

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

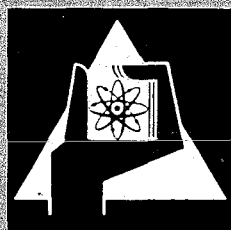
Februar 1972

KFK 1554

Institut für Reaktorentwicklung

Zur Lösung von Wärmeleit- und Wärmeübergangsproblemen  
mit der Monte-Carlo-Methode

D. Kirsch



GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

Kernforschungszentrum Karlsruhe

Februar 1972

KFK 1554

Institut für Reaktorentwicklung

Zur Lösung von Wärmeleit- und  
Wärmeübergangsproblemen mit der  
Monte-Carlo-Methode \*)

---

D. Kirsch

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

---

\*) Ausarbeitung eines Vortrags, gehalten am 12.11.1971  
im Kernenergetischen Kolloquium des Instituts für  
Kernenergetik der Universität Stuttgart



## Zusammenfassung

Es wird das Prinzip der Lösung der Energiegleichung mit der Monte-Carlo-Methode beschrieben. Beispiele werden angegeben für die Lösung von Wärmeleitproblemen und für die Lösung eines Wärmeübergangsproblems bei konstanten Stoffwerten. Anhand eines der Beispiele wird ein anschaulicher Nachweis für die Richtigkeit des Verfahrens gegeben. Ein der Monte-Carlo-Methode angepaßtes Differenzenschema für die Diskretisierung der Energiegleichung bei der Behandlung auch stationärer Wärmeübergangsprobleme wird vorgeschlagen. Der Versuch, Wärmeübergangsprobleme bei temperaturabhängigen Stoffwerten mit der Monte-Carlo-Methode zu lösen, führt zu dem Schluß, daß für derartige Probleme die Monte-Carlo-Methode nicht geeignet ist.

## Abstract

The principles of the solution of the energy equation using the Monte Carlo Method are described. Examples are given for the solution of heat conduction problems and for the solution of a heat convection problem with constant fluid properties. One of the examples is used to illustrate the correctness of the method. A finite difference representation of the energy equation is suggested, which is adapted to the Monte Carlo Method and suitable for the treatment of heat convection problems under transient conditions, too. Trying to solve heat convection problems with the Monte Carlo Method, if temperature dependent fluid properties have to be accounted for, one is led to the conclusion, that the Monte Carlo Method is not qualified for the solution of these problems.



## Zur Lösung von Wärmeleit- und Wärmeübergangs- problemen mit der Monte-Carlo-Methode

---

### 1. Einleitung

Wegen der Vorteile, die die Monte-Carlo-Methode bei der Lösung partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung bietet, hoffte man vor einigen Jahren, daß die Monte-Carlo-Methode auch die Lösung von Wärmeleit- und Wärmeübergangsproblemen wesentlich erleichtern würde, da diese Probleme ja durch Differentialgleichungen eben dieser Art beschrieben werden können. Besonders bei der thermohydraulischen Auslegung von Kernreaktoren schien die Monte-Carlo-Methode ein vorteilhaftes Verfahren zu ermöglichen. Aus diesem Grunde wurde auch im IRE der Versuch unternommen, mit der Monte-Carlo-Methode Wärmeübergangsprobleme zu lösen. In Abschnitt 6 dieses Berichts werden die Gründe dafür angegeben, warum dieser Versuch nicht zum Erfolg führte. Im folgenden soll jedoch zunächst die Anwendung der Monte-Carlo-Methode auf Wärmeleit- und Wärmeübergangsprobleme anhand von Beispielen so diskutiert werden, daß das Lösungsprinzip deutlich wird.

Die zu lösende Gleichung ist die Energiegleichung, die hier als Gleichung (1) in allgemeiner Schreibweise angegeben ist:

$$\frac{D \rho c_p \vartheta}{D t} = \nabla (\lambda \nabla \vartheta) + q \quad (1)$$

Für den Fall, daß ein Fluid betrachtet wird, ist hier vorausgesetzt, daß dieses Fluid inkompressibel ist. - Ausgeschrieben für kartesische Koordinaten und 2 Dimensionen nimmt die Energiegleichung die Form von Gleichung (2) an:

$$\frac{\partial \rho c_p \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \rho c_p \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \rho c_p \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + q \quad (2)$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein für stationäre und instationäre Wärmeleit- und Wärmeübergangsprobleme. Für stationäre Probleme wird die zeitliche Ableitung der Temperatur 0, für Wärmeleitprobleme werden die Geschwindigkeiten u und v 0. Wenn Dissipation berücksichtigt

werden soll, dann soll diese im Quellterm  $q$  enthalten sein.

Die Einschränkung auf 2 Dimensionen, die im folgenden beibehalten wird, ist keine prinzipielle Einschränkung. Räumlich dreidimensionale Probleme können mit der Monte-Carlo-Methode in durchaus ähnlicher Weise gelöst werden, wie dies für zweidimensionale Probleme geschildert wird.

## 2. Das Prinzip der Lösung der Energiegleichung mit der Monte-Carlo-Methode

### 2.1 Die Diskretisierung der Energiegleichung

Der erste Lösungsschritt besteht in der Einteilung des untersuchten Raumes in diskrete Elemente in Raum und Zeit. Zur Verdeutlichung ist in Abb. 1 ein Stück der räumlichen Einteilung eines zweidimensionalen Problems skizziert.

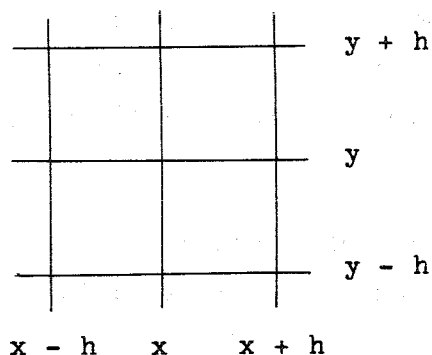


Abb. 1

Wenn hier ein quadratisches Gitter verwendet wird, so ist auch dies keine prinzipielle Einschränkung. Mit der Monte-Carlo-Methode können ebensogut rechteckige Gitter und auch in den Koordinatenrichtungen nicht äquidistante Gitter behandelt werden, so daß ein dem behandelten Problem angepaßtes Gitter verwendet werden kann.

Ersetzt man nun in Gleichung (2) die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten, dann kann man mit der so entstandenen Differenzengleichung die Temperatur eines Gitterpunktes  $(x, y)$  durch die Temperaturen seiner Nachbarpunkte (in Raum und Zeit) darstellen, wie dies in Gleichung (3) angedeutet ist.



$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = & p_0 \cdot \varphi(x, y, t - \Delta t) \\ & + p_1 \cdot \varphi(x + h, y, t) \\ & + p_2 \cdot \varphi(x - h, y, t) \\ & + p_3 \cdot \varphi(x, y + h, t) \\ & + p_4 \cdot \varphi(x, y - h, t) + b \cdot q \end{aligned} \quad (3)$$

$$p_i = p_i(\lambda, \rho, c_p, u, v, h, \Delta t); \quad b = b(\lambda, \rho, c_p, u, v, h, \Delta t)$$

Die auftretenden Koeffizienten  $p_i$  und  $b$  sind abhängig von den Stoffwerten  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ , von den Geschwindigkeiten  $u$ ,  $v$  sowie von der Gittereinteilung, in diesem Fall also von  $h$  und  $\Delta t$ .

Die Monte-Carlo-Methode interpretiert nun die Koeffizienten  $p_i$  als Wahrscheinlichkeiten. Dies bedeutet, daß die Restriktionen

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum p_i = 1$$

erfüllt sein müssen, d.h. das Differenzenschema muß so gewählt werden, daß diese Restriktionen für jeden Gitterpunkt erfüllt sind.

## 2.2 Der Zufallsweg

Das weitere Vorgehen bei der Lösung soll am Beispiel eines stationären Wärmeleitproblems mit räumlich konstanter Wärmequelle  $q$  geschildert werden. Die Geometrie und das gewählte Gitter für dieses Problem sind in Abb. 2 skizziert.

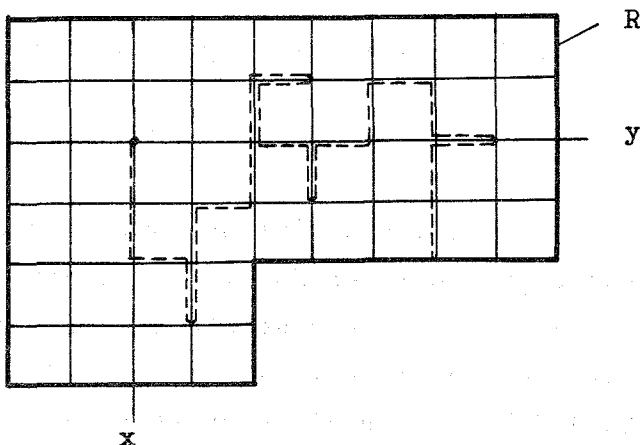


Abb. 2

Die Gleichung (2) vereinfacht sich für diesen Fall zu der folgenden Differentialgleichung:

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) + q = 0 \quad (4)$$

Als Randbedingung soll gelten: die Randtemperatur ist vorgegeben,  
 $\vartheta(R) = \vartheta_w$ .

Gesucht sind also die Temperaturen auf den Gitterpunkten innerhalb des umrandeten Gebiets. Für diesen Fall kann das Differenzenschema so gewählt werden, daß  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$  und  $p_0 = 0$  gilt, wie weiter unten gezeigt wird (Spezialfall von Gleichung (18)).

Ausgehend von einem Punkt  $(x, y)$ , dessen Temperatur bestimmt werden soll, werden nun Zufallswege durch das Gitter simuliert, die alle von dem Punkt  $(x, y)$  ausgehen und an einem Randpunkt enden. Die einzelnen Schritte des Zufallsweges werden in der folgenden Weise bestimmt: mit einem Zufallszahlengenerator wird eine Zufallszahl  $z$  zwischen 0 und 1 ( $0 \leq z \leq 1$ ) erzeugt. Von dem Punkt  $(x', y')$  des Zufallsweges wird dann der nächste Schritt zu einem Nachbarpunkt von  $(x', y')$  je nach der Größe von  $z$  durchgeführt, wobei man einem Schema folgt, das man nach der Größe der Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  für jeden Gitterpunkt wählt und für alle simulierten Zufallswege festhalten muß, z.B.:

$0$	$\leq z < p_1$	: Schritt von $(x', y')$ nach $(x'+h, y')$
$p_1$	$\leq z < p_1 + p_2$	: Schritt von $(x', y')$ nach $(x'-h, y')$
$p_1 + p_2$	$\leq z < p_1 + p_2 + p_3$	: Schritt von $(x', y')$ nach $(x', y'+h)$
$p_1 + p_2 + p_3$	$\leq z \leq 1$	: Schritt von $(x', y')$ nach $(x', y'-h)$

Wird bei einem Schritt der Rand erreicht, dann ist der Zufallsweg beendet. Man sagt, der Zufallswanderer, der den Zufallsweg durchlaufen hat, wird am Rand absorbiert. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Wand erreicht wird, d.h. daß der Zufallsweg nach einer endlichen (wenn auch manchmal sehr großen) Zahl von Zufallsschritten beendet wird, gerade 1.

Während der Simulation der Zufallswege wird aufsummiert

- bei jedem Zufallsschritt die Wärmemenge, die in dem zum Ausgangspunkt des Schrittes gehörenden Volumen erzeugt wird,
- und für jeden Zufallsweg die Temperatur des Randpunktes, an dem der Zufallsweg endete.

Sind  $N$  vom Punkt  $(x, y)$  ausgehende Zufallswege simuliert worden, und war die Zahl der Schritte beim  $n$ -ten Zufallsweg  $M_n$ , dann berechnet sich die Temperatur im Punkt  $(x, y)$  zu

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N \left( \vartheta_{wn} + M_n \cdot \frac{qh^2}{4\lambda} \right) \quad (5)$$

Wenn  $N$  groß genug ist, d.h. wenn sehr viele Zufallswege simuliert werden, dann konvergiert diese Lösung der Monte-Carlo-Methode gegen die Lösung der Differenzgleichung. Beweise dafür finden sich in der Literatur [1]. Im Abschnitt 4 wird ein mehr anschaulicher Nachweis für die Richtigkeit dieser Behauptung an einem Beispiel gegeben.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß in Gleichung (5) keine unbekanntenen Werte an Zwischenpunkten der Zufallswege enthalten sind.

### 2.3 Die Behandlung der Randbedingungen

Im vorigen Abschnitt (2.2) ist bereits geschildert worden, wie ein Rand behandelt wird, für den die Temperatur vorgegeben ist. Man spricht von einem absorbierenden Rand, genauer: die Wahrscheinlichkeit, daß der Zufallswanderer am Rand absorbiert wird, ist 1.

Erreicht ein Zufallswanderer einen Rand, an dem nicht die Temperatur, sondern der Wärmefluß vorgeschrieben ist, dann macht der Zufallswanderer seinen nächsten Schritt wieder von der Wand fort z.B. zu dem dem Wandpunkt benachbarten Gitterpunkt. Bei diesem Schritt wird die an der Wand zugeführte Wärme in ähnlicher Weise aufsummiert wie bei Schritten von inneren Gitterpunkten aus die Wärme, die in dem zu diesem Gitterpunkt gehörenden Volumen erzeugt wird. Der Zufallswanderer wird also an der Wand reflektiert. Eine Wand, an der der Wärmefluß vorgeschrieben ist, heißt reflektierende Wand; anders ausgedrückt: die Wahrscheinlichkeit, daß der Zufallswanderer an einer solchen Wand reflektiert wird, ist 1.

Denkbar ist auch der Fall, daß bei der Berechnung der Temperaturen in einem Festkörper am Rande des Festkörpers eine Wärmeübergangszahl zu einem angrenzenden Fluid und die Temperatur dieses Fluids gegeben sind. Aus der Diskretisierung dieser Übergangsbedingung ergibt sich für diesen Fall ein teilweise reflektierender, teilweise absorbierender Rand. Die Wahrscheinlichkeiten für Reflektion und Absorption des Zufallswanderers liegen beide je zwischen 0 und 1 und ergeben in der Summe gerade 1, d.h. der Zufallswanderer wird entweder reflektiert oder absorbiert.

### 3. Die Vorteile der Verwendung der Monte Carlo-Methode

Aus dem im Abschnitt 2 geschilderten Prinzip der Lösung der Energiegleichung mit der Monte-Carlo-Methode gehen bereits die großen Vorteile dieser Methode hervor:

- Der Lösungsweg ist für digitale Rechenmaschinen leicht programmierbar, man erhält relativ einfache und kleine Programme auch für größere Probleme.
- Aus Gleichung (5) geht hervor, daß man einzelne Temperaturen berechnen kann, ohne daß man auch die Temperaturen aller anderen Punkte des Gitters berechnen muß, wie dies bei anderen Differenzenverfahren der Fall ist. Dies könnte ein besonderer Vorteil bei der Berechnung der Temperaturverteilung in dem Brennelement eines Kernreaktors sein. Die besonders interessierenden Temperaturen sind hier die Austrittstemperatur des Kühlmittels und die Maximaltemperaturen von Hüllrohr und Brennstoff. Da man die Orte, an denen diese Temperaturen auftreten, wenigstens näherungsweise kennt, könnte man sich auf die Berechnung weniger Temperaturen beschränken.
- Rundungsfehler und numerische Instabilitäten, die Probleme vieler anderer Differenzenverfahren, treten bei der Monte Carlo-Methode nicht auf.

Ein Problem könnte allenfalls die Erzeugung der Zufallszahlen sein. Jedoch gibt es heute einfache Unterprogramme zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen auf digitalen Rechenmaschinen, die durchaus die Funktion von Zufallszahlengeneratoren übernehmen können (ein solches Unterprogramm ist z.B. im SSP der IBM 360 vorhanden). Wenn solche Unterprogramme eine genügend große Periode der von ihnen erzeugten Pseudo-

zufallszahlen garantieren, und wenn diese Unterprogramme ausreichend auf Gleichverteilung und Zufälligkeit der Pseudozufallszahlen getestet sind, dann können sie für die hier behandelten Probleme wie echte Zufallszahlengeneratoren verwendet werden.

#### 4. Beispiele für Wärmeleitprobleme

##### 4.1 Ein Beispiel für ein eindimensionales Wärmeleitproblem

Berechnet werden soll die Temperaturverteilung aufgrund der Dissipation (Reibungswärme) in einer stationären laminaren Strömung im ebenen Spalt. Vorausgesetzt wird, daß die Strömung thermisch und hydrodynamisch voll ausgebildet ist und daß die Stoffwerte konstant sind. Die Lage der Koordinatenachsen und die Geometrie des Spalts werden durch Abb. 3 veranschaulicht.

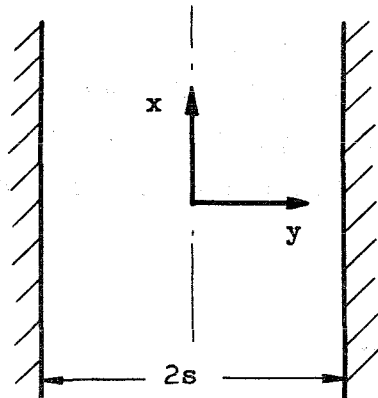


Abb. 3

Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich in diesem Fall als exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichung:

$$u(y) = \frac{3}{2} \bar{u} \left(1 - \frac{y^2}{s^2}\right) \quad (6)$$

In Gleichung (6) bedeutet  $\bar{u}$  die in y-Richtung gemittelte Geschwindigkeit. Mit den gegebenen Voraussetzungen gilt hier also

$$v = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Für den Quellterm wird hier die Rayleighsche Dissipationsfunktion eingesetzt:

$$q = \eta \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (7)$$

Dabei ist in Gleichung (7) bereits berücksichtigt, daß es sich um eine inkompressible Strömung in zwei Dimensionen handelt. Mit den gegebenen Voraussetzungen reduziert sich die Dissipationsfunktion weiter zu

$$q = q(y) = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (8);$$

da thermisch voll ausgebildete Strömung vorausgesetzt ist, gilt

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0,$$

so daß nach Einsetzen von Gleichung (8) unter Berücksichtigung von Gleichung (6) in Gleichung (2) die zu lösende Differentialgleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = - 9 \cdot \frac{\eta}{\lambda} \bar{u}^2 \cdot \frac{y^2}{s^4} = - \frac{q(y)}{\lambda} \quad (9).$$

In Gleichung (2) fallen also die konvektiven Glieder fort, so daß ein reines Wärmeleitproblem zu lösen ist. Die Differentialgleichung (9) ist elementar lösbar, wie leicht einzusehen ist. Schlichting [2], der dieses Problem zuerst behandelte, gibt z.B. für die Randbedingung  $\vartheta_{w1} = \vartheta_{w2} = \vartheta_w$  als Lösung an:

$$\vartheta(y) = \vartheta_w + \frac{3}{4} \cdot \frac{\eta}{\lambda} \bar{u}^2 \left( 1 - \frac{y^4}{s^4} \right) \quad (10).$$

Zur Lösung von Gleichung (9) mit der Monte-Carlo-Methode teilt man die Spaltbreite  $2s$  in gleiche Abschnitte der Länge  $h$  ein, und ersetzt den Differentialquotienten in Gleichung (9) durch einen Differenzenquotienten, so daß man erhält:

$$\frac{\vartheta(y+h) - 2\vartheta(y) + \vartheta(y-h)}{h^2} = - 9 \cdot \frac{\eta}{\lambda} \bar{u}^2 \cdot \frac{y^2}{s^4} \quad (11).$$

Hieraus erhält man durch Auflösen nach  $\vartheta(y)$  die Gleichung

$$\vartheta(y) = \frac{1}{2} \vartheta(y+h) + \frac{1}{2} \vartheta(y-h) + \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta}{\lambda} \bar{u}^2 \cdot \frac{h^2}{s^4} y^2 \quad (12),$$

$p_1$                        $p_2$

aus der die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_1 = p_2 = 1/2$  zu entnehmen sind. Nach der Simulation von  $N$  vom Punkt  $(y)$  ausgehenden Zufallswegen mit jeweils  $M_n$  Schritten erhält man für die gesuchte

Temperatur an diesem Punkt

$$\begin{aligned} \vartheta(y) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( \vartheta_w + \sum_{m=1}^{M_n} \left( \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta}{\lambda} \bar{u}^2 \cdot \frac{h^2}{s^4} y_{mn}^2 \right) \right) \\ &= \vartheta_w + \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta}{\lambda} \bar{u}^2 \cdot \frac{h^2}{s^4} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} y_{mn}^2 \end{aligned} \quad (13).$$

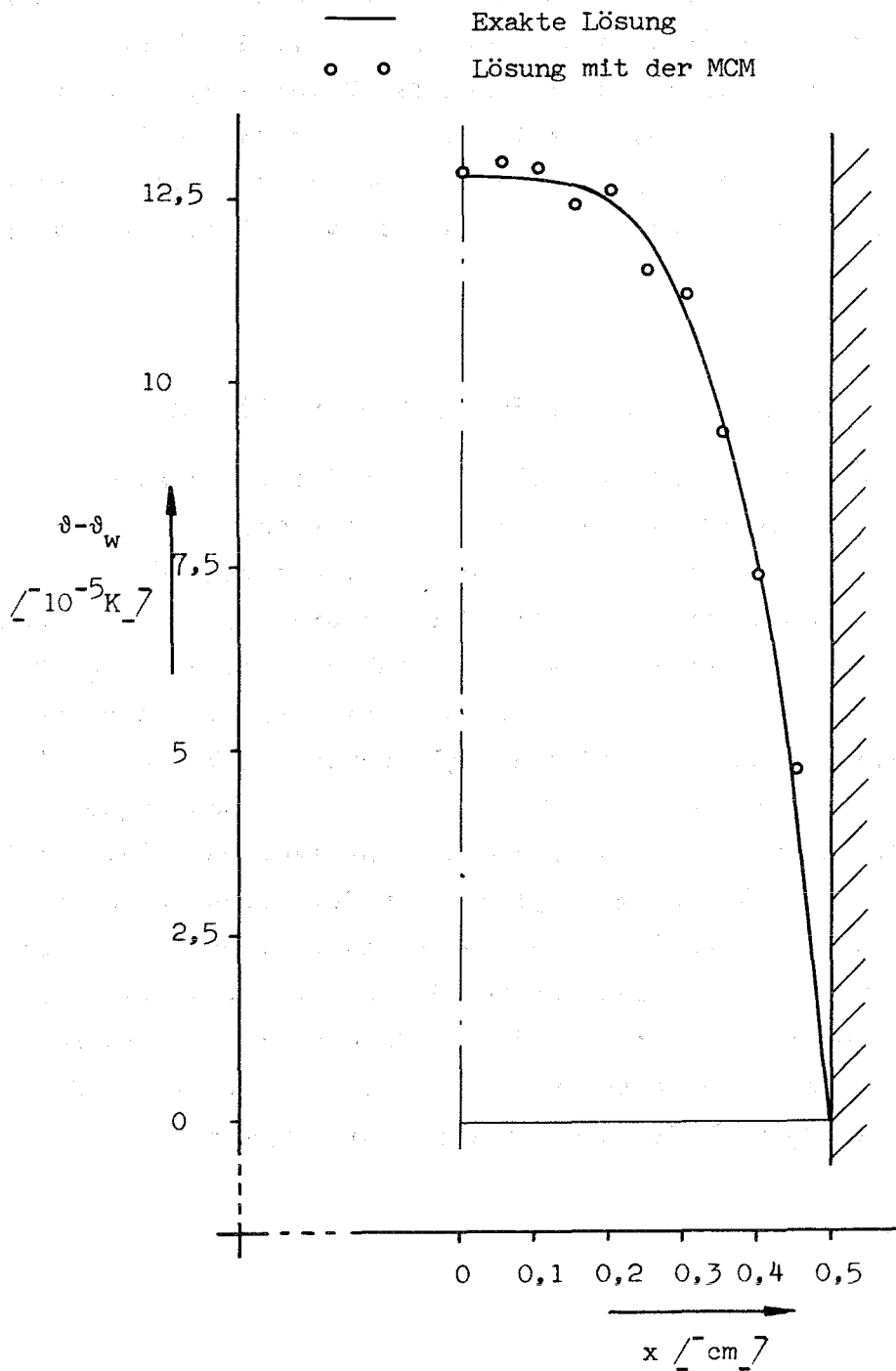
Abb. 4 zeigt einen Vergleich der exakten Lösung mit der Lösung mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode, wobei für jeden Punkt 1000 Zufallswege simuliert wurden. Die Genauigkeit der Lösung mit der Monte-Carlo-Methode ist durch Steigerung der Zahl der Zufallswege noch zu verbessern. Dann aber bemerkt man bereits den ersten Nachteil der Monte-Carlo-Methode: die Konvergenz gegen die Lösung der Differenzgleichungen wird mit zunehmender Zahl der Zufallswege immer langsamer.

#### 4.2 Anschaulicher Nachweis der Richtigkeit des Verfahrens

Im folgenden sind die Differenzgleichungen für das Durchlaufen zweier Zufallswege angegeben, die vom Punkt (y) ausgehen. Dabei ist für jeden Zufallsschritt jeweils die Differenzgleichung für den Ausgangspunkt so aufgeschrieben, daß die Temperaturdifferenz zwischen Ausgangs- und Endpunkt des Schritts auf der linken Seite der Gleichung erscheint. Beginnt ein Zufallsweg mit einem Schritt von (y) nach (y + h), dann erhält man die gewünschte Differenzgleichung aus Gleichung (12) dadurch, daß man auf beiden Seiten  $\vartheta(y + h)$  abzieht. Das Ergebnis ist dann gerade die erste Gleichung des Gleichungssystems (14), wobei für den Quellterm eine Abkürzung eingeführt wurde. Entsprechend beschreibt das Gleichungssystem (15) einen Zufallsweg, dessen 1. Schritt von (y) nach (y - h) führt. In den letzten Gleichungen von (14) und (15), die jeweils den letzten, an der Wand endenden Schritt des Zufallsweges beschreiben, bezeichnen die Indizes w - 1 bzw. w - 2 die um h bzw. 2h von der Wand entfernten inneren Gitterpunkte.

Abb.: 4 Temperaturverteilung aufgrund der Reibungswärme zwischen zwei ebenen, parallelen Platten bei laminarer Strömung

$Re = 2 \cdot 10^3$       $\vartheta_w = 20^\circ C$





$$\begin{aligned}
 \vartheta(y) - \vartheta(y+h) &= -\frac{1}{2}\vartheta(y+h) + \frac{1}{2}\vartheta(y-h) + \frac{h^2}{2\lambda} \cdot q(y) \\
 \vartheta(y+h) - \dots &= \dots + \frac{h^2}{2\lambda} \cdot q(y+h) \\
 \dots & \\
 \vartheta_{w-1} - \vartheta_w &= -\frac{1}{2}\vartheta_w + \frac{1}{2}\vartheta_{w-2} + \frac{h^2}{2\lambda} \cdot q_{w-1} \quad (14)
 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 \vartheta(y) - \vartheta(y-h) &= +\frac{1}{2}\vartheta(y+h) - \frac{1}{2}\vartheta(y-h) + \frac{h^2}{2\lambda} \cdot q(y) \\
 \vartheta(y-h) - \dots &= \dots + \frac{h^2}{2\lambda} \cdot q(y-h) \\
 \dots & \\
 \vartheta_{w-1} - \vartheta_w &= -\frac{1}{2}\vartheta_w + \frac{1}{2}\vartheta_{w-2} + \frac{h^2}{2\lambda} \cdot q_{w-1} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Die Simulation von N Zufallswegen bedeutet nun nichts anderes als die Summation aller Gleichungen von N Gleichungssystemen, die alle wie die Gleichungssysteme (14) und (15) aufgebaut sind. Es ist also eine doppelte Summation über alle Zufallswege und über alle Schritte aller Zufallswege durchzuführen. Dabei ergibt sich

- für die linken Seiten: bereits bei der Summation der Differenzengleichungen für alle Schritte jedes einzelnen Zufallsweges fallen außer  $\vartheta(y)$  und  $\vartheta_w$  alle Temperaturen an Zwischenpunkten des Zufallsweges fort, da diese jeweils einmal mit positivem, einmal mit negativem Vorzeichen auftreten.
- für die rechten Seiten: hier faßt man zur besseren Übersicht nicht die Gleichungen eines Zufallsweges zusammen, sondern alle Gleichungen für die von einem Punkt ausgehenden Schritte. Man erhält für jeden Punkt 2 Typen von Gleichungen, nämlich gerade die Differenzengleichungen für einen Schritt zum rechten bzw. zum linken Nachbarpunkt. Z.B. für den Punkt (y) erhält man gerade die jeweils ersten Gleichungen in den Gleichungssystemen (14) bzw. (15). Da die Übergangswahrscheinlichkeiten für einen Schritt zum rechten bzw. linken Nachbarpunkt gerade gleich groß sind (nämlich 1/2), existieren von jedem

der beiden Gleichungstypen für jeden Punkt gerade "gleich viele", wenn nur  $N$  groß genug ist. Wegen des Aufbaus der beiden Gleichungstypen (vergleiche die jeweils ersten Gleichungen von (14) bzw. (15)) folgert daraus aber, daß sich die rechten Seiten der Gleichungen bei der Summation bis auf den Quellterm jeweils fortheben.

Als Ergebnis der Summation erhält man also gerade die Gleichung (13), die oben angegeben wurde.

Einen ähnlichen, anschaulichen Nachweis kann man auch bei umfangreicheren Problemen mit sehr viel komplizierteren Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  führen, wenn die Restriktionen

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum p_i = 1$$

erfüllt sind, da die von einem Punkt ausgehenden verschiedenen Schritte (und damit die zugehörigen Differenzgleichungen) immer mit dem Anteil auftreten, der der zugehörigen Wahrscheinlichkeit entspricht, wenn nur  $N$  groß genug ist.

#### 4.3 Die Monte-Carlo-Methode mit gleitendem Zufallsschritt

Für die bisher geschilderte Lösungsmethode war durch die Wahl eines Gitters vor Beginn der Simulation von Zufallswegen die Länge der Zufallsschritte bestimmt, auch waren nur ganz bestimmte, durch das Gitter vorgegebene Richtungen der Schritte möglich. Man nennt diese Lösungsmethode daher Monte-Carlo-Methode mit festem Zufallsschritt. Haji-Sheikh und Sparrow [3] haben nach einem früheren Vorschlag von Brown [4] eine Lösungsmethode entwickelt, die eine bessere Berücksichtigung von unregelmäßigen Rändern des untersuchten Gebiets ermöglicht, als dies mit einem festen Gitter möglich ist: die Monte Carlo-Methode mit gleitendem Zufallsschritt. Das Vorgehen bei dieser Lösungsmethode soll anhand von Abb. 5 geschildert werden.

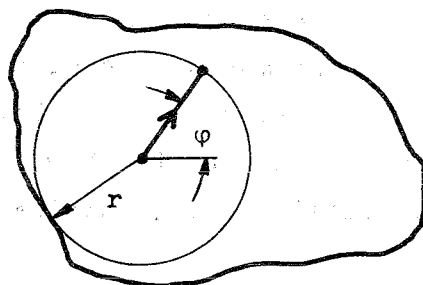


Abb. 5

Um den Ausgangspunkt eines Zufallsschrittes wird ein Kreis geschlagen, dessen Radius  $r$  so bestimmt wird, daß der Kreis den Rand des untersuchten Gebiets gerade berührt. Eine Zufallszahl  $z$  zwischen 0 und 1 bestimmt den Winkel  $\varphi = 2\pi \cdot z$ , der an einer vorgewählten Richtung im Ausgangspunkt des Zufallsschrittes angetragen wird, um den Endpunkt des Zufallsschrittes auf der Peripherie des Kreises zu finden. Dieser Endpunkt ist dann wieder Ausgangspunkt eines neuen Schrittes, in dem auf die gleiche Weise verfahren wird. Ist z.B. die Temperatur auf dem Rand vorgegeben, dann endet der Zufallsweg in gleicher Weise am Rand wie bei der Monte Carlo-Methode mit festem Zufallsschritt. Für ein stationäres Wärmeleitproblem mit räumlich konstanter Quelle  $q$  (wie in Abschnitt 2.2) ergibt sich [3] dann nach der Simulation von  $N$  Zufallswegen mit jeweils  $M_n$  Zufallsschritten die an einem Punkt  $(x, y)$  gesuchte Temperatur zu

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( \vartheta_{wn} + \frac{q}{4\lambda} \cdot \sum_{m=1}^{M_n} r_{mn}^2 \right) \quad (16)$$

Etwas Aufmerksamkeit verlangt bei dieser Lösungsmethode die Behandlung der Zufallswege in der Nähe des Randes. Da die Wahrscheinlichkeit, daß der Rand in einem Zufallsschritt unmittelbar erreicht wird, klein ist, können Schwierigkeiten mit der Beendigung eines Zufallsweges entstehen. Wie diese Schwierigkeiten zu umgehen sind, haben Haji-Sheikh und Sparrow [3] angegeben.

Von den Problemen, die Haji-Sheikh und Sparrow [3] erfolgreich mit der Monte-Carlo-Methode mit gleitendem Zufallsschritt behandelten, sei hier eins herausgegriffen: ein Festkörper mit konstanter Wärmequellendichte wird von einem Fluid gekühlt, das in kreiszylindrischen Bohrungen durch diesen Festkörper strömt. Die Bohrungen sind in dem Festkörper so angeordnet, daß ihre Mittelpunkte ein quadratisches Gitter bilden, wie dies in Abb. 6 skizziert ist.

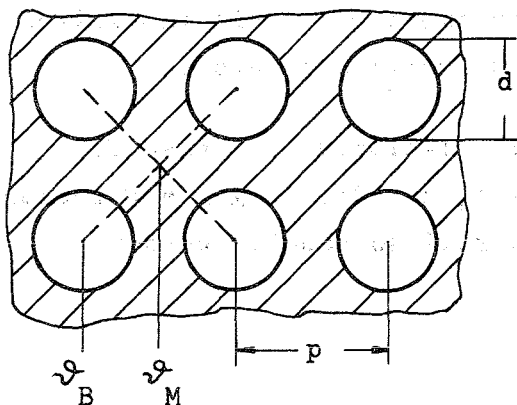


Abb. 6

Ist der Festkörper genügend weit ausgedehnt, und ist die Fluidtemperatur in den Bohrungen in einem Querschnitt jeweils gleich, dann tritt die höchste Temperatur im Festkörper gerade auf dem Schnittpunkt der Diagonalen eines Gitterquadrates auf, wie dies in Abb. 6 angedeutet ist. Haji-Sheikh und Sparrow [3] haben die Differenz zwischen dieser höchsten Temperatur und der Fluidtemperatur für verschiedene Verhältnisse  $p/d$  und für verschiedene Nusseltzahlen  $Nu$  für den Wärmeübergang zwischen Fluid und Festkörper berechnet. So erhalten sie z.B. für  $p/d = 2$  und  $Nu = 1,0$  die Temperaturerhöhung

$$T_M - T_B = 0,8 \cdot \frac{qp^2}{4\lambda}.$$

## 5. Ein Beispiel für die Lösung eines Wärmeübergangsproblems mit der Monte-Carlo-Methode

### 5.1 Die Diskretisierung der Energiegleichung für Wärmeübergangsprobleme und für instationäre Probleme

In den bisher behandelten Fällen stationärer Wärmeleitprobleme traten nur Differentialquotienten zweiter Ordnung auf. Für den Ersatz dieser Differentialquotienten durch Differenzenquotienten bieten sich zentrale Differenzen an, wie sie auch in den bisher behandelten Fällen erfolgreich verwendet wurden. Will man die Gleichung (2) ganz allgemein diskretisieren, dann stellen sich die folgenden Fragen:

- sollen für die konvektiven Glieder Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen verwendet werden?
- soll bei instationären Problemen ein explizites, ein implizites oder ein gemischtes Differenzenschema verwendet werden?

Für die Monte-Carlo-Methode mit festem Zufallsschritt, also für ein vorgegebenes Gitter in Raum und Zeit, muß die folgende Forderung gestellt werden: das Differenzenschema soll so gewählt werden,

daß die Restriktionen

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum p_i = 1$$

unabhängig von der Wahl der Gittereinteilung (in Raum und Zeit) für jeden Gitterpunkt erfüllt sind.

Diese Forderung ist bei instationären Problemen dann erfüllt, wenn ein rein implizites Differenzenschema gewählt wird, wie es unten in Gleichung (17) angegeben ist. Bei der Wahl der Differenzen für die konvektiven Glieder muß berücksichtigt werden, daß die Restriktionen

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum p_i = 1$$

unabhängig vom Vorzeichen der Geschwindigkeiten erfüllt sein müssen. Bedenkt man weiter den physikalischen Inhalt der konvektiven Glieder (Wärmetransport durch Massentransport, d.h. Wärme wird nur in Richtung der Geschwindigkeiten transportiert), dann folgt für das zu wählende Differenzenschema: für die konvektiven Glieder sind Rückwärtsdifferenzen zu wählen, wenn die entsprechende Geschwindigkeitskomponente im gewählten Koordinatensystem positiv ist, und Vorwärtsdifferenzen, wenn die entsprechende Geschwindigkeitskomponente negativ ist.

Eine der Differentialgleichung (2) entsprechende Differenzengleichung, die die verlangten Differenzen enthält und die Restriktionen für die Übergangswahrscheinlichkeiten erfüllt, ist die folgende Gleichung (17):

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta(x, y, t) - \vartheta(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} + \\ & + \left\{ \frac{\frac{u+|u|}{2} \vartheta(x, y, t) - \frac{u+|u|}{2} \vartheta(x-h, y, t)}{h} + \frac{\frac{u-|u|}{2} \vartheta(x+h, y, t) - \frac{u-|u|}{2} \vartheta(x, y, t)}{h} \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\frac{v+|v|}{2} \vartheta(x, y, t) - \frac{v+|v|}{2} \vartheta(x, y-h, t)}{h} + \frac{\frac{v-|v|}{2} \vartheta(x, y+h, t) - \frac{v-|v|}{2} \vartheta(x, y, t)}{h} \right\} = \\ & = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\vartheta(x+h, y, t) - 2\vartheta(x, y, t) + \vartheta(x-h, y, t)}{h^2} + \frac{\vartheta(x, y+h, t) - 2\vartheta(x, y, t) + \vartheta(x, y-h, t)}{h^2} \right) + \\ & + \frac{q}{\rho c_p} \end{aligned} \quad (17)$$

Löst man die Gleichung (17) nach der Temperatur am betrachteten Gitterpunkt  $(x, y, t)$  auf, dann erhält man

$$\begin{aligned}
 \vartheta(x, y, t) = & \vartheta(x, y, t - \Delta t) \cdot \frac{1}{1 + 4a \cdot \Delta t / h^2 + (|u| + |v|) \Delta t / h} + \\
 & + \vartheta(x+h, y, t) \cdot \frac{a \Delta t / h^2 + (|u| - u) \cdot \Delta t / (2h)}{1 + 4a \cdot \Delta t / h^2 + (|u| + |v|) \Delta t / h} + \\
 & + \vartheta(x-h, y, t) \cdot \frac{a \cdot \Delta t / h^2 + (|u| + u) \cdot \Delta t / (2h)}{1 + 4a \cdot \Delta t / h^2 + (|u| + |v|) \Delta t / h} + \\
 & + \vartheta(x, y+h, t) \cdot \frac{a \cdot \Delta t / h^2 + (|v| - v) \cdot \Delta t / (2h)}{1 + 4a \cdot \Delta t / h^2 + (|u| + |v|) \Delta t / h} + \\
 & + \vartheta(x, y-h, t) \cdot \frac{a \cdot \Delta t / h^2 + (|v| + v) \cdot \Delta t / (2h)}{1 + 4a \cdot \Delta t / h^2 + (|u| + |v|) \Delta t / h} + \\
 & + q \cdot \frac{\Delta t / (\rho c_p)}{1 + 4a \cdot \Delta t / h^2 + (|u| + |v|) \Delta t / h} \quad (18)
 \end{aligned}$$

mit  $a = \lambda / (\rho c_p)$ .

Die Koeffizienten der Temperaturen auf der rechten Seite der Gleichung (18) sind die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_i$ , die in dieser Form die Restriktionen

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum p_i = 1$$

in jedem Fall erfüllen. Dies ist hier für ein quadratisches Gitter in 2 Dimensionen gezeigt, doch kann man leicht nachweisen, daß man bei der Verwendung entsprechender Differenzen auch für ein nicht-äquidistantes Gitter in 3 Dimensionen Übergangswahrscheinlichkeiten erhält, die die Restriktionen erfüllen, solange man kartesische Koordinaten beibehält. Die Restriktionen für die Übergangswahrschein-

lichkeiten müssen also die Verwendung der Monte Carlo-Methode für die Lösung von Wärmeübergangsproblemen und von instationären Problemen nicht einschränken.

## 5.2 Aufgabenstellung und Lösung eines Wärmeübergangsproblems

Berechnet werden soll die Temperaturverteilung in einer stationären, hydrodynamisch voll ausgebildeten laminaren Rohrströmung bei einem Sprung in der Wandtemperatur. Die Stoffwerte sollen wieder als konstant vorausgesetzt werden, die Dissipation soll vernachlässigt werden. In Abb. 7 ist die Geometrie des Falles und das gewählte Koordinatensystem skizziert.

Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich auch für diesen Fall als exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichung:

$$u(r) = 2 \bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (19).$$

Die Geschwindigkeitskomponenten in radialer und azimuthaler Richtung sind also ebenso 0 wie die Ableitungen der axialen Geschwindigkeitskomponenten in axialer und azimuthaler Richtung. Aus Symmetriegründen ist die Ableitung der Temperatur in azimuthaler Richtung ebenfalls 0. Vernachlässigt man die axiale Wärmeleitung, setzt also

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \quad (20),$$

dann erhält man aus Gleichung (1) durch Ausschreiben in Zylinderkoordinaten und mit den genannten Voraussetzungen die zu lösende Differentialgleichung

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad (21).$$

Die Vernachlässigung der axialen Leitung (Ungleichung (20)) ist für die Lösung mit der Monte-Carlo-Methode nicht notwendig. Wegen der Gültigkeit der Ungleichung (20) ist sie aber zulässig und wird hier durchgeführt, um einen Vergleich mit den Ergebnissen Nusselts [5] zu ermöglichen, der dieses Problem durch eine Reihenentwicklung löste.

Als Randbedingung sei vorgegeben:

$$x \leq 0 : \vartheta(r) = \vartheta_0$$

$$x > 0 : \vartheta(R) = \vartheta_w > \vartheta_0$$

(Temperatursprung der Wandtemperatur bei  $x = 0$ )

Als Differenzengleichung, bereits aufgelöst nach der Temperatur am Punkte  $(x, r)$ , erhält man dann statt der Differentialgleichung (21):

$$\begin{aligned} \vartheta(x, r) = & \vartheta(x - \Delta x, r) \cdot \frac{u/\Delta x}{u/\Delta x + 2a/\Delta r^2} + \\ & + \vartheta(x, r + \Delta r) \cdot \frac{a/\Delta r^2 + a/(2r\Delta r)}{u/\Delta x + 2a/\Delta r^2} + \\ & + \vartheta(x, r - \Delta r) \cdot \frac{a/\Delta r^2 - a/(2r\Delta r)}{u/\Delta x + 2a/\Delta r^2} \end{aligned} \quad (22).$$

$$\text{mit } a = \lambda / (\rho \cdot c_p)$$

Durch die Verwendung von Zylinderkoordinaten tritt im Zähler der Wahrscheinlichkeiten  $p_2$  und  $p_3$  ein Zusatzglied auf, so daß man hier die Frage stellen muß, ob die Restriktionen für die Übergangswahrscheinlichkeiten noch erfüllt sind. Man sieht sofort, daß die Summe der 3 Wahrscheinlichkeiten gerade eins ergibt. Die Restriktion

$$0 \leq p_i \leq 1$$

kann man erfüllen, wenn man die Aufteilung des Radius  $R$  in gleiche Stücke  $\Delta r$  so vornimmt, daß der innerste Punkt, dessen Temperatur berechnet wird, gerade an  $r = \Delta r/2$  liegt, wie dies in Abb. 8 skizziert ist.



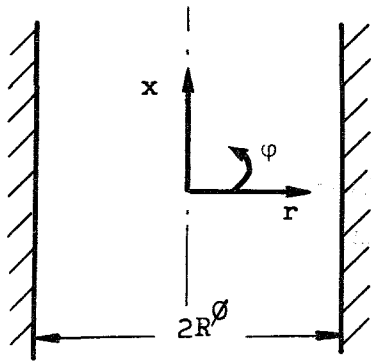


Abb. 7

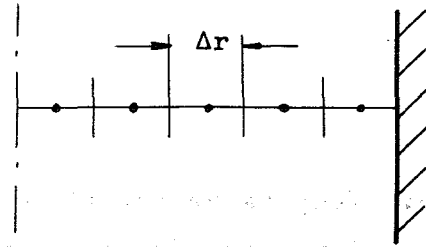
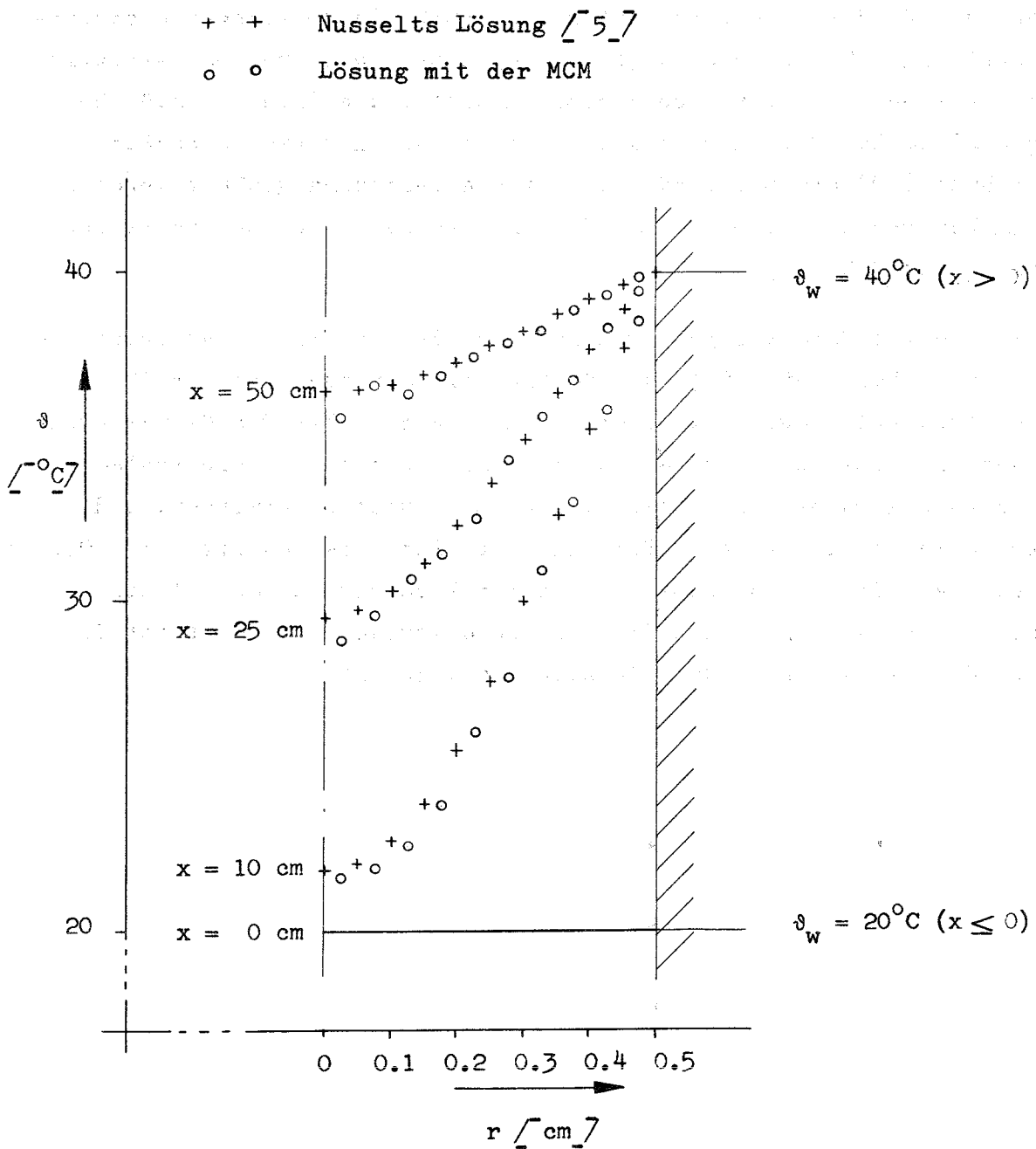


Abb. 8

Dann ist für den innersten Gitterpunkt auch die Übergangswahrscheinlichkeit  $p_3 = 0$ , wie dies wegen der Symmetrie des Problems verlangt wird. Bei der gewählten geometrischen Aufteilung (Abb. 8) muß für den unmittelbar der Wand benachbarten Gitterpunkt ein gegenüber Gleichung (22) etwas verändertes Differenzenschema gewählt werden, in dem berücksichtigt wird, daß die Entfernung von diesem Punkt zur Wand nur  $\Delta r/2$  beträgt.

In Abb. 9 ist Nusselts Lösung durch eine Reihenentwicklung verglichen mit einer Lösung mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode, bei der für jeden Punkt 1000 Zufallswege simuliert wurden. Als strömendes Medium wurde Wasser bei einer Reynoldszahl  $Re = 50$  angenommen. Für die Monte-Carlo-Lösung wurde ein Gitternetz von 500 Punkten verwendet, und zwar 10 Punkte in radialer Richtung mit einer Maschenweite  $\Delta r = 0,05$  cm, in axialer Richtung 50 Punkte mit einer Maschenweite  $\Delta x = 1$  cm. Trotz der relativ geringen Zahl von Zufallswegen pro Punkt ist die Übereinstimmung der beiden Lösungen ziemlich gut.

Abb. 9: Temperaturverteilung in einer stationären, laminaren Rohrströmung nach einem Sprung in der Wandtemperatur



6. Zur Behandlung von Wärmeübergangsproblemen bei turbulenten Strömungen und bei veränderlichen Stoffwerten mit der Monte Carlo-Methode

6.1 Die Behandlung turbulenter Strömungen mit konstanten Stoffwerten

Führt man für quasistationäre turbulente Strömungen mit stationären zeitlichen Mittelwerten  $\bar{\vartheta}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  die Definitionen

$$\vartheta(x, y, t) = \bar{\vartheta}(x, y) + \vartheta'(x, y, t),$$

$$u(x, y, t) = \bar{u}(x, y) + u'(x, y, t),$$

$$v(x, y, t) = \bar{v}(x, y) + v'(x, y, t)$$

ein, in denen  $\vartheta'$ ,  $u'$ ,  $v'$  die turbulenten Fluktuationen um den zeitlichen Mittelwert bedeuten, und setzt man diese Definitionen in Gleichung (2) ein, dann erhält man nach zeitlicher Mittelung die Gleichung

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{u' \vartheta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' \vartheta'}}{\partial y} \right) + \frac{q}{\rho c_p} \quad (23),$$

in der die Ableitungen der Korrelationen  $\overline{u' \vartheta'}$  und  $\overline{v' \vartheta'}$  als zusätzliche Glieder auftreten.

Man kann nun zur Lösung von Gleichung (23) scheinbare turbulente Wärmeleitfähigkeiten einführen und diese zur molekularen Leitfähigkeit addieren. Sind diese turbulenten Leitfähigkeiten ortsabhängig bekannt und außerdem auch die Geschwindigkeiten, dann steht der Anwendung der Monte Carlo-Methode an sich nichts im Wege. Die Verteilung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten ist ja für viele turbulente Strömungen bekannt, das Problem ist die Kenntnis der scheinbaren turbulenten Wärmeleitfähigkeit im ganzen untersuchten Strömungsfeld.

Für turbulente Strömungen mit konstanten Stoffwerten könnte die Monte Carlo-Methode daher an sich angewendet werden, die Anwendung scheitert allenfalls an der fehlenden Detailkenntnis der turbulenten Austauschgrößen, dies gilt aber ebenso für andere Lösungsmethoden.

## 6.2 Die Behandlung von Wärmeübergangsproblemen bei veränderlichen Stoffwerten

Die Annahme konstanter Stoffwerte des strömenden Fluids ist für sehr viele nichtisotherme Strömungen nicht zulässig, in der Reaktortechnik insbesondere dann nicht, wenn die Aufheizspanne des Kühlmittels im Reaktor groß wird, wie dies - außer bei den Leichtwasserreaktoren - bei fast allen Reaktortypen der Fall ist. Wenn aber die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte berücksichtigt werden muß, dann ergeben sich die folgenden Konsequenzen:

- Da die Stoffwerte für die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten benötigt werden (vergleiche z.B. Gleichung (18)), werden auch diese Wahrscheinlichkeiten temperaturabhängig, d.h. sie werden eine Funktion der gesuchten Lösung. In allen anderen dem Autor bekannten Anwendungen der Monte-Carlo-Methode für die Lösung partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung sind die Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig von den Werten der Lösung.
- Auch die Geschwindigkeiten werden für die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten gebraucht. Das bedeutet, daß die Differentialgleichung für das Geschwindigkeitsfeld (Navier-Stokes-Gleichung) und die Differentialgleichung für das Temperaturfeld (Energiegleichung) nun simultan gelöst werden müssen.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten müssen aber in allen Gitterpunkten vor dem Beginn der Simulation von Zufallswegen bekannt sein. Für den Fall temperaturabhängiger Stoffwerte geht also der größte Vorteil der Monte-Carlo-Methode verloren: die Temperaturen aller Gitterpunkte müssen berechnet werden, man kann sich nicht mehr auf die Berechnung nur einzelner Punkte beschränken. Darüber hinaus wird ein Iterationsprozeß notwendig: im ersten Schritt werden Übergangswahrscheinlichkeiten z.B. mit einer geschätzten Temperaturverteilung berechnet, dann wird mit der Monte Carlo-Methode eine neue Temperaturverteilung berechnet, aus der sich dann verbesserte Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben usf..

Eine grobe Abschätzung der Rechenzeit für diesen Iterationsprozeß, wie sie in [6] für ein Beispiel angegeben ist, zeigt, daß man durch die Verwendung der Monte-Carlo-Methode dann keinen Vorteil mehr gegenüber anderen Lösungsmethoden zu erwarten hat. Man muß den Schluß ziehen, daß die Monte-Carlo-Methode für die Behandlung von Wärmeübergangsproblemen mit temperaturabhängigen Stoffwerten nicht geeignet ist.



## 7. Nomenklatur

a	$\text{m}^2/\text{s}$	Temperaturleitfähigkeit ( $a = \lambda / (\rho \cdot c_p)$ )
b	$\text{m}^3 \cdot \text{K}/\text{W}$	Koeffizient (vgl. Gleichung (3))
$c_p$	$\text{W} \cdot \text{s}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	Spezifische Wärme
d	m	Bohrungsdurchmesser (vgl. Abb. 6)
h	m	Gitter-Maschenweite
$M_n$	l	Zahl der Schritte des n-ten Zufallsweges
N	l	Zahl der Zufallswege zur Berechnung einer Temperatur
p	m	Mittenabstand (vgl. Abb. 6)
$p_i$	l	Übergangswahrscheinlichkeit ( $i = 0, 1, 2 \dots$ )
q	$\text{W}/\text{m}^3$	Wärmequellendichte
r	m	Radius bzw. radiale Koordinate (Zylinder-Koord.)
R	m	Rohrradius (vgl. Abb. 7)
s	m	Halbe Breite eines ebenen Spalts (vgl. Abb. 3)
t	s	Zeit-Koordinate
u	m/s	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
v	m/s	Geschwindigkeitskomponente in y- bzw. r-Richtung
x	m	Längen-Koordinate (kart. oder Zylinder-Koord.)
y	m	Längen-Koordinate (kart. Koord.)
z	l	Zufallszahl
$\eta$	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$	Dynamische Zähigkeit
$\vartheta$	K, °C	Temperatur
$\lambda$	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$	Wärmeleitfähigkeit
$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte
$\varphi$	l	Winkel bzw. Winkel-Koordinate (Zylinder-Koord.)

## 8. Literatur

- [1] YU.A. SHREIDER (Hrsg.):  
The Monte Carlo Method.  
Pergamon Press, Oxford 1966
- [2] H. SCHLICHTING:  
Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung  
in einer laminaren Strömung.  
Z. angew. Math. Mech. 31 (1951) 78.
- [3] A. HAJI-SHEIKH, E.M. SPARROW:  
The Solution of Heat Conduction Problems by Probability  
Methods.  
J. Heat Transfer, Trans. ASME, Ser. C, 89 (1967) 121.
- [4] G.M. BROWN:  
Monte Carlo Methods, in: E.F. BECKENBACH (Hrsg.):  
Modern Mathematics for the Engineer.  
McGraw-Hill, New York, 1956.
- [5] W. NUSSELT:  
Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge.  
Z. VDI 54 (1910) 1154.
- [6] D. KIRSCH:  
The Solution of Heat Convection Problems by the Monte  
Carlo Method.  
KFK 1315 (1970)