

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

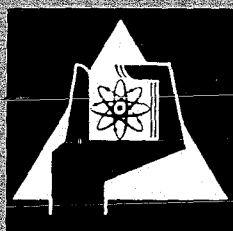
Juni 1971

KFK 1417

Institut für Reaktorbauelemente

Über das dynamische Verhalten
der gedämpften Hypo-Federsäule

O. Mühlhäuser



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M.B.H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Institut für Reaktorbauelemente

Juni 1971

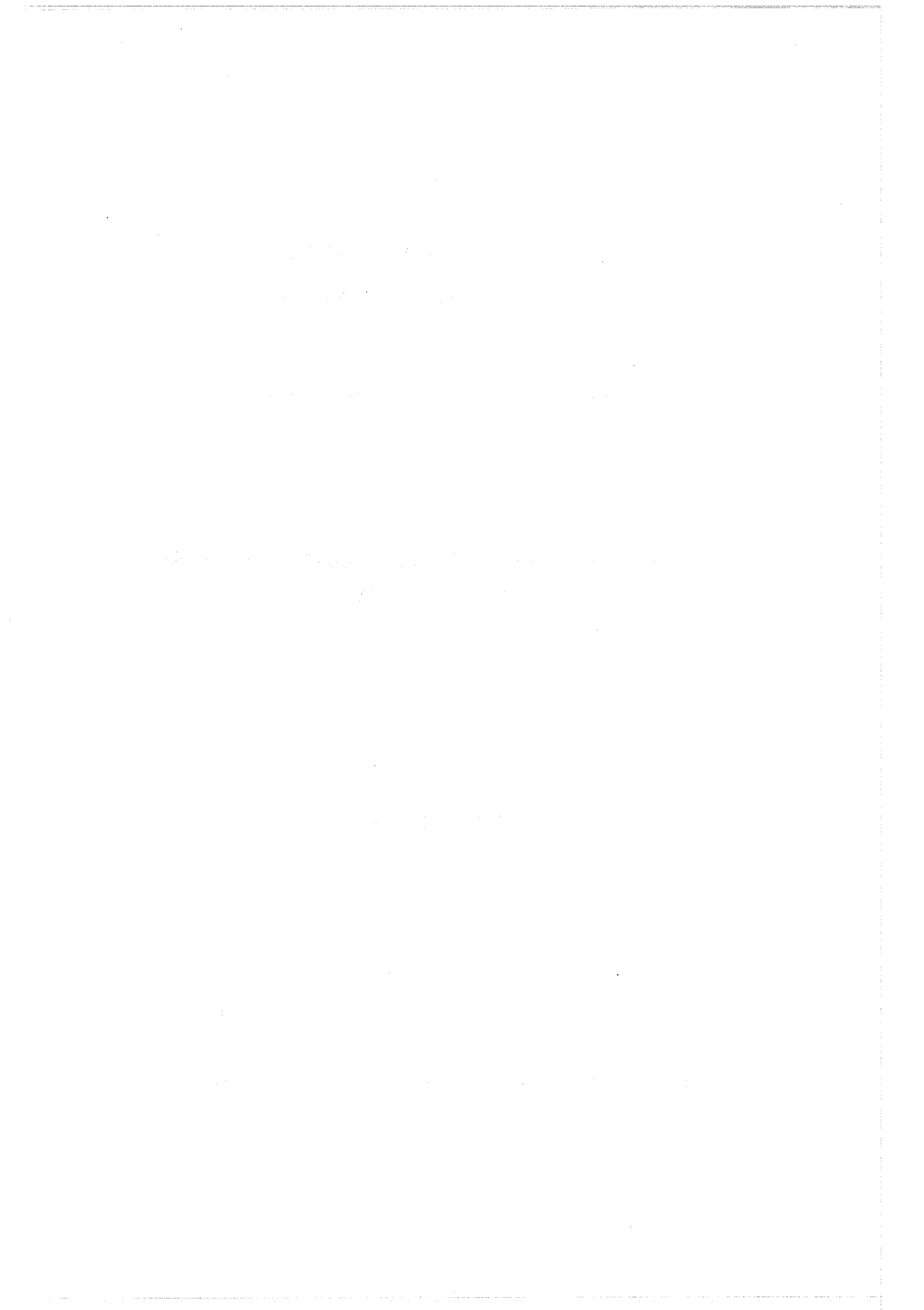
KFK 1417

Über das dynamische Verhalten der gedämpften
Hypo - Federsäule

von

O. Mühlhäuser

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe



Zusammenfassung

Es wird untersucht, wie sich eine aus, nach dem hyperbolischen Paraboloid, verwölbten Federscheiben aufgebaute und in einem flüssigkeitsgefüllten Gefäß befindliche Federsäule bei periodisch schwingender Bewegung und bei stoßartig aufgebrachtener Last verhält.

Es wurde unternommen, basierend auf den Kenndaten der Feder und der Flüssigkeit, die rechnerischen Zusammenhänge darzulegen. Ferner wurden Rechenwege angegeben, wie solche gedämpfte Federsäulen numerisch durchgerechnet werden können.

Es wurde gefunden, daß sich eine solche gedämpfte Federsäule wesentlich anders verhält als schwingungsfähige Gebilde mit getrennter Masse, Elastizität und Dämpfung. Die Säule zeigt in allen Betriebszuständen nichtlineares Verhalten. Resonanzüberhöhungen der Ausschläge und Kräfte sind in keinem Betriebszustand zu erwarten.

Abstract:

The investigation is concerned with the behavior in a periodically oscillating movement and under shock-type load stresses of a spring column made up of dished spring disks like a hyperbolic paraboloid and contained in a vessel filled with a liquid.

On the basis of the characteristic data of the spring and the liquid the author attempts to explaining the conditions in terms of calculation. Moreover, methods of calculation are indicated for numerically calculating such damped spring columns.

It was found that the behavior of a damped spring column of this type greatly differs from that of oscillating structures with separate mass, elasticity, and damping. The column shows a non-linear behavior under all operating conditions. Resonance overshooting of the amplitudes and forces must not be expected under any operating condition.



Das dynamische Verhalten der gedämpften Hypo-Federsäule

Abschnitt I

In der vorliegenden Arbeit soll ein Überblick über das Verhalten der gedämpften Hypo-Federsäule bei zeitlich veränderlichen Kräften gegeben werden.

Die Hypo-Federsäule besteht aus einzelnen nach der Form eines hyperbolischen Paraboloides verwölbten Federplatten, die zu einer Federsäule übereinander angeordnet sind und die sich in einem mit einer geeigneten Flüssigkeit (Gas bzw. Luft) gefüllten dichten Gefäß befinden.

Eine solche Federsäule ist aufgrund ihrer Elastizität im Zusammenwirken mit den bei der Belastung bewegten eigenen oder angekoppelten Massen ein schwingungsfähiges Gebilde oder Teil eines solchen.

Die bei der Relativbewegung der Federplatten gegeneinander und relativ zum Gehäuse in der Flüssigkeit entstehenden Strömungskräfte wirken den Schwingbewegungen entgegen und machen das System zu einem gedämpften.

Wie bereits früher dargelegt wurde [1] entstehen zwei Arten von hydr. Widerstands- bzw. Dämpfungskräften.

1) Die Plattendämpfung

Sie liegt dann vor, wenn bei der Relativbewegung der Federplatten gegeneinander das Dämpfungsmedium aus dem Zwischenraum zwischen den einzelnen Platten herausgequetscht wird.

2) Die Kolbendämpfung

Sie ist dadurch gegeben, dass bei der Verschiebung der Federplatten im Gehäuse das verdrängte Flüssigkeitsvolumen durch den Spalt zwischen dem Federplattenrand und der Gehäusewand (Rand - Wand - Spalt) nach aussen abströmt.

Die von aussen wirkenden Kräfte können

1) Stosskräfte sein, bei denen die Kräfte innerhalb eines sehr kleinen $\rightarrow 0$ gehenden Zeitintervalles von einem niederen Niveau auf ein höheres ansteigen, wobei

1. die angestiegene Kraft in der nachfolgenden Zeit ihren Wert beibehalten soll;
2. die angestiegene Kraft nur während eines sehr kurzen Zeitraumes wirken soll, um dann wieder auf den ursprünglichen Wert zurückzufallen.

2) periodisch wirkende Kräfte sein, deren Bewegungen einer sinus-Fkt. folgen sollen oder aus solchen aufgebaut sind.

Die Bewegungsverhältnisse bei der Hypo-Federsäule lassen sich am besten übersehen, wenn man diese in ähnlicher Weise wie dies von O. Lutz [2] für die Schraubenfeder dargestellt wurde, behandelt.

Von dem dort benutzten Verfahren der "Homogenisierung" kann auch hier Gebrauch gemacht werden.

Zu diesem Zweck betrachtet man die Federsäule als ein Gebilde mit

gleichmässig über die achsiale Länge verteilter Elastizität, ebenso gleichmässig verteilter Masse und entsprechend gleichmässig verteilter Dämpfung.

In der Elektrotechnik und in der Schalltechnik liegen analoge Systeme sehr häufig vor und sind dort weitgehend analytisch behandelt, so dass es ohne Schwierigkeiten möglich ist, die dort benutzten Verfahren und gefundenen Ergebnisse auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

Bezüglich der Schalltechnik kann auf die Darlegungen in [3] zurückgegriffen werden. Elektrische Analogien lassen sich bei der Theorie der Vierpole, insbesondere bei der Theorie der Kabel, finden. Hierzu [7].

Für die einfache Hypo-Federsäule ohne angekoppelte Masse ergibt sich dann ein Schema wie es Abb. 1 darstellt.

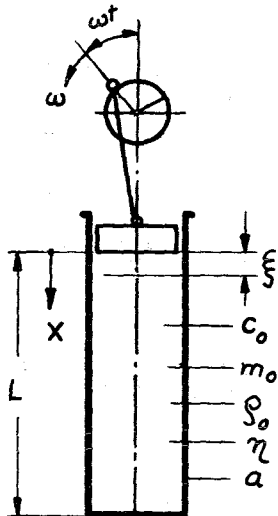


Abb. 1

Ein solches Gebilde entspricht in der Akustik einer an einem Ende verschlossenen Röhre, die mit einem elastischen Medium gefüllt ist und an deren anderem Ende eine Verschiebegrösse $\xi = \xi(t)$ angreift, im Prinzip einer geschlossenen, d.h. gedackten Orgelpfeife.

In der Elektrotechnik ist das entsprechende Analogon, eine Leitung, ein Kabel begrenzter Länge, dem an einem Ende eine Spannung $U = U(t)$ aufgeprägt wird.

Ist der Feder eine äussere Zusatzmasse m_1 angekoppelt, so ergibt sich ein Schema nach Abb. 2.

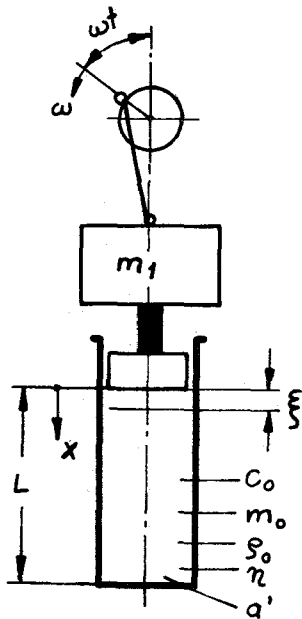


Abb. 2

In der Akustik würde diese Anordnung, z.B. einer Zungenpfeife mit extrem schwerer Zunge entsprechen. In der Elektrotechnik einem Kabel endlicher Länge mit einer am Eingang zugeschalteten Induktivität.

Die Kennwerte des vorliegenden Systems sind

- 1) Die Verschiebungsgröße $\xi = \xi(t)$ m
- 2) Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ 1/sec
- 3) Die Schwingungszahl f 1/sec
- 4) Die Steifigkeit der Feder bzw. die Elastizität $c = \text{kp/m}$
- 5) Die bewegte Masse $m_0 = \frac{\text{kp sec}^2}{\text{m}}$
- 6) Die Dichte der bewegten Massen innerhalb des Federgehäuses $\rho_0 = \frac{\text{kg sec}}{\text{m}^4}$
- 7) Die angekoppelte Masse $m_1 = \frac{\text{kp sec}^2}{\text{m}}$
- 8) Die dyn. Zähigkeit $\eta = \frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}$
- 9) Die Länge der Feder $L = L_0 \pm \xi(t)$ m
- 10) Die Zeit $t = \text{sec}$
- 11) Die scheinbare Schallgeschwindigkeit $a' = \text{m/sec}$

Weitere Betriebsgrößen sind

- a) Der örtliche Druck in der Federsäule $p_x = p(t; x) \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$
- b) Die örtliche Geschwindigkeit $v_x = v(t; x) \text{ m/sec}$

In der Akustik wird die Verschiebegeschwindigkeit mit "Schnelle" bezeichnet. Dieser Ausdruck soll auch hier Verwendung finden.

Druck und Schnelle sollen als über den Querschnitt der Federsäule konstant angesehen werden.

Die "homogenisierten" Grössen sind $m'_0 S'_0 \eta$ ihre Ermittlung aus den effektiv vorliegenden Parametern der Federsäule wird unten eingehend behandelt.

Die scheinbare Schallgeschwindigkeit a' ist insofern ein kennzeichnender Eigenwert der Federsäule als er eine Aussage liefert, wie sich die Säule verhalten wird, je nachdem, ob eine eingeprägte Verschiebegeschwindigkeit $\partial \xi / \partial t$ grösser oder kleiner als a' ist.

Die Grösse der scheinbaren Schallgeschwindigkeit ergibt sich nach Lutz [2] wie folgt:

Die Eigenkreisfrequenz eines ungedämpften Systems nach Abb. 1 bzw. Abb 2 ist

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_g}}} \quad \frac{1}{\text{sec}} \quad (1.1)$$

worin m_g die Gesamtheit aller im System schwingenden Massen ist.

Dann hat wenn L die Länge der schwingenden Säule ist die scheinbare oder Ersatz-Schallgeschwindigkeit den Wert

$$\boxed{a' = L \cdot \omega_0} \quad \text{m/sec} \quad (1.2)$$

Die scheinbare Schallgeschwindigkeit sagt aus, dass ein stossartiger Impuls auf den Eingang der Säule durch diese als Welle hindurchläuft. Die Geschwindigkeit mit der sich diese Welle bewegt ist die Schallgeschwindigkeit a' .

Die Federsäule verhält sich dann folgendermassen:
Wird die Feder von Kräften verformt, deren Verschiebe-
geschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist,
so wird eine Bewegung mit Schallgeschwindigkeit als Welle
durch die Feder hindurchlaufen.

Wirkt auf die Federsäule eine Kraft P , mit einer Verschie-
begeschwindigkeit $v_0 > a'$, so wird die Federsäule von die-
ser Kraft nur an dem dem Kraftangriffspunkt zugewandten
Ende zusammengedrückt. Eine Welle kann praktisch nicht
entstehen.

Wie später gezeigt wird, ist die Schallgeschwindigkeit in
einer gedämpften Hypo-Federsäule relativ gering (im m -
Bereich), so dass es durchaus im Bereich des Möglichen
ist, dass die Säule mit Verschiebegeschwindigkeiten $v_0 > a'$
verformt wird.

In diesem Falle bewegt sich die Verschiebung mit Über-
schallgeschwindigkeit durch die Säule und dabei wird, in
ähnlicher Weise wie bei Detonationswellen, ein Druckan-
stieg gegenüber den bei der normalen Schallwelle vorlie-
genden Drücken entstehen. Dieser Druckanstieg ist jedoch
begrenzt und zwar einmal durch die mechanische Kraft der
Federplatte und dann durch die Dämpfungs- bzw. Strömungs-
kräfte die beim Ausschleiben der zwischen je zwei Feder-
scheiben befindlichen Flüssigkeit entstehen.

Die Deformation der Säule geht dann so vor sich, dass zu
Beginn der Bewegung zunächst die erste Federscheibe gegen

die zweite verschoben und dabei die Flüssigkeit aus dem Zwischenraum beider herausgedrückt wird. Nachdem sich die erste Scheibe an die zweite angelegt hat (massgebend hierfür ist nurmehr die Plattendämpfung) verschiebt sich die zweite Scheibe gegen die dritte. Die Scheiben 1 und 2 bleiben dabei in Berührung. Dann verschiebt sich die dritte gegen die vierte und so fort. D.h. die Federsäule wird gewissermassen vom Auftreffpunkt der Kraft her aufgefädelt.

Im einzelnen wird das Verhalten im Abschnitt III der vorliegenden Arbeit näher untersucht. Dabei wird auch auf das Zusammenwirken von Platten und Kolbendämpfung näher eingegangen.

Bei periodisch hin- und hergehender Bewegung bei der zeitweilig die Bewegungsgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit übersteigt, sind für diesen Bereich starke Erhöhungen der Druckkräfte zu erwarten. Die Kräfte werden insgesamt dann nicht mehr harmonisch verlaufen.

Für eingeprägte Verschiebegeschwindigkeiten die unterhalb der Schallgeschwindigkeiten liegen und nach einer sinus-Fkt. verlaufen oder aus solchen aufgebaut sind, lassen sich die Bewegungszusammenhänge wie oben bereits angegeben ohne weiteres nach Analogien aus der Akustik oder der Elektrotechnik übersehen.

Da in der theoretischen Elektrotechnik derartige Probleme sehr eingehend und auch sehr übersichtlich behandelt worden sind, soll vorzugsweise auf diese zurückgegriffen werden.

Die mathematische Behandlung macht dabei schon wegen der Einfachheit der Darstellungen, weitgehend von den Hilfsmitteln des Rechnens mit komplexen Amplituden Gebrauch.

Die Benutzung dieses Hilfsmittels setzt zu Beginn der Untersuchungen eine genaue Definition des Zusammenhanges der physikalischen Sachverhalte mit den reellen und imaginären Grössen der Rechnung voraus. Es wird entsprechend Abb. 3 folgendes festgelegt.

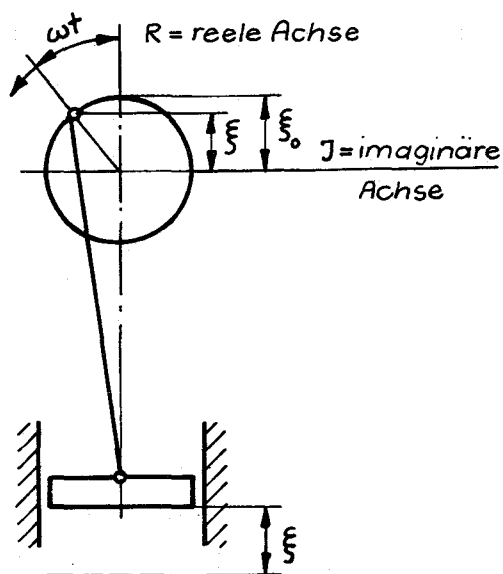


Abb. 3

Die reelle Achse entspricht der Bewegungsrichtung der Verschiebungen. Die dazu senkrechte Achse ist die imaginäre Achse. Die Nullpunkte der Verschiebungen liegt auf der reellen Achse, also in einer Endlage der Feder.

Ist die komplexe Amplitude der Verschiebungen ξ_0 , so ergibt unter diesen gemachten Voraussetzungen für den jeweiligen Ausschlag zur Zeit t

$$\xi_t = \xi_0 e^{i\omega t} \quad (1.3)$$

oder reell geschrieben

$$\xi_t = \xi_0 \cos \omega t \quad (1.4)$$

Für die Verschiebegeschwindigkeit zur Zeit t ergibt sich

$$v_t = \frac{\partial \xi_t}{\partial t} = i\omega \xi_0 e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

oder auch

$$v_t = v_0 e^{i\omega t} \quad (1.6)$$

mit v_0 als komplexe Amplitude der Geschwindigkeit.

Für die weitere Behandlung wird zunächst auf die Theorie der Kabel zurückgegriffen [3] [7]. Die grundlegende Beziehung für eine Bewegung in einem Kabel lautet

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \gamma^2 U \quad (1.7)$$

In der Elektrotechnik kann U stellvertretend stehen für die Spannung E oder den Strom J .

Im vorliegenden Fall der Feder wird die Spannung E dem Druck p und dem Strom J die Schnelle v entsprechen.

γ ist die sogenannte Fortpflanzungskonstante. Sie ist eine komplexe Grösse und setzt sich zusammen entsprechend

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (1.8)$$

aus dem reellen Anteil α dem sogenannten "Dämpfungsmass" und einem imaginären Anteil $j\beta$ mit β dem sog. "Winkelmass".

Die Lösung der Diff. Gl. (1,7) lautet in ihrer allgemeinsten Form, angeschrieben für den Fall der Feder

$$\begin{aligned} P_x &= b_1 e^{\delta x} + b_2 e^{-\delta x} \\ v_x &= \frac{b_1 e^{\delta x}}{W_0} - \frac{b_2 e^{-\delta x}}{W_0} \end{aligned} \quad (1.9a; b)$$

Der Krafteinleitungspunkt (Eingang) der Federsäule wird mit I bezeichnet, der Boden der Federsäule mit II. P_x ist der Druck und v_x die Schnelle an der Stelle x ; b_1 und b_2 sind Konstanten, die von den Randbedingungen abhängen.

$W_0 = \frac{P_0}{v_0}$ ist die akustische Impedanz (Wechselkraftwiderstand) der unendlich langen Federsäule bezogen auf den Federeingang, also die Stelle I.

An der Stelle I, also bei $x = 0$ werden die e Fkt. alle = 1. Es ergibt sich daher

$$\begin{array}{|l} P_I = b_1 + b_2 \\ W_0 v_I = b_1 - b_2 \end{array} \quad + \quad -$$

Durch Addition ergibt sich

$$P_I + W_0 v_I = 2 b_1$$

oder

$$b_1 = \frac{1}{2} (P_I + W_0 v_I) \quad (1.10)$$

Durch Subtraktion findet man

$$P_I - W_0 v_I = 2 b_2$$

oder

$$b_2 = \frac{1}{2} (P_I - W_0 v_I) \quad (1.11)$$

Die Werte von b_1 und b_2 oben eingesetzt, ergibt sich

$$p_x = \frac{1}{2} (p_1 + W_0 v_I) e^{\delta x} + \frac{1}{2} (P_I - W_0 v_I) e^{-\delta x} \quad (1.12)$$

$$W_0 v_x = \frac{1}{2} (p_1 + W_0 v_I) e^{\delta x} - \frac{1}{2} (P_I - W_0 v_I) e^{-\delta x} \quad (1.13)$$

Die Randbedingungen sind folgende:

Für die Stelle I gilt

$$x = 0; P_I = p_0 e^{i\omega t}; v_I = i\omega \xi_0 e^{i\omega t}$$

Für die Stelle II gilt

$$x = L \quad v_{II} = 0$$

Dann wird aus (1.13)

$$W_0 v_{II} = 0$$

und damit

$$(P_I + W_0 v_I) e^{\delta L} = (P_I - W_0 v_I) e^{-\delta L}$$

bzw.

$$P_I (e^{\delta L} - e^{-\delta L}) = -W_0 v_I (e^{\delta L} + e^{-\delta L})$$

und damit

$$\frac{P_I}{P_{II}} = -W_0 \frac{e^{\delta L} + e^{-\delta L}}{e^{\delta L} - e^{-\delta L}} \quad (1.14)$$

oder

$$\frac{P_I}{V_I} = -W_0 \frac{\cosh \cdot \delta L}{\sinh \delta L} = -W_0 \operatorname{ctg} h \delta L \quad (1.15)$$

Damit ist die Grösse der Eingangsimpedanz bekannt.

Weiter ist der Druck an der Stelle x

$$P_x = \frac{1}{2} P_I e^{\delta x} + \frac{1}{2} W_0 V_I e^{\delta x} + \frac{1}{2} P_I e^{-\delta x} - \frac{1}{2} W_0 V_I e^{-\delta x}$$
$$P_x = \frac{1}{2} P_I (e^{\delta x} + e^{-\delta x}) + \frac{1}{2} W_0 V_I (e^{\delta x} - e^{-\delta x})$$

oder

$$P_x = P_I \cdot \cosh \delta x + W_0 V_I \sinh \delta x \quad (1.16)$$

bzw.

$$P_x = P_0 e^{i\omega t} \cosh \delta x + W_0 j\omega \xi_0 e^{i\omega t} \sinh \delta x \quad (1.17)$$

Drückt man nach (1.15) P_I durch V_I aus, so ist

$$P_I = -V_I \cdot W_0 \operatorname{ctg} h \delta L$$

Damit ergibt sich aus (1.16)

$$P_x = W_0 P_I (\sinh \delta x - \cosh \delta x \cdot \operatorname{ctg} h \delta L) \quad (1.18)$$

In (1.18) die Schnelle V_I durch den Druck P_I aus (1.15) ersetzt ergibt

$$P_x = P_I \cdot (\cosh \delta x - \sinh \delta x \cdot \tanh \delta L) \quad (1.19)$$

Für die Stelle II, d.h. $X = L$ ergibt sich aus (1.18)

$$P_L = W_0 v_I (\sinh \delta L + \cosh^2 \delta L) \quad (1.20)$$

oder aus (1.17)

$$P_L = P_0 e^{i\omega t} \cosh \delta L + W_0 i\omega \xi_0 e^{i\omega t} \sinh \delta L \quad (1.21)$$

oder

$$P_L = P_I \cdot (\cosh \delta L - \sinh \delta L \tanh \delta L) \quad (1.22)$$

womit der Druck am Boden der Federsäule bekannt ist.

Die Schnelle an der Stelle X ist nach (1.13)

$$W_0 v_x = \frac{1}{2} P_I e^{\delta x} + \frac{1}{2} W_0 v_I e^{\delta x} - \frac{1}{2} P_I e^{-\delta x} + \frac{1}{2} W_0 v_I e^{-\delta x}$$

oder

$$W_0 v_x = P_I \frac{1}{2} (e^{\delta x} - e^{-\delta x}) + W_0 v_I \frac{1}{2} (e^{\delta x} + e^{-\delta x})$$

daraus

$$v_x = \frac{P_I}{W_0} \sinh \delta x + v_I \cosh \delta x$$

Aus (1.15) ergibt sich

$$\frac{P_I}{W_0} = -v_I \operatorname{ctg} h \delta L$$

und somit

$$v_x = v_I (\cosh \delta x - \sinh \delta x \operatorname{ctg} h \delta L) \quad (1.23)$$

oder mit dem Druck P_I angeschrieben ergibt sich

$$v_x = \frac{P_I}{W_0} \sinh \delta x - \frac{P_I \cosh \delta x}{W_0} \operatorname{tgh} \delta L$$

oder

$$v_x = \frac{P_0 e^i}{W_0} (\sinh \delta x - \cosh \delta x \operatorname{tgh} \delta L) \quad (1.24)$$

Es lassen sich noch folgende Abkürzungen schreiben

$$F_{(e)_1} = (\sinh \delta x - \cosh \delta x \operatorname{ctgh} \delta L)$$

$$F_{(e)_2} = (\cosh \delta x - \sinh \delta x \operatorname{ctgh} \delta L)$$

$$F_{(e)_3} = \operatorname{ctgh} \delta L$$

$$F_{(e)_4} = (\cosh \delta x - \sinh \delta x \operatorname{tgh} \delta L)$$

$$F_{(e)_5} = (\sinh \delta x - \cosh \delta x \operatorname{tgh} \delta L)$$

Dann sind

- 1) Die Eingangsimpedanz

$$W_{\text{I}} = -W_0 F_{(e)3} = -W_0 \operatorname{ctg} h \delta L \quad (1.25)$$

- 2) Der Druck in Abhängigkeit der Eingangsschnelle bzw. der Eingangsverschiebung

$$P_x = W_0 j\omega \xi_0 e^{i\omega t} F_{(e)1} \quad (1.26)$$

- 3) Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Eingangsdruck

$$v_x = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{W_0} F_{(e)5} \quad (1.27)$$

- 4) Der Druckverlauf

$$P_x = P_0 e^{i\omega t} F_{(e)4} \quad (1.28)$$

- 5) Der Geschwindigkeitsverlauf

$$v_x = j\omega \xi_0 e^{i\omega t} F_{(e)2} \quad (1.29)$$

- 6) Die Impedanz am Boden der Säule wird

$$\text{da } v_L = v_{\text{II}} = 0$$

$$W_{\text{II}} = \infty \quad (1.30)$$

Der Verlauf der Fkt. $F_{(e)1}$; $F_{(e)2}$; $F_{(e)4}$ und $F_{(e)5}$ über der Länge x mit δL als Parameter ist in Abb. 4;5;6;7 dargestellt, desgleichen der Verlauf der Fkt. $F_{(e)3}$ in Abhängigkeit von δL in Abb. 8.

Die Beziehung für die Eingangsimpedanz der unendlich langen Federsäule kann wieder an Anlehnung an die Theorie der elektr. Kabel bzw. die Theorie der Vierpole gefunden werden.

Die Eingangsimpedanz eines unendlich langen Kabels ist nach [7] S. 114, wenn für die Ableitung A die Grösse 0 gesetzt wird, wie dies dem Fall der Feder entspricht

$$Z = W_0 = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C}} \quad (1.31)$$

Wobei die Werte für

die Induktivität L

die Kapazität C

den Widerstand R

auf die Längeneinheit des Kabels bezogen sind.

Es entsprechen dann:

dem elektr. Widerstand R der Strömungswiderstand

der Induktivität L die bewegten Massen

der Kapazität C die Federsteife.

Die Beziehung (1.31) gilt auch für die Längeneinheit der Federsäule, wenn die verschiedenen Widerstände hier ebenfalls auf die Längeneinheit bezogen werden.

Für unseren Fall lassen sich die analogen mechanischen Grössen für Widerstand, Induktivität und Kapazität entsprechend der Darstellung von [3] S. 318 ff errechnen.

Für die Einheitslänge $L_E = 1$ der Federsäule bezogen auf den Säuleneingang gilt

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \pi r^2 p_0 e^{i\omega t}$$

mit

$$m \frac{L_E}{L} = \rho_g \pi r^2 \frac{L_E}{L}$$

wird also

$$\rho_g \pi r^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \pi r^2 \rho_o e^{i\omega t}$$

Damit wird die der elektr. Induktivität analoge mechanische Induktivität

$$\boxed{L_m = \rho_o} \quad (1.32)$$

Der mechanische Widerstand ergibt sich aus

$$R_{st} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \pi r^2 \rho_o e^{i\omega t}$$

R_{st} = der auf die Geschwindigkeit $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ bezogene Strömungs- bzw. Widerstandswert, der Rohrreibung

Nach Gl. (2.11) ist R_{st} für die Einheitslänge L_E

$$R_{st} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \Delta \rho_2 \pi r^2$$

oder

$$R_{st} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 32 \eta_2 \frac{L_E}{D_a^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \pi r^2$$

so dass sich mit $Da^2 = 4 r^2$ ergibt

$$\frac{32 \eta_2}{4 r^2} \pi r^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \pi r^2 \rho_o e^{i\omega t}$$

und somit

$$\boxed{R_{mech} = \frac{8 \eta_2}{r^2}} \quad (1.33)$$

Die mechanische Kapazität ergibt sich aus der Federkonstante c der ganzen Säule

$$c \cdot \xi = \pi r^2 p_0 e^{i\omega t}$$

Dann ist für die Einheitslänge $L_E = 1$

$$\boxed{C = \frac{\pi r^2}{cL}} \quad (1.34)$$

Die Impedanz ist entsprechend Gl. (1.31)

$$W_0 = \sqrt{\frac{L}{c} + \frac{R}{j\omega C}}$$

Die ermittelten mechanischen Werte eingeführt und etwas umgeformt erhält man mit $1/j = -j$

$$\boxed{W_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{S_g \cdot cL}{\pi} - j \frac{8\eta_2 cL}{\pi \omega r^2}}} \quad (1.35)$$

Die Impedanz ist eine komplexe Grösse. Absolutwert und Argument ergibt sich zu

$$\boxed{W_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{S_g \cdot cL}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{8\eta_2 cL}{\pi \omega r^2}\right)^2}} \sqrt{e^{j\varphi_2}} \quad (1.36)$$

wobei für φ_2 steht

$$\boxed{\varphi_2 = \arctg \frac{8 \eta_2}{\omega r S_g}} \quad (1.37)$$

Die Fortpflanzungskonstante γ lässt sich ebenfalls mit den Ableitungen von Möller [7] S. 114 bestimmen.

Es ist wie bekannt

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Darin sind

$$2\alpha^2 = \sqrt{(\omega^2 L^2 + R^2) \omega^2 C^2 - \omega^2 LC}$$

$$2\beta^2 = \sqrt{(\omega^2 L^2 + R^2) \omega^2 C^2 + \omega^2 LC}$$

Das Dämpfungsmass α kennzeichnet die Energieabnahme längs der Säule in **x-Richtung**. Das Winkelmass β (im Bogenmass) die Phasenlage zwischen Druck und Schnelle.

Der Absolutwert und das Argument von γ ergibt sich zu

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{i\varphi_3}$$

also

$$\boxed{\gamma^2 = \sqrt{(\omega^2 L^2 + R^2) \omega^2 C^2} e^{i\varphi_3}} \quad (1.38)$$

mit

$$\varphi_3 = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$$

oder

$$\boxed{\varphi_3 = \arctg \frac{\sqrt{(\omega^2 L^2 + R^2) \omega^2 C^2 + \omega^2 LC}}{\sqrt{(\omega^2 L^2 + R^2) \omega^2 C^2 - \omega^2 LC}}} \quad (1.39)$$

Setzt man die mechanischen Konstanten ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 &= \sqrt{\left(\omega^2 S_g^2 + \frac{64\eta_2^2}{r^4}\right) \omega^2 \frac{\pi r^4}{c^2 L^2} - \omega^2 S_g \frac{\pi r^2}{cL}} \\ 2\beta^2 &= \sqrt{\left(\omega^2 S_g^2 + \frac{64\eta_2^2}{r^4}\right) \omega^2 \frac{\pi r^4}{c^2 L^2} + \omega^2 S_g \frac{\pi r^2}{cL}} \end{aligned} \quad (1.40)$$

für δ erhält man

$$\delta = \sqrt{\left(\omega^2 S_g^2 + \frac{64\eta_2^2}{r^4}\right) \omega^2 \frac{\pi r^4}{c^2 L^2}} e^{i\varphi_3} \quad (1.41)$$

und für φ_3

$$\varphi_3 = \arctg \frac{\sqrt{\left(\omega^2 S_g^2 + \frac{64\eta_2^2}{r^4}\right) \omega^2 \frac{\pi^2 r^4}{c^2 L^2} + \omega^2 S_g \frac{\pi r^2}{cL}}}{\sqrt{\left(\omega^2 S_g^2 + \frac{64\eta_2^2}{r^4}\right) \omega^2 \frac{\pi^2 r^4}{c^2 L^2} - \omega^2 S_g \frac{\pi r^2}{cL}}} \quad (1.42)$$

Im Betriebsfalle wird die Federsäule im allgemeinen entsprechend Abb. 2 mit dieser Masse m_1 gekoppelt sein. Ausserdem wird zusätzlich noch eine Kraft von meist periodischem Charakter auf die Feder wirken bzw. mit dieser zusammenarbeiten. Es entstehen erzwungene Schwingungen.

Für die Betrachtung dieser Zusammenhänge geht man aus von Kraftverhältnissen am Federeingang. Hier muss Gleichgewicht bestehen zwischen den von aussen wirkenden Kräften, den Massenkräften und den Gegenkräften der Feder. Die von aussen wirkenden Kräfte haben die Grösse

$$P_z = \Phi e^{j(\omega t + \varphi_4)} \quad (1.43)$$

Die Massenkräfte haben die Grösse

$$P_m = m_1 \frac{\partial v}{\partial t}$$

Die Beschleunigung ergibt sich sofort aus der Geschwindigkeit $v_0 = v_1$ für $x = 0$ nach Gl. (1.15) und ist

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{j\omega P_0 e^{i\omega t}}{W_0} \cdot \frac{1}{F_{(e)3}}$$

Dann ist die Massenkraft

$$P_m = m_1 \cdot \frac{j\omega}{W_0} P_0 e^{i\omega t} \frac{1}{F_{(e)3}} \quad (1.44)$$

Die Federkraft ist

$$P_F = \pi r^2 \cdot P_0 e^{i\omega t} \quad (1.45)$$

Da die Bedingung besteht

$$P_m + P_z = P_F$$

erhält man

$$m_1 \frac{j\omega}{W_0} \frac{1}{F_{(e)3}} P_0 e^{i\omega t} + \Phi e^{i\omega t} e^{\varphi_4} = \pi r^2 P_0 e^{i\omega t}$$

oder etwas umgeformt

$$\boxed{\frac{j\omega m_1}{F(e)_3} - \pi r^2 W_0 = -\Phi \frac{W_0}{P_0} e^{i\varphi_4}} \quad (1.46)$$

Setzt man nach Gl. (1.15)

$$\frac{P_0}{V_0} = W_0 \cdot F(e)_3 \quad \text{oder} \quad \frac{W_0}{P_0} = \frac{1}{V_0 F(e)_3}$$

so erhält man

$$\frac{j\omega m_1}{F(e)_3} - \pi r^2 W_0 = -\Phi \frac{1}{V_0 F(e)_3} e^{i\varphi_4}$$

nun ist

$$V_0 = j\omega \xi_0 e^{i\omega t}$$

und es ergibt sich

$$\omega^2 m_1 \xi_0 e^{j\omega t} + j\omega \pi r^2 W_0 F(e)_3 \xi_0 e^{i\omega t} = \Phi e^{i\varphi_4}$$

etwas umgeschrieben, Absolutwert und Phase der linken Seite der Gl. gebildet ergibt

$$\sqrt{\omega^4 m_1^2 + \omega^2 \pi^2 r^4 W_0^2 F(e)_3^2} e^{i\varphi_5} = \frac{\Phi}{\xi_0} e^{j(\varphi_4 - \omega t)}$$

mit

$$\varphi_5 = \text{arctg} \frac{\pi r^2 W_0 F(e)_3}{\omega^2 m_1}$$

oder W_0 eingesetzt

$$\boxed{\varphi_5 = \text{arctg} \cdot \frac{\pi r^2 F(e)_3 \sqrt{\left(\frac{S_g cL}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{8\eta_2 cL}{\pi \omega r^2}\right)^2}}{\omega^2 m_1}} \quad (1.47)$$

Die Wurzel beseitigt erhält man

$$\omega^4 m_1^2 + \omega^2 \pi^2 r^4 W_0^2 F_{(e)3}^2 = \frac{\Phi^2}{\xi_0^2} e^{i2(\varphi_4 - \omega t - \varphi_5)}$$

Wo aus (1.36) eingeführt ergibt

$$\begin{aligned} \omega^4 m_1^2 + \omega^2 \pi r^2 F_{(e)3}^2 \sqrt{(Scl)^2 + \left(\frac{8\eta_2 cl}{\omega r^2}\right)^2} e^{i\varphi_2} \\ = \frac{\Phi^2}{\xi_0^2} e^{i2(\varphi_4 - \omega t - \varphi_5)} \end{aligned}$$

oder daraus

$$\begin{aligned} \omega^4 m_1^2 + \omega^2 \pi r^2 L S_g c F_{(e)3}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8\eta_2}{S_g \omega r^2}\right)^2} e^{i\varphi_2} \\ = \frac{\Phi^2}{\xi_0^2} e^{i2(\varphi_4 - \omega t - \varphi_5)} \end{aligned}$$

Es ist weiter

$$\pi r^2 L S_g = m_0$$

Dann wird, wenn die Phase reell geschrieben wird

$$\begin{aligned} \omega^4 m_1 + \omega^2 m_0 c F_{(e)3}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8\eta_2}{S_g \omega r^2}\right)^2} \cos \varphi_2 \\ = \frac{\Phi^2}{\xi_0^2} \cos^2(\varphi_4 - \omega t - \varphi_5) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Damit ist die Grundgleichung für das Bewegungsverhalten der mit einer Masse gekoppelten gedämpften Hypo-Feder-säule gegeben.

Für die ungedämpfte Säule wird $\eta_2 = 0$ und die entsprechende Beziehung lautet, da ρ_2 ebenfalls Null wird, dann

$$\omega^4 m_1 + \omega^2 m_0 c F_{(e)3}^2 = \frac{\Phi^2}{\xi_0^2} \cos^2(\varphi_4 - \varphi_5 - \omega t) \quad (1.49)$$

In diesem Fall ergibt sich für φ_5 aus (1.47) mit $S_F = S_g$

$$\varphi_5 = \arctg \frac{\pi r^2 F_{(e)3} \sqrt{\frac{S_F c L}{\pi}}}{\omega^2 m_1} \quad (1.50)$$

Für die gedämpfte Federsäule ohne angekoppelte Masse ergibt sich

$$\omega^2 m_0 c F_{(e)3}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8\eta_2}{S_g \omega r^2}\right)^2} \cos \varphi_2 = \frac{\Phi^2}{\xi_0^2} \cos^2(\varphi_4 - \varphi_5 - \omega t) \quad (1.51)$$

dann ist wie man sofort sieht

$$\varphi_5 = \arctg \infty = \pi/2 \quad (1.52)$$

Für die ungedämpfte Federsäule ergibt sich analog

$$\omega^2 m_0 F \cdot c F_{(e)3}^2 = \frac{\Phi^2}{\xi_0^2} \cos^2(\varphi_4 - \varphi_5 - \omega t) \quad (1.53)$$

Hierin ist wie oben

$$\varphi_5 = \pi/2 \quad (1.54)$$

Resonanzfälle:

Resonanz besteht dann, wenn ϕ Null wird, dann ergibt sich aus (1.48) die Beziehung für den allgemeinen Resonanzfall. Diese Beziehung lautet

$$\omega^4 m_1^2 = -\omega^2 m_0 c F_{(e)3}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{g \eta_2}{S_g \omega r^2}\right)^2} \cos \varphi_2$$

oder die Resonanzfrequenz.

$$\omega^2 = -\frac{mgC}{m_1^2} F_{(e)3}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{g \eta_2}{S_g \omega r^2}\right)^2} \cos \varphi_2 \quad (1.55)$$

Für die masselose ungedämpfte Feder gilt die Resonanzfrequenz

$$\omega_2^2 = \frac{C}{m_1}$$

und man erhält

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \sqrt{\frac{m_0}{m_1} F_{(e)3}^2 \left(1 + \left(\frac{g \eta_2}{S_g \omega r^2}\right)^2\right)} \sqrt{\cos \varphi_2} \quad (1.56)$$

Zu beachten ist, dass die Eingangsimpedanz für alle Betriebszustände negativ ist, so dass sich eine reelle Wurzel bzw. Resonanzfrequenz ergibt.

Für die ungedämpfte Feder lautet die analoge Beziehung, da η_2 und φ_2 Null werden

$$\frac{\omega^*}{\omega_2} = \sqrt{\frac{m_F}{m_1} \cdot F_{(e)3}} \quad (1.57)$$

Zu diesen Beziehungen (1.48) bzw. (1.55) ist folgende grundsätzliche Bemerkung zu machen:

Die bisherigen Herleitungen setzen lineare Verhältnisse voraus, d.h. die Konstanten müssen feste von Zeit und Ort unabhängige Grössen sein.

Tatsächlich ist jedoch wie später noch dargelegt wird, ϱ eine Fkt. der Zeit bzw. des Ausschlages ξ und zwar ist

$$\varrho_0 = \varrho_1 + \varrho_2 \cos \omega t$$

Schwingungssysteme mit bewegten Massen obiger Charakteristik werden als rheoliner Schwinger bezeichnet. Ihre math. Behandlung geht von den Hill'schen bzw. Mathieu'schen Diff.-Gleichungen aus. Sie sollen hier zunächst noch nicht betrachtet werden. [4]

Ausserdem war eine lineare Abhängigkeit der Dämpfungskräfte von der Verschiebegeschwindigkeit angenommen, d.h. η_2 war als feste Grösse eingesetzt worden. Meist jedoch hängt die Dämpfungskraft von einer Potenz der Geschwindigkeit, in der Regel von deren Quadrat ab, sodass η_2 keine konstante Grösse mehr ist.

Da wie sich leicht übersehen lässt, schon wegen der Veränderlichkeit der schwingenden Massen, eine geschlossene Behandlung der Beziehungen (1.48) ff. nicht möglich ist, sondern diese nur schrittweise numerisch gelöst werden können, ist eine veränderliche Zähigkeit ebenso leicht in den Rechnungsgang einführbar, wie die veränderliche schwingende Masse.

Aufgrund dieser Tatbestände, ist daher die Durchrechnung einer Federsäule nach Aufstellung eines entsprechenden Programmes Sache des elektr. Rechners.

Weiter betrachteten die bisherigen Ausführungen ausschliesslich den eingeschwingenen stationären Zustand. Das Einschwingen, d.h. der Bewegungsablauf aus der Ruhe heraus bis zum Erreichen des stationär schwingenden Zustandes des Systems, soll im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden. Um eine Übersicht über den Einschwingvorgang zu erhalten, würde es als erstes genügen, die in der Literatur behandelten Vorgänge zu betrachten, z.B. [4] und entsprechend zu interpretieren.

In ähnlicher Weise wie dies O. Lutz für Resonanzschwingungen in Rohrleitungen an Kolbenmaschinen [5] durchgeführt hat, liessen sich auch mit den dargelegten Zusammenhängen für die Hypo-Federsäule Vektordiagramme zeichnen, die Einblick in das Betriebsverhalten insbesondere bei den verschiedensten Frequenzen geben.

Eine Erweiterung der Untersuchung auf die Betrachtung der Einschwingvorgänge und die vektorielle Darstellung soll späteren Arbeiten vorbehalten bleiben.

Die Abklingkonstante

Für die Beurteilung des Dämpfungsverhaltens eines Systems mit der Hypofedersäule ist es erforderlich zu wissen, wie weit die am Eingang der Säule in diese eingeleitete Schwingungsenergie nach einem Hin- und Rückweg innerhalb der Säule sich vermindert hat.

Bei periodischen Schwingungen wird die Abnahme der Amplitude zwei aufeinanderfolgender Schwingausschläge als die kennzeichnende Grösse betrachtet. Im vorliegenden Fall dürfte die Abnahme über der doppelten Länge der Federsäule als Bezugsgrösse die richtige sein.

Ist die Geschwindigkeit der Energie am Eingang v_0 und die nach der doppelten Länge v_{2L} so gilt, da die Energie der Geschwindigkeit proportional ist

$$v_{2L} = v_0 e^{-2\alpha L}$$

bzw. daraus

$$m \frac{v_{2L}}{v_0} = -2\alpha L$$

bezeichnet man wie üblich

$$m \frac{v_2}{v_1} = \mathcal{J}$$

so ist

$$\mathcal{J} = -2\alpha L$$

(1.58)

bzw. daraus

$$\alpha_1 = -\frac{\mathcal{J}}{2L}$$

(1.59)

womit der erforderliche Dämpfungsfaktor festgelegt werden könnte.

Abschnitt II

Die Kenn- bzw. Ersatzkennwerte

1) Die Federsteifigkeit:

Die Steifigkeit c kp/m der Federsäule ist gegeben durch die elastischen Eigenschaften der einzelnen Federscheiben und die Art ihrer Kombination.

Für die einzelne Federscheibe gilt

$$P = \frac{2}{3} \pi \frac{E_m}{m+1} \frac{d^3}{D_i^2} (2h) + 0,282 \frac{E_m^2}{m^2-1} (2h_0)^3 H(\varphi)^* \quad (2.1)$$

d = Federplattendicke

D = \emptyset der Federplatte

$2h$ = Verformung

mit $(\varphi)^* = 1 - \frac{2h}{2h_0}$ und

$H(\varphi)^* = \varphi^* (1 - \varphi^{*2})$

Das erste Glied dieser Gleichung beschreibt die Zusammenhänge die sich bei der reinen Drillung der Hypo-Federplatte ergeben. Das zweite Glied die, die sich durch die zusätzlichen Normalspannungen ergeben. Das erste Glied ergibt eine Gerade als Kennlinie, das zweite deformiert diese etwas nach oben, so dass insgesamt eine leicht degressive Kennlinie entsteht. Bei Federscheiben aus Material mit hohem E-Modul lassen sich aus Gründen der inneren Spannungen nur relativ kleine Verformungen ($2h$) erreichen. Dadurch spielt das zweite Glied bei derartigen Federn nur eine völlig untergeordnete Rolle, so dass es meist schon aus diesem Grunde vernachlässigt werden kann.

Ausserdem liegen die Federn nicht in einem Punkt, wie es die Theorie vorsieht, gegeneinander an, sondern sie berühren sich längs einer kurzen Linie, die sich mit zunehmender Verformung noch vergrössert. Dadurch entsteht im Endeffekt für die Federsäule eine absolut gerade Kennlinie mit Neigung zum Progressivwerden bei starker Verformung.

Mit ausreichender Genauigkeit kann daher geschrieben werden

$$c' = \frac{P}{2h} = \frac{2}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} \quad (2.2)$$

für die einzelne Federplatte.

Für die ganze Säule ergibt sich durch die Hintereinanderschichtung von n Federplatten die Steife.

$$c = \frac{2}{3} \pi \frac{Em}{m+1} \frac{d^3}{D^2} \frac{1}{n} \quad (2.3)$$

Die Dicke d der Federplatte kann bei gegebener Max-Last P und vorgegebener max. zulässiger Spannung dem angefügten Kurvenblatt Abb. 9 entnommen werden.

Die max. zulässige Verwölbung $2h_0$ ergibt sich aus der Bedingung

$$2h_0 = (2,5 \div 3) d$$

Durch die Wahl entsprechender Abmessungen lassen sich auch Hypofedern bauen, deren Kennlinie von der normalen erheblich abweicht. Bei diesen Federn steigt die Kennlinie zunächst normal an, um dann abzuknicken und über den ganzen restlichen Wegbereich horizontal weiterzulaufen.

Für spezielle Zwecke lässt sich diese Eigenschaft in Verbindung mit der normalen Feder vorteilhaft einsetzen.

2) Die Ersatzzähigkeit:

Die Ersatzzähigkeit ist die Grösse mit deren Hilfe es möglich ist, die bei Verschiebungen in der Hypofeder säule entstehenden Strömungswiderstände auf die Strömungs- bzw. Schwingungsverhältnisse in einem glatten Rohr zu übertragen. Sie lässt sich folgendermassen ermitteln:

Wird eine Federplatte von der Einbaulänge $l_0 = d + 2h$ in einem flüssigkeitsgefüllten Gefäss verschoben, so ist bei der Verschiebegeschwindigkeit v_0 eine Verschiebekraft P_p aufzubringen.

Wird in einem glatten Rohr von gleichem Durchmesser wie das Federgehäuse und der Länge l_0 eine Flüssigkeit bewegt, so ist über dieser Länge ein Druckgefälle zu überwinden. Das Produkt aus Rohrquerschnittsfläche und Druckgefälle ergibt eine Verschiebekraft P_R .

Beide Kräfte werden gleich gesetzt, d.h.

$$P_p = P_R$$

Es sind daher zunächst die beiden Verschiebekräfte zu ermitteln.

Die Untersuchung wird durchgeführt für

- a) laminare Strömung im Rohr-Wand-Spalt ;
Abschnitt 2a und 2b
- b) turbulente Strömung im R-W-Spalt;
Abschnitt 2c und 2d

2a) Verschiebekräfte der Federsäule - laminare Strömung

Es sind

der Plattendurchmesser D_i
der Gehäusedurchmesser D_a
die Plattendicke d und
die Verwölbung $(2h_o)$,
dann ist die Einbaulänge $l_o = d + (2h_o)$
die Zähigkeit der Flüssigkeit ist η_1

Bei der Verschiebung der Platte in Längsrichtung wird unter der Platte Flüssigkeit verdrängt und strömt durch den Rand-Wand-Spalt nach aussen ab. Es wird für die Strömungsrechnungen zunächst angenommen, dass laminare Strömung vorliegt und dass der Strömungswiderstand linear der Geschwindigkeit folgt.

Das bei der Verschiebung unter der Platte in der Zeiteinheit verdrängte Volumen ist

$$V_{PL} = \frac{\pi D_i^2}{4} \cdot v_o$$

Das durch den Spalt abströmende gleiche Volumen ist

$$V_s = \frac{\pi (D_a + D_i)}{2} \cdot s_2 \cdot v_s$$

worin

$$s_2 = \frac{D_o - D_i}{2}$$

dann ergibt sich

$$V_s = v_o \frac{D_i^2}{2(D_o + D_i) s_2} \quad (2.4)$$

V_s ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gegen das ruhende Gehäuse. Ein Teilchen am Plattenrand hat gegen diesen die Geschwindigkeit

$$V_{PL} = V_s - v_o$$

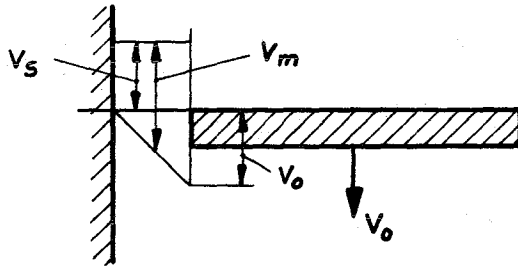


Abb. 10

Die mittlere Geschwindigkeit der abströmenden Flüssigkeit ist dann

$$v_m = v_s + \frac{v_o}{2} \quad (2.5)$$

oder

$$v_m = \frac{1}{2} v_o \left[\frac{D_i^2}{(D_a + D_i) S_2} + 1 \right]$$

bzw. etwas umgeschrieben

$$\boxed{v_m = \frac{1}{2} \frac{v_o}{S_2} \left[\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + S_2 \right]} \quad (2.6)$$

Da im allgemeinen die vorliegenden Strömungsvorgänge sehr kurzzeitig und die Strömungskanäle relativ kurz sind, kann nicht mit ausgebildeter Strömung gerechnet werden, sondern es liegen Anlauf- bzw. Einlaufströmungen vor. Durch entsprechende Beiwerte könnten diese Verhältnisse berücksichtigt werden.

Der Einfachheit halber sollen jedoch zunächst diese Konstanten nicht beachtet und die Strömung als eine ausgebildete angesehen werden. Es ist [6], S. 68

$$\boxed{\Delta p_1 = \lambda_L \frac{d}{S_2} \frac{\rho}{2} v_m^2} \quad (2.7)$$

Für laminare Strömung ist

$$\lambda_L = \frac{64}{Re} \quad \text{und} \quad Re = \frac{v_m \cdot S_2}{\nu_1}$$

$2S_2 =$ hydr. Radius des Spaltes

ferner

$$\nu_1 = \eta_1 \frac{g}{\gamma^*}$$

Man erhält damit

$$\Delta p_1 = 16 \frac{d}{s_2^2} \eta_1 v_m \quad (2.8)$$

v_m eingesetzt ergibt sich schliesslich

$$\Delta p_1 = 8 \frac{d}{s_2^3} \eta_1 \left[\frac{D_i^2}{Da + D_i} + s_2 \right] v_0 \quad (2.9)$$

und damit ist die Kraft P_p bekannt. Sie ist

$$P_p = \frac{\pi D_i^2 d}{4 s_2^3} \eta_1 \left[\frac{D_i^2}{Da + D_i} + s_2 \right] v_0 \quad (2.10)$$

2b) Rohrströmung - laminar

Für diese Strömung soll ebenfalls eine ausgebildete laminare Strömung angenommen werden.

Dann gilt

$$\Delta p_2 = 32 \eta_2 v_0 \frac{L_0^*}{Da^2} \quad (2.11)$$

Daraus ergibt sich die Kraft P_R

$$P_R = \frac{\pi Da^2}{4} \cdot 32 \cdot \eta_2 v_0 \frac{L_0^*}{Da^2}$$

oder

$$P_R = 8 \pi \eta_2 v_o \cdot L_o^* \quad (2.12)$$

Durch Gleichsetzen von (2.10 und 2.12) ergibt sich

$$\frac{\eta_{2L}}{\eta_1} = \frac{1}{32} \frac{d D_i^2}{s_2^3(d+2h_o)} \left[\frac{D_i^2}{D_o + D_i} + s_2 \right] \quad (2.13)$$

Damit ist die Ersatzzähigkeit bei laminarer Strömung η_2 bekannt.

2c) Verschiebekräfte der Federsäule - turbulente Strömung

Für diesen Fall wird angenommen, dass die Strömung sowohl im Rand-Wand-Spalt als auch im Ersatzrohr turbulent ist und der Strömungswiderstand dem Quadrat der Geschwindigkeit folgt.

Für die mittlere Geschwindigkeit gilt auch hier die Beziehung (2.6)

Ebenso Gl.(2.7) die das Druckgefälle über einem Plattenrand angibt.

Diese ist

$$\Delta p_1 = \lambda_r \frac{d}{s_2} \frac{\rho}{2} v_m^2 \quad (2.14)$$

gegenüber der Gl. (2.7) besteht der Unterschied darin, dass dort die Widerstandsbeiwerte für **Laminar**-strömung λ_L geschlossen angegeben werden kann. Hier, d.h. bei turbulenter Strömung ist es nicht möglich, den Widerstandsbeiwert λ_T als feste Grösse zu behandeln.

Für den Beiwert kann man nach [6] S. 465 ansetzen.

$$\lambda_T = 0,3164 \left(\frac{u d}{\nu} \right)^{-1/4}$$

umgeschrieben für den vorliegenden Fall lautet die gleiche Beziehung

$$\lambda_T = 0,3164 \left(\frac{v_m \cdot 2 s_2}{\nu_1} \right)^{-1/4} \quad (2.15)$$

mit

$$\nu_1 = \eta_1 \frac{g}{\gamma^*}$$

ergibt sich

$$\lambda_{Ts} = 0,3164 \left(\frac{\eta_1 \cdot g}{2 \gamma^*} \right)^{1/4} \frac{1}{s_2^{1/4} v_m^{1/4}}$$

Damit lautet die Formel für das Druckgefälle

$$\Delta p_1 = 0,3164 \left(\frac{\eta_1 g}{2 \gamma^*} \right)^{1/4} \frac{\rho d v_m^2}{2 s_2 s_2^{1/4} v_m^{1/4}}$$

oder

$$\Delta p_1 = 0,3164 \left(\frac{\eta_1 g}{2 \gamma^*} \right)^{1/4} d \frac{\rho v_m^{7/4}}{2 s_2^{5/4}} \quad (2.16)$$

Die Kraft P_p wird somit

$$P_p = 0,3164 \frac{\pi D_i^2}{4} \cdot d \frac{\rho}{2} \left(\frac{\eta_2 g}{2 \delta^*} \right)^{1/4} \frac{v_m^{7/4}}{s_2^{5/4}} \quad (2.17)$$

2d) Rohrströmung - turbulent

Für die turbulente Strömung im glatten Rohr gilt

$$\Delta P_R = \lambda_{TR} \frac{d+2h_0}{Da} \frac{\rho}{2} v_0^2 \quad (2.18)$$

worin ist

$$\Delta_T = 0,3164 \left(\frac{v_0 Da}{V_2} \right)^{-1/4} \quad (2.19)$$

mit

$$V_2 = \eta_2 \frac{g}{\delta^*}$$

ergibt sich

$$\Delta P_R = 0,3164 \left(\frac{\delta^*}{\eta_2 g} \right)^{-1/4} \frac{\rho}{2} \frac{(d+2h) v_0^2}{Da Da^{1/4} v_0^{1/4}}$$

oder

$$\Delta p = 0,3164 \left(\frac{\eta_2 g}{\delta^*} \right)^{1/4} (d+2h_0) \frac{\rho}{2} \frac{v_0^{7/4}}{Da^{5/4}} \quad (2.20)$$

und damit

$$P_R = 0,3164 \frac{\pi Da^2}{4} (d+2h_0) \frac{\rho}{2} \left(\frac{g}{\gamma^*} \right)^{1/4} \frac{v_0^{7/4}}{Da^{5/4}} \quad (2.21)$$

Definitionsgemäss sind (2.17) und (2.21) gleichzusetzen und man erhält damit

$$\frac{D_i^2}{4} d \left(\frac{\eta_1}{2} \right)^{1/4} \frac{v_m^{7/4}}{S_2^{5/4}} = \frac{Da^2}{4} (d+2h_0) \eta_2^{1/4} \frac{v_0^{7/4}}{Da^{5/4}}$$

oder

$$\left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{1/4} = \frac{D_i^2 \cdot d \cdot v_m^{7/4}}{2^{1/4} Da^{3/4} S_2^{5/4} (d+2h_0) v_0^{7/4}}$$

führt man v_m aus (2.6) ein, so ergibt sich nach Umformen schliesslich

$$\frac{\eta_{2T}}{\eta_1} = \left[\frac{D_i^2 d}{4 Da^{3/4} (d+2h_0) S_2^3} \right]^4 \left[\frac{D_i^2}{Da+D_i} + S_2 \right]^7 \quad (2.22)$$

Die Beziehung (2.22) für die turbulente Ersatzzähigkeit kann auch nur eine Näherung von beschränktem Gültigkeitsbereich sein, da es durchaus Betriebszustände gibt, bei denen die mit v_0 gebildete Re-Zahl noch im laminaren Bereich liegt, die dazugehörige mittlere Spaltgeschwindigkeit v_m jedoch schon im turbulenten Bereich.

Um zu sehen, wie sich die turbulente zur laminaren Ersatzzähigkeit verhält, bildet man den Quotienten aus (2.13) und (2.22) und erhält

$$\frac{\eta_{2L}}{\eta_{2T}} = 8 \frac{Da^3(d+2h_0)^3 S_2^9}{Di^6 d^3 \left[\frac{Di^2}{Da+Di} + S_2 \right]^6} \quad (2.23)$$

An dieser Stelle wäre noch darauf hinzuweisen, dass eine Abhängigkeit der Dämpfungs- bzw. Strömungskräfte von der Bewegungsrichtung sich erreichen lässt und zwar dadurch, dass

- 1) der Rand-Wandspalt durch entsprechende Gestaltung des Federplattenrandes diffusorartig ausgebildet wird, derart, dass in der einen Bewegungsrichtung ein höherer Strömungswiderstand als in der umgekehrten entsteht.
Diese Massnahme setzt allerdings voraus, dass dann im Spalt Re-Zahlen vorliegen, bei denen die Trägheitskräfte in der Strömung eine ausreichende Grösse haben. Es wird dann erforderlich, Dämpfungsflüssigkeiten zu benutzen, bei denen eine geringe Zähigkeit gegeben ist.
- 2) das am Eingang der Federsäule befindliche Krafteinleitungsstück als Kolben ausgebildet ist, der mit Einrichtungen versehen ist, die unterschiedlichen Druckströmwiderstand der ab- bzw. umströmenden Flüssigkeit ergeben, z.B. Ventile oder dgl..

Die schwingenden Massen

Die schwingenden Massen bestehen aus

- 1) der Masse der Federscheiben
- 2) der Masse der schwingenden Dämpfungsflüssigkeit
- 3) der Masse der an die Federsäule angekoppelten äusseren Bauteile.

zu 1) Die Masse der einzelnen Federscheiben lässt sich sofort anschreiben, sie ist

$$m_{F_0} = \frac{\pi D_i^2}{4} \cdot d \frac{\delta}{g} \quad (2.24)$$

Die Masse der gesamten Feder ist dann

$$m_{F_g} = n \cdot m_{F_0} \quad (2.25)$$

wenn n die Anzahl der Federscheiben ist.

zu 2) Die dämpfende Flüssigkeit wird durch die Verschiebungen (Durchfederungen) der Federsäule in ihrer gesamten Menge in Bewegung gesetzt. Dabei werden die verschiedensten Flüssigkeitsteilchen unterschiedlich grosse Verschiebungen bzw. unterschiedlich grosse Geschwindigkeiten haben, die im allgemeinen von periodischem Charakter sind.

Die Energie die ein Flüssigkeitselementarvolumen zu irgend einem Bewegungszeitpunkt hat ist

$$dE = \frac{1}{2} \frac{\delta^*}{g} v_i^{*2} dV \quad (2.26)$$

wenn δ^* das spez. Gew. der Flüssigkeit und V_i^* die Geschwindigkeit dieses betreffenden Volumenelementes ist.

Für die Durchrechnung der Federsäule ist es erforderlich, die Energie auf die Verschiebe- geschwindigkeit V_o^* in Achsrichtung zu beziehen. Dies lässt sich dann bewerkstelligen, wenn für diese Richtung eine Ersatzmasse m_E eingeführt wird, derart, dass die Energie der Ersatzmasse bei der Verschiebegeschwindigkeit V_o gleich ist der Energie aller in Bewegung befindlichen Flüssigkeitsteilchen.

Dann würde gelten

$$\frac{1}{2} m_E V_o^{*2} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{g} \int_0^V V_i^{*2} \cdot dV \quad (2.27)$$

Diese Integration ist nicht durchführbar, schon deswegen nicht, weil die unterschiedlichen Geschwindigkeiten der verschiedenen Flüssigkeits- teilchen nicht bekannt und auch kaum erfassbar sind. Man muss sich deshalb mit einer Näherung begnügen.

Ein Elementar-Massenteilchen m das in axialer Richtung verschoben wird, hat die mittlere Achsialgeschwindigkeit V_{ma} . Ein gleich grosses Massenteilchen m das zur gleichen Zeit durch den Spalt verschoben wird, hat die Geschwindigkeit V_{ms} . Die Geschwindigkeit V_{ms} ist bekannt. Sie ist oben S.34, Gl. (2.6) abgeleitet und lautet

$$V_{ms} = \frac{1}{2} \frac{V_o e^{i\omega t}}{S_2} \left[\frac{D_i^2}{D_o + D_i} + S_2 \right]$$

Die Energie der im Spalt bewegten Flüssigkeit ist

$$E_{SP} = \frac{m}{2} v_{ms}^2 \quad (2.28)$$

sie muss der Energie gleich sein, die der in axialer Richtung bewegten Flüssigkeit von der Geschwindigkeit v_A mitgegeben wird.

Diese ist entsprechend

$$E_A = \frac{m_E}{2} v_A^2 \quad (2.29)$$

m_E = Ersatzmasse

Also

$$E_A = E_{SP}$$

bzw.

$$\frac{m_E}{2} v_A^2 = \frac{m}{2} v_{ms}^2$$

oder

$$\frac{m_E}{m} = \frac{v_{ms}^2}{v_A^2}$$

Die Achsialgeschwindigkeit im Krafteinleitungspunkt ist

$$v_A = v_0 e^{i\omega t}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{m_E}{m} = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{v_0 e^{i\omega t}}{s_2} \right)^2 \left[\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + s_2 \right]^2}{(v_0 e^{i\omega t})^2}$$

also

$$\frac{m_E}{m} = \frac{1}{4} \frac{1}{S_2^2} \left[\frac{D_i^2}{D_a + D} + S_2 \right]^2 \quad (2.30)$$

In erster Näherung kann man für die gesamte schwingende Flüssigkeitsmasse setzen

$$m = \frac{\pi D_i^2}{4} \frac{\delta}{g} \cdot \xi_0 e^{i\omega t}$$

Damit wird die Ersatzmasse (Näherungsgrösse)

$$m_E = \frac{\pi D_i^2}{16} \left[\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + S_2 \right] \frac{1}{S_2^2} \frac{\delta^*}{g} \xi_0 e^{i\omega t} \quad (2.31)$$

Wie man sofort sieht, hängt die Grösse der Ersatzmasse periodisch von der Fkt. $e^{i\omega t}$ bzw. deren Realteil $\cos \omega t$ ab. Da dieser Faktor zwischen 0 und 1 schwankt, schwankt die Grösse der Ersatzmasse ebenfalls zwischen einem Maximum und Null.

Die durch diese Näherung gefundene Ersatzmasse ist kleiner als die effektive, da wie oben kurz gestreift wurde, nicht die ganze bewegte Masse erfasst werden konnte, sondern nur ein Teil dieser. Ausserdem ist noch zu beachten, dass die Näherung nur eine mittlere Masse bezogen auf den Federeingang liefert. Auf Grund der unterschiedlichen örtlichen Schnelle längs der Säule ergeben sich auch örtlich unterschiedliche mitschwingende Massen und daraus unterschiedlich örtliche Ersatzdichten ρ .

Die Dichte der mitschwingenden Masse ergibt sich zu

$$S_o = \frac{D_i^2}{4D_a^2} \frac{1}{L} \left[\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + S_2 \right] \frac{\xi_o}{S_2^2} \frac{\delta^*}{g}$$

Eine genauere Bestimmung der Massenwerte, die die gemachten Vernachlässigungen besser berücksichtigt, soll einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Wie unten noch dargestellt wird, ist die Grösse der mitschwingenden Masse von gravierendem Einfluss auf das Verhalten des gesamten schwingenden Systems.

Anmerkung:

Bei den Herleitungen der Dämpfungsgrössen wurde nur die Kolbendämpfung berücksichtigt. Die Plattendämpfung dagegen völlig vernachlässigt. Dies ist ohne weiteres zulässig, da die letztere nur bei sehr kleinem Plattenabstand und relativ grossen Bewegungsgeschwindigkeiten der Platten gegeneinander Werte erreicht, die an die Grössenordnung der Kolbendämpfung kommen. Beides ist jedoch in den Regelfällen der Praxis nicht gegeben.

Abschnitt III

Die Hypo-Federsäule bei stossartiger Belastung

Unter stossartiger Belastung soll folgendes verstanden werden:

Gegen die Federsäule bewegt sich eine Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_0 , mit der sie auf die Eingangsseite der Federsäule auftrifft.

Entsprechend dem Widerstand der Federsäule entsteht eine Kraft P_s deren zeitlicher Verlauf von den Kenngrössen der Federsäule abhängig ist. Gleichzeitig vermindert sich die Geschwindigkeit der Masse. Sie wird Null, d.h. die Masse kommt zur Ruhe, dann, wenn die gesamte Bewegungsenergie der Masse teilweise durch Dämpfungsreibung verzehrt und zum anderen Teil als potentielle Energie in der Feder elastisch gespeichert ist.

Damit gilt die Grundbeziehung

$$m_1 \frac{v^2}{2} = \int_0^{x_L} P_s(x) dt$$

wenn P_s die jeweilige Bremskraft und x der Bremsweg bzw. x_L der Bremsweg bei Erreichen des Stillstandes ist.

Der ideale Geschwindigkeitsverlauf während des Stoss- bzw. Bremsvorganges wäre dann gegeben, wenn die Geschwindigkeit einer geraden Linie folgen würde. Dann hätte die Bremsverzögerung eine konstante Grösse. Diese ist jedoch nur durch eine besondere Gestaltung der Federsäule erreichbar, die zunächst noch nicht betrachtet werden soll.

Im allgemeinen wird die Geschwindigkeit einen von der Geraden abweichenden Verlauf aufweisen. Wegen der Nicht-linearität der Federkonstanten ist es schwierig, diesen Vorgang präzise zu erfassen. Es soll daher eine Näherungslösung entwickelt werden. Zu diesem Zweck wird angenommen, dass die Geschwindigkeit vom Auftreffzeitpunkt der Masse auf die Feder, d.h. von der Zeit $t = t_0$ bis zum Stillstand der Masse, d.h. $t = t_1$ nach einer cos. Fkt. verläuft. Also

$$v = v_x \cos \omega t$$

Damit reduziert sich der Stoss bzw. Bremsvorgang auf eine Viertelperiode, d.h. von $0 \div \pi/2$ einer stark gedämpften Eigenschwingung des Systems Federsäule plus Massen und kann dann nach dem bereits erarbeiteten Rechenverfahren Abschnitt I für periodische Vorgänge behandelt werden. Die Eigenschwingungszahl der Periode ist durch ω gegeben. Sie ergibt sich ohne weiteres aus der Auftreff-, d.h. Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit t_0 und dem Weg bis zum Stillstand x_1 auf folgende Weise.

Der Verschiebeweg ξ ist

$$\xi = \xi_0 e^{j\omega t}$$

die Geschwindigkeit ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v = j \omega \xi_0 e^{j\omega t}$$

bzw.

$$\boxed{v = j \omega \xi}$$

(3.1)

daraus die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \frac{V}{J_{\xi}} \quad (3.2)$$

oder

$$\omega^2 = - \frac{V^2}{\xi^2}$$

Wie in Abschnitt I schon dargelegt worden ist, ist es nicht möglich, die Verhältnisse bei der gedämpften Hypo-Federsäule rechnerisch geschlossen zu behandeln. Man kann nur mittels Differenzrechnung und Benutzung des elektronischen Rechners zu einem ausreichenden Einblick in das Verhalten der Federsäule bei dyn. Belastung kommen.

Das gleiche gilt auch für stossförmige Belastungen. Der Rechenvorgang ist dann grundsätzlich der folgende.

Im Augenblick des Auftreffens der Masse m_1 hat diese die Geschwindigkeit v_0 und trägt die Arbeit

$$E_0 = \frac{m_1}{2} v_0^2$$

Es wird unterstellt, dass diese Geschwindigkeit über eine sehr kleine Strecke $\Delta \xi$ konstant bleibt. Längs dieses wirkt die Gegenkraft der Widerstände der Federsäule P_F bezogen auf deren Eingang.

Dann ist die von der Federsäule aufgenommene Arbeit

$$E_F = P_F \cdot \Delta \xi$$

Am Ende der Wegstrecke $\Delta \xi$ ist die Bewegungsenergie der Masse m_1 dann noch

$$E_1 = E_0 - E_F$$

oder

$$E_1 = \frac{m_1}{2} v_0^2 - P_F \Delta \xi \quad (3.3)$$

Für diese Energie gilt analog

$$E_1 = \frac{m_1}{2} v_1^2$$

Also

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 = \frac{m_1}{2} v_0^2 - P_F \Delta \xi$$

daraus

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2P_F}{m_1} \Delta \xi} \quad (3.4)$$

Dies v_1 ist nunmehr Ausgangswert für den nächsten Rechenschritt geworden.

Die Kraft P_F ist nach Gl. (1.45)

$$P_F = \pi r^2 P_0 e^{j\omega t}$$

Es ist weiter Gl. (1.15)

$$P_0 = v_0 \cdot W_0 F(e)_3$$

so dass sich ergibt

$$P_F = \pi r^2 v_0 \omega_0 F(e)_3 e^{j\omega t} \quad (3.5)$$

Da $v_0 e^{j\omega t}$ identisch ist mit der jeweiligen Verschiebe-
geschwindigkeit, ergibt sich

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - v_0 \frac{2\pi r^2 W_0 F(e)_3}{m_1} \Delta \xi} \quad (3.6)$$

Dies ist die Geschwindigkeit nach dem ersten Rechenschritt.

Nach dem zweiten Schritt lautet die Gleichung

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - v_1 \frac{2\pi r^2 W_0 F(e)_3}{m_1} \Delta \xi}$$

und so weiter.

Die in diesem Ausdruck enthaltene Kennimpedanz ist nach
Gl. 1.35 bzw. 1.36

$$W_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\rho_s \cdot c \cdot L}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\rho \eta_s \cdot c \cdot L}{\pi \cdot \omega \cdot r^2}\right)^2} \sqrt{e^{j\varphi_2}}$$

worin φ_2 den Wert nach Gl. 1.37

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\rho \eta_s}{\omega r \rho_s}$$

Wie in Abschnitt I dargelegt wurde, ist ϑ_2 keine konstante Grösse, sondern eine Fkt. des Verschiebeweges. Es ist also von Punkt zu Punkt entsprechend der Gl. (2.31) bzw. (2.32) in die Rechnung einzuführen.

Die Grösse ω ist entsprechend der Gl. (3.2) aus dem Gesamtverschiebeweg ξ_L zu bestimmen.

Da ξ_L die Grösse ist, die durch die Rechnung ermittelt werden soll, jedoch geschlossen nicht ermittelt werden kann, ist bei der Rechnung so zu verfahren, dass mehrere Werte von ξ_L bzw. ω vorgegeben sind und für jede von diesen ein kompletter Rechenlauf durchzuführen ist.

Ist das passende ξ_L gefunden, so wird für dieses beim letzten Rechenschritt die Restenergie Null werden.

Ist die Restenergie grösser als Null, so ist ξ_L , zu klein vorgegeben, wird sie bei einem $\xi < \xi_L$ schon Null, so ist das ξ_L zu gross vorgegeben.

Die Beziehung Gl. (3.6) enthält noch die Fkt.

$$F(e)_3 = ctgh \gamma L$$

Hierin ist γ entsprechend Gl. (1.41) und (1.42) ebenfalls wieder einer Fkt. von ϑ_0 und ω . Es gilt also hier ebenfalls auch das bezüglich der Durchführung der Rechnung oben gesagte.

Die bisherigen Herleitungen zum Stossvorgang setzen voraus, dass die Auftreffgeschwindigkeit v_s der Masse m_1 auf den Federeingang kleiner ist als die scheinbare Schall- oder Wellengeschwindigkeit a' in der Federsäule. Diese ist entsprechend Gl.

$$a' = L \cdot \omega_0$$

Ist die Auftreffgeschwindigkeit grösser als die Wellengeschwindigkeit, so verhält sich die Federsäule anders und kann nach den oben gegebenen Beziehungen nicht durchgerechnet werden.

Ein brauchbarer Näherungsweg zur Durchrechnung ist jedoch möglich und basiert auf folgenden Gedankengängen bzw. Beobachtungen.

Es zeigt sich, dass durch einen eingeleiteten schnellen Stoss die einzelnen Federplatten nacheinander, beginnend bei der ersten Federplatte gegenseitig zum Anliegen gebracht werden. D.h. der Zwischenraum zwischen den Federplatten 1 und 2 verschwindet als erster, dann der zwischen der Platte 2 und 3 usw., wobei die Federplatte 1 die dem Federeingang zugewandte oberste Federplatte ist. Die weiter unten liegenden Federplatten bleiben bei diesem Vorgang zunächst in Ruhe. Sie werden erst bei fortschreitender Stossbewegung miterfasst.

Wie früher ausgeführt, S. 1, liegen 2 Arten von hydraulischer Dämpfung bei der Verschiebung der Federsäule vor:

- 1) die Plattendämpfung
- 2) die Kolbendämpfung

Für die vorliegende Betrachtung ist nur die Kolbendämpfung von Interesse, da der Beitrag der Plattendämpfung zur Gesamtdämpfung relativ gering ist und ausserdem nur bei sehr kleinen Plattenabständen mit der Kolbendämpfung vergleichbare Werte erreicht.

Je nachdem ob in der Strömung des Rand-Wand-Spaltes niedrige oder hohe Re-Zahlen vorliegen, gelten verschiedene Beziehungen für den Verschiebewiderstand der Federplatten. Gl. 2.9 für lineare Strömung und Gl. 2.16 für turbulente Strömung.

Für die Darlegung des Rechenganges genügt es, diesen auf die lineare Strömung abzustützen. Die turbulente Strömung ist analog zu behandeln.

Die Grösse der Re-Zahl ergibt sich aus

$$\boxed{Re = \frac{2S_2 \gamma v_m}{\eta_1 \cdot g}} \quad (3.7)$$

wobei v_m die mittlere Geschwindigkeit im Rand-Wandspalt der Platte 1 ist. Die auf einer Federplatte der Nr. 1 wirkende Kraft P_0 ist nach Gl. 2.10

$$\boxed{P_0 = \frac{\pi D_i^2 \cdot d}{4 S_2^3} \eta_1 \left[\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + S_2 \right] v_0} \quad (2.10)$$

Die weitere Durchrechnung geht davon aus, dass beim Bewegungsvorgang Platte gegen Platte verschoben wird. Ist die Federsäule zu Beginn des Stossvorganges unbelastet, so ist der Durchfederungsweg bis zum Anliegen zweier Platten theoretisch ($2h_0$). Dieser Betrag kann jedoch nicht in seiner vollen Höhe in die Rechnung eingeführt werden, da bei sehr kleinen Abständen zwischen den Platten, die Plattendämpfung wirksam wird und eine völlige Annäherung verhindert. Für die Rechnung wird ein Grenzwert von

$$\boxed{2h^* = 0,8(2h_0)} \quad (3.8)$$

angesetzt.

Ist die Federsäule belastet und jede Platte um das Mass ($2h_0$) bereits vorverformt, so ist die effektiv noch mögliche Verschiebung dann

$$2h_1^* = 0,8(2h_0) - (2h_1)$$

Die bei der relativen Verschiebung zweier Platten gegeneinander geleistete Arbeit ist dann

$$A_i = P_i \cdot (2h_1^*) \quad (3.9)$$

Diese Arbeit zusätzlich der in den Federscheiben elastisch gespeicherten Arbeit entspricht wieder der Abnahme der kinetischen Energie längs des gleichen Weges. Die elastisch gespeicherte Arbeit ist

$$A_{ie} = \frac{P_F}{2} (2h_1^*) \quad (3.10)$$

wobei P_F die Zunahme der Federkraft längs des Verschiebeweges ist.

Die Abnahme der kinetischen Energie ist wie bekannt

$$\Delta E = \frac{m_1}{2} (v_0^2 - v_1^2)$$

Damit ergibt sich die Gleichgewichtsbeziehung des Energieumsatzes zu

$$\Delta E_i = P_i (2h_1^*) + \frac{P_F}{2} (2h_1^*)$$

oder

$$\frac{m_1}{2} (v_0^2 - v_1^2) = (2h_1^*) \left(P_i - \frac{P_F}{2} \right) \quad (3.11)$$

In dieser Beziehung ist die Eingangsgeschwindigkeit v_0 bekannt und man kann somit die Endgeschwindigkeit v_1 der ersten Stufe ermitteln. Diese ergibt sich zu

$$v_1 = \left[v_0^2 - \frac{\pi D_i^2}{4} \cdot \frac{d}{S_2^3} \cdot \frac{\eta_1}{m_1} \left[\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + S_2 \right] (2h_1^*) v_0 - \frac{P_F}{m_1} (2h_1^*) \right]^{1/2}$$

(3.12)

Damit ist es möglich, Schritt für Schritt den Verlauf der Verzögerungskraft zu bestimmen.

Beim Auftreffen der Masse besteht die Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Für die Bewegung der ersten Platte gegen die zweite wird die Verschiebegeschwindigkeit als konstant angenommen. Dann ergibt sich die entsprechende Verzögerungskraft unmittelbar aus Gl. (2.10)

Sie ist

$$P_0 = P_1 + P_F$$

Die effektive Endgeschwindigkeit ist dann mit Gl. (3.12) zu ermitteln. Mit dieser Endgeschwindigkeit, die über der nächsten Stufe ebenfalls wieder als konstant eingesetzt wird, ergibt sich die Verzögerungskraft dieser Stufe, jedoch unter Beachtung folgender Änderung.

Durch das Anlegen der ersten Scheibe an die zweite, hat sich die Länge des Rand-Wandspaltes von d auf $2d$ erhöht und die Beziehung für die Endgeschwindigkeit der zweiten Stufe lautet dann

$$v_2 = \left[v_1^2 - \frac{\pi D_i^2}{2} \cdot \frac{d}{S_2^2} \cdot \frac{\eta_1}{m_1} \left(\frac{D_i^2}{D_e + D_i} + S_2 \right) (2h_1^*) v_1 - \frac{P_F}{m_1} (2h_1^*) \right]^{1/2}$$

Die Endgeschwindigkeit der (i+1)ten Stufe lautet dann entsprechend

$$V_{(i+1)} = \left[V_i^2 - \frac{\pi D_i^2}{4} \frac{\sum_0^i d}{S_2^3} \frac{\eta_1}{m_1} \left(\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + S_2 \right) (2h_1^*) v_i - \frac{P_F}{m_1} (2h_1^*) \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

Damit kann dann durch entsprechendes Einführen der jeweiligen Endgeschwindigkeiten $V_{(i+1)}$ in diese Gleichung und unter Beachtung der Zunahme der Rand-Wandspaltlänge die zu jeder Stufe gehörende Verzögerungskraft P_i ermittelt werden.

Es ist dann

$$P_i = \frac{\pi D_i^2}{4} \frac{\sum_0^i d}{S_2^3} \eta_1 \left(\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + S_2 \right) v_i \quad (3.14)$$

Die Verzögerungswerte ergeben sich aus den Kräften in bekannter Weise durch

$$b_i = \frac{P_i}{m_1} \quad (3.15)$$

Trägt man für eine Federsäule die aus gleichen Federn aufgebaut ist die entsprechenden Dämpfungskräfte bzw. Verzögerungen über der Zahl der Stufen bzw. dem Gesamtverschiebeweg auf, so ergibt sich ein etwa parabolischer Verlauf der Kurve.

Um einen Kraftverlauf von grösserer Völligkeit zu bekommen, kann man die Spaltweite S_2 als Fkt. der Stufenzahl modifizieren.

Durch Vergrößerung der Spaltweite bei zunehmender Stufenzahl ergibt sich ein flacherer und gestreckterer Verlauf der Kurve. Eine solche Veränderung der Spaltweite kann kontinuierlich oder abschnittsweise vorgenommen werden. Für eine beliebige Stufe ergibt sich dann für z.B. 3 Abschnitte, das entstehende Druckgefälle so

$$\Delta P_i = 8 \eta_1 v_1 \left[\frac{D_i^2}{D_a + D_i} + S_2 n_0 \right] \left[\frac{1}{S_{21}^3} \sum_1^{n_1} d + \frac{1}{S_{22}^3} \sum_{n+1}^{n_2} d + \frac{1}{S_{23}^3} \sum_{n_2+i}^{n_i} d \right]$$

(3.16)

Bei der Ermittlung der Grenzgeschwindigkeit a' bei der von einer zum anderen Rechenverfahren überzugehen ist, ist zu beachten, dass die Grösse L in der Beziehung (1.2) die Länge des Anteeiles der Federsäule ist, die beim Erreichen dieser Geschwindigkeit noch nicht zusammengedrückt ist, nicht also die Länge der ganzen ungespannten Federsäule.

Diskussion der bisherigen Ergebnisse

Es zeigte sich:

- 1) Das dynamische Verhalten der gedämpften Hypofedersäule mit und ohne angekoppelter Zusatzmasse lässt sich math. relativ leicht und übersichtlich behandeln, wenn die Federsäule als ein in einem festen Gefäss eingeschlossenes Kontinuum angesehen und dieses entweder mit den bekannten Methoden der Schalltechnik behandelt wird oder mit Methoden der Theorie der elektr. Vierpole bzw. der elektr. Leitungen oder Kabel, wobei sich die Einführung des Begriffes der Impedanz oder des Wechselkraftwiderstandes als besonders vorteilhaft erweist.
- 2) Die Kennwerte dieses Kontinuum lassen sich durch Umrechnen aus den Effektivkennwerten der Federsäule und des Dämpfungsmittels gewinnen.
- 3) Die Steifigkeit der Feder bzw. deren Ersatzgrösse - Elastizität des Kontinuum ist eine konstante Grösse die von Zeit und Ort unabhängig ist.
- 4) Die Zähigkeit und damit die Ersatzzähigkeit des Betriebsmittels ist eine konstante Grösse unabhängig von Zeit und Ort.
Das mit der Zähigkeit gebildete Dämpfungsmass dagegen, das das Abklingen von Bewegungszuständen im schwingenden System kennzeichnet, ist durch den Einfluss der Dichte und der Schwingfrequenzen keine konstante Grösse mehr.
- 5) Die bewegten Massen bzw. Ersatzmassen sind in ihrer Grösse abhängig von Zeit und Ort.
Da die Massen mit den Wichten nur über die Erdbeschleunigung gekoppelt sind, gilt das gleiche auch für die Ersatzwichten.

Bei Schwingbewegungen hängt die Grösse der Ersatzmasse unmittelbar von der Grösse des Schwingungsschlages und der Phasenlage ab, d.h. bei zunehmender Amplitude erhöht sich die Ersatzmasse.

Innerhalb der Federsäule ändert sich die Grösse der Ersatzmasse und damit die der Wichte längs der Achse von Ort zu Ort.

Als besonders interessant ergab es sich, dass die Ersatzmassen in der Grössenordnung der effektiven Massen liegen können, also mit diesen dann vergleichbar sind.

Wie ein kurzer zahlenmässiger Überschlag ergibt, lassen sich bei einem Federbein konkreter Abmessungen die mitbewegten Ersatzmassen durch konstruktive Massnahmen leicht in die Grössenordnung der äusseren angekoppelten Massen legen, so dass das Schwingverhalten z.B. einer Fahrzeugachse weitgehend vom Verhalten der Federsäule mit bestimmt wird.

Als Konsequenz aus diesen Zusammenhängen ist folgendes festzustellen:

Im schwingenden System ist die schwingende Masse eine von Zeit und Ort abhängige Grösse. Schwingungsgebilde mit derartigen Abhängigkeiten werden als rheolineare Schwinger bezeichnet.

Bei diesen bleiben, da die Bewegungen in der Federsäule Wellencharakter haben, selbst bei dem Wegfallen dämpfender Einflüsse die theoretischen Ausschläge der Schwinger im endlichen Bereich.

Bei zusätzlicher Dämpfung kann ein Aufschaukeln von Schwingungen bei keiner Frequenz erfolgen bzw. die Schwingausschläge bleiben immer kleiner als bei

Schwinggebilden mit konstanter Masse. Kritische Resonanzlagen sind nicht möglich.

- 6) Die Grösse der Eingangsimpedanz und der Verlauf des Druckes und der Schnelle sind durch die Grösse der Eigenimpedanz der unendlich langen Federsäule und durch einfache Funktion der Dämpfungsgrössen gegeben. Gl. (1.25), (1.26), (1.27), (1.28), (1.29) und Abb. 4 - 8.
- 7) Es zeigt sich, dass bei geringen Dämpfungen kurzer Federsäulen und niedrigen Betriebsfrequenzen die Dämpfungskräfte relativ grösser sind als bei höheren Schwingungszahlen um bei weiter zunehmenden Frequenzen wieder anzusteigen. (Gl. (1.25) und Abb. 8.
- 8) Die Geschwindigkeitsverteilung über der achsialen Länge folgt bei Fehlen einer Dämpfung einer geraden Linie, d.h. am Federeingang besteht die grösste Geschwindigkeit, am Boden ist sie Null.

Bei zunehmender Dämpfung nimmt die Geschwindigkeit stärker als linear ab, d.h. mit zunehmender Dämpfung sind immer weniger Federn an dem Bewegungsvorgang beteiligt. Die Federscheiben in Bodennähe bleiben in Ruhe. Gl. (1.29) und Abb. 5.

- 9) Der Druck bleibt beim Fehlen einer Dämpfung über die Länge der Säule in konstanter Höhe. Bei zunehmender Dämpfung sinkt er in ähnlicher Weise wie die Geschwindigkeit ab, d.h. bei sehr grosser Dämpfung ist er am Boden der Säule praktisch Null und behält nur im oberen Teil der Säule mit dem Eingangsdruck vergleichbare Werte.

- 10) Die Bewegungen der Federsäule sind bei fest gegebenen Dämpfungsparametern so, dass bei kleinen Frequenzen die ganze Säule an der Bewegung teilnimmt, bei zunehmenden Frequenzen sind immer mehr nur noch die oberen Teile der Säule an den Bewegungen und damit an der Energieumsetzung beteiligt.

Ein Ergebnis, das qualitativ gut mit Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Literatur

- [1] Mühlhäuser
Ein hydraulisch gedämpftes Federpaket
KFK Bericht 735, Febr. 1968

- [2] O. Lutz
Zur Dynamik der Schraubenfeder
Konstruktion 14 (1962) S. 344

- [3] F. Trendelenburg
Einführung in die Akustik
Springer 1961 III. Aufl.

- [4] K. Klotter
Technische Schwingungslehre I, 1951

- [5] O. Lutz
Resonanzschwingungen in den Rohrleitungen
von Verbrennungsmaschinen.
Ber. a.d.Labor für Verbrennungskraftmaschinen
der T.H. Stuttgart
Wittwer/Stuttgart 1934

- [6] H. Schlichting
Grenzschichttheorie
Karlsruhe 1958

- [7] Möller
Behandlung von Schwingungsaufgaben mit
komplexen Amplituden
Hirzel 1928

Formelzeichen

a	=	Schallgeschwindigkeit	m/sec	
a'	=	scheinbare Schallgeschwindigkeit	m/sec	
b ₁ ; b ₂	=	Konstante		
b	=	Beschleunigung	m/sec ²	
c	=	Federkonstante	kp/m	
C	=	Kapazität (elektr.)		
d	=	Federscheibendicke	m	
D ₁	=	Federscheibendurchmesser	m	
D _a	=	Innendurchmesser des Federgehäuses	m	
E	=	Elastizitätsmodul	kp/cm ²	
E ₀ ; E ₁ ; E _D	=	Energie	mkp	
g	=	Erdbeschleunigung	m/sec ²	
g ₁	=	Dämpfungskonstante		
g ₂	=	Winkelwert		
2h	=	Federweg der einzelnen Federscheibe	m	
2h ₀	=	Gesamtfederung der einzelnen Scheibe	m	
h	=	mittlerer Abstand zweier Federscheiben	m	
l	=	Federsäulenlänge	m	
l ₀	=	Federsäulenlänge, ungespannt	m	
l ₀	=	Länge einer einzelnen ungespannten Federscheibe	m	
l ₁	=	Federsäulenlänge in Arbeitsstellung	m	
L	=	Induktivität (elektr.)		
m	=	Querkontraktionszahl		
m	=	Masse (allgemein)	kp sec ² /m	
m ₀	=	Schwingende Masse der Federsäule	kp sec ² /m	
m ₁	=	angekoppelte Masse	"	
m _E	=	Ersatz - Masse	"	
m _A	=	Auftreffende Masse	"	

n	=	Federscheibenzahl
P	=	Kraft (allgemein) kp
\vec{P}	=	vektorielle Kraft kp
p	=	Druck kp/m^2
Re	=	Reynoldszahl
R	=	Widerstand (elektr.)
r	=	$\frac{D}{2} \text{ m}$
S	=	Rand-Wandspalt m
t	=	Zeit sec
v	=	Geschwindigkeit m/sec
W_0	=	Eingangsimpedanz der unendlich langen Federsäule kp sec/m^3
ξ	=	Verschiebeweg m
η_1	=	Dyn. Zähigkeit kp sec/m^2
η_2	=	Dyn. Ersatzzähigkeit "
ν	=	kinematische Zähigkeit m^2/sec
γ^*	=	spez. Gewicht kg/m^3
δ	=	Fortpflanzungskonstante
ρ	=	Dichte $\text{kp sec}^2/\text{m}^4$
ω	=	Winkelgeschwindigkeit l/sec
\mathcal{D}	=	Abklingkonstante

$$F(\epsilon)_1 = \sinh \delta KL - \cosh \delta KL \operatorname{ctg} \delta L$$

$$Z = \delta L$$

Z = 0.8

10

16

2.5

5

10

20

$F(\epsilon)_1$

1.4

1.2

1.0

0.8

0.6

0.4

0.2

0

$K = \frac{x}{L}$

0.9

0.8

0.7

0.6

0.5

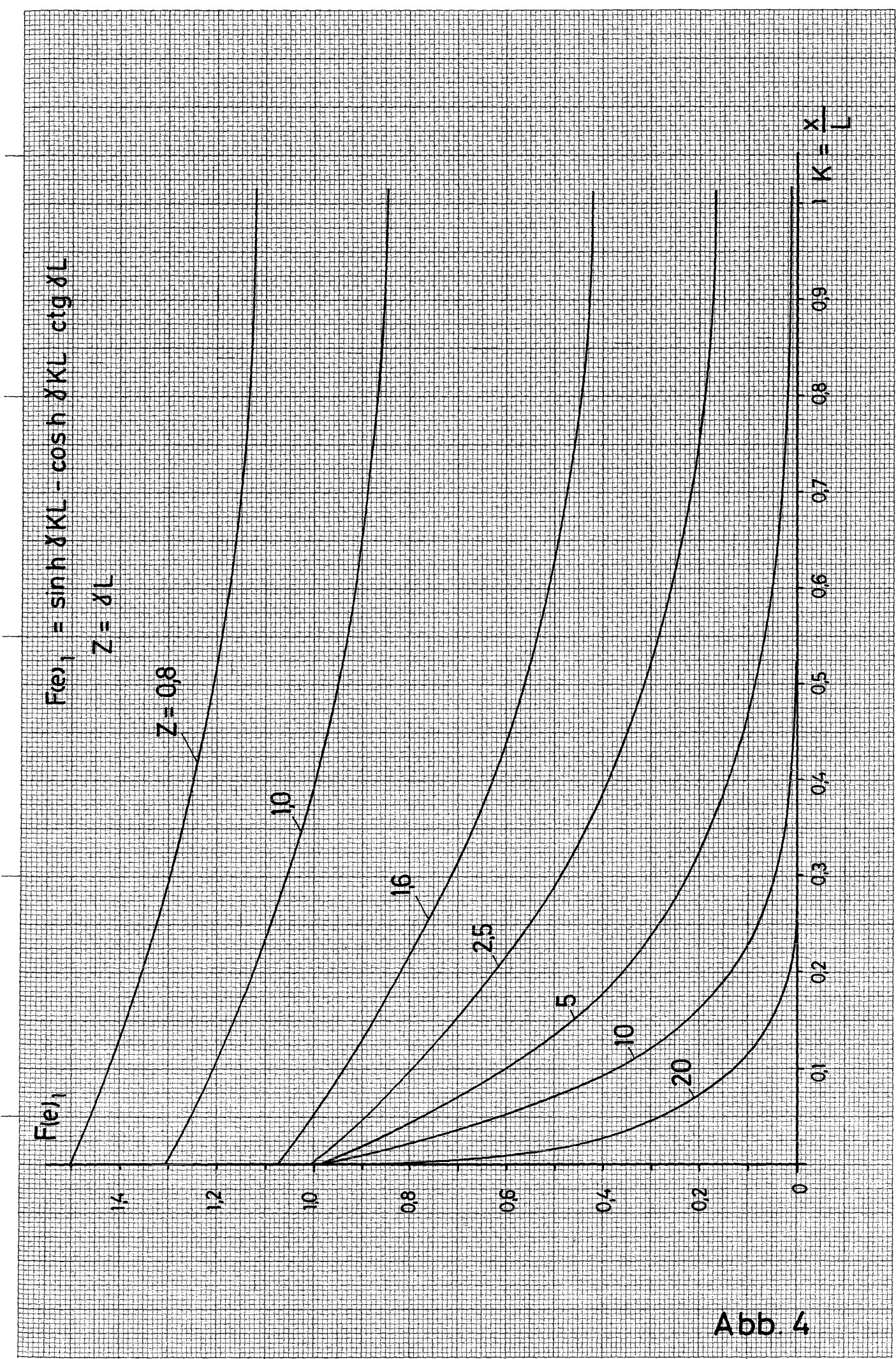
0.4

0.3

0.2

0.1

Abb. 4



$$F(\eta)_2 = \cos h \delta KL - \sinh \delta KL \operatorname{ctg} \delta L$$

$$Z = \delta L$$

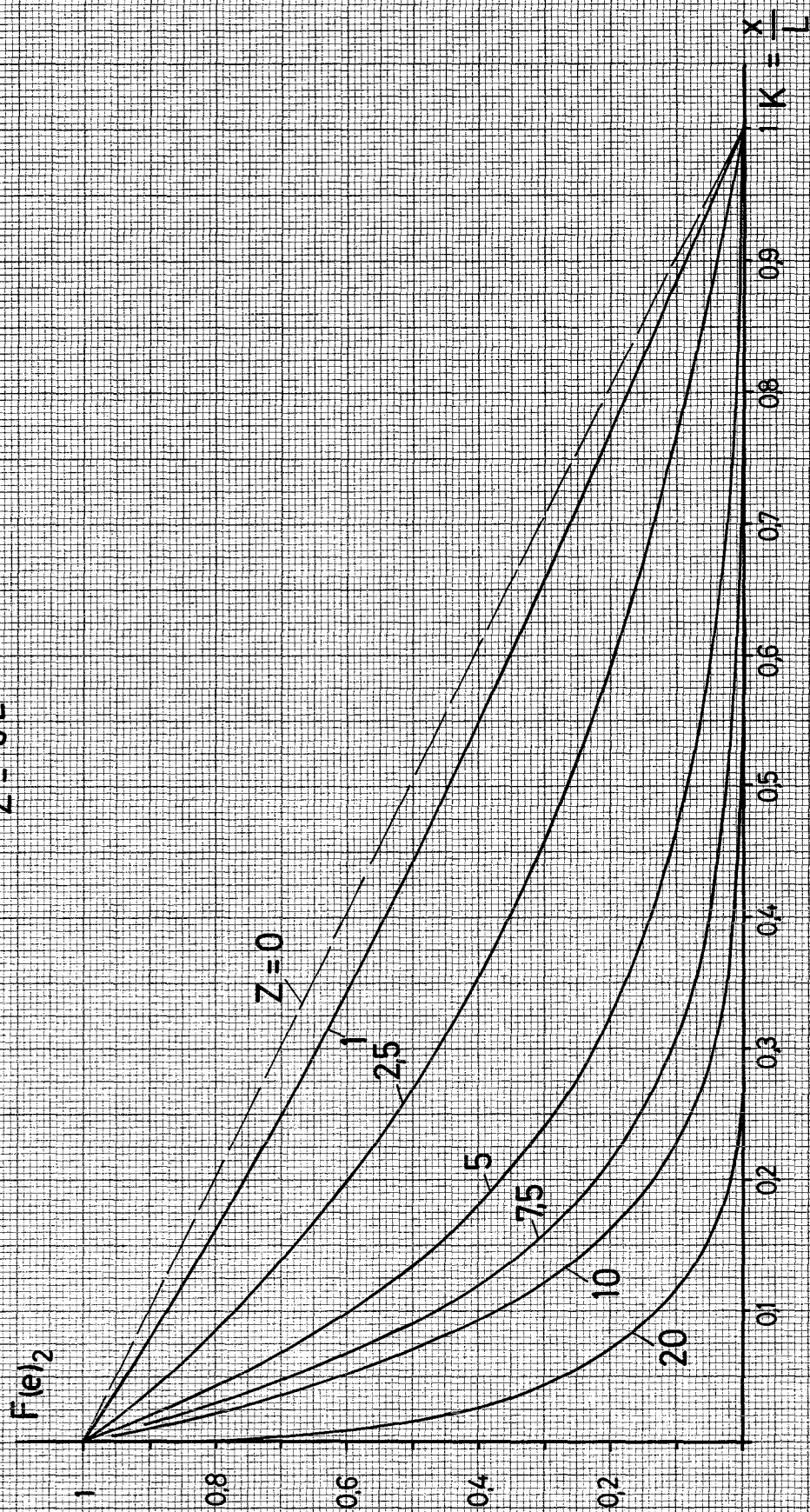


Abb. 5

$$\operatorname{Re} \chi_4 = \cosh \delta KL - \sin h \delta KL \operatorname{tg} \delta L$$

$$Z = \delta L$$

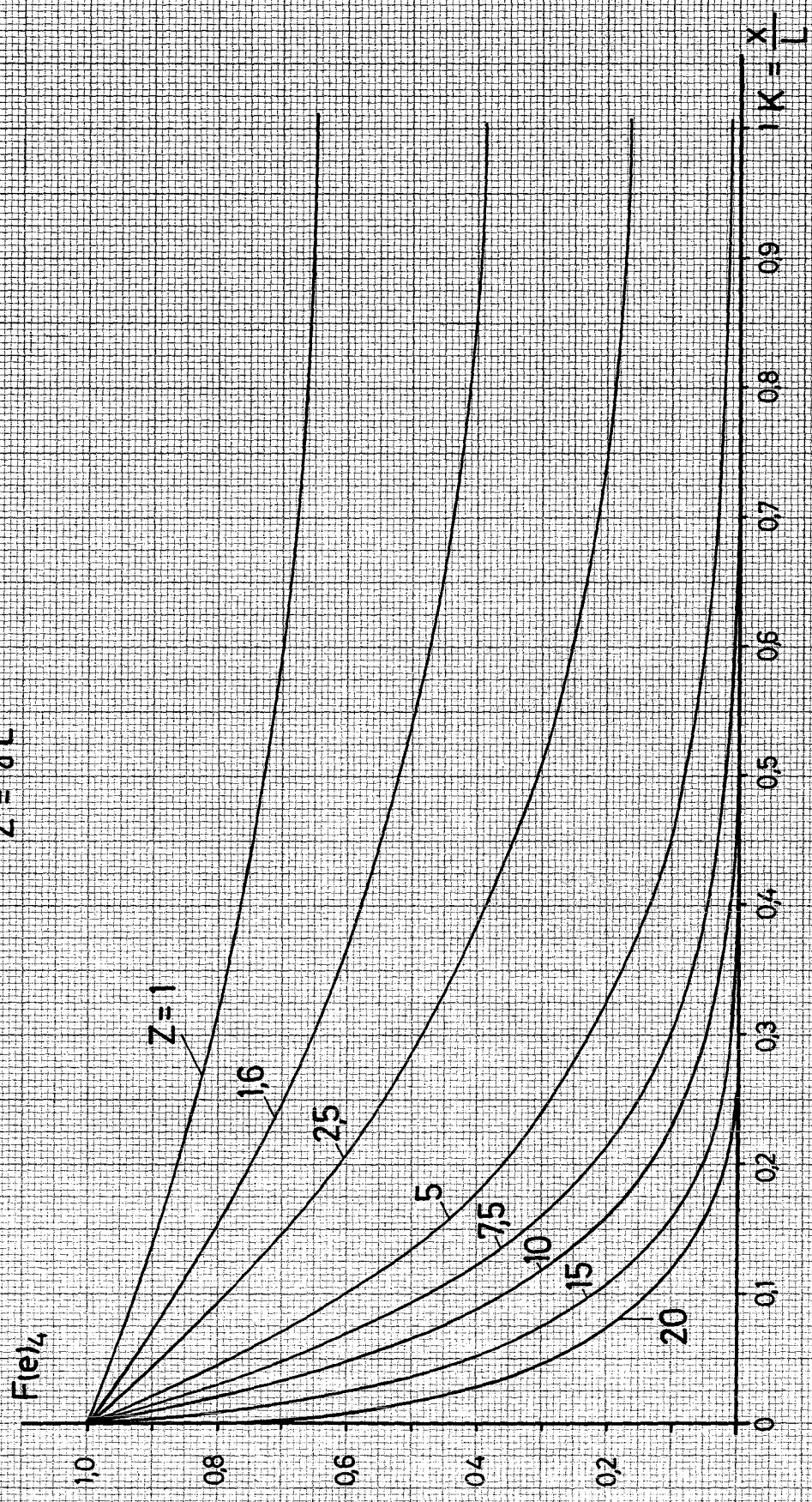


Abb. 6

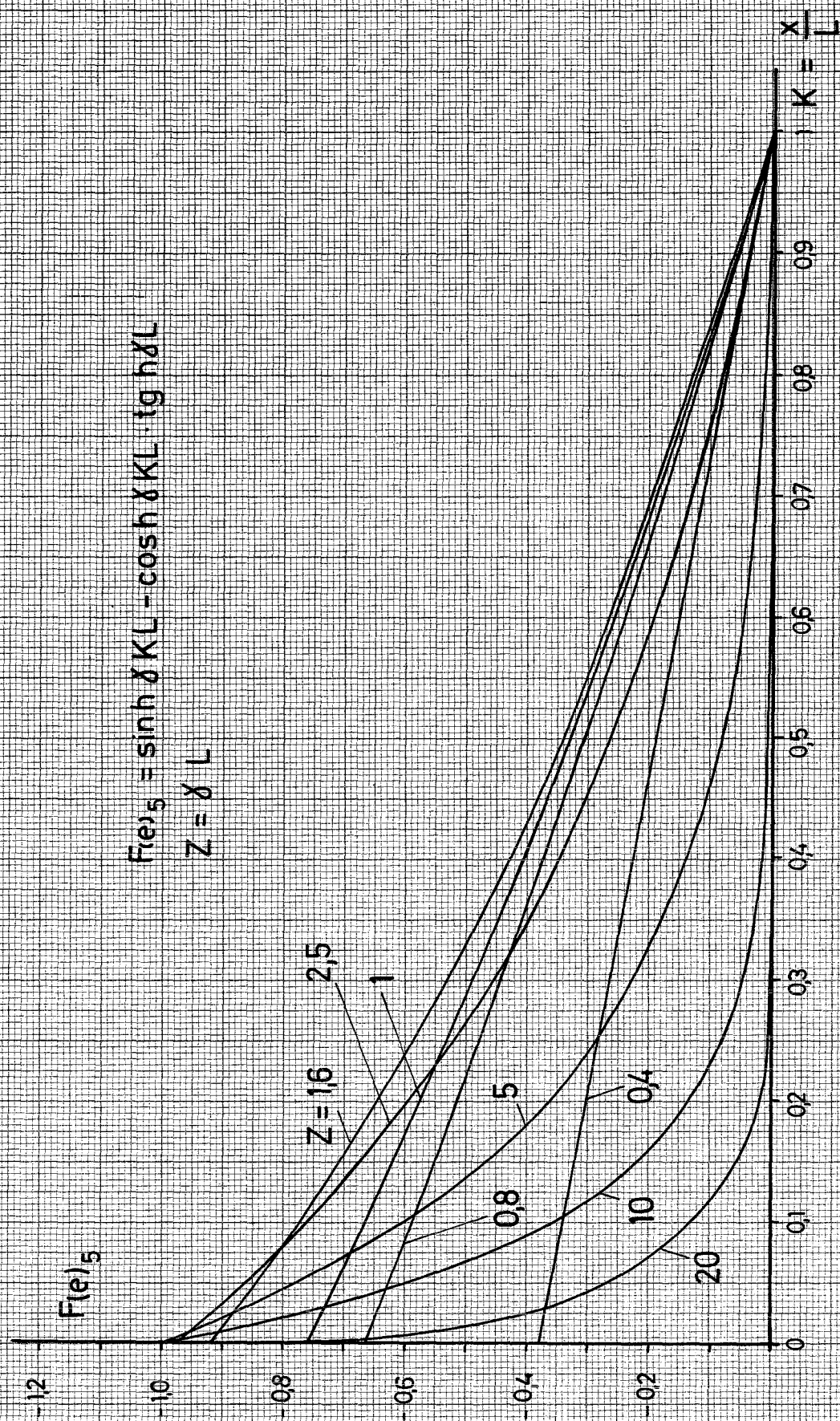


Abb. 7

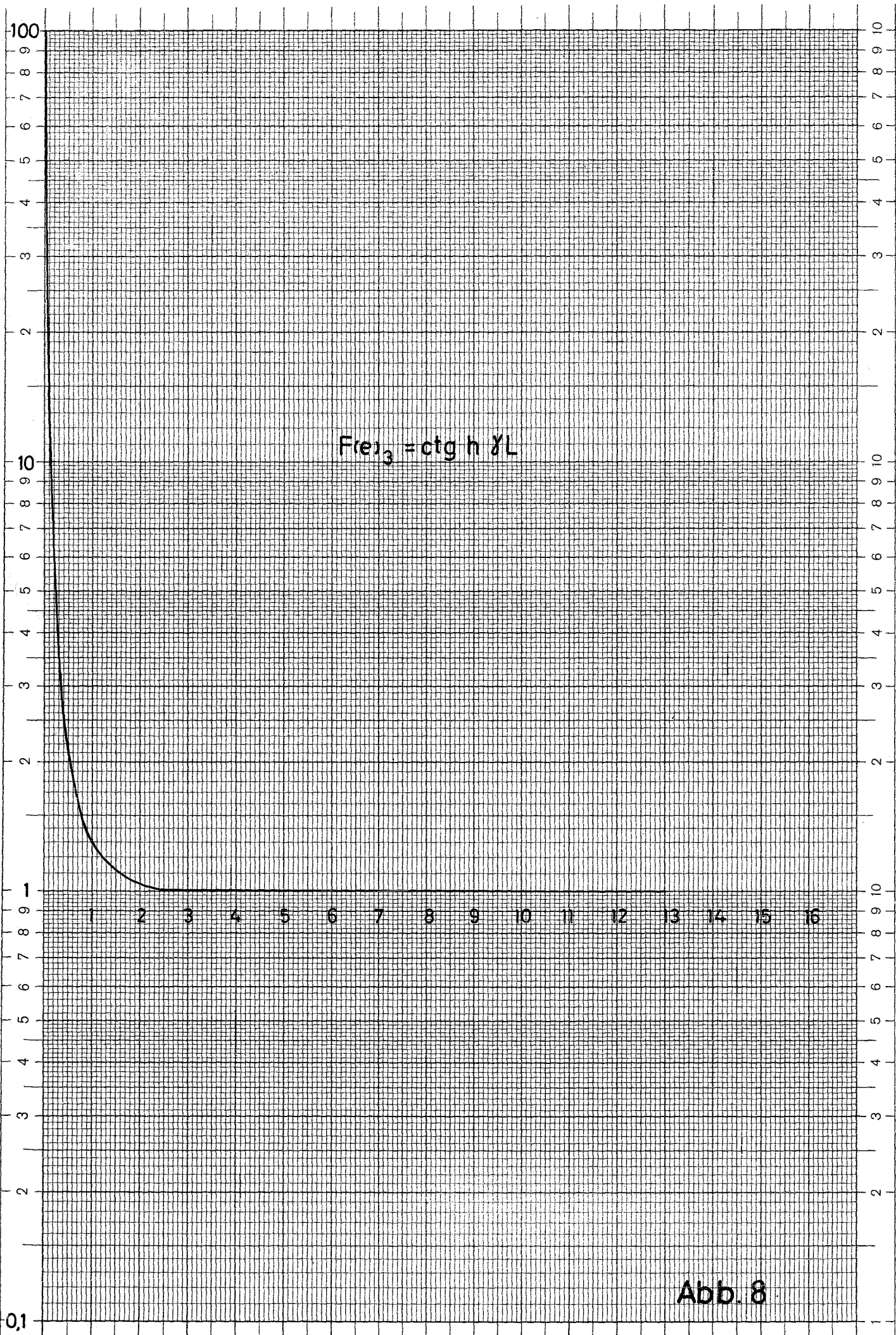


Abb. 8

