im Zentrum, d.h. dort wo sich die beiden Streifen überdecken, für diesen Bereich das Moment doppelt erfasst worden ist, ist die Momentengröße dieses Überdeckungsquadrates von obiger Summe einmal abzuziehen und man erhält das Gesamtmoment wie folgt:

$$M_{ges} = M_v^b + M_u^d - M_{i\phi}^{bd} \quad (II.41)$$

Werden die Schnitte schliesslich so gelegt, dass diese durch die Lastpunkte laufen, so erhält man das Moment der ganzen Scheibe. Werden die Schnitte innerhalb der Lastpunkte gelegt, so lässt sich wie unten gezeigt wird, die Verwölbung bzw. die örtliche Drillung der Scheibe auf diesem Wege bestimmen. Es sollen zunächst jedoch die Verhältnisse bei der ganzen Scheibe untersucht werden. Für einen Streifen begrenzt einerseits durch die zur jeweiligen Drillachse senkrechte Achse und die zu dieser parallelen Lastpunktlinie die im Abstand $L/2$ verläuft gilt

$$M_u = \frac{N\psi}{\int_0^{L(u)} \frac{\partial u}{l(u)}}$$

Für die u -Achse der Drehachse ist $l(u)$ die örtliche Streifenlänge und hat den Wert

$$l(u) = 2 \sqrt{\frac{D_a^2}{4} - u^2} \quad (\text{II.42})$$

womit sich für M ergibt

$$M_u = 2N\psi \frac{1}{\int_0^{\sqrt{\frac{D_a^2}{4} - u^2}} \frac{\partial u}{\sqrt{\frac{D_a^2}{4} - u^2}}} \quad (\text{II.43})$$

Das Integral hat den Wert

$$\int_0^{1/2} = \arcsin \frac{2u}{D_q} \Big|_0^{1/2}$$

und ergibt für die angegebenen Grenzen

$$\int_0^{1/2} = \frac{H}{4}$$

so dass man für das Moment erhält

$$M = \frac{8}{H} \cdot N \psi \quad (\text{II.44})$$

Ersetzt man ψ durch den Federweg ($2h$) so erhält man mit (I.9)

$$M_u = \frac{8}{H} N \frac{2h}{L} \quad (\text{II.45})$$

Dann wird mit (II.34) das Gesamtmoment

$$M_{\text{ges}} = \frac{16}{H} \cdot N \frac{2h}{L} - 2N \frac{2h}{L}$$

bzw.

$$M_{\text{ges}} = 2N \frac{2h}{L} \left(\frac{8}{H} - 1 \right)$$

oder N ausgeschrieben und für $G \rightarrow E$ gesetzt.

$$M_{\text{ges}} = \frac{1,55}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L} \left(1 - \frac{0,63}{n} \right) (2h) \quad (\text{II.46})$$

Aus dem Moment der äusseren Kräfte kann man wiederum den Tragfähigkeitsanteil der Drillschubspannungen ermitteln. Es ist dann

$$P_{D\phi} = 2 \cdot \frac{1,55}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{l^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) \quad (\text{II.47})$$

Ersetzt man schliesslich noch den Abstand der Lastpunkte durch den Scheibendurchmesser, so ist mit

$$l^2 = \frac{D_a^2}{2} \quad (\text{II.48})$$

$$\left(P_{D\phi} = \frac{22 \cdot 1,55}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D_a^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) \right)$$

oder

$$P_{D\phi} = 2,065 \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D_a^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) \quad (\text{II.49})$$

Vergleicht man die gefundene Gl. (II.49) mit der analogen aus der Plattentheorie (II.8), setzt wieder $u_0 = h$ und vernachlässigt bei (II.49) das zweite Glied in der Klammer, so ergibt sich bei letzterer ein Zahlenbeiwert von 2.065 bei der Gl. (II.8) ist der entsprechende Beiwert 2,095. Unter Beachtung des

oben im gleichen Zusammenhang bei der quadratischen Platte Gesagten kann man auch hier von einer sehr guten Übereinstimmung beider Ergebnisse sprechen.

Die max. Schubspannung ergibt sich analog (II.40a) zu

$$\tau_{\max} = 2 \frac{Em}{m+1} \frac{d}{D^2} (2h) \quad (\text{II.40b})$$

2.2.3 Näherungslösung für die ganze Federplatte

Im Verlauf der Entwicklungsarbeiten an der Feder war für die Bestimmung des Momentes bzw. der Tragfähigkeit noch eine recht brauchbare Näherungslösung gefunden worden. Sie soll der Vollständigkeit halber hier gebracht werden.

Bei einem parallel zur Drehachse berandeten Streifen ist das Moment nach (II.27)

$$M = Nl \vartheta$$

Bei einem Streifen dessen Berandung nicht parallel zur Drehachse ist, ist in einem beliebigen Schnitt der Lage $u = i$

$$M = Nl_i \vartheta_i$$

oder allgemein geschrieben

$$M = Nl_{(u)} \vartheta_{(u)}$$

Das Moment hat längs der Drillachse einen konstanten Wert.

Unterstellt man, dass die Drillung \mathcal{V} , wie bei der quadratischen Federplatte, über die ganze Fläche ebenfalls einen konstanten Wert hat, was in erster Näherung zulässig ist, also den Wert \mathcal{V}_m hat, dann gilt

$$M = Nl; \mathcal{V}_i = Nl_m \cdot \mathcal{V}_m$$

oder

$$\boxed{M = Nl_m \mathcal{V}_m} \quad (\text{II.50})$$

Das bedeutet, dass man mit einer mittleren Länge des Streifens rechnen kann. Es ergab sich, dass die am besten mit der Messung übereinstimmenden Werte dann gefunden werden, wenn der integrale Mittelwert über die Breite des Streifens gebildet wurde.

Dann ist

$$l_m = \frac{\int_0^u l(u) \partial u}{\Delta u}$$

bzw. das Moment

$$\boxed{M = N \mathcal{V}_m \frac{\int_0^u l(u) \partial u}{\Delta u}} \quad (\text{II.51})$$

Für die kreisrunde Platte setzt man

$$\int_0^{D/2} l(u) \partial u = \frac{\pi D^2}{8}$$

und

$$\Delta u = \frac{L}{2}$$

oder nach (II.48)

$$\Delta u = \frac{D}{2\sqrt{2}}$$

und erhält für l_m

$$l_m = \frac{HD}{4} \sqrt{2}$$

Mit ν nach Gl. (I.11) und N nach (II.20) ergibt sich

$$M = \frac{2H}{12} \sqrt{2} G d^3 \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) \frac{D}{L^2} (2h)$$

Schreibt man für $L \rightarrow D_a$ nach (II.48) und ersetzt ausserdem G durch E , so ergibt sich

$$M_{D\phi} = \frac{\sqrt{2}H}{6} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D_a} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) \quad (\text{II.52})$$

Dieses Moment dem der äusseren Kraft gleichgesetzt, also

$$M = \frac{PD_a}{2\sqrt{2}}$$

gesetzt, ergibt

$$P_{D\phi} = \frac{2}{3} H \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) \quad (\text{II.53})$$

Wie man unter Beachtung des vorausgehend Gesagten vergleichsweise sofort sehen kann, besteht in diesem Fall zwischen obiger Beziehung (II.53) und der Gl. (II.8) nach der Plattentheorie völlige Identität, so dass das Näherungsverfahren als zulässig angesehen werden kann.

2.2.4 Die Drillung der kreisförmigen Platte

Für die bisherigen Herleitungen der Beziehungen für die kreisrunde Federscheibe war die Drillung \mathcal{J} als über die ganze Fläche der Platte konstant angenommen worden. Es wäre nunmehr zu untersuchen, wie sich die Drillung der Scheibe tatsächlich einstellt bzw. wie weit die Annahme einer konstanten Drillung zulässig bzw. fehlerhaft ist.

Für diese Betrachtung wird auf die vorausgegangene Untersuchung, wonach die Platte entsprechend Abb. 13 kreuzweise in gleich breite Streifen aufgeteilt wird, bzw. es wird auf den Streifen nach Abb. 11 zurückgegriffen.

Für einen solchen Streifen ergab sich bei einer Verdrillung um die u -Achse und die Streifenbreite in Richtung der u -Achse ein Verdrillungswinkel entsprechend (II.29) von

$$\psi \Big|_0^u = \frac{M}{N} \int_0^u \frac{\partial u}{(u)}$$

Mit $l(u)$ für die Kreisscheibe nach (II.42) ergibt sich

$$\boxed{\psi \Big|_0^u = 2 \frac{M}{N} \arcsin \frac{2u}{D_a} \Big|_0^u} \quad (\text{II.54})$$

Kennzeichnend für den Verlauf von $\psi = \psi(u)$ ist lediglich der arc sin Ausdruck. Zur Veranschaulichung ist der Verlauf des arc sin für das Verhältnis $\lambda = 2u/D$ in Abb. 14 dargestellt.

Betrachtet man einen Schnitt entsprechend der Linie a-a in Abb. 12 in Richtung der v-Achse, so wird man feststellen, dass dieser bei der Verdrillung der Scheibe der strichpunktierten Linie Abb. 15 entsprechend verbogen ist.

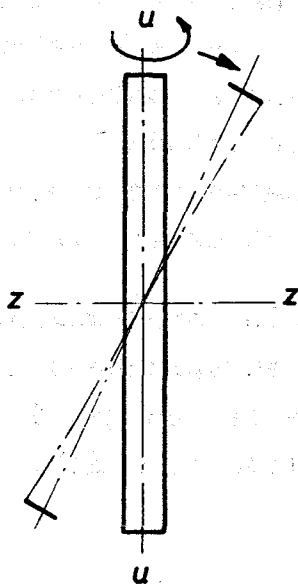


Abb. 15

Da die Verdrillung sowohl um die u-Achse, als auch die v-Achse gleichzeitig erfolgt, überlagern sich beide Verformungen, so dass auf eine Seite der Platte draufgesehen in je zwei gegenüberliegenden Quadranten die Platte leicht ausgebuckelt in den beiden anderen Quadranten eingedellt ist.

Dies bedeutet, dass die kreisförmige Platte bei der Verformung ganz schwach von der Fläche des hyperbolischen Paraboloides abweicht, die Abweichungen selbst sind gering.

Aus diesen Abweichungen ergeben sich jedoch gewisse Folgerungen für die Grösse der örtlichen Schubspannungen, die der Vollständigkeit halber qualitativ diskutiert werden sollen.

Wie bekannt ist (Gl. I.7)

$$\mathcal{J} = \frac{d\psi}{du}$$

Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt den Verlauf der Kurve Abb. 14, so sieht man sofort, dass \mathcal{J} für niedrige Werte von λ , d.h. auf der Innenfläche der Scheibe geringere Werte hat als bei hohen λ -Werten, d.h. in den Randzonen. Da die Schubspannungen linear von \mathcal{J} abhängen bedeutet dies, dass diese im Zentralbereich der Scheibe geringer sein werden, als in deren Randpartien.

Für sehr exakte Spannungsanalysen einer Federplatte ist daher fallweise auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen und zwar so, dass man nach obigem Verfahren die Verdrillung in den Randpartien und damit die dort entstehenden örtlichen Spannungen bestimmt.

Auch bei der Ermittlung der zusätzlichen Normalspannungen bzw. deren Momente wird die veränderte Drillung von Einfluss sein.

2.3 Normalspannungen und deren Momente bzw. Kräfte

2.3.1 Die quadratische Platte

Das Verfahren zur Ermittlung der bei Belastung bzw. bei der Durchfederung der Hypo-Feder zusätzlich zu den Schubspannungen noch entstehenden Normalspannungen und deren Momente stützt sich auf folgende Gedankengänge.

Bei der Verdrillung der Federplatte um eine Symmetrieachse um Beträge die mit der Plattendicke vergleichbar sind, werden die zur Drehachse parallelen Fasern mit zunehmendem Abstand von

dieser immer grössere Winkel zur Ausgangslage einschliessen. (Hierzu die Ausführungen von Weber S. 60 und 61). Dementsprechend werden die verschiedenen Fasern unterschiedlich gedehnt. Aus diesen Dehnungen lassen sich die Spannungen für die verschiedenen Faserabstände ermitteln. Betrachtet man zunächst eine quadratische Platte, die um die u-u-Achse verdrillt wird und nimmt für die Betrachtung an, dass die zur v-v-Achse parallelen Aussenkanten der Platte in irgend einer Art und Weise festgehalten seien, so dass diese sich nur in einer zur v-Achse senkrechten Ebene der Ausgangslage bei der Verdrillung bewegen können, dann gelten für eine Faser im Abstand v die nachfolgenden Zusammenhänge.

Nach Abb. 16 ist die Abweichung eines diskreten Punktes A von seiner Ausgangslage A' von der Grösse Z. Dann ist der Winkel ψ zwischen den von beiden Punkten zur u-Achse geführten Normalen wie folgt gegeben:

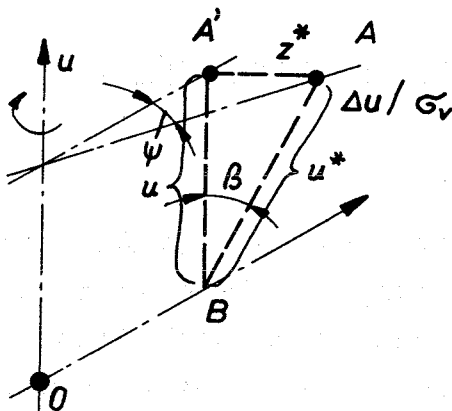


Abb. 16

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{z^*}{v}$$

Ausserdem ist wie ersichtlich

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z^*}{u}$$

damit

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{u} \operatorname{tg} \psi$$

Da in den betrachteten Bereichen der Verdrillung der Bogen = tg gesetzt werden kann, ergibt sich

$$\beta = \frac{v}{u} \psi$$

Da analog (I.8) gilt

$$\psi = u \vartheta$$

ergibt sich schliesslich

$$\boxed{\beta = v \vartheta} \quad (\text{II.55})$$

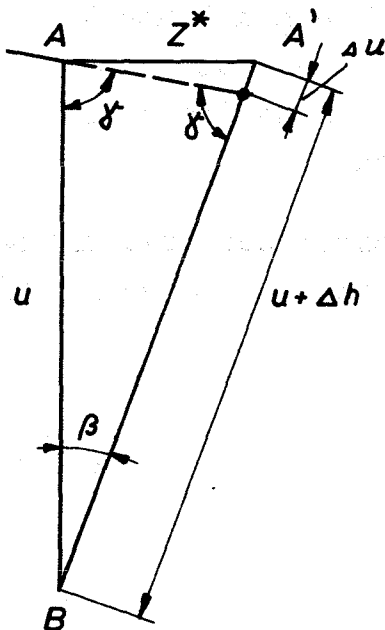
Die Länge der Faser in der Ausgangslage ist u , in der Lage der Verschiebung hat diese die Länge u^* und zwar ist

$$u^* = u + \Delta u$$

Die relative Dehnung der Faser ist damit

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta u}{u + \Delta u}$$

Sie ergibt sich, wenn in Abb. 17 das durch die Linien A-B-A' geschaffene Dreieck näher betrachtet.



Durch die Verschiebung von A nach A' ergeben sich 2 Dreiecke für die die folgenden Beziehungen gelten

$$\sin \beta = \frac{z^*}{u + \Delta u}$$

$$2 \delta = 180 - \beta$$

$$\delta = 90 - \beta/2$$

weiter gilt

$$\frac{\Delta u}{\sin(90 - \delta)} = \frac{z^*}{\sin(180 - \delta)}$$

Abb. 17

Nun ist $90-\gamma = \beta/2$ und $180-\gamma = 90 + \beta/2$

Setzt man Z^* in den beiden Beziehungen gleich, so ergibt sich

$$\frac{\Delta u}{u + \Delta u} = \frac{\sin \beta \sin \beta/2}{\sin 90 + \beta/2}$$

Schreibt man für den \sin den Bogen und für $\sin(90 + \beta/2)$ näherungsweise 1 so erhält man

$$\boxed{\varepsilon_u = \frac{\Delta u}{u + \Delta u} = \frac{1}{2} v^2 \vartheta^2} \quad (\text{II.56})$$

Für die v -Achse als Drillachse schreibt sich die Dehnung analog zu

$$\boxed{\varepsilon_v = \frac{\Delta v}{v + \Delta v} = \frac{1}{2} u^2 \vartheta^2} \quad (\text{II.57})$$

Diese letzte Vereinfachung ($\sin(90 + \beta/2) \approx 1$) ist jedoch nur dann zulässig, wenn es sich um kleine Verdrillungen handelt. Bei sehr grossen Verdrillungen kann die Vernachlässigung, besonders bei Materialien mit kleinem E-Modul, zu Fehler führen die ggfs. zu beachten sind. Bei Stahlfedern wird man sich fast immer im Zulässigkeitsbereich befinden.

Der Verlauf der Dehnung in einer zur Drillachse senkrechten Richtung ergibt sich durch eine einfache Umrechnung

$$\boxed{\frac{d\xi}{dv} = u \cdot v \vartheta^2} \quad (\text{II.58})$$

$$\boxed{\frac{d\eta}{dv} = v \cdot u \vartheta^2} \quad (\text{II.59})$$

wenn mit ξ die Dehnungen in u-Richtung und mit η diejenigen in v-Richtung bezeichnet werden.

Für den ebenen zweiachsigen Spannungszustand gilt für den Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderung, Föppl Drang und Zwang III. 1947, S. 9 [9]

$\epsilon_u = \frac{1}{E} \left(\sigma_u - \frac{1}{m} \sigma_v \right)$	(II.60)
$\epsilon_v = \frac{1}{E} \left(\sigma_v - \frac{1}{m} \sigma_u \right)$	
$\gamma = \frac{d\xi}{dv} + \frac{dn}{du} = \frac{\tau}{G}$	

Damit können die Spannungen σ_u , σ_v und τ ermittelt werden.

Zunächst ergeben sich durch Umformen der beiden ersten Gl. v. (II.59) Ausdrücke für die Spannungen. Diese sind

$\sigma_u = \frac{Em}{m^2-1} (\epsilon_v + m \epsilon_u)$	(II.61)
---	---------

$\sigma_v = \frac{Em}{m^2-1} (\epsilon_u + m \epsilon_v)$	(II.62)
---	---------

Durch Einführung der Dehnungsgrößen aus (II.56) bzw. (II.57) ergibt sich

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2 - 1} \mathcal{J}^2 (u^2 + m v^2)$$

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2 - 1} \mathcal{J}^2 (v^2 + m u^2)$$

und für die Schubspannung mit

$$\tau = \frac{Em}{m+1} u v \mathcal{J}^2 \quad (\text{II.63})$$

Die Gesamtkraft die bei den gemachten Voraussetzungen von der Aussenkante der Platte auf eine imaginäre Halterung ausgeübt wird ergibt sich aus

$$Z_u = \int \sigma_u dF = \int \sigma_u \cdot d \partial v$$

Da die Platte völlig symmetrisch ist, ist für beide Achsen die Kraft die gleiche. Es ist daher nur notwendig, eine der beiden anzuschreiben. Es ist daher

$$Z_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2 - 1} \mathcal{J}^2 d \left[u^2 \int \partial v + m \int v^2 \partial v \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

Für das erste Integral ergibt sich

$$\int \partial v = v$$

und entsprechend für das zweite Integral

$$m \int v^2 dv = m \frac{v^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}$$

die Grenzen eingeführt, ergibt sich dann für die Gesamtkraft

$$Z = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 d \left[u^2 \cdot l + m \frac{l^3}{12} \right] \quad (\text{II.64})$$

Diese Gesamtkraft wirkt effektiv jedoch nicht auf eine ausserhalb der Platte befindliche imaginäre Halterung, sondern muss innerhalb der Platte durch die den eingepprägten Spannungen entgegenwirkende Spannungen aufgenommen werden. Da die mit den Normalspannungen gleichzeitig entstehenden Schubspannungen zu dieser Gesamtkraft keinen Beitrag liefern, diese also ihren Wert behalten, ergibt sich, dass der Verlauf der Normalspannungen bei der Übernahme der Gesamtkraft durch innere Spannungen nicht verändert werden darf. Das ist nur dann der Fall, wenn die inneren Gegenspannungen über den ganzen Querschnitt gleiche Höhe haben. Die entgegenwirkenden Spannungen ergeben sich dann zu

$$\sigma_z = - \frac{Z}{F}$$

also

$$\sigma_z = - \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 \left[u^2 + m \frac{l^2}{12} \right]$$

Die örtliche Effektivspannung ist dann

$$\sigma_u = \sigma_{u_1} + \sigma_{u_2}$$

also

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \nu^2 \left[u^2 + mv^2 - u^3 - m \frac{l^2}{12} \right]$$

Damit werden die örtlichen Normalspannungen

$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \nu^2 \left[v^2 - \frac{l^2}{12} \right]$	(II.65)
$\sigma_v = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \nu^2 \left[u^2 - \frac{l^2}{12} \right]$	(II.66)

Den Verlauf der Spannung über der Plattenbreite zeigt Abb. 18.

Dieser Verlauf hat 3 ausgezeichnete Punkte.

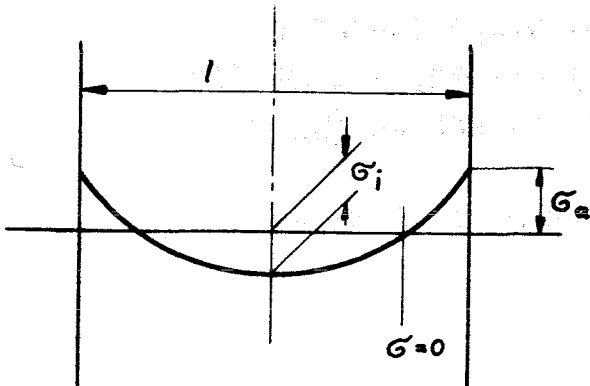


Abb. 18

- 1) Den Aussenrand, d.h. $v = l/2$.
Dann ergibt sich

$\sigma_{ua} = \frac{1}{12} \frac{Em^2}{m^2-1} \nu^2 l^2$	(II.67)
---	---------

- 2) Den Mittelpunkt der Platte, d.h. $v = 0$
hier wird

$\sigma_{ui} = -\frac{1}{24} \frac{Em^2}{m^2-1} \nu^2 l^2$	(II.68)
--	---------

Man sieht, dass die Spannung in der Mitte der Scheibe nur den halben Betrag der Randspannung erreicht.

- 3) Der Ort für den die Spannung $\sigma = 0$ wird.
Dies ist dann der Fall, wenn der Klammerausdruck Null ist.

Also

$$v_0^2 = \frac{l^2}{12}$$

bzw.

$$v_2 = \frac{l}{\sqrt{12}} = 0,2885 l \quad (\text{II.69})$$

Aus diesen Spannungen kann nunmehr das Moment bzw. der Tragfähigkeitsanteil ermittelt werden. Da die Schubspannungen parallel zu den Drillachsen verlaufen, liefern diese zu dem Moment keinen Beitrag. Die Normalspannungen dagegen liefern ein Moment, das sich wie folgt ermitteln lässt.

Momente

Nach Weber S 63 (193) ist das von den Normalspannungen herrührende Moment, z.B. um die u-Achse, wie sich auch leicht unter Zuhilfenahme der Abb. 16 ermitteln lässt

$$M_u = \int v \sin \beta \cdot G_v \cdot dF \quad (\text{II.70})$$

Hierin sind

$$dF = d \cdot \partial v$$

$$\sin \beta = \sin v \vartheta \quad \text{oder näherungsweise}$$

$$\sin \beta = v \vartheta$$

Mit (II.64) für σ_u wird das Moment

$$M_u = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \vartheta^3 d \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left(v^4 - \frac{l^2}{12} v^2 \right) \partial v$$

Das Integral ergibt ausgewertet für die angeschriebenen Grenzen $-\frac{l}{2} \div +\frac{l}{2}$

$$\int = \frac{l^5}{180}$$

so dass das Moment wird

$$M_u = \frac{1}{360} \frac{Em^2}{m^2-1} l^5 d \vartheta^3 \quad (\text{II.71})$$

Kräfte

Dieses Moment ist dem der äusseren eingprägten Kräfte gleich und es ergibt sich

$$M_N = \frac{P_N l}{2} = \frac{1}{360} \frac{Em^2}{m^2-1} l^5 d \vartheta^3$$

ersetzt man ϑ nach (I.11) durch (2h), so erhält man schliesslich

$$P_{N\phi} = \frac{2}{45} \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d}{l^2} (2h)^3 \quad (\text{II.72})$$

Damit wird die Gesamttragfähigkeit einer quadratischen ebenen Scheibe

$$P_{\Phi} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) + \frac{2}{45} \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d}{L^2} (2h)^3 \quad (\text{II.73})$$

2.3.2 Die kreisrunde Platte

Die Normalspannungen der kreisrunden Federplatte und die aus dieser resultierenden Momente bzw. Kräfte lassen sich auch hier unter Zuhilfenahme der Beziehungen des gleich breiten Streifens (II.70) ermitteln.

Entsprechend ist für die u-Achse als Drillachse im vorliegenden Fall

$$M_{uN} = \frac{1}{360} \frac{Em^2}{m^2-1} d L(u)^5 \vartheta_u^3$$

Durch Umstellen und mit der Abkürzung

$$M_{uN}^* = \frac{M_{uN} \cdot 360 (m^2-1)}{Em^2 d}$$

erhält man

$$\vartheta_u^3 = M_{uN}^* \cdot \frac{1}{L(u)}$$

Mit (III.29) für $l(u)$ ergibt sich

$$\mathcal{J}_u^3 = M_{u_N}^* \cdot \frac{1}{2^5 \sqrt{\left(\frac{D^2}{4} - u^2\right)^5}}$$

oder

$$\mathcal{J}_u = M_{u_N}^{* 1/3} \cdot \frac{1}{2^{5/3} \left(\frac{D^2}{4} - u^2\right)^{5/6}}$$

mit $\mathcal{J}_u = \frac{\partial \psi}{\partial u}$ ergibt sich dann

$$\partial \psi = M_{u_N}^{* 1/3} \frac{1}{2^{5/3}} \frac{1}{\left(\frac{D^2}{4} - u^2\right)^{5/6}} \partial u \quad (\text{II.74})$$

Das Integral der rechten Seite ist geschlossen nicht lösbar. Der Integrand wird deshalb in eine lösbare Form umgebildet und geschrieben

$$\frac{1}{\left(\frac{D^2}{4} - u^2\right)^{5/6}} = \frac{1}{\left(\frac{D}{2}\right)^{5/3}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{4h^2}{D^2}\right)^{5/6}}$$

Der Ausdruck $\frac{2h}{D}$ kann Werte erreichen von $(0 \div 1/\sqrt{2}) = 0 \div 0,707$. Dann ergeben sich für den Klammerausdruck Werte von $+1 \div +0,5$. Da der Exponent $5/6$ relativ nahe bei 1 liegt, kann er evtl. durch 1 ersetzt werden und die Klammer mit einem Faktor vorgesehen werden. Zu diesem Zweck bildet man mit Hilfe einer Kurvendarstellung für den oben angegebenen Wertebereich den Quotient aus den Ausdrücken $\left(1 - \frac{4h^2}{D^2}\right)^{5/6}$ und $\left(1 - \frac{4h^2}{D^2}\right)^1$.

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{4h^2}{D^2}\right)^{5/6}}$$

Es ergab sich, dass obiger Ausdruck sich näherungsweise ersetzen lässt durch den Ausdruck

$$\left(1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{4h^2}{D^2}\right)^{1/6}}\right) \cdot F$$

Für den interessierenden Bereich wurde der Faktor F mit $F = 0,8$ ermittelt.

Damit ergab sich der Ersatzausdruck

$$\boxed{\frac{1}{\left(1 - \frac{4h^2}{D^2}\right)^{5/6}} \approx 0,2 + \frac{0,8}{1 - \frac{4h^2}{D^2}}} \quad (\text{II.75})$$

oben eingeführt ergibt sich

$$\psi \int_0^u = M_{uN}^{*1/3} \frac{1}{D^{5/3}} \int_0^u \left(0,2 + \frac{0,8}{1 - \frac{4u^2}{D^2}}\right) du$$

und daraus

$$\psi \int_0^u = M_{uN}^{*1/3} \frac{1}{D^{5/3}} \left[0,2u + 0,2D \ln \frac{D/2+u}{D/2-u}\right]_0^u$$

Setzt man die obere Grenze $u = \frac{D}{2\sqrt{2}}$ ein, so ergibt sich

$$\psi_0^{D/2\sqrt{2}} = 0,2 M_{uN}^{*1/3} \frac{1}{D^{2/3}} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]$$

bzw.

$$\psi = 0,429 M_{uN}^{*1/3} \frac{1}{D^{2/3}}$$

Die Abkürzung für M_{uN}^* eingeführt ergibt

$$\psi = 0,429 \left[\frac{M_{uN} \cdot 360 (m^2 - 1)}{E m^2 d} \right]^{1/3} \frac{1}{D^{2/3}}$$

Führt man wieder ein $\psi = \frac{(2h)\sqrt{2}}{D}$ und stellt die Gl. um, so erhält man für das Moment um die u-Achse schliesslich

$$M_{uN} = \frac{35,9}{360} \frac{E m^2 d}{(m^2 - 1) D} \cdot (2h)^3 \quad (\text{II.76})$$

Für anfängliche Rechnungen wurde bez. der Normalspannungen mit einer Näherungslösung gearbeitet, die recht befriedigende Ergebnisse brachte und die wie folgt zustande kam:

Zur Berechnung des Normalspannungsmomentes führte man als erste Näherung eine der kreisrunden flächengleichen quadratischen Platte, deren Kantenlänge L_x ist, ein und rechnet die Normalspannungen und Momente für diese quadratische Platte.

Das Moment ist entsprechend

$$M = \frac{1}{360} \frac{E m^2}{m^2 - 1} (L_x)^5 d \cdot \mathcal{J}_m^3$$

Die Ersatzlänge ergibt sich aus

$$L_x^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

mit diesen Werten und dem Wert von

$$\mathcal{J}_m = \frac{4(2h)}{D^2}$$

ergibt sich das Moment zu

$$M_{u\phi} = \frac{1}{180} \pi^{5/2} \frac{E m^2 d}{m^2 - 1} \frac{1}{D} (2h)^3 \quad (\text{II.77})$$

Mit $\pi \frac{5}{2} = 17,5$ ergibt sich hier der Zahlenfaktor zu $35/360$. Oben ergab er sich zu $35,9/360$. Wie man sieht eine sehr gute Übereinstimmung des Ergebnisses der beiden Rechenverfahren. Die Tragfähigkeit ergibt sich damit zu

$$P_N = \frac{35,9 \cdot \sqrt{2}}{180} \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d}{D^2} (2h)^3 \quad (\text{II.78})$$

Mit (II.53) und (II.78) ergibt sich nunmehr die Gesamttragfähigkeit der kreisrunden ebenen Platte zu

$$P_{\phi ges} = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) + 0,282 \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d}{D^2} (2h)^3 \quad (\text{II.79})$$

Eine Nachprüfung der Formeln (II.73) für quadratische und (II.79) für kreisrunde ebene Platten ergab gewisse gesetzmässige Abweichung zwischen Messung und Rechnung deren Ursache darin zu suchen ist, dass die bei der Verformung tatsächlich auftretenden Verdrillungen von der der Rechnung zugrunde gelegten mittleren Verdrillung abweichen. Auf diesen Sachverhalt soll später noch im einzelnen eingegangen werden.

Nachzuholen wäre an dieser Stelle noch die Ermittlung der Normalspannungen.

Diese ergeben sich aus der Beziehung (II.65) und (II.66) wenn man dort die jeweiligen Werte für v bzw. u einführt. Für \mathcal{J} schreibt man das mittlere \mathcal{J}_m mit

$$\mathcal{J}_m = 4 \frac{(2h)}{D^2}$$

und erhält

$$\sigma_{u;(v)} = 8 \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{(2h)^2}{D^4} \left(v^2 (u^2) - \frac{L^2(u)(v)}{12} \right) \quad (\text{II.80})$$

Durch Überlagern der beiden am gleichen Ort jedoch senkrecht zueinander wirkenden Spannungen ergibt sich die effektive Spannung nach Richtung und Grösse.

Für eine exakte Bestimmung der örtlichen Normalspannung kann man mit Hilfe von (II.54) die örtliche Drillung \mathcal{J} ermitteln und mit dieser nach (II.64; II.65) dann die Spannungen aufsuchen.

2.4 Die vorverwölbte Platte

Die verwölbte Platte ist in ihrem spannungslosen Ausgangszustand bereits um das Mass $(2h)$ durchgewölbt.

Sie wird durch die Belastung zur ebenen Platte hinführend verformt.

Bei dieser Verformung entstehen, wie bei der Platte mit ebenem Ausgangszustand, wieder 2 Arten von Momenten.

1. Die von den Schubspannungen herrührenden und
2. die von den Normalspannungen kommenden Zusatzmomente.

Da die Schubspannungsmomente in Ebenen entstehen, die senkrecht zu den Drillachsen liegen, ist es für die Grösse des Momentes gleichgültig in welcher Lage sich

benachbarte Schubebenen zueinander befinden. D.h. die Schubmomente für die verwölbte Platte, bei der benachbarte Ebenen etwas gegeneinander verschoben sind, sind dann die gleichen wie die bei der ebenen unverwölbten Platte. Ebenso die aus diesen hergeleiteten äusseren Kräfte.

Anders ist das jedoch bei den Zusatzmomenten aus den Normalspannungen und zwar entsprechend folgender Zusammenhänge.

Im verwölbten Ausgangszustand ist die Platte spannungslos. Hier sind Momente und äussere Kräfte Null. Bei der Durchfederung zur Ebene hin entstehen in gleicher Weise wie bei der Auslenkung der ebenen Platte zusätzliche Normalspannungen. Diese Normalspannungen wirken jedoch an einem Hebelarm, der mit zunehmender Verformung immer kleiner wird, um beim Erreichen des ebenen Zustandes ganz 0 zu werden.

In diesem Punkt werden also die Zusatzmomente ebenfalls 0. Das bedeutet, dass hier nur noch das reine Drillschubspannungsmoment wirkt.

Die Kennlinie der Platte schneidet daher die Gerade der Drill-Schubmomente an 2 Punkten, und zwar einmal im Ausgangspunkt und dann, wenn die Platte zur Ebene verformt ist. Es genügt daher zur Ermittlung der Kennwerte, sowohl der quadratischen als auch der kreisrunden Platte, die Zusatzmomente für den verwölbten Zustand zu ermitteln. Die Bestimmung dieser Momente geschieht nach folgender grundsätzlicher Überlegung.

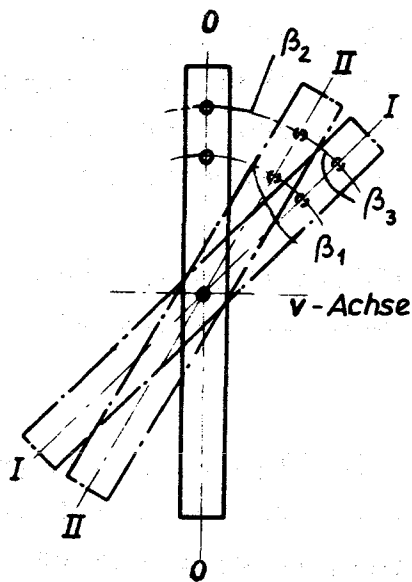


Abb. 19

Die nebenstehende Abb. 19 zeigt einen Schnitt durch die Platte parallel zur u-Achse im Abstand v von dieser. Die mit 0-0 bezeichnete Lage ist die der ebenen Platte. Die mit I-I bezeichnete Lage ist die Ausgangslage der vorverwölbten Platte. Die Lage II-II ist eine Zwischenlage; sie entspricht einer gewissen an sich beliebigen Verformung. Die Verdrehwinkel sind:

β_1 = der Winkel zwischen der vorverwölbten Lage (Ausgangslage) und der Lage der ebenen Platte.

β_2 = der Winkel zwischen der Zwischenlage und der Lage der ebenen Platte.

β_3 = der Winkel zwischen dem der Ausgangslage der vorverwölbten Platte und dem der Zwischenlage.

Es ist also

$$\beta_3 = \beta_1 - \beta_2$$

Die Grösse der Winkel β_1 ; β_2 ; β_3 ist wie oben analog definiert.

$$\beta_1 = \nu_1 u; \quad \beta_2 = \nu_2 \cdot u; \quad \beta_3 = \nu_3 u$$

Basis der Rechnung ist der Zustand der Lage 0-0, also die ebene Platte. Ausgangslage ist die Lage I-I. In diesem Zustand ist aufgrund der praktischen Verformung die Platte spannungslos.

Bezogen auf die Rechnungsbasis, die Lage 0-0, hat die Platte jedoch eine Verformung erlebt. Für die Rechnung wird nun so vorgegangen, dass unterstellt wird, dass diese Verformung in der Platte erhalten bleibt und eine dieser entsprechende Spannung dort als konstante Spannung σ_1 weiterbesteht.

Wird die Platte in gleicher Weise in eine Zwischenlage II-II verformt, so besteht dann in dieser Lage die Spannung σ_2 .

Die Differenz beider Spannungen ist dann die Spannung σ_3 , die bei der Verformung der Platte aus der Lage I-I in die Lage II-II entsteht, d.h. die gesuchte Grösse, die zur Ermittlung des Momentes erforderlich ist.

Es ist also

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (\text{II.81})$$

Nach Gl.(II.66) gilt für die Spannungen allgemein

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \nu^2 \left[u^2 - \frac{L^2}{12} \right]$$

Damit wird

$$\sigma_{v3} = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \left[u^2 - \frac{L^2}{12} \right] \left[\nu_1^2 - \nu_2^2 \right] \quad (\text{II.82})$$

Dann ergibt sich das Moment analog zur bekannten Beziehung zu

$$M_N = \int u \cdot \sin \beta_2 \sigma_3 dF$$

$$\text{mit } \beta = \vartheta_2 \cdot u$$

$$dF = d \cdot \partial u$$

und man erhält $\sin \beta_2 \approx \vartheta_2 \cdot u$

$$M_{Nv} = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} d \vartheta_2 (\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2) \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} u^2 \left(u^2 - \frac{l^2}{12} \right) \partial u$$

Bezieht man die jeweiligen Drillungen ϑ_2 auf die max. Drillung, die ja durch die Vorverwölbung festgelegt ist, mit

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \varphi^* \quad \text{bzw. } \vartheta_2 = \varphi^* \cdot \vartheta_1$$

so erhält man

$$M_{Nu} = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} d \vartheta_1^3 \varphi^* (1 - \varphi^{*2}) \int_{-l(u)/2}^{+l(u)/2} u^2 \left(u^2 - \frac{l^2}{12} \right) \partial u$$

Führt man noch ein

$$\vartheta_1 = 2 \frac{2h_0}{l^2} \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = 2 \frac{2h_0 - 2h}{l^2}$$

wenn l der Abstand der Lastpunkte, $2h_0$ der gesamte Verwölbungspfeil im unbelasteten Zustand und $2h$ der momentane Federweg ist, so erhält man

$$\varphi^* = 1 - \frac{2h}{2h_0}$$

(II.83)

oder mit

$$2h/2h_0 = \varepsilon$$

$$\boxed{\varphi^* = 1 - \varepsilon} \quad (\text{II.84})$$

Zur Vereinfachung führt man ein

$$\boxed{\varphi^*(1 - \varphi^{*2}) = H(\varphi)} \quad (\text{II.85})$$

und erhält

$$\boxed{M_{Nu} = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} d \nu^3 H(\varphi^*) \int_{-l(u)/2}^{+l(u)/2} u^2 \left(u^2 - \frac{l^2}{12} \right) du} \quad (\text{II.86})$$

Die Fkt. $H(\varphi^*)$ ist in Abb. 20 angefügt.

Mit diesen Beziehungen können nunmehr die effektiven Momente sowohl für die quadratische als auch kreisförmige Platte bequem ermittelt werden.

Die Normalspannungen in der Platte ergeben sich dann analog Gl. (II.65) und Gl. (II.66) zu

$$\boxed{\sigma_{v_3} = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \left[\frac{u^2}{(v^2)} - \frac{l^2}{12} \right] \nu_1^2 (1 - \varphi^{*2})} \quad (\text{II.87})$$

sie erreichen dann, wenn φ^* gleich 0 wird oder $2h/2h_0 = 1$ ihren Höchstwert und zwar den Wert, der bei einer ebenen Platte gleicher Grösse und gleicher Verformung entsteht.

2.4.1 Die quadratische Platte

Das Moment für die quadratische Platte ergibt sich, wenn $L(u) = L$ gesetzt wird, durch Integration über den angegebenen Grenzen.

$$M_{N_u} = \frac{1}{360} \frac{Em^2}{m^2-1} d L^5 \mathcal{J}_1^3 H(\varphi)^* \quad (\text{II.88})$$

Durch Vergleich der Beziehung (II.88) mit (II.71) sieht man sofort, dass sich diese nur durch die Fkt. $H(\varphi)^*$ unterscheiden.

Das Moment ist dem der äusseren Kräfte gleichzusetzen, so dass sich, wenn man \mathcal{J}_1 durch $(2h_0)$ ersetzt, ergibt

$$P_{N\phi} = \frac{2}{45} \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d}{L^2} H(\varphi)^* (2h_0)^3 \quad (\text{II.89})$$

Die Gesamttragfähigkeit der quadratischen verwölbten Platte wird mit (II.38) somit

$$P_{\phi \text{ ges.}} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h) + \frac{2}{45} \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d}{L^2} H(\varphi)^* (2h_0)^3 \quad (\text{II.90})$$

2.4.2 Die kreisrunde Platte

Für die Ermittlung der Momente und der Kräfte bei der kreisrunden Platte wird von der allgemeinen Beziehung (II.70) ausgegangen. Wird die Integration jedoch nur für einen schmalen gleichbreiten Streifen der Breite ∂v durchgeführt, so ergibt

sich die gleiche Beziehung wie (II.71) jedoch mit dem Unterschied, dass die vorliegende noch die Funktion $H(\varphi)^*$, die Verwölbungsfunktion, enthält. Sie ist die gleiche wie die der quadratischen Platte (II.85) Mit dieser Beziehung kann entsprechend dem Weg nach Abschnitt 2.3.2 das Moment zu

$$M_{\phi N} = \frac{1}{180} \pi \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d}{D} (2h)^3 H(\varphi)^* \quad (\text{II.91})$$

gefunden werden, und die Tragkraft zu

$$P_{\phi N} = \frac{35.9 \sqrt{2}}{180} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d}{D^2} (2h)^3 H(\varphi)^* \quad (\text{II.92})$$

Damit ist die Gesamttragfähigkeit der kreisrunden verwölbten Platte

$$P_{\phi \text{ ges}} = \frac{2}{3} \pi \frac{E m}{m + 1} \frac{d^3}{D^2} \left(1 - \frac{0.63}{n}\right) (2h) + \quad (\text{II.93})$$

$$0.282 \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d}{D^2} (2h_0)^3 H(\varphi)^*$$

2.4.3 Bemerkungen und Begründung für einen Korrekturfaktor

Rechnet man mit den Beziehungen (II.73) und (II.90) für die quadratische Platte sowie mit (II.79) und (II.93) für die kreisrunde Platte konkrete Fälle durch und vergleicht mit entsprechenden

Messergebnissen, so muss man teilweise starke Unterschiede zwischen Messung und Rechnung feststellen. Die Ursache dieser Unterschiede soll im nachfolgenden aufgesucht und näher betrachtet werden.

Für die Betrachtung werden die auf den Blättern $D_1 - D_{19}$ dargestellten Kraft-Weg-Kurven für verschiedene Federplatten benutzt. Es sind dort sowohl die gemessenen - mit P_M bezeichneten - als auch die gerechneten - mit P_R bezeichneten - Kennlinien dargestellt. Die gestrichelte gerade Linie ist in allen Fällen die gerechnete Kraft-Weg-Kurve aus der reinen Drillung. Also das erste Glied der oben genannten Gleichungen.

Bei der Herleitung der Formeln war grundsätzlich unterstellt worden, dass bei der Verformung der Platten, sowohl der im Ausgangszustand ebenen als auch der im Ausgangszustand verwölbten, die Mittelfläche der Platte immer die eines hyperbolischen Paraboloides (Idealfäche) ist bzw. bleibt. Dies trifft jedoch nicht zu. Für kreisrunde Platten wurde darauf oben schon (Kapitel 2.2.4) hingewiesen. Aber auch bei quadratischen Platten treten solche Abweichungen von der Idealfäche auf. Dies bedeutet, dass die Drillung ϑ einen von Ort zu Ort verschiedenen Wert annimmt, d.h.

$$\vartheta = \vartheta(u, v)$$

Der den bisherigen Ableitungen als Ausgangselement zu Grunde gelegte gleichbreite schmale Streifen kann dann nicht mehr als gerade angesehen werden, sondern wird leicht verbogen sein.

Wie Weber S. 51 - 55 nachgewiesen hat, ist jedoch eine solche Verbiegung nur von sehr geringem Einfluss auf das Moment.

Das Drillmoment kann also, als von den unterschiedlichen örtlichen Drillungen, unabhängig angesehen werden und bleibt damit eine lineare Fkt. der mittleren Drillung bzw. der Durchfederung (2h). Das Drillmoment bzw. die diesem entsprechende Kraft kann daher in allen Diagrammen $D_1 - D_{19}$ als geradestrichpunktigte Linie dargestellt werden. Zu diesem Drillmoment addiert sich das aus den zusätzlichen Normalspannungen herkommende Zusatzmoment.

Das Zusatzmoment bzw. die diesem entsprechende Kraft wird durch das zweite Glied in obigen Gleichungen beschrieben.

Die bestimmende Grösse in diesen Ableitungen ist ein Faktor

$$F_k = l^5 \nu^3 \quad (\text{II.94})$$

Man ersieht, dass

- 1) die Verdrillung mit der 3. Potenz wirksam ist, d.h. Unterschiede in dieser werden sich sehr stark bemerkbar machen.
- 2) die äusseren Partien der Platte sehr viel stärker zu der Gestaltung des Momentes beitragen als die inneren.

Bei den bisherigen Ableitungen ist nicht berücksichtigt worden, dass das Moment durch punktförmig wirkende Lasten in die Platte eingeleitet wird. Die Ableitungen setzen voraus, dass eine gleichmässige Verteilung des Momentes über den Drillquerschnitt vorliegt. Durch punktförmig wirkende Kräfte entsteht jedoch im Drillquerschnitt zwischen den

Lastpunkten eine s-förmige Verbiegung des an sich nach der Rechnung gerade bleibenden Plattenquerschnittes. Daraus ergibt sich eine zusätzliche Verdrehung, also auf der ganzen Platte eine von Ort zu Ort variierende Drillung.

Die Grösse dieser Verbiegung ist dabei mit abhängig vom Verhältnis von Plattendicke zu Lastabstand, also von n bzw. dem Widerstandsmoment gegen Verbiegen.

Bei den Diagrammen $D_1 - D_4$, die die Kennlinie für quadratische ebene Platten zeigen, liegen in allen Kurvenblättern bei kleinen Durchfederungen, die gemessenen Kraft-Weg-Kurven über den gerechneten. Bei höherer Durchfederung kehrt sich dies um und die Messwerte liegen unter den Rechenwerten.

Daraus ersieht man folgendes:

- 1) Die Drillung bleibt auch bei der Verformung ebener quadratischer Platten über die ganze Fläche nicht konstant, sondern hat örtlich unterschiedliche Werte.
- 2) Die Drillung muss in den äusseren Partien der Platte grösser sein als in den inneren weil nur dann der Faktor

$$F_k = l^5 \eta^3$$

Werte solcher Grösse erreichen kann, dass das effektive Zusatz-Moment ein mehrfaches des rechnerischen Momentes wird.

Das bedeutet, dass die Plattenpartien in der Nähe der Lastpunkte sich wesentlich stärker verformen als es der mittleren Verformung der ganzen Platte entspricht.

- 3) Bei weitergehender Durchfederung folgen die inneren Partien der Platte der Gesamtverformung immer mehr, so dass diese zunehmend stärker verwölbt werden, wogegen die Verwölbung der äusseren Partien relativ immer mehr abnimmt.

Ausserdem wirken die Kräfte im Lastpunkt zunehmend nicht mehr in Richtung der Plattennormale. Die wirksame Komponente ist dann

$$P^* = P \cos \alpha$$

wenn α die Plattenneigung im Lastpunkt ist.

Bei den kreisrunden ebenen Platten für die die Ergebnisse von Messung und Rechnung in den Blättern D_{12} - D_{15} dargestellt sind, treten die oben geschilderten Zusammenhänge nicht so klar in Erscheinung.

Es zeigt sich hier folgendes:

- 1) im unteren Bereich, d.h. bei kleiner Verformung ist die Abweichung zwischen Rechnung und Messung praktisch Null.
- 2) Bei Durchfederungen die grösser als die Plattenstärke sind, beginnt die gerechnete Kennlinie die gemessene zu übersteigen.

Die Ursache für dieses Verhalten liegt darin, dass bei der kreisrunden Platte der zur Einleitung des Momentes zur Verfügung stehende Plattenquerschnitt durch die ausserhalb der Verbindungslinie der Lastpunkte liegenden segmentartigen Plattenpartien verstärkt und damit biegesteifer ist.

Bei grösseren Verformungen werden dann in gleicher Weise wie der quadratischen Platte die inneren Plattenpartien stärker mitverformt und auch die Schiefe der Krafrichtung wird bemerkbar.

Bei vorverwölbten Platten, quadratischen wie kreisrunden, liegt die gerechnete Kennlinie in beiden Fällen über der gemessenen. Die Abweichungen beider Kurven sind jedoch bei der quadratischen grösser als bei der kreisrunden.

Das abweichende Verhalten der vorverwölbten Platten gegenüber den ebenen Platten wird leicht verständlich, wenn man auf die in Kap. 2.4 dargelegten Ableitungen für die Momenten- und damit Kraft-Weg-Beziehungen zurückgeht.

Dort war gefunden worden, dass das effektive Moment aus der Differenz zweier Spannungen bzw. zweier Momente errechnet werden kann.

Das eine Moment (erstes Moment) entspricht dem einer ebenen Platte, die bis zum Mass der Vorverwölbung durchgeformt ist. Oben erwähnter Ableitung entsprechend ist dieses Moment an der Durchfederung der Platte unabhängig, also über den ganzen Verformungsweg konstant.

In einem Kennlinienblatt für eine ebene nicht vorverwölbte Platte zeichnet sich dieses Moment bzw. der ihm entsprechende Kraftverlauf als eine zur Wegachse parallele Gerade im Abstand der diesem Moment entsprechenden Kraft.

Das zweite Moment entspricht einem solchen der gleichen Platte, wobei jedoch die Durchfederung nur bis zu einem Zwischenwert geschah. Seine Grösse

ist von deren Mass der Durchfederung abhängig. Die hierzu gehörende Kraftwegkurve entspricht den solchen wie sie zum Beispiel für quadratische Platten in Blatt D_1 und D_2 vorliegen.

Der Kennlinienverlauf für die vorverwölbte Platte ergibt sich dann aus dem Abstand der Kurve des zweiten Momentes von der Horizontalen des ersten Momentes. Der Koordinaten-Nullpunkt dieser Differenzkurve liegt im ursprünglichen Kurvenblatt, d.h. dem der ebenen Platte rechts oben im Schnittpunkt der Horizontalen des ersten Momentes mit der Kennlinie des zweiten Momentes. Mit anderen Worten, die Kurve der vorverwölbten Platte erhält man, wenn man das ursprüngliche Kurvenblatt auf den Kopf stellt. In einem so entwickelten Kennlinienblatt ergibt sich sofort, dass die gerechnete dann über der gemessenen Kennlinie liegen muss.

Durch die Klarstellung dieser Zusammenhänge lässt sich auch sofort übersehen, in welcher Weise die effektiven Verformungen bzw. Verdrillungen bei der vorverwölbten Platte von denen, wie sie den theoretischen Betrachtungen zugrunde gelegt worden sind, abweichen.

Die bisherigen Betrachtungen sind rein qualitativer Art. Eine quantitative Betrachtung, d.h. eine rechnerische Bestimmung der effektiven Verdrillungen bzw. Verformungen der einzelnen Orte der Platte ist ein sehr umfangreiches Problem. Da für die vorliegende Untersuchung von vorneherein nicht beabsichtigt war, sich mit solchen Einzelheiten der Theorie zu beschäftigen, soll auf diese Zusammenhänge nicht weiter eingegangen werden. Dies würde ausserdem auch weit über den gesteckten Rahmen der Arbeit hinausgehen.

Andererseits soll die vorliegende Arbeit jedoch die theoretischen Grundlagen der Hypo-Feder soweit behandeln, dass für die Vorausberechnung brauchbare Formeln bereitgestellt werden können.

Die zwischen Messung und Rechnung bestehenden Diskrepanzen lassen sich glücklicherweise durch die Einführung eines Korrekturfaktors in die entsprechenden Formeln soweit beseitigen, dass eine für die Praxis ausreichende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung gegeben ist.

Da bei Federn aus Materialien mit hohem E-Modul die Kräfte und Momente aus den zusätzlichen Normalspannungen gegen diejenigen aus der reinen Verdrillung ohnehin klein sind, ist selbst eine Ungenauigkeit die sich bei der Einführung eines Korrekturwertes in die zusätzlichen Momentbeziehungen ergibt ohne besondere Bedeutung auf das Gesamtergebnis.

Empirisch wurde gefunden, dass sich in das zweite Glied der Tragfähigkeitsbeziehungen (II.73), (II.79) und (II.93) ein Korrekturfaktor folgender Form anführen lässt und damit eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung zu erzielen ist.

Der Korrekturfaktor wird mit K_F bezeichnet und lautet

$$K_F = \alpha_{1;2} \frac{d^n}{(2h)^n}$$

bei ebenen Platten und

$$K_F = \alpha_{2;3} \frac{d^n}{(2h)^n}$$

bei verwölbten Platten.

Damit ergeben sich für das zweite Glied der angezogenen Beziehungen folgende Formeln:

1) Bei der quadratischen ebenen Platte

$$P_{N\phi} = \frac{2}{45} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d}{l^2} (2h)^3 d_1 \frac{d^n}{(2h)^n}$$

Eine gute Übereinstimmung liess sich erzielen mit den Grössen

$$d_1 = 2.5 \quad ; \quad n = 1$$

so dass sich damit ergibt

$$P_{N\phi} = \frac{5}{45} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d^2}{l^2} (2h)^2 \quad (\text{II.95})$$

Mit dieser Formel wurde für die Blätter $D_1 - D_4$ die Rechnung durchgeführt und dort der gerechnete Kurvenverlauf eingetragen (gestrichelte Linie). Zum Vergleich ist an diesen Blättern ausserdem eine mit der unkorrigierten Formel gerechnete Kurve aufgetragen (dünn gezogene Linie).

2) Bei der ebenen kreisrunden Platte

$$P_{N\phi} = 0,282 \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d}{D^2} (2h)^3 d_2 \frac{d^n}{(2h)^n}$$

hier fand sich für gute Übereinstimmung

$$d_2 = 1 \quad ; \quad n = 1$$

damit ergibt sich

$$P_{N\phi} = 0,282 \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d^2}{D^2} (2h)^2 \quad (\text{II.96})$$

Damit wurde für die Blätter D_{12} bis D_{15} die Nachrechnung durchgeführt und das Ergebnis durch die punktierte Linie eingetragen. Im Vergleich ist auch hier das Ergebnis der unkorrigierten Rechnung wieder gestrichelt eingezeichnet.

Für die verwölbten quadratischen und kreisrunden Platten liegt es nahe, auch hier den grundsätzlich gleichen Korrekturfaktor, wie bei den entsprechend ebenen Platten einzusetzen. Dies erscheint auch ohne weiteres plausibel, wenn man beachtet, dass die Beziehungen für die Tragfähigkeit aus den Normalspannungen der ebenen und verwölbten Platten sich nur durch den Faktor $H(\varphi^*)$ unterscheiden.

- 3) Damit lautet für die verwölbte quadratische Platte die entsprechende Formel

$$P_{N\phi} = \frac{2}{45} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d}{L^2} (2h_0)^3 H(\varphi^*) \cdot d_3 \frac{d^n}{(2h_0)^n}$$

Mit den Werten

$$d_3 = 2 \quad ; \quad n = 1$$

ergab sich eine Übereinstimmung die als noch befriedigend angesehen werden kann.

Die Beziehung lautet dann

$$P_{N\phi} = \frac{4}{45} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d^2}{L^2} (2h_0)^2 H(\varphi^*) \quad (\text{II.97})$$

Allerdings ist festzustellen, dass in den Blättern $D_5 - D_{11}$ in denen wie oben die Ergebnisse sowohl der unkorrigierten als auch der korrigierten Rechnung eingetragen sind von Blatt zu

Blatt gewisse Abweichungen unterschiedlicher Grösse zwischen Messung und Rechnung vorliegen, die sich nur dann erklären lassen, wenn Unterschiede in der Vorverformung und im E-Modul unterstellt werden. Eine nähere Untersuchung, die die Geometrie der Fläche in Ausgangs- und Verformungszustand betreffen müsste, konnte nicht vorgenommen werden.

- 4) Für die vorverwölbte kreisrunde Platte ergibt sich die korrigierte Formel zu

$$P_{N\phi} = 0,282 \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d}{D^2} (2h_0)^3 H(\varphi^*) d_n \frac{d^n}{(2h_0)^n}$$

Mit

$$d = 1,3 \quad ; \quad n = 1$$

ergeben sich recht gute Übereinstimmungen, so dass die Formel nunmehr lautet

$$P_{N\phi} = 0,367 \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d^2}{D^2} (2h_0)^2 H(\varphi^*) \quad (\text{II.98})$$

In den Blättern D₁₆ - D₁₉ sind die nach dieser Formel gerechneten Werte in oben dargestellter Weise eingetragen.

Ebenso die Werte der unkorrigierten Formel.

Auf die Ursachen für die gefundenen generellen Abweichungen soll hier nicht weiter eingegangen werden. Es ist zu vermuten, dass eine Ursache in Vereinfachungen liegt, die für die Durchführung der Ableitungen der Spannungen und Momente aus den Zusatznormalspannungen gemacht worden sind und die damit diesen Rechnungen den Charakter einer ersten Näherung geben.

Eine exakte Aufklärung kann nur erhalten werden, wenn man eine punktweise numerische Durchrechnung einer diskreten Platte mit parallel gehender Vermessung der Fläche durchgeführt hat. Eine solche Untersuchung kann zum jetzigen Zeitpunkt nicht durchgeführt werden.

Für die Praxis dürfte jedoch das gefundene Ergebnis zunächst völlig hinreichend sein.

2.5 Zusammenstellung der Tragfähigkeitsformeln

Damit lauten die Beziehungen für die verschiedenen Federplatten wie folgt:

1) Die ebene quadratische Platte

$$P_{\phi} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) + \frac{1}{9} \frac{Em^2}{m-1} \frac{d^2}{D^2} (2h)^2$$

(II.99)

2) Die ebene kreisrunde Platte

$$P_{\phi} = \frac{2}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) + 0,282 \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d^2}{D^2} (2h)^2$$

(II.100)

3) Die vorverwölbte quadratische Platte

$$P_{\phi} = \frac{2}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) + \frac{4}{45} \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d^2}{L^2} (2h^0)^2 H(\psi^*)$$

(II.101)

4) Die vorverwölbte kreisrunde Platte

$$P_{\phi} = \frac{2}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} \left(1 - \frac{0,63}{n}\right) (2h) + 0,367 \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{d^2}{D^2} (2h^0)^2 H(\psi^*)$$

(II.102)

2.6 Die Spannungen

Die bisherigen Rechnungen ermittelten die Spannungen bei der Verformung der Federplatte entsprechend den oben (S.22) gemachten einschränkenden Voraussetzungen, d.h. es werden getrennt die Schubspannungen für die reine Drillung, unabhängig von Normal- und Schubspannungen die zusätzlich bei grösserer Verformung entstehen, bestimmt. Letztere werden wieder unabhängig von den Drillspannungen ermittelt.

Um ein vollständiges Spannungsbild der Scheibe zu erhalten, ist es dann erforderlich, die Spannung nach Grösse und Richtung für die interessierenden Orte der Federplatte in geeigneter Weise zu addieren. Der vorliegende Abschnitt beschäftigt sich mit dieser Aufgabe. Die Betrachtung wird dabei getrennt durchgeführt für

- 1) die quadratische Federscheibe
- 2) die kreisrunde Scheibe.

In perspektivischer Darstellung mit übertriebenen Massstabverhältnissen wird der charakteristische Verlauf der Spannungen im einzelnen eingetragen, so dass man sich von den Spannungsverhältnissen in der Federscheibe ein anschauliches Bild machen kann.

Abb. 21 bis 24.

2.6.1 Die quadratische Federplatte

Für die reine Drillung, d.h. bei sehr kleinen Verformungen ergeben sich Spannungsverhältnisse wie sie in der Literatur bereits weitgehend behandelt worden sind. Hierzu Weber [8] und Uebel [10].

Für einen rechteckigen schmalen Querschnitt, wie er bei der Federplatte vorliegt, sind nach Uebel die am Rand entstehenden Schubspannungen in Abb. 21 für ein Seitenverhältnis $L/d = 12$ dargestellt.

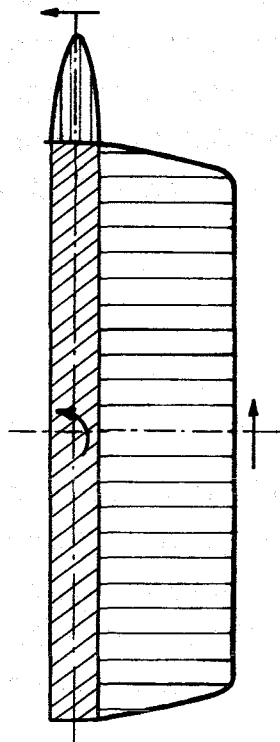


Abb. 25

Die an den Längsseiten entstehende max. Schubspannung hat den Wert

$$\tau_{max_s} = \frac{1}{2} \frac{Em}{m+1} d \vartheta \quad (\text{II.103})$$

Dieser Wert bleibt fast über die ganze Längsseite in voller Höhe bestehen um erst in unmittelbarer Nähe der Ecke des Querschnittes auf 0 abzusinken.

An der Schmalseite entsteht nach (II. 19) als max. Schubspannung eine solche der Größe

$$\tau_{min_s} = \frac{0,7425}{2} \frac{Em}{m+1} d \vartheta \quad (\text{II.104})$$

Die Spannungsverteilung an der Schmalseite ist näherungsweise parabolisch, desgleichen kann das Absinken der Spannungen an der Längsseite zur Ecke hin als ebenfalls einer Parabel folgend angenommen werden.

Die Entfernung des Parabelbogenansatzes an der Längsseite liegt etwa bei einer Entfernung $e = 1,26 d$ von der Ecke. Sie liegt also umso näher der Ecke je schmaler der Querschnitt ist.

Der Drehsinn des Momentes und die Richtung der Schubspannungen sind in Abb. 25 durch Pfeile gekennzeichnet. Die Spannungen gehen wie bekannt ist in der Mittellinie durch 0.

Der exakte Verlauf der Spannungen über dem ganzen Querschnitt kann nach Weber S. 25 bzw. Uebel S. 129 errechnet werden. Die dort gegebenen Beziehungen sind jedoch recht kompliziert und mühevoll auszuwerten. Im allgemeinen, d.h. für den technischen Bereich dürften die bisher gebrachten angenäherten Lösungen jedoch völlig ausreichend sein.

Es soll daher hier verzichtet werden, den exakten Verlauf der Spannungen darzustellen.

Die charakteristische Verteilung der Schubspannungen ist in der perspektivischen Darstellung einer quadratischen Platte (Abb. 21) für verschiedene Querschnitte dargestellt. Die durch die reine Drillung erzeugten Schubspannungen sind mit dem Index D versehen.

Bei der Ermittlung der Drillspannungen sind im allgemeinen sehr kleine praktisch gegen 0 gehende Verschiebungen zugrunde gelegt. Bei dem Federelement dagegen sind die Verschiebungen bezogen auf die Scheibendicke gross. Wie bereits oben dargelegt (S. 22), entstehen bei diesen grösseren Verschiebungen zusätzliche Normalspannungen bzw. entsprechende Schubspannungen. Diese Spannungen sind nach sowie

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \mathcal{J}^2 \left(u^2 - \frac{La^2}{12} \right) \quad (\text{II.65})$$

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \mathcal{J}^2 \left(v^2 - \frac{La^2}{12} \right) \quad (\text{II.66})$$

$$\tau_N = \frac{Em}{m+1} uv \mathcal{J}^2 \quad (\text{II.63})$$

Aus Gl. (II.63) lässt sich erkennen, dass die zusätzlichen Schubspannungen von der Breite d des Querschnittes unabhängig sind, jedoch abhängig von dem jeweiligen Ort, d.h. sie sind eine Fkt. von u und v . Sie haben an Orten, die auf einer der u - bzw. v -Achsen liegen den Wert 0 und erreichen in den Ecken der Scheibe ihren Grösstwert.

Die zusätzlichen Normalspannungen entsprechend (II.65) und (II.66) sind der besseren Übersicht wegen in einer zweiten Abbildung, Abb. 22 eingetragen. Die bei Drillung um die u - bzw. v -Achse entstehenden Normalspannungen sind getrennt dargestellt.

Die effektiven zusammengesetzten Spannungen ergeben sich dann aus der bekannten Beziehung [7] S. 590

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \left[\sigma_u + \sigma_v \pm \sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau} \right] \quad (\text{II.105})$$

also

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{4} \frac{Em^2}{m^2-1} \vartheta^2 \left[v^2 + u^2 - \frac{l^2}{6} \right] \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \vartheta^2 (v^2 - u^2) \right]^2 + 4 \left[\frac{Em}{m+1} \vartheta \frac{d}{2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.106})$$

Damit kann das ganze Spannungsfeld über der Federplatte ermittelt werden. Wie einfache Überlegungen zeigen, liegen ausgezeichnete Punkte für die Spannungen auf den x-y-Achsen und zwar in unmittelbarer Nähe der Ecken, an den Stellen an denen die Schubspannungen ihren Höchstwert haben, also an den Lastpunkten. Bezeichnet man die Koordinate dieser Stelle mit u so ist dies

$$u^* = \frac{l}{2} - 1,26 d$$

oder

$$u^* = l \left(0,5 - \frac{1,26}{n} \right)$$

und es ergibt sich, da an dieser Stelle

$$\sigma_u = \sigma_v$$

für die quadratische Federplatte ist

$$\sigma_{\max} \text{ bzw. } \sigma_{\min} = \frac{1}{2} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \vartheta^2 l^2 \left[\left(0,5 - \frac{1,26}{n}\right) - \frac{1}{12} \right] + \frac{1}{2} \frac{E m}{m+1} d \vartheta \quad (\text{II.107})$$

womit die absolute höchste Spannung auf der Federplatte bekannt ist.

Die max. Spannung verläuft hier in Richtung der x- bzw. y-Achse. Die min. Spannung steht senkrecht zur jeweiligen Achse.

Die absolut geringsten Spannungen auf der Platte stehen dort an, wo die zusätzlichen Normalspannungen durch 0 gehen. Aus Symmetriegründen sind dies vier diskrete Punkte auf der x- bzw. y-Achse. Ihre Koordinaten auf der u- bzw. v-Achse sind nach

$$u_0 \text{ bzw. } v_0 = 0,2885 L \quad (\text{II.108})$$

2.6.2 Die kreisrunde Federplatte

Bei der kreisrunden Federplatte liegen grundsätzlich die gleichen Spannungsverhältnisse vor wie bei der quadratischen. Die max. Drillschubspannungen sind auch hier nach

$$\tau_{\max s} = \frac{1}{2} \frac{E m}{m+1} d \vartheta$$

desgleichen die minimalen Drillschubspannungen nach (II.19)

$$\tau_{\min} = \frac{1}{2} 0,7425 \frac{Em}{m+1} d \vartheta \quad (\text{II.109})$$

Aus der Rechnung nach der Plattentheorie ergab sich nach (II.7) die gleiche Beziehung für die Drillspannungen.

Die bei grösserer Verdrillung entstehenden zusätzlichen Normalspannungen bzw. die zusätzliche Schubspannung ergeben sich entsprechend zu

$$\sigma_u = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 \left(v^2 - \frac{l^2(u)}{12} \right) \quad (\text{II.65a})$$

$$\sigma_v = \frac{1}{2} \frac{Em}{m^2-1} \vartheta^2 \left(u^2 - \frac{l^2(v)}{12} \right) \quad (\text{II.66a})$$

$$\tau_N = \frac{Em}{m+1} u \cdot v \vartheta^2 \quad (\text{II.63})$$

Bezüglich der Zusammensetzung der Spannungen gilt auch hier das oben bei der quadratischen Platte gesagte.

Die zusammengesetzten Spannungen ergeben sich entsprechend (II.106) bzw. (II.107) in der Form

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}^{\max} &= \frac{1}{4} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \mathcal{J}^2 \left[v^2 + u^2 - \frac{1}{12} (L_{(u)}^2 + L_{(v)}^2) \right] \\ &\pm \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \mathcal{J}^2 \left(v^2 - u^2 - \frac{1}{12} (L_{(u)}^2 - L_{(v)}^2) \right) \right]^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{E m}{m + 1} \mathcal{J} \frac{d}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Führt man hier für $L_{(u)}$ bzw. $L_{(v)}$ als Fkt. von D ein und bezieht u bzw. v auf den Durchmesser D mit

$$u = \rho_1 \frac{D}{2} \quad \text{und} \quad v = \lambda_1 \frac{D}{2}$$

setzt nach I.16

$$\mathcal{J} = 4 \frac{(2h)}{D^2}$$

und bezieht schliesslich noch mit $2h = \gamma \cdot d$, die Durchfederung auf die Plattendicke, so erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}^{\max *} &= \frac{\sigma_{\min}^{\max}}{M_1} = \\ &= \gamma^2 \left\{ \lambda_1^2 + \rho_1^2 - \frac{1}{3} \left[2 - (\rho_1^2 + \lambda_1^2) \right] \right\} \\ &\pm \frac{1}{2} \left\{ 28^2 \left[\lambda_1^2 - \rho_1^2 + \frac{1}{3} (\rho_1^2 - \lambda_1^2) \right] \right. \\ &\left. + 16 \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \gamma^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{II.110})$$

worin M_1 die Abkürzung

$$M_1 = \frac{E m^2 d}{m^2 - 1 D^2} \quad (\text{II.111})$$

ist.

Auch hier treten die absolut höchsten Spannungen in der Nähe des Randes bei den x-y-Achsen, also an den Lastpunkten auf. An den Randpunkten der u-v-Achsen werden die Zusatznormalspannungen gegenüber dem der quadratischen Platte jedoch niedriger.

Auch hier gilt die Beziehung (II.107) in entsprechender Form. Schreibt man dort für L D und wie oben $L(u)$ bzw. $L(v)$ nach (II.42) als Fkt. von D , so ergibt sich

$$\sigma_{\max}^{\phi} = \frac{1}{4} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \mathcal{G}^2 D^2 \left[\left(0,5 - \frac{1,26}{n} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] + \frac{E m}{m+1} \frac{1}{2} d \mathcal{G} \quad (\text{II.112})$$

Als wesentliches Ergebnis der Überlegungen ist noch hervorzuheben, dass die höchsten Spannungen nicht unmittelbar am Rand, sondern etwas innerhalb der Randzone entstehen.

Bezüglich der Vorzeichen der Normalspannungen und damit auch der zusammengesetzten Spannungen ist folgendes zu beachten:

Die in Kapitel 2.3 gebrachten Ableitungen für die zusätzlichen Normalspannungen gehen von der ebenen Platte aus, die durch die Belastung zum hyperbolischen Paraboloid verformt wird. Die dort aufgetretenen Spannungs-Vorzeichen bei den einzelnen Spannungswerten gelten daher nur für diesen Fall.

Bei der Belastung der vorverwölbten Platte wird diese von der Form des hyperbolischen Paraboloides zur Ebene hin verformt. Dabei ergeben sich, wie aus Abb. 17 leicht ersehen werden kann, für die entstehenden Normalspannungen die umgekehrten Vorzeichen wie oben.

D.h. entstehen bei der im Ausgangszustand ebenen Platte bei der Verformung in ebenen Randpartien positive, also Zugspannungen, so entstehen bei vorverwölbten Platten negative, also Druckspannungen.

Damit lauten die Spannungsgleichungen

$$\bar{\sigma}_u = -\frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \mathcal{J}^2 \left(v^2 - \frac{l^2}{12} \right) \quad (\text{II.113})$$

$$\bar{\sigma}_v = -\frac{1}{2} \frac{Em^2}{m^2-1} \mathcal{J}^2 \left(u^2 - \frac{l^2}{12} \right) \quad (\text{II.114})$$

Die Beziehungen für die zusammengesetzten Spannungen lauteten entsprechend

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \left(-\sigma_u - \sigma_v \pm \sqrt{(-\sigma_u + \sigma_v)^2 + 4\tau^2} \right)$$

bzw.

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = -\frac{1}{2} \left(\sigma_u + \sigma_v \mp \sqrt{(\sigma_u - \sigma_v)^2 + 4\tau^2} \right)$$

Die zusammengesetzte Spannung hat also dann ebenfalls das umgekehrte Vorzeichen wie bei der ursprünglich ebenen Platte.

3. Stabilitätsfragen

Versucht man eine vorverwölbte relativ dünne Hypo-Federscheibe von stärkerer Verwölbung, quadratisch oder kreisförmig berandet, zur Ebene hin zu verformen, so wird man feststellen, dass dies nicht mehr möglich ist, denn die Federscheibe beginnt bei einem gewissen Verformungsgrad von ihrer bisherigen Form auszuweichen und hat dann wenn die 4 Lastpunkte in einer Ebene zu liegen gekommen sind, wieder die Form eines, jedoch nur angenäherten, hyperbolischen Paraboloides, dessen charakteristische Achsen gegen die der Ausgangsform um 45° in der Ebene verdreht sind. D.h. die u- bzw. v-Achsen haben nunmehr die Eigenschaften der x-y-Achsen und umgekehrt.

Das Verhalten entspricht in etwa dem Ausbeulen einer in ihrer Ebene belasteten Platte oder dem Ausweichen eines Knickträgers. Es liegt also ein Problem der elastomechanischen Stabilität vor.

Wie eingangs dieses Abschnittes implizit gesagt wurde, tritt ein solches Verhalten einer Hypo-Feder-Scheibe nur unter gewissen Voraussetzungen, d.h. dann wenn gewisse Abmessungs- oder Stoffparameter gegeben sind, ein. Da für den durchschnittlichen normalen Verwendungsfall der Feder ein solches Verhalten nicht erwünscht ist, soll im nachfolgenden versucht werden, die Parameter nach Art und Grösse zu finden bei denen der kritische Zustand, d.h. ein Ausknicken unterbleibt oder auftritt.

Derartige Ausweichprobleme sind mathematisch recht komplexe Probleme, die vielfach nur bei den einfachsten Randbedingungen erfassbar sind, wobei meist noch eine mangelhafte Übereinstimmung mit den Messungen in Kauf genommen werden muss. Hierzu Pflüger, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 1950, S. 240.

Die vorliegende Untersuchung soll ausserdem auch keine Betrachtung über das nachkritische elastomechanische Verhalten der Hypo-Federscheibe bringen, dafür ist das Problem zu kompliziert und derartige Betrachtungen der Elastomechanik noch zu sehr im Fluss (Leipholz, Stabilitätstheorie 1968, S. 160).

Es soll vielmehr versucht werden mit Analogien und Modellbetrachtungen die massgebenden Parameter zu isolieren und ihr Zusammenspiel klarzustellen.

Selbstverständlich soll der kritische Zustand, also der Beginn des Ausweichens möglichst genau erfasst werden, d.h. es soll eine Vergleichsgrösse ermittelt werden, die sich ggfs. durch Messungen für die Praxis brauchbar ergänzen lässt.

Die Ursache für das Ausweichen der Hypo-Feder ist in folgendem zu suchen:

Wie oben im Abschnitt II 2.1 S. 18 ausgeführt worden ist, entstehen bei der Verformung einer Hypo-Federplatte neben den Drill-Schubspannungen noch zusätzliche Normalspannungen. Diese Normalspannungen können bei stärkerer Verformung, also auch bei stark vorverwölbten Federn die zur Ebene hin verformt werden, Werte annehmen, die in vergleichbare Grössenordnungen mit den Drill-Schubspannungen kommen.

Hierbei entstehen bei unverwölbten ebenen Federplatten die zur Sattelform hin verwölbt werden in deren Randpartien Zugspannungen in dem Zentrum der Scheibe Druckspannungen.

Bei vorverwölbten Platten entstehen bei der Verformung zur Ebene hin in den Randpartien Druckspannungen im Zentrum Zugspannungen.

Diese Spannungen verlaufen in der Fläche der Federplatte und wirken dort ähnlich wie die Knickspannungen eines schlanken auf Druck beanspruchten Stabes. D.h. bei einem gewissen kleinen Trägheitsmoment und entsprechend angewachsenen Kräften beginnt der Stab bzw. die Scheibe unter dem Einfluss dieser Kraft sich zwischen den Kraftangriffspunkten senkrecht zur Kraft-richtung, d.h. in unserem Fall senkrecht zur Ebene der Platte zu verformen, er bzw. sie beginnt auszuweichen.

Dieses Ausweichen bringt hier wie dort eine Verringerung der Tragfähigkeit, d.h. bei der Feder wird der Werkstoff dann nicht mehr voll ausgenutzt.

Zur Erfassung dieser Zusammenhänge lassen sich folgende Überlegungen antellen.

Die bei der Verformung in den Randpartien der Federscheibe entstehenden Druckspannungen verlaufen in erster Näherung parallel zum Rand und in der Fläche der Federplatte. Diese Druckspannungen werden so aufgefasst, als ob sie durch Kräfte erzeugt wären die am Rand der Federscheibe angreifen und in der Ebene der Fläche wirken.

Für Platten an denen nach dieser Art in ihrer Ebene Kräfte eingreifen, sind die Beul- bzw. Ausweichbedingungen bekannt und zugänglich.

Man muss sich jedoch dabei von vorneherein im Klaren sein, dass die mit diesen Rechnungen gefundenen Zahlenwerte keinesfalls der vorliegenden Wirklichkeit entsprechen werden. Andererseits darf man aber erwarten, dass die Grössenbeziehungen bzw. das Modellgesetz den Voraussetzungen der Untersuchung gerecht wird.

Vorab ist jedoch noch folgende grundsätzliche Bemerkung einzufügen:

Wie bereits erwähnt, entstehen bei ebenen Platten in der Aussenzone, sowohl der quadratischen als auch der kreisrunden, Zugspannungen in der zentralen Zone Druckspannungen. Bei vorverwölbten Platten entstehen dagegen umgekehrt in der Aussenzone Druckspannungen in der zentralen Zone Zugspannungen. Beim Belasten der ebenen Platte wird daher diese in der zentralen Partie unter Knickspannungen gesetzt und sich dann in ähnlicher Weise wie ein Wichsschachteldeckel zum Durchschlagen bringen lassen. Die Knickspannungen finden dabei anfänglich eine ebene Platte vor.

Beim Belasten der vorverwölbten Scheibe entstehen die Knickspannungen in deren Aussenpartie, wobei diese aufgrund des vorverwölbten Formzustandes eine bereits vorgeknickte Platte vorfinden. Dabei ist bei kleinen Knickspannungen die Verformung gross um mit zunehmenden Knickspannungen sich zu verkleinern. D.h. die beiden Knickzustände - Knickspannung und Verformung - laufen gegensinnig.

Da diese Knickzustände analytisch sehr schwer zu erfassen sind, beschränkt sich die Untersuchung auf ebene Platten, sie unterschlägt bewusst also den vorgeknickten Zustand. Diese Vernachlässigung wird sich bei dem Rechenergebnis dahingehend auswirken, dass die ermittelten Zahlenfaktoren eine steifere Platte ausweisen als das Versuche tun werden. Anhand von Versuchsergebnissen soll diese Voraussage später überprüft werden.

Untersucht werden im nachfolgenden:

1. die quadratische vorverwölbte Federplatte
2. die kreisrunde vorverwölbte Federplatte

3.1 Die quadratische verwölbte Federplatte

Für diese Federplatte lassen sich die Ausweichbedingungen nach 2 Methoden untersuchen.

- a) Im ersten Fall fasst man die Hälfte einer Platte (mit u- oder v-Achse als eine Längsbegrenzung) als Knickstab auf, der durch Druckkräfte belastet wird.
- b) Im zweiten Fall wird diese als ebene Platte aufgefasst, die rundum gleichmässig durch eine in ihrer Ebene wirkende Streckenlast belastet ist.

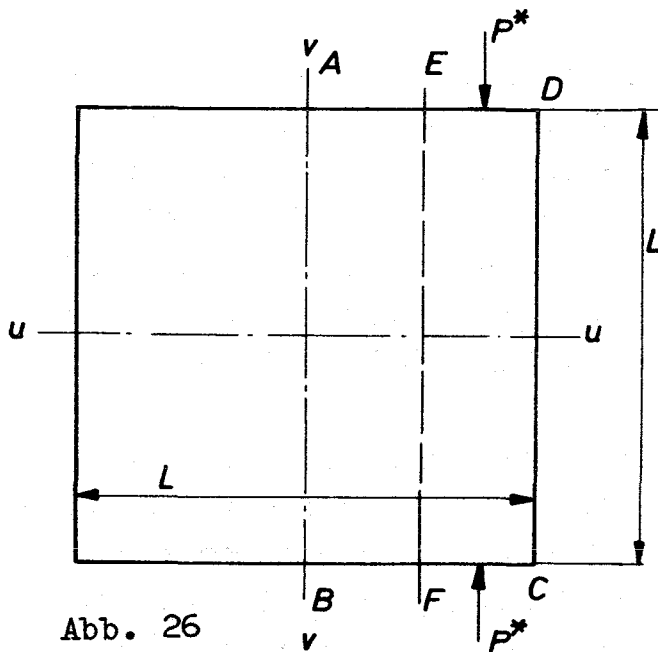


Abb. 26

Betrachtet wird nach Abb. 31 eine Plattenhälfte A, B, C, D. Die Druckspannungen liegen dann im Bereich E, F, C, D. Die Linie EF ist für die Normalspannungen eine neutrale, d.h. spannungslose Faser

Die Platte wird in ihrer Ebene durch die parallel zur h-Achse wirkende Kraft P^* belastet. Diese Kräfte entsprechen dem Flächenintegral der Druckspannungen. Es ist also

$$P^* = \int \sigma_u dF$$

Da die Druckspannungen nur zwischen der neutralen Faser, also

$$u_0 = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

und dem Aussenrand wirken, sind damit die Integrationsgrenzen bekannt und es wird mit $dF = d \partial u$

$$P^* = d \int_{u=0_0}^{u=1/2} \sigma_u \partial u$$

Mit II.87 und

$$\mathcal{J}_1 = 2 \frac{2h_0}{L^2}$$

ergibt sich dann

$$P^* = 2 \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^4} (2h_0)^2 (1-\varphi^{*2}) \int_{u=0}^{u=L} \left(u^2 - \frac{L}{12}\right) \partial u$$

Ausgewertet erhält man

$$P^* = 0,072 \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L} (2h_0)^2 (1-\varphi^{*2}) \quad (\text{II.115})$$

mit φ^* nach (II.83).

Für die max. Durchfederung, d.h. für $\varphi^* = 0$ ergibt sich

$$P_{\max}^* = 0,027 \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L} (2h_0)^2 \quad (\text{II.116})$$

Diese Kraft ist über die Länge der Quadratseite also längs der zur u bzw. y -Achse parallelen Richtung konstant, sie kann daher als eine an den Kanten der Federplatte von aussen her wirkende Druckkraft betrachtet werden, die an einer Scheibenhälfte als Knickträger angreift. Da die Plattenränder frei beweglich sind, kann man als Knicklänge die ganze Plattenbreite L einsetzen. [11] S. 129.

Für einen ebenen schlanken Stab gilt für die Knickkraft

$$P_k = \frac{H^2}{L^2} E J \quad (\text{II.117})$$

wenn mit J das Trägheitsmoment einer Plattenhälfte ist.

Dies ist $J = \frac{ld^3}{24}$

so dass sich ergibt

$$P_k = \frac{H \cdot E d^3}{24l} \quad (\text{II.118})$$

Da ein Ausweichen der Feder auch bei der grössten Durchfederung nicht eintreten darf, muss sein

$$P_k \geq P_{max}^*$$

Damit ergibt sich

$$\left(\frac{d}{2h} \right)^2 = 0,648 \frac{m}{H^2(m^2-1)} \quad (\text{II.119})$$

Für Stahl mit $m = 10/3$ erhält man die Kenngrösse

$$\frac{d}{2h} = 0,147$$

Es zeigte sich, dass die das Ausweichen bestimmenden Parameter die Plattendicke und die Durchwölbung bzw. deren Verhältnis sind. Die gefundene Zahlengrösse kann jedoch noch nicht als verbindlich angesehen werden. Sie bedarf einer Bestätigung bzw. Korrektur durch Versuchsergebnisse.

In diesem Fall wird die ganze Federplatte als eine solche angesehen, die in ihrer Ebene durch eine längs des Randes wirkende Kraft belastet ist. Dieser Fall ist in der Literatur als allseitig gedrückte rechteckige Platte beschrieben. [4] S. 238/239 Für die kritische Längskraft wird dort die Beziehung, geschrieben mit den Bezeichnungen der vorliegenden Arbeit, für die quadratische Platte mit

$$P' = \frac{\mu^2 d^3 E m^2}{6(m^2 - 1)L^2}$$

(II.120)

angegeben.

Massgebend für das Ausweichen der Platten sind die Druckspannungen. Diese wirken jedoch nur in deren äusserem Teil und zwar dort jeweils über eine Länge von u_0 bzw. v_0 bis zum Rand, d.h. u bzw. $v = 1/2$. Also über die Länge

$$\Delta u \text{ bzw. } \Delta v = 0,211 L$$

Es dürfte den tatsächlichen Belastungsverhältnissen am nächsten kommen, wenn die aus den Druckspannungen herrührende Gesamtkraft, als nur über diese Länge und nicht über die der ganzen Plattenbreite L

wirksam angesehen wird.

Dann ergibt sich die spezifische Kantenbelastung für die max. Durchfederung zu

$$p' = 0,128 \frac{E m d}{L^2 (m^2 - 1)} (2h_0) \quad (\text{II.121})$$

Durch Gleichsetzen mit (II.114) erhält man daraus

$$\left(\frac{d}{2h_0} \right)^2 = 0,768 \frac{1}{\mu^2 m} \quad (\text{II.122})$$

Für Stahl ($m = 10/3$) ergibt sich damit die Kenngrösse

$$\frac{d}{2h_0} = 0,1525$$

Vergleicht man diese Grösse mit der oben gefundenen, so kann man eine recht gute Übereinstimmung feststellen (Der Unterschied beträgt ca. 3,6 %).

Bezüglich der Zahlengrösse selber gilt auch hier das gleiche wie oben gesagt.

3.2 Die kreisrunde verwölbte Federplatte

Auch bei diesem Fall wird grundsätzlich wie oben vorgegangen und die Kraft aus den inneren Spannungen durch eine in die Ebene der Platte radial nach innen wirkende Randbelastung ersetzt und mit dieser der kritische Ausweichwert errechnet.

Kreisförmige Platten mit Randbelastung sind in der Literatur bekannt. [12] S. 87 und [6] S. 654 - 659.

Der Betrachtung wird eine am Rand frei aufliegende bzw. gestürzte Platte mit rotationssymmetrischer Belastung zugrunde gelegt. Für die spez. krit. Randbelastung wird in der Lit. für die volle Scheibe angegeben

$$P^1 = 4,2 \frac{E d^3 m^2}{3(m^2 - 1)D^2}$$

(II.123)

Die Ersatzkräfte aus den inneren Spannungen lassen sich mit nachfolgendem Verfahren ermitteln.

Die oben ermittelten Normalspannungen für die u- bzw. v-Achse werden in Tangential- und Radialspannungen transformiert. Die Kräfte aus den so ermittelten Tangentialspannungen werden wie oben angegeben, durch eine radial auf den Aussenrand wirkende Radialkraft ersetzt. In Anbetracht dessen, dass die vorliegende Untersuchung nur den Charakter einer Modelluntersuchung haben kann, ist es nicht erforderlich, die Tangentialkraft sehr exakt und genau in Radialkräfte zu überprüfen. Es dürfte vielmehr hier ein Mittelwert der Spannung bzw. der Kräfte völlig ausreichend sein um ein diskutables Ergebnis zu erzielen.

Die Normalspannungen für die kreisförmige Platte sind durch die Beziehungen II 63a und II 66a bekannt.

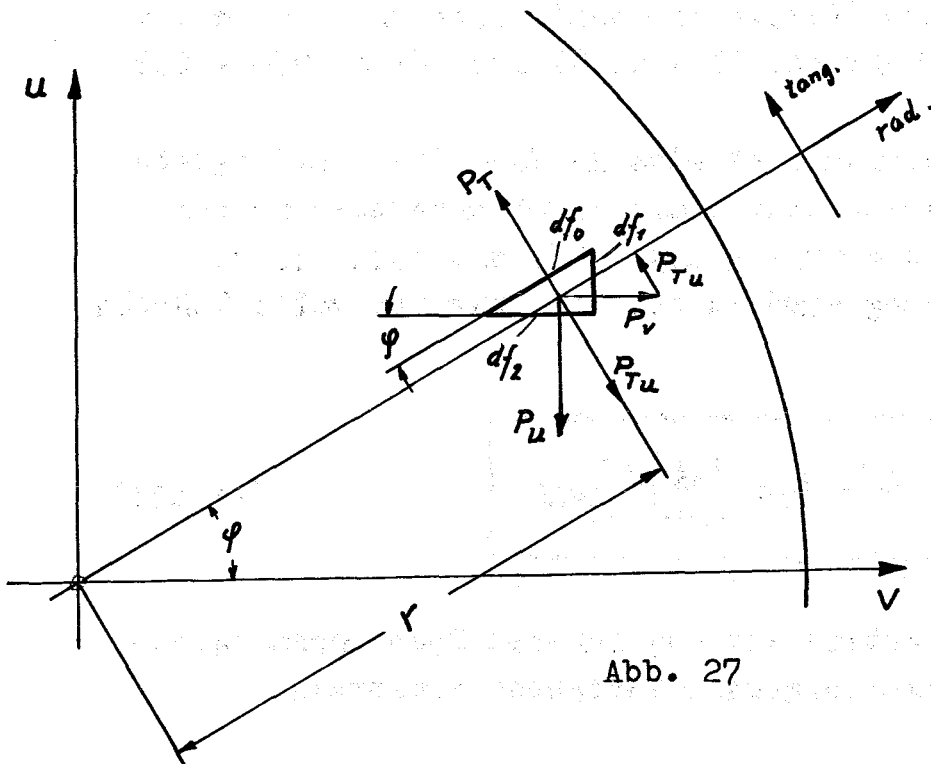


Abb. 27

Entsprechend Abb. 27 wirken in einem Elementarkörper der Federplatte, der sich im Abstand r vom Mittelpunkt der kreisförmigen Platte befinden möge die Kräfte aus den Normalspannungen σ_u bzw. σ_v . Diese Kräfte sind

$$P_u = \sigma_u df_2$$

$$P_v = \sigma_v df_1$$

Die gesuchte Tangentialspannung σ_T liefert die Kraft

$$P_T = \sigma_T df_0$$

Die Elementarflächen haben jeweils auf df_0 bezogen die Grösse

$$df_1 = df_0 \sin \varphi$$

$$df_2 = df_0 \cos \varphi$$

Die Tangentialkraft P_T ergibt sich ferner aus

$$P_T = P_{Tu} + P_{Tv}$$

wobei P_{Tu} bzw. P_{Tv} die Tangentialkomponenten der jeweiligen Normalkräfte sind. Diese sind

$$P_{Tu} = P_u \cdot \cos \varphi$$

$$P_{Tv} = P_v \cdot \sin \varphi$$

bzw.

$$P_{Tu} = \sigma_u \cdot df_u \cos^2 \varphi$$

$$P_{Tv} = \sigma_v \cdot df_v \sin^2 \varphi$$

so dass sich ergibt

$$P_T = \sigma_T df_0 = \sigma_u df_0 \cos^2 \varphi + \sigma_v df_0 \sin^2 \varphi$$

bzw.

$$\sigma_T = \sigma_u \cos^2 \varphi + \sigma_v \sin^2 \varphi$$

(II.124)

Die Ermittlung der Radialspannungen erübrigt sich, da diese für die Stabilitätsbetrachtungen ohne Interesse sind.

Der Winkel φ ergibt sich aus

$$\varphi = \arctg \frac{u}{v}$$

Für die weitere Rechnung wird auf Polarkoordinaten übergegangen.

Es ist dann

$$\sin \varphi = \frac{u}{r} \qquad \cos \varphi = \frac{v}{r}$$

bzw.

$$u = r \cdot \sin \varphi \qquad v = r \cdot \cos \varphi$$

Damit wird (II.65a) bzw. (II.66a) S. 87

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \mathcal{G}^2 \left[\left(v^2 - \frac{L^2(u)}{12} \right) \cos^2 \varphi + \left(u^2 - \frac{L^2(v)}{12} \right) \sin^2 \varphi \right]$$

Nach ist

$$L^2(u) = D^2 - 4u^2$$

$$L^2(v) = D^2 - 4v^2$$

bzw.

$$L^2(u) = D^2 - 4r^2 \sin^2 \varphi$$

$$L^2(v) = D^2 - 4r^2 \cos^2 \varphi$$

Für die Weiterrechnung ist nur der [] Ausdruck notwendig, er wird mit T bezeichnet.

$$T = \left[r^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{12} (D^2 - 4r^2 \sin^2 \varphi) \right] \cos^2 \varphi + \left[r^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{12} (D^2 - 4r^2 \cos^2 \varphi) \right] \sin^2 \varphi$$

setzt man nach

$$r = \rho \frac{D}{2}$$

so erhält man

$$T = \left[\rho^2 \frac{D^2}{4} \cos^2 \varphi - \frac{1}{12} (D^2 - \rho^2 D^2 \sin^2 \varphi) \right] \cos^2 \varphi$$

$$+ \left[\rho^2 \frac{D^2}{4} \sin^2 \varphi - \frac{1}{12} (D^2 - \rho^2 D^2 \cos^2 \varphi) \right] \sin^2 \varphi$$

oder

$$\frac{T}{D^2} = \frac{\rho^2}{4} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) - \frac{1}{12} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{1}{6} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

mit

$$n = 4 \frac{(2h)}{D^2}$$

oben eingeführt ergibt sich

$$\sigma_T = 2 \frac{E m^2 (2h)^2}{m^2 - 1 D^2} \left[\rho^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right] \quad (\text{II.125})$$

Mit dieser Tangentialspannung ist nunmehr die mittlere Kraft über dem Radius und dem Umfang zu ermitteln. Für den Radius ist der Mittelwert über den äusseren Bereich der Platte (Druckspannungen), d.h. von der Stelle ρ_0 ($\sigma_T = 0$) bis $\rho = 1$ zu bilden. Für die Umfangsrichtung genügt aus Symmetriegründen ein Bereich von $0 - \varphi - \frac{\pi}{4}$

Der Mittelwert in radialer Richtung ergibt sich nach

$$\sigma_{T_m} = \frac{1}{1 - \rho_0} \int_{\rho_0}^{\rho=1} \sigma_T \cdot d\rho \quad (\text{II.125.1})$$

In Umfangsrichtung ergibt sich der Mittelwert dann aus

$$\sigma_{Tu} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sigma_{Tm} \partial \varphi \quad (\text{II.125.2})$$

Die von diesen Spannungen herrührenden Kräfte wirken über eine Breite b von $\rho_0 \div 1$ und zwar auf beiden Seiten eines Plattenquerschnittes und sind den von aussen eingepägten Ersatzkräften, die über die volle Querschnittsbreite wirken, gleichzusetzen.

Für die Breite b ist ebenfalls dann wieder ein Mittelwert einzuführen.

Es ist ein mittleres ρ_0 zu bestimmen.

ρ_0 ergibt sich, wenn in Gl. II.125 der Klammerausdruck Null gesetzt wird.

Also

$$\rho^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

Daraus

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{1}{3(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi + \frac{2}{3} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)}} \quad (\text{II.125.3})$$

Der Mittelwert ist dann

$$\rho_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \rho_0 \partial \varphi$$

so dass man schliesslich erhält

$$2\sigma_{Tu} = (1 - \rho_{0,m}) \frac{D}{2} d = D \cdot P \quad (\text{II.126})$$

worin D der Plattendurchmesser und p eine gleichmässig verteilte radial nach innen wirkende Ersatzkraft je Längeneinheit des Umfanges ist.

Durch Umformen ergibt sich

$$\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi + \frac{2}{3} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{1}{3} (2 + \cos^2 2 \varphi)$$

so dass man damit erhält

$$\sigma_T = 2 \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{(2h)^2}{D^2} \left[\frac{1}{3} \rho^2 (2 + \cos^2 2 \varphi) - \frac{1}{3} \right]$$

und

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2 + \cos^2 2 \varphi}}$$

Damit ergibt sich entsprechend (II.125.1) σ_{Tm} zu

$$\sigma_{Tm} = \frac{2}{9} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{(2h)^2}{D^2} \left[\frac{(2 + \cos^2 2 \varphi)^{3/2} - 1}{(2 + \cos^2 2 \varphi)^{1/2} - 1} - 3 \right]$$

bzw. etwas umgeformt

$$\sigma_{Tm} = \frac{2}{9} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{(2h)^2}{D^2} \left[\cos^2 2 \varphi + (2 + \cos^2 2 \varphi)^{3/2} \right]$$

Damit wäre der Mittelwert der Spannung in Umfangsrichtung σ_{Tu} zu ermitteln. Dieser ist entsprechend (II.125.2)

$$\sigma_{Tu} = \frac{8}{9} \frac{E m^2}{m^2 - 1} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2 \varphi + (2 + \cos^2 2 \varphi) d \varphi$$

Die Integration wurde numerisch durchgeführt und ergab den Wert

$$J = 1,5025$$

so dass sich ergibt

$$\sigma_{T_u} = 0,425 \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{(2h)^2}{D^2} \quad (\text{II.127})$$

Für den Mittelwert von ρ_0 ergab sich aus der Gl. (II.125.3)

$$\sigma_{o_m} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(2 + \cos^2 2\varphi)^{3/2}} \cdot \partial\varphi$$

durch numerische Integration für das \int der Wert

$$J = 0,474$$

und damit

$$\rho_{o_m} = 0,474 \frac{4}{\pi} = 0,604$$

Die Ersatzbelastung des Randes wird damit nunmehr

$$P = \sigma_{T_u} \cdot (1 - \rho_{o_m}) \cdot d$$

oder

$$P = 0,425 \frac{E m^2}{m^2 - 1} \frac{d}{D^2} (2h)^2 (1 - 0,604) \quad (\text{II.128})$$

Diese Randbelastung ist wie oben dargestellt der für die krit. Randbelastung einer ausknickenden Scheibe ergebenden Last gleichzusetzen.

Also

$$P = P'$$

bzw.

$$4,2 \frac{E m^2}{3(m^2-1)} \frac{d^3}{D^2} = 0,168 \frac{E m^2}{m^2-1} \frac{d}{D^2} (2h)^2$$

woraus sich ergibt

$$\frac{d^2}{(2h)^2} = 0,12$$

bzw.

$$\boxed{\frac{d}{2h} = 0,346}$$

(II.129)

Aus Messungen an dünnen Federscheiben aus Plexiglas ergab sich für die Knick- bzw. Ausweichgrenze noch folgender Zusammenhang:

Offensichtlich neigen alle kreisrunden verwölbten Federscheiben dann zum Ausweichen, wenn die nach (II.93) gerechnete Kennlinie innerhalb des Bereiches $0 < \varphi^* < 1$ ein Maximum zeigt. Für die Federscheibenabmessungen bei denen das Maximum bei einem $\varphi^* = 0$ auftritt, besteht dann gerade die Ausweichgrenze.

Das Verhalten ist sofort verständlich, wenn man bedenkt, dass bei einer theoretischen Federkennlinie bei der ein Maximum, also nach diesem ein fallender Kennlinienabschnitt vorliegt, für eine diskrete Kraft zwei Weggrößen auf der Kurve gegeben sind. Derartige Kraft-Weg-Verhältnisse sind als instabil bekannt, d.h. das belastete Teil versucht, sich dem Zustand I zu entziehen und zum stabilen Zustand II auszuweichen.

Im Falle der Hypo-Feder kann das Ausweichen ohne die Änderung der Federkraft geschehen, d.h. die Kennlinie der Feder verläuft auf dem Ausweichast parallel zur Wegkoordinatenachse.

Die Ausweichgrenze lässt sich dann wie folgt ermitteln: Gl. (II.93) lautet etwas umgeschrieben

$$P_{\phi_{ges}} = \frac{2}{3} \pi \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h_0)(1-\varphi^*) + 0,282 \frac{E m^2}{m^2-1} \frac{d}{D^2} (2h_0)^3 \varphi^* (1-\varphi^{*2})$$

Im Ausweichfall hat diese Beziehung ein Maximum, d.h. ihre Ableitung nach φ^* muss für ein bestimmtes 0 werden. Also

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi^*} = 0$$

Schreibt man abgekürzt

$$P_{\phi_{ges}} = A^*(1-\varphi^*) + B^* \varphi^* (1-\varphi^{*2})$$

so erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi^*} = -A^* + B^* - 3B^* \varphi^{*2}$$

Wie oben dargestellt, ergibt sich die Ausweichgrenze wenn

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi^*} = 0 \text{ für } \varphi^* = 0$$

damit wird

$$A^* = B^*$$

und daraus

$$\frac{d^2}{(2h_0)^2} = 0,422 \frac{m}{\pi(m-1)} \quad (\text{II.130})$$

Ermittelt man nach dem gleichen Verfahren den krit. Ausweichwert mit den auf Grund von Messergebnissen gebildeten korrigierten Beziehungen Gl. II.98 so erhält man

$$\frac{d}{2h} = 0,55 \frac{m}{\pi(m-1)} \quad (\text{II.131})$$

Vergleicht man das Ergebnis der verschiedenen Betrachtungen, so kann man folgendes feststellen:

- 1) In allen Fällen, sowohl bei quadratischen als auch bei kreisrunden Federplatten wird die Ausweichgrenze nur von dem Verhältnis Plattenstärke zu max. Federweg bestimmt, sofern die Rechnung mit den unkorrigierten Beziehungen für die Tragfähigkeit der Platte durchgeführt wird.
- 2) Dass die Zahlenwerte für das kritische Verhältnis $d/2h$ bei allen Rechnungen in etwa der gleichen Grössenordnung liegen.
- 3) Die Unterschiede in diesen Zahlenwerten sind sofort verständlich, wenn man die bei der Ermittlung des Korrekturfaktors für die Tragfähigkeit gemachten Überlegungen sinngemäss auch hier beachtet.
Bei der Durchrechnung nach Kap.3.2 ergab sich für die Ausweichgrenze ein Wert von

$$\frac{d}{2h} = 0,346$$

Hierbei waren die Spannungen nach Gl. (II.65a) und (II.66a) als unkorrigiert vorausgesetzt.

Bei einer Durchrechnung nach dem Verfahren, Kap.3.2. S. 109 können dieser Rechnung folgende Formeln aus Ausgangsbasis zu Grunde gelegt werden.

1) Die unkorrigierten Beziehungen nach Gl. (II.79)

Dann ergibt sich für

a) Plexiglas ($m = 2,86$)

$$\frac{d}{2h} = 0,454$$

b) Stahl ($m = 3,33$)

$$\frac{d}{2h} = 0,438$$

2) Die korrigierten Beziehungen nach Gl. II.98

Dann ergibt sich für

a) Plexiglas

$$\frac{d}{2h} = 0,270$$

b) Stahl

$$\frac{d}{2h} = 0,253$$

Aus den Kurven der Blätter DA 1 - 13 ist für Plexiglas ein Wert von

$$\frac{d}{2h} = 0,310$$

abzulesen.

Die nach den korr. Formeln ermittelten Ausweichwerte liegen zwar tiefer als die gemessenen, diesen jedoch am nächsten.

Die nach dem Verfahren der gedrückten Scheibe gerechneten liegen ebenso gut zur Messung, jedoch nach der anderen Seite, d.h. zu grösseren Werten hin.

Die nach den unkorrigierten Beziehungen gerechneten Ausweichwerte liegen soweit von den der Messung ab, dass sofort zu ersehen ist, dass die benutzten Formeln unzureichend sind.

Es ergibt sich also auch aus diesen Ergebnissen, dass die mittlere Verwölbung tatsächlich geringer sein muss als den ursprünglichen Ableitungen zu Grunde gelegt worden ist.

4. Formänderungsarbeit

Die bei der Durchfederung der Federplatten gespeicherte Arbeit kann nach Weber S. 64 (197/198) ermittelt werden. Es soll die Formänderungsarbeit nur für vorverwölbten Platten, die ja als Federelemente in erster Linie interessant sind, beschrieben werden.

Die Formänderungsarbeit ergibt sich zu:

$$FA = \int_{-\psi}^{+\psi} M \cdot d\psi$$

Das Moment M besteht aus 2 Komponenten, dem Moment der Schubspannungen und dem der Normalspannungen. Also ist

$$M = M_S + M_N$$

Weiter kann man nach Gl. (II.9) setzen

$$\psi = \frac{2h}{L} \text{ bzw. } \partial\psi = \frac{1}{L} \partial(2h)$$

Dann ist

für 1) die quadratische Federplatte

$$FA_{\Phi} = \int_{-(2h)}^{+(2h)} \frac{M_S \Phi}{L} \cdot \partial(2h) + \int_{-2h}^{+2h} \frac{M_N \Phi}{L} \partial(2h)$$

Mit (II.35) und (II.88a), wobei dort die Fkt. $H(\psi^*)$ aufgelöst ist, lautet

$$FA_{\Phi} = \frac{1}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} \int_{-2h}^{+2h} (2h) \partial(2h) + \frac{0,5}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} \int_{-2h}^{+2h} (2h_0 - 2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0 - 2h)^2 \right] \partial(2h)$$

Integriert und Grenzen und φ^* nach (II.83) eingeführt ergibt sich

$$FA_{\Phi} = \frac{1}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h_0)^2 + \frac{1}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} \left[2h_0^4 (1-\varphi^*)^2 - (1-\varphi^*)^3 + \frac{(1-\varphi^*)^4}{4} \right] \quad (\text{II.132})$$

Für den Höchstwert von $2h = 2h_0$, d.h. $\varphi^* = 0$ wird dann die max. Formänderungsarbeit für die ebengedrückte Platte

$$FA_{\Phi \max} = \frac{1}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{L^2} (2h_0)^2 + \frac{1}{180} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{L^2} (2h_0)^4 \quad (\text{II.133})$$

Für 2) die kreisrunde Federplatte

$$FA_{\phi} = \int_{-2h}^{+2h} \frac{M_S \phi}{L} \partial(2h) + \int_{-2h}^{+2h} \frac{M_N \phi}{L} \partial(2h)$$

Mit (II.52) und (II.92a) wobei auch hier $H(\varphi)$ aufgelöst ist, schreibt sich

$$FA_{\phi} = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{DL} \int_{-2h}^{+2h} (2h) \partial(2h) + \frac{0,85}{180} \frac{Em}{m^2-1} \pi \frac{5/2}{DL} \int_{-2h}^{+2h} (2h_0 - 2h) \left[(2h_0)^2 - (2h_0 - 2h)^2 \right] \partial(2h)$$

Integriert, die Grenzen und wieder φ^* nach (II.83) eingeführt ergibt sich

$$FA_{\phi} = \frac{1}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h)^2 (1-\varphi^*)^2 + \frac{1,7\sqrt{2}}{180} \frac{Em}{m^2-1} \pi^{5/2} \frac{d}{D^2} \left[2h_0^4 (1-\varphi^*)^2 - (1-\varphi^*)^3 + \frac{(1-\varphi^*)^4}{4} \right]$$

(II.134)

Für den Höchstwert von $(2h) = (2h_0)$ erhält man

$$FA_{\phi} = \frac{1}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h_0)^2 + \frac{1,7\sqrt{2}}{720} \frac{Em}{m^2-1} \frac{d}{D} (2h_0)^4$$

(II.135)

Von Interesse ist noch zu wissen, wie das Verhältnis der Formänderungsarbeit aus der Schubspannung zu der aus der Normalspannung ist.

Es wird gebildet

$$\Phi_{\phi} = \frac{FA_N}{FA_S}$$

Dann ergibt sich für die

1) quadratische Federplatte

$$\Phi_{\phi} = \frac{(2h_0)^2 - (2h_0)(2h) - \frac{(2h)^2}{4}}{15(m-1)d^2}$$

bzw. für den Höchstwert von $(2h) = (2h_0)$

$$\Phi_{\phi \max} = \frac{(2h_0)^2}{60(m-1)d^2}$$

(II.136)

2) kreisrunde Federplatte

$$\Phi_{\phi} = \frac{1,7 \cdot \sqrt{2} \pi^{3/2} (2h_0)^2 - (2h_0)(2h) + \frac{(2h)^2}{4}}{60(m-1)d^2}$$

bzw. der Höchstwert für $(2h) = (2h_0)$

$$\Phi_{\phi_{\max}} = \frac{1,7 \sqrt{2} \pi^{3/2} (2h_0)^2}{240(m-1)d^2} \quad (\text{II.137})$$

Ein kleiner Zahlenvergleich für Stahl $m = \frac{10}{3}$ und $(2h_0) = 2d$ zeigt, dass die Anteile der Normalspannungsarbeit gegenüber denen der Schubspannungsarbeit klein sind.

Z.B.

$$\Phi_{\phi_{\max}} = \frac{(2d)^2}{60 \cdot 2,33 \cdot d^2} = 0,0286$$

bzw.

$$\Phi_{\phi_{\max}} = \frac{1,7 \sqrt{2} \pi^{3/2} (2d)^2}{240 \cdot 233 \cdot d^2} = 0,0172$$

Von weiterem Interesse ist noch die spezifische, d.h. auf das Volumen der Federplatte bezogene Formänderungsarbeit für die Durchfederung $(2h) = 1$.

Dann ergibt sich für

1) die quadratische Federplatte

$$FA'_{\phi} = \frac{1}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^2}{L^4} + \frac{1}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{1}{L^4} \left[(2h_0)^2 - (2h_0) \right] \quad (\text{II.138})$$

2) für die kreisrunde Federplatte

$$FA'_{\phi} = \frac{4}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^2}{D^4} + \frac{1,7\sqrt{2}}{45} \frac{Em}{m^2-1} \frac{\pi^{3/4}}{D^4} \left[(2h_0)^2 - (2h_0) \right] \quad (\text{II.139})$$

Man ersieht aus diesen Beziehungen, dass

- 1) der überragende Teil der Formänderungsarbeiten von den Schubspannungen geleistet wird. Der Anteil der Normalspannungsarbeit kann gegen diese im allgemeinen vernachlässigt werden.
- 2) die spezifische Formänderungsarbeit mit Verkleinerung der Durchmesser D bzw. der Kantenlänge L zunimmt, desgleichen mit der Vergrößerung der Dicke d .

Vernachlässigt man den Normalspannungsanteil der Formänderungsarbeit und betrachtet nur den reinen Drillanteil, so lassen sich einige sehr aufschlussreiche Beziehungen ableiten.

Für eine gegebene max. Durchfederung $(2h_0)$ ist die auf das Volumen der Federplatte bezogene Formänderungsarbeit

$$FA_V = \frac{4}{3} \frac{Em}{m+1} \frac{d^2}{D^4} (2h_0)^2 \quad (\text{II.140})$$

Ersetzt man $(2h_0)$ aus (II.40b), so erhält man

$$FA_V = \frac{1}{3} \frac{m+1}{Em} \tau_{\max}^2 \quad (\text{II.141})$$

Für Stahl mit $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ und $m = 10/3$ ergibt sich dann

$$FA_v = 2,066 \cdot 10^{-7} \tau_{max}^2$$

Man sieht, dass die max. speicherbare Formänderungsarbeit nur von den erreichbaren Höchstschubspannungen abhängig ist.

5. Die Nutzwerte der Hypo-Feder

Unter den Nutzwerten einer Hypo-Feder sollen zwei charakteristische Kenngrößen verstanden werden.

1) Der Volumennutzwert η_v

Er ist das Verhältnis der speicherbaren Formänderungsarbeit bezogen auf das Werkstoffvolumen der Feder. Also

$$\eta_v = \frac{FA}{V} = \frac{\text{cm kp}}{\text{cm}^3} \quad (\text{II.142})$$

FA = Formänderungsarbeit

V = Werkstoffvolumen

2) Der Bauraumnutzwert

Er ist gegeben durch den für den Einbau der Feder erforderlichen konstruktiven Bauraum bezogen auf das aktive Werkstoffvolumen der Feder

$$\eta_R = \frac{V_k}{V_a} \quad (\text{II.143})$$

V_k = Konstruktionsbaureum

V_a = aktives Feder-volumen

Für die vorliegende Betrachtung wird für die Formänderungsarbeit nur die aus der reinen Verdrillung herkommende Arbeit benutzt. Die aus den zusätzlichen Normalspannungen kommende Arbeit wird vernachlässigt. Sie ist bei Stahlfedern ohnehin gering ($< 5\%$).

Für die Tragfähigkeit der kreisrunden Feder, die hier nur betrachtet werden soll, gilt dann

$$P = \frac{2}{3} \pi \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h) \quad \begin{array}{l} d = \text{Federstärke} \\ D = \text{Feder } \emptyset \end{array}$$

Für die zur Ebene durchgeformten Federn wird der Federweg $(2h) = (2h_0)$.

Dann wird die gesamte Formänderungsarbeit

$$FA_{(2h_0)} = \frac{1}{3} \pi \frac{E m}{m+1} \frac{d^3}{D^2} (2h_0)^3 \quad (\text{II.144})$$

Auf das Federvolumen

$$V = \frac{\pi D^2}{4} d \quad \text{bezogen}$$

ergibt sich damit

$$\eta_V = \frac{4}{3} \frac{E m}{m+1} \frac{d^2}{D^4} (2h_0)^2 \quad (\text{II.145})$$

Zweckmässigerweise bezieht man η_V auf die max. erreichbare Schubspannung τ_{max} .

Nun ist

$$\tau_{max} = 2 \frac{E m}{m+1} \frac{d}{D^2} (2h_0) \quad (\text{II.146})$$

Eliminiert man in (5) $(2h_0)$, so ergibt sich schliesslich

$$\eta_V = \frac{1}{3} \frac{m+1}{E m} \tau_{max}^2 \quad (\text{II.147})$$

bzw.

$$\eta_0 = \frac{\tau_{max}^2}{6 E} \quad (\text{II.148})$$

Diese Beziehung gilt sowohl für kreisrunde wie für quadratische Federplatten.

Für Stahl mit $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ und $m = 10/3$
ergibt sich damit

$$\eta_V = 2,066 \cdot 10^{-7} \tau_{max}^2 \quad (\text{II.149})$$

Als zulässige maximale Schubspannung kann im Normalfalle
für statische Last

$$\tau_{max} = 80 \div 90 \text{ Kp/mm}^2$$

eingesetzt werden.

Wie eigene Versuche nachgewiesen haben, lässt sich die
Hypo-Feder gut setzen, so dass rechnerische Spannungswerte
von

$$\tau'_{max} = 105 \div 115 \text{ Kp/mm}^2$$

eingesetzt werden können.

Dann ergeben sich folgende Volumennutzwerte.

1) Für $\tau = 80 - 90 \text{ kp/mm}^2$

$$\eta_{V1} = 13,2 - 16,7 \text{ cm kp/cm}^3$$

2) Für gesetzte Federn

$$\tau = 105 - 115 \text{ kp/cm}^3$$

$$\eta_{V2} = 22,6 - 27,2 \text{ cm kp/cm}^3$$

Vergleicht man diese Werte mit den Werten der Abb. 3 in der
Darstellung von Niephage und Muhr [1], so kann man feststellen,
dass die Hypo-Feder in einem recht günstigen Bereich liegt, d.h.
sie ist z.B. durchaus mit der Schraubenfeder vergleichbar.

Der Baunutzraum η_R ist bei der Hypo-Feder nahe 1, da das Werkstoffvolumen den ganzen Konstruktionsraum ausfüllt. Bei Tellerfedern nach DIN 2093 mit einem Durchmesser Verhältnis von $d_a/D = 2$ ergibt sich ein

$$\eta_R = 0,75$$

Bei Runddrahtschraubenfedern ist dieser Faktor, dann, wenn man den Innenraum der Feder von der Betrachtung ausschliessen kann

$$\eta_R = \frac{H}{4} = 0,785$$

Bei der quadratischen Schraubenfeder kann er gegen 1 gehen. Allerdings ist zu beachten, dass bei dem grossen Teil aller Schraubenfedern der Innenraum nicht anderweitig genutzt werden kann, so dass der Bauraumnutzwert erheblich absinken muss. Hierzu Lit. [2] [3].

Bildet man das Produkt aus Volumennutzwert und Bauraumnutzwert als Gesamtnutzwert

$$\eta_{ges} = \eta_v \cdot \eta_R$$

so erhält man für die Hypo-Feder sehr gute Gesamtwerte.

6. Krafteinleitung und Stützeffekt

Bei sämtlichen bisherigen Betrachtungen war vorausgesetzt worden, dass die Einleitung der Kraft in die Federplatte genau an den Punkten des Plattenrandes erfolgt, an denen die x-z- bzw. y-z-Ebene diesen schneidet. Die Einleitung der Kraft erfolgt dabei an einer Randkante der Platte.

In unmittelbarer Nachbarschaft des Krafteinleitungspunktes kann die Federplatte als Biegeträger aufgefasst werden. Aus der Theorie der Biegeträger ist bekannt, dass in der Nähe des Krafteinleitungspunktes die Spannungsverteilung im Querschnitt von der eines Punktes grösserer Entfernung vom Lastpunkt abweicht. Es ist weiter bekannt, dass das Angleichen des Spannungszustandes am Krafteinleitungspunkt an die normale Spannungsverteilung über einer Ausgleichsstrecke erfolgt, deren Länge etwa der Dicke des Biegeträgers entspricht. Im Falle der Feder wäre das die Plattendicke d .

Von früheren Betrachtungen her ist bekannt, dass bei der Federplatte die Schubspannungen zur Ecke des Querschnittes hin auf Null abnehmen, weiter, dass diese auf der Schmalseite des Querschnittes also am Rand der Scheibe nur ca. $3/4$ der maximalen Schubspannungen betragen. Auch geht wie oben dargestellt ist, der Abstieg der Schubspannungen zur Ecke des Querschnittes hin auf einer Strecke von ca. $1,26 d$ vor sich, was etwa der Länge der Ausgleichsstrecke entspricht. Da weiterhin die tangentialen Normalspannungen an den Krafteinleitungspunkten mit dem Beiwert $0,5$ 25 % geringer sind als ihr Höchstwert (Beiwert $0,666$) auf der Scheibe und die radialen Normalspannungen nur den Wert $0,471$ erreichen, sind diese Punkte bezüglich der Verformungsspannungen als relativ gering belastet anzusehen, so dass die Erhöhung der örtlichen Spannungen am Lastangriff nicht mehr von Bedeutung ist.

Ist die Strecke auf der sich Ränder zweier Feder-
scheiben berühren, von der Länge b , so verkleinert
sich damit der Momentabstand auf das Mass l_1 und
das eingeleitete Moment wird dann

$$M' = \frac{Pl_1}{2}$$

l_1 ergibt sich wie man sofort ersieht zu

$$l_1 = l - 2C$$

worin C ist

$$C = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

Also

$$l_1 = l - \frac{b}{\sqrt{2}}$$

(II.150)

Wie gross b als Fkt. der Belastung bzw. der Durchfede-
rung ist, lässt sich theoretisch, wenn überhaupt, nur
unter grössten Schwierigkeiten ermitteln. Es dürfte
zweckmässiger sein, diesen Wert empirisch zu bestimmen.

Das Verhältnis der Momente wird dann

$$\frac{M'}{M} = 1 - \frac{b}{L\sqrt{2}}$$

(II.151)

Dieses Verhältnis gibt an in welchem Masse die Tragfähig-
keit sich durch den Einfluss der Streckenaufgabe verändert.
Da das Mass b eine Fkt. der Durchfederung ($2h$) ist,
schreibt man zweckmässigerweise für den Stützfaktor st

$$st = \frac{M'}{M} = 1 - \frac{b(2h)}{L\sqrt{2}}$$

(II.152)

Effektiv bedeutet dies, dass mit zunehmender Verformung die Steifigkeit der Feder grösser wird. Die Kennlinie wird zunehmend steiler. d.h. die Feder härter.

Die effektive Tragfähigkeit der kreisrunden Federscheibe entsprechend II.80 wird dann

$$P_{\phi \text{ ges eff}} = \frac{P_{\phi \text{ ges}}}{St} \quad (\text{II. 153})$$

In der Praxis wird man Hypo-Federscheiben an den Auflagen leicht anschleifen um von vorneherein günstige Lastübertragungsverhältnisse zu schaffen. Dadurch ergeben sich an den Berührungsstellen geringere örtliche Spannungsspitzen. Gleichzeitig muss jedoch eine Versteifung der Kennlinie mit in Kauf genommen werden, die jedoch in ihrer Grösse dann leicht überschaubar ist.

III. Versuche und Messungen

1. Modelle

Zum Studium einzelner Federplatten und ganzer Federsäulen wurden Modellfedern zunächst aus Plexiglas hergestellt, die ausschliesslich qualitativen Betrachtungen dienen sollten. Plexiglas ist wie bekannt, wegen seiner leichten Bearbeitbarkeit und wegen seiner Durchsichtigkeit für den Modellbau ein beliebter und attraktiver Werkstoff. Für den vorliegenden Fall war es besonders vorteilhaft, dass dieses Material durch Erwärmen auf ca. 150 - 160 °C verformbar wird, leicht in beliebige Formen gebracht werden und durch Abkühlen dort erhärten kann. Es war damit möglich, aus Plexiglas funktionsfähige Federelemente und Federsäulen ohne besonders grossen Aufwand herzustellen.

Die Fertigung der Modell-Federplatten geschah in Gipsformen, deren massgebende Oberfläche nach der Form des hyperbolischen Paraboloides (Sattelfläche) gestaltet war. Das Giessen der Gipsformen wurde in einem Blechkasten vorgenommen, bei dem die Oberkanten von 2 gegenüberliegenden parallelen Wänden zueinander windschief lagen. Der in den Kasten gegossene Gipsbrei wurde beim Erhärten über die windschiefen Kanten mit einem Lineal abgezogen.

Zwischen einem Paar solcher Gipsformen wurden die in einem Wärmeschrank auf Erweichungstemperatur gebrachten Plexiglasplatten dann verformt, Abb. 33. Nach dem Verformen wurden aus den einzelnen Platten die Federn entweder ausgesägt oder bei runden Platten paketweise zwischen Matrizen auf Form gedreht und falls erforderlich, ebenfalls zwischen diesen Matrizen paketweise mit Führungsnuten versehen.

Zum vorläufigen Studium des Verhaltens der Hypo-Feder wurden neben einzelnen Federplatten unterschiedlicher Form und Abmessungen noch verschiedene Modelle von Federsäulen hergestellt.

Abb. 34 zeigt im Foto ein aus 8 Scheiben aufgebautes Hand- und Anschauungsmodell.

Abb. 35 zeigt im Foto eine grössere Federsäule in einem Dämpfergefäss, das mit gefärbtem Wasser als Dämpfungsflüssigkeit gefüllt ist.

Im Verlauf der Arbeiten zeigte sich bei orientierenden Belastungsversuchen, dass die aus Plexiglas hergestellten Federplatten sehr gut geeignet waren um an diesen auch quantitative Untersuchungen anzustellen. Es wurden deshalb eine grössere Anzahl verschiedener Federplatten hergestellt mit dem Ziel an diesen möglichst exakte Kennwerte zu ermitteln, die auch für die Kontrolle der Rechnung benutzt werden konnten.

Es zeigt sich weiter, dass Plexiglas auch noch deswegen ein für die vorliegenden Untersuchungen günstiger Werkstoff war, weil sein relativ sehr niedriger E-Modul (32000 kp/cm^2) grosse Durchfederungen erlaubt ohne dass die Spannungen in der Platte unzulässig hohe Werte erreichen. Damit war es möglich zur Stabilität der Federplatte zwar zunächst nur orientierende aber dennoch sehr aufschlussreiche Untersuchungen durchzuführen.

Nachdem für die kommerzielle Herstellung der Federn ein Lizenznehmer gefunden war, wurden von diesem Federplatten aus Stahl, zunächst nur kreisrunde und in beschränkter Anzahl gefertigt und hier vermessen.

2. Messungen

Gemessen wurde

- 2.1 Das Kraft-Weg-Verhalten von Einzel-Federplatten
- 2.2 Die Werkstoffspannungen an diskreten ausgezeichneten Orten der Platten.

Die Kraft-Weg-Messungen wurden auf einer Werkstoffprüfmaschine (5 Mp) (Bauart Zwick) mit elektronischer Kraftmessung und mechanischer Wegaufzeichnung vorgenommen. Das Aufbringen der Last auf die Platten geschah über eine Belastungseinrichtung entsprechend Abb. 36. Den Einbau der Belastungseinrichtung in der Maschine mit eingelegter Federplatte zeigt für eine quadratische Platte Abb. 37 für eine runde Platte Abb. 38 und zwar je einmal in vorverwölbtem und in flachgedrücktem, d.h. belastetem Zustand der Platte.

Wie sich später herausstellte, ist diese Art Last auf die Platten aufzubringen, nicht sehr glücklich. Durch die Reibung der kleinen Kugeln in den Pfannen der Einrichtung entstehen an dem Lastangriffspunkt kleine zusätzliche Momente, die das Messergebnis etwas fälschen. Da die Messungen zunächst jedoch nur orientierenden, keinen abschliessenden Charakter haben sollten, schien diese Art der Lastübertragung vertretbar. Wie sich unten zeigt, waren die gefundenen Messergebnisse dennoch durchaus befriedigend und für die Beurteilung der Rechnung gut geeignet.

Die Spannungsmessungen wurden mittels Dehnmessstreifen in bekannter Weise durchgeführt und ausgewertet. Auf Einzelheiten wird an gegebenem Ort näher eingegangen.

Untersucht wurde das Kraft-Weg-Verhalten an

1. Quadratischen ebenen Platten
2. Quadratischen verwölbten Federscheiben
3. Kreisrunden ebenen Platten
4. Kreisrunden verwölbten Federscheiben

Die Dicke der einzelnen untersuchten Scheiben betrug in den meisten Fällen ca. 3 mm, einige wenige Scheiben waren bis zu 4,5 mm dick.

Die Abmessungen der untersuchten Platten aus Plexiglas betragen bei den

quadratischen Scheiben rd. 92 mm
bei den kreisrunden Scheiben 100 mm \emptyset

Die untersuchten Federplatten aus Stahl hatten einen Durchmesser von 88 mm und lagen in Stärken von 1; 2; 3 und 4 mm vor.

Für Stabilitätsuntersuchungen wurden grössere Federplatten aus Plexiglas bis zu einem Durchmesser von 130 mm verwendet.

Die elastischen Werte für Plexiglas wurden der Literatur entnommen bzw. vom Hersteller erfragt. Es wird angegeben

$$E = 32000 \text{ kp/cm}^2$$
$$1/m = 0,35 \text{ bzw. } m = 2,86$$

Der E-Modul wurde für den ganzen Messbereich als konstant eingesetzt. Ob und wie weit diese Annahme bei Plexiglas berechtigt ist, oder ob der E-Modul mit zunehmender Belastung abnimmt, konnte nicht in Erfahrung gebracht werden. Eine gesonderte Untersuchung bzw. Nachprüfung hierzu wurde nicht in Betracht gezogen, da diese über die vorliegende Aufgabe hinausgegangen wäre.

Wie gezielte Untersuchungen ergaben, sind durch die Verformung der Plexiglasscheiben im warmen Zustand nach der angegebenen Methode keine bleibenden inneren Spannungen entstanden.

Messungen an ebenen Platten wurden vorzugsweise deshalb vorgenommen, um die Rechnungen zu bestätigen, ferner um der Praxis gesicherte Unterlagen für den Einsatz auch ebener Elemente in Federsäulen zusammen mit Hypo-Federn bieten zu können.

Die Messergebnisse für die erst genannten 4 Gruppen von Federplatten sind in Abb. D1 bis Abb. D 19 gebracht. Die Messergebnisse an den aus Stahl (Werkstoff Nr. gefertigten Federscheiben zeigen Abb. DS 1 bis DS 8.

Die für Stabilitätsbetrachtungen gemachten Messergebnisse sind in Ab. DA 1 bis DA 13 gebracht. Für diese Untersuchungen wurden ausschliesslich kreisrunde Scheiben benutzt.

3. Besprechung der Messergebnisse

Die Diagramme $D_1 - D_{19}$ betreffen sämtliche Messungen an Modellplatten aus Plexiglas.

Die elastischen Werte sind mit

$$E = 32\,000 \text{ kp/cm}^2$$

$$m = 2,86$$

in die Rechnung eingeführt.

Die Diagramme sind Umzeichnungen von Schrieben der benutzten Prüfmaschine. Die stark ausgezogene Kurve ist die geschriebene Kraft-Weg-Kurve.

Die dünn gezeichneten Kurven sind diejenigen, die sich aus der theoretischen Rechnung ergaben.

Die strichpunktierte dünne Gerade ist die Kraft-Weg-Kurve aus der reinen Verdrillungstheorie, d.h. diejenige, die sich aus dem ersten Glied der jeweiligen Tragfähigkeitsformeln ergibt.

Die Diagramme D_1 bis D_4 betreffen ebene quadratische Platten

von durchweg gleicher Kantenlänge und etwa gleicher Materialstärke.

Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung kann als relativ gut bezeichnet werden.

Die Ursachen für die kleinen noch bestehenden Abweichungen zwischen beiden Kurven sind darin zu suchen, dass:

- 1) der E-Modul der Messung nicht mit dem der Rechnung übereinstimmt.
- 2) der E-Modul nicht unabhängig von der Belastung ist.
- 3) Auf Reibung in der Belastungsvorrichtung.
- 4) ein gewisser Beuleffekt wie er anschliessend besprochen wird, auftritt.

Letzterer wird sich besonders bei kleinen Belastungen stärker bemerkbar machen als bei höherer Last.

Die Diagramme D_5 bis D_{11} betreffen verwölbte quadratische Platten

also echte Hypo-Federn von durchweg gleicher Kantenlänge jedoch leicht unterschiedlicher Materialstärke.

Auch hier kann wieder von einer recht guten Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung gesprochen werden (hierzu noch die anschliessende Bemerkung).

Wie bereits bei der theoretischen Betrachtung dargelegt worden ist, ergibt sich bei den verwölbten Federscheiben, für das Moment aus den Normalspannungen dann der Wert 0 wenn die Platte in eine Ebene hin verformt worden ist.

Dieser Sachverhalt liefert ein weiteres Kriterium für die Beurteilung der Brauchbarkeit der Rechnung.

Bei den Messungen D10 und D11 kann in dieser Hinsicht eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden.

Bei Diagramm D7, das an einer Platte der gleichen Abmessung wie D10 gemessen wurde, kann möglicherweise eine Abweichung des E-Moduls für die schlechte Übereinstimmung angenommen werden. Die Diagramme D5 und D8 zeigen eindeutig, dass der Messung ein niedrigerer E-Modul als er bei der Rechnung eingesetzt wurde, vorgelegen haben muss, denn es zeigt sich sofort eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung, wenn die gestrichelte Gerade leicht nach oben geschwenkt wird.

Die Diagramme D12 bis D15 betreffen ebene kreisrunde Platten

vom gleichen Aussendurchmesser jedoch verschiedener Materialstärke.

Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist so gut, dass sie keiner besonderen Erörterung bedarf.

Ein Beuleffekt liegt sicherlich auch hier vor. Er wird jedoch aus später noch darzulegenden Gründen kaum besonders erkennbar sein.

Die Diagramme D16 bis D19 betreffen verwölbte kreisrunde Platten gleichen Durchmessers jedoch unterschiedlicher Materialstärke.

Bei Diagramm D16 liegen Messung und Rechnung so aufeinander, dass eine gerechnete Kurve nicht gezeichnet werden konnte.

Die anderen 3 Diagramme zeigen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung, lediglich bei D18 und D19 sind kleine Abweichungen vorhanden, die jedoch auf unvermeidliche Streuung bei der Messung zurückgeführt werden können.

An dieser Stelle soll noch eine weitere Bemerkung eingefügt werden.

Wie bereits früher dargestellt, konnte Übereinstimmung bei verwölbten Platten zwischen Messung und Rechnung nur durch die Einführung eines Beiwertes K_{ϕ} bzw. K_{ϕ} erzielt werden.

Bei verwölbten Platten, sowohl der quadratischen als auch bei der kreisrunden liegen die Rechnungsergebnisse nach der unkorrigierten Rechnung Formel (II.88, II.92) über denen der Messung.

Da für die zur Ebene durchgedrückten Platten Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung besteht, kann die Ursache für die Abweichung nur in den Normalspannungen bzw. den von diesen erzeugten Momenten gesucht werden.

Bei der Verformung einer verwölbten Platte entstehen wie schon dargestellt, im Aussenbereich der Scheibe Druckspannungen, im Zentralbereich Zugspannungen. Die Zugspannungen versuchen den inneren Bereich zu strecken, d.h. von der verwölbten Form zur ebenen hin zu verschieben. Die Druckspannungen dagegen versuchen

den äusseren Bereich auszuknicken, d.h. stärker zu verwölben. Durch diese Wirkungen entsteht eine Form der Scheibe die von der Ausgangsform abweicht. Diese Abweichung ist qualitativ in Abb. 34 skizziert. Diese Abb. zeigt die Mittelebene einer Scheibe, geschnitten längs einer u- oder v-Achse. Die strichpunktierte Linie soll die Kurve der Ausgangsform sein.

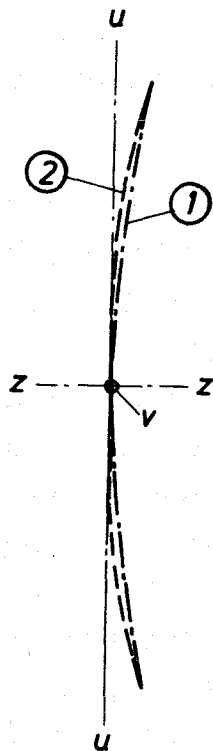


Abb. 34

Diese ist eine Parabel 1. Durch die Normalspannungen wird die Form verzerrt und zwar in eine solche wie sie gestrichelt gezeichnet ist 2. In dieser verzerrten Lage sind die Hebelarme der Spannungen, die das Moment aus den Normalspannungen ergeben, insgesamt kürzer geworden, so dass als Folge davon das Moment auch kleiner werden muss.

Theoretisch, d.h. quantitativ ist diese Erscheinung kaum zu erfassen. Sie soll deshalb in den Formeln für das Kraft-Dehnverhalten der Federscheibe mit einem empirischen Faktor berücksichtigt werden.

Auf diese Erscheinung wurde bereits in Kap. 2.4.3. eingegangen und dort eingehend behandelt.

Bei der Verformung ebener Platten tritt das dargestellte Phänomen nicht in der Masse auf wie bei den vorverwölbten Platten. Erkennbar ist jedoch ein solcher Einfluss.

Bei den ebenen Platten treten die Druckspannungen im zentralen Gebiet auf. Dadurch wird dieses bezüglich des Ausweichens in einen labilen Gleichgewichtszustand versetzt. Beim Ausweichen selber sind dann 2 stabile Ausweichlagen möglich. Die Form dieser Lagen ist in Abb. 35 dargestellt.

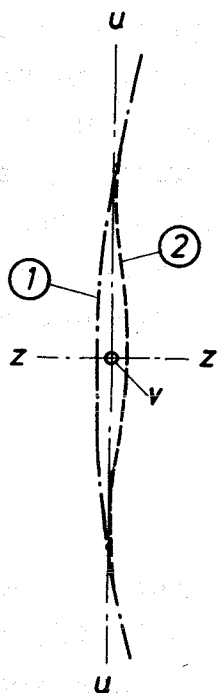


Abb. 35

Die eine Lage folgt der stark strichpunktierten Kurve 1, die andere Form der gestrichelten 2. Da die Abstände der Plattenmittelebene von der Ausgangsebene, der Momentenbezugsebene, bei beiden Formen verschiedene Werte haben, ist bei der Ermittlung der Momente bzw. der Tragfähigkeits-Kennlinien ein etwas voneinander abweichender Verlauf zu erwarten. Welche der beiden Kennlinienarten sich effektiv einstellen wird, hängt von nicht erfassbaren Anfangsbedingungen ab und kann daher schwerlich vorausgesagt werden.

4. Messungen an Stahl-Federn

Die Diagramme DS1 bis DS8 betreffen Federplatten aus Stahl 50 Cr V 4.

Die Federn sind kreisrund mit einem Durchmesser von 88 mm. An zwei gegenüberliegenden Stellen, d.h. an zwei Lastpunkten sind diese mit je einer Führungsnut von 3 mm Tiefe und 6 mm Breite versehen. Alle Federplatten sind auf der gleichen Prägematrize hergestellt worden, sie besitzen daher alle die gleiche Verwölbung. Es wurden je 2 Federplatten der Stärke von 1, 2, 3 und 4 mm untersucht.

Gerechnet wurde bei allen Federplatten mit einem E-Modul von $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ und einer Querszahl von $m = 3,33$.

Auch in diesen Diagrammen ist die ausgezogene Kurve die geschriebene Kraft-Weg-Kurve, die gestrichelte Kurve die theoretisch ermittelte und die dünn gezogene Gerade die Kraft-Weg-Linie aus der reinen Verdrillungstheorie.

Die Feder nach DS 1 zeigt deutlich ein Ausweichen. Bildet man hier den kritischen Ausweichwert, so ergibt sich dieser zu

$$\frac{d}{2h_0} = \frac{1,02}{3,78} = 0,27$$

Die Feder nach DS 2 zeigt ebenfalls, jedoch weniger ausgeprägt Ausweichtendenz. Bildet man auch hier den kritischen Ausweichwert, so ergibt sich

$$\frac{d}{2h_0} = 0,263$$

Beide Werte liegen in unmittelbarer Nachbarschaft des theoretisch gefundenen Wertes von 0,274.

Die weiteren Diagramme DS 3 bis DS 8 zeigen mehr oder minder eine recht gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung. Im allgemeinen liegen die Werte der Rechnung etwas höher als die der Messung, was vermutlich auf Unterschiede zwischen dem gerechneten und dem tatsächlichen E-Modul zurückgeführt werden kann.

5. Stabilitätsmessungen

Die Diagramme DA 1 - DA 13 betreffen Messungen über das Ausweichverhalten von kreisrunden Hypo-Federplatten. Für die Messungen wurden ausschliesslich Modellplatten aus Plexiglas benutzt.

Aufgabe der Messungen war es, die theoretisch gefundenen Zahlenwerte für die Ausweichgrenze zu prüfen bzw. zu bestätigen. Gemessen wurde die Kraft-Weg-Kurve.

Nach den theoretischen Untersuchungen hängt die Ausweichgrenze nur von dem Verhältnis $d/2h_0$ ab, wobei es einen bestimmten kritischen Wert dieses Ausdrucks gibt, bei dem die Platte gerade auszuweichen beginnt.

Ist der Wert dieses Ausdruckes grösser als der kritische, so weicht die Platte unter keinen Umständen aus, ist er kleiner, so wird sie in jedem Fall ausweichen.

In den Diagrammen ist die stark ausgezogene Kurve die gemessene. Die gestrichelte die nach der Theorie ermittelte Kraft-Weg-Kurve und die dünn gezeichnete Gerade, die Kurve aus der reinen Drillung.

Die in DA 1 - DA 5 vorgelegten Kurven wurden an jeweils der gleichen Platte gemessen, deren Durchmesser bei DA 1 130 mm betrug und der schrittweise bis auf 90 mm bei DA 5 durch Abdrehen der äusseren Partien der Platte verkleinert worden war.

Die Dicke d der Platte blieb daher in allen Fällen gleich und zwar 2,97 mm. Ebenso blieb der Wölbungsparameter a^2 der gleiche. Es änderte sich durch die Verkleinerung des Durchmessers nur noch die Federungshöhe $2h_0$. Bei den Kurven DA 1, DA 2 und DA 3 ist das Ausweichen deutlich zu erkennen. Es tritt in allen drei Fällen bei annähernd gleicher Last auf. Bei DA 4 und DA 5 tritt kein Ausweichen mehr ein. In einem Bereich zwischen DA 3 und DA 4, also bei einem $2h_0 = 9$ mm dürfte die Ausweichgrenze liegen. Es ergibt sich damit ein kritisches Verhältnis

$$\frac{d}{2h_0} = \frac{2,97}{9} = \sim 0,33$$

Die Diagramme DA 6 - DA 10 zeigen das Ergebnis einer zweiten Mess-Serie. Hier liegt der kritische Wert etwas unterhalb der des Blattes DA 8, also

$$\frac{d}{2h_0} = 0,32$$

Vergleicht man die Ergebnisse mit der theoretischen Untersuchung, die für Plexiglas einen Wert

$$\frac{d}{2h_0} = 0,32$$

gefunden hat,

so kann man eine gute Übereinstimmung feststellen.

Die Untersuchungen nach DA 11; 12 und 13 wurden an Federplatten gleichen Durchmessers, gleichen Wölbungsparameters und daher gleicher Durchfederung jedoch verschiedener Plattenstärke vorgenommen.

Sie sollten lediglich das Verhalten der Platte beim Ausweichen zeigen, da bei den vorliegenden Abmessungen in jedem Falle mit einem Ausweichen zu rechnen war.

Diese Untersuchungen zeigten, dass die Hypo-Feder die schöne Eigenschaft hat, unter gewissen Umständen über einen relativ grossen Wegbereich eine so gut wie konstante Federkraft bereitzustellen.

Weitere Untersuchungen bzw. Auswertungen zu diesem Thema, insbesondere über die Lage des Ausweichpunktes auf der Kraftweg-Kurve in Abhängigkeit von den Plattenparametern wurden nicht vorgenommen, da hierfür noch keine theoretischen Überlegungen bereitgestellt werden konnten.

Formelzeichen

A	Abkürzung
a	Konstante der Sattelfläche; $m^{1/2}$
B	Abkürzung
B(r)	Radiusfunktion
b	Konstante der Sattelfläche $m^{1/2}$
c	Federkonstante; kp/m
c	Konstante
D	Durchmesser der Kreisplatte; m
d	Dicke der Platte; m
E	Elastizitätsmodul; dp/m ²
F	Drillquerschnitt
FA	Formänderungsarbeit; mK
G	Gleitmodul; kp/m ²
h	Wölbung der Platte bezogen auf die Mittelebene; m
h _o	Vorverwölbung der Federplatte; m
(2h)	Durchfederung der Platte; m
K	Schubzahl kp/m
L	Kantenlänge der quadratischen Platte; m
l	Länge · m
L _m	Ersatzlänge; m
M	Momente; mkp
m	Querkontraktionszahl
N	Abkürzung
n	Seitenverhältnis des Drillquerschnittes;
P	Kraft auf die Platte; kp
P _s	Kräfte aus Schubspannungen; kp
P _N	Kräfte aus Normalspannungen; kp
R	Radius der Kreisplatte; m
r	Radiuskoordinate; m
u _o	Durchsenkung eines Plattenpunktes gegenüber der Mittelpunktebene; m
u; v;	
x; y; z	Plattenkoordinaten; m

β	Verformungswinkel
ν	Drillung/Längeneinheit
ρ	Winkelkoordinate der Kreisplatte
ρ^*	Drillverhältnis
ψ	Verdrehungswinkel
ψ_1^*	Drillbeiwert
ψ_2^*	Drillbeiwert
ξ	Dehnung
η	Dehnung
σ	Normalspannungen; kp/m^2
τ	Schubspannungen; kp/m^2
Φ	Verhältnis der Formänderungsarbeit
λ	Koordinate normiert
ρ	Koordinate normiert

$\Phi(\rho, \psi)$ } Abkürzung
 $H(\rho, \psi)$ }

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ Laplac-Operator}$$

\emptyset betr. Kreisplatte
 Φ betr. quadratische Platte

Literaturverzeichnis

- [1] Reutter, Darstellende Geometrie II
Karlsruhe 1958, S. 42 ff
- [2] Kleine Enzyklopädie - Mathematik
Pfalz-Verlag Basel 1965, S. 569
- [3] Bronstein-Semendjadjew
Taschenbuch der Math. S. 197
- [4] Nadai, Elastische Platten
Berlin 1925, S. 15a, 39, 238
- [5] Timishenke - Woinowsky - Krieger
Theorie of Plates and Shells
McGraw Hill N.J. 1959 (390)
- [6] Biezeno/Grammel
Technische Dynamik, 2. Aufl. II. 1953
S. 487 u. 654
- [7] Hütte I, 26. Aufl. 1936, S. 590
- [8] C. Weber; Die Lehre der Drehungsfestigkeit;
VDI-Forschungsheft 249/1921
- [9] L. Föppl, Drang und Zwang III. S. 9
- [10] Uebel, Zur Berechnung von drillbeanspruchten
Stäben; Forschung 10. Band H. 3 1939
- [11] Ten Bosch, Maschinenelemente 1940, S. 129
- [12] Meissner über das Ausknicken kreisringförmiger
Scheiben, Schweiz. Bauzeitung 1933, S. 87

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Allgemeines	1
1. Aufbau und Einsatzmöglichkeiten	1
2. Zur Geometrie des hyperbolischen Paraboloides	3
3. Aufgabenstellung und Lösungsweg	10
II. Die Theorie der vollen Hypo-Federplatte	14
1. Die Rechnungen nach der Plattentheorie	14
2. Rechnung nach der Lehre von der Verdrehungsfestigkeit	20
2.1 Allgemeines	20
2.2 Schubspannungen und Schubkräfte	23
2.2.1 Der stufenförmige Querschnitt	23
2.2.2 Die ganze Federplatte	29
2.2.2.1 Die quadratische Federplatte	34
2.2.2.2 Die kreisrunde Federplatte	37
2.2.3 Näherungslösung für die ganze Federplatte	42
2.2.4 Die Drillung der kreisförmigen Platte	45
2.3 Normalspannungen und deren Momente bzw. Kräfte	47
2.3.1 Die quadratische Platte	47
2.3.2 Die kreisrunde Platte	57
2.4 Die vorverwölbte Platte	62
2.4.1 Die quadratische Platte	68
2.4.2 Die kreisrunde Platte	68
2.4.3 Bemerkungen und Begründungen für einen Korrekturfaktor	69
2.5 Zusammenstellung der Tragfähigkeitsformeln	80
2.6 Die Spannungen	81
2.6.1 Die quadratische Federplatte	82
2.6.2 Die kreisrunde Federplatte	86

	Seite
3. Stabilitätsfragen	91
3.1 Die quadratisch verwölbte Federplatte	95
3.2 Die kreisrunde verwölbte Federplatte	100
4. Formänderungsarbeit	113
5. Die Nutzwerte der Hypo-Feder	119
6. Krafteinleitung und Stützeffekt	123
III. Versuche und Messungen	127
1. Modelle	127
2. Messungen	129
3. Besprechung der Messergebnisse	131
4. Messungen an Stahlfedern	137
5. Stabilitätsmessungen	138

Abbildungen

- Abb. 1 rechteckiges hyperbolisches Paraboloid
- Abb. 2 rundes hyperbolisches Paraboloid
- Abb. 3 Übereinanderschichtung mehrerer Hypo-Federplatten
- Abb. 4 Kart. Koordinaten des quadratischen hyperbolischen Paraboloides
- Abb. 5 Polarkoordinaten des kreisrunden hyperbolischen Paraboloides
- Abb. 6 Text S. 7
- Abb. 7 Draufsicht und Randabwicklung der kreisförmigen ebenen Federplatte mit Darstellung der Spannungs- und Wölbungsfunktion
- Abb. 8 Text S. 23
- Abb. 9 Text S. 26
- Abb. 10 Text S. 27
- Abb. 11 Text S. 29
- Abb. 12 Plausible Formen von Hypo-Federplatten
- Abb. 13 Text S. 38
- Abb. 14 Arc-Sin-Funktion
- Abb. 15 Text S. 46
- Abb. 16 Text S. 48
- Abb. 17 Text S. 49
- Abb. 18 Text S. 54
- Abb. 19 Text S. 64
- Abb. 20 Funktion $H ()$
- Abb. 21 Verteilung der Schubspannungen in der quadratischen Platte
- Abb. 22 Verteilung der Normalspannungen in der quadratischen Platte
- Abb. 23 Verteilung der Schubspannungen in der kreisrunden Platte

- Abb. 24 Verteilung der Normalspannungen in der kreisrunden Platte
- Abb. 25 Text S. 82
- Abb. 26 Text S. 96
- Abb. 27 Text S. 102
- Abb. 28 Gipsformen zum Prägen der Federplatten
- Abb. 29 Modell (Plexiglas) einer Federplattenanordnung
- Abb. 30 Federplattenanordnung in zylindrischem Gehäuse mit Dämpferflüssigkeit
- Abb. 31 Belastungseinrichtung
- Abb. 32 Belastungsmessung an quadratischer Federplatte aus Plexiglas
- Abb. 33 Belastungsmessung an kreisrunden Federplatten aus Plexiglas
- Abb. 34 Text S. 135
- Abb. 35 Text S. 136

Diagramme

D1 - D4 ebene quadratische Platten aus Plexiglas

D5 - D11 verwölbte quadratische Platten aus Plexiglas

D12 - D15 ebene kreisrunde Platten aus Plexiglas

D16 - D19 verwölbte kreisrunde Platten aus Plexiglas

DS1 - DS8 verwölbte kreisrunde Federplatten aus Stahl

DA1 - 13 verwölbte kreisrunde Federplatten aus Plexi-
glas für Stabilitätsfragen

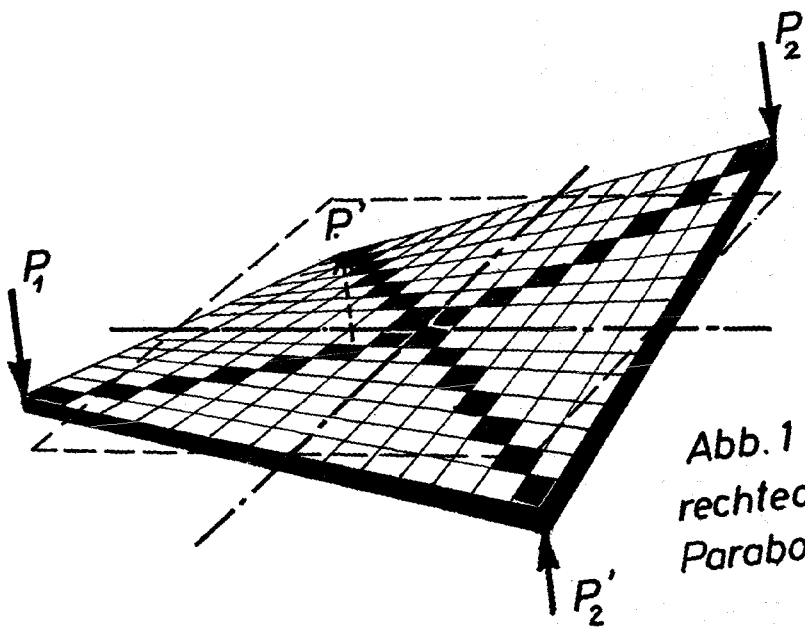


Abb. 1
rechteckiges hyperbolisches
Paraboloid. (Sattelfläche)

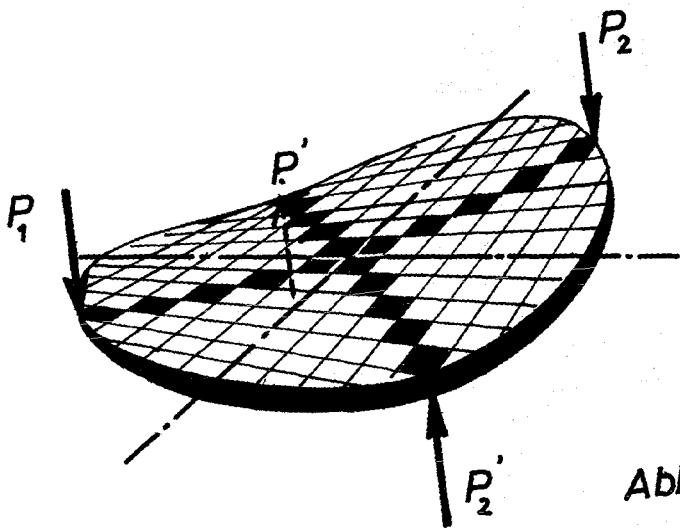
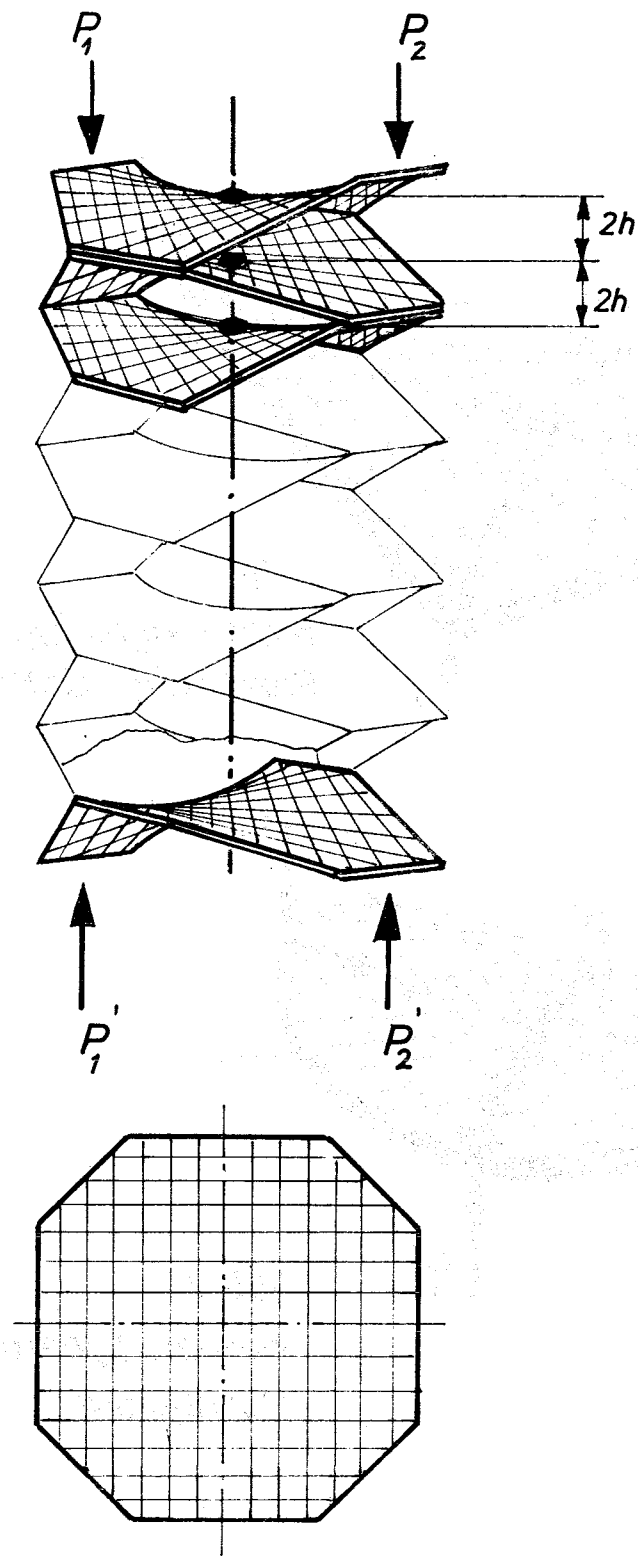


Abb. 2
rundes hyperbolisches
Paraboloid.

Abb. 1 u. 2



Übereinander-Schichtung mehrerer
Sattelflächen - Scheiben.

Abb. 3

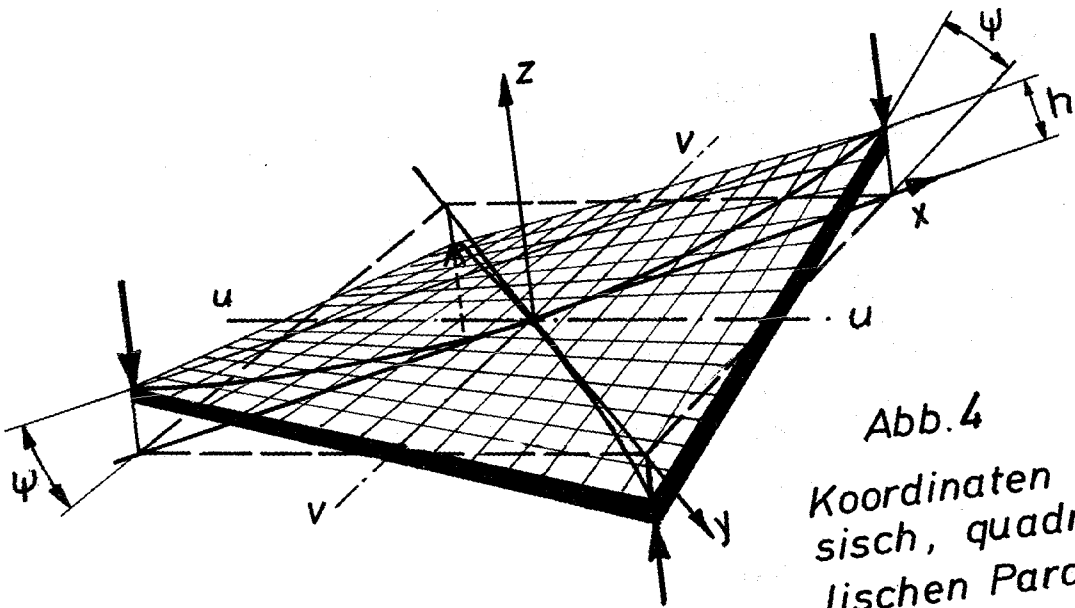


Abb. 4
 Koordinaten des kartesisch, quadr. hyperbolischen Paraboloids.

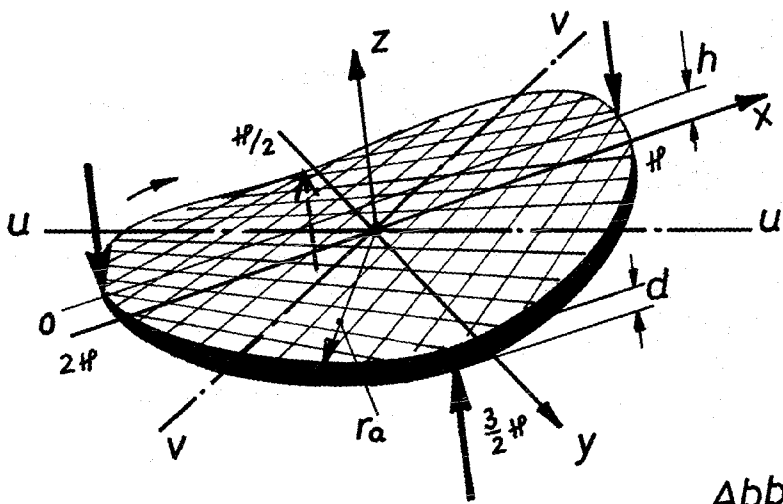


Abb. 5
 Polarkoordinaten des runden, hyperbolischen Paraboloids.

Abb 4 u. 5

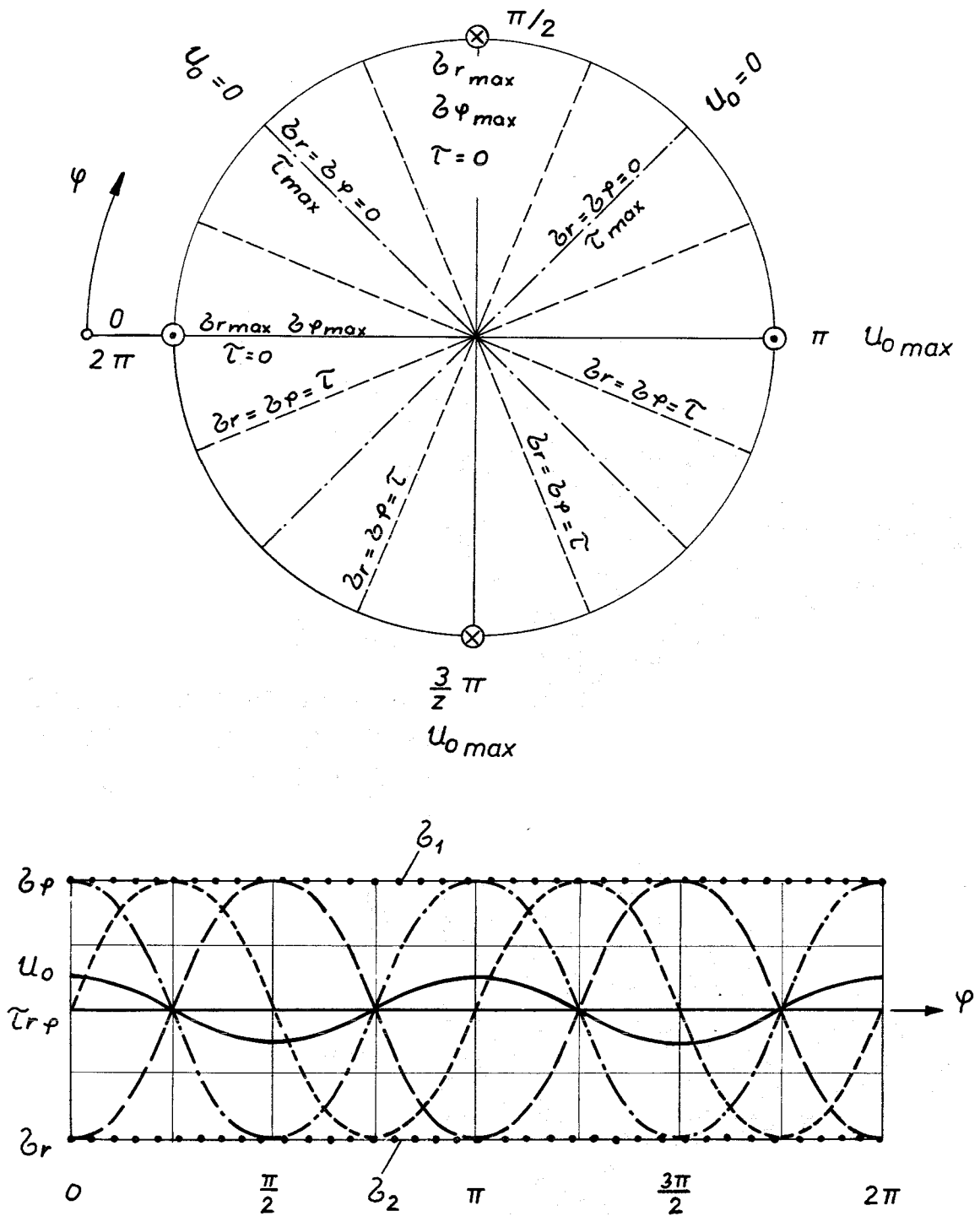
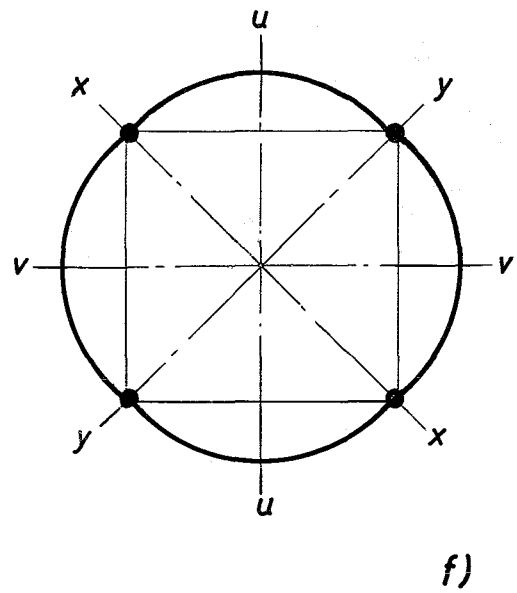
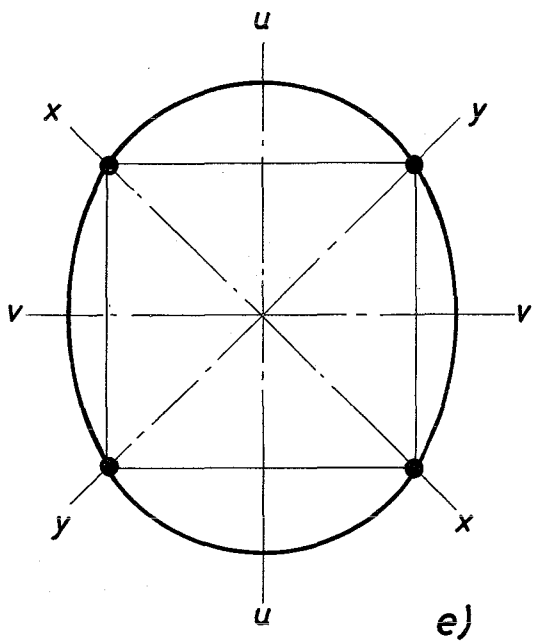
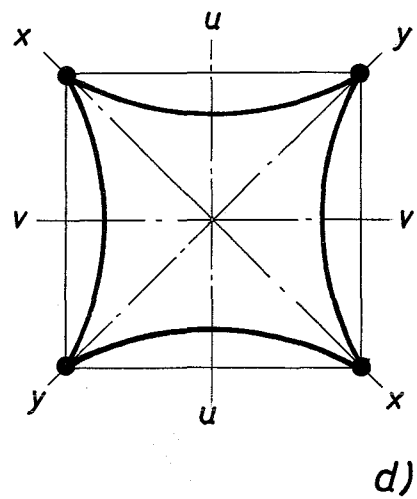
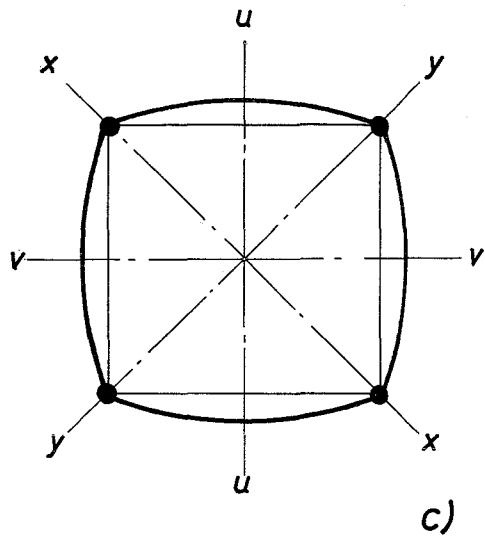
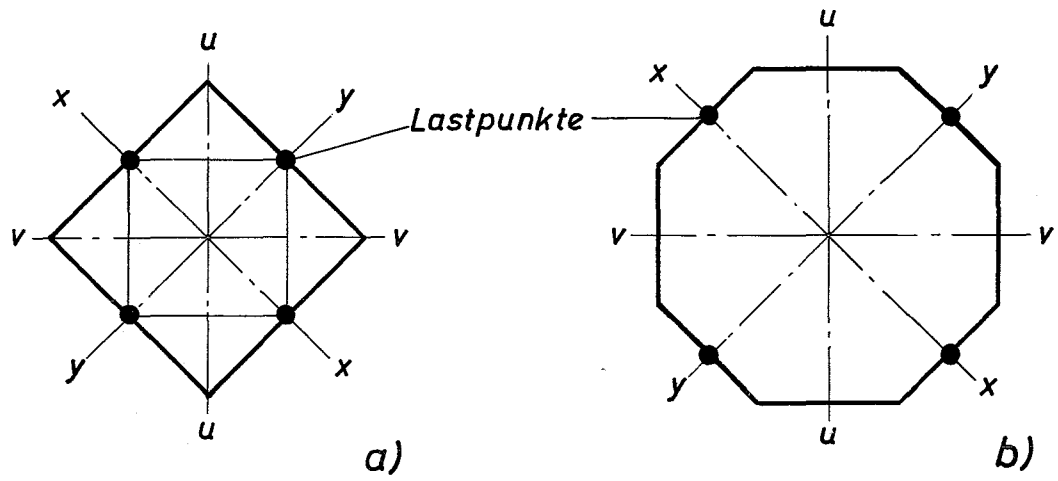


Abb. 9 Draufsicht und Randabwicklung der kreisförmigen Plattenfeder mit Darstellung der Spannungs- und Wölbungsfunktionen

- Erläuterung:
- Biegespannung radial ∂_r -----
 - Biegespannung tangential ∂_φ -.-.-.-
 - Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ -.-.-.-
 - Hauptspannung $\partial_{1,2}$
 - (Vergleichsspannung)
 - Durchsenkung u_0 -----



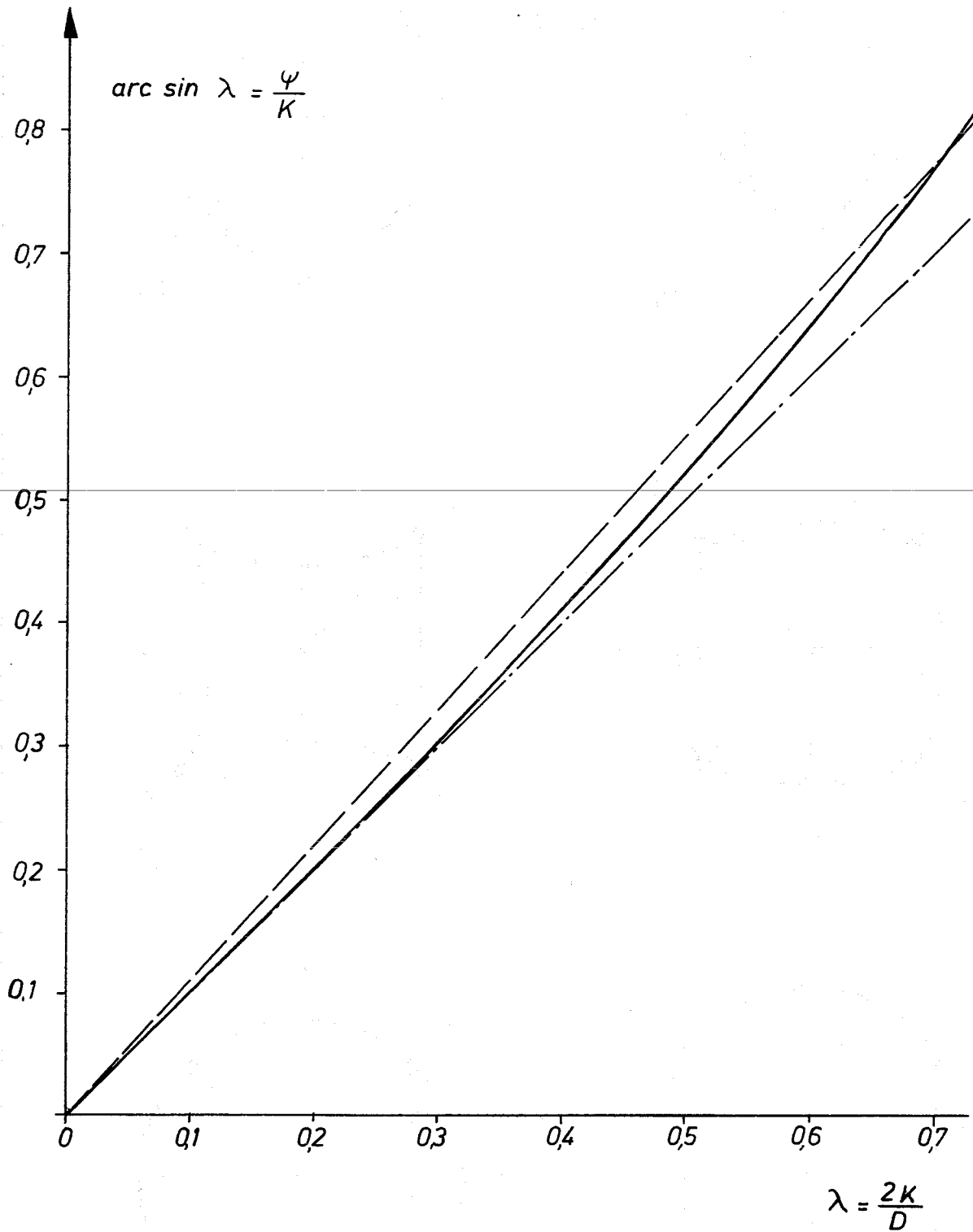


Abb. 14

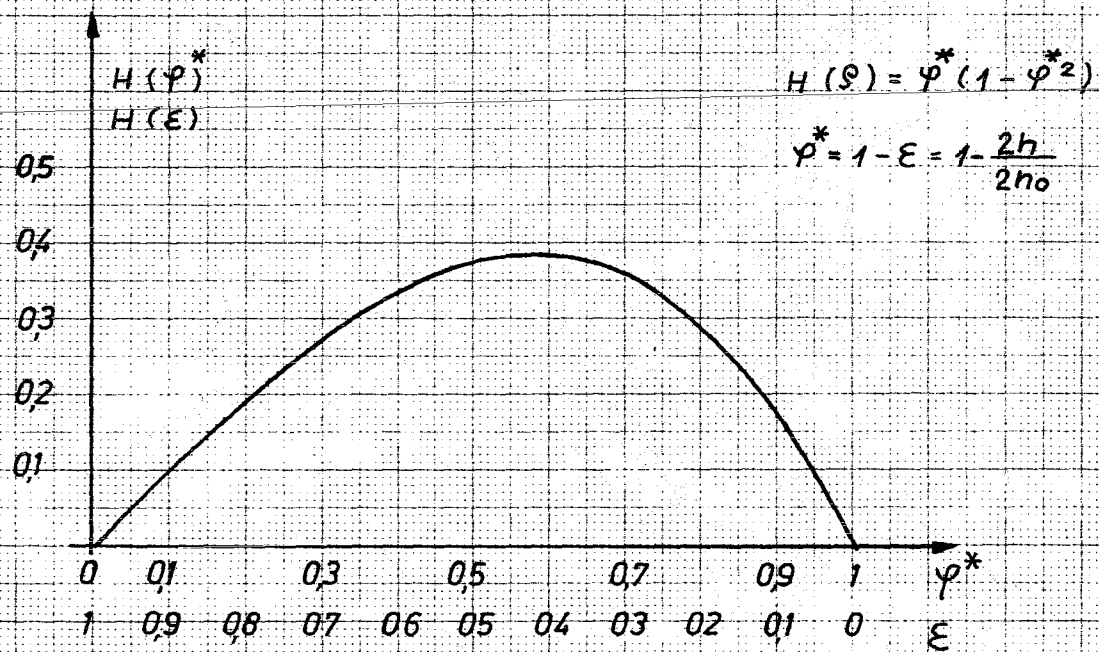
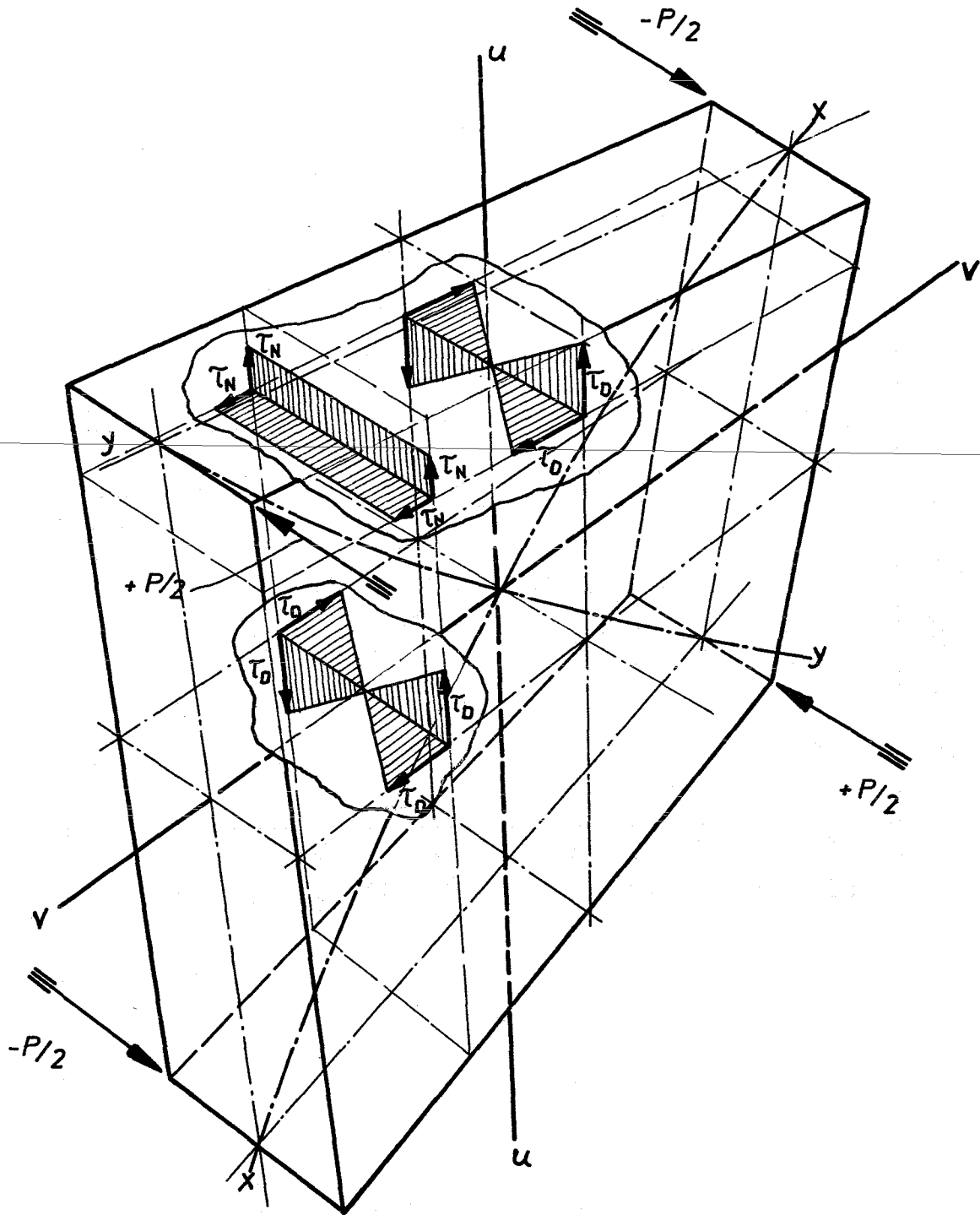
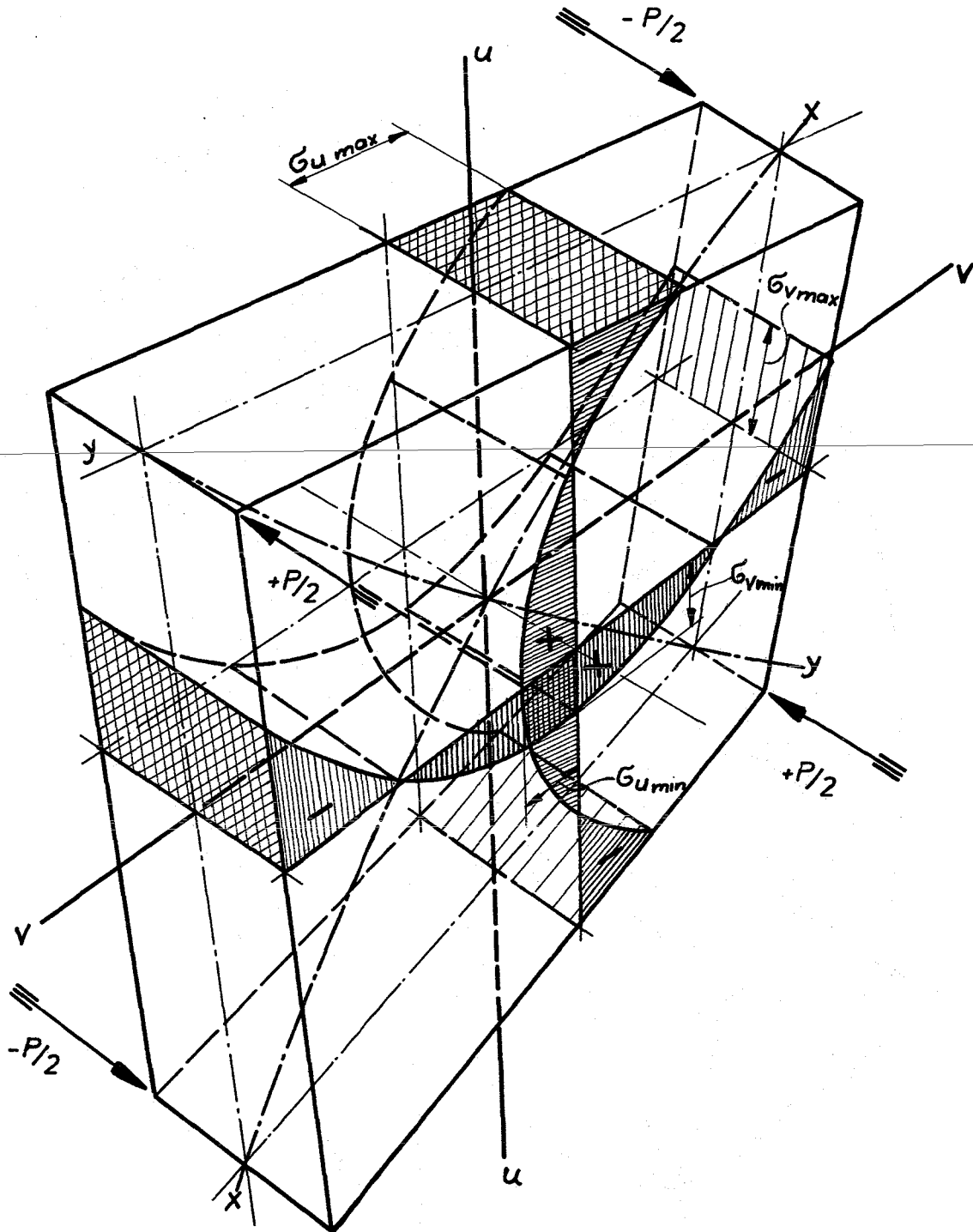


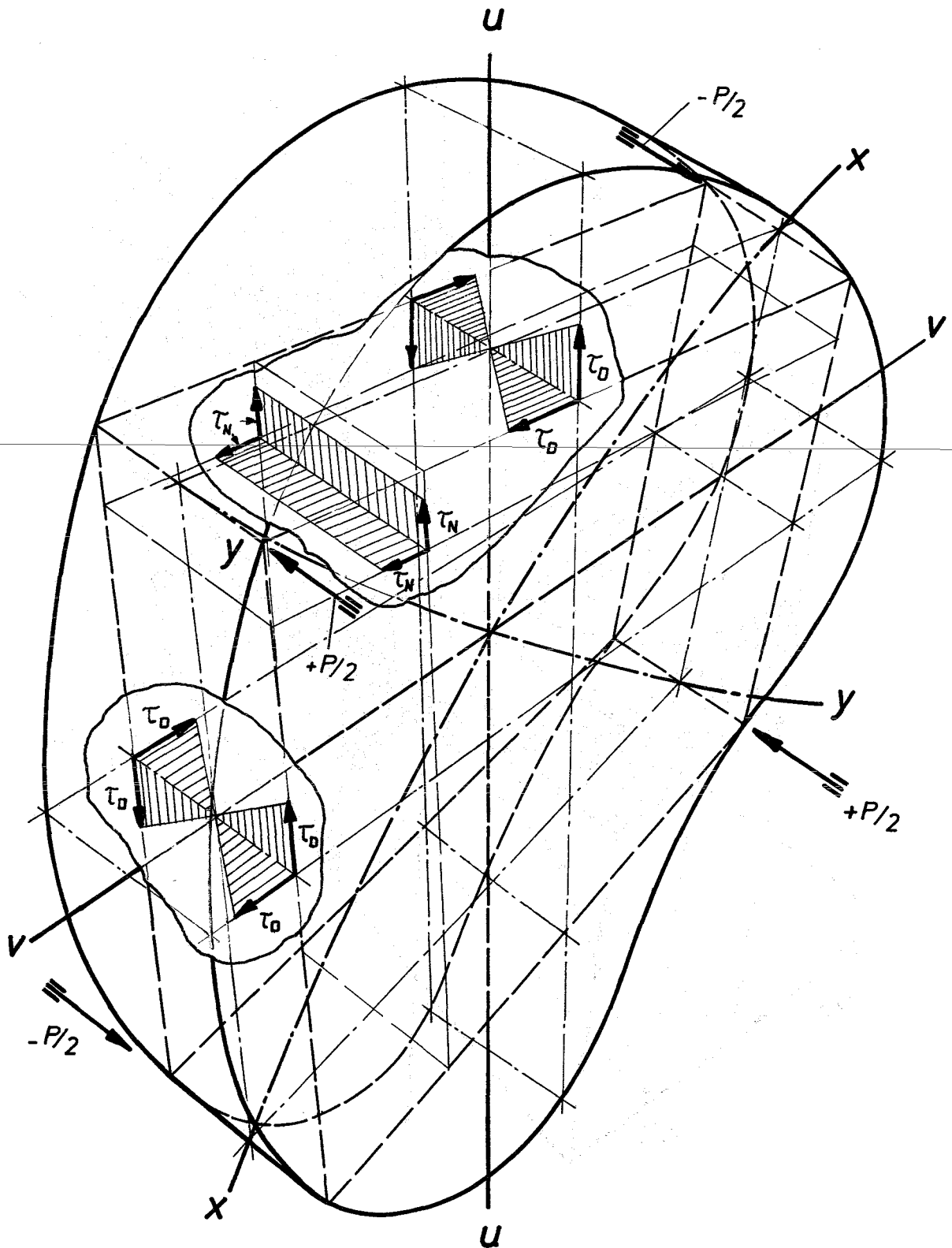
Abb. 20



Verteilung der Schubspannungen in
der quadratischen Platte

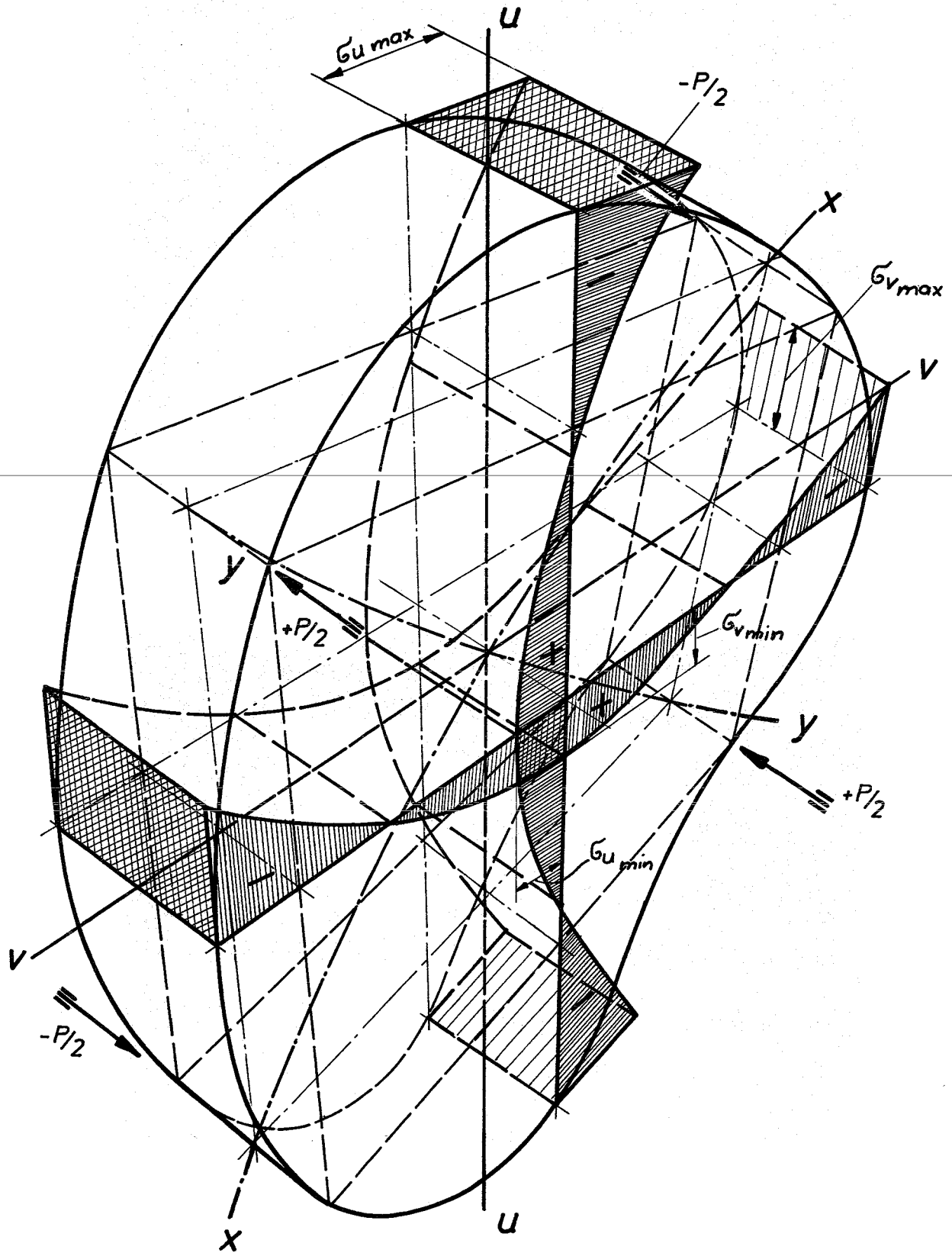


Verteilung der Normalspannungen
in der quadratischen Platte

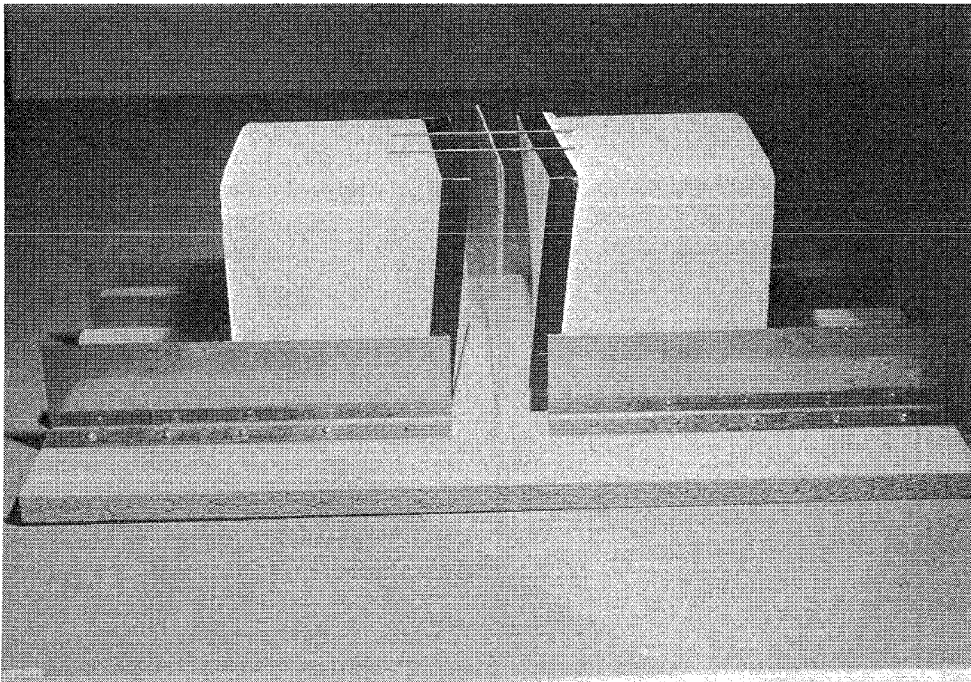
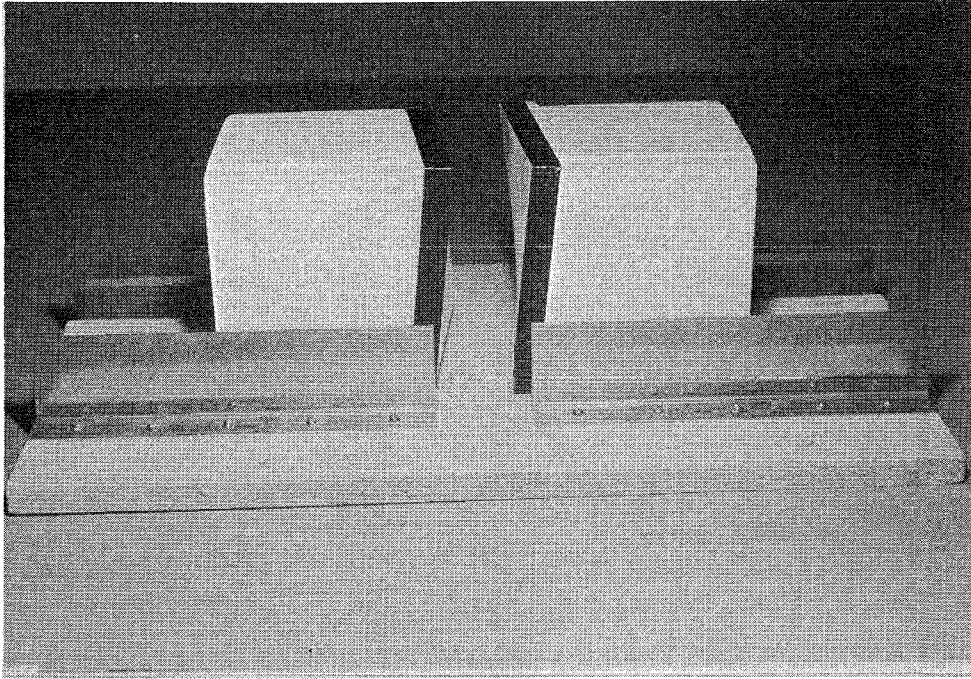


Verteilung der Schubspannungen
in der kreisrunden Platte

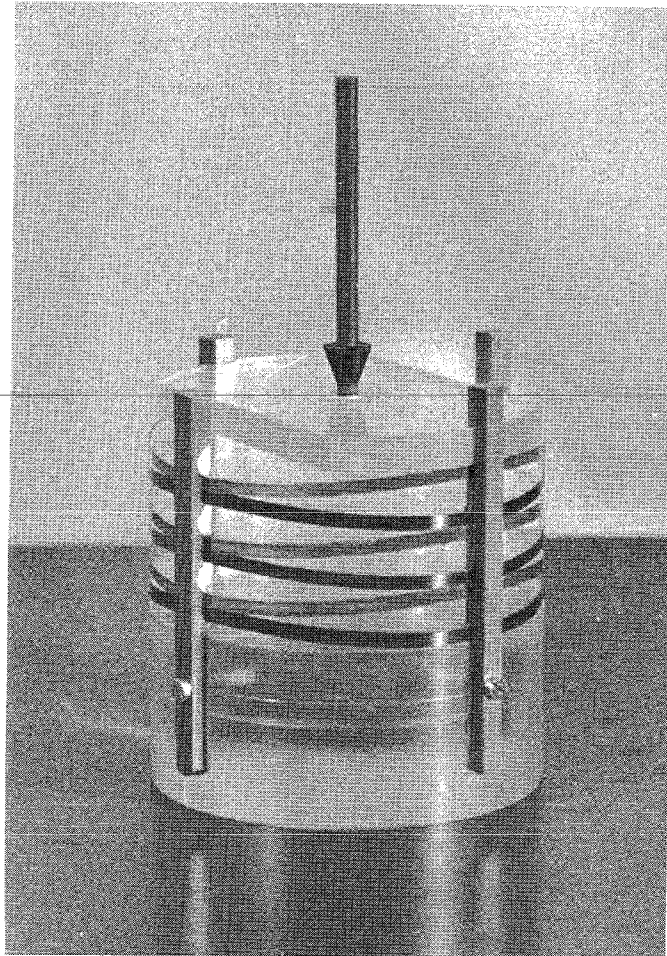
Abb. 23



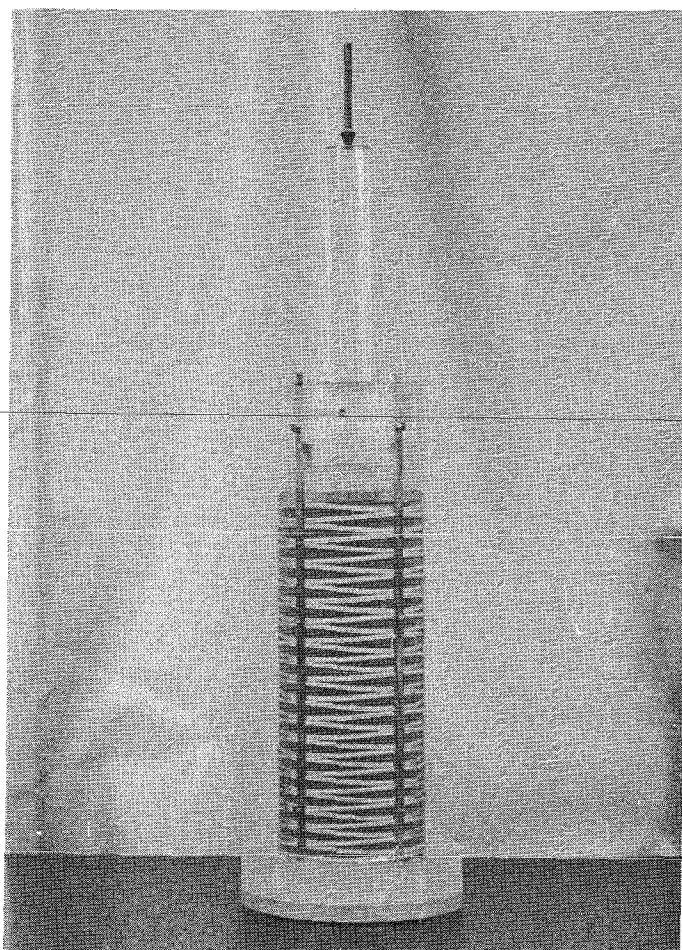
Verteilung der Normalspannungen
in der kreisrunden Platte



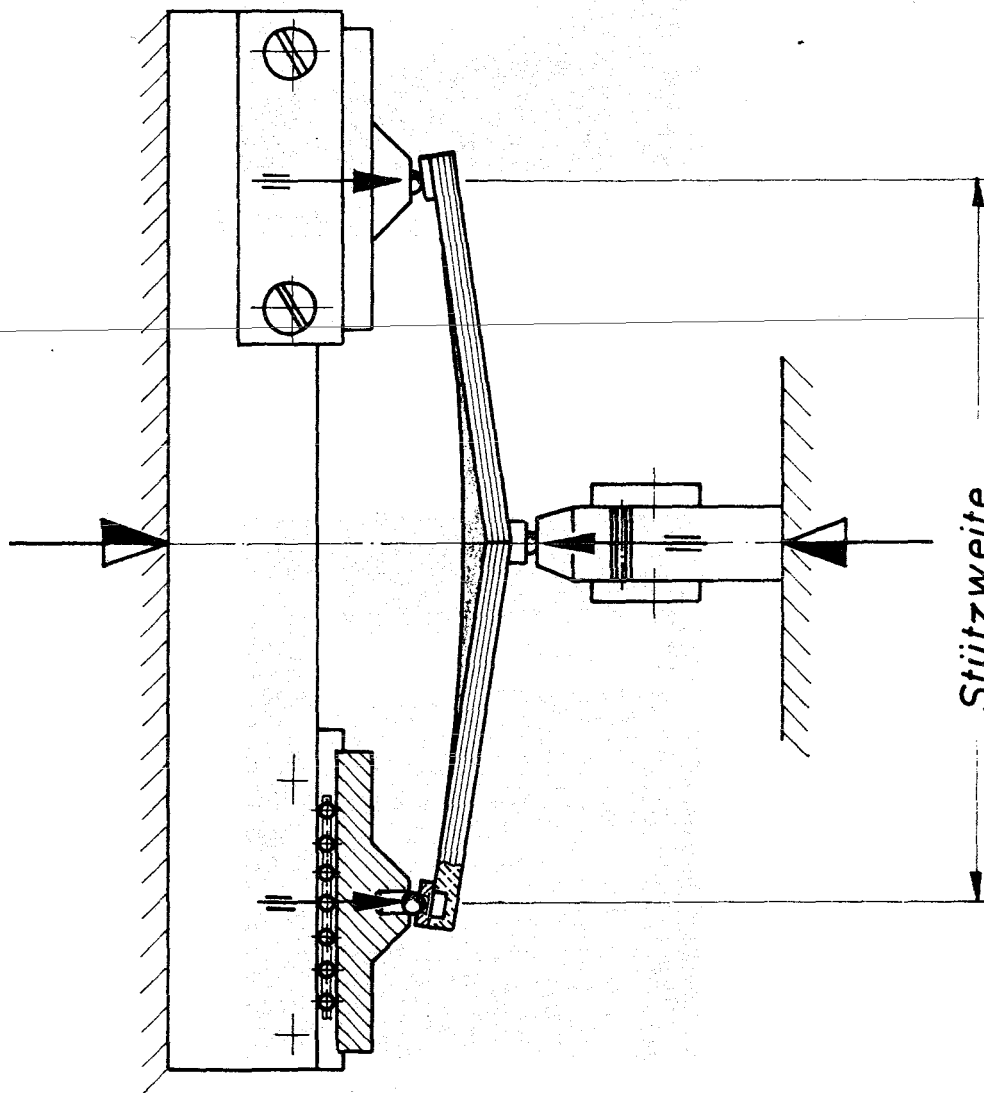
Gipsformen zum Prägen der Federscheiben



*Modell (Plexiglas) einer Feder-
scheibenanordnung*



*Federscheibenanordnung in zylindr.
Gehäuse mit Dämpfflüssigkeit*

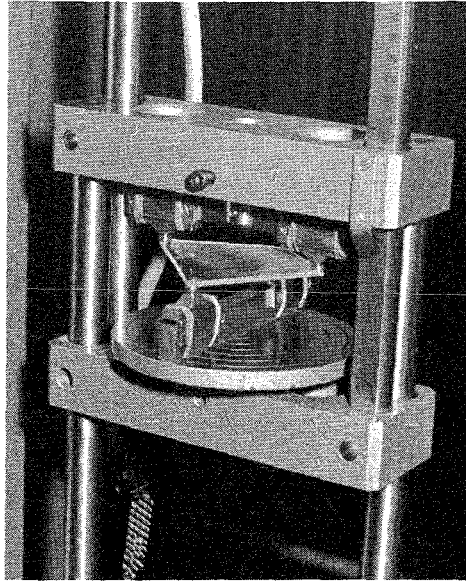


Belastungseinrichtung

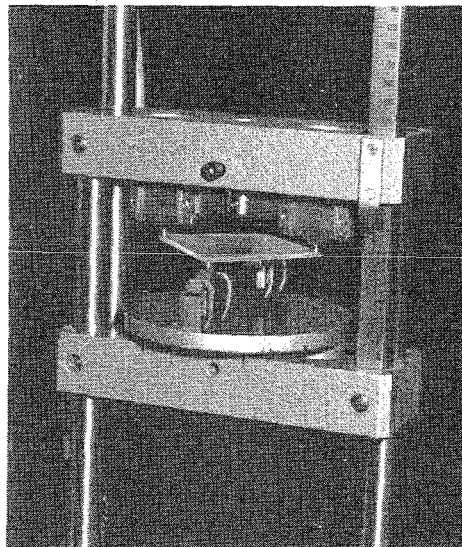
Stützweite

Handwritten text, likely a description or note related to the diagram.

Abb. 31

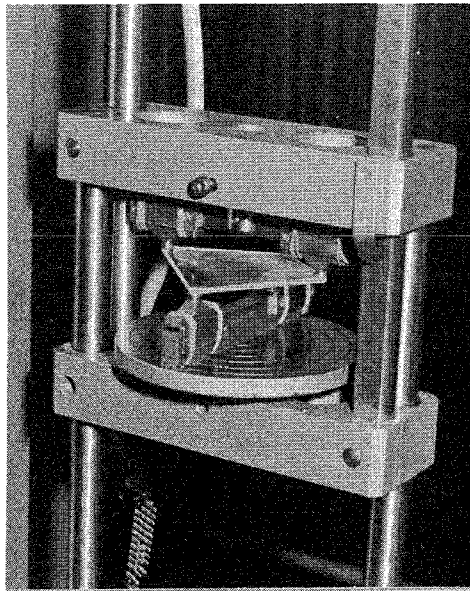


unbelastet

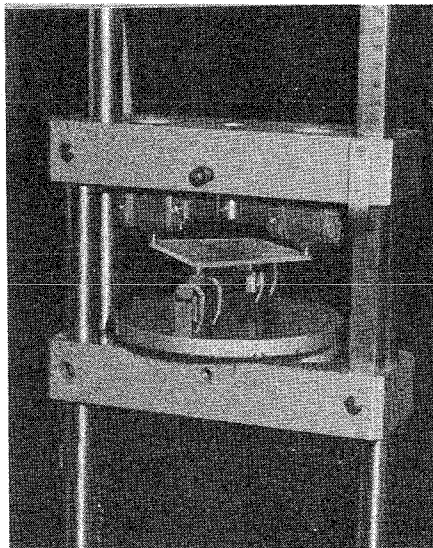


belastet

***Belastungsmessung an Federscheibe
aus Plexiglas, 72 mm \varnothing , 3 mm dick***



unbelastet



belastet

*Belastungsmessung an Federscheibe
aus Plexiglas, $100\text{ mm}^\varnothing$, 3 mm dick*

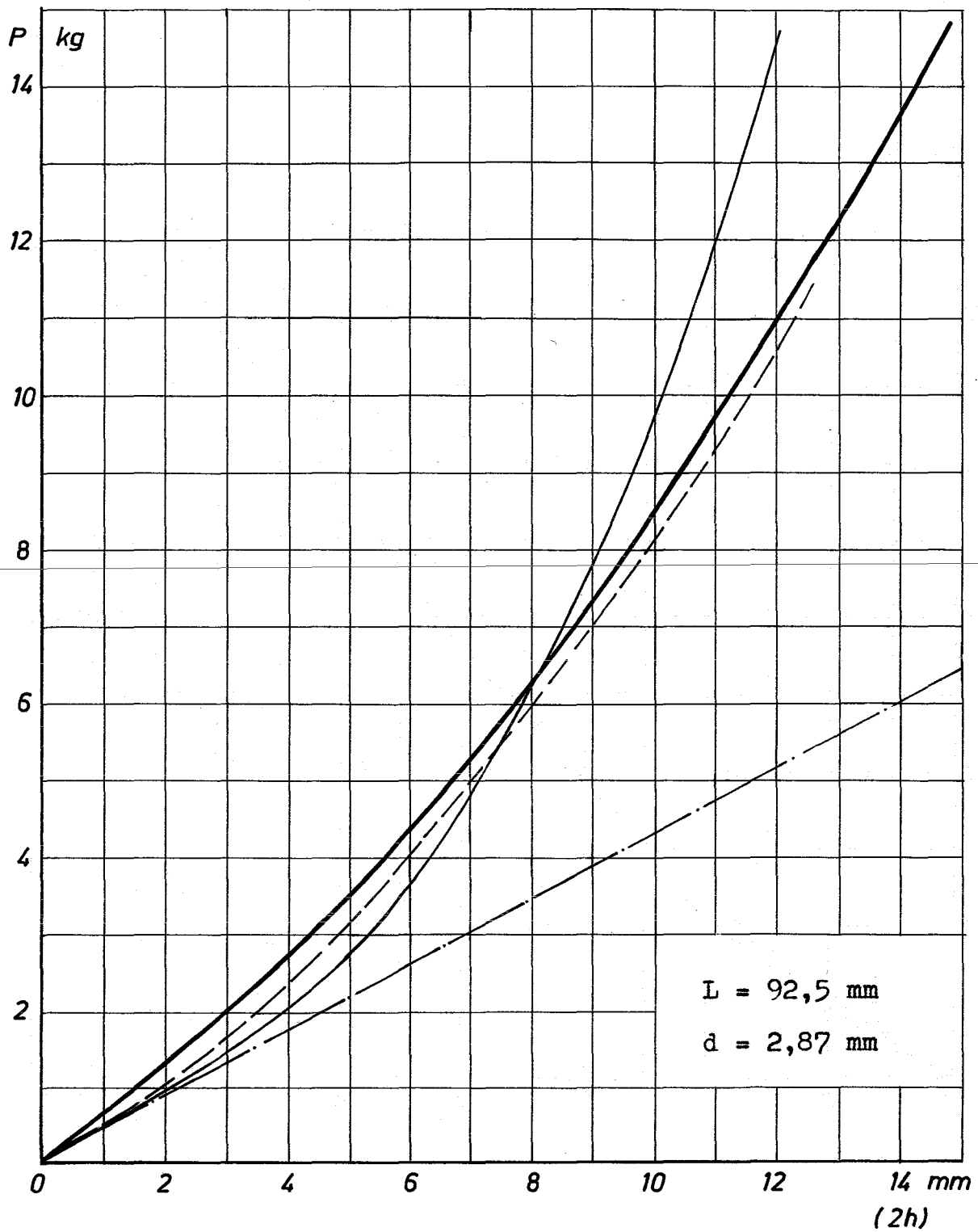
Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

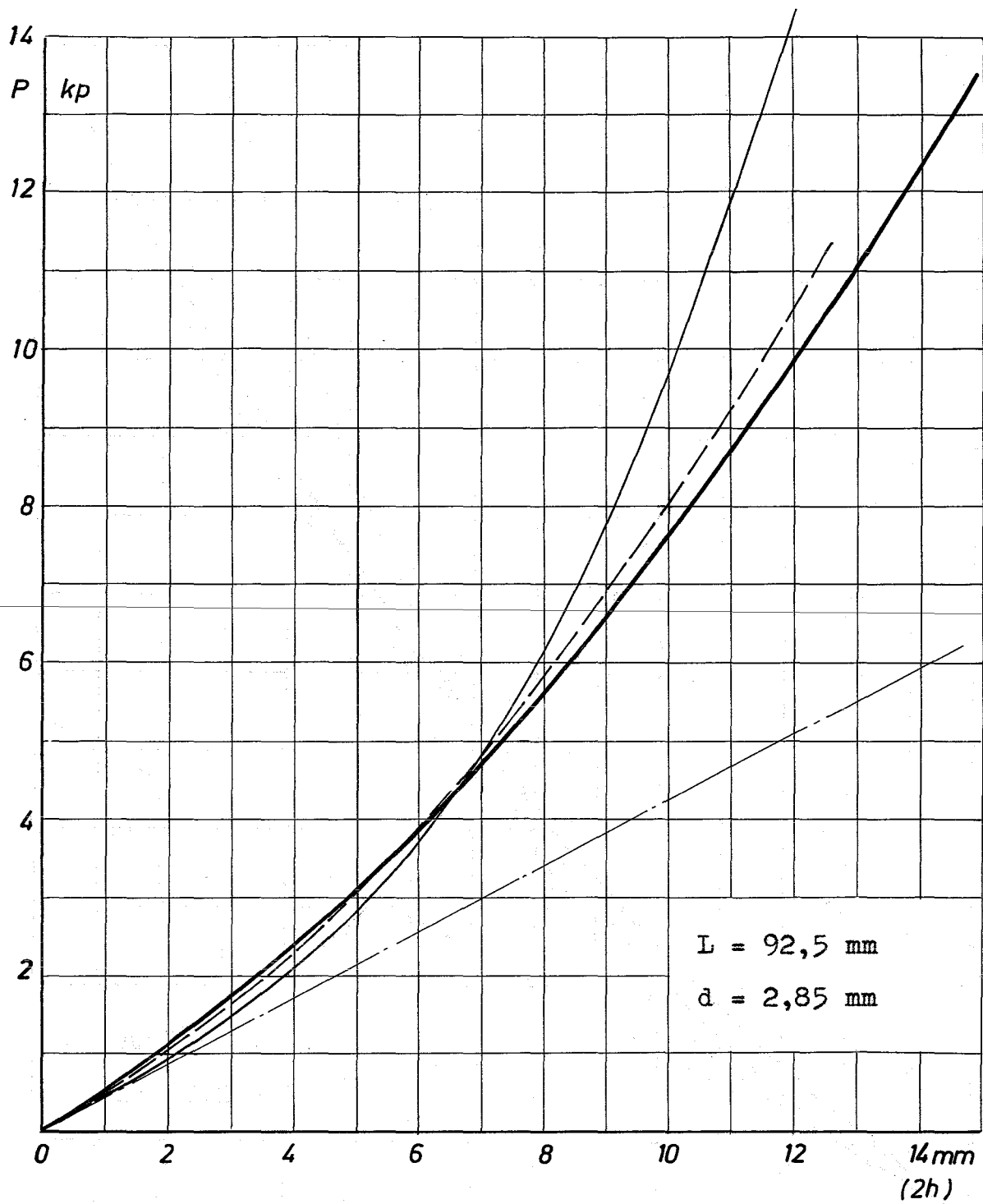
Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

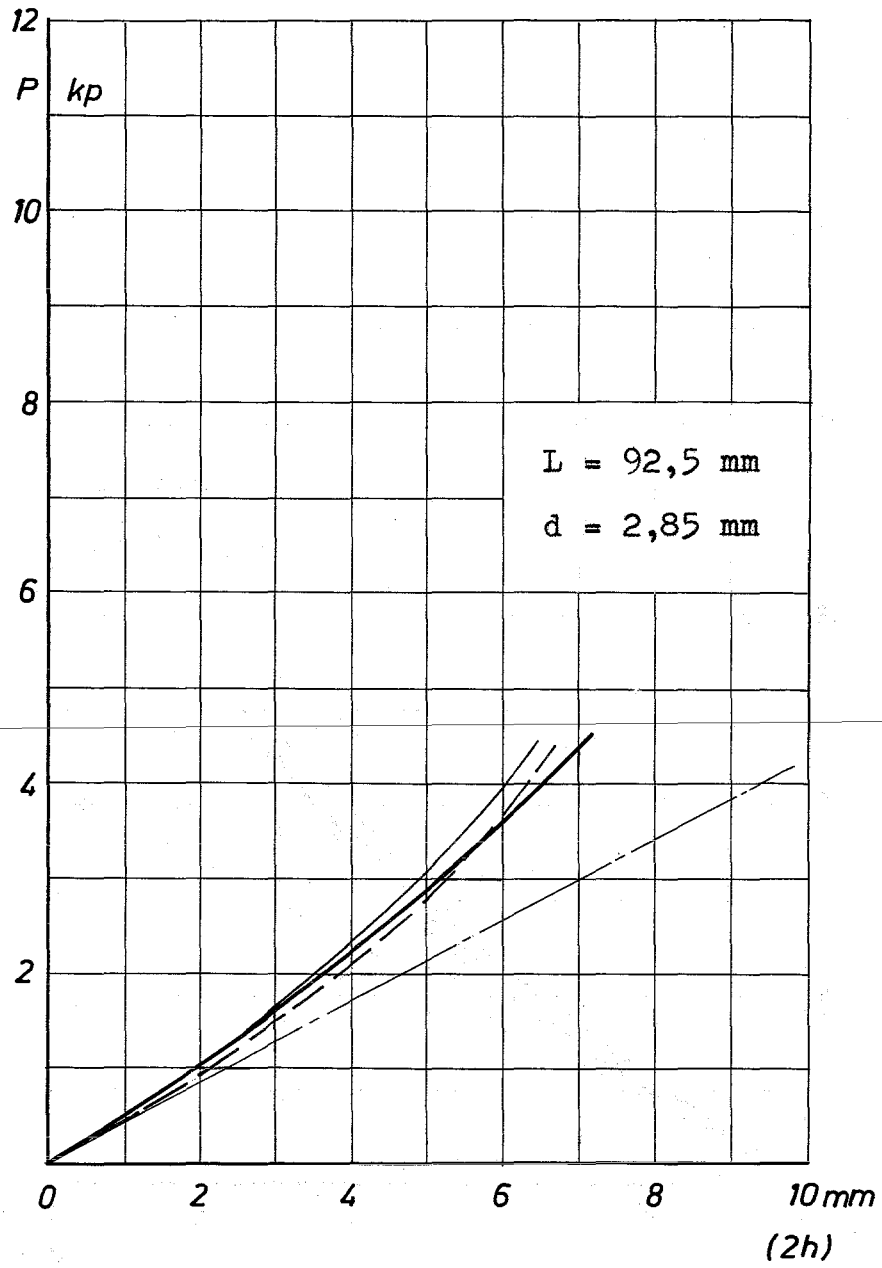
Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and bleed-through.



Plexiglas, ebene Platte Φ

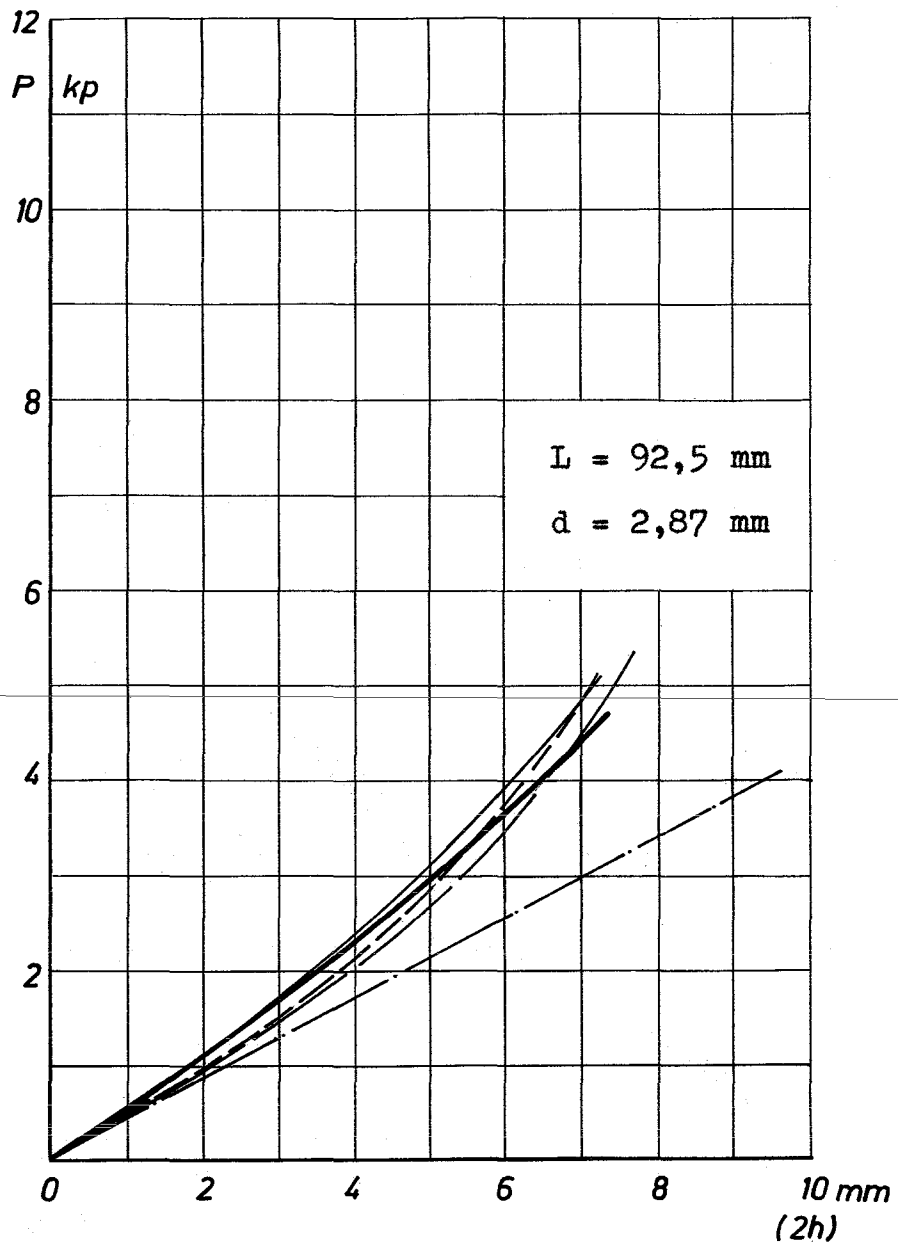


Plexiglas; ebene Platte ϕ

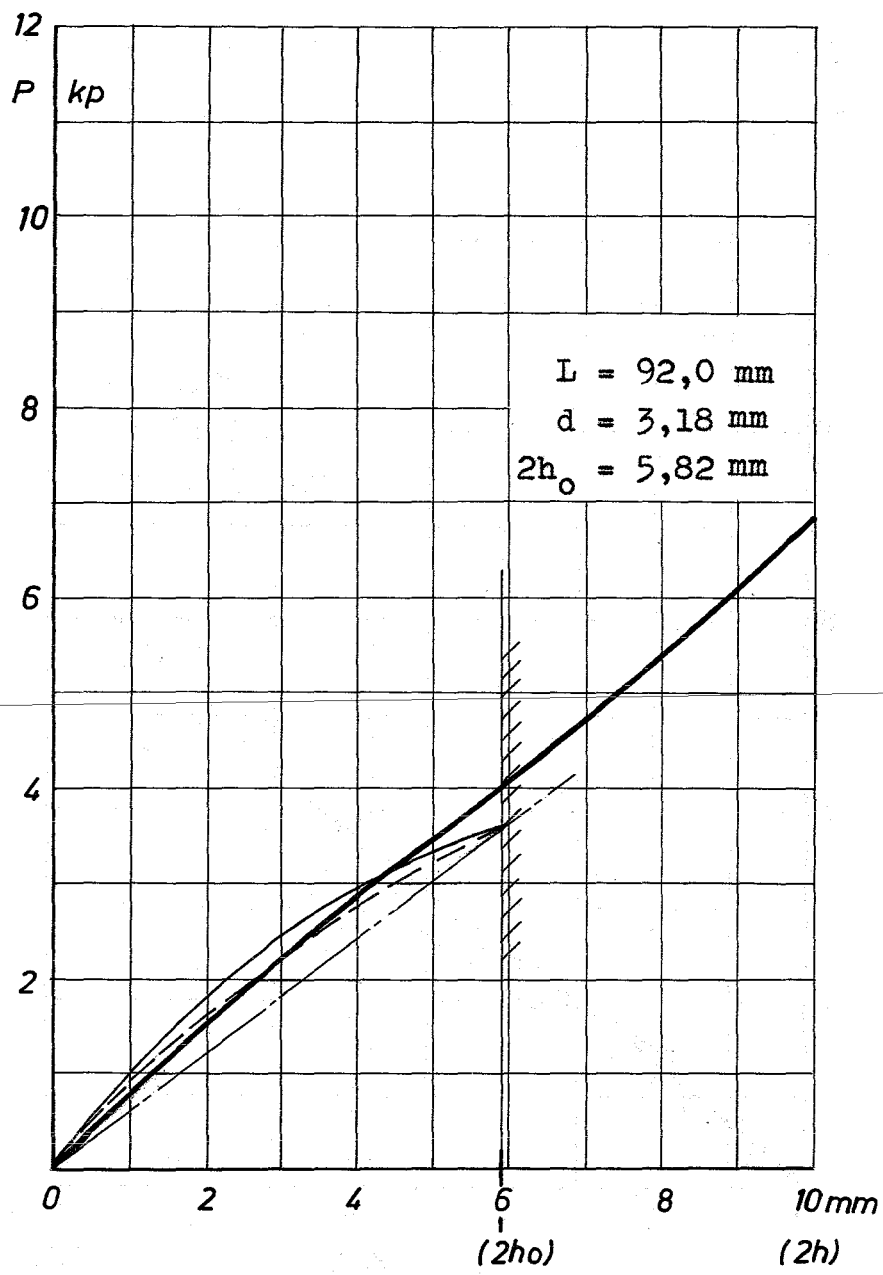


Plexiglas; ebene Platte ϕ

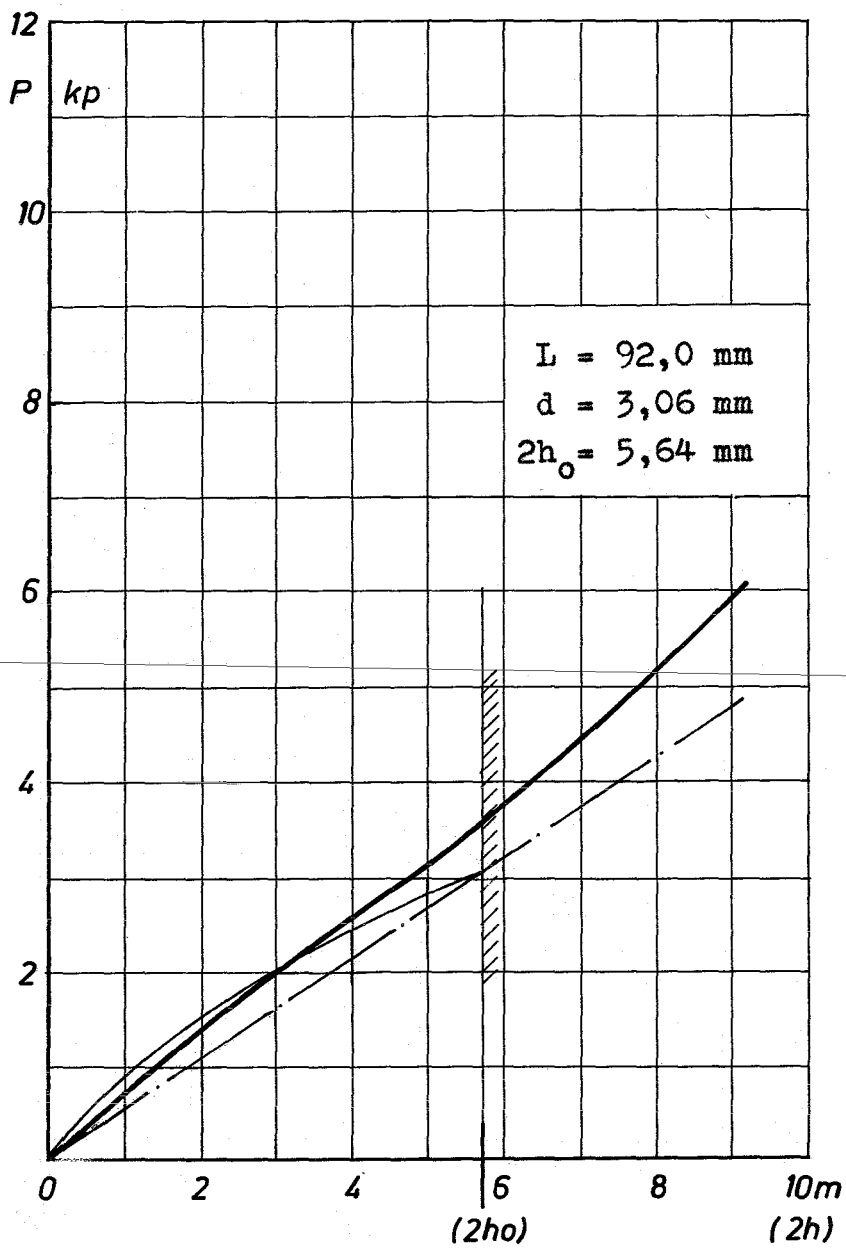
D3



Plexiglas; ebene Platte ϕ

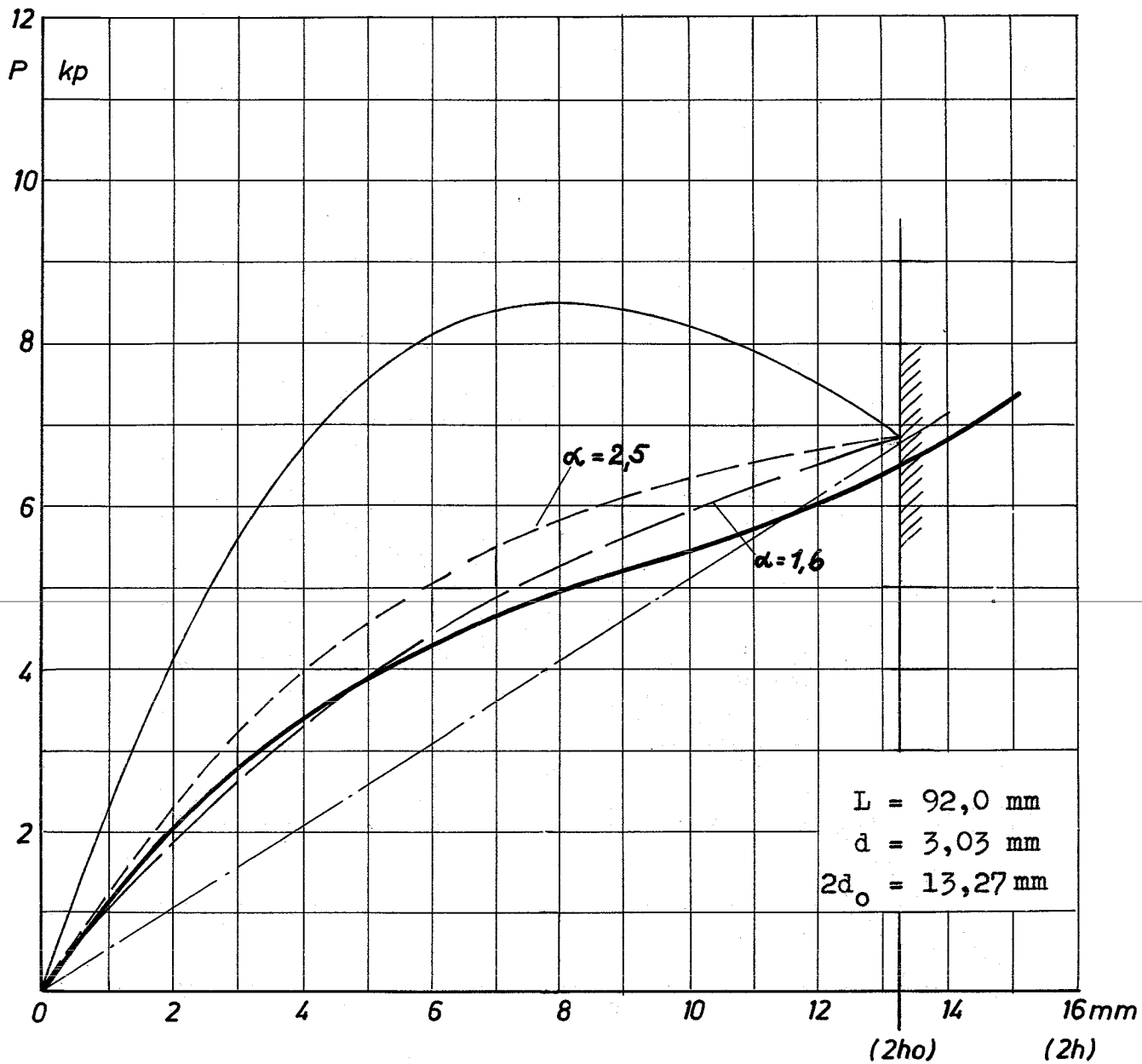


Plexiglas; verwölbte Platte ϕ

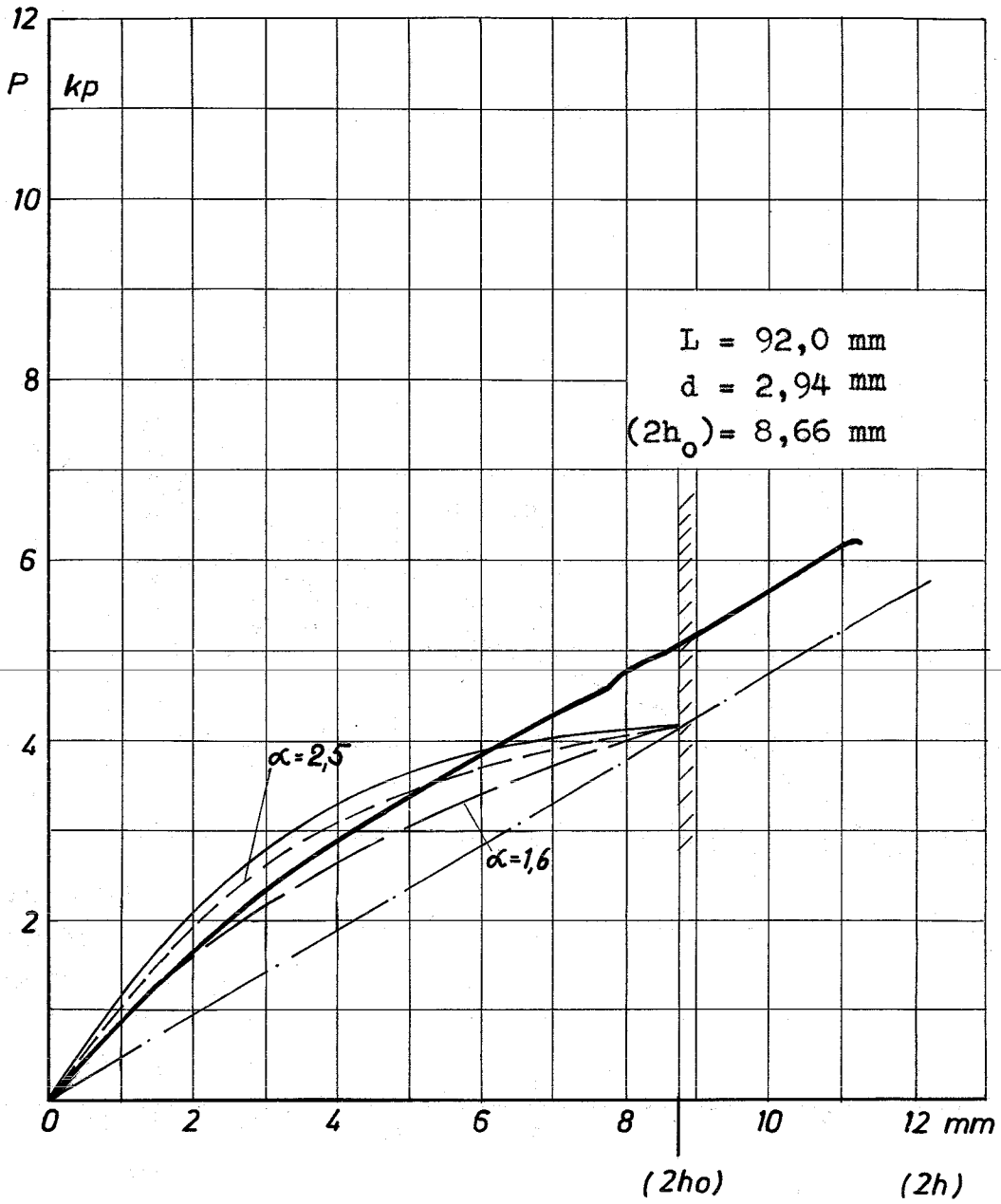


Plexiglas; verwölbte Platte ϕ

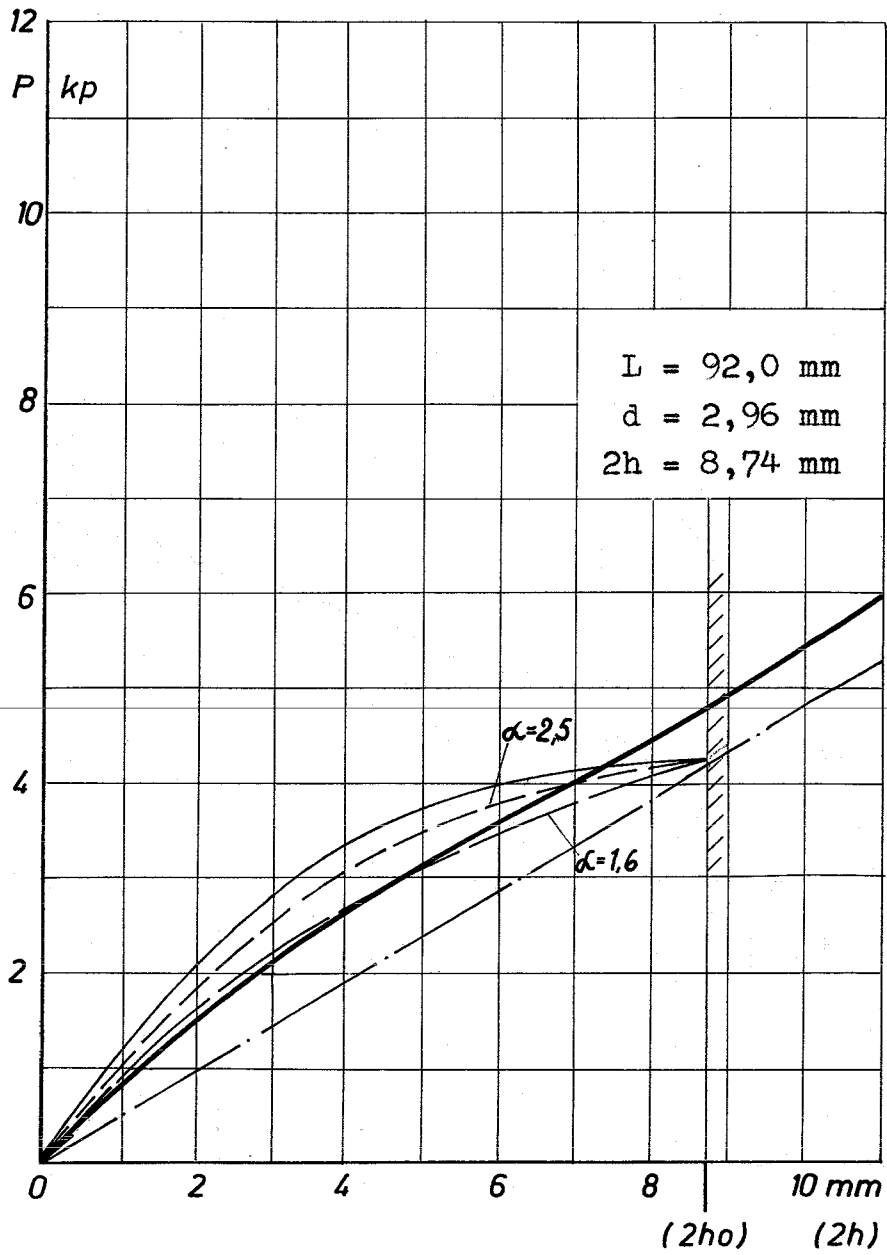
D6



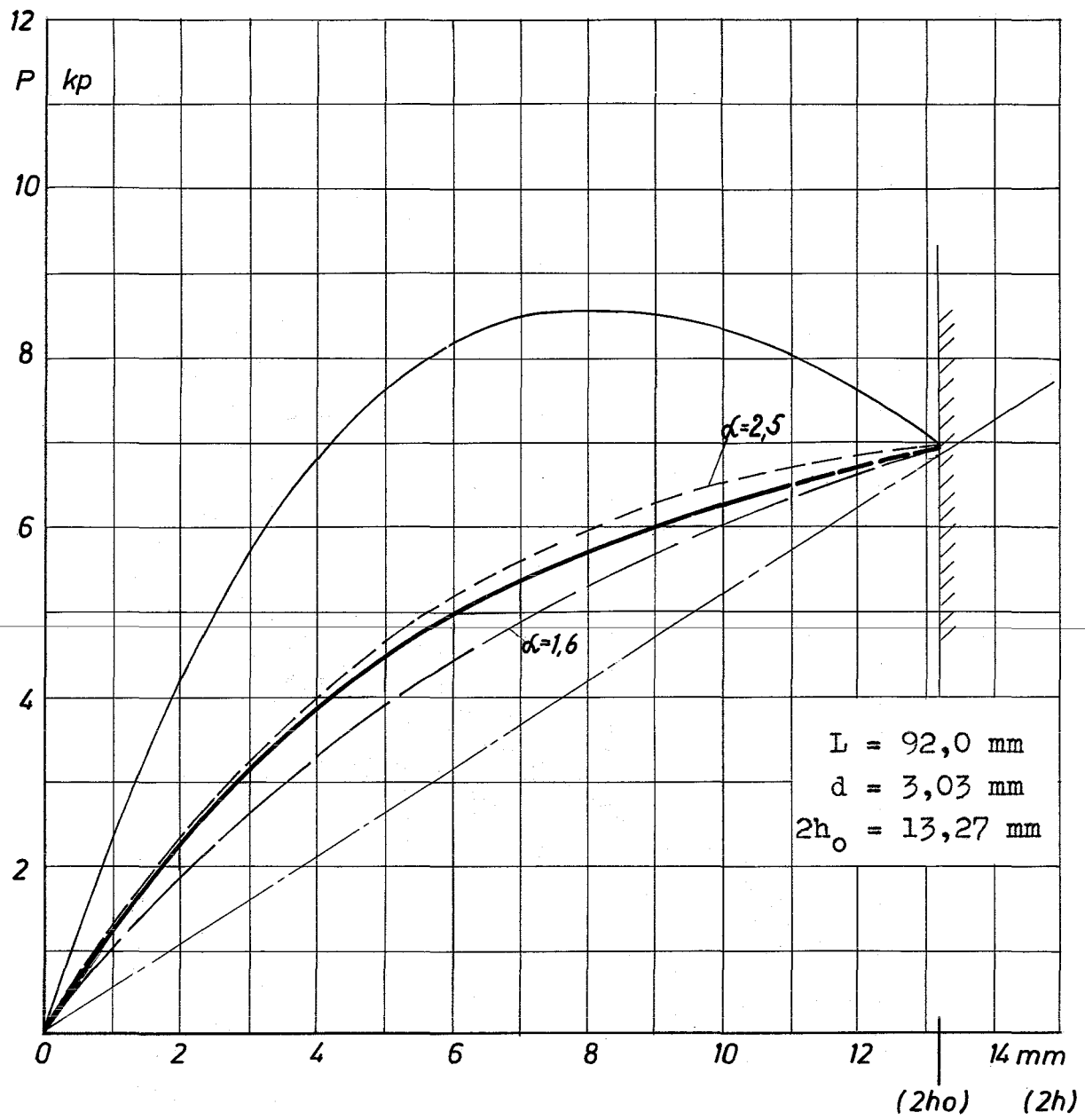
Plexiglas; verwölbte Platte ϕ



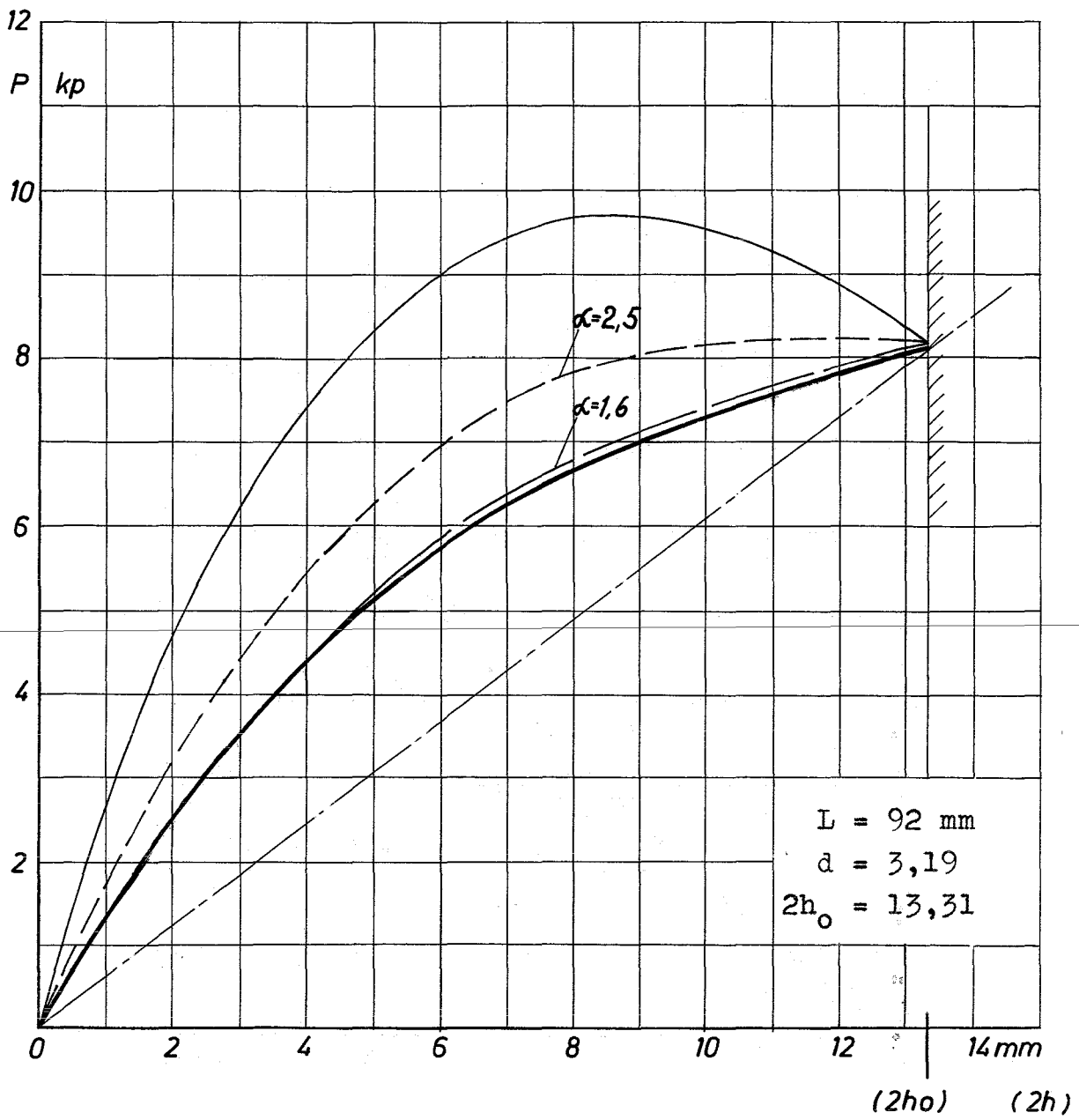
Plexiglas; verwölbte Platte ϕ



Plexiglas; verwölbte Platte ϕ

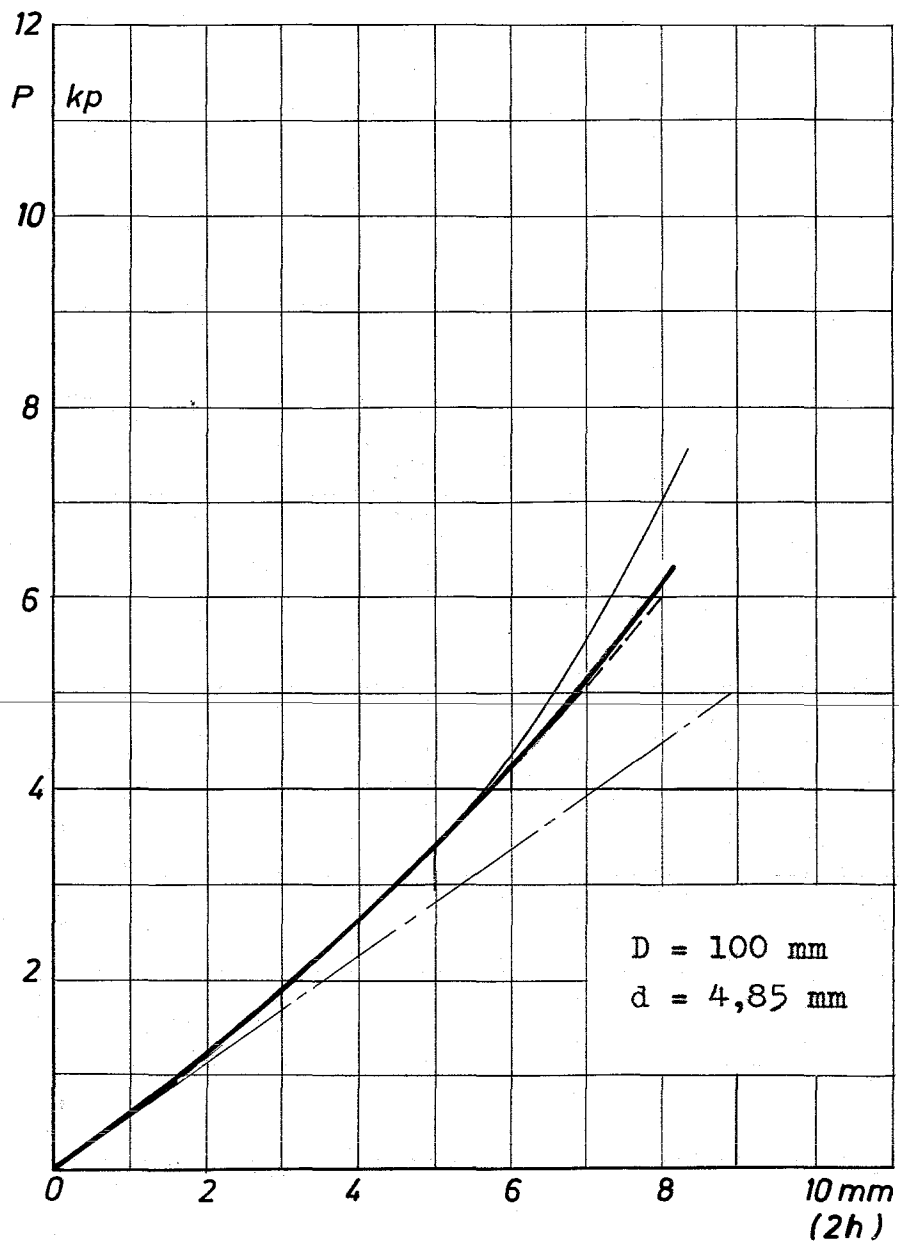


Plexiglas; verwölbte Platte ϕ

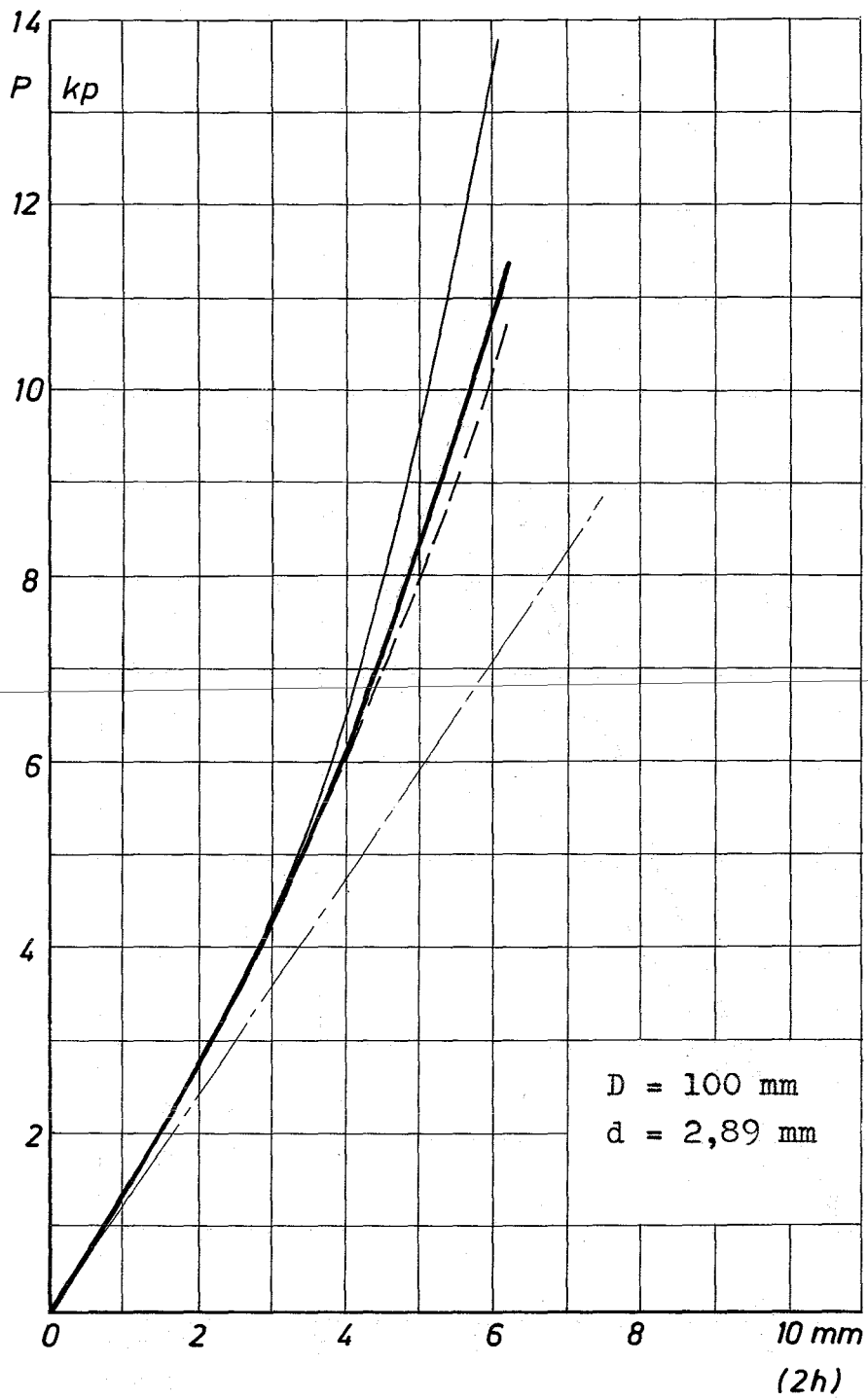


Plexiglas; verwölbte Platte ϕ

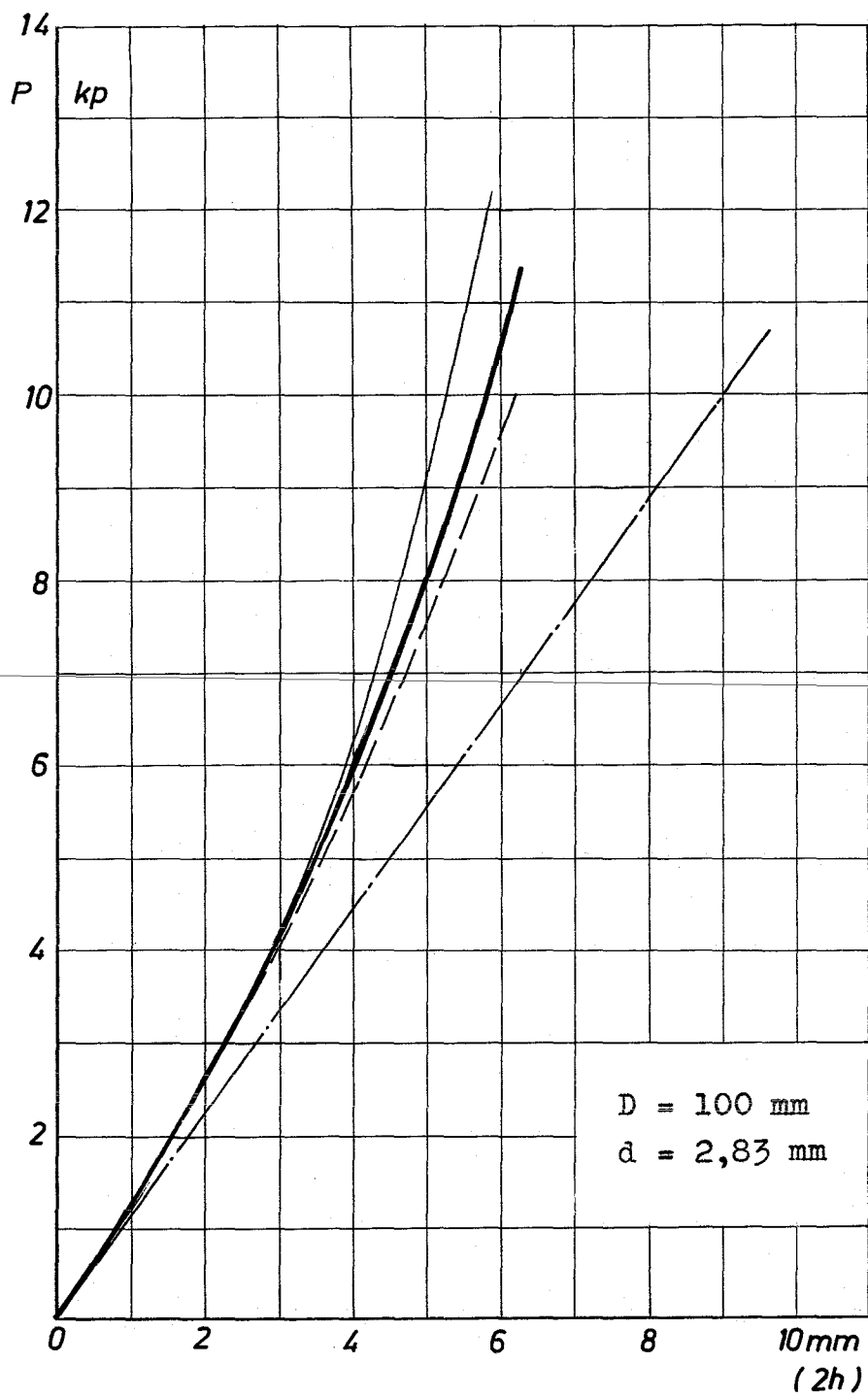
D11



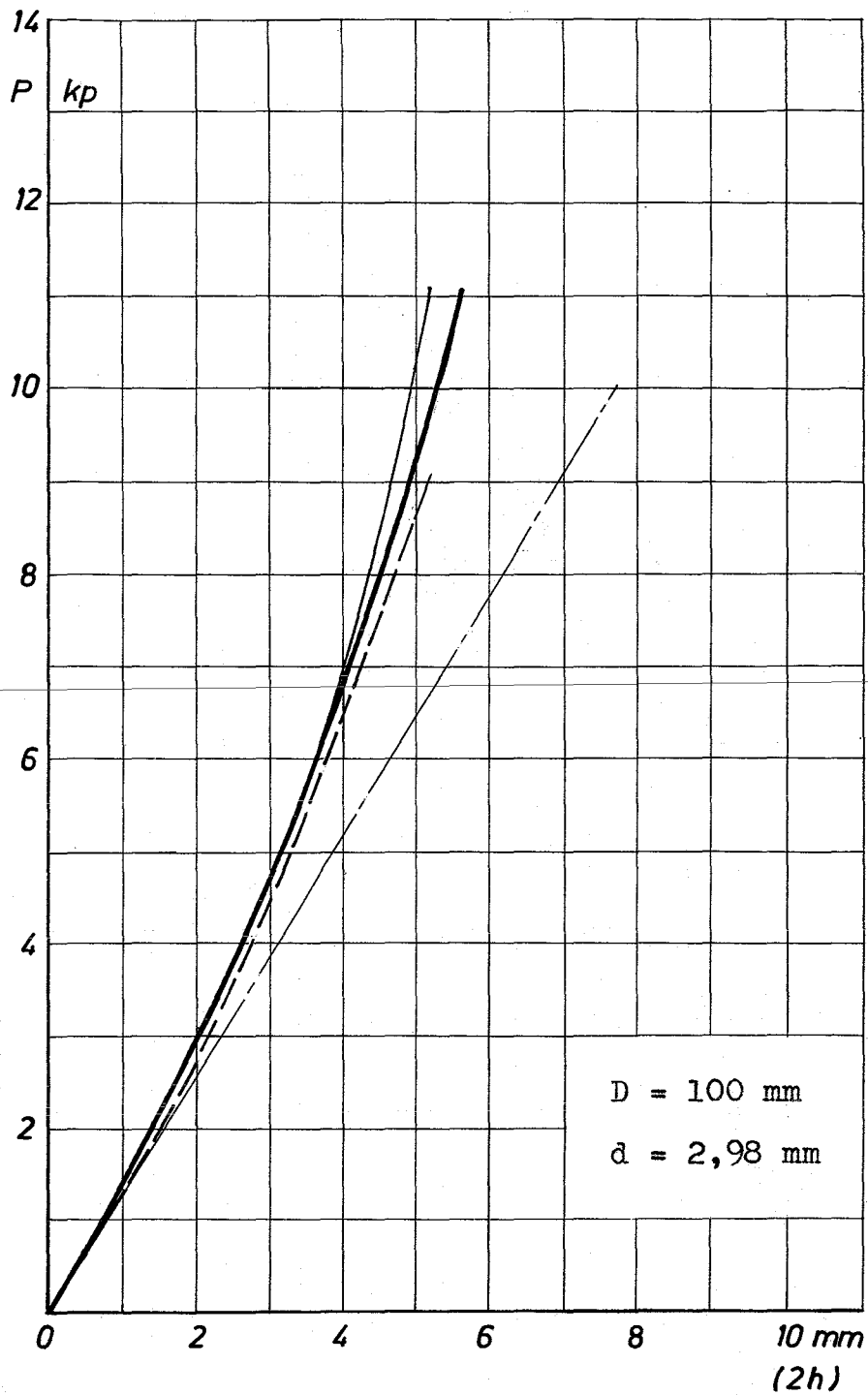
Plexiglas; ebene Platte \emptyset



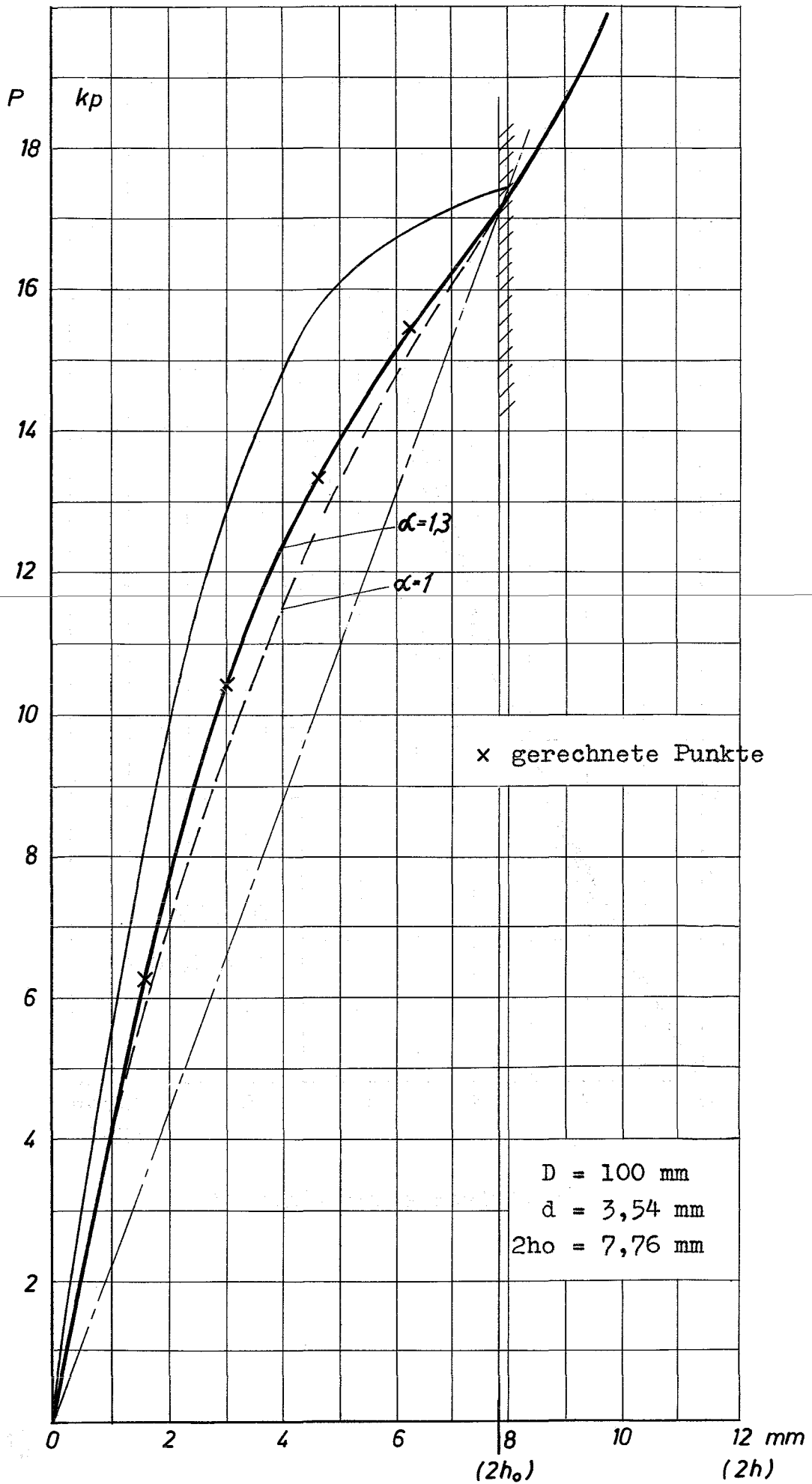
Plexiglas; ebene Platte \emptyset



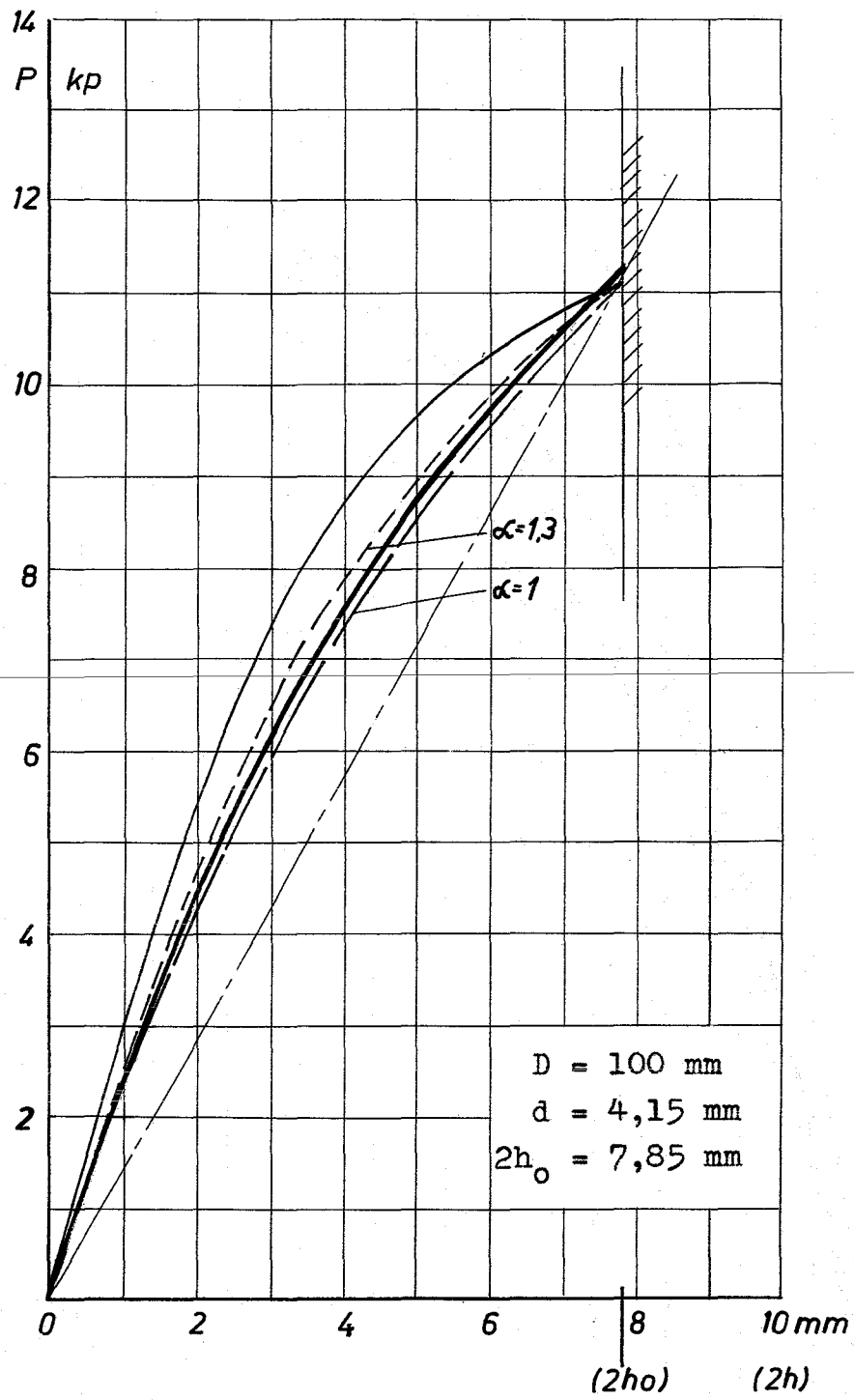
Plexiglas; ebene Platte \emptyset



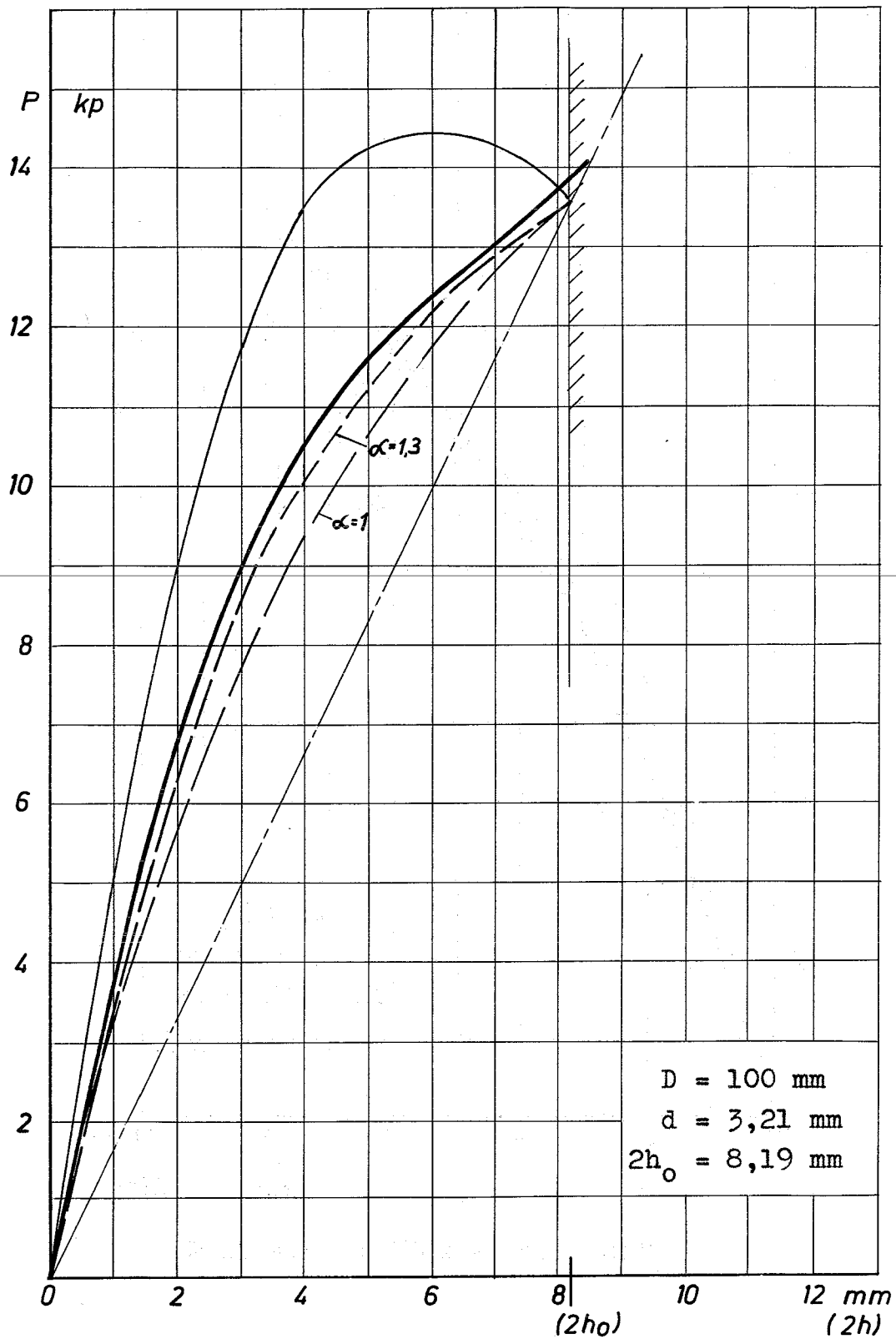
Plexiglas; ebene Platte \emptyset



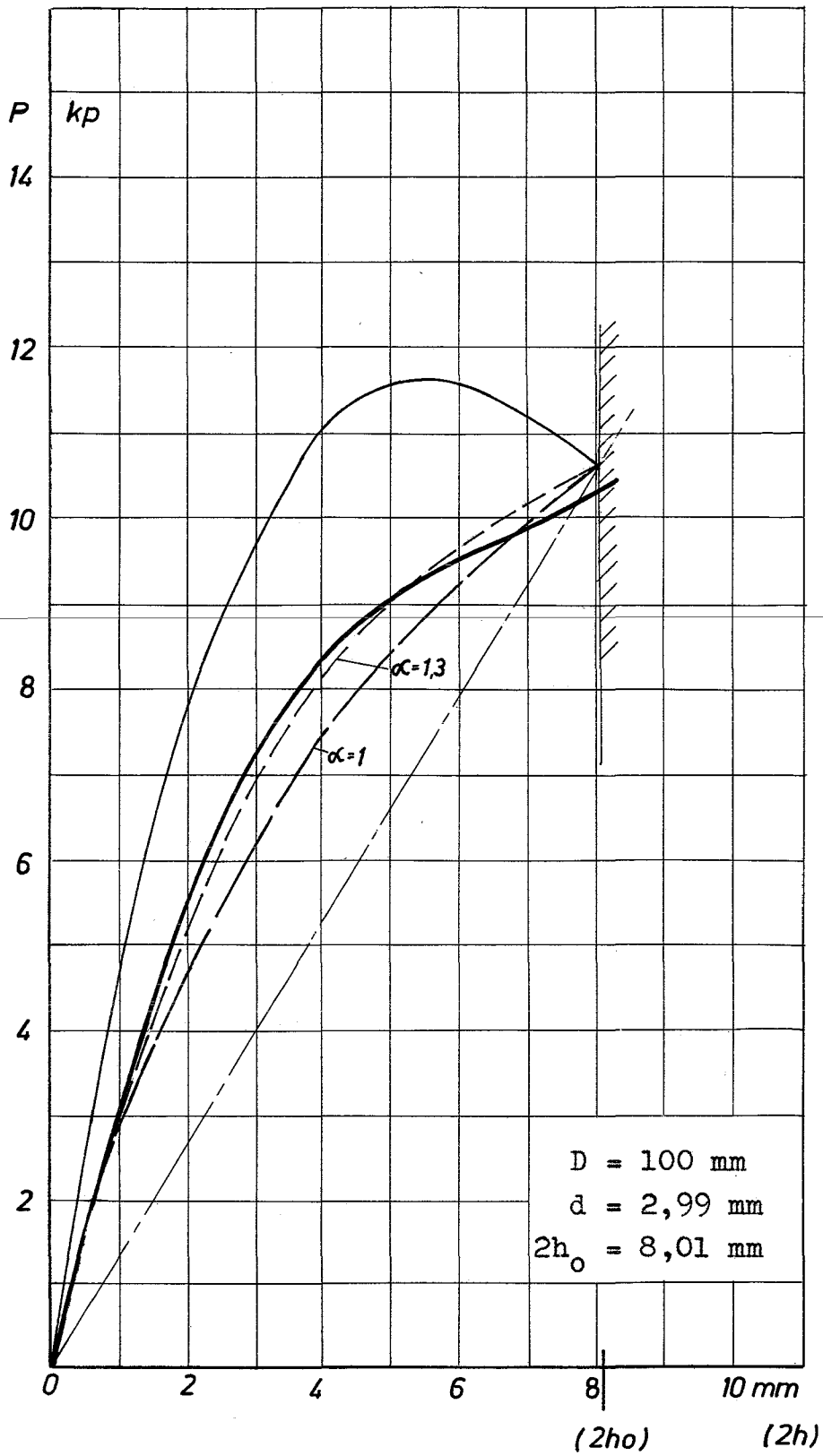
Plexiglas; verwölbte Platte \emptyset



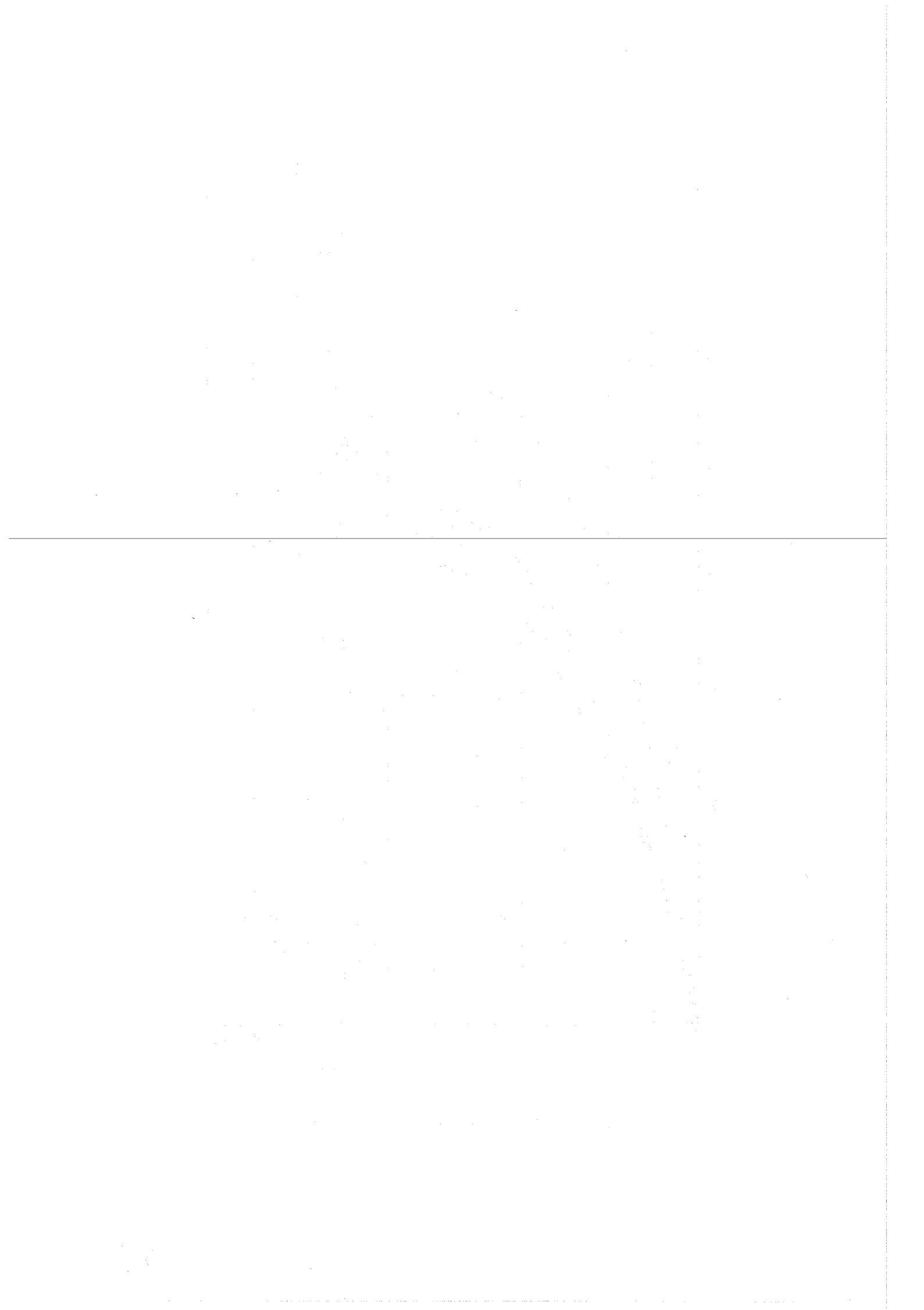
Plexiglas; verwölbte Platte \emptyset

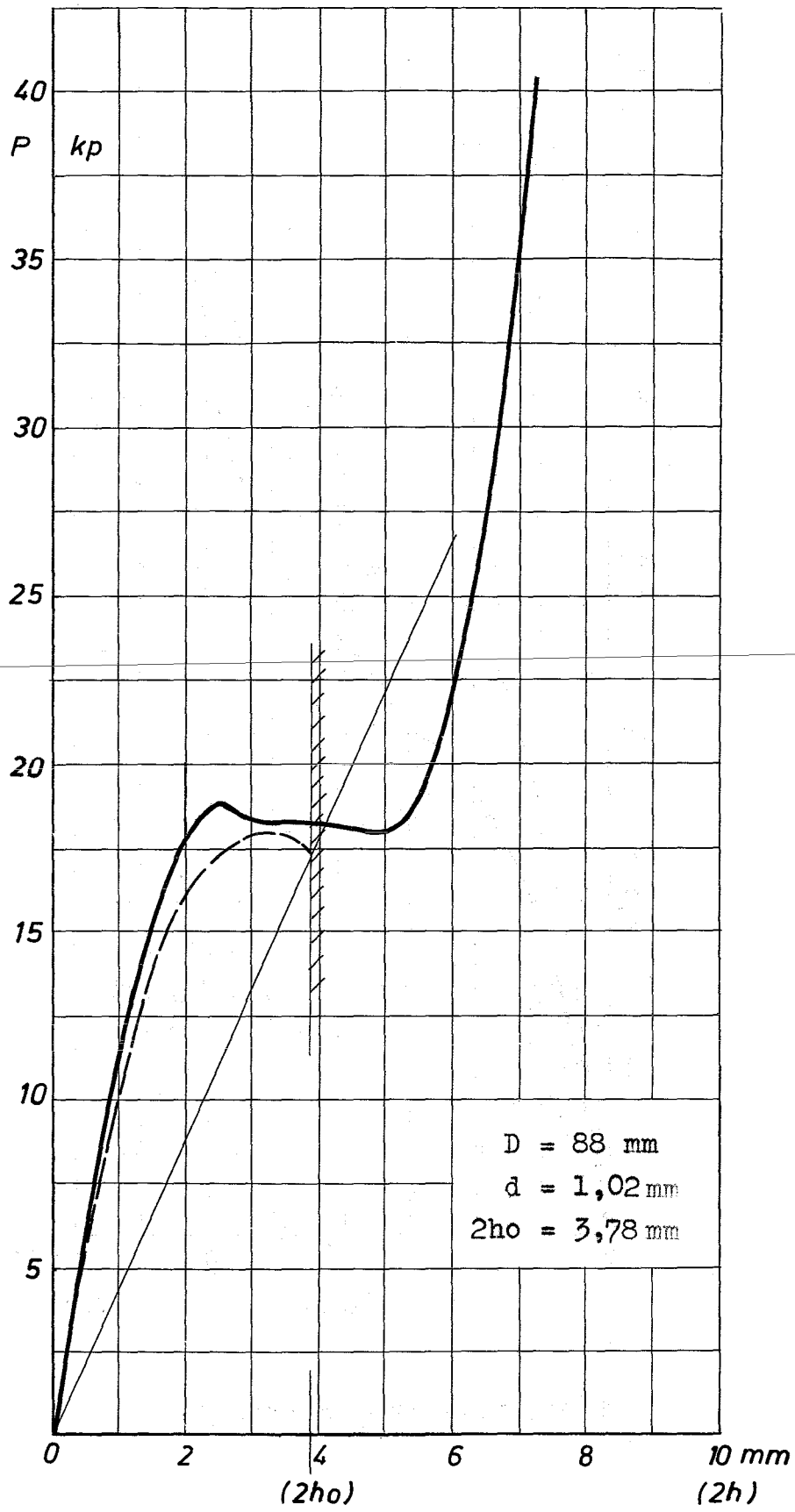


Plexiglas; verwölbte Platte \emptyset

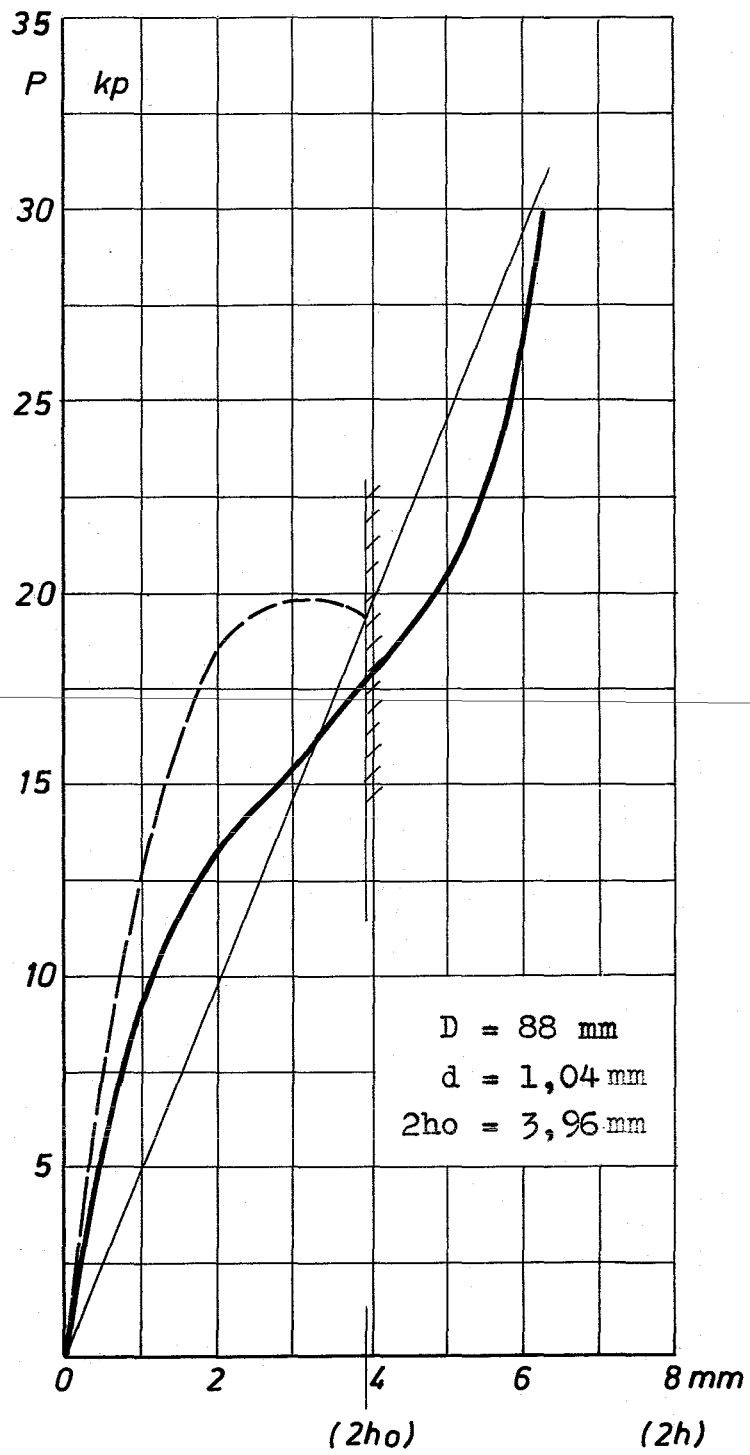


Plexiglas; verwölbte Platte \emptyset

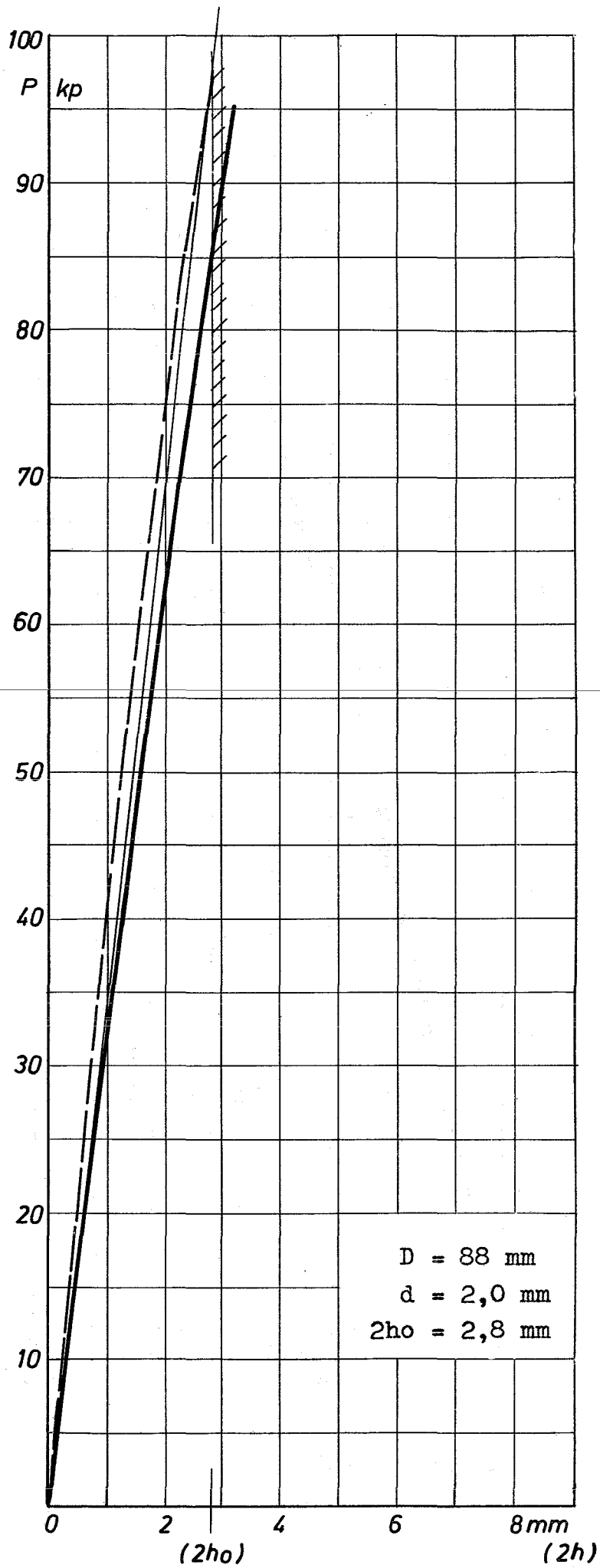




Stahl, verwölbte Platte \emptyset

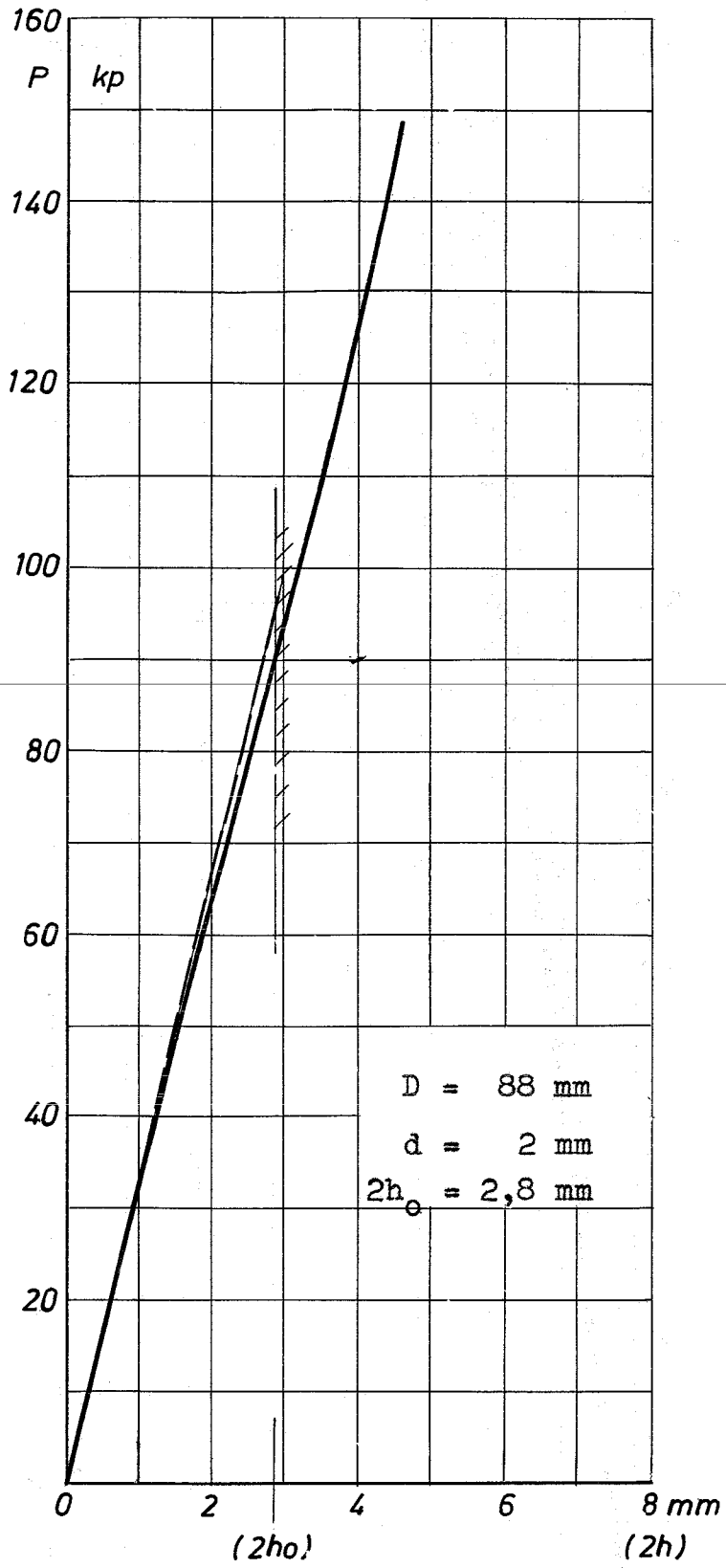


Stahl, verwölbte Platte \emptyset

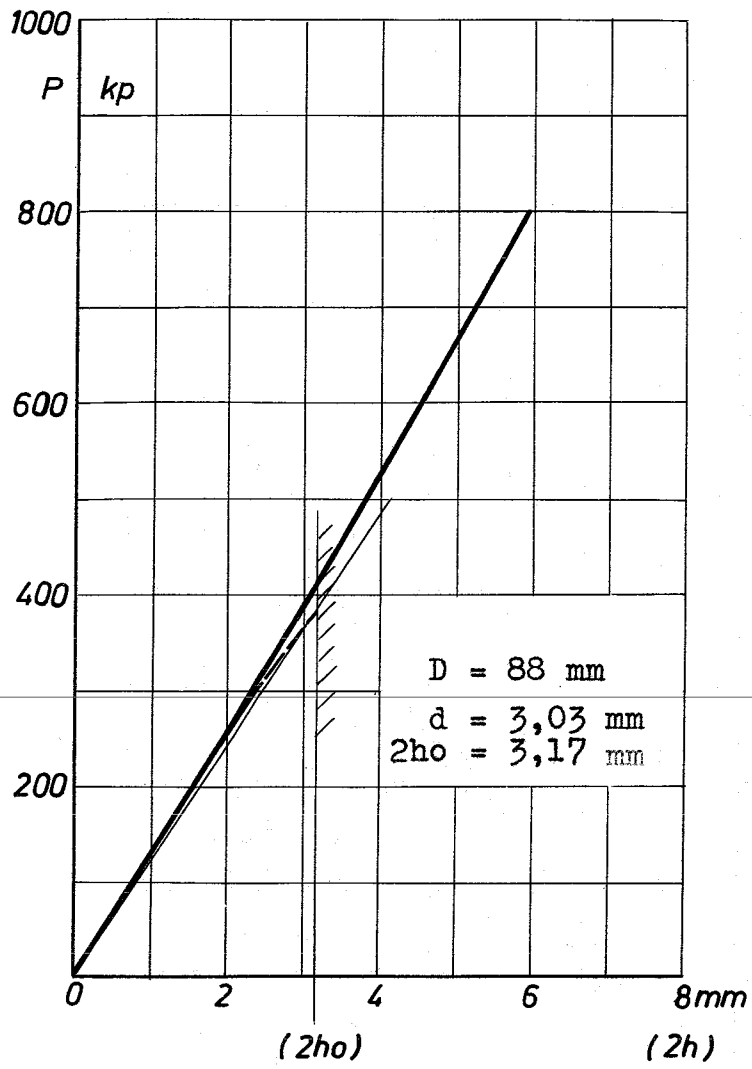


Stahl, verwölbte Platte \emptyset

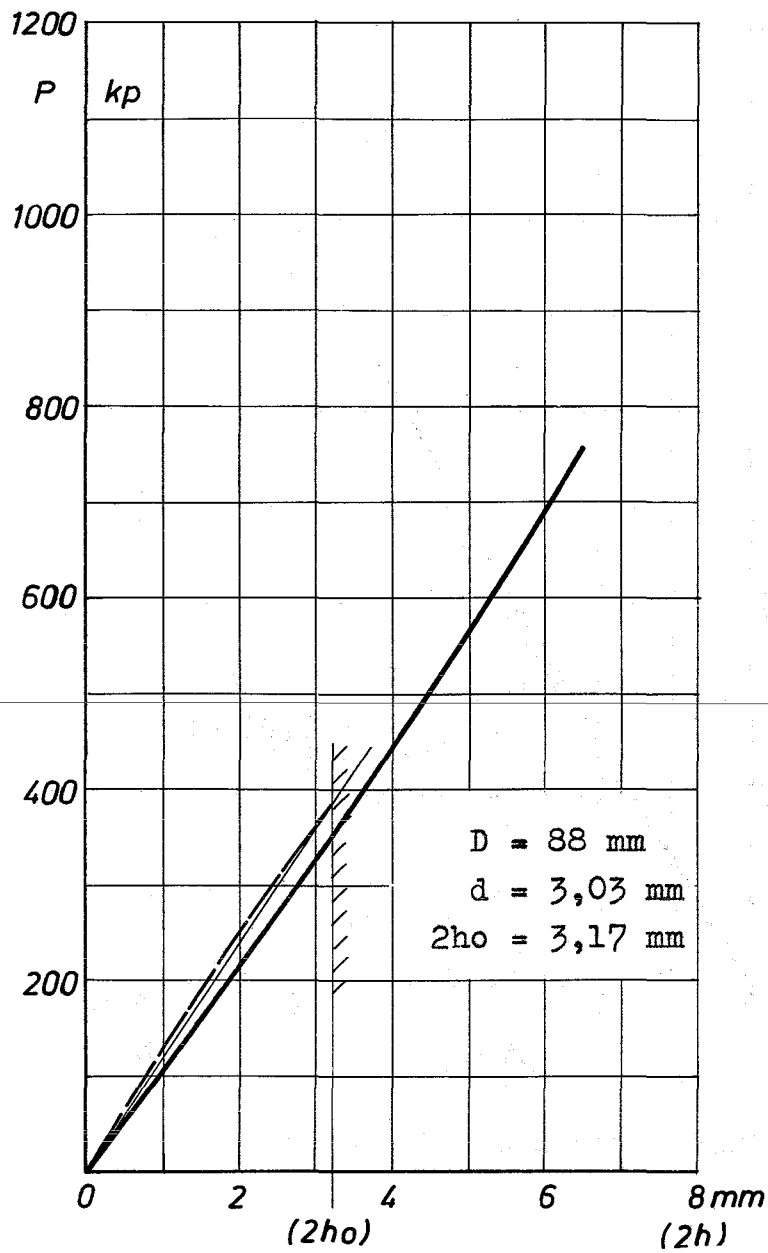
DS 3



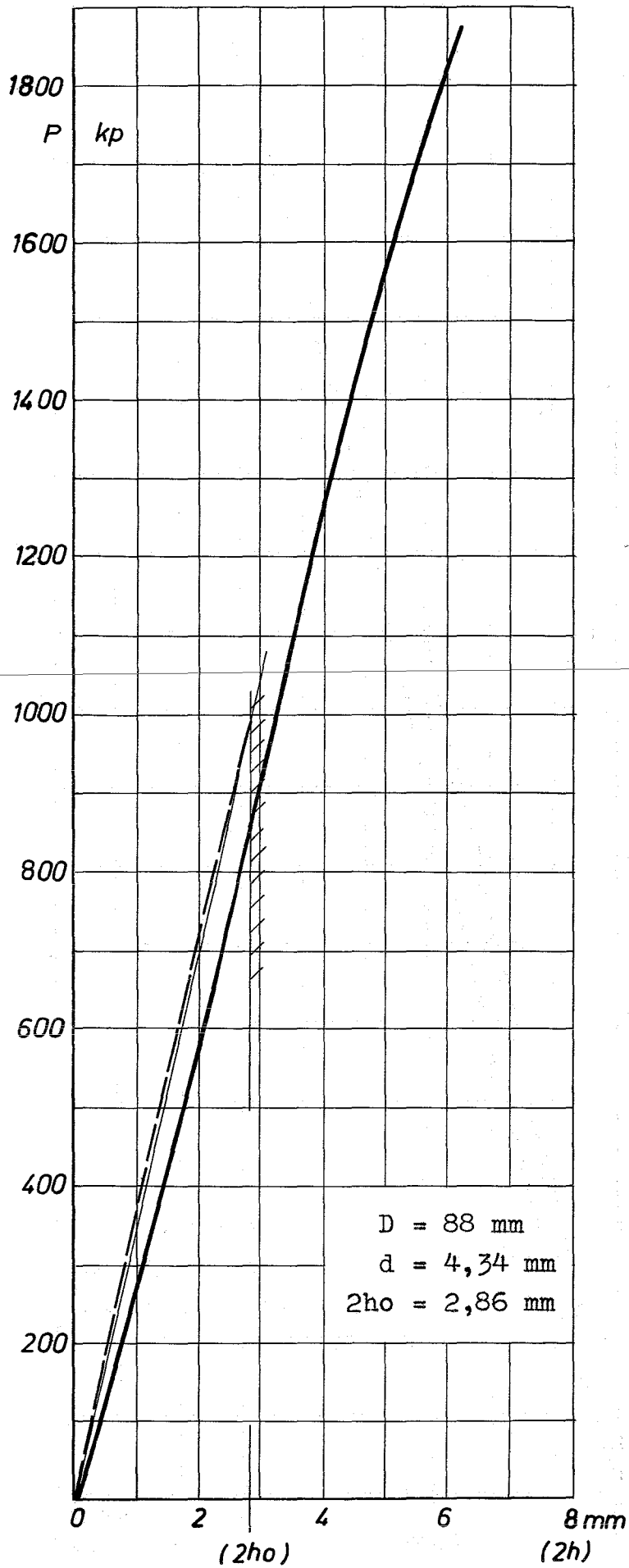
Stahl; verwölbte Platte \emptyset



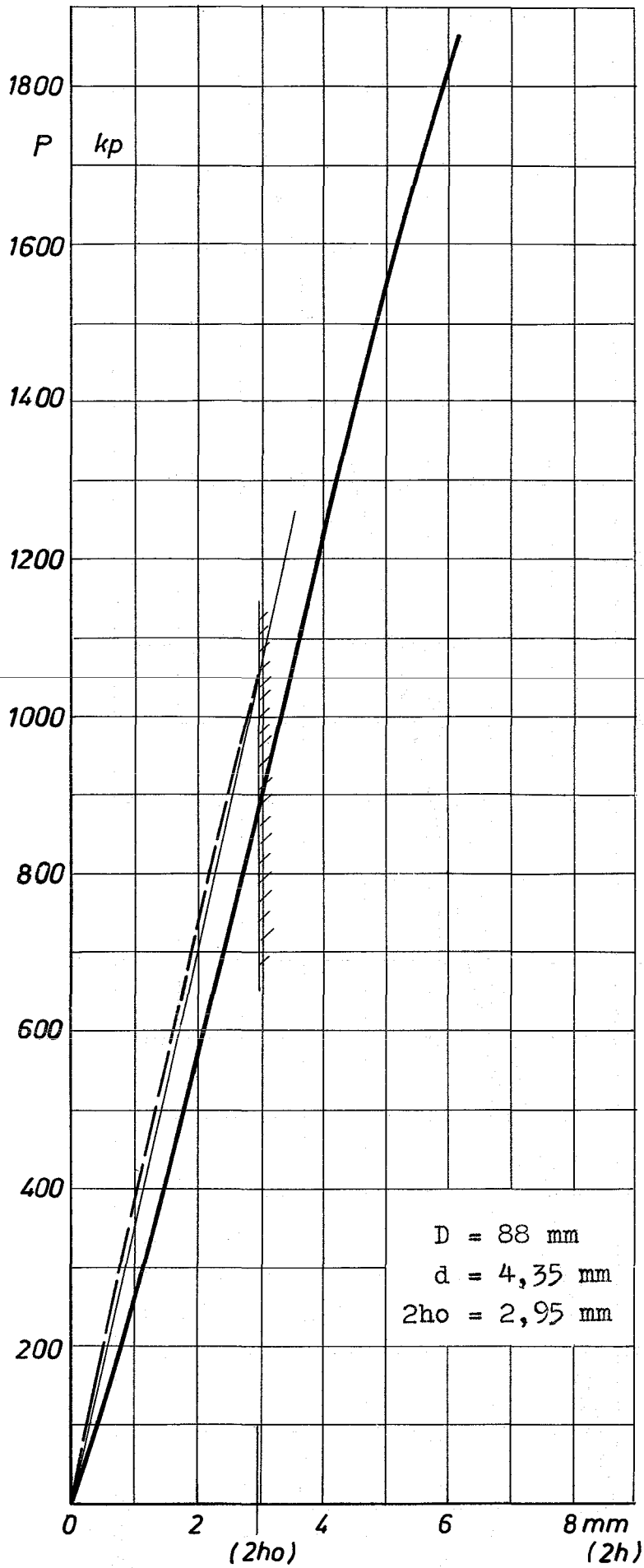
Stahl, verwölbte Platte \emptyset



Stahl, verwölbte Platte \emptyset

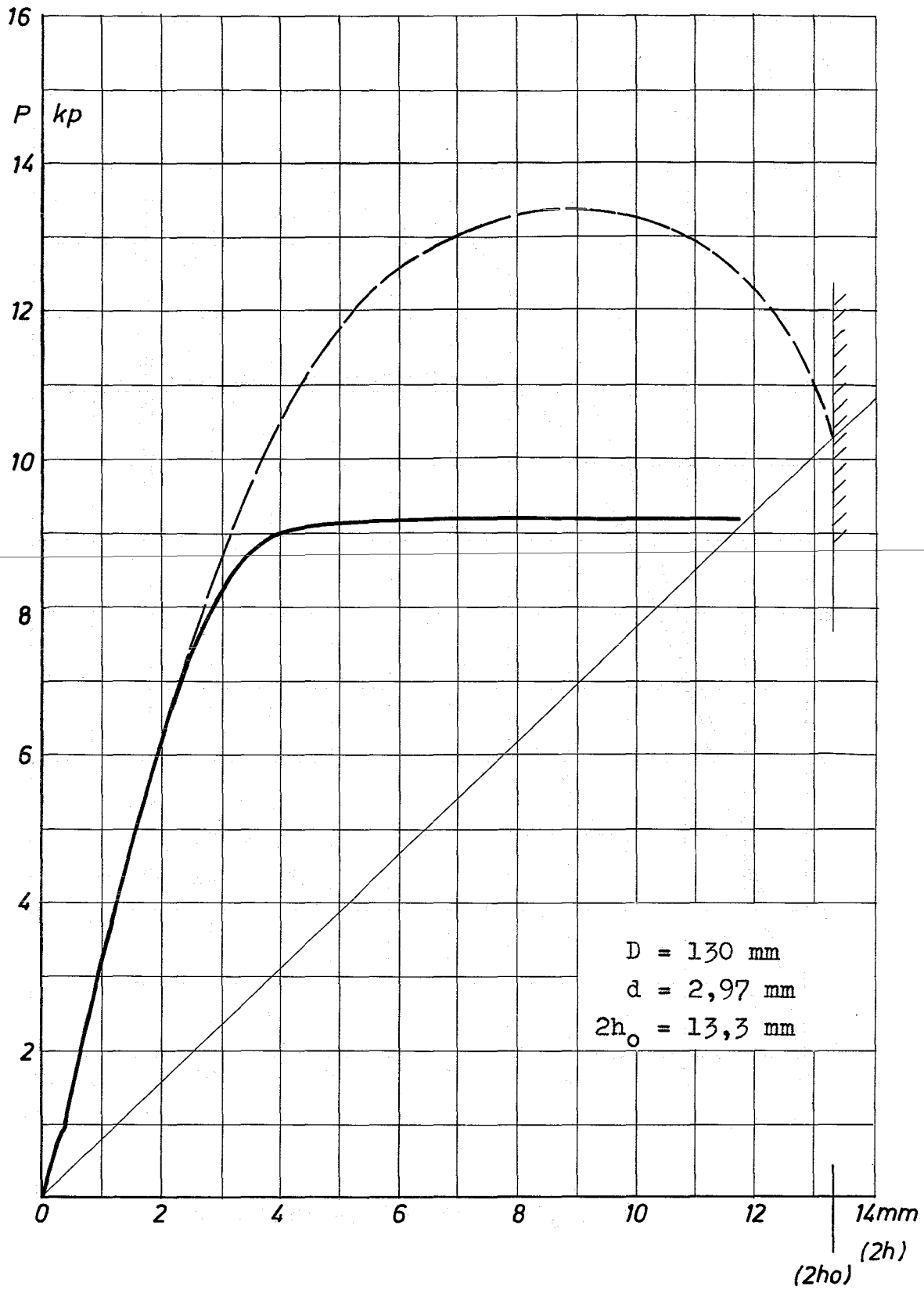


Stahl, verwölbte Platte \emptyset

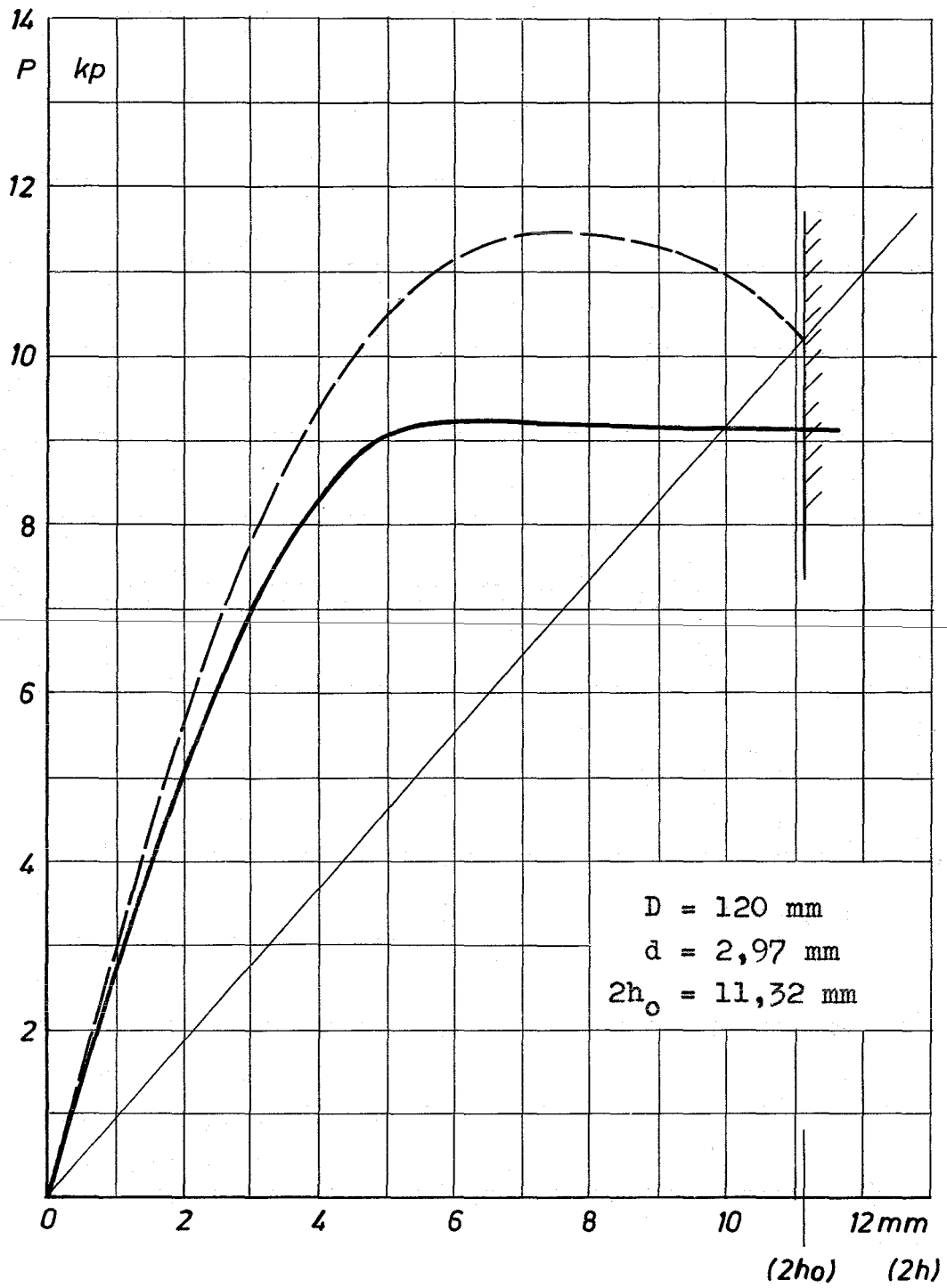


$D = 88 \text{ mm}$
 $d = 4,35 \text{ mm}$
 $2h_0 = 2,95 \text{ mm}$

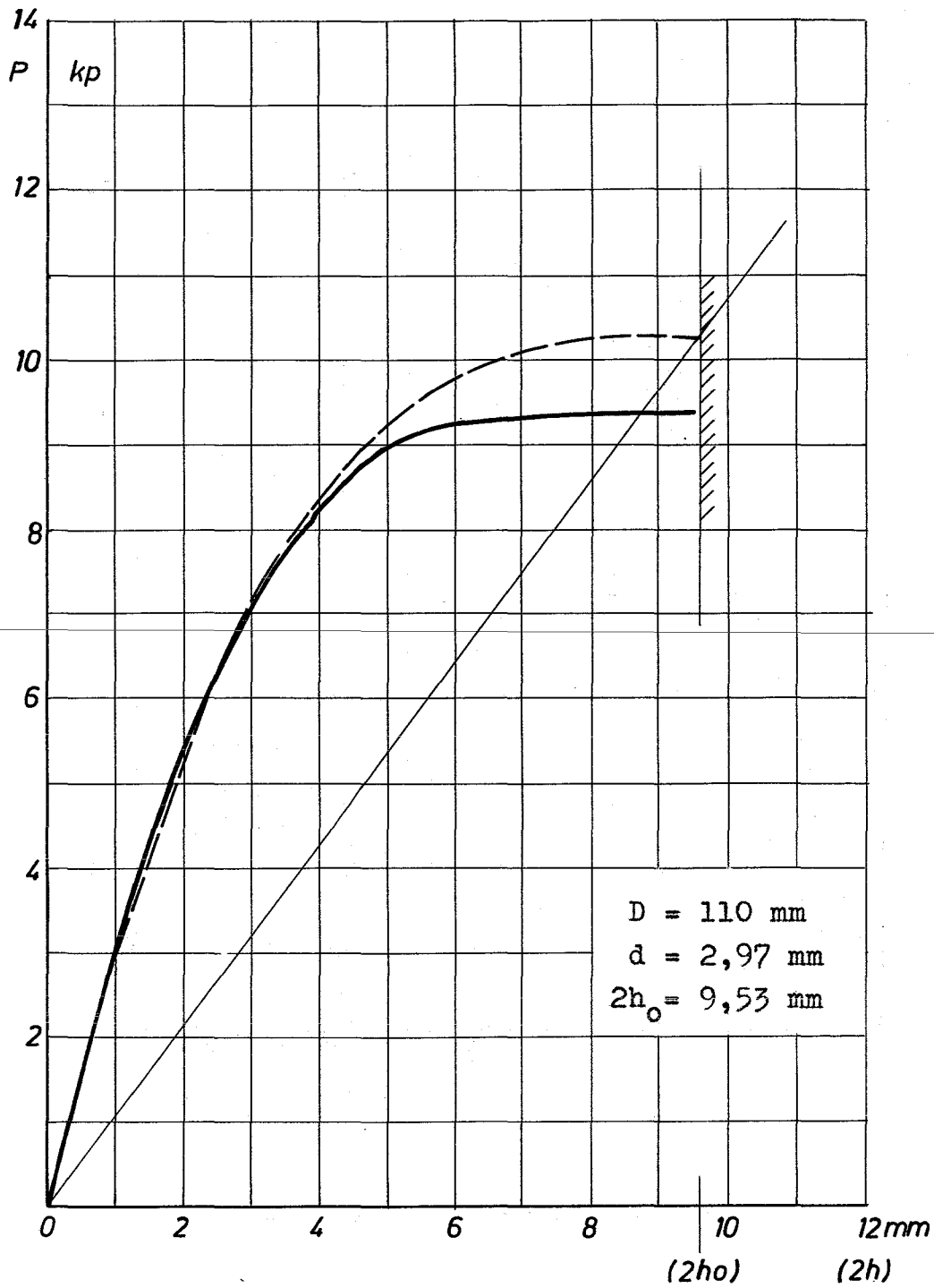
Stahl, verwölbte Platte \emptyset



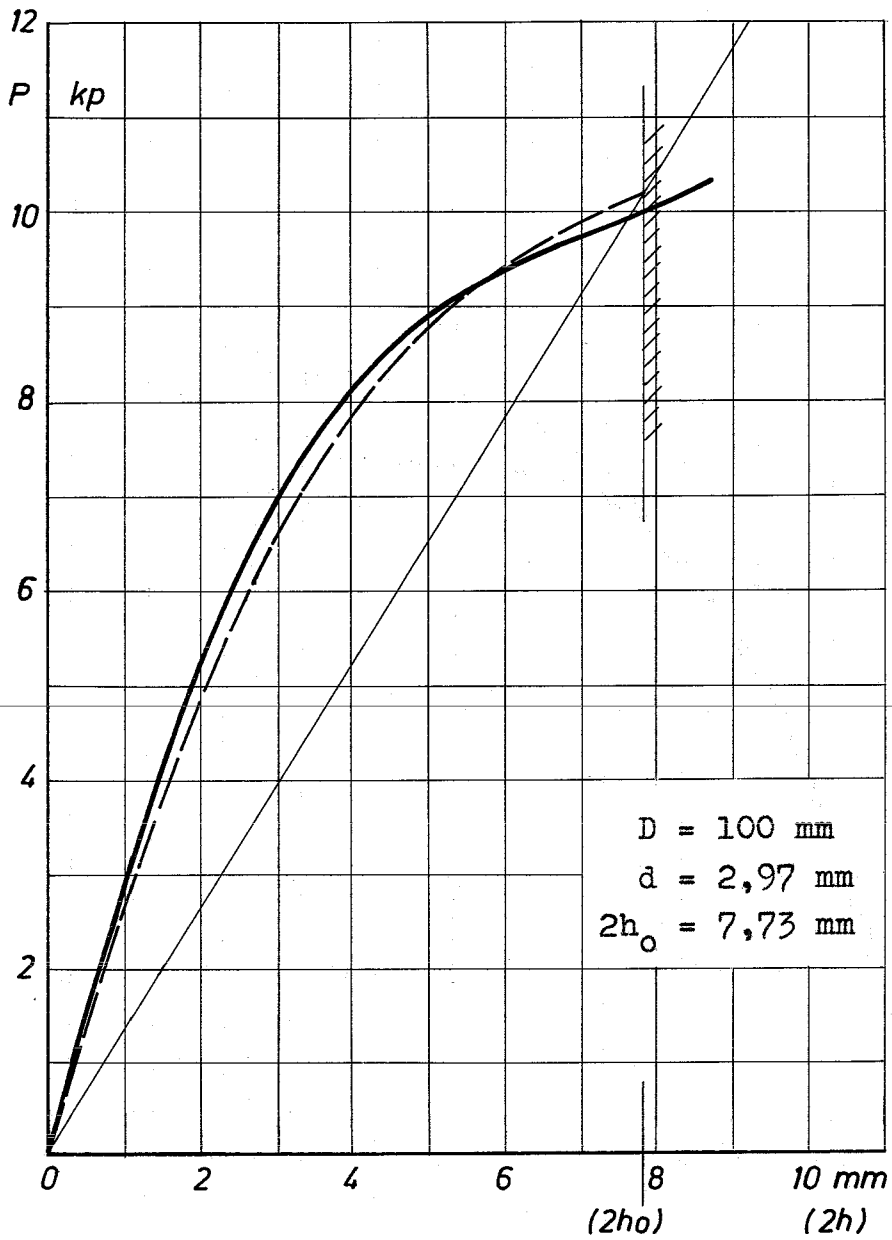
Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset



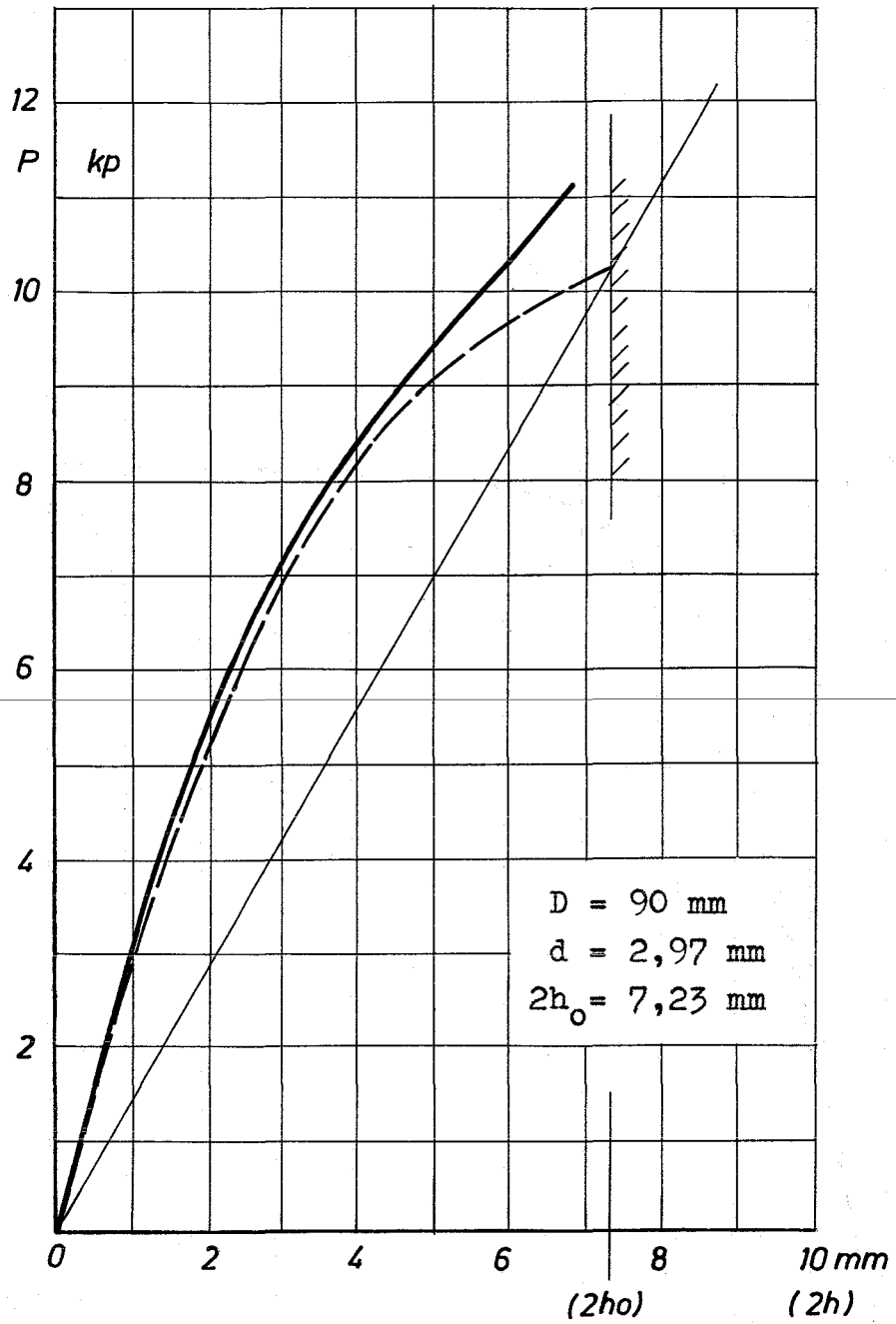
Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset



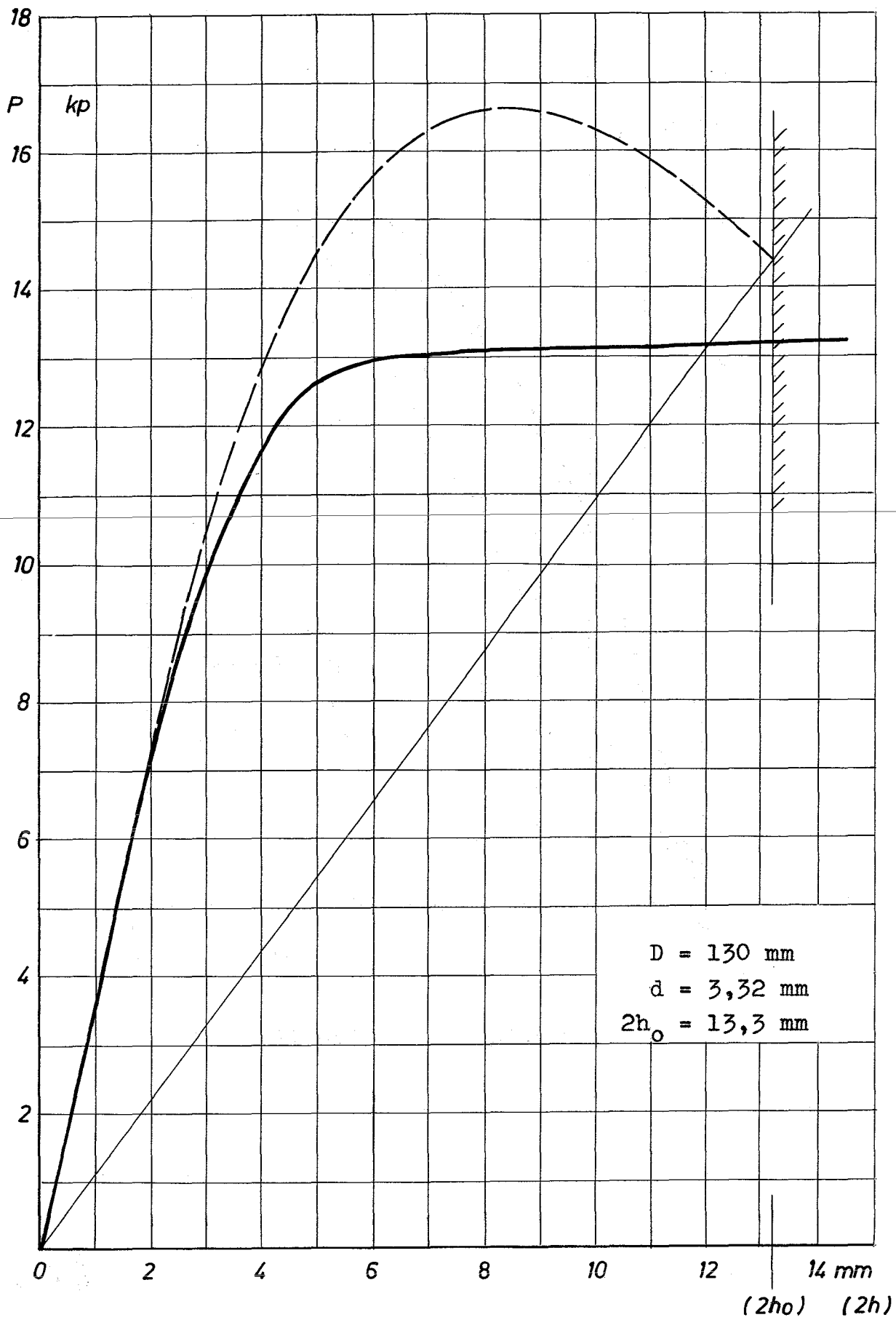
Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset



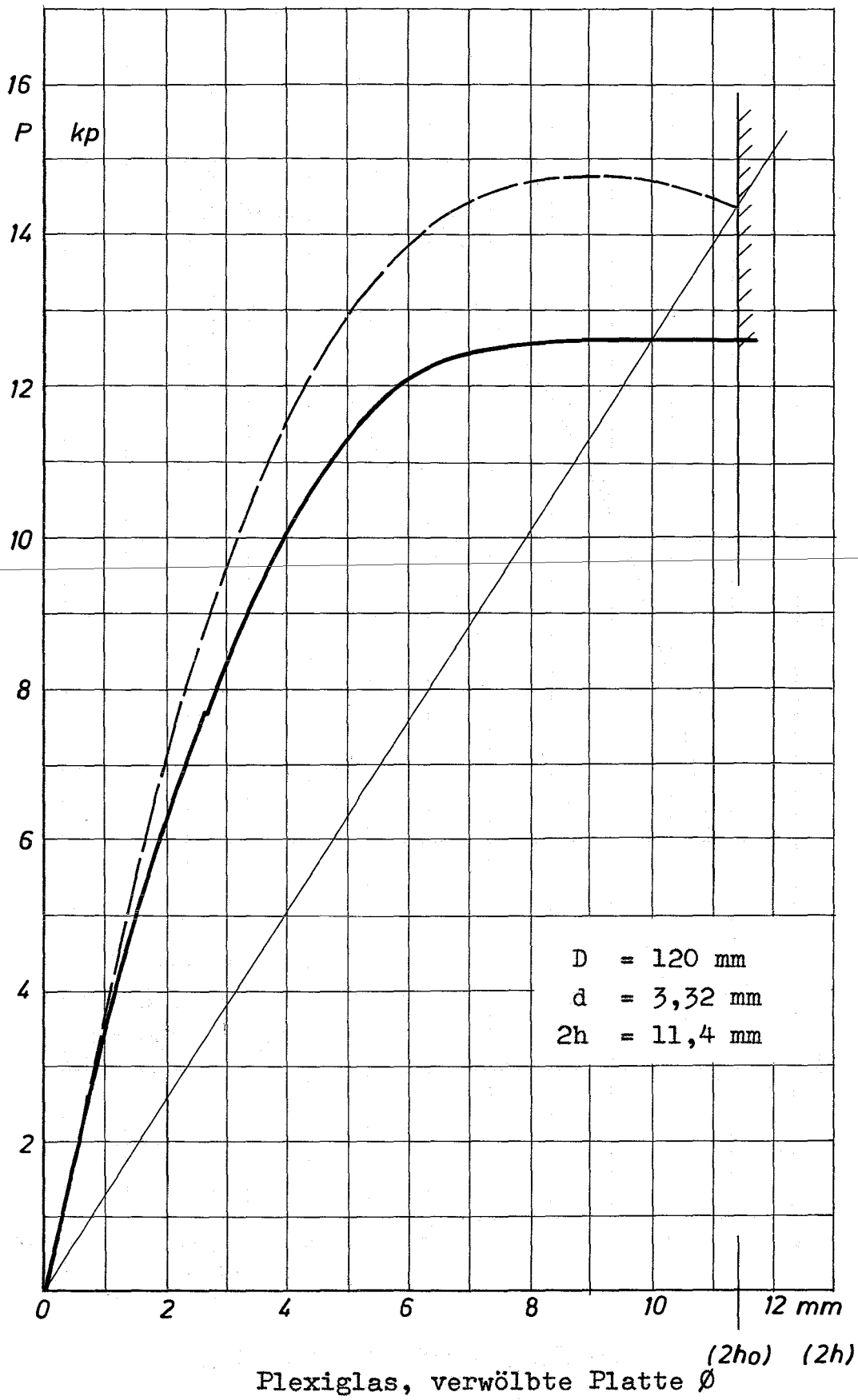
Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset

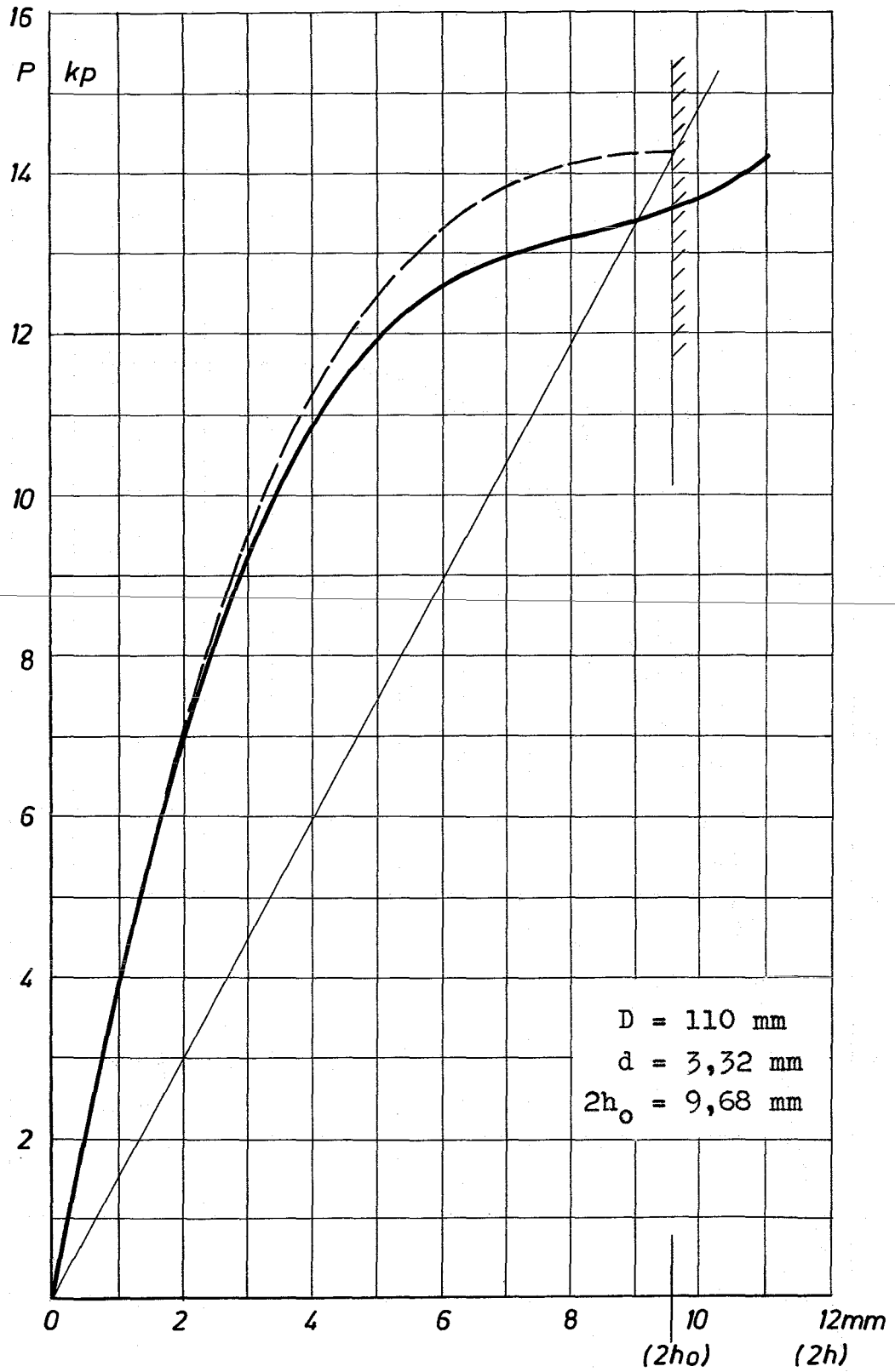


Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset

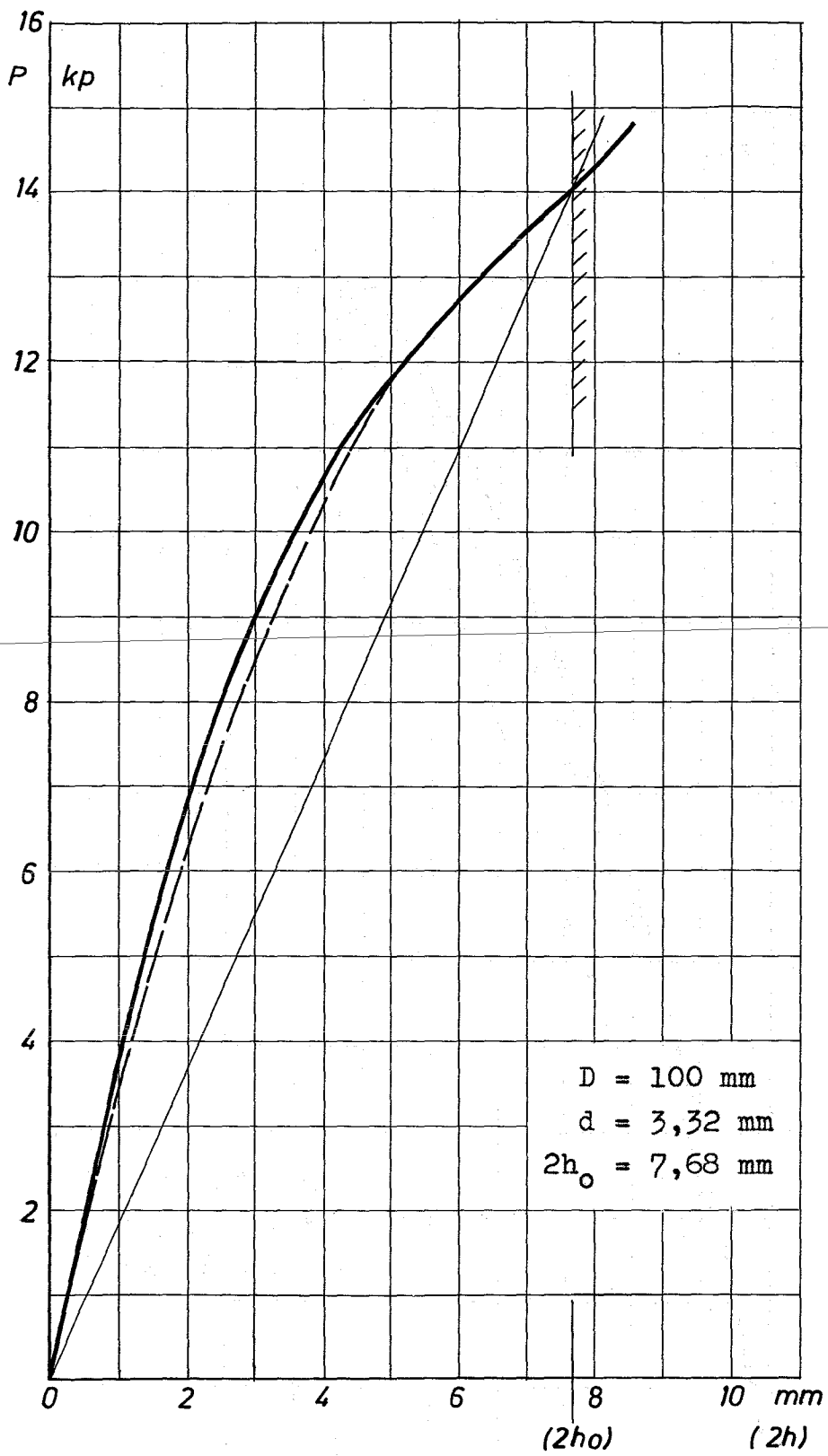


Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset

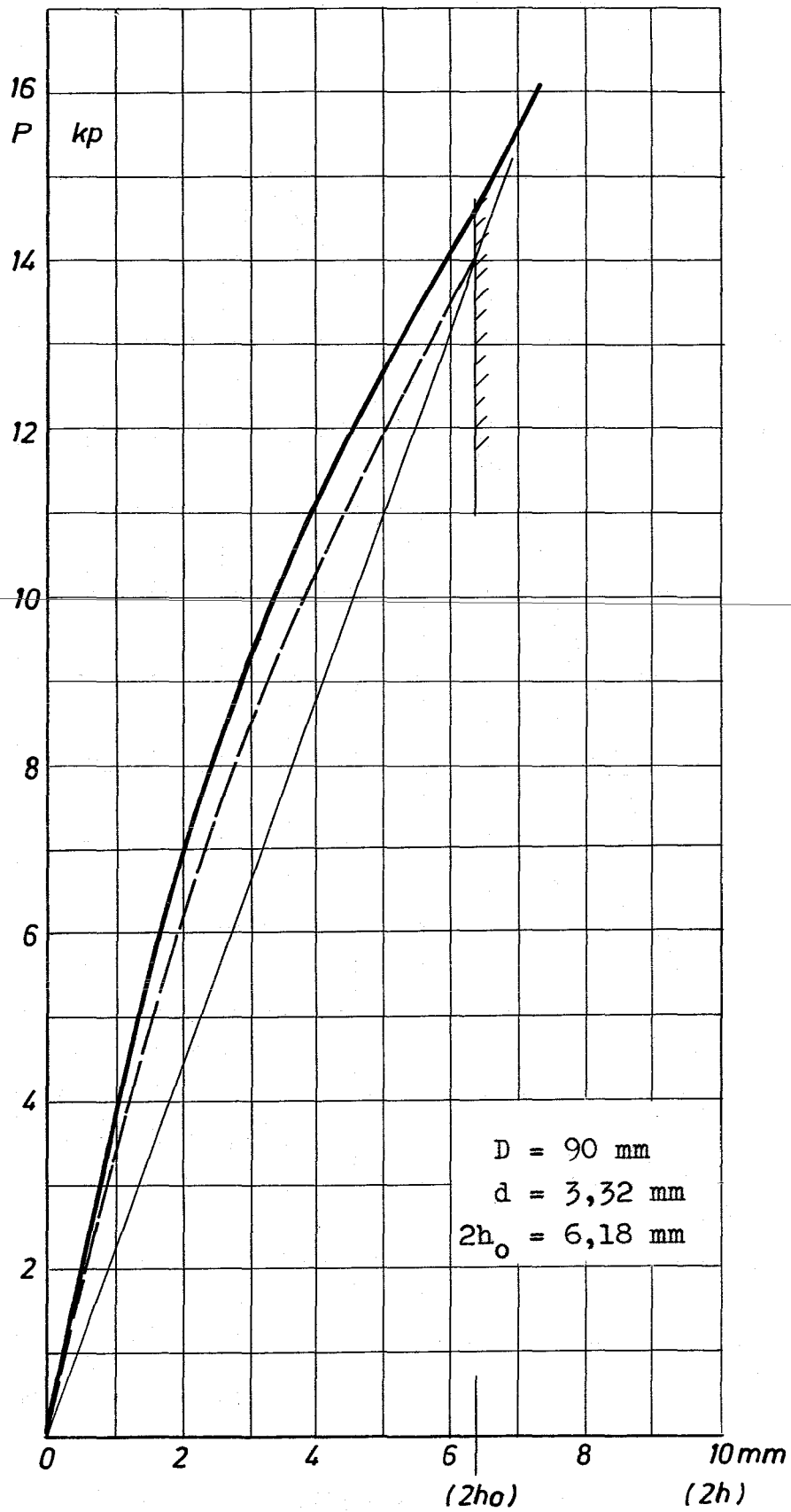




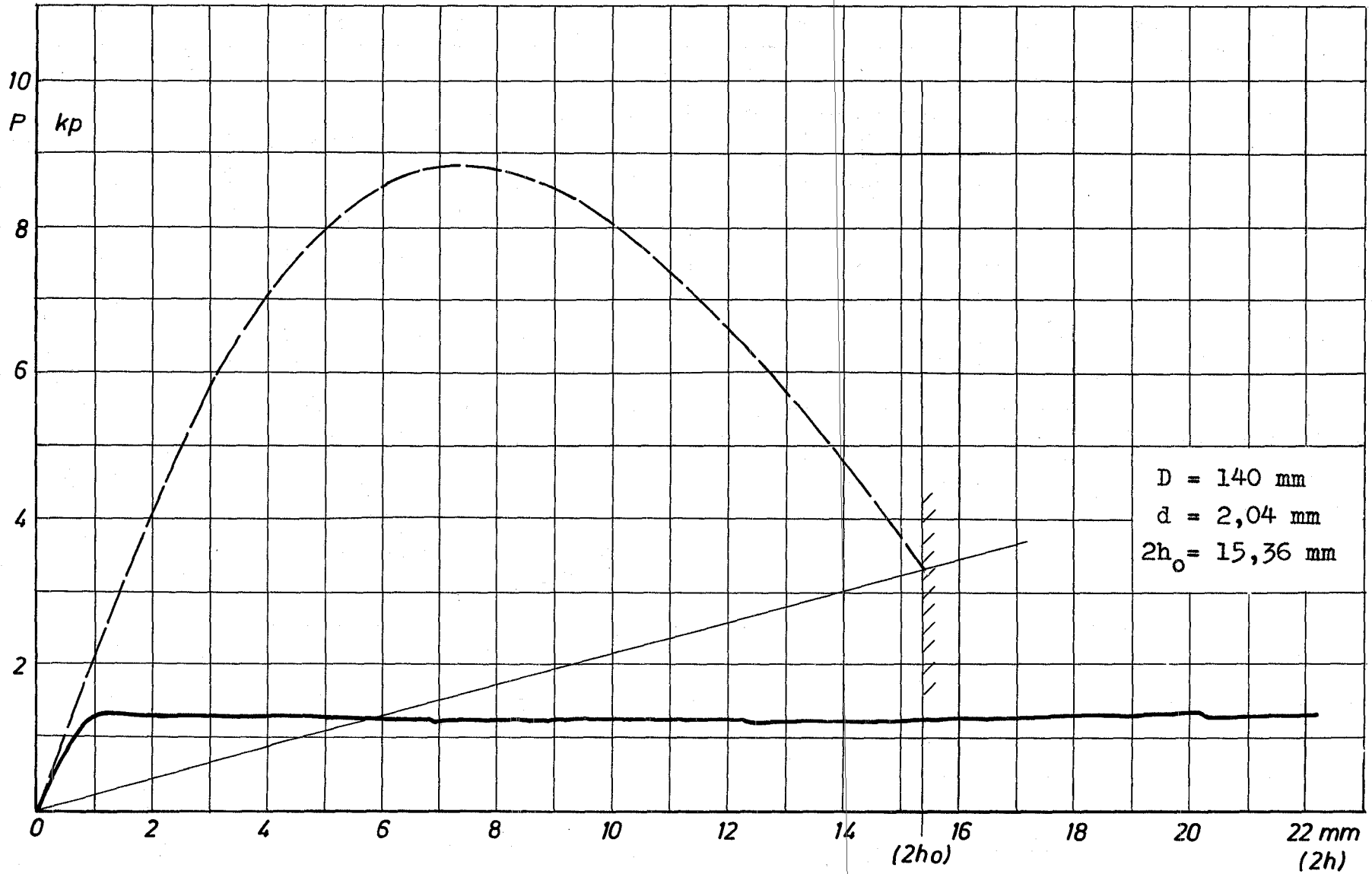
Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset



Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset



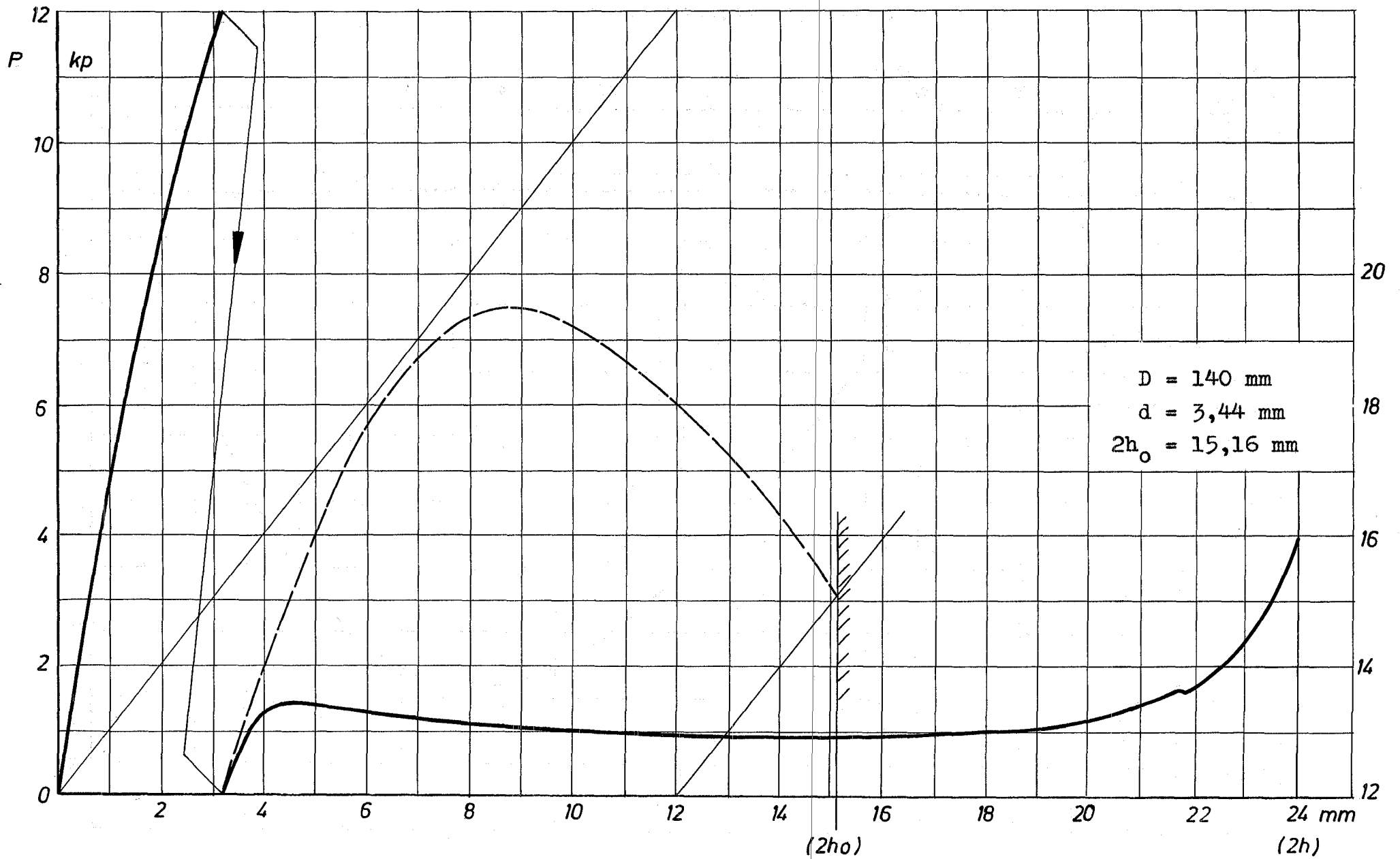
Plexiglas verwölbte Platte \emptyset



Plexiglas verwölbte Platte \emptyset

DA 11

DA12



Plexiglas, verwölbte Platte \emptyset

$D = 140$ mm
 $d = 3,44$ mm
 $2h_0 = 15,16$ mm

DA 13

