

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM  
KARLSRUHE**

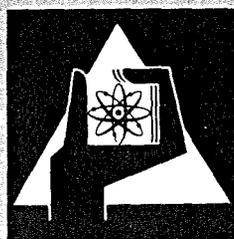
Dezember 1972

KFK 1724

Institut für Reaktorentwicklung  
Projekt Schneller Brüter

**Berechnung des mechanischen Verhaltens von Brennelementkästen  
bei Kriechen und Schwellen des Materials**

R. Liebe



**GESELLSCHAFT  
FÜR  
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

**KARLSRUHE**

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.  
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 1724

Institut für Reaktorentwicklung

Projekt Schneller Brüter

Berechnung des mechanischen Verhaltens von  
Brennelementkästen bei Kriechen und Schwel-  
len des Materials

---

von

R. Liebe

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe



## Zusammenfassung

Kriechen und Schwellen des Strukturmaterials bestimmen das mechanische Verhalten der Brennelement(BE-)Kästen in Schnellbrütern. Die sichere und wirtschaftliche Auslegung des Cores sowie die Beschreibung seines Langzeitverhaltens erfordern daher insbesondere die Lösung des Problems der ebenen Biegung eines einzelnen BE infolge thermischer, Kriech- und Schwelldehnung. Es wird ein Näherungsverfahren angegeben, mit dem man den örtlichen und zeitlichen Verlauf der Verformungen, Kräfte und Spannungen am mehrfach gelagerten BE unter Reaktorbedingungen berechnen kann. Das Verfahren beruht auf der klassischen Balkentheorie und benutzt die Matrizenmethoden der Elastomechanik innerhalb jedes Zeitinkrements. Das Stoffgesetz und der Verlauf von Biegesteifigkeit, Temperatur und Neutronenfluß können beliebig sein. Aufbau und Benutzung eines entsprechenden Rechenprogramms werden beschrieben, zur Illustration der Anwendung dienen Festigkeitsanalysen des SNR-Brennelements. Die Resultate zeigen in Übereinstimmung mit anderen Arbeiten u. a. die besondere Bedeutung des Materialkriechens und Schwellens.

## Mechanical Performance Analysis of a Subassembly Box Subject to Creep and Swelling

### Abstract

Thermal bowing as well as irradiation induced material creep and swelling determine the mechanical performance of fast breeder reactor subassemblies. Therefore the safe and economic core design requires suitable analytical methods. In particular the plane bending problem of a single subassembly box is treated and a simple incremental method is described allowing to calculate the time dependent stresses, forces and deflections due to thermal, creep and swelling strains. The method is based on the beam theory and usual matrix methods of elastomechanics are employed to find the incremental response during each time step with given initial strains. The general analysis allows for arbitrary creep and swelling laws as well as for multiple supports, a variable bending stiffness, temperature and neutron flux density distribution. Description and application is given of a computer program. Some results for SNR-type fuel elements indicate the significance and the competing effects of in-pile creep and swelling.

## Inhalt

	<u>Seite</u>
1. Zusammenfassung und Schlußfolgerung	1
2. Einführung und Problemstellung	4
3. Annahmen	7
3.1 Tabellarische Übersicht	7
3.2 Erläuterung und Begründung	8
4. Lösungsverfahren	11
4.1 Allgemeines	11
4.2 Das elastische System mit Zusatzdeformationen	12
4.2.1 Diskretisierung im Raum	12
4.2.2 Gleichgewicht, lineares Stoffverhalten	13
4.2.3 Verträglichkeit	18
4.3 Das nichtelastische System	24
4.3.1 Diskretisierung in der Zeit	24
4.3.2 Inkrement der Krümmungen und Deformationen am Feld	26
4.3.3 Dehnungen und Spannungen	28
4.4 Rechenablauf	33
5. Rechenprogramm und Anwendung	35
5.1 Programmbeschreibung	35
5.2 Anwendung	45
5.2.1 Thermisches Kriechen eines dreifach gelagerten Balkens	45
5.2.2 Betriebsverhalten von SNR-Brennelementkästen	47
Literatur	49
Nomenklatur	51
Abbildungen	54



## 1. Zusammenfassung und Schlußfolgerung

Der Verformungs- und Spannungszustand in Bauteilen schneller Brutreaktoren wird in starkem Maße vom Kriechen und Schwellen der Strukturwerkstoffe bestimmt. Aus diesem Grunde reichen die Methoden der linearen Elastizitätstheorie allein nicht mehr aus, um das Core sicher und wirtschaftlich auszulegen und das mechanische Betriebsverhalten der Brennelementkästen zu beschreiben.

Es wird das Problem der Brennelement-Verbiegung im Coreverband infolge thermischer, Kriech- und Schwelldehnung behandelt. Für die festigkeitsmäßige Auslegung der Brennelementkästen (BE-Kästen) und die Beschreibung ihres Langzeitverhaltens unter Reaktorbedingungen genügt es, sich auf die Berechnung der radial erfolgenden Durchbiegungen und Kräfte zu beschränken. Das zentrale Problem ist daher die ebene Kriechbiegung eines einzelnen, statisch unbestimmt gelagerten BE-Kastens, der durch behinderte thermische und Schwelldehnung beansprucht wird. Eine geschlossene Lösung dieses allgemeinen Problems ist jedoch nicht möglich, einmal wegen des nicht-linearen Stoffgesetzes mit temperaturabhängigen Parametern, zum anderen wegen der ortsabhängigen BE-Biegesteifigkeit, Temperatur und Neutronenflußdichte.

Unter folgenden Annahmen wird ein Näherungsverfahren zur Lösung des skizzierten Problems beschrieben:

- Der Kasten wird als mehrfach gestützter Balken mit abschnittsweise konstanter Biegesteifigkeit angesehen.
- Die Verteilung der Temperatur und Neutronenflußdichte ist bereichsweise linear, und es wird der Fall der ebenen Biegung des axial unbehinderten Kastens untersucht.
- Es gilt die Additivität von thermischen, Kriech- und Schwelldehnungen im Stoffgesetz, außerdem wird bei Zug- und Druckspannung das gleiche Kriechgesetz angenommen.

Das angegebene indirekte Verfahren beruht auf der Methode der schrittweisen linear-elastischen Approximation. Man kann nämlich bei geeigneter örtlicher und zeitlicher Diskretisierung das nichtlineare Kriechbiegeproblem auf eine Reihe linear-elastischer Probleme mit Zusatzverzerrungen zurückführen. Zu diesem Zweck wird das BE in endlich viele finite Balkenfelder unterteilt, die sich während eines kleinen Zeitinkrements unter konstanter Spannung zunächst unbehindert verformen. Durch Anbringen passender elastischer Zusatzspannungen an allen Schnittflächen werden diese Deformationsinkremente kompatibel gemacht. Dieses inkrementelle Vorgehen in der Zeit ermöglicht die sukzessive Gewinnung einer Näherungslösung. Zur flexiblen Formulierung und computergerechten Behandlung des diskretisierten Problems werden die bekannten Matrizenmethoden der Elastomechanik herangezogen. Das Ergebnis der Rechnung ist schließlich der örtliche und zeitliche Verlauf der BE-Deformationen, Lagerkräfte und Spannungen. Das sehr allgemeine Lösungsverfahren ist durch folgende Möglichkeiten gekennzeichnet:

- Zulassung beliebiger Kriech- und Schwellgesetze mit temperaturabhängigen Stoffparametern.
- Erfassung beliebiger Axialverläufe der BE-Biegesteifigkeit, des Niveaus und Gradientens der Temperatur und Neutronenflußdichte im BE.
- Berücksichtigung mehrerer Lager, deren Position fest oder zeitlich vorgegeben sein kann.
- Möglichkeit zusätzlicher Belastung durch äußere Einzellasten und/oder durch aufgeprägte Deformationen (z. B. Lagerbewegungen).

Es wird das FORTRAN-IV Rechenprogramm "Brennelementkasten bei Kriechen und Schwellen" beschrieben, mit dem das Betriebsverhalten eines einzelnen, hexagonalen BE-Kastens unter vorgegebenen Reaktorbedingungen berechnet werden kann. Außerdem wird die Ein- und Ausgabe der z. Zt. vorliegenden und getesteten Programmversion (März 1972) beschrieben und dem Benutzer eine Anleitung gegeben.

Zur Anwendung des Lösungsverfahrens und Illustration der Programm Benutzung werden abschließend zwei Beispiele angeführt:

- Thermisches Kriechen eines dreifach gelagerten Balkens
- Betriebsverhalten des SNR-Brennelementkastens.

Typische Ergebnisse solcher Rechnungen sind die axiale Verteilung und Geschichte der BE-Durchbiegungen sowie der u. U. sehr hohen Lagerkräfte in den Verspannungsebenen. Außerdem bekommt man Aussagen über die örtliche Verteilung und zeitliche Umlagerung der Biegespannungen sowie über permanente Kriechdehnungen, mit denen am Ende der Standzeit zu rechnen ist.

Aus den bisherigen BE-Untersuchungen ergibt sich in Übereinstimmung mit amerikanischen Arbeiten folgendes allgemeine Resultat:

- Bei der Festigkeits- und Betriebsanalyse von Schnellbrüter-BEs ist die Berücksichtigung des Material-Kriechens und Schwellens unbedingt erforderlich.
- Das Langzeitverhalten des BE wird primär von den konkurrierenden Effekten des Schwellens (Spannungsaufbau) einerseits und des strahlungsinduzierten Kriechens (Spannungsabbau) andererseits bestimmt.
- Das in-pile Kriechen führt ganz allgemein zu einer beachtlichen Reduktion der Lagerkräfte und Biegespannungen infolge thermischer und Schwelldehnung. Das thermische Kriechen hingegen hat in den üblichen Temperaturbereichen nur unbedeutenden Einfluß.

Der modulare Aufbau und die kurzen Rechenzeiten des Programms "BEKS" gestatten umfangreiche Parameterstudien bereits am einzelnen BE-Kasten zur optimalen Abstimmung der Kasten geometrie, der Lage aller Verspannungsebenen sowie des Temperaturverlaufs und verschiedener Werkstoffeigenschaften. Darüber hinaus ist dieses relativ kleine Programm auch als Unterprogramm "BE-Langzeit-Strukturverhalten" für größere Coreprogramme geeignet. Es steht damit auch ein geeignetes Modell "Strukturverhalten" als "Feedback" für Reaktivitätsrechnungen (Bowling-Koeffizienten) bei Betriebs- und Sicherheitsanalysen des Reaktorcores zur Verfügung.

## 2. Einführung und Problemstellung

Bei Na-gekühlten, schnellen Brutreaktoren sind die Strukturmaterialien im Corebereich extremen Betriebsbedingungen ausgesetzt. Bei der festigkeitsmäßigen Auslegung der Reaktorkomponenten treten besondere Probleme dadurch auf, daß sich die mechanischen Eigenschaften der verwendeten Werkstoffe unter dem Einfluß hoher Temperaturen und Bestrahlungsdosen mit der Zeit stark ändern. Durch das sogenannte Schwellen und Kriechen des Materials wird das Stoffgesetz komplizierter [1], [2], [3], so daß die mathematische Behandlung der Festigkeitsprobleme erschwert wird. Insbesondere können z. B. die Langzeit-Deformationen, Kräfte und Spannungen der Bauteile nicht mehr nach der linearen Elastizitätstheorie berechnet werden. Der Ingenieur braucht andere, den besonderen Erfordernissen angepaßte Rechenverfahren zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens der Corestruktur. Entsprechende Rechenmethoden und Computerprogramme sind zur Zeit in Entwicklung, allerdings beschränken sich die meisten Autoren auf die Berechnung der rein elastischen Deformationen und Kräfte am einzelnen Brennelementkasten bzw. im gesamten Core [4], [5], [6], [7]. Für den speziellen Fall eines dreifach gelagerten Balkens konstanter Biegesteifigkeit wird thermisches Kriechen, z. B. in [8] und strahlungsinduziertes Materialkriechen in [9], allerdings ohne Temperaturabhängigkeit der Kriechparameter, behandelt.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das allgemeine Problem der Kriechbiegung statisch unbestimmter Balkensysteme. Es wird ein Verfahren angegeben, mit dem man den zeitlichen und örtlichen Verlauf der Deformationen, Kräfte und Spannungen am einzelnen, mehrfach gelagerten Brennelementkasten im Verlauf seiner Standzeit berechnen kann. Nach Kenntnis des Autors wird dieses im folgenden skizzierte allgemeine Problem nur in [10] behandelt.

Abb. 1 zeigt in vereinfachter Weise typische Randverläufe der Temperatur und Neutronenflußdichte am einzelnen Brennelement. Die unsymmetrische Erzeugung und Abfuhr von Wärme im Brennele-

mentbündel bewirkt Temperaturdifferenzen über den Querschnitt des BE-Kasten, der das Bündel umfaßt. Die unmittelbare Folge davon ist eine thermoelastische Verbiegung des langen Kastens. Darüber hinaus wird durch die Unsymmetrie von Temperatur und Neutronenfluß-Profil verschieden starkes Materialschwellen [1] über dem Kastenquerschnitt hervorgerufen. Zu der thermischen Verbiegung kommt daher noch eine von der Neutronendosis und damit von der Zeit abhängige Schwellverbiegung hinzu. Die übliche Lagerung des schlanken, meist hexagonalen Kastens in mehreren Verspannungsebenen begrenzt zwar die Durchbiegungen, hat andererseits aber u. U. hohe Biegespannungen und Lagerkräfte in dem statisch unbestimmten System zur Folge. Außerdem liegen die Betriebstemperaturen und Neutronenflußdichten zumindest im Corebereich so hoch, daß infolge thermischen und/oder strahlungsinduzierten Kriechens [2], [3] die Spannungen abgebaut werden. Das komplexe Zusammenwirken dieser drei Mechanismen - Wärmedehnung, Schwellen und Kriechen des Materials - bestimmt das mechanische Verhalten der miteinander verspannten BE-Kästen. Man muß daher für eine sichere und wirtschaftliche Coreauslegung sowie für die Erfassung des Betriebs-, Umlade- und des Störverhaltens ein Rechenverfahren haben, das den Brennelementverband im Core beschreibt. Eine wichtige Teilaufgabe auf dem Wege zu einer solchen Erfassung des gesamten Cores besteht darin, das mechanische Verhalten eines Einzelkastens nicht nur für spezielle Fälle, sondern möglichst flexibel und allgemein zu untersuchen. Hier wird ein entsprechendes Rechenverfahren für den Fall der ebenen Kriechverbiegung eines Einzel-BE beschrieben, an das etwa die folgenden Hauptanforderungen zu stellen sind:

1. Zulassung weitgehend beliebiger Kriech- und Schwellgesetze mit temperaturabhängigen Kriech- und Schwellparametern.
2. Erfassung beliebiger axialer Verläufe von BE-Biegesteifigkeit sowie vom Niveau und Gradienten der Temperatur und Neutronenflußdichte am Kasten.
3. Berücksichtigung mehrerer momentenfreier Lager, deren Positionen u. U. als Zeitfunktionen vorgebar sein sol-

len. Dadurch kann im Prinzip die Kopplung, d. h. die mechanische Wechselwirkung mehrerer paralleler BE's erfaßt werden.

4. Maximale Flexibilität und Einfachheit der Methode, damit ein entsprechendes Einzel-BE-Rechenprogramm auch Teil eines großen Coreprogramms bilden kann, ohne daß zu hohe Rechenzeiten und extremer Speicherplatzbedarf zu erwarten sind.

Im nächsten Abschnitt werden zunächst die Annahmen erläutert, die der Rechenmethode zugrunde liegen.

### 3. Annahmen

#### 3.1 Tabellarische Übersicht

A) Annahmen bezüglich der Geometrie:

A1) Gerader, mehrfach gestützter, schlanker Balken;  
Wandstärke beim Hohlquerschnitt nicht zu dünn;

A2) Gültigkeit der klassischen Balkentheorie insbesondere der Bernoullischen Hypothese (d. h. Ebenbleiben der Querschnitte und damit lineare Verteilung der Gesamtdehnungen über dem Querschnitt);  
keine Querschnittsdeformationen durch Abplattung oder Verwölbung;

A3) Abschnittsweise konstante Biegesteifigkeit;  
Vernachlässigung der versteifenden bzw. stützenden Wirkung des pin-Bündels bzw. der Abstandshalter im BE-Kasten;

B) Annahmen bezüglich der Belastung:

B1) Beschränkung auf ebene Biegung und damit zeitliche Konstanz und Zusammenfallen von Belastungsebene (Temperatur- und Neutronenflußdichte-Gradient) und Deformationsebene;

B2) Bereichsweise lineare Temperatur- und Neutronenflußverteilung (d. h. keine Ausbildung von Eigenspannungsfeldern), die sich mit der Zeit nicht zu schnell ändern;

B3) Zusätzliche Belastung durch eingeprägte Einzellasten (Kräfte und Biegemomente);  
Axialkräfte stets Null;

B4) Gegebenenfalls Zusatzbelastung durch aufgeprägte transversale Verschiebung der Lagerpositionen;

C) Annahmen bezüglich des Stoffverhaltens:

C1) Additivität von thermischen, Kriech- und Schwell-Dehnungen;

C2) Temperaturabhängigkeit der Kriech- und Schwellparameter;

C3) Gleichheit der Kriechgesetze bei Zug- und Druckspannung;

### 3.2 Erläuterung und Begründung

Bei der hier untersuchten Kriechbiegung unter langsam veränderlicher Last (Temperatur-, Fluß-Schwankungen, Schwellen) können Massenträgheitseffekte vernachlässigt werden. Der Ablauf des quasistatischen Vorganges wird durch folgende Gesetze bestimmt:

- Gleichgewicht
- Stoffgesetz
- Verträglichkeit.

Bereits bei der einfachen ebenen Balkenbiegung führen diese drei Aussagen mathematisch auf zwei gekoppelte Integrodifferentialgleichungen. Zusammen mit den gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen sind damit die beiden Unbekannten bestimmt: z. B. die Durchbiegung und Biegespannung als Funktion von Ort und Zeit. Eine geschlossene Lösung des allgemeinen Problems ist jedoch nicht möglich, einmal wegen des nichtlinearen Stoffgesetzes mit temperatur-, d. h. ortsabhängigen Materialeigenschaften, zum anderen wegen der Ortsabhängigkeit der Balkenbiegesteifigkeit. Aus diesem Grunde ist man in der Praxis auf Näherungsverfahren angewiesen, d. h. es sind vereinfachende Annahmen zu treffen. Die hier speziell getroffenen Annahmen sollen nun in der Reihenfolge der Übersicht 3.1 näher kommentiert werden.

Da es sich bei den üblichen BE-Konstruktionen um gerade sowie schlanke ( $H/L \ll 0.1$ ), meist hexagonale Kästen nicht zu dünner Wandstärke handelt, erscheinen die Annahmen A1 und A2 gerechtfertigt. Konservative Rechnungen zeigen, daß Querschnittsdeformationen bei den vorliegenden Geometrien ( $D/H \geq 0.02$ ) sowie den zu erwartenden Kräften in den Verspannungsebenen klein bleiben gegen die Wandstärke  $D$ . Der in der Balkentheorie übliche Ersatz der Krümmung durch die zweite Ableitung der Biegelinie ist hier ebenfalls gerechtfertigt, da die Durchbiegungen klein gegenüber der Stützweite  $L$  bleiben. Die Annahme A3 bedeutet keine prinzipielle Einschränkung, da ein beliebiger Axialverlauf der Biegesteifigkeit stets hinreichend genau dar-

stellbar ist durch axial variierende Grob- und Feineinteilung in Unterabschnitte konstanter Biegesteifigkeit. Darüber hinaus wird die versteifende Wirkung des pin-Bündels und die Wechselwirkung dieses Bündels mit der Kastenwand über die Abstandshalter vernachlässigt. Eine Überschlagsrechnung zeigt, daß die Steifigkeit des Bündels allein ca. **0.15** % der Kastensteifigkeit ausmacht; über die Wechselwirkung (Reibung) zwischen pins, Abstandshaltern und der Kastenwand weiß man jedoch wenig, so daß die konservative Annahme A3 vernünftig erscheint.

Das mehrfach gelagerte BE wird je nach seiner Position im Core durch komplizierte Temperatur ( $T$ )- und Neutronendichte ( $\phi$ )-Felder in den Kastenquerschnitten beansprucht. Das kann z. B. in der Nähe von Absorberstäben zu komplexen räumlichen, d. h. nicht mehr ebenen BE-Verbiegungen und lokal zu Eigenspannungsfeldern führen, so daß die Ermittlung von Lokalspannungen 3-dimensionale Kriechrechnungen, etwa nach [11] mit entsprechendem Aufwand erfordern würde. Für die Coreauslegung und die Berechnung des mechanischen BE-Betriebsverhaltens interessieren jedoch primär die ebenen, radial erfolgenden Durchbiegungen und Kräfte am BE (in  $rZ$ -Ebenen der Abb. 1), die von den globalen, rotationssymmetrischen  $T$ - und  $\phi$ -Feldern im Core verursacht werden. Daher ist die Annahme ebener Biegung B1, sowie eine bereichsweise Vereinfachung der Temperatur- und Flußverläufe B2 hier zulässig und auch üblich [5], [10]. Die Abb. 2 verdeutlicht Einzelheiten zur Annahme B2. Die abschnittsweise axiale Linearisierung von  $T, \phi$  führt bei entsprechend angepaßter Teilung des BE in axiale Unterabschnitte (Länge  $l_j$ ) nur zu geringfügigen Fehlern. Die Annahme linearer  $T$ - und  $\phi$ -Profile in allen Querschnitten  $\xi = \text{const}$  des Abschnittes (Linearinterpolation zwischen den Randgrößen) ist gerechtfertigt, weil die gesuchten Durchbiegungen und Lagerkräfte in erster Linie von integralen Querschnittsgrößen, der Balkenkrümmung abhängen. Eine hinreichend allgemeine Behandlung der ebenen BE-Kriechbiegung erfordert auch die Zulassung von aufgeprägten Einzellasten (Annahme B3) und/oder Lagerverschiebungen (Annahme B4). Hingegen kann Kräftefreiheit in axialer Richtung angenom-

men werden, denn die Axialspannungen infolge Druckverlust des Kühlmittels sind wesentlich kleiner als die Biegespannungen durch thermische Ausdehnung und Schwellen. Die im nächsten Abschnitt angegebene Rechenmethode läßt aufgeprägte Einzelkräfte und Lagerverschiebungen quer zum BE zu, so daß man auf dieser Basis auch die mechanische Wechselwirkung mehrerer paralleler BE's in einer Ebene beschreiben kann.

Für die Anwendung des beschriebenen Lösungsverfahrens ist das nichtlineare Materialverhalten unter der kombinierten Wirkung von Biegespannung  $S$ , Temperatur  $T$  und Neutronenflußdichte  $\phi$  als bekannt vorausgesetzt. Den Rechnungen liegt insbesondere der folgende inkrementelle Zusammenhang zwischen Gesamtdehnung  $e$  und Spannung  $S$  als Stoffgesetz zugrunde:

$$\Delta e = \Delta e^e + \Delta e^{th} + \Delta e^s + \Delta e^{c1} + \Delta e^{c2}$$

Elastisches	Dehnungs-	$\Delta e^e = \frac{\Delta s}{E}$	
	inkrement		
Thermisches	"	$\Delta e^{th} = \alpha \Delta (T - T_0)$	(1)
Schwell	"	$\Delta e^s = f^s(T, \phi t) \Delta t$	
Kriech(1)	"	$\Delta e^{c1} = f^{c1}(s, T) \Delta t$	
Kriech(2)	"	$\Delta e^{c2} = f^{c2}(s, \phi, T) \Delta t$	

Es werden demnach die üblichen Annahmen C1 und C3 gemacht. Im Übrigen können die Kriech- und Schwelldehnungsanteile weitgehend beliebige Funktionen von den Lokalwerten der Spannung  $S$  Flußdichte  $\phi$  (bzw. Dosis  $\phi t$ ) und Temperatur  $T$  sein. Der Anteil  $\Delta e^{c2}$  infolge von strahlungsinduziertem oder in-pile Kriechen des Kastenmaterials ist nach [1] etwa linear von  $S$  abhängig, während  $\Delta e^{c1}$  infolge von thermischem Kriechen im allgemeinen stark nichtlinear von der Spannung abhängt [3].

Nach der Beschreibung der Annahmen und Voraussetzungen wird im folgenden Abschnitt die Lösungsmethode und der Gang der Rechnung beschrieben.

#### 4. Lösungsverfahren

##### 4.1 Allgemeines

Das Wesentliche des hier angegebenen Näherungsverfahrens besteht darin, durch folgenden Gedankengang das Orts-Zeit-Problem zu vereinfachen: Zunächst sei der Zustand des BE-Kastens zur Zeit  $t$  durch die

Biegespannungen	$s$
Gesamtdehnungen	$e$
Biegelinie	$w$
Lagerkräfte	$x$

eindeutig infolge von vorgegebenen Temperaturen  $T$  und Flüssen  $\phi$  unter bestimmten Randbedingungen bekannt. Es ist zweckmäßig, sich das Kontinuum jetzt in einzelne Teile zerschnitten zu denken. An dem Beanspruchungszustand  $(s, e, w, x)$  hat sich inzwischen nichts geändert. Das System wird nun zu einem späteren Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  betrachtet, d. h. nachdem Temperaturänderungen, Kriechen und Schwellen während  $\Delta t$  auf die einzelnen Teile eingewirkt haben. Dadurch haben sich die freien Teile einzeln deformiert, d. h. es sind Dehnungsinkremente  $\Delta e^I$  eingetreten. Nimmt man an, daß sich die Spannungen  $s$  während des kleinen Intervalls  $\Delta t$  nicht ändern, kann man diese  $\Delta e^I$  über das Stoffgesetz (1) näherungsweise berechnen. Am Ende von  $\Delta t$  passen die einzelnen Teile jedoch nicht mehr lückenlos zusammen, denn die  $\Delta e^I$  sind im allgemeinen nicht verträglich. Die Aufgabe besteht jetzt darin, derartige Zusatzspannungen  $\Delta s^Z$  an den Schnittflächen anzubringen, daß die daraus resultierenden elastischen Dehnungen  $\Delta e^Z$  die Gesamtdehnungen  $\Delta e = \Delta e^Z + \Delta e^I$  verträglich machen. Die Bestimmung der  $\Delta s^Z$  aus dieser Kompatibilitätsforderung läuft darauf hinaus, das elastische Verhalten eines Systems mit vorgegebenen Zusatzdeformationen bzw. Dehnungen  $\Delta e^I$  zu berechnen. Für die Lösung dieses Problems stehen aber die üblichen Methoden der Elastostatik zur Verfügung. Damit ist gezeigt, wie man unter vereinfachenden Annahmen die orts- und zeitabhängige Kriechbiegung auf eine Reihe von rein ortsabhängigen linear-elastischen Problemen mit Zusatzver-

zerrungen zurückführen kann. Das zeitlich inkrementelle Vorgehen in endlichen, kleinen Intervallen  $\Delta t$  ermöglicht somit eine Näherungslösung durch sukzessive Berechnung und Akkumulation linear-elastischer Teillösungen. Einzelheiten der Rechenmethode werden in den nächsten Abschnitten beschrieben.

#### 4.2 Das elastische System mit Zusatzdeformationen

Da die Berechnung eines statisch unbestimmten elastischen Systems mit Zusatzdeformationen in jedem Zeitschritt mindestens einmal erfolgen muß, ist es zur häufigen Lösung dieses Ortsproblems nun sehr vorteilhaft, die flexiblen und hier besonders geeigneten Matrizenmethoden der Elastomechanik anzuwenden. Hinzu kommt, daß die kompakte Matrixschreibweise besonders computergerecht ist. Vorweg sei bemerkt, daß die hier benutzte Darstellungsweise in enger Anlehnung an [12] gewählt wurde.

##### 4.2.1 Diskretisierung im Raum

Zur anpassungsfähigen Beschreibung des BE mit axial veränderlicher Biegesteifigkeit ( $EJ$ ), Temperatur  $T$  und Neutronenflußdichte  $\phi$  ist es zweckmäßig, zunächst eine Axialunterteilung in einfachere Einheiten vorzunehmen. Abb. 3 zeigt, wie der gegebene, starr und momentenfrei gelagerte Balken in endlich viele, finite Balkenfelder geteilt wird. Dabei muß mindestens jede Lagerstelle eine Feldgrenze sein. Das Balkenfeld der Nummer  $j$  hat die Länge  $l_j$ , die feldweise konstante Biegesteifigkeit  $(EJ)_j$  sowie das feldfeste Koordinatensystem  $(\xi, \eta, \zeta)_j$ . Die Feinheit der Systemeinteilung (Längen  $l_j$ ) wird sich je nach den zu approximierenden Axialvariationen von  $EJ, T$  oder  $\phi$  richten. Die Abb. 3 zeigt außerdem das Balkenfeld  $j$  aus dem System herausgeschnitten, wodurch z. B. am rechten Ende die beiden Schnittlasten  $M_j$  und  $Q_j$  (Biegemoment und Querkraft) freigelegt werden. Den Belastungs- und Deformationszustand des Feldes kann man durch vier Größen eindeutig charakterisieren, beispielsweise durch folgende mechanischen Größen am rechten Feldrand (Abb. 3):

Winkel	$\varphi_j$
Durchsenkung	$w_j$

Biegemoment  $M_j$   
 Querkraft  $Q_j$

Eine weitere Unterteilung jedes Feldes in axialer und transversaler Richtung ist wegen des komplexen Stoffgesetzes (1) erforderlich. Durch die in Abb. 4 skizzierte Substruktur der Felder wird einmal die Umlagerung der Spannungen in den Kastenquerschnitten, zum anderen die axiale Variation der Kriech- und Schwelleffekte über  $l_j$  hinreichend gut erfaßbar. Man erkennt, daß jedes Balkenfeld zunächst in  $I$  gleich lange axiale Unterabschnitte geteilt ist. Die dadurch definierten Querschnitte werden dann in  $M$  Streifen jeweils konstanter Spannung zerlegt. Auf diese Weise wird der Spannungszustand jedes Feldes durch  $(I+1) \cdot (M+1)$  Punkte, d. h. Zahlen approximiert. Man kann erwarten, daß der Diskretisierungsfehler mit wachsendem  $I, M$  abnimmt. In der Abb. 4 ist für den Fall eines über die Flachseite beanspruchten Balkens mit hexagonalem Hohlquerschnitt eine Feldunterteilung mit  $I=3, M=8$  angedeutet.

#### 4.2.2 Gleichgewicht, lineares Stoffverhalten

Es soll ein  $K$ -fach starr und momentenfrei gelagerter Balken betrachtet werden, der in  $N \geq (K-1)$  Felder geteilt ist (mindestens jede Lagerstelle muß Feldgrenze sein). Das  $(K-2)$ -fach statisch unbestimmte System wird einmal durch äußere Einzellasten  $\bar{f}$  belastet (Spaltenvektor aus  $2(N+1)-K$  eingepprägten, äußeren Biegemomenten und Kräften an den Feldgrenzen); zum anderen bewirken beliebig aufgeprägte Zusatzdeformationen  $\bar{h}$  der Felder (Spaltenvektor aus  $2N$  vorgegebenen Winkeln und Auslenkungen am rechten Feldrand) eine zusätzliche Belastung des statisch unbestimmten Systems. Gesucht sind die Systemdeformationen  $\bar{d}$  (Spaltenvektor aus  $2(N+1)-K$  System-Neigungen und -Auslenkungen an den Feldgrenzen), die in statisch unbestimmten Systemen nicht nur von  $\bar{f}$  sondern auch von  $\bar{h}$  herrühren. Außerdem sind die inneren, d. h. die Schnittlasten  $\bar{p}$  (Spaltenvektor aus  $2N$  inneren Biegemomenten und Querkraften am rechten Feldrand) sowie die statisch unbestimmten Lagerkräfte  $\bar{x}$  des Systems gesucht (Spaltenvektor aus  $(K-2)$  Lagerkräften). Zur Aufstellung der gesuchten linearen Gleichungen zwischen  $(\bar{f}, \bar{h})$  einerseits

und  $(\bar{p}, \bar{d}, \bar{x})$  andererseits ist es zweckmäßig, die Felddeformationen  $\bar{V}$  als Zwischenunbekannte einzuführen (Spaltenvektor aus  $2N$  Feld-Neigungen und Auslenkungen).

Beim statisch unbestimmtem System (SUS) reicht die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht aus, um die Unbekannten zu berechnen. Aus diesem Grunde werden bei dem vorliegenden  $K$ -fach gelagerten System zunächst z. B. die inneren  $(K-2)$  Lager freigeschnitten, d. h. entsprechende Lagerkräfte  $\bar{x}$  freigelegt. Aus dem statisch unbestimmtem System ist ein statisch bestimmtes oder Hauptsystem (HS) mit den äußeren Kräften  $\bar{f}$  und  $\bar{x}$  geworden. Die Anwendung des Kräfte- und Momentengleichgewichts auf dieses HS mit den zunächst noch unbekanntem Lagerkräften  $\bar{x}$  führt auf lineare Gleichungen zwischen inneren  $(\bar{p})$  und äußeren Kräften  $(\bar{f}, \bar{x})$ , die man zur Matrixgleichung (2) zusammenfassen kann:

$$\bar{p} = \underline{B}_0 \bar{f} + \underline{B}_1 \bar{x} = \underline{B} \bar{f} \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \underline{X} \bar{f} \quad (2)$$

Die Rechteckmatrix  $\underline{X}$  stellt darin zunächst eine unbekannte Hilfsmatrix dar, die später zusammen mit der gesuchten sog. "System-Einflußmatrix"  $\underline{B}$  berechnet wird. Nach [12] werden die  $\underline{B}_0$  und  $\underline{B}_1$  "Einflußmatrizen" genannt; sie enthalten die Systemgeometrie und Lagertopologie, sind also als gegeben anzusehen. Die Berechnung dieser Rechteckmatrizen  $\underline{B}_0, \underline{B}_1$  ist sehr einfach, denn ihre Elemente geben die jeweiligen Schnittlasten infolge von äußeren Einheitslasten an. Insbesondere enthält z. B. die  $i$ -te Spalte von  $\underline{B}_0$  sämtliche  $2N$  Schnittlasten des Systems infolge von äußeren Einheitslasten  $F_i = 1.0$  ( $i=1 \dots 2(N+1)-K$ ) bei  $F_j = 0$ . ( $j \neq i$ ). Analog erhält man die  $i$ -te Spalte von  $\underline{B}_1$  aus der Einwirkung von Einheitslagerreaktionen  $X_i = 1.0$  ( $i=1 \dots K-2$ ) bei  $X_j = 0$ . ( $j \neq i$ ) auf das System. Die Gleichgewichtsbedingung (1) gilt in dieser Form lediglich für den Fall einer Systembelastung durch  $\bar{f}$ , d. h.  $\bar{h} \equiv 0$ . Wirken hingegen nur aufgeprägte Felddeformationen  $\bar{h}$  auf das statisch unbestimmte System, also bei  $\bar{f} \equiv 0$ , dann geht die Gleichgewichtsaussage in die Form (3) über, worin  $\underline{B}_1$  die gleiche Be-

deutung wie vorher hat:

$$\bar{P}_h = \underline{B}_1 \bar{x}_h \quad (3)^*$$

Abb. 5 zeigt einen  $K=3$ -fach äquidistant gelagerten Balken konstanter Biegesteifigkeit unter der alleinigen Wirkung eines axial konstanten Temperaturgradienten. Bei einer Einteilung in  $N=2$  Felder der Länge  $l$  ergeben sich für dieses Illustrationsbeispiel folgende innere und äußere Lasten:

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix} \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} M_1 \\ Q_1 \\ 0. \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung des Kräfte- und Momentengleichgewichts auf das System führt auf die speziellen Einflußmatrizen:

$$\underline{B}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2l} & \frac{1}{2l} & \frac{1}{2l} \\ 0. & 0. & 1.0 \\ \frac{1}{2l} & \frac{1}{2l} & \frac{1}{2l} \end{pmatrix} \quad \underline{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \\ 0. \\ -\frac{l}{2} \end{pmatrix}$$

Da sich voraussetzungsgemäß das Material des betrachteten Systems elastisch verhält, existiert auch ein linearer Zusammenhang zwischen den Schnittlasten  $\bar{P}$  und den in ihrer Wirkungslinie auftretenden Felddeformationen  $\bar{V}$ . Die Abb. 3 zeigt ein typisches Feld  $j$  mit  $l_j$  und  $(EJ)_j$ . Da hier insbesondere die Lasten (Biegemoment, Querkraft) und Deformationen (Winkel, Durchsenkung) interessieren, ist es zweckmäßig, die vier Randgrößen  $(M_j, Q_j)$  sowie  $(\varphi_j, w_j)$  selbst zur Beschreibung der

---

\* Der Index  $h$  soll diesen Lastfall  $h \neq 0, f \equiv 0$ . von dem Fall  $f \neq 0, h \equiv 0$ . unterscheiden.

Feldbiegeline im  $(\xi, \eta, \zeta)_j$  System zu verwenden. Das bedeutet, daß jedes Balkenfeld in Feldkoordinaten als ein einseitig eingespannter Balken angesehen wird.

Die Anwendung der klassischen Balkenbiegetheorie auf dieses Feld führt mit dem Hookeschen Gesetz (lineares Stoffverhalten) auf den bekannten Zusammenhang zwischen Biegemoment  $\bar{M}(\xi)$  und Krümmung,

$$\bar{M}(\xi) = -(E\mathcal{J})_j \frac{d^2 w_F}{d\xi^2} \quad (4)$$

woraus nach zweimaliger Integration und unter Beachtung der speziellen Randbedingungen (Abb. 3) die Gleichung der Feldbiegeline (5) folgt:

$$w_F(\xi) = \left(\frac{\xi}{l_j}\right)^2 \left[ \frac{l_j Q_j}{2(E\mathcal{J})_j} - \frac{l_j^2 M_j}{2(E\mathcal{J})_j} \right] - \left(\frac{\xi}{l_j}\right)^3 \frac{Q_j}{6(E\mathcal{J})_j} \quad (5)$$

Aus (5) ergeben sich die Randdeformationen  $(\varphi_{Fj}, w_{Fj})$  als Funktion der Randlasten  $(M_j, Q_j)$  in der Form (6):

$$\begin{aligned} \varphi_{Fj} &= M_j \frac{l_j}{(E\mathcal{J})_j} - Q_j \frac{l_j^2}{2(E\mathcal{J})_j} \\ w_{Fj} &= -M_j \frac{l_j^2}{(E\mathcal{J})_j} + Q_j \frac{l_j^3}{3(E\mathcal{J})_j} \end{aligned} \quad (6)$$

Für den Fall, daß am Feldrand noch gewisse Zusatzdeformationen  $(\varphi_{FZ})_j, (w_{FZ})_j$  vorgegeben sind, kommen diese Anteile noch zur rechten Seite der Glg. (6) hinzu. Die Zusammenfassung von (6) führt demnach bei  $\bar{f} \neq 0, \bar{h} \equiv 0$  auf die Matrix-Feldgleichung (7);

$$\bar{v}_j = E_j \bar{p}_j \quad (7)$$

für den Fall  $\bar{h} \neq 0, \bar{f} \equiv 0$  auf Glg. (8):

$$\bar{V}_{hj} = E_j \bar{P}_{hj} + \bar{h}_j \quad (8)$$

Die in den Glgn. (7) und (8) eingeführte quadratisch-symmetrische "Feldnachgiebigkeitsmatrix"  $E_j$  ist als gegeben anzusehen und nach (9) berechenbar,

$$E_j = \left( \frac{L}{EJ} \right)_j \begin{pmatrix} 1.0 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{pmatrix}_j \quad (9)$$

während die Feld-Deformationen und Schnittlasten zu den Spaltenvektoren Glg. (10) zusammengefaßt werden:

$$\bar{V}_j = \begin{pmatrix} \varphi_F \\ W_F \end{pmatrix}_j \quad \bar{V}_{hj} = \begin{pmatrix} \varphi_{Fh} \\ W_{Fh} \end{pmatrix}_j \quad \bar{h}_j = \begin{pmatrix} \varphi_{FZ} \\ W_{FZ} \end{pmatrix}_j \quad (10)$$

$$\bar{P}_j = \begin{pmatrix} M \\ Q \end{pmatrix}_j \quad \bar{P}_{hj} = \begin{pmatrix} M_h \\ Q_h \end{pmatrix}_j$$

Schließlich führt die Zusammenfassung aller  $j=1 \dots N$  Feldgleichungen (7) bzw. (8) je nach Belastungsart auf die Beziehungen (11) bzw. (12),

$$\bar{V} = E \bar{P} \quad (11)$$

$$\bar{V}_h = E \bar{P}_h + \bar{h} \quad (12)$$

worin die  $2N \times 2N$  Bandmatrix  $E$  sämtliche  $N$  Feldnachgiebigkeitsmatrizen  $E_j$  als "Diagonalelemente" enthält. Entsprechend stellen  $\bar{V}$  bzw.  $\bar{V}_h$  und  $\bar{h}$  die Gesamtheit aller  $\bar{V}_j$  bzw.  $\bar{V}_{hj}$  und  $\bar{h}_j$  des Systems dar.

Zur Illustration diene wieder das Beispiel in Abb. 5 mit  $\bar{f} \equiv 0$ . und vorgegebenem  $\bar{h}$ ; man erhält speziell:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0. \\ 0. & E_2 \end{bmatrix} = \left( \frac{L}{EJ} \right) \begin{bmatrix} 1.0 & -\frac{L}{2} & 0. & 0. \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.0 & -\frac{L}{2} \\ 0. & 0. & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_h = \begin{bmatrix} \varphi_{Fh_1} \\ W_{Fh_1} \\ \varphi_{Fh_2} \\ W_{Fh_2} \end{bmatrix} \quad \bar{h} = \begin{bmatrix} \varphi_{Fz_1} \\ W_{Fz_1} \\ \varphi_{Fz_2} \\ W_{Fz_2} \end{bmatrix} = \alpha \Delta T \frac{L}{H} \begin{bmatrix} 1.0 \\ -\frac{L}{2} \\ 1.0 \\ -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

#### 4.2.3 Verträglichkeit

Zur Berechnung der insgesamt fünf unbekanntem Vektoren bzw. Matrizen  $\bar{p}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\underline{X}$  liegen bisher nur die zwei Glgn. (2), (11) bzw. (3), (12) sowie die allgemeine Definitionsgleichung (13) vor:

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_1 \underline{X} \quad (13)$$

Weitere zwei Bestimmungsgleichungen erhält man aus den noch verbleibenden Verträglichkeitsrelationen, d.h. rein geometrischen Aussagen für das statisch unbestimmte System. Es handelt sich um folgende beiden Aussagen:

- Da die Verschiebungen der festen Lager Null sind, verrichten die dazugehörigen Lagerkräfte keine Arbeit.
- Da an den Balkenschnittstellen keine Relativdeformationen auftreten, sind die Systemdeformationen mit den Felddeformationen kompatibel.

Im folgenden werden die entsprechenden Matrixgleichungen für die Lastfälle  $\bar{f} \neq 0, \bar{h} \equiv 0$  und  $\bar{h} \neq 0, \bar{f} \equiv 0$  aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten abgeleitet. In analoger Weise läßt sich der Fall vorgeschriebener Lagerauslenkungen behandeln, für den hier nur das Resultat angegeben wird [12].

Für elastische Systeme gilt ein "Energiesatz", nach dem folgendes gilt: Gegeben sind zwei Gruppen äußerer Lasten  $\bar{f}_1$  und  $\bar{f}_2$ , die an einem vorliegenden System in ihrer Wirkungsrichtung die Systemdeformationen  $\bar{d}_1$  und  $\bar{d}_2$  zur Folge haben. Wenn  $\bar{f}_1$  und  $\bar{f}_2$  "statisch äquivalent" sind (d. h. gleichzeitig wirkend sich kompensieren würden) und wenn außerdem die  $\bar{d}_1$  und  $\bar{d}_2$  miteinander kompatibel sind (d. h. an den gleichen Stellen und ohne Zusatzdeformationen definiert sind), dann verrichtet  $\bar{f}_1$  am System die gleiche Arbeit wie  $\bar{f}_2$ . Es gilt demnach die Gleichheit der skalaren Vektorprodukte (14):

$$\bar{f}_1^T \bar{d}_1 = \bar{f}_2^T \bar{d}_2 \quad (14)^*$$

Betrachtet man nun das speziell interessierende statisch unbestimmte System mit  $\bar{f}, \bar{d}, \bar{p}, \bar{v}$  und identifiziert  $\bar{f}, \bar{d}$  mit  $\bar{f}_1, \bar{d}_1$  sowie  $\bar{p}, \bar{v}$  mit  $\bar{f}_2, \bar{d}_2$ , so gilt Glg. (15); denn  $\bar{f}$  und  $\bar{p}$  sind wegen (2) statisch äquivalent und  $\bar{d}$  und  $\bar{v}$  sind per Definition verträglich.

$$\bar{f}^T \bar{d} = \bar{p}^T \bar{v} \quad (15)$$

Glg. (15) bringt zum Ausdruck, daß die Arbeit der äußeren Lasten gleich der von den Schnittlasten verrichteten Formänderungsarbeit ist. Glg. (15) gilt wegen des erwähnten Energiesatzes auch dann noch, wenn statt des  $\bar{p}$  irgendeine beliebige Schnittlastgruppe eingesetzt wird, die nur mit  $\bar{f}$  im Gleichgewicht sein muß. Wählt man insbesondere diejenige dem  $\bar{f}$  statisch äquivalente Schnittlastgruppe  $\bar{p}_{HS}$ , die sich in dem glei-

---

\*)  $\bar{f}^T$  bedeutet die Transposition von  $\bar{f}$ , d. h. den Zeilenvektor des Spaltenvektors  $\bar{f}$ , analog ist  $\underline{B}^T$  die Transponierte von  $\underline{B}$ , d. h. diejenige Matrix, die durch Umschreiben der Zeilen von  $\underline{B}$  auf Spalten entsteht.

chen, aber bestimmt gelagerten System **HS** (Abb. 5 z. B.) einstellen würde, so gilt außer (15) z. B. auch Glg. (16) für das **SUS**:

$$\bar{f}^T \bar{d} = \bar{p}_{HS}^T \bar{v} \quad (16)$$

Setzt man in (15) und (16) die Gleichgewichtsausdrücke für  $\bar{p}$  und  $\bar{p}_{HS}$  aus (2) ein,

$$\bar{p} = \underline{B} \bar{f} \quad \bar{p}_{HS} = \underline{B}_o \bar{f} \quad (17)$$

so ergibt sich wegen der Unabhängigkeit von  $\bar{f}$  die allgemeingültige Matrixbeziehung (18) bzw. (19):

$$\bar{d} = \underline{B}_o^T \bar{v} = \underline{B}^T \bar{v} \quad (18)$$

$$\bar{d}_h = \underline{B}_o^T \bar{v}_h = \underline{B}^T \bar{v}_h \quad (19)$$

Diese beiden Gleichungen stellen die gesuchten Transformationen zwischen Feld- und Systemdeformationen dar und bilden gleichzeitig den Ausgangspunkt für die noch ausstehende Berechnung der Matrizen  $\underline{B}$  und  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{x}_h$ . Durch Kombination von (2) mit (18) erhält man allgemein (20) bzw. (21), was

$$\begin{aligned} (\underline{B}_o^T \bar{v} + \underline{X}^T \underline{B}_i^T \bar{v}) &= \underline{B}_o^T \bar{v} \\ \underline{X}^T \underline{B}_i^T \bar{v} &= 0. \quad (\underline{X}^T \neq 0.) \\ \underline{B}_i^T \bar{v} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\underline{B}_i^T \bar{v}_h = 0. \quad (21)$$

wie man zeigen kann gerade die Unverschieblichkeit der (**K-2**) Lager zum Ausdruck bringt. Aus den Glgn. (2), (11), (18), (20) bzw. (3), (12), (19), (21) geht jeweils eine weitere Bestimmungsgleichung (22) bzw. (23) für  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{x}_h$  in folgender Weise hervor:

$$\bar{v} = E B \bar{f}$$

$$B^T E B \bar{f} = B_0^T E B \bar{f}$$

$$\bar{f} \neq 0, \quad \text{d. h.}$$

$$(B_0^T + X^T B_1^T) E B = B_0^T E B$$

$$X^T \left( \underbrace{B_1^T E B_0}_{D_{10}} + \underbrace{B_1^T E B_1 X}_{D_{11}} \right) = 0.$$

$$X \neq 0, \quad \text{und}$$

$D_{11}$  quadratisch symmetrisch

$$X = -D_{11}^{-1} D_{10} \quad (22)^*$$

$$\bar{v}_h = E B_1 \bar{x}_h + \bar{h}$$

$$\underbrace{B_1^T E B_1 X}_D \bar{h} + B_1^T \bar{h} = 0.$$

$$D_{11}$$

$$\bar{h} \neq 0.$$

und

$D_{11}$  quadratisch symmetrisch

$$\bar{x}_h = -D_{11}^{-1} B_1^T \bar{h} \quad (23)^*$$

$$\bar{d}_h = B_0^T \bar{v}_h = (B_0 - B_1 D_{11}^{-1} D_{10})^T \bar{h}$$

$$\bar{d}_h = (B_0 + B_1 X)^T \bar{h}$$

Für den Fall  $\bar{f} \neq 0, \bar{h} \equiv 0$ . haben damit Gleichgewicht, Stoffgesetz und Verträglichkeit auf die drei folgenden Matrixgleichungen (24) für  $\bar{p}, \bar{d}, \bar{x}$  geführt:

Gleichgewicht  $\bar{p} = (B_0 - B_1 D_{11}^{-1} D_{10}) \bar{f}$

Stoffgesetz  $\bar{d} = (B_0^T E B_0 - D_{10}^T D_{11}^{-1} D_{10}) \bar{f} \quad (24)$

Verträglichkeit  $\bar{x} = -D_{11}^{-1} D_{10} \bar{f}$

Bei alleiniger Belastung durch Zusatzdeformationen  $\bar{h} \neq 0, \bar{f} \equiv 0$ . hingegen gelten die Gln. (25):

Gleichgewicht  $\bar{p}_h = -B_1 D_{11}^{-1} \bar{h}$

Stoffgesetz  $\bar{d}_h = (B_0 - B_1 D_{11}^{-1} D_{10})^T \bar{h} \quad (25)$

Verträglichkeit  $\bar{x}_h = -D_{11}^{-1} B_1^T \bar{h}$

---

\*)  $D_{11}^{-1}$  bedeutet die Kehrmatrix (Inversion) von  $D_{11}$

Wird das gegebene System weder durch  $\bar{f}$  noch durch  $\bar{h}$  sondern durch aufgeprägte Systemdeformationen "belastet", z. B. dadurch, daß einigen Lagern Transversalverschiebungen  $\bar{d}_L$  aufgezungen werden, so erhält man auf ähnliche Weise wie oben aus Gleichgewicht, Stoffgesetz und Verträglichkeit drei Matrixgleichungen (26) für die folgenden drei gesuchten Größen:

- $\bar{p}_L$  Schnittlasten.
- $\bar{f}_L$  nötige äußere Lasten an den Stellen aufgeprägter Systemdeformationen.
- $\bar{y}_L$  gesuchte, "kinematisch unbestimmte" Systemdeformationen.

Die sog. "Verträglichkeitsmatrix"  $\underline{A}$  stellt die Kehrmatrix von  $\underline{B}$  dar, und die quadratisch-symmetrische Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_p$  wird ähnlich wie  $\underline{E}$  gebildet.

$$\begin{aligned}\bar{p}_L &= \underline{K}_p \underline{A} \bar{d}_L \\ \bar{f}_L &= \underline{A}^T \underline{K}_p \underline{A} \bar{d}_L \\ \bar{y}_L &= -\underline{C}_{11}^{-1} \underline{C}_{10} \bar{d}_L\end{aligned}\tag{26}$$

Schließlich erhält man die  $\underline{C}_{11}$  und  $\underline{C}_{10}$  in analoger Weise wie  $\underline{D}_{11}$ ,  $\underline{D}_{10}$  aus den Kompatibilitätsbedingungen [12].

Die Gln. (25) bzw. (26) sollen zur Illustration auf die einfachen Beispiele in Abb. 5 bzw. Abb. 6 angewandt werden. Für den Fall  $\bar{h} \neq 0$ ,  $\bar{f} \equiv 0$ ,  $\bar{d}_L \equiv 0$  in Abb. 5 erhält man speziell folgende Matrizen,

$$\begin{aligned}\underline{D}_{10} &= \frac{l^2}{EJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} & \underline{D}_{11} &= \frac{l^3}{6EJ} \begin{pmatrix} 1.0 \end{pmatrix} \\ \underline{X} &= \frac{3}{2l} \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4l} & \frac{1}{2l} & -\frac{1}{4l} \\ 0. & 0. & 1.0 \\ -\frac{1}{4l} & \frac{1}{2l} & \frac{5}{4l} \end{pmatrix}$$

mit deren Hilfe sich die folgenden in Abb. 5 dargestellten Resultate ergeben:

$$\bar{P}_h = \frac{3EJ}{2HL} \alpha \Delta T \begin{pmatrix} -l \\ -1.0 \\ 0. \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad \bar{d}_h = \frac{l}{4H} \alpha \Delta T \begin{pmatrix} -1.0 \\ 0. \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_h = \frac{3EJ}{HL} \alpha \Delta T \begin{pmatrix} -1.0 \end{pmatrix}$$

Für den Fall  $\bar{d}_L \neq 0.$ ,  $\bar{f} \equiv 0.$ ,  $\bar{h} \equiv 0.$  in Abb. 6, d. h. bei aufzwungener Verschiebung des mittleren Lagers erhält man mit

$$\bar{d}_L = \{w_L\}$$

und den Matrizen

$$\underline{K}_P = \frac{4EJ}{l} \begin{pmatrix} 1.0 & \frac{3}{2l} & 0. & 0. \\ \frac{3}{2l} & \frac{3}{l^2} & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.0 & \frac{3}{2l} \\ 0. & 0. & \frac{3}{2l} & \frac{3}{l^2} \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2l} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2l} \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{11} = \frac{4EJ}{l} \begin{pmatrix} 1.0 & \frac{1}{2} & 0. \\ \frac{1}{2} & 2. & \frac{1}{2} \\ 0. & \frac{1}{2} & 1.0 \end{pmatrix} \quad \underline{C}_{10} = \frac{6EJ}{l^2} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0. \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

die analogen in Abb. 6 dargestellten Ergebnisse:

$$\bar{P}_L = \begin{bmatrix} M_1 \\ Q_1 \\ 0. \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{3 E J W_L}{l^2} \begin{bmatrix} 1.0 \\ \frac{l}{l} \\ 0. \\ -\frac{l}{l} \end{bmatrix} \quad \bar{Y}_L = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{3 W_L}{2 l} \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0. \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}_L = \begin{bmatrix} F_L \end{bmatrix} = \frac{6 E J W_L}{l^3} \begin{bmatrix} 1.0 \end{bmatrix}$$

Für den hier speziell interessierenden Belastungsfall  $\bar{h} \neq 0.$ ,  $\bar{f} \equiv 0.$ ,  $\bar{d}_L \equiv 0.$  gibt schließlich Abb. 7 ein tabellarisches Schema nach [13] zur Verdeutlichung des Rechenablaufs.

Das linear-elastische System mit Zusatzdeformationen  $\bar{h}$  ist mit Glg. (25) allgemein und im Rahmen der Balkentheorie exakt gelöst. Bei zusätzlicher Belastung des Systems durch äußere, aufgeprägte Lasten bzw. Systemdeformationen (z. B. Lagerverschiebungen) müssen die Gln. (24) bzw. (26) mitverwendet werden. Im folgenden Abschnitt wird auf der Basis von (25) das nichtelastische System behandelt.

#### 4.3 Das nichtelastische System

##### 4.3.1 Diskretisierung in der Zeit

Die näherungsweise Behandlung des nichtelastischen Kriechbiegeproblems erfolgt nun dadurch, daß man in endlichen Zeitschritten  $\Delta t_m$  d. h. inkrementell vorgeht. Außerdem wird angenommen, daß sich der Belastungs- bzw. Spannungszustand während  $\Delta t_m$  nicht ändert. Bei hinreichend kleinen Zeitinkrementen führt diese Annahme nur zu geringfügigen Fehlern, die über  $\Delta t_m$  steuerbar sind. Andererseits besteht der Vorteil dieser Näherung darin, daß man innerhalb jedes  $\Delta t_m$  ein linear-elastisches Problem mit Zusatzdeformationen  $\bar{h} = (\Delta \bar{h})_m$  vorliegen hat, das mit (25) nach üblichen Methoden der Elastomechanik gelöst werden kann. Insbe-

sondere hat aber das inkrementelle Vorgehen gegenüber direkten Lösungsverfahren, z. B. durch Relaxation hier den Vorteil, daß bei einer späteren Berechnung mehrerer paralleler BE's in Wechselwirkung eine Entkopplung der BE-Bewegungen und Beanspruchungen in Zeitschritten  $\Delta t_m$  möglich ist. Darüber hinaus erhält man beim inkrementellen Verfahren sozusagen als "Nebenprodukt" die gesamte Geschichte der Deformation und Belastung.

Die während jedes Zeitintervalls  $\Delta t_m$  benötigten Inkremente  $(\Delta \bar{h})_m$  der Zusatzdeformationen rühren von den thermischen, Kriech- und Schwell-Dehnungsincrementen während  $\Delta t_m$  her und werden feldweise aus einer Reihe von entsprechenden Feldkrümmungsincrementen  $\Delta \chi_{m,i}$  ( $i=1 \dots I+1$ ) approximativ berechnet. Auf die Berechnung der  $\Delta \chi_{m,i}$  aus gewissen Integralen der thermischen, Kriech- und Schwelldehnungsincremente wird im nächsten Abschnitt eingegangen. Die Ermittlung der Spannungs- bzw. Dehnungsincremente während  $\Delta t_m$  wird anschließend in 4.3.3 beschrieben.

Im Zusammenhang mit dem zeitlichen Vorgehen sei noch erwähnt, daß man am Ende von  $\Delta t_m$ , d. h. zum Zeitpunkt  $t_m = t_{m-1} + \Delta t_m$  mit (1) die Zusatzdeformationen  $(\Delta \bar{h})_m$  und damit über (25) die Inkremente in den neuen Zustandsgrößen Glg. (27) erhält:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Schnittlasten} & (\bar{p})_m = (\bar{p})_{m-1} + (\Delta \bar{p})_m \\
 \text{Systemdeformationen} & (\bar{d})_m = (\bar{d})_{m-1} + (\Delta \bar{d})_m \\
 \text{Lagerkräfte} & (\bar{x})_m = (\bar{x})_{m-1} + (\Delta \bar{x})_m
 \end{array} \quad (27)$$

Zur Verdeutlichung des zeitlichen Vorgehens zeigt Abb. 8 die Geschichte der Biegespannung  $S$  an einem beliebigen aber festen Ort des z. B. stationär thermisch belasteten Balkens aus kriechendem und schwellendem Material. Außerdem ist das inkrementelle Vorgehen in der Zeit und die Gewinnung einer Näherungslösung  $S_N$  zwischen den Zeiten  $t_A$  und  $t_E$  schematisch dargestellt. Der Verlauf  $S_N$  und das zugehörige Flußdiagramm entsprechen der einfachsten Zeititeration ohne Spannungsverbesserung innerhalb von  $\Delta t_m$ .

#### 4.3.2 Inkrement der Krümmungen und Deformationen am Feld

Abb. 9 zeigt ein aus dem Balken herausgeschnittenes typisches Feld, das während  $\Delta t$  völlig kräftefrei und ohne jede Behinderung dem Einfluß von thermoelastischer, Kriech- und Schwelldehnung ausgesetzt sei. Durch verschieden starke Ausdehnung  $\Delta e(\xi, \zeta)$  der Balkenfasern in den  $(\eta, \zeta)$  Ebenen (bei  $\xi = \text{const}$ ) krümmt sich das Feld; man kann über den einfachen Dehnungs-Krümmungszusammenhang in der klassischen Balkentheorie, d. h. die Kompatibilitätsbeziehung (28) die resultierenden kräftefreien Zusatzdeformationen ( $\varphi_{FZ}, w_{FZ}$ ) berechnen:

$$\Delta e = \Delta e_M - \zeta \Delta \kappa \quad (28)$$

Das Inkrement der mittleren Dehnung  $\Delta e_M(\xi)$  tritt wegen der Temperaturabhängigkeit der Kriechparameter auf, denn je nach der Temperaturverteilung  $T(\zeta) \neq T(-\zeta)$  ist in dem Querschnitt  $\xi = \text{const}$  verschieden starkes Kriechen und damit eine mittlere Axialdehnung zu erwarten.  $\Delta e$  ist das Gesamtdehnungsinkrement und  $\Delta \kappa$  das Gesamtkrümmungsinkrement am Ende von  $\Delta t$ . Setzt man (1) in (28) ein und beachtet die in jedem Querschnitt  $\xi = \text{const}$  (Abb. 9) gültigen Gleichgewichtsbedingungen (29),

$$\Delta M = \int_A \Delta s \zeta dA = 0 \quad \Delta N = \int_A \Delta s dA = 0 \quad (29)$$

so ergeben sich die Teilkrümmungsinkremente  $\Delta \kappa_t, \Delta \kappa_s$  sowie  $\Delta \kappa_c$  und damit  $\Delta \kappa$  aus folgenden Dehnungsintegralen (30) über den Querschnitt:

$$\Delta \kappa(\xi) = \Delta \kappa_t + \Delta \kappa_s + \Delta \kappa_c \quad (30)$$

thermische  
Ausdehnung  $\Delta \kappa_t(\xi) = \frac{1}{\bar{\alpha}_T} \int_A \Delta e_t \zeta dA$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Schwellen} & \Delta \alpha_s(\xi) = \frac{1}{\bar{J}_\eta} \int_A \Delta e_s \xi \, dA \\
 \text{Kriechen} & \Delta \alpha_c(\xi) = \frac{1}{\bar{J}_\eta} \int_A (\Delta e_{c1} + \Delta e_{c2}) \xi \, dA \quad (30) \\
 \text{Inkrement} & \\
 \text{der mittleren} & \Delta e_M(\xi) = \frac{1}{A} \int_A (\Delta e_{c1} + \Delta e_{c2}) \, dA \\
 \text{Dehnung} &
 \end{array}$$

Diese Integrale können wegen des komplexen Stoffgesetzes (1) nur numerisch, z. B. nach Simpson [14] an diskreten Stellen berechnet werden, was auf die Krümmungsinkremente  $\Delta \alpha_i(\xi)$  mit  $i = 1 \dots I+1$  in  $I+1$  Feldquerschnitten führt. Die daraus resultierende kräftefreie Feldbiegeline  $W_{FZ}(\xi)$  erhält man schließlich durch zweimalige axiale Integration der Krümmungen. Abb. 9 zeigt die dafür vorgenommene und in 4.2.1 beschriebene axiale Unterteilung, die  $I+1$  Stützstellen sowie die Rand- und Übergangsbedingungen zur Bestimmung der offenen Konstanten  $\beta_{ik}$  in den  $I$  kubischen Parabeln (31):

$$\bar{w}_i(\xi) = \sum_K^{0,3} \beta_{ik} \xi^K \quad (i = 1 \dots I) \quad (31)$$

Die gesuchten kräftefreien Deformationen ( $\psi_{FZ}, W_{FZ}$ ) am rechten Feldrand ergeben sich durch zweimalige Integration von (31) unter Beachtung aller Rand- und Übergangsbedingungen als Funktion der diskreten  $\Delta \alpha_i$  mit  $i = 1 \dots I+1$ . Beispielsweise erhält man folgende Ausdrücke  $\psi_{FZ}(\Delta \alpha_i)$  und  $W_{FZ}(\Delta \alpha_i)$  bei einer äquidistanten Unterteilung des Feldes der Länge  $l$  in  $I = 2, 3, 4$  Unterabschnitte:

	Freie Deformationen ( $\varphi_{FZ}$ , $w_{FZ}$ ) am Feldrand
$I = 2$	$\varphi_{FZ} = -\frac{l}{2} (\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2)$ $w_{FZ} = \frac{l^2}{6} (2 \Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2)$
$I = 3$	$\varphi_{FZ} = -\frac{l}{4} (\Delta \alpha_1 + 2 \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3)$ $w_{FZ} = \frac{l^2}{48} (13 \Delta \alpha_1 + 6 \Delta \alpha_2 + 5 \Delta \alpha_3)$
$I = 4$	$\varphi_{FZ} = -\frac{l}{6} (\Delta \alpha_1 + 2 \Delta \alpha_2 + 2 \Delta \alpha_3 + \Delta \alpha_4)$ $w_{FZ} = \frac{l^2}{54} (8 \Delta \alpha_1 + 12 \Delta \alpha_2 + 6 \Delta \alpha_3 + \Delta \alpha_4)$

Diese Randdeformationen ( $\varphi_{FZ}$ ,  $w_{FZ}$ ) des Feldes "j" werden schließlich gemäß Glg. (10) zum Spaltenvektor des zu  $\Delta t_m$  gehörenden Inkrements  $(\Delta \bar{h}_j)_m$  der Zusatzdeformationen zusammengefaßt, die ihrerseits gemäß Glg. (12) zur Gesamtheit aller Zusatzdeformationen  $(\Delta \bar{h})_m$  am System zusammensetzbar sind:

$$(\Delta \bar{h}_j)_m = \begin{bmatrix} \varphi_{FZ} \\ w_{FZ} \end{bmatrix}_{j,m} \quad j = 1 \dots N \quad (32)$$

$$(\Delta \bar{h})_m = \begin{bmatrix} \varphi_{FZ_1} \\ w_{FZ_1} \\ \vdots \\ \varphi_{FZ_N} \\ w_{FZ_N} \end{bmatrix}$$

#### 4.3.3 Dehnungen und Spannungen

Außer Schnittlasten, Systemdeformationen und Lagerkräften gemäß Glg. (27) interessieren am Ende von  $\Delta t$  vor allem auch die lokalen Dehnungs- und Spannungsinkremente infolge thermoelasti-

scher, Kriech- und Schwelldehnung an allen  $(I+1) \cdot (M+1)$  Punkten der  $N$  Balkenfelder. Man benötigt nämlich den neuen Gesamtdehnungs- bzw. Spannungszustand zur Berechnung der neuen kräftefreien Zusatzdeformationen im nächsten Zeitschritt.

Vorweg sind einige Bemerkungen zur Darstellung der Dehnung  $\underline{e}$  (Spannung  $\underline{S}$ ) sowie zur Temperaturverteilung erforderlich, was an Hand der Abb. 10 und 11 geschehen soll. Zur Verdeutlichung zeigt Abb. 10 ein aus dem Balken herausgeschnittenes Feld  $j$ . Bei linear-elastischem Material rufen die nach Glg. (2), (3) errechneten Schnittlasten  $(M_j, Q_j)$  in den  $(I+1)$  Querschnitten  $\xi_i$  die aus den Gleichgewichtsbedingungen hervorgehenden Biegespannungen  $s_j(i, k)$  mit  $k = 1 \dots M+1$  hervor:

$$s_j(i, k) = \left[ \frac{M_j - Q_j(l_j - \xi_i)}{J_{\eta j}} \right] \zeta(k) = \frac{M(j, i)}{J_{\eta j}} \zeta(k) \quad (33)$$

Die lokalen Dehnungen  $e_j(i, k) = s_j(i, k)/E_j$  werden zur Felddehnungsmatrix  $\underline{e}_j$  und diese  $N$  Matrizen wiederum zur Systemdehnungsmatrix  $\underline{e}$  gemäß (34) zusammengefaßt, worin  $\underline{e}$  eine Rechteckmatrix der Größe  $[N(I+1)-2] \times [M+1]$  ist:

Linkes Randfeld:

$$\underline{e}_l = \begin{pmatrix} e_{l, (2, 1)} & \dots & e_{l, (2, k)} & \dots & e_{l, (2, M+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{l, (i, 1)} & \dots & e_{l, (i, k)} & \dots & e_{l, (i, M+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{l, (I+1, 1)} & \dots & e_{l, (I+1, k)} & \dots & e_{l, (I+1, M+1)} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Innere Felder:

$$\underline{e}_j = \begin{pmatrix} e_j(i, 1) & \dots & e_j(i, k) & \dots & e_j(i, M+1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_j(i, 1) & \dots & e_j(i, k) & \dots & e_j(i, M+1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_j(I+1, 1) & \dots & e_j(I+1, k) & \dots & e_j(I+1, M+1) \end{pmatrix}$$

Rechtes Randfeld:

$$\underline{e}_N = \begin{bmatrix} e_N(i,1) \cdots e_N(i,k) \cdots e_N(i,M+1) \\ \vdots \\ e_N(l,1) \cdots e_N(l,k) \cdots e_N(l,M+1) \\ \vdots \\ e_N(I,1) \cdots e_N(I,k) \cdots e_N(I,M+1) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\underline{e} = \left[ \underline{e}_1 \cdots \underline{e}_j \cdots \underline{e}_N \right]$$

Die Abb. 11 zeigt ebenfalls das typische Balkenfeld  $j$  mit der lokalen Temperatur  $T_j(i,k)$ . Wegen der Linearisierung der Temperatur  $T$  und der Neutronenflußdichte  $\phi$  (Annahme B2) sind die Felder  $T_j(i,k)$  und  $\phi_j(i,k)$  durch die einfachen Glgn. (35) gegeben, worin die Bedeutung von  $T_o$  und  $T_d$  bzw.

$$\begin{aligned} T_j(i,k) &= T_o(j,i) + T_d(j,i) \frac{\zeta(k)}{H_j} \\ \phi_j(i,k) &= \phi_o(j,i) + \phi_d(j,i) \frac{\zeta(k)}{H_j} \end{aligned} \quad (35)$$

$\phi_o$  und  $\phi_d$  der Abb. 11 zu entnehmen ist.

Eine Kombination der Glgn. (1), (30) und (35) führt auf Glg. (36), die zur Berechnung der diskreten Inkremente aller Krümmungen  $\Delta \varkappa(j,i)$  sowie aller mittleren Dehnungen  $\Delta e_{Mj}(i)$  am Ende von  $\Delta t$  benötigt wird:

$$\Delta \varkappa(j,i)^{th} = - \alpha \left[ \frac{\Delta T_d(j,i)}{H_j} \right] \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varkappa (j, i)^s &= - \left[ f_s(j, i, 1) - f_s(j, i, m+1) \right] \Delta t \\ \Delta \varkappa (j, i)^c &= \frac{\Delta t}{\mathcal{F}_{\eta_j}} \int_{A_j} \left[ f_{c_1}(j, i, k) + f_{c_2}(j, i, k) \right] \zeta(k) dA(j, k) \\ \Delta \varkappa (j, i) &= \Delta \varkappa (j, i)^{th} + \Delta \varkappa (j, i)^s + \Delta \varkappa (j, i)^c \\ \Delta e_M(j, i) &= \frac{1}{A_j} \int_{A_j} \left[ f_{c_1}(j, i, k) + f_{c_2}(j, i, k) \right] dA(j, k) \end{aligned} \quad (36)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} f_s(j, i, k) &= f^s \{ T_j(i, k), \phi_j(i, k) \} \\ f_{c_1}(j, i, k) &= f^{c_1} \{ s_j(i, k), T_j(i, k) \} \\ f_{c_2}(j, i, k) &= f^{c_2} \{ s_j(i, k), \phi_j(i, k), T_j(i, k) \} \end{aligned}$$

Auf der Basis der Gln. (1), (25), (28), (33), (36) kann man jetzt die gesuchten Inkremente der Dehnungen und Spannungen am Ende von  $\Delta t$  ermitteln. Zunächst herrsche zu Beginn, d. h.  $t = t_0$  der Dehnungs- bzw. Spannungszustand  $(\underline{e})_0$  bzw.  $(\underline{s})_0$ . In dem Intervall  $\Delta t$  tritt jetzt an dem freien, d. h. unbehinderten ( $s_0 = \text{const}$ ) Teil der Balkenstelle  $(j, i, k)$  gemäß Glg. (1) die lokale Dehnungsänderung  $\Delta e_j(i, k)^I$  nach (37) ein:

$$\Delta e_j(i, k)^I = \Delta e_j(i, k)^{th} + \Delta e_j(i, k)^s + \Delta e_j(i, k)^c \quad (37)$$

Diese Dehnungsänderungen sind im allgemeinen über dem Balkenquerschnitt nichtlinear, d. h. sie sind nicht kompatibel. Damit die Balkenteile  $(j, i, k)$  zunächst wieder zusammen passen,

d. h. damit die Gesamtdehnungsänderung  $\Delta e_j(i, k)$  kompatibel ist, werden jetzt an allen Teilen elastische Zusatzspannungen  $\Delta s_j(i, k)^{z1}$  bzw. Dehnungen  $\Delta e_j(i, k)^{z1}$  angebracht. Diese Zusätze werden mit Glg. (36), (37) gerade so bestimmt, daß Glg. (38) erfüllt ist:

$$\Delta e_j(i, k)^I + \Delta e_j(i, k)^{z1} = \Delta e_m(j, i) - \zeta(k) \Delta \varkappa(j, i) \quad (38)$$

$$\Delta s_j(i, k)^{z1} = E_j \left[ \Delta e_m(j, i) - \zeta(k) \Delta \varkappa(j, i) - \Delta e_j(i, k)^{th} - \Delta e_j(i, k)^s - \Delta e_j(i, k)^c \right]$$

$\Delta s_j(i, k)^{z1}$  gibt aber erst die Spannungsänderung aller zusammengepaßten Teile in einem statisch bestimmten Hauptsystem (HS) wieder. Um die Spannungsänderungen  $\Delta s_j(i, k)$  in dem tatsächlichen statisch unbestimmten System zu erhalten, kommt noch die nach Glg. (25), (33) zu berechnende linear-elastische Zusatzspannung  $\Delta s_j(i, k)^{z2}$  hinzu:

$$\Delta s_j(i, k) = \Delta s_j(i, k)^{z1} + \Delta s_j(i, k)^{z2} \quad (39)$$

Der Spannungszustand  $\Delta s_j(i, k)^{z2}$  ergibt sich, wenn man von den freien Krümmungsänderungen  $\Delta \varkappa(j, i)$ , d. h. Zusatzdeformationen  $\Delta \bar{h}_j$  die Erfüllung der statisch unbestimmten Auflagerbedingungen verlangt. Faßt man die lokalen Spannungsänderungen  $\Delta s_j(i, k)$  analog zu Glg. (34) in einer Matrix  $\Delta \underline{s}$  zusammen, so ist der Spannungszustand  $\underline{s}$  am Ende von  $\Delta t$  gefunden:

$$\underline{s} = (\underline{s})_0 + \Delta \underline{s}$$

Entsprechend Glg. (27) ist demnach die Spannung zum Zeitpunkt  $t_m$  durch Glg. (40) gegeben:

$$(\underline{s})_m = (\underline{s})_{m-1} + (\Delta \underline{s})_m \quad (40)$$

#### 4.4 Rechenablauf

Nach der Beschreibung des Lösungsweges stehen jetzt zur näherungsweise Behandlung des ebenen Kriechbiegeproblems die wichtigsten Glgn. (1), (25), (27), (40) zur Verfügung. Die praktische Rechnung verläuft in drei Stufen:

1. Aufbau der Einfluß- und Nachgiebigkeitsmatrizen  $\underline{B}_0, \underline{B}_1, \underline{E}$
2. Berechnung der Anfangslösung  $(\bar{p}, \bar{d}, \bar{x}, \underline{s})_A$  zur Zeit  $t = t_A$
3. Schrittweiser Aufbau der Lösung  $(\bar{p}, \bar{d}, \bar{x}, \underline{s})_m$  zur Zeit  $t = t_m$  bis das Ende des Abbrands  $t = t_E$  erreicht ist.

Abb. 12 zeigt ein vereinfachtes Flußdiagramm zur Verdeutlichung des Rechenablaufs. Für die inkrementelle Rechnung kann man eine obere Grenze für  $\Delta t_m$  dadurch festlegen, daß man z. B. für das maximale Spannungskrement  $\max |\Delta s_j(i, k)|$  nach Glg. (41) eine obere Grenze vorschreibt:

$$\max \left| \frac{\Delta s_j(i, k)}{s_j(i, k)} \right| \leq \varepsilon_1 \quad (41)$$

Man kann auch direkt das Inkrement der maximalen Kriechdehnung  $\max |\Delta e_j(i, k)^c|$  als Prüfgröße verwenden:

$$\max \left| \frac{\Delta e_j(i, k)^c}{e_j(i, k)} \right| \leq \varepsilon_2 \quad (42)$$

Darüber hinaus ist eine optimale Zeitschrittsteuerung im Prinzip möglich, jedoch abhängig von der Belastungsart und dem Stoffgesetz.

In der Abb. 12 ist auch die Möglichkeit angedeutet, innerhalb eines Zeitschrittes  $\Delta t_m$  die Lösung  $L_m$  d. h.  $(\bar{p}, \bar{d}, \bar{x}, \underline{s})_m$  durch erneute Rechnung etwa mit  $\underline{s} = (\underline{s})_m + (\Delta \underline{s})_m / 2.$  zu ver-

bessern. Allerdings ist anzunehmen, daß nur ein bis zwei solcher Spannungsiterationen pro Zeitschritt sinnvoll sind; denn die Güte der Teillösung  $\Delta L_m$  hängt in erster Linie von der Zeitschrittweite  $\Delta t_m$  selbst ab.

Schließlich sei erwähnt, daß statt der einfachen Glg. (40) auch noch andere Strategien für den Aufbau der Spannungslösung denkbar sind (vgl. Abb. 13).

## 5. Rechenprogramm und Anwendung

### 5.1 Programmbeschreibung

Auf der Grundlage der in 4. beschriebenen Lösungsmethode wurde das Rechenprogramm 'BEKS' entwickelt ("Brennelementkasten bei Kriechen und Schwellen"). Im folgenden soll beschrieben werden, was die z. Zt. vorliegende und erfolgreich getestete Version des Programms kann, wie der Code aufgebaut ist und wie man ihn benutzt.

'BEKS' ist für die Analyse der ebenen Kriechbiegung eines hexagonalen BE-Kastens ausgelegt. Das BE ist durch mehrere momentenfreie Lager gehalten, deren Position sich zeitlich nicht ändert. Der Kasten wird durch Temperatur- und Neutronenflußdichte-Felder beansprucht, wobei Niveau und Quergradient von  $T$  und  $\phi$  axial beliebig variieren können. Der Elastizitätsmodul  $E$ , die Schlüsselweite  $H$  und Dicke  $D$  des Kastens können ebenfalls axial variieren. Weiterhin ist thermisches Sekundärkriechen in der Form des Nortonschen Gesetzes (43) mit temperaturabhängigen Kriechparametern zugelassen [3]

$$\frac{\Delta e^{ci}}{\Delta t} = f^{ci}(s, T) = \dot{e}_0 \operatorname{sgn}(s) \left[ \frac{s}{s_0(T)} \right]^{n(T)} \quad (43)$$

$n$  ist der Nortonexponent des Materials,  $\dot{e}_0 = 0.278 \cdot 10^{-10} [\text{sec}^{-1}]$  ist eine feste Kriechgeschwindigkeit, die rund 1 % Dehnung in 12 Jahren bewirkt. Die zu diesem  $\dot{e}_0$  gehörige Spannung ist dann die häufig verwendete Kriechgrenze  $s_0 = s_{c7} [\text{kp cm}^{-2}]$ . Die Parameter  $n$  und  $s_{c7}$  sind temperaturabhängige Kriechkennwerte des Kastenmaterials, die in das Programm für einige Temperaturen eingegeben werden können. Für Zwischenwerte von  $n, s_{c7}$  wird in der Rechnung dann linear interpoliert. Außer thermischem ist stationäres strahlungsinduziertes oder in-pile Kriechen des Materials zugelassen, und zwar in der umgerechneten und modifizierten Form (44) von T. T. Claudson 1970 [1] für lösungsgeglühten Stahl SS316:

$$\frac{\Delta e^{c2}}{\Delta t} = f^{c2}(s, T, \phi) = \gamma \cdot \phi \cdot s \quad (44)$$

$$\gamma = \gamma(T_K) = \gamma_0 \cdot e^{(1.405 - 0.0027 T_K)}$$

$$\gamma_0 \left[ \frac{cm^4}{n \cdot kp} \right] \quad \text{Kriechkonstante}$$

$$T_K \left[ ^\circ K \right] \quad \text{Temperatur}$$

$$\phi \left[ \frac{n}{cm^2 \cdot sec} \right] \quad \text{Neutronenflußdichte (Summe aller Gruppen mit mehr als 0.1 MeV Energie)}$$

$$s \left[ \frac{kp}{cm^2} \right] \quad \text{Spannung}$$

In dem Programm ist außer Kriechen auch Schwellen des Materials berücksichtigt, wofür ebenfalls eine Beziehung (45) nach [1] für lösungsgeglühten Stahl SS316 verwendet wurde. Zunächst ist mit Glg. (1):

$$\Delta e^s = f^s(\phi t, T) \Delta t = \mathcal{F}(\phi t, T) - \mathcal{F}(\phi \cdot [t + \Delta t], T)$$

$$\mathcal{F}(\phi t, T) = \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right) = AT \cdot (10^{-22} \phi t)^{NT} \quad (45)$$

$$AT(T_K) = \frac{10^{-10}}{3} [T_K - 40.] e^{(32.6 - \frac{5100.}{T_K} - 0.015 T_K)}$$

$$NT(T_K) = 2.05 - \frac{27.}{(T_K - 623)} + \frac{78.}{(T_K - 623.)^2}$$

$$T_K [^\circ K] \quad \text{und} \quad \phi \left[ \frac{n}{cm^2 \cdot sec} \right] \quad \text{wie in Glg. (44)}$$

Da das Programm modular aufgebaut ist (15 Unterprogramme) und der Benutzer über eine Reihe von Steuergrößen und wählbaren Parametern sehr flexibel ist, kann mit 'BEKS' eine Vielzahl von Problemen behandelt werden. So zum Beispiel können statt

Glg. (43), (44), (45) ganz andere Stoffgesetze durch Auswechseln der Unterprogramme 'KRIECH' und 'SWELL' eingebracht werden. Die z. Zt. eingebaute Version der Unterprogramme 'ZKOORD' (zur Berechnung des Schwerpunktabstandes  $\zeta(k)$  in den Gln. (33), (36), (38)) und 'SIMPS' (zur numerischen Integration der Glg. (36) nach Simpson) gestattet die Behandlung ebener Biegung des Hexagon-Kastens über eine Flachseite (vgl. z. B. Abb. 4). Für ebene Biegung über eine Ecke wären diese Unterprogramme entsprechend zu modifizieren. Durch Wahl von Steuergrößen kann der Benutzer thermisches und/oder strahlungsinduziertes Kriechen zulassen oder beispielsweise zwischen verschiedenen Iterationsstrategien (Abb. 13) in der Zeit wählen. Abschließend sei erwähnt, daß in der jetzigen Version von 'BEKS' keine Zeitschrittsteuerung eingebaut ist ( $\Delta t = \text{const}$ ), damit das Programm hinreichend allgemein verwendbar bleibt (s. Bemerkung S. 33).

'BEKS' ist in FORTRAN-IV geschrieben und besteht aus einem zentralen Steuerprogramm und 15 Unterprogrammen. Die Eingabe für das Programm besteht aus folgendem:

1. Anzahl und Geometrie (Länge, Schlüsselweite, Wandstärke) der BE-Balkenfelder
2. Anzahl und Position der Lager
3. Substruktur der Felder (Streifenanzahl, Anzahl der axialen Unterabschnitte)
4. Anfangszeitpunkt (Kriechbeginn), Schrittweite und Anzahl der gewünschten Zeitschritte
5. Größe  $\epsilon_1$  in Glg. (41) zur einmaligen Zeitschrittkorrektur am Anfang der Rechnung
6. Steuergröße zur Wahl der Iterationsstrategie (Abb. 13)
7. Steuergröße für thermisches und/oder strahlungsinduziertes Kriechen
8. Materialeigenschaften:  
Linearer Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$

Kriechparameter  $\delta_0$  in Glg. (44)  
 Feldweiser Elastizitätsmodul  $E$  sowie Kriechparameter  $n, S_c, \tau$  in Glg. (43) als Funktion der Temperatur

9. Axialer Verlauf der Kastenrand-Temperaturen gemäß Abb. 2
10. Axialer Verlauf der Kastenrand-Neutronenflußdichte gemäß Abb. 2

Die Namen sowie die chronologische Eingabefolge ist der folgenden Tabelle zu entnehmen (alle dimensionsbehafteten Größen in kohärenten Einheiten):

Karten- spalten- Nr.	Format	"Name", Beschreibung
		<u>Anzahl der axialen BE-Felder; Anzahl und Topologie der BE-Lager:</u>
5	8I5	"N" = Feldanzahl ( $N \leq 30$ z. Zt.)
10	8I5	"M" = Lageranzahl ( $M \leq 5$ z. Zt.) Innere Lager befinden sich am rechten Rand der Felder mit der lfd. Nummer (von links, d. h. BE-Fuß nach rechts, d. h. BE-Kopf):
15	8I5	"N1" keine inneren Lager:
20	8I5	"N2" $N1 = N2 = N3 = 0$
25	8I5	"N3"
		<u>Substruktur jedes Feldes:</u>
		Gewünschte Querschnittsunterteilung :
30	8I5	"NDA" = Anzahl der Simpson-Doppelstreifen über die Querschnittsbereiche: $\pm \left( \frac{H_j}{2} - D_j \right) \leq \zeta \leq \pm \left( \frac{H_j}{2} \right) \quad (\text{Abb. 4, 10})$
35	8I5	"NDI" = Anzahl der Simpson-Doppelstreifen über die Querschnittsbereiche: $0 \leq  \zeta  \leq \left  \frac{H_j}{2} - D_j \right $ Gewünschte Axialunterteilung :
40	8I5	"NFQ" = Anzahl der äquidistanten Stützstellen (Querschnitte) entlang des Feldes (Abb. 4: $NFQ = I + 1$ )

Karten- spalten- Nr.	Format	"Name", Beschreibung
5 10 15	2I5 2I5 2I5	<p><u>Anzahl der Zeitschritte:</u> Steuergröße für das Kriechen und für die</p> <p><u>Iterationsstrategie:</u> "NZTMAX" = Anzahl der gewünschten Zeitschritte "NK" = Steuergröße für das Kriechen NK = 0: Nur thermisches Kriechen NK = 1: Nur strahlungsinduziertes Kriechen NK = 2: Thermisches und strahlungsinduziertes Kriechen "NT" = Steuergröße für drei verschiedene Iterationsstrategien nach Abb. 13 NT = 1 Ohne Spannungsverbesserung innerhalb <math>\Delta t_m</math> (s. S. 33) und mit <math>(\underline{s})_m = (\underline{s})_{m-1} + (\Delta \underline{s})_m</math> NT = 2 Ohne Spannungsverbesserung innerhalb <math>\Delta t_m</math> und mit <math>(\underline{s})_m = (\underline{s})_{m-1} + (\Delta \underline{s})_m / 2</math>. NT = 3 Mit Spannungsverbesserung innerhalb <math>\Delta t_m</math> und mit <math>(\underline{s})_m = (\underline{s})_{m-1} + (\Delta \underline{s})_m / 2</math>.</p>
10 20 ⋮ 80	8G10.2 8G10.2 ⋮ 8G10.2	<p><u>Längen der BE-Felder von links nach rechts:</u> "FL(J)" J = 1 ... N Feldlängen in [cm] ⋮</p>
10 20 ⋮ 80	8G10.2 8G10.2 ⋮ 8G10.2	<p><u>Randtemperaturen an der zum Corezentrum weisenden Kastenflachseite:</u> "TEMP(1,J)" J = 1 ... (N+1) Randtemperaturen in [°C] in allen (N+1) Feldgrenzen auf der Innenseite "i" in Abb. 2 ⋮</p>
10 20 ⋮ 80	8G10.2 8G10.2 ⋮ 8G10.2	<p><u>Randtemperaturen an der zum Coremantel weisenden Kastenflachseite:</u> "TEMP(2,J)" J = 1 ... (N+1) Randtemperaturen in [°C] in allen (N+1) Feldgrenzen auf der Außenseite "a" in Abb. 2</p>

Karten- spalten- Nr.	Format	"Name", Beschreibung
10 20 30	3G10.2	<p>⋮</p> <p>Anfangszeitpunkt, Zeitschrittweite, Spannungsgrenze <math>\epsilon_i</math>, in Glg. (41):</p> <hr/> <p>"ZEITØ" = Zeitpunkt für Kriechbeginn in [sec]. (Schwellbeginn stets beim Zeitpunkt Null).</p> <p>"DLT" = Zeitschrittweite <math>\Delta t</math> in Glg. (36) in [sec]. (<math>\Delta t</math> wird konstant gehalten, wenn Glg. (41) erfüllt ist; sonst entsprechend reduziert).</p> <p>"EPS" = Spannungsgrenze <math>\epsilon_i</math>, in Glg. (41) in Prozent.</p>
10 20	2G10.2	<p>Wärmeausdehnungskoeffizient, Kriechkonstante in Glg. (44):</p> <hr/> <p>"ALPHA" = Linearer Wärmeausdehnungskoeffizient <math>\alpha</math> in Glg. (36) in [1/Grd C]</p> <p>"BSIK" = Kriechkonstante <math>\gamma_0</math> in Glg. (44) in [cm<sup>4</sup>/(n kp)]</p>
10 20 ⋮ 50	5G10.2	<p><u>Kriechparameter für thermisches Kriechen:</u></p> <p>"ZNØF(J)" J = 1...5 Nortonexponenten <math>n</math> in Glg. (43) bei den Temperaturen 500, 550, 600, 650, 700 ° C</p>
10 20 ⋮ 50	5G10.2	<p>"SC7F(J)" J = 1...5 Kriechgrenze <math>S_0 = S_{c7}</math> [kp / cm<sup>2</sup>] in Glg. (43) bei den Temperaturen 500, 550, 600, 650, 700 ° C</p>
10 20 ⋮ 80	8G10.2	<p><u>Elastizitätsmodul:</u></p> <p>"E(J)" J = 1...N Feldweise Elastizitätsmodul in [kp / cm<sup>2</sup>] etwa in Glg. (9), (38)</p> <p>⋮</p>
10 20 ⋮ 80	8G10.2	<p><u>Wandstärken des BE-Kastens</u></p> <p>"DCK(J)" J = 1...N Feldweise Kastenwandstärken [cm] <math>D_j</math> z. B. in Abb. 4</p> <p>⋮</p>

Karten- spalten- Nr.	Format	"Name", Beschreibung
10 20 : 80	8G10.2	<u>Schlüsselweiten des BE-Kastens</u> "SW(J)" J = 1...N Feldweise Kastenschlüssel- weite [cm] $H_j$ z. B. in Abb. 4 : : <u>Rand-Neutronenflußdichten an der zum Core-                      zentrum weisenden Kastenflachseite:</u>
10 20 : 80	8G10.2	"FLSS(1,J)" J = 1...(N+1) Rand-N.F.Dichten in [n/(cm <sup>2</sup> sec)] an allen (N+1) Feld- grenzen auf der Innenseite "i" in Abb. 2 ( $\phi_i$ ) : <u>Rand- und Neutronenflußdichten an der zum                      Coremantel weisenden Kastenflachseite:</u>
10 20 : 80	8G10.2	"FLSS(2,J)" J = 1...(N+1) Rand-N.F.Dichten in [n/(cm <sup>2</sup> sec)] an allen (N+1) Feld- grenzen auf der Außenseite "a" in Abb. 2 ( $\phi_a$ ) : :

Für die Ausgabe von Ergebnisfeldern wurden innerhalb von 'BEKS' vorhandene PRINT-Unterprogramme benutzt [15]. Außer der Eingabe selbst besteht die Ausgabe aus folgendem:

Format/ U.Progr.	"Name", Beschreibung
	<u>Feldrandkoordinaten, Einfluß- und Nachgiebigkeits-                      matrizen, Hilfsmatrizen</u>
PRINT1	"A(J)" J = 1...N Koordinaten des rechten Feldrandes in [cm]
PRINT2	"B0(I,J)" I = 1...2N Einflußmatrix $B_0$ gemäß J = 1...2(N+1)-M Glg. (2), (13)
PRINT2	"B1(I,J)" I = 1...2N Einflußmatrix $B_1$ gemäß J = 1...(M-2) Glg. (2), (13)
PRINT2	"F(I,J)" I = 1...2N Gesamtheit aller Feld- J = 1...2N nachgiebigkeitsmatrizen $E$ gemäß Glg. (11), (12)

Format/ U.Progr.	"Name", Beschreibung
PRINT2	"D10(I,J)" I = 1...(M-2) J = 1...2(N+1)-M Hilfsmatrix $\underline{D}_{10}$ gemäß Glg. (22), (23)
PRINT2	"D11(I,J)" I = 1...(M-2) J = 1...(M-2) Hilfsmatrix $\underline{D}_{11}$ gemäß Glg. (22), (23)
PRINT2	"DI(I,J)" I = 1...(M-2) J = 1...(M-2) Hilfsmatrix $-\underline{D}_{11}^{-1}$ gemäß Glg. (22), (23)
PRINT2	"B(I,J)" I = 1...2N J = 1...2(N+1)-M Einflußmatrix $\underline{B}$ gemäß Glg. (13)
PRINT2	"X(I,J)" I = 1...(M-2) J = 1...2(N+1)-M Hilfsmatrix $\underline{X}$ gemäß Glg. (22)
	<p>Thermische Lösung zur Zeit ZEIT0,                      Schwell-Lösung zur Zeit ZEIT0,  <u>Gesamte Anfangslösung zur Zeit ZEIT0</u></p> <p style="text-align: center;">Thermische Lösung:</p> <p>PRINT1 "DKT(J)" J = 1...(N·NFQ) Krümmungen <math>\alpha(j,i)</math> in [1/cm] gemäß Glg. (36) in allen Querschnitten</p> <p>PRINT1 "P(J)" J = 1...2N Systemschnittlasten <math>\bar{p}</math> gemäß Glg. (10) in [kp·cm] bzw. [kp]</p> <p>PRINT1 "D(J)" J = 1...2(N+1)-M Systemdeformationen <math>\bar{d}</math> gemäß Glg. (25) in [rad] bzw. [cm]</p> <p>PRINT1 "R(J)" J = 1...(M-2) Kräfte <math>\bar{x}</math> an den inneren Lagern gemäß Glg. (25) in [kp]</p> <p>PRINT2 "S(I,J)" I = 1...(N·NFQ)-2 Biegespannungen <math>\underline{s}</math> J = 1...4(NDA+NDI)+1 analog Glg. (34) mit Glg. (25) und (33) in [kp/cm<sup>2</sup>] in bzw. über allen Querschnitten (<math>\underline{s}(i,i)</math> z.B. ist die Lokalspannung am Innenrand "i" in Abb. 2 des Querschnittes <math>\xi_2</math> (Abb. 9 vom ersten Balkenfeld))</p> <p style="text-align: center;">Schwell-Lösung:</p> <p>PRINT1 "DKT(J)" ... infolge Schwellen während der Zeit ZEIT0</p> <p>PRINT1 "P(J)" ... " " "</p> <p style="text-align: center;">⋮</p> <p>PRINT2 "S(I,J)" ... " " "</p> <p style="text-align: center;">Gesamte Anfangslösung:</p> <p>PRINT1 "DKT(J)" ... Thermische plus Schwell-Lösung</p> <p>PRINT1 "P(J)" ... " " "</p> <p style="text-align: center;">⋮</p> <p>PRINT2 "S(I,J)" ... " " "</p>



Format/ U.Progr.	"Name", Beschreibung
PRINT1	"DK(J)" J = 1...2(N+1)-M Systemdeformationsanteil allein infolge des Kriechens im System

Der Ablauf der Rechnung ist in dem Flußdiagramm der Abb. 12 zu erkennen. Dem zentralen Steuerprogramm 'MAIN' sind eine Reihe von weitgehend autonomen Unterprogrammen angeschlossen, deren Namen und Funktionen der folgenden Übersicht zu entnehmen sind:

Name	Funktion
'ETM'	Aufbau der Einflußmatrizen $B_0$ und $B_1$ (s. Glg. (2), (13)) unter Benutzung der Feldlängen und Lagerverhältnisse
'NAM'	Aufbau der Nachgiebigkeitsmatrix $F$ (s. Glg. (11), (12)) unter Benutzung der Längen und Steifigkeiten der Felder
'DMA'	Aufbau der Hilfsmatrizen $D_{10}$ und $D_{11}$ (s. Glg. (22), (23)) unter Benutzung der $B_0$ , $B_1$ und $F$
'INV'	Inversion der Hilfsmatrix- $D_{11}$ ergibt die Matrix $DI$
'EMB'	Aufbau der Einflußmatrix $B$ (s. Glg. (13)) unter Benutzung der $B_0$ , $B_1$ , $DI$ und $D_{10}$
'HPDRZS'	Berechnung der freien Zusatzdeformationen $H$ der Felder (Vektor $h$ in Glg. (32)) aus Krümmungen infolge Kriechen $DQS$ (Größe $\Delta \epsilon(j,i)^c$ in Glg. (36)) infolge thermischer Ausdehnung bzw. Schwellen $DKT$ (Größen $\Delta \epsilon(j,i)^{th}$ bzw. $\Delta \epsilon(j,i)^s$ in Glg. (36)). Berechnung der Schnittlasten $P$ , Systemdeformationen $D$ und Lagerkräfte $R$ sowie Spannungen $S$ nach Glg. (25), (33), (34) unter Verwendung von 'ZKØØRD'
'ZKØØRD'	Berechnung des Schwerpunktabstandes $Z$ (Vektor $\zeta$ z. B. in Glg. (28), (33)) im Feld $j$ bei Biegung über die Flachseite
'SPGAE'	Umspeichern und Akkumulation der Lösungsinkremente gemäß Glg. (27), (40). Zeitschrittkorrektur etc.
'SIMPS'	Numerische Berechnung der Integrale Glg. (36) nach Simpson unter Verwendung von 'INTPL'
'KRIECH'	Berechnung der nichtlinearen Spannungsänderung $E_j \Delta e_j(i,k)^c$ infolge Kriechen gemäß Glg. (38) sowie der Spannungsänderung $\Delta s_j(i,k)^{z2}$ gemäß Glg. (25), (33) infolge $DQS$ . Berechnung der mittleren Dehnung $DKS$ (vgl. $\Delta e_m(j,i)$ ) in Glg. (36) sowie der Krümmung $DQS$ infolge Kriechen. Verwendung von 'ZKØØRD', 'INTPL', 'SIMPS'.

Name	Funktion
'INTPL'	Bestimmung der Lokal-Temperaturen $T$ und $N$ . Flußdichten $\phi$ gemäß Glg. (35). Lineare Interpolation der thermischen Kriechparameter $n$ , $S_{c7}$ gemäß der Lokal-Temperatur
'SWELL'	Berechnung der Feldkrümmungen infolge Schwellen
'CURVE'	Berechnung und Zusammensetzung der Feldkrümmungen infolge thermischer Ausdehnung und/oder Schwellen. Verwendung von 'INTPL', 'SWELL'
'PRINT1' 'PRINT2'	Ausdrucken von ein- und zweidimensionalen Feldern

Um eine Vorstellung für die Rechenzeiten mit der jetzigen Version von 'BEKS' (Kernspeicherplatzbedarf rund 240 K) zu geben, zeigt Abb. 13 den CPU-Rechenzeitbedarf auf einer IBM 360/65 über der Anzahl der Zeitschritte nach der Iterationsart  $NT = 3$ . Um ein typisches Brennelement hinreichend genau zu berechnen (30 Felder, 25 Punkte über dem Querschnitt), werden pro Zeitschritt mit einer Spannungsiteration nach  $NT = 3$  rund 2 sec benötigt.

## 5.2 Anwendung

### 5.2.1 Thermisches Kriechen eines dreifach gelagerten Balkens

Die praktische Anwendung von 'BEKS' soll zunächst an dem einfachen Beispiel der Abb. 5 gezeigt werden. Es handelt sich dabei um einen Balken konstanter Biegesteifigkeit, der auf drei äquidistanten Stützen ruht und durch einen axial konstanten Temperaturgradienten beansprucht wird. Das Material soll stationär thermisch kriechen, wobei die Kriechparameter  $n$ ,  $S_{c7}$  die in Abb. 14 gezeigte Temperaturabhängigkeit haben mögen (Werkstoff: Austenitischer Stahl X8CrNiMoVNb 1613, Nr. 4988). Der Balken habe der Einfachheit halber einen hexagonalen Hohlquerschnitt mit typischen Abmessungen eines BE-Kastens und sei in 8 Felder gleicher Länge unterteilt (Abb. 14). Es wird nur der reine Ausgleichsvorgang (ohne Schwellen, d. h. Fluß = Null) über 400 Tage betrachtet.

Man hat dann folgende Größen in der angegebenen Reihenfolge einzulesen:

N = 8	}	NDA = 2	}
M = 3		NDI = 4	
N1 = 4		NZTMAX = 200	
N2 = 0		NK = 0	
N3 = 0		NT = 2	

FL(J) = { 25.0 ... 25.0 } [cm] J = 1 ... 8

TEMP(1,J) = { 700.0 ... 700.0 } [°C] J = 1 ... 9

TEMP(2,J) = { 670.0 ... 670.0 } " J = 1 ... 9

ZEITØ = 0.

DLT = 1.726 10<sup>5</sup> [sec] ≈ 2 Tage

EPS = 15.0 [%]

ALPHA = 1.75 10<sup>-3</sup> [1/Grd C]

BSIK = 0.

ZNØF(J) = { 19.00 15.00 10.80 6.70 2.50 } [÷] J = 1 ... 5

SC7F(J) = { 3000. 2300. 1610. 920. 230 } [kp/cm<sup>2</sup>] J = 1 ... 5

E(J) = { 1.70 10<sup>6</sup> ... 1.70 10<sup>6</sup> } [kp/cm<sup>2</sup>] J = 1 ... 8

DCK(J) = { 0.3000 ... 0.3000 } [cm] J = 1 ... 8

SW(J) = { 11.00 ... 11.00 } [cm] J = 1 ... 8

FLSS(1,J) = { 0.0 ... 0.0 } [n/(cm<sup>2</sup> sec)] J = 1 ... 9

FLSS(2,J) = { 0.0 ... 0.0 } [n/(cm<sup>2</sup> sec)] J = 1 ... 9

Der Einfachheit halber wird nur ein Teil der Ausgabe in Abb. 15, 16 grafisch wiedergegeben (siehe auch Abb. 5).

Die Geschichte der Systemdeformationen und Lagerkräfte ergibt, daß z. B. die Maximaldurchbiegung mit der Zeit bis auf rund 0,25 mm zunimmt, während die Lagerkräfte typisch für diesen Relaxationsvorgang abnehmen und asymptotisch einem Grenzwert zustreben. Beispielsweise sinkt die anfängliche Auflagerkraft von rund 429. [kp] am mittleren Lager zwischen dem 300. und 400. Tag nur noch von 129. auf rund 117. [kp]. Abb. 16 zeigt den Verlauf der Biegespannungen über dem Querschnitt am mittleren Lager. Diese Spannungen wirken normal zum Querschnitt, und man erkennt, wie die am Anfang linear verteilten thermoelastischen Spannungen (maximal rund ± 669. kp/cm<sup>2</sup>) mit der Zeit stark abgebaut und um-

gelagert werden (nach 400 Tagen rund  $+ 286. \text{kp/cm}^2$  bzw.  $- 72.9 \text{kp/cm}^2$ ). Erwartungsgemäß kriecht das Material auf der heißeren Kastenseite stärker, was einerseits zu dem unterschiedlichen Spannungsabbau ( $i/a$  in Abb. 16) andererseits zur Verschiebung der neutralen Faser um 2.3 cm, d. h. rund 21 % der Schlüsselweite führt.

### 5.2.2 Betriebsverhalten von SNR-Brennelementkästen

Abschließend wird das Betriebsverhalten von zwei BE-Versionen des SNR-300 mit Hilfe von 'BEKS' untersucht.

Abb. 17 zeigt die Version "A" mit der mittleren Verspannungsebene (Lager II) in der unteren, d. h. kalten Brutzone des Cores.\* Das Bild gibt die wesentlichen Maße, die Feldeinteilung ( $N=28$ ) sowie typische Temperatur- und Flußdichteverläufe für ein BE in der 7. Reihe wieder (äußerster Brennelementring). Diese Eingaben entsprechen einem stationären Vollastbetrieb des Reaktors und es interessiert das Betriebsverhalten des Kastens bei strahlungsinduziertem Kriechen und Schwellen des Werkstoffes 4988 über 300 Tage Standzeit. Der Einfachheit halber wird von dem hier unbedeutenden thermischen Kriechen abgesehen ( $NK=1$ ), außerdem sind die Lagerpositionen zeitlich unveränderlich. Die Abb. 18, 19, 20 geben typische Teilergebnisse wieder: Die Geschichte und Zusammensetzung der Deformationen, Spannungen und Lagerkräfte.

Abb. 18 zeigt die Biegelinie des BE-Kastens im heißen, verspannten Zustand zu verschiedenen Zeitpunkten. Da die thermische Ausbiegung im Corebereich zum Corezentrum hin erfolgt, hat man einen positiven Bowingkoeffizienten ("Materialverdichtung"). Am Ende der Standzeit tritt etwa in Coremitte eine maximale Durchbiegung von rund  $6.5 \text{ [mm]}$  zum Zentrum hin auf. Die Aufspaltung der Gesamtdeformation (**TOT**) in die thermischen (**TH**), Kriech- (**KR**) und Schwell- (**SCH**) Anteile zeigt die ausgleichende Wirkung des Kriechens, die nach 300 Tagen eine Reduktion der thermischen plus Schwelldeformation um über 40 % in Coremitte zur Folge hat. Abb. 19 gibt den örtlichen und zeitlichen Verlauf der Biegespannung wieder. Am Ende des Abbrandes tritt z. B. eine maximale Randspannung von  $16.4 \text{ [kp/mm}^2\text{]}$  kurz vor der Pflasterverstärkung am Lager II auf.

---

\* Interatom-Zeichnung B 61.067 vom 8. 1. 71

Man erkennt außerdem den starken Spannungsabbau infolge Kriechen (Reduktion der thermischen plus Schwelldeformation um mehr als 60 %). Darüber hinaus ergeben sich erwartungsgemäß schwach nicht-lineare Spannungsprofile im Corebereich, denn der Werkstoff kriecht gemäß Glg. (44) an der heißen Innenseite des Kastens stärker als außen. Die Folge davon ist u. a. zum Beispiel nach 300 Tagen eine Verschiebung der neutralen Faser um etwa 4 mm (rund 4 % der Schlüsselweite) in Coremitte. Schließlich wird am Ende der Standzeit im unteren Core-Drittel eine maximale Kriechdehnung von 0.295 % erreicht. Die dritte Abb. 20 gibt die Geschichte der Lagerkräfte wieder, die bei dieser BE-Version nach 300 Tagen am Lager II den Spitzenwert von 2.2  $[t]$  erreichen. Außerdem ist einmal die Endbiegeline und z. B. der zeitliche Verlauf von  $R_{II}$  bei verschiedenen Zeitschrittweiten gezeigt, und man erkennt, daß bereits ein DLT = 10. Tage (EPS = 10 — 15 %) hinreichend genaue Resultate liefert.

In Anlehnung an eine vom IRE vorgeschlagene Ausführung zeigt Abb. 21 die modifizierte Version "B" des SNR-Brennelements. Die mittlere Verspannungsebene (Lager II) liegt jetzt im oberen Brutmantel, und das Kopfende ist länger, das Fußende kürzer ausgeführt. Temperatur und Flußeingaben sind die gleichen wie in Abb. 17. Der Einfachheit halber wird aber axial unveränderliche Biegesteifigkeit angenommen. Teilergebnisse dieser Rechnung sind in Abb. 22 wiedergegeben, und man erkennt außer dem negativen, d. h. sicherheitstechnisch anzustrebenden Bowingkoeffizienten (thermische Auslenkung im Corebereich vom Corezentrum weg) ein günstigeres Langzeitbiegeverhalten (max. Durchbiegung rund 4.5  $[mm]$ ) dieser BE-Version. Darüber hinaus treten jetzt wesentlich niedrigere Lagerkräfte in den Verspannungsebenen auf (Spitzenwert 522. kp). Diese Verbesserung gegenüber der Version "A" ist möglich, wenn man den Temperaturgradienten im langen heißen Kopfteil dazu ausnutzt, die sehr starken Schwell-Verbiegungen im Corebereich zumindest teilweise zu kompensieren. Zu diesem Zweck muß allerdings die Verspannungsebene II im oberen, d. h. heißen BE-Teil liegen.

Literatur:

- [1] T. T. Claudson: "Irradiation Induced Swelling and Creep in Fast Reactor Materials", ANS-KTG-Meeting "Fast Reactor Fuel and Fuel Elements", Karlsruhe, Sept. 1970
- [2] E. R. Gilbert: "In-Reactor Creep of Reactor Materials", Reactor Technology Vol. 14, No. 3, 1971
- [3] F. K. G. Odqvist, J. Hult: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe, Springer-Verlag, 1962
- [4] C. A. Rapier, T. M. Jones: "Thermal Bowing of Reactor Fuel Elements", J. Nucl. Energy, parts A/B, 19, 1965
- [5] D. A. Kuczera, D. Mohr: "Bow-V, Program to Calculate Subassembly Configurations of a Thermally Bowed Reactor Core", Trans. Am. Nucl. Soc. 13, 1970
- [6] Y. S. Hoang: "Struktur-, Ausdehnungs- und Verbiegungseffekte im Schnellen Reaktor", Teil I - III, KFK 539/I-III, 1967
- [7] W. Helbling, I. von Allmen, R. Häberli: "Deformation of Fuel Element Boxes in Gas-Cooled Fast Breeder Reactors due to Neutron Irradiation Induced Swelling of Steel", Nucl. Eng. Design 16, 1971, S. 59 - 66
- [8] J. M. Corum, W. A. Shaw: "An Examination of the Time-Dependent Bowing Behaviour of Fuel Elements of the Experimental Gas-Cooled Reactor". Science and Engrg. 19, 1964, S. 143-150
- [9] W. E. Burchill: "Analysis of Bowing and Interaction of LMFBR Subassemblies". Conference on Fast Reactor Fuel Element Technology, New Orleans, La., April 1971
- [10] W. H. Sutherland, V. B. Watwood Jr.: "Creep Analysis of Statically Indeterminate Beams". BNWL-1362, Battelle Northwest, Richland, Washington, 1970
- [11] W. H. Sutherland: "AXICRP-Finite Element Computer Code for Creep Analysis of Plane Stress, Plane Strain and Axisymmetric Bodies". Nucl. Eng. Design 11, 1970, S. 269 - 285
- [12] E. Pestel, F. A. Leckie: Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, New York 1963

[13] S. Falk: "Ein übersichtliches Schema für die Matrizenmultiplikation", ZAMM Bd. 31, 1951, S. 152 - 153

[14] R. Zurmühl: Praktische Mathematik, Springer, Berlin 1963

[15] R. Schuster: IRE 6 - Notiz Nr. 62/1971, Kernforschungszentrum Karlsruhe (nicht veröffentlicht)

Nomenklatur:

$A$ [ $\text{cm}^2$ ]	Balken-Querschnittsfläche
$AT$ [ $\div$ ]	Temperaturfunktion in Glg. (45)
$B$ [ $\text{rad}, \text{cm}$ ]	System-Einflußmatrix
$B_o$ [ $\text{rad}, \text{cm}$ ]	Einflußmatrix bei Belastung durch $\bar{f}$ ( $\bar{x} = 0$ .)
$B_i$ [ $\text{rad}, \text{cm}$ ]	Einflußmatrix bei Belastung durch $\bar{x}$ ( $\bar{f} = 0$ .)
$C_{10}, C_{11}$	Hilfsmatrizen zur Berechnung von $\bar{p}_L, \bar{f}_L, \bar{y}_L$ gemäß Glg. (26)
$D, D_j$ [ $\text{cm}$ ]	Wandstärke des BE-Kastens
$\bar{d}, \bar{d}_h, \bar{d}_L$ [ $\text{rad}, \text{cm}$ ]	Spaltenvektor der Systemdeformationen
$\underline{D}_{10}, \underline{D}_{11}$	Hilfsmatrizen zur Berechnung von $\bar{p}, \bar{d}, \bar{x}$ und $\bar{p}_h, \bar{d}_h, \bar{x}_h$ gemäß Glg. (24), (25)
$e, \underline{e}, \Delta e$ [ $\div$ ]	Gesamtdehnungen
$e_M, \Delta e_M$ [ $\div$ ]	Mittlere Gesamtdehnung über einen Balkenquerschnitt gemäß Glg. (30), (36)
$\dot{e}_o$ [ $\text{sec}^{-1}$ ]	Kriechdehnungsrate bei einer konstanten Referenzspannung
$E$ [ $\text{kp cm}^{-2}$ ]	Elastizitätsmodul des BE Werkstoffes
$\bar{f}, \bar{f}_L$ [ $\text{cm kp}, \text{kp}$ ]	Spaltenvektor der äußeren eingepprägten Einzellasten
$f^s, f^{c1}, f^{c2}$	Funktionen im Stoffgesetz Glg. (1)
$E, E_j$ [ $\text{cm kp}^{-1}, \text{kp}^{-1}$ ]	Feldnachgiebigkeitsmatrizen
$\bar{h}$ [ $\text{rad}, \text{cm}$ ]	Spaltenvektor der eingepprägten freien Felddeformationen
$H, H_j$ [ $\text{cm}$ ]	Schlüsselweite des BE-Kastens
$J$ [ $\text{cm}^4$ ]	Flächenträgheitsmoment des BE-Querschnittes
$I$ [ $\div$ ]	Anzahl der axialen Unterabschnitte im Balkenfeld
$i, j$ [ $\div$ ]	Orts-Indizes
$K_p$ [ $\text{kp cm}^{-1}, \text{kp}$ ]	Feldsteifigkeitsmatrizen
$K$ [ $\div$ ]	Anzahl der BE-Lager (Verspannungsebenen)

$L, l_j$ [cm]	Länge des Balkenfeldes
$L$ [cm]	BE-Lagerabstand (Stützweite)
$M$ [÷]	Anzahl der Streifen im unterteilten Balkenquerschnitt
$M_j, \bar{M}, M_h$ $M_L, \Delta M$ [cm kp]	Biegemoment im Balkenquerschnitt "Schnittmoment"
$m$ [÷]	Zeitschritt-Index
$\Delta N$ [kp]	Normalkraft im Balkenquerschnitt "Schnittlängskraft"
$N$ [÷]	Anzahl der Balkenfelder
$n$ [÷]	Norton Exponent in Glg. (43)
$NT$ [÷]	Kriechexponent in Glg. (45)
$\bar{P}, \bar{P}_j, \bar{P}_h, \bar{P}_c$ [cmkp, kp]	Spaltenvektor der inneren Lasten, "Schnittlasten"
$Q_j$ [kp]	Querkraft im Balkenquerschnitt "Schnittquerkraft"
$s, \underline{s}, \Delta \underline{s}$ [kp cm <sup>-2</sup> ]	Biegespannungen im BE
$s_{c7}$ [kp cm <sup>-2</sup> ]	Kriechgrenze bzw. Spannung, bei der rund 1 % bleibende Dehnung nach 12 Jahren zu erwarten ist.
$T, T_0$ [°C]	Lokale Temperatur am BE
$t, \Delta t$ [sec]	Zeit, Schrittweite
$V, \Delta V$ [cm <sup>3</sup> ]	Volumen
$\bar{V}, \bar{V}_j, \bar{V}_h$ [rad, cm]	Spaltenvektor der Felddeformationen
$w, w_j, \bar{w}$ [cm]	Auslenkung des BE-Balkens
$\underline{X}$	Hilfsmatrix zur Berechnung von <b>B</b>
$\bar{x}, \bar{x}_h$ [kp]	Spaltenvektor der "statisch unbestimmten" Lagerkräfte
$(x, y, z)$ [cm]	Kartesische Systemkoordinaten
$\bar{y}_L$ [rad, cm]	Spaltenvektor der "kinematisch unbestimmten" Systemdeformationen

$\alpha$ [Grd C <sup>-1</sup> ]	Linearer Wärmeausdehnungskoeffizient des BE-Werkstoffes
$\beta_{ik}$	Konstanten in Glg. (31)
$\gamma_0$ [cm <sup>4</sup> n <sup>-1</sup> kp <sup>-1</sup> ]	Kriechkonstante in Glg. (45)
$\varepsilon$ [÷]	maximal zulässige relative Spannungs- bzw. Dehnungsänderung pro Zeitschritt nach Glg. (41), (42)
$\mathcal{X}, \Delta\mathcal{X}$ [cm <sup>-1</sup> ]	Krümmung der BE-Biegelinie
$\varphi, \varphi_j$ [rad]	Winkel der Tangente an die BE-Biegelinie
$\phi, \phi_0$ [n cm <sup>-2</sup> sec <sup>-1</sup> ]	Lokale Neutronenflußdichte am BE
( $\xi, \eta, \zeta$ ) [cm]	Kartesische Feldkoordinaten

Abbildungen:

- Abb. 1 Deformation eines 3-fach verspannten Brennelements infolge von Quergradienten der Temperatur und Neutronenflußdichte.
- Abb. 2 Bereichsweise Linearisierung des Verlaufs von Temperatur und Neutronenflußdichte.
- Abb. 3 Herausgeschnittenes Balkenfeld "j" mit freigelegten Schnittlasten und Randdeformationen.
- Abb. 4 Diskretisierung innerhalb eines Balkenfeldes mit hexagonalem Hohlquerschnitt.
- Abb. 5 Balken auf drei äquidistanten Stützen bei Belastung durch konstanten Temperaturgradienten.
- Abb. 6 Balken auf drei äquidistanten Stützen bei Belastung durch eine aufgeprägte Lagerverschiebung.
- Abb. 7 Falksches Schema zur Matrizenberechnung ① bis ⑧ und zur Auswertung der Gln. (25).
- Abb. 8 Inkrementelle Rechnung in der Zeit.
- Abb. 9 Deformationen eines unbehinderten Balkenfeldes infolge aufgeprägter Krümmungen.
- Abb. 10 Biegespannungen im Balkenfeld
- Abb. 11 Temperaturen im Balkenfeld
- Abb. 12 Rechenablauf und vereinfachtes Flußdiagramm von 'BEKS'.
- Abb. 13 Verschiedene Iterationsstrategien und Rechenaufwand von 'BEKS'.
- Abb. 14 Eingaben zum "Thermischen Sekundärkriechen eines 3-fach gelagerten Balkens".
- Abb. 15 Geschichte der Deformationen und Lagerkräfte (Beispiel Abb. 14).
- Abb. 16 Biegespannungsprofile (Beispiel Abb. 14)
- Abb. 17 Eingaben zum "SNR-Brennelementkasten Version A"

- Abb. 18 Form und Geschichte der BE-Deformationen, heißer verspannter Zustand (Beispiel Abb. 17).
- Abb. 19 Örtlicher und zeitlicher Verlauf der Biegespannungen (Beispiel Abb. 17).
- Abb. 20 Geschichte der Lagerkräfte, Einfluß der Zeitschrittweite (Beispiel Abb. 17).
- Abb. 21 Eingaben zum "SNR-Brennelementkasten Version B"
- Abb. 22 Geschichte der Biegelinie und Lagerkräfte (Beispiel Abb. 21)



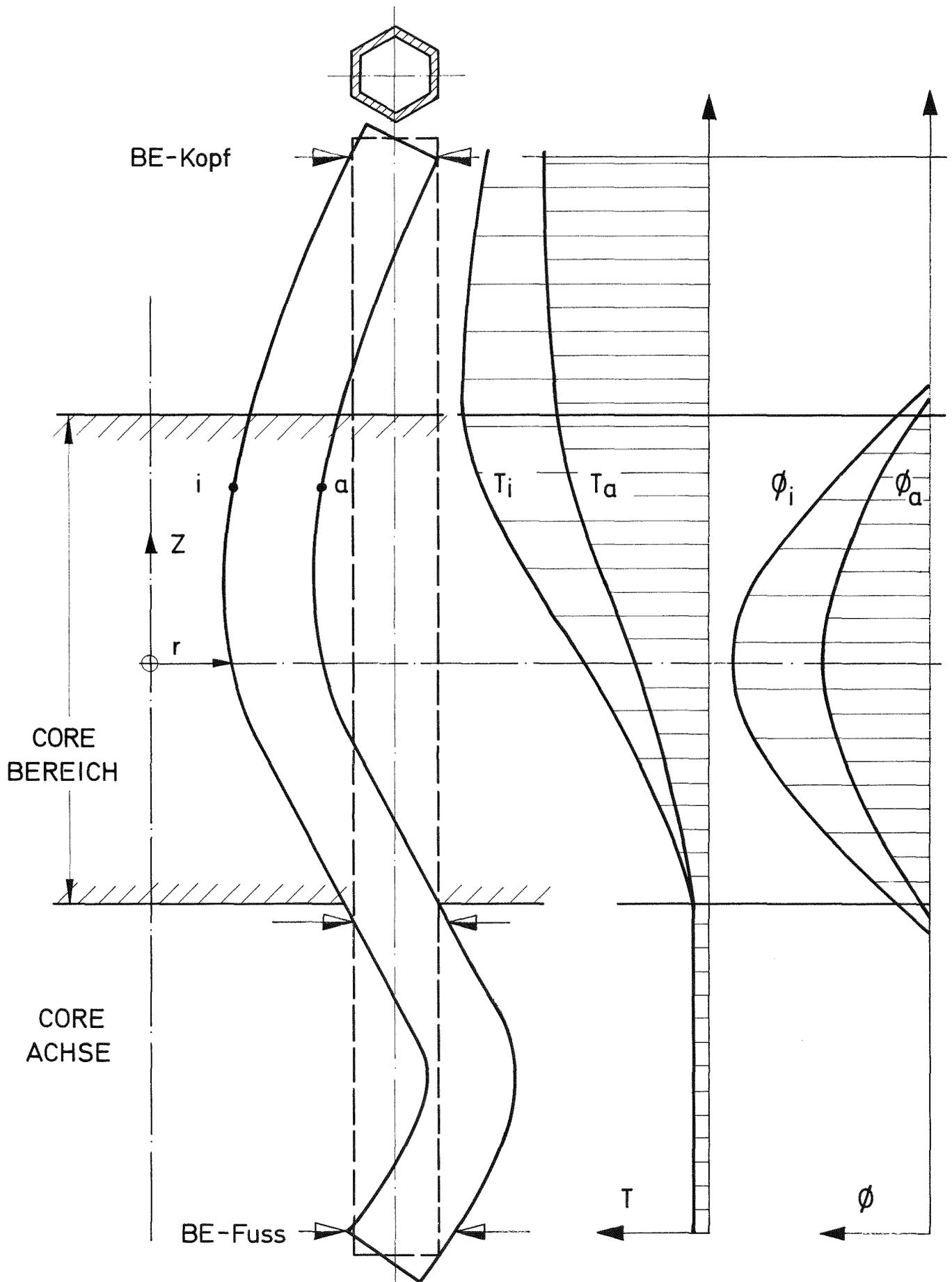


Abb. 1 : Deformation eines 3-fach verspannten BE infolge von Quergradienten der Temperatur und Neutronenflußdichte

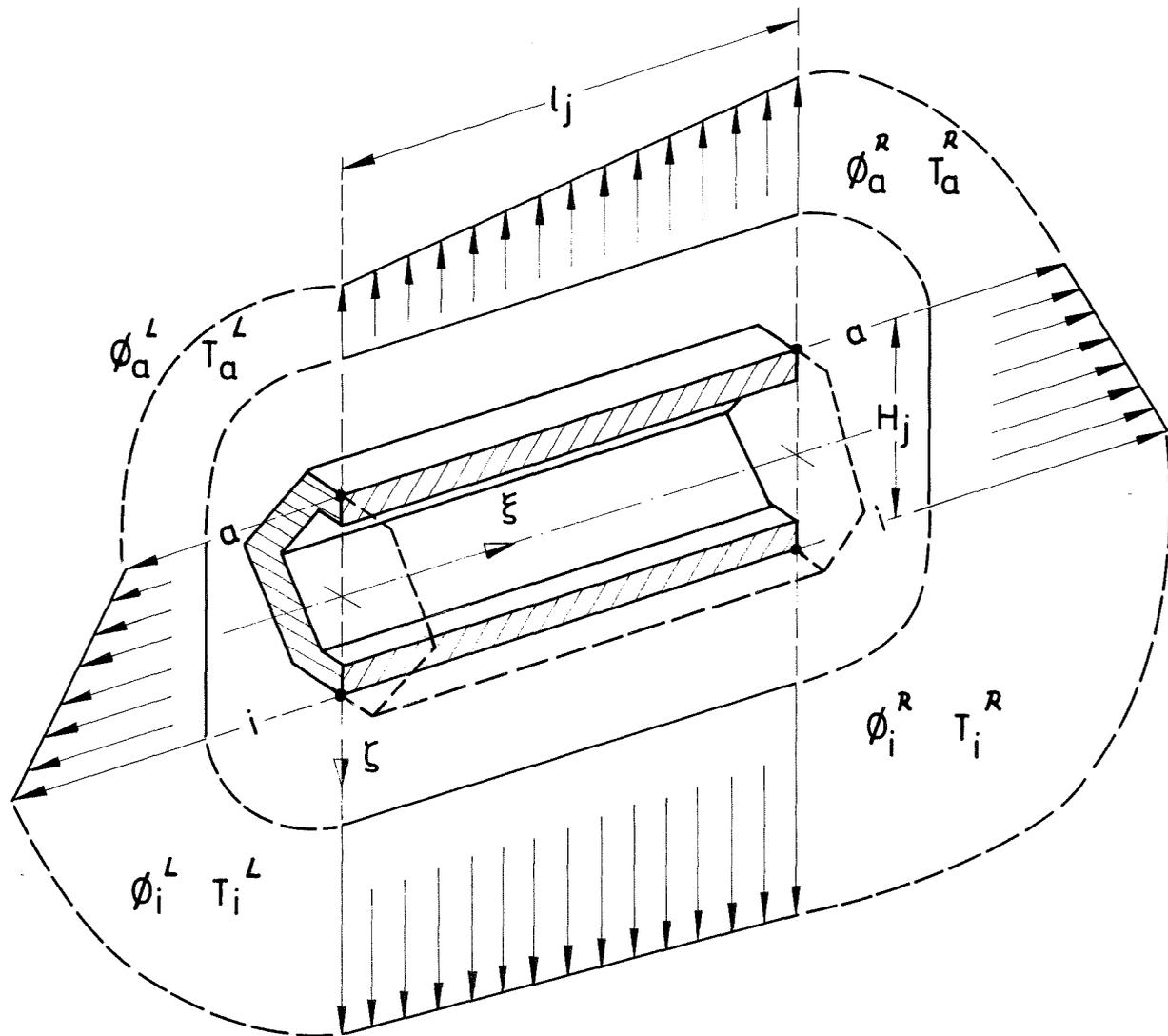


Abb. 2: Bereichsweise Linearisierung des Verlaufs von Temperatur und Neutronenflußdichte

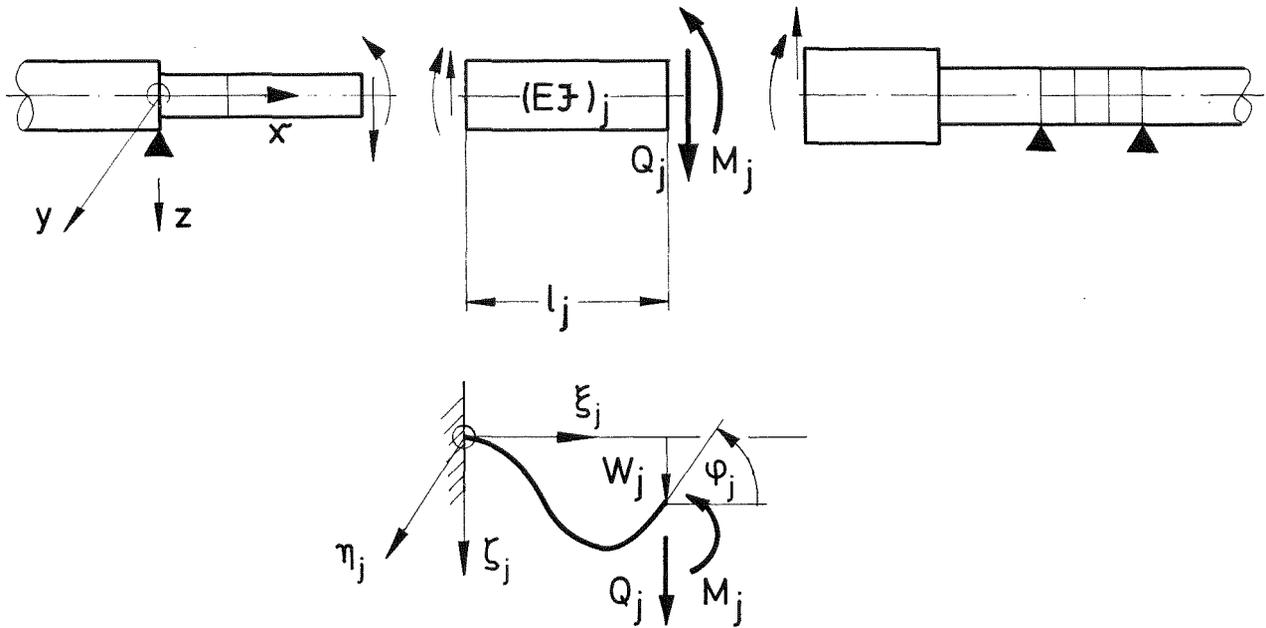


Abb.3: Herausgeschnittenes Balkenfeld "j" mit freigelegten Schnittlasten und Randdeformationen

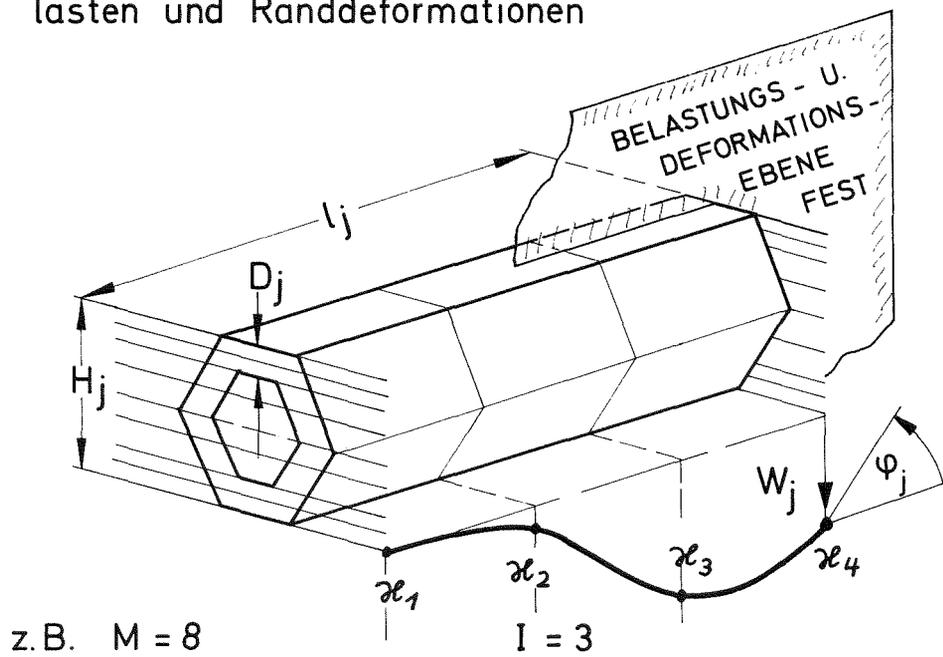
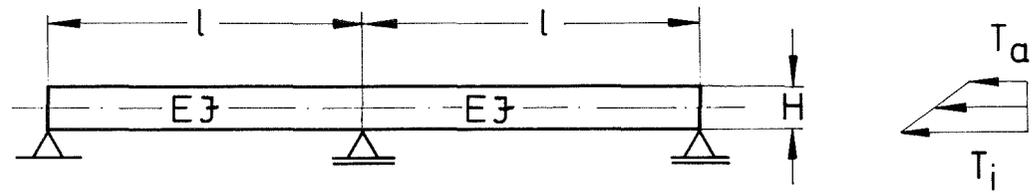
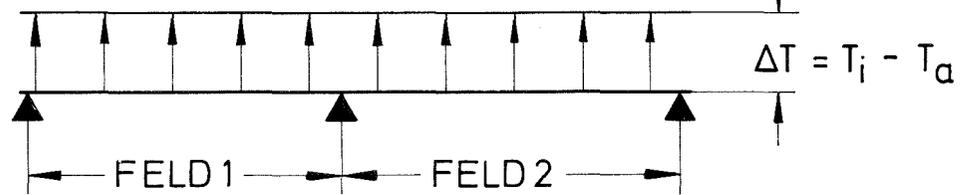


Abb.4: Diskretisierung an einem Balkenfeld mit hexagonalem Hohlquerschnitt

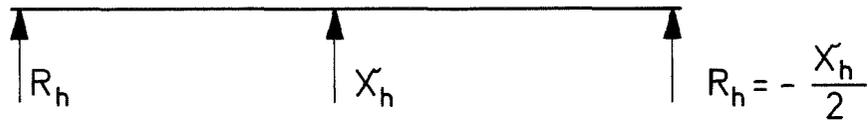
SUS :



TEMPERATUR

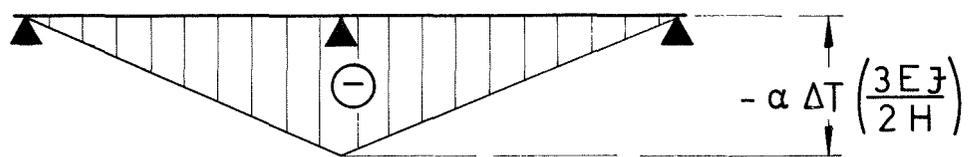


HS:

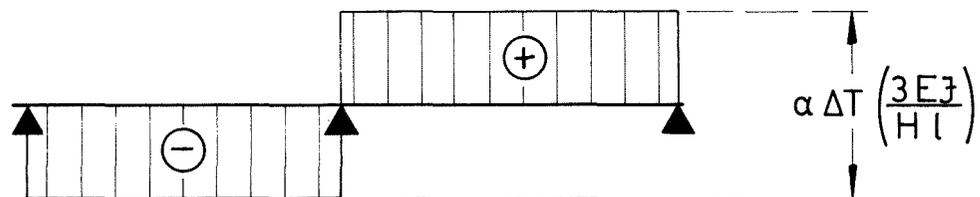


BIEGEMOMENT  $M_h$

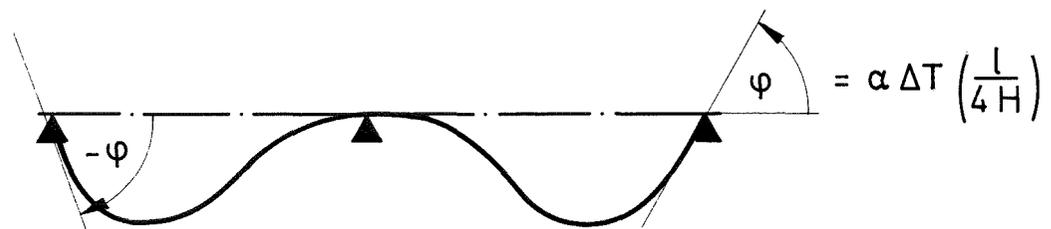
$$X_h = -\alpha \Delta T \left( \frac{3EJ}{Hl} \right)$$



QUERKRAFT  $Q_h$

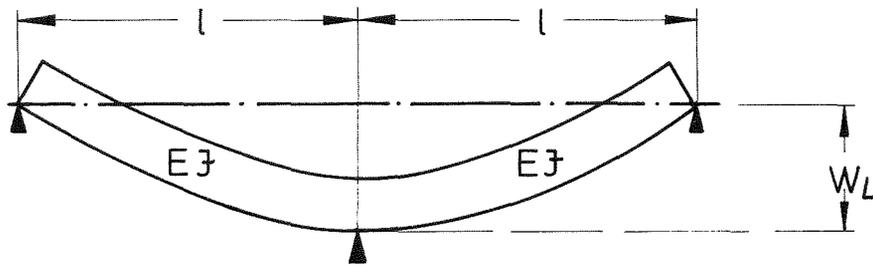


BIEGELINIE  $W_h$

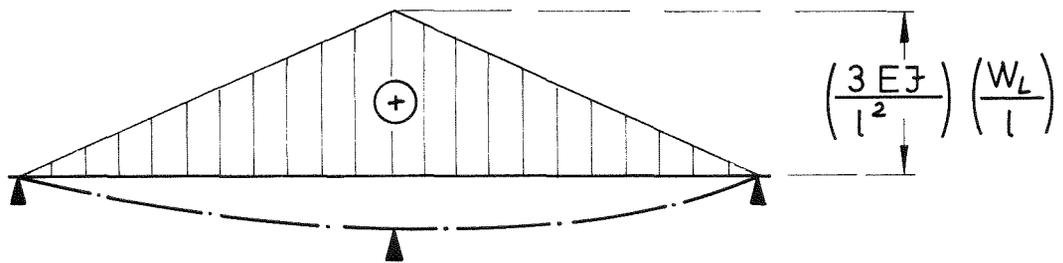


**Abb.5:** Balken auf drei äquidistanten Stützen bei Belastung durch konstanten Temperaturgradienten

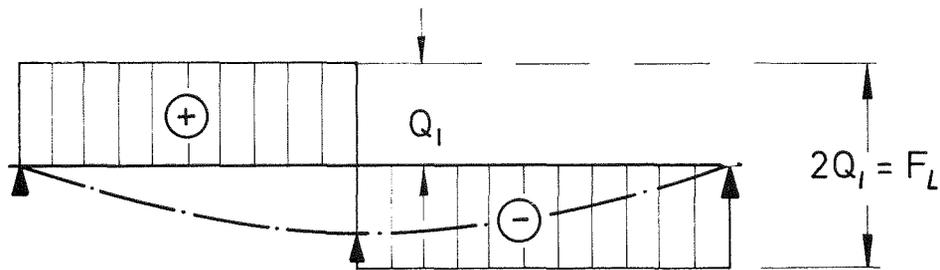
# LAGERVERSCHIEBUNG



# BIEGEMOMENT $M_L$



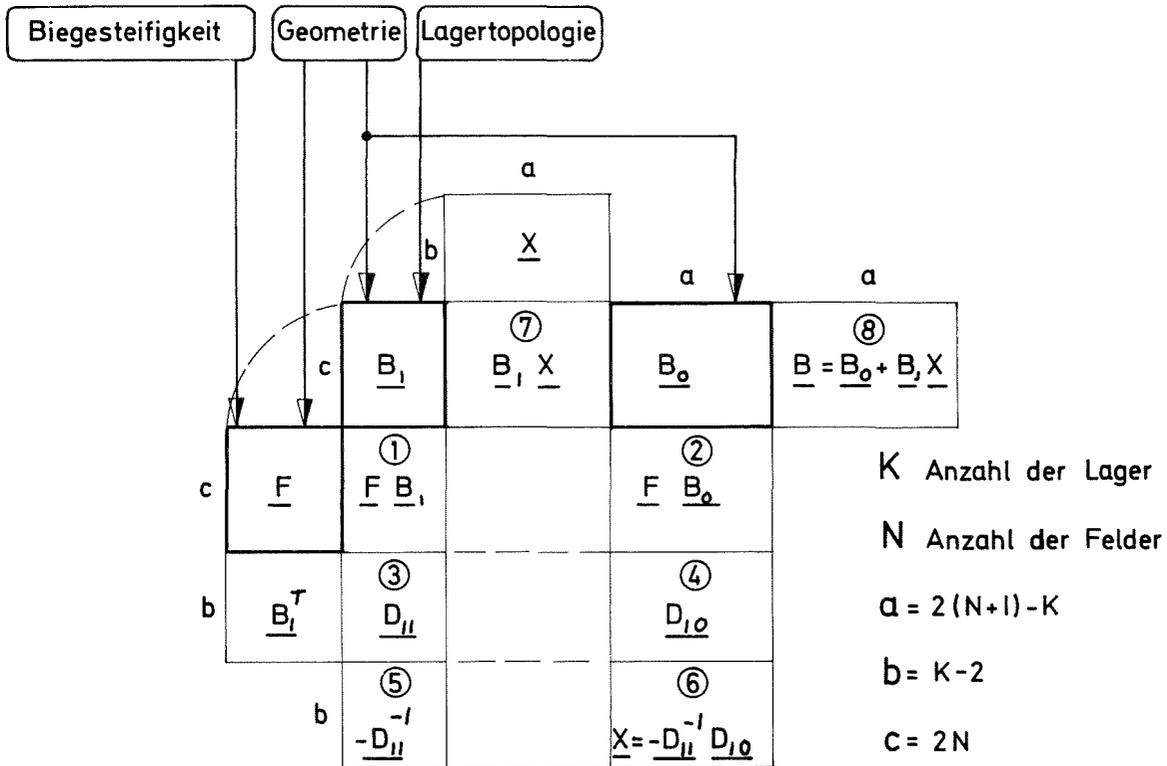
# QUERKRAFT $Q_L$      ÄUSSERE LAST $F_L = \left(\frac{6EJ}{l^2}\right) \left(\frac{W_L}{l}\right)$



# BIEGELINIE



Abb.6: Balken auf drei äquidistanten Stützen bei Belastung durch eine aufgeprägte Lagerverschiebung



**Zusatzdeformationen**

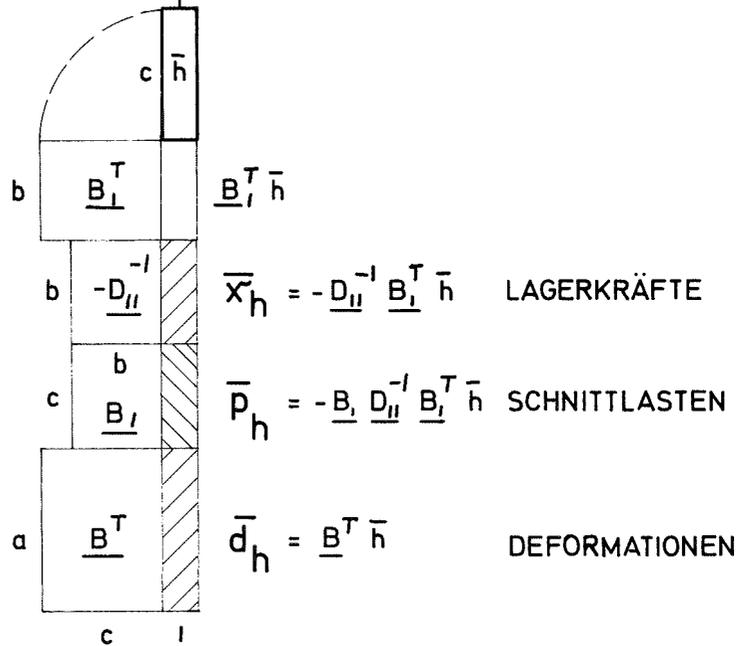


Abb.7: Falk'sches Schema zur Matrizenberechnung ① bis ⑧ und zur Auswertung der Glgn. (25)

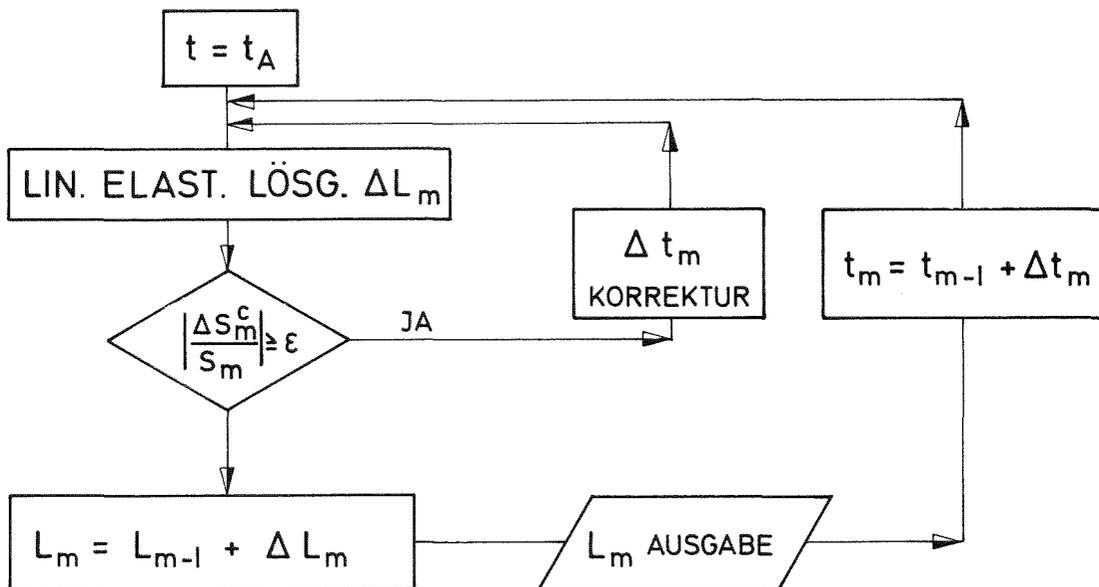
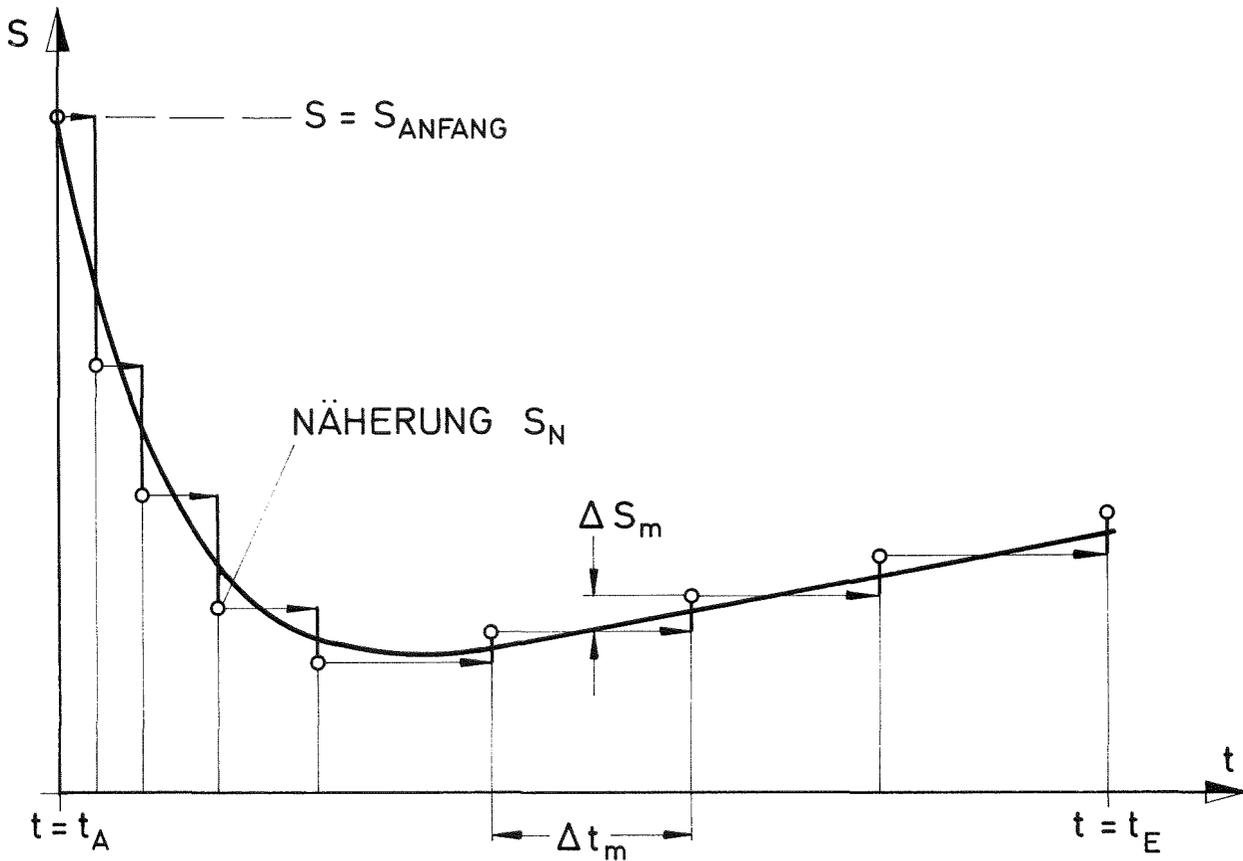
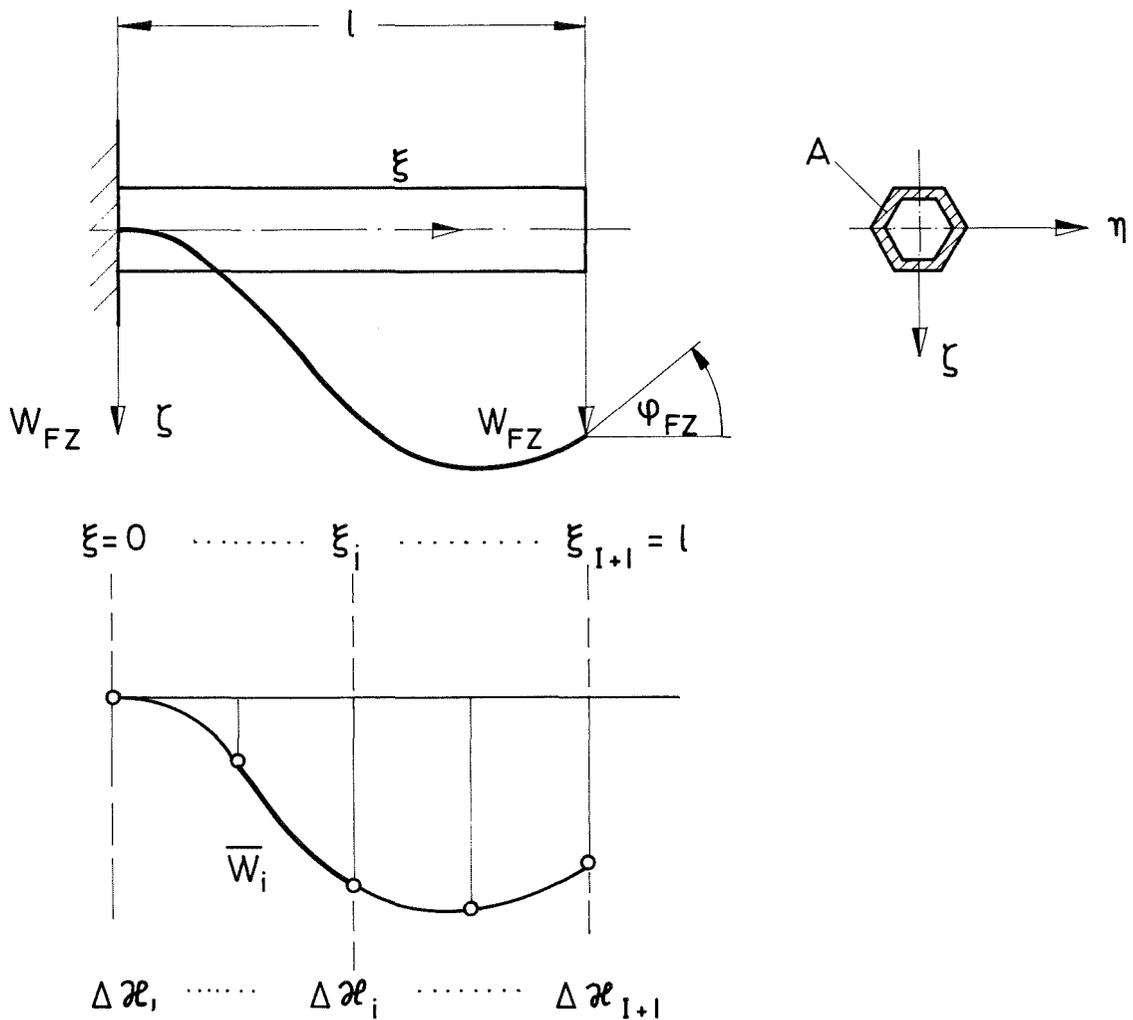


Abb. 8: Inkrementelle Rechnung in der Zeit



3(I+1) RAND-BZW. ÜBERGANGSBEDINGUNGEN:

$$\bar{w}_{I+1}(l) = w_{FZ} \dots \bar{w}_i(\xi_{i-1}) = \bar{w}_{i-1}(\xi_{i-1}) \dots \bar{w}_1(0) = 0$$

$$\bar{w}'_{I+1}(\eta) = -\varphi_{FZ} \quad \bar{w}'_i(\eta) = \bar{w}'_{i-1}(\eta) \quad \bar{w}'_1(\eta) = 0$$

$$\bar{w}''_{I+1}(\eta) = \Delta\chi_{I+1} \quad \bar{w}''_i(\eta) = \bar{w}''_{i-1}(\eta) = \Delta\chi_{i-1} \quad \bar{w}''_1(\eta) = \Delta\chi_1$$

**Abb.9:** Deformationen eines unbehinderten Balkenfeldes infolge aufgeprägter Krümmungen

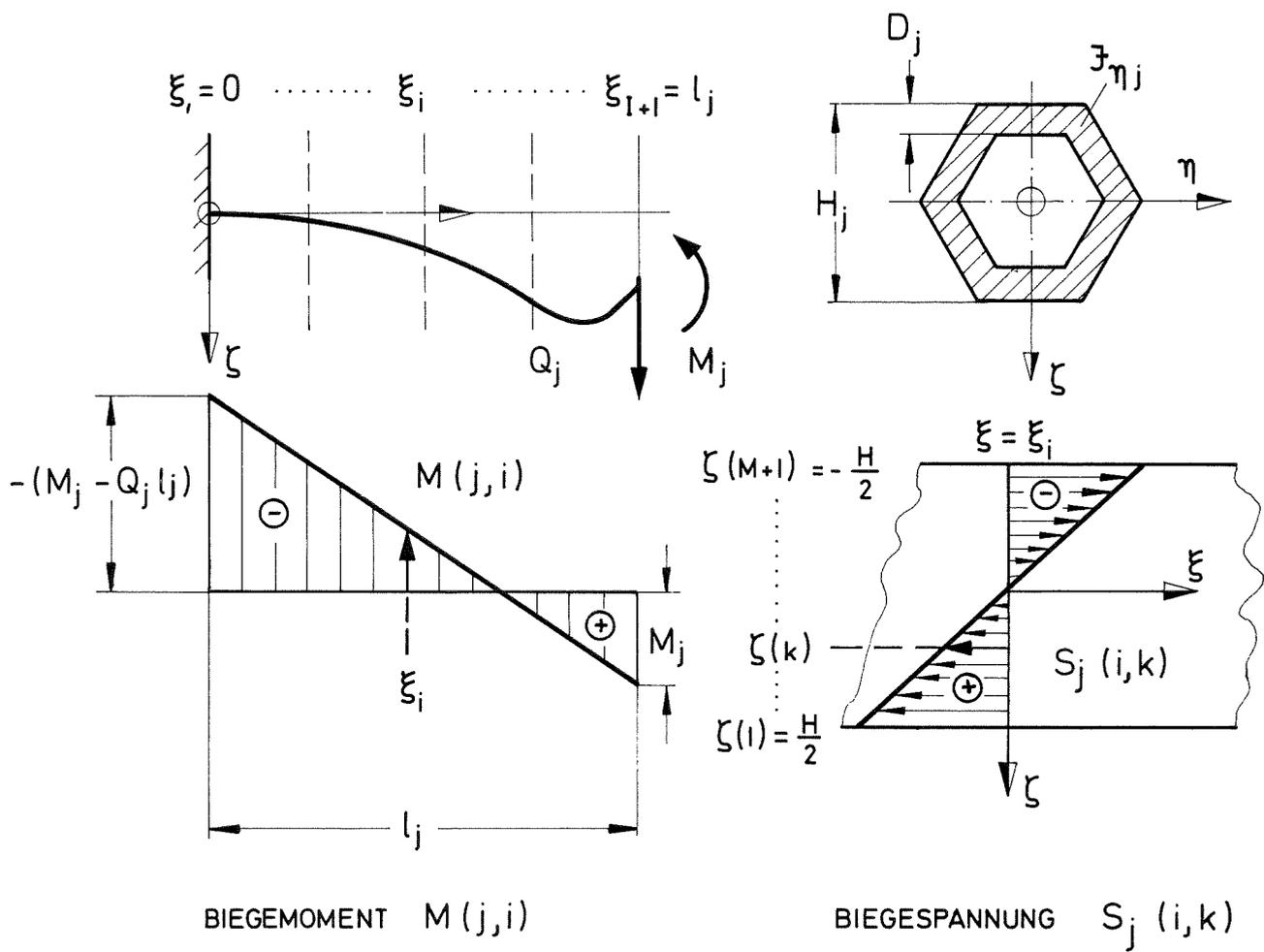


Abb.10: Biegespannungen im Balkenfeld

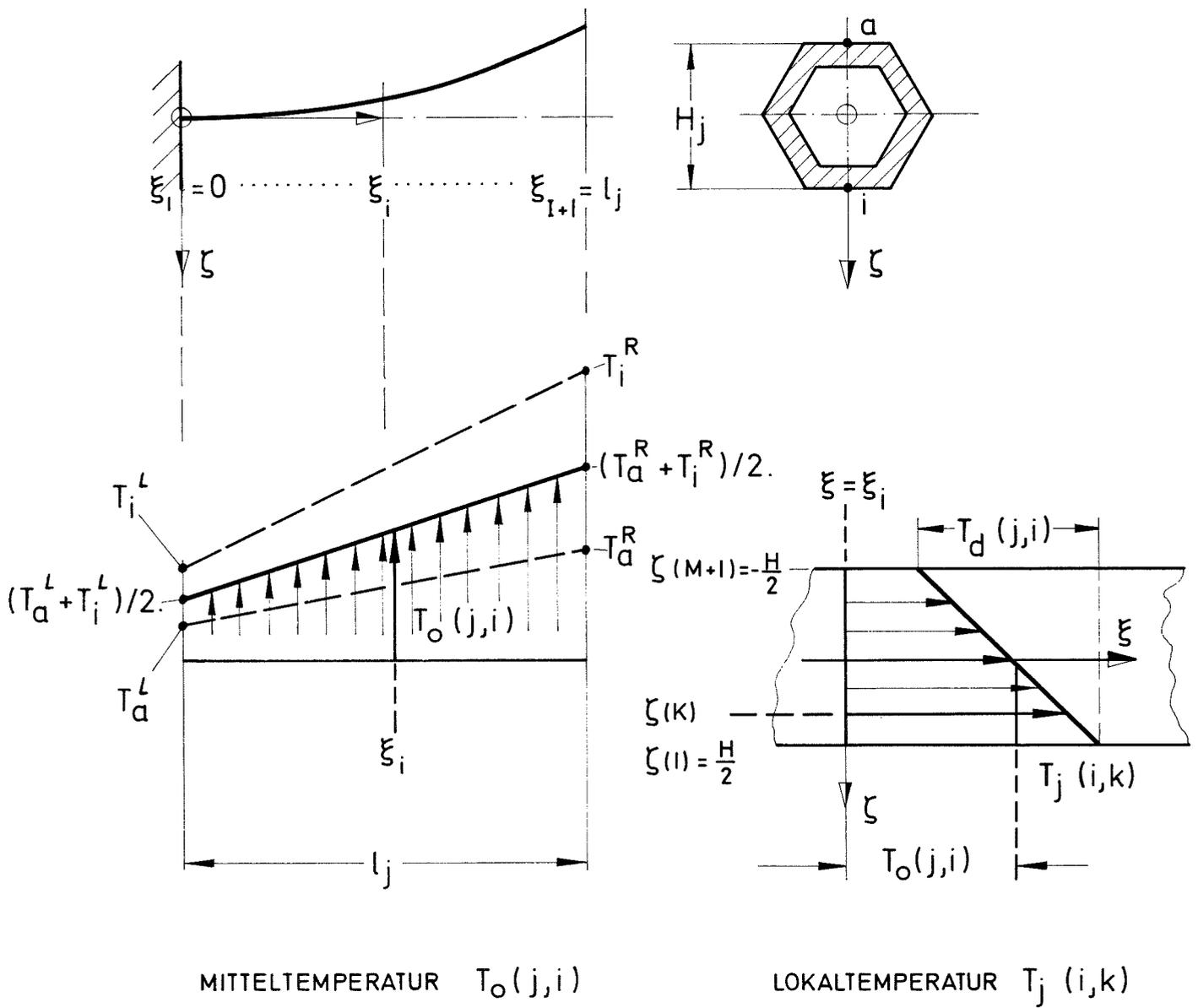


Abb.11:    Temperaturen im Balkenfeld



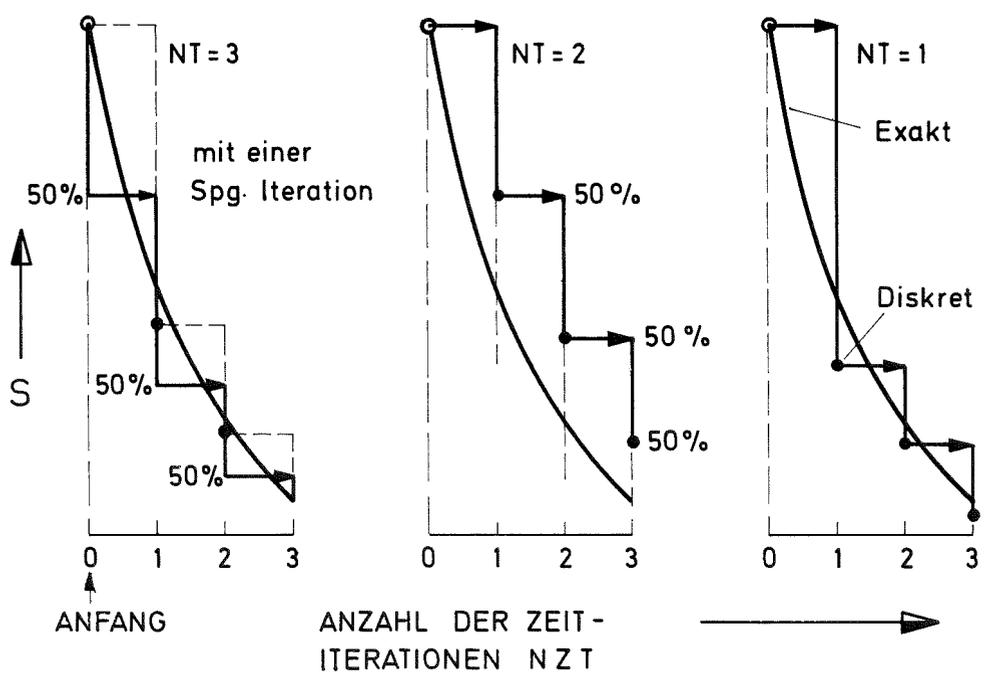
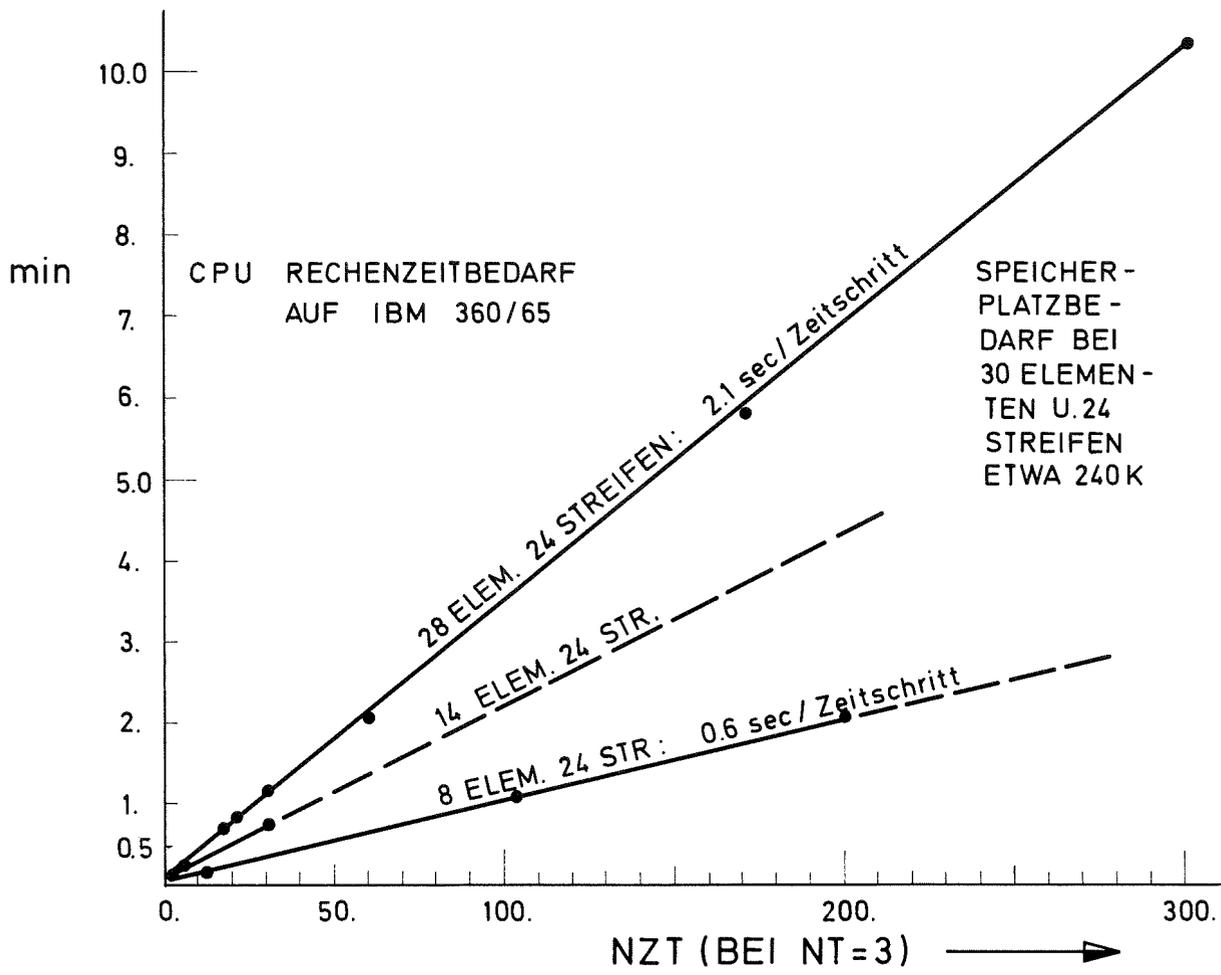
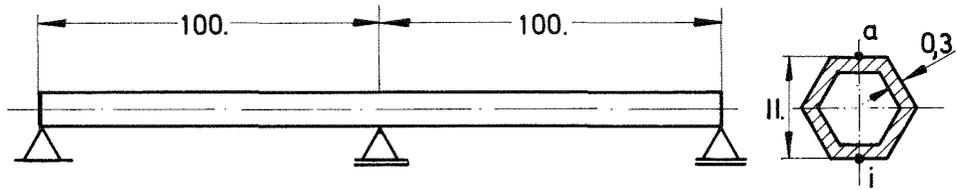


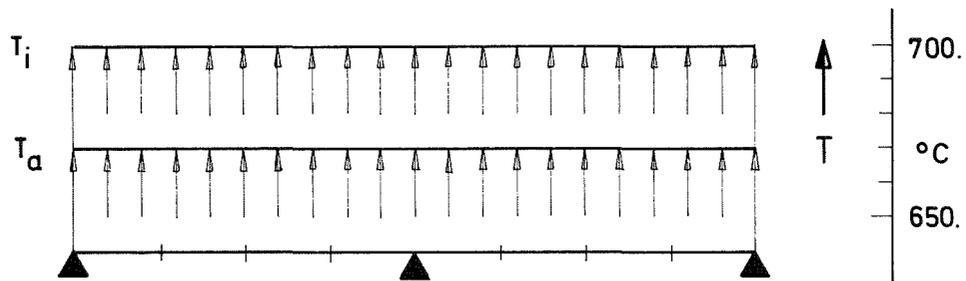
Abb.13: Verschiedene Iterationsstrategien und Rechenaufwand von "BEKS"

GEOMETRIE, LAGER

[ cm ]



TEMPERATUR



WERKSTOFF 4988

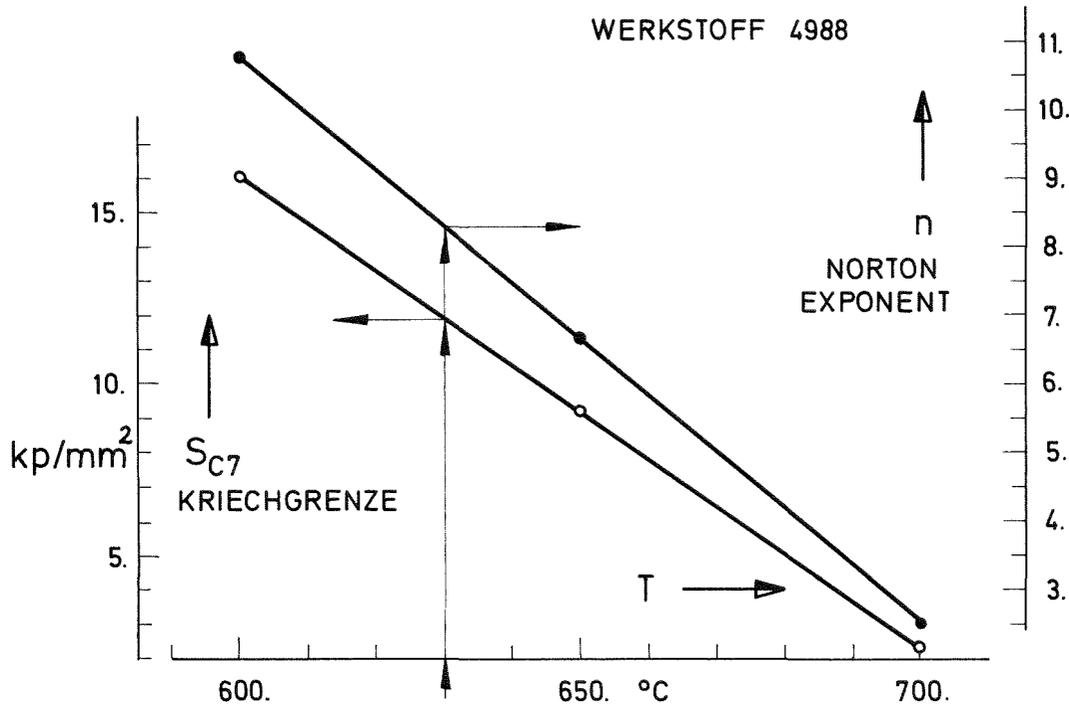
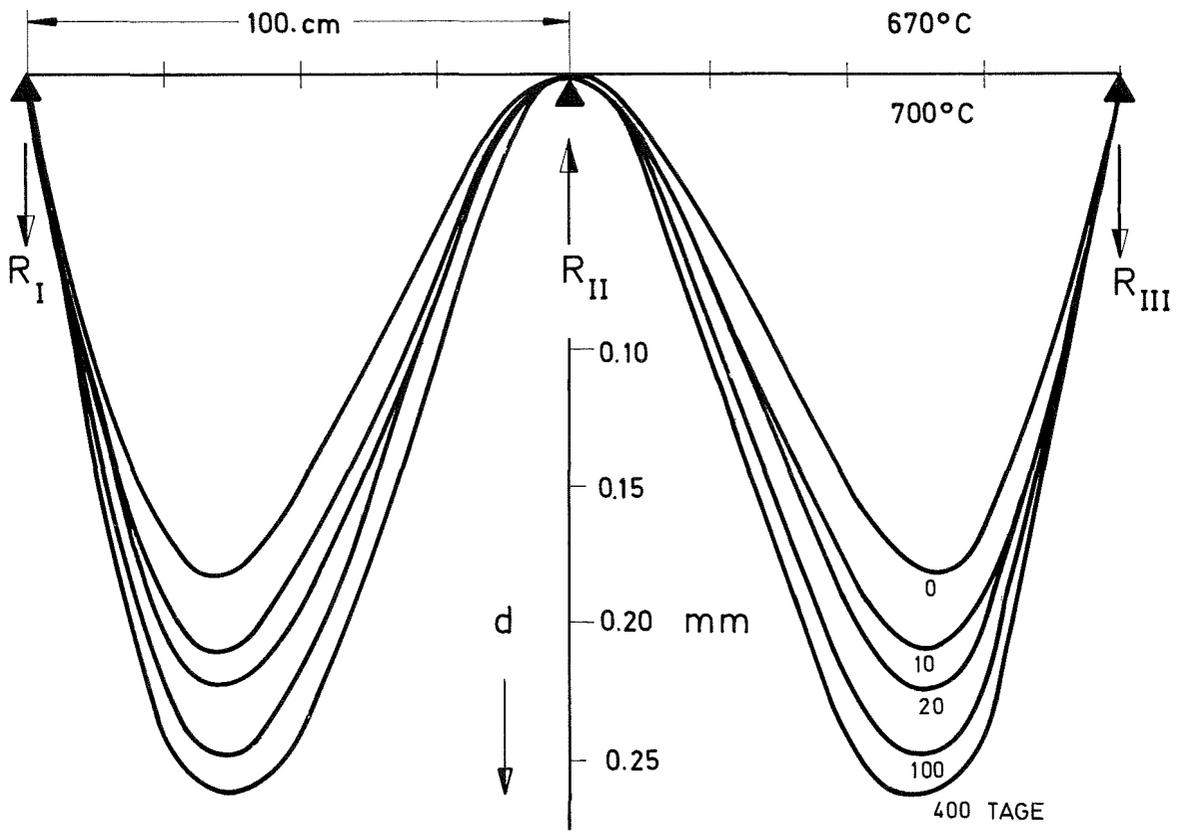
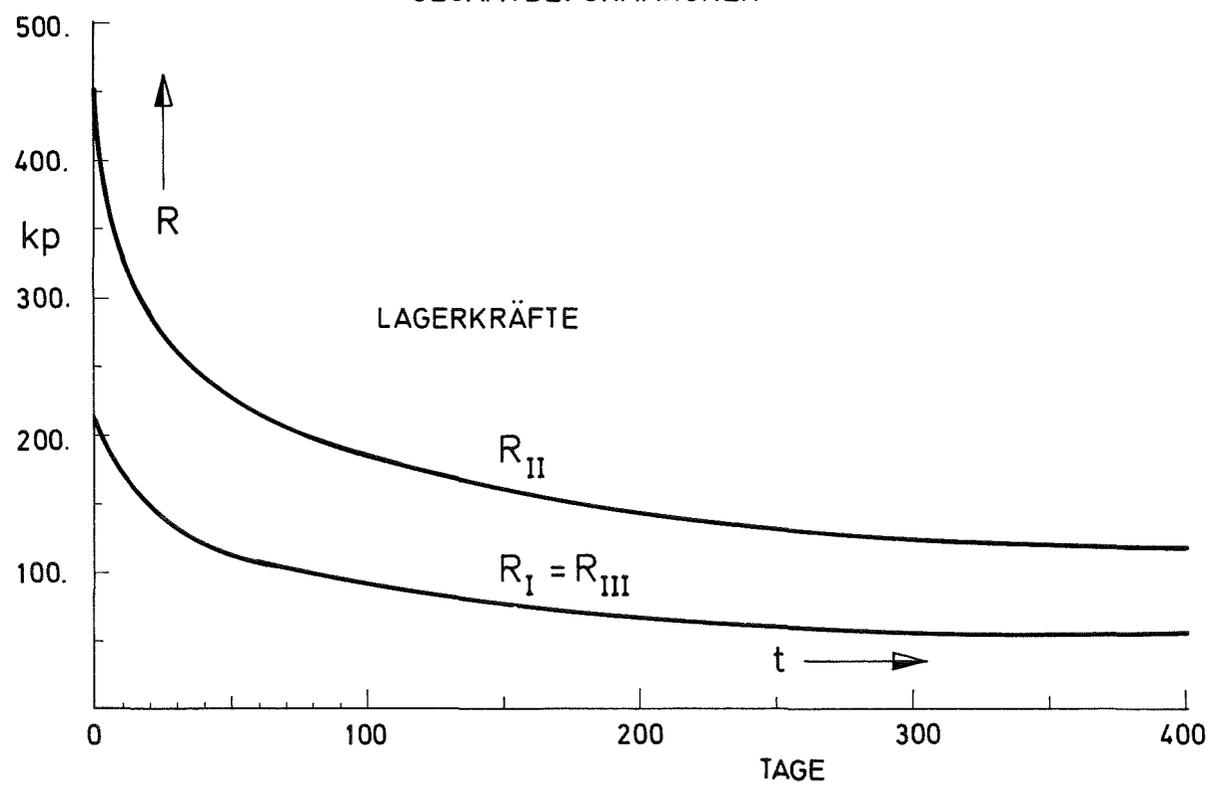


Abb.14: Eingaben zum "Thermischen Sekundärkriechen eines dreifach gelagerten Balkens"



GESAMTDEFORMATIONEN



**Abb.15:** Geschichte der Deformationen und Lagerkräfte  
(Beispiel Abb.14)

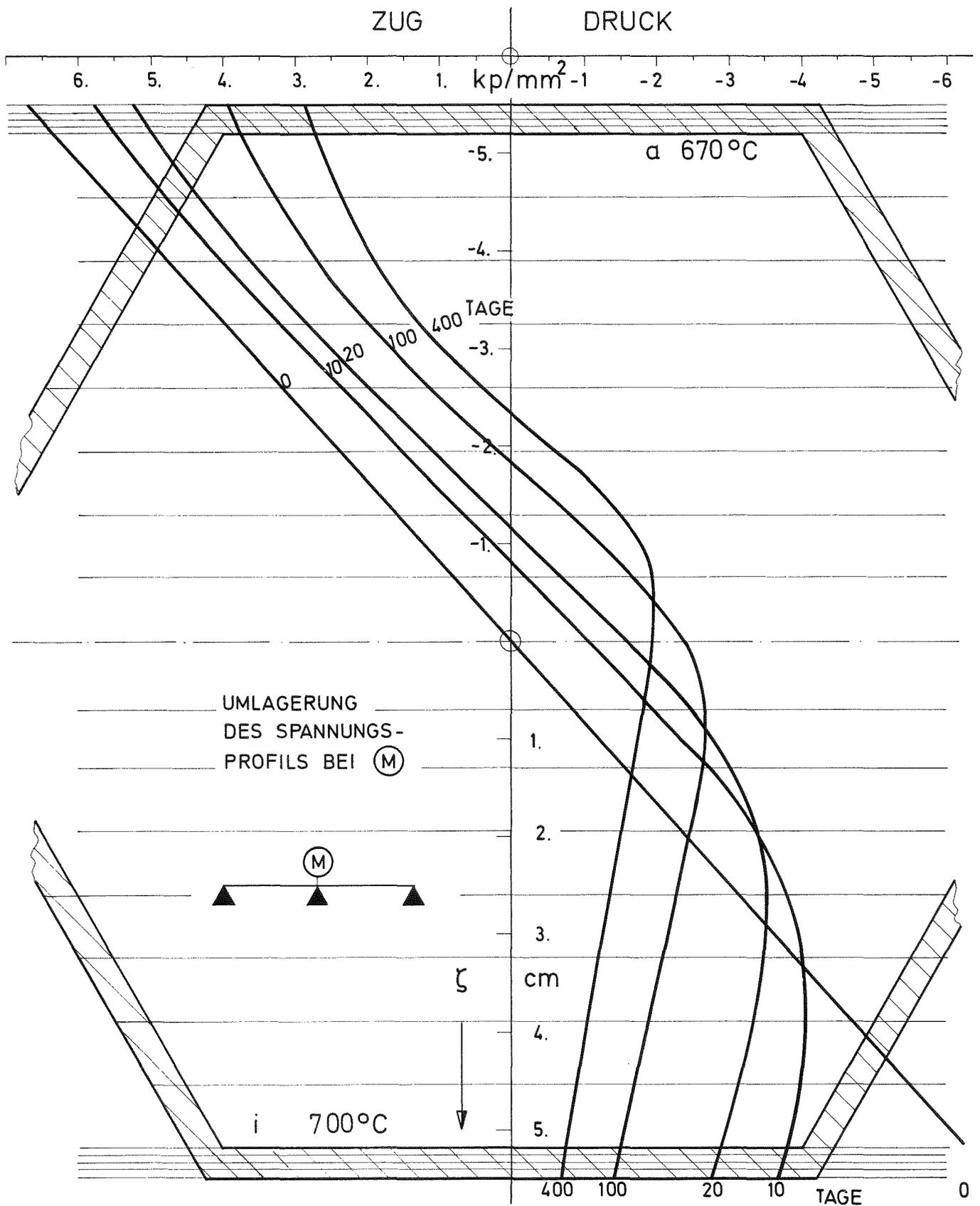


Abb.16: Biegespannungsprofile  
(Beispiel Abb.14)

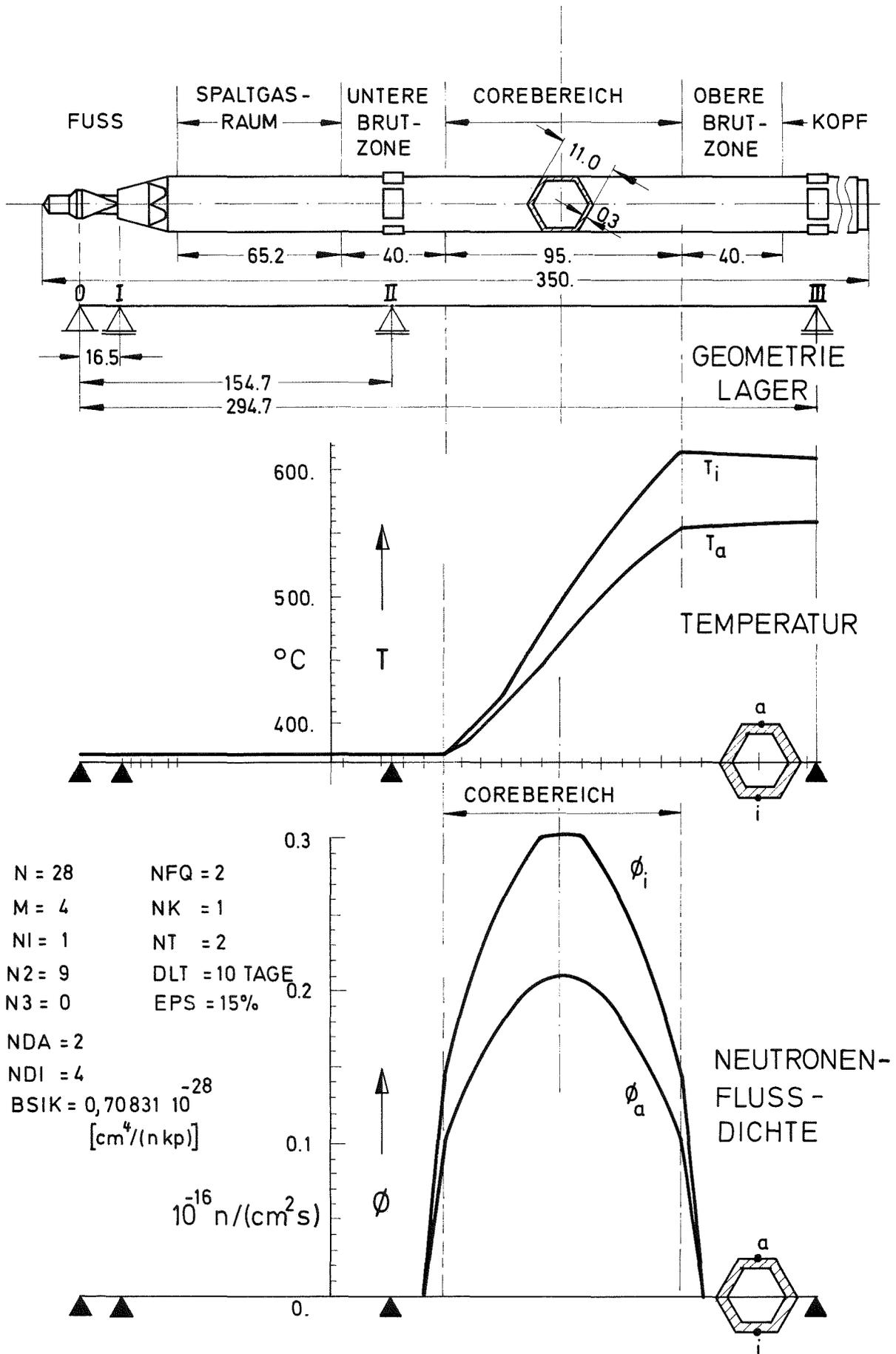
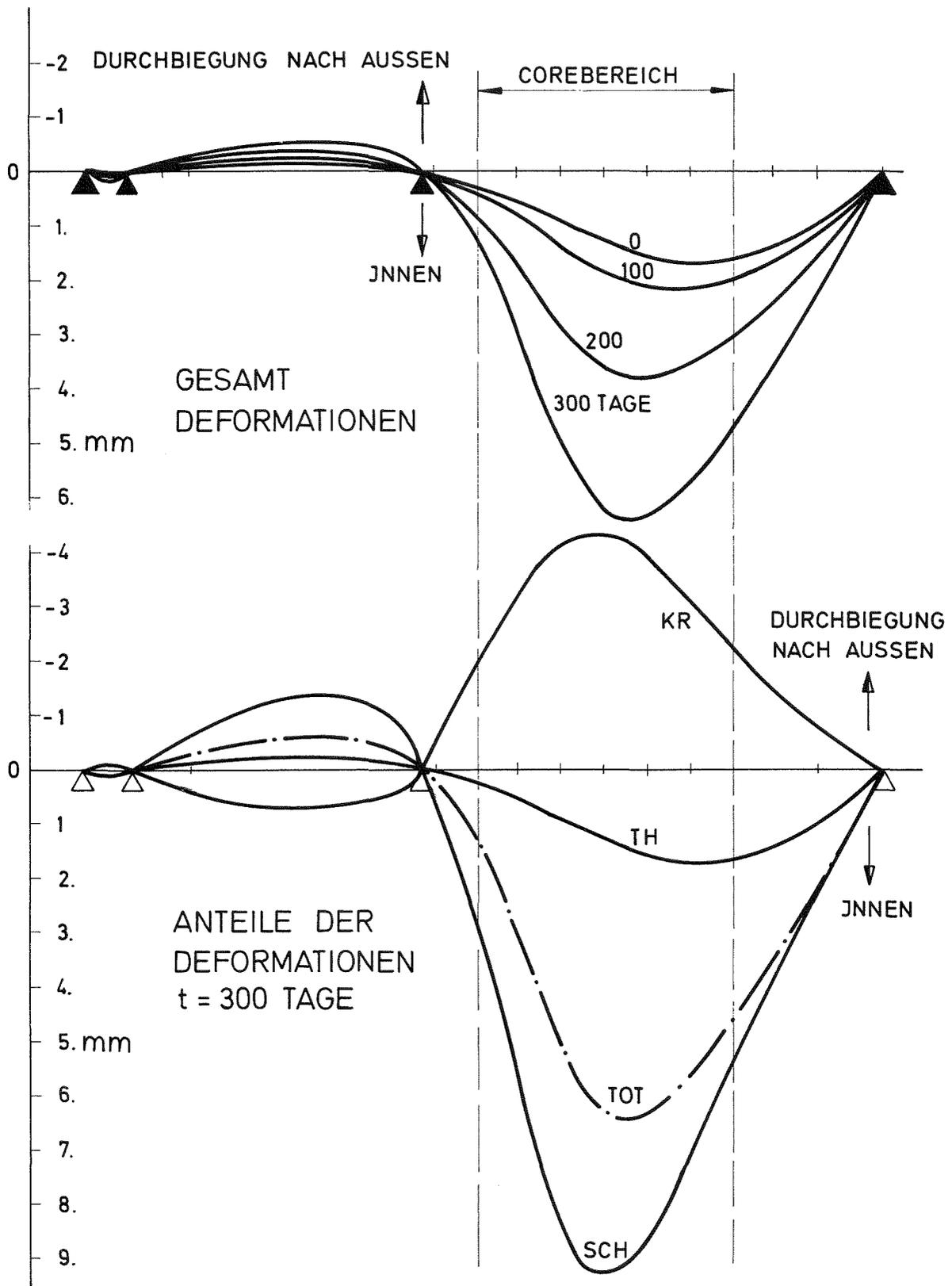


Abb.17: Eingaben zum "SNR-Brennelementkasten Version A"



**Abb.18:** Form und Geschichte der BE-Deformationen, heißer verspannter Zustand (Beispiel Abb.17)

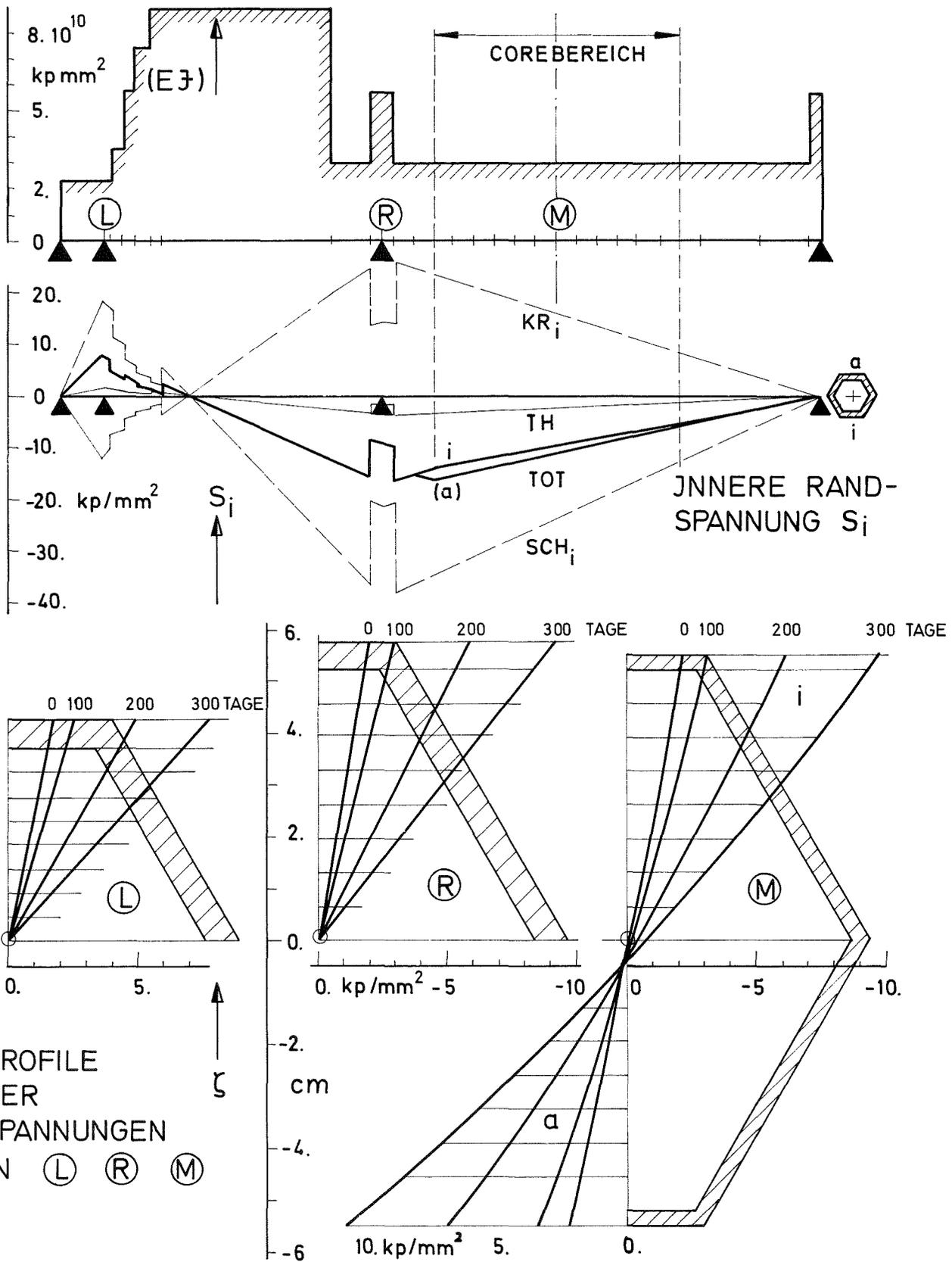
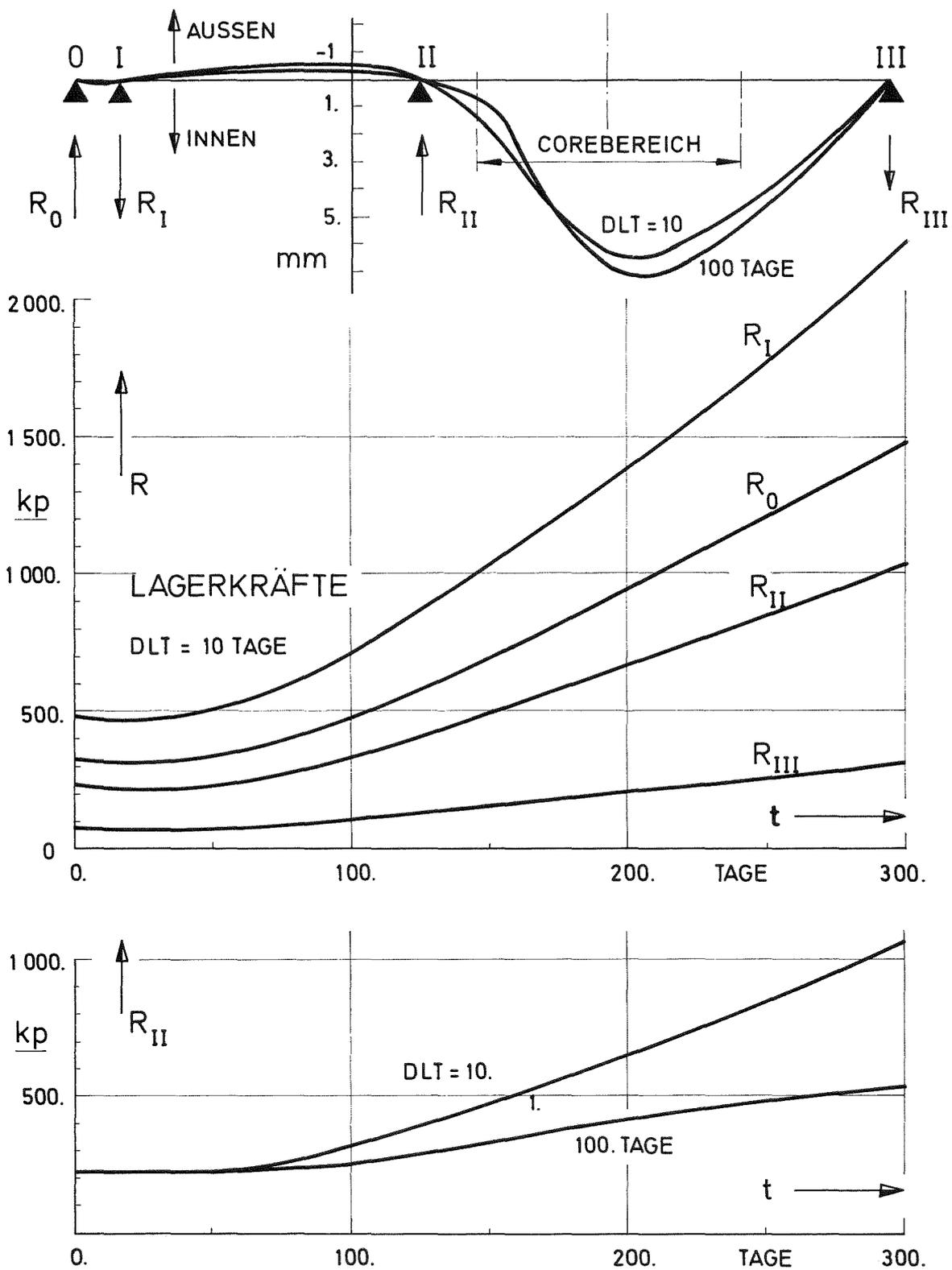


Abb.19: Örtlicher u. zeitlicher Verlauf der Biegespannungen (Beispiel Abb.17)

# BIEGELINIE NACH 300 TAGEN



**Abb.20:** Geschichte der Lagerkräfte, Einfluß der Zeitschrittweite (Beispiel Abb.17)

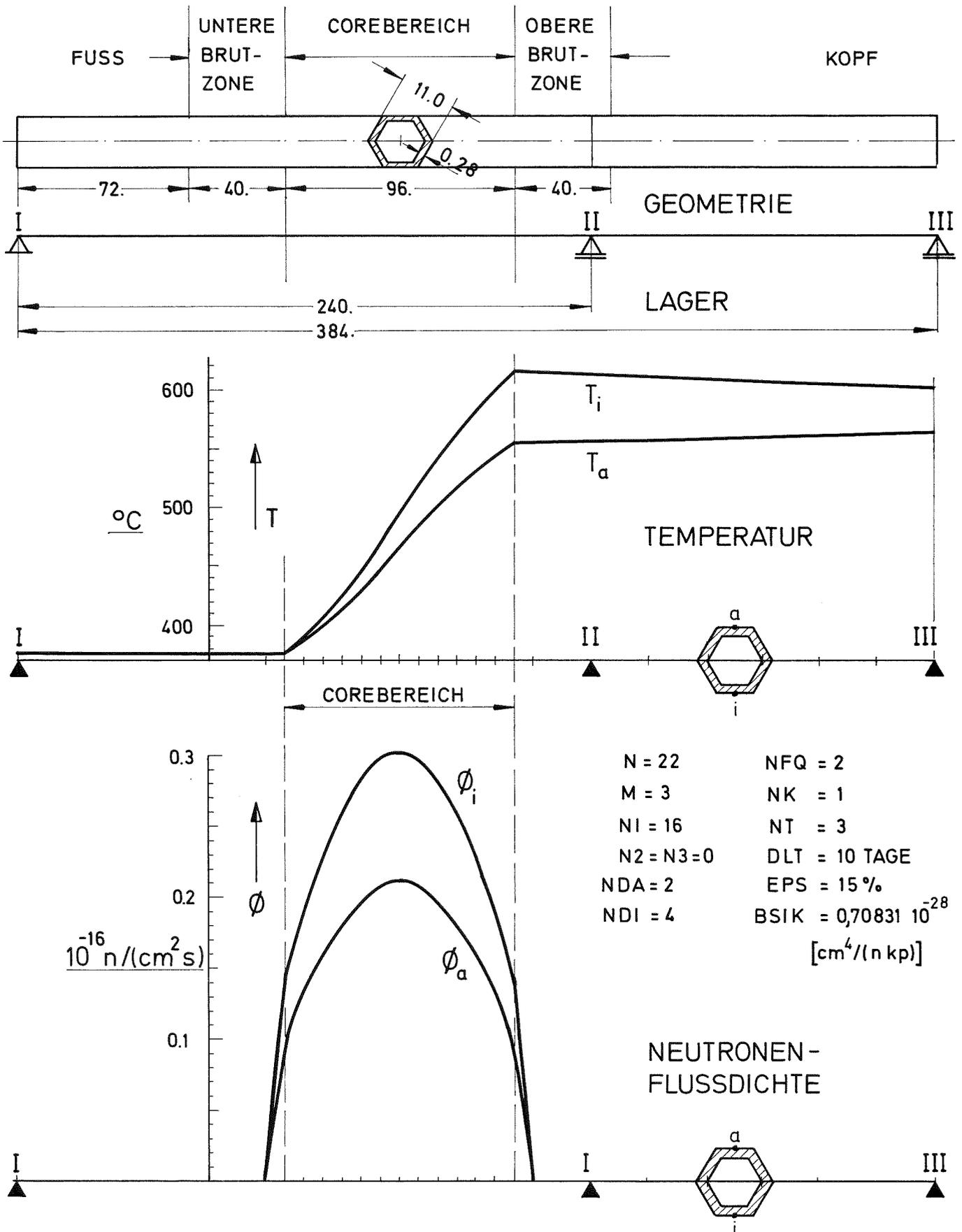


Abb.21: Eingaben zum "SNR - Brennelementkasten Version B"

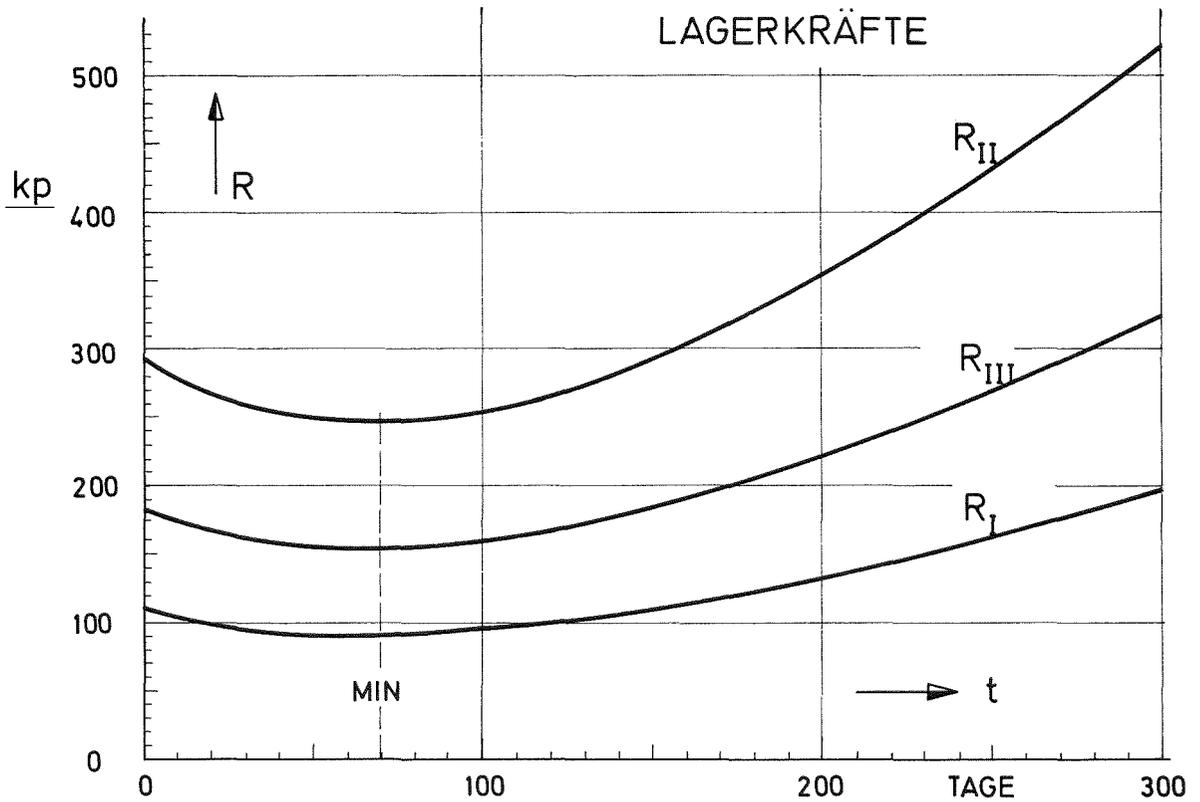
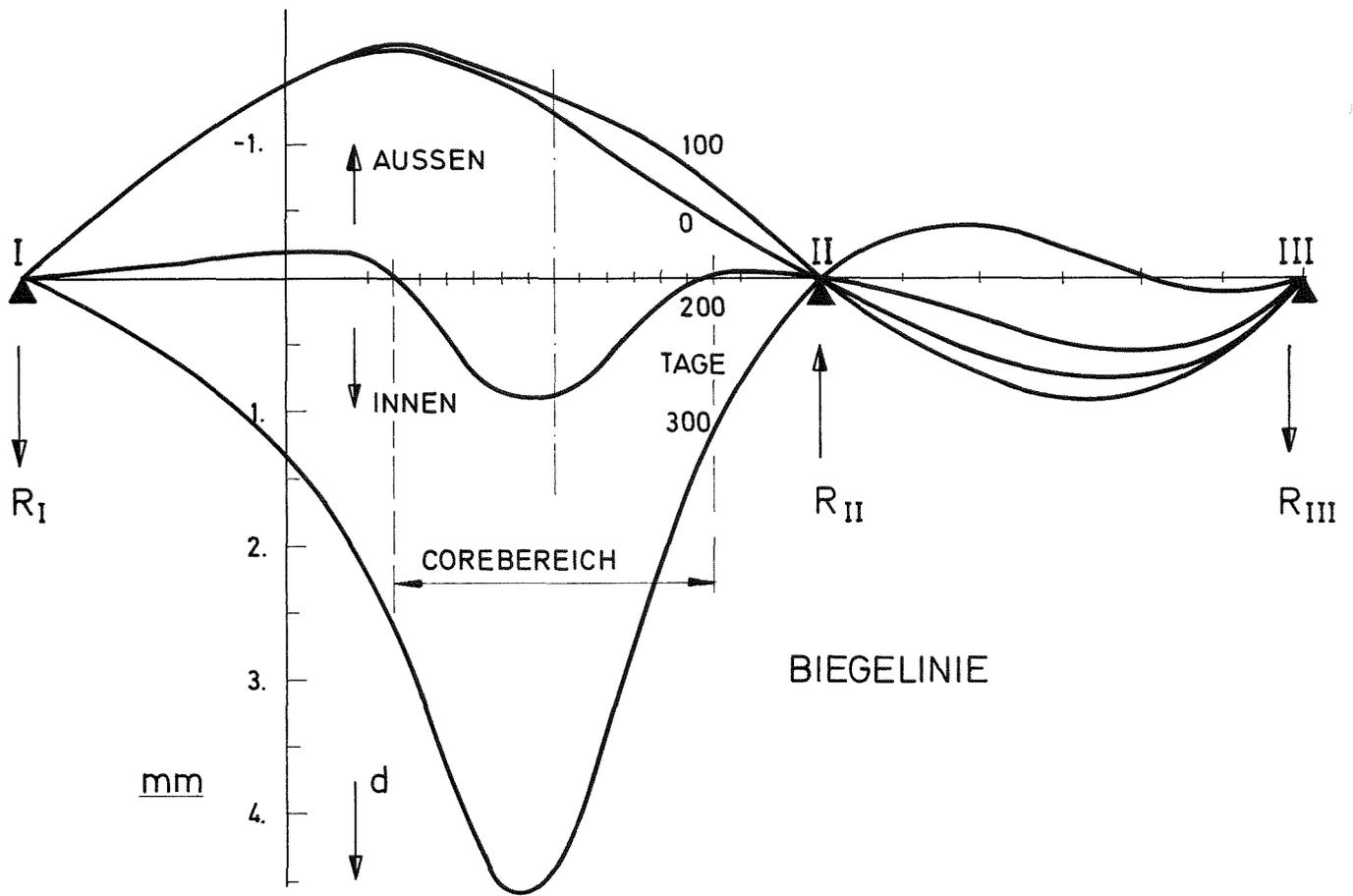


Abb.22: Geschichte der Biegelinie u. Lagerkräfte  
(Beispiel Abb.21)

