

**KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE**

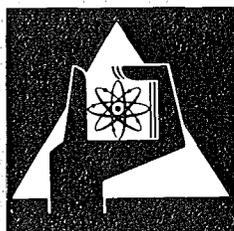
Januar 1974

KFK 1916

Institut für Material- und Festkörperforschung
Projekt Schneller Brüter

**Temperaturverteilungen in einem Brennstab bei
verschiedenen Belastungsarten**

K. Keller



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM
KARLSRUHE

KFK 1916

Institut für Material- und Festkörperforschung
Projekt Schneller Brüter

Temperaturverteilungen in einem Brennstab bei verschiedenen
Belastungsarten

von
K. Keller

Gesellschaft für Kernforschung mbH., Karlsruhe

K U R Z F A S S U N G

Aus der allgemeinen Form der Wärmeleitungsgleichung wurden Lösungen entwickelt, die verschiedene, mögliche Betriebszustände eines Brennstabes beschreiben. Die Lösungen wurden im Hinblick auf ein möglichst einfaches, übersichtliches digitales Rechenprogramm entworfen. Ein digitales Rechenprogramm wurde erstellt.

A B S T R A C T

Temperature Distribution in a Nuclear Fuel Pin,
Stressed by Different Sorts of Heat Sources

From the general heat conduction equation, solutions are developed that describe various possible operational conditions of a nuclear fuel pin. These solutions are analytically transformed to a state permitting ready and organizationally lucid digital programming.

<u>I n h a l t :</u>	Seite
1. Einleitung	1
2. Allgemeine Betrachtung der Wärmeleitungsgleichung für Brennstoff und Hülle	1
3. Die stationäre Temperaturverteilung in Brennstoff und Hülle (bei konstanter Wärmeleistung und konstanter Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffs)	4
4. Die (quasi) stationäre Temperaturverteilung in Brennstoff und Hülle (bei langsam veränderlicher Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes und langsam veränderlicher Wärmeleistung)	10
5. Das instationäre Temperaturproblem (für den Fall einer zum Zeitpunkt $t = 0$ einsetzenden konstanten Stör-Wärmeleistung)	16
6. Erweiterung des instationären Temperaturproblems auf beliebige, zum beliebigen Zeitpunkt einsetzende Stör-Wärmeleistungen	30

Literatur

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden für verschiedene, sowohl im Reaktorbetrieb als auch im experimentellen Bereich auftretende Betriebszustände aus der allgemeinsten Form der Wärmeleitungsgleichung Lösungen entwickelt, die die Temperaturverteilung im Brennelement für die verschiedenen Zustände beschreiben. Aus den Lösungen wurde ein digitales Rechenprogramm erstellt. Hierbei wurde besonderen Wert darauf gelegt, ein möglichst einfaches, übersichtliches, leicht zu handhabendes und doch leistungsfähiges Programm zu entwerfen.

Es wurden folgende drei Fälle betrachtet:

- I. Im Brennelement besteht eine konstante Wärmeleistung bei konstant bleibender Wärmeleitfähigkeit.
- II. Die Wärmeleistung im Brennelement bleibt konstant oder ändert sich nur sehr langsam; während sich die Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes infolge Porenwanderung und anderen Effekten nur langsam mit der Zeit ändert.
- III. Das Brennelement wird durch eine beliebige, zum beliebigen Zeitpunkt einsetzende Störleistung instationär belastet.

2. Allgemeine Betrachtung der Wärmeleitungsgleichung für Brennstoff und

Hülle

Die vollständige Wärmeleitungsgleichung für den Brennstab (Brennstoff) lautet (in Zylinderkoordinaten):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_b^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{a_b^2}{k_b} q \quad (2.1)$$

Hierbei ist:

u = $u(r, \varphi, z, t)$ die Temperatur (im Brennstoff)

r = radiale Richtung

φ = Azimutwinkel

z = axiale Richtung

t = Zeit

$a_b^2 = \frac{k_b}{\rho_b c_b}$ die Temperaturleitfähigkeit des Brennstoffes

k_b = Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes

ρ_b = Dichte des Brennstoffes

c_b = spezifische Wärme des Brennstoffes

q = $q(r, \varphi, z)$ die an der Stelle (r, φ, z) bestehende Wärmeleistung (zunächst als konstant angenommen)

Es wird nun vorausgesetzt, daß die Temperaturverteilung u ebenso wie die Wärmeleistung q nicht vom Azimutwinkel φ abhängen.

Damit wird aus Gl. (2.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_b^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{a_b^2}{k_b} q(r, z) \quad (2.2)$$

Die Temperaturleitfähigkeit a_b^2 des Brennstoffes wird (zunächst) als konstant angenommen. Damit ist Gl. (2.2) eine lineare partielle Differentialgleichung. Sie läßt sich damit in einen stationären und einen instationären Anteil zerlegen. Die Gesamtlösung setzt sich dann additiv aus den Einzellösungen zusammen. Damit gilt für die Temperatur im Brennstoff:

$$u = u_s + u_i \quad (2.3)$$

Hierbei bedeutet der Index s stationär, der Index i instationär.

Gl. (2.3) in Gl. (2.2) eingesetzt ergibt:

$$\frac{\partial (u_s + u_i)}{\partial t} = a_b^2 \left(\frac{\partial^2 (u_s + u_i)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_s + u_i)}{\partial r} + \frac{\partial^2 (u_s + u_i)}{\partial z^2} \right) + \frac{a_b^2}{k_b} q(r, z) \quad (2.4)$$

Gl. (2.4) lässt sich zerlegen in,

die den stationären Anteil der Temperatur beschreibende Gleichung:

$$0 = a_b^2 \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} \right) + \frac{a_b^2}{k_b} q(r, z) \quad (2.5)$$

und in die, den instationären Anteil der Temperatur beschreibenden Gleichung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_b^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \right) \quad (2.6)$$

Die Temperaturverteilung in der Brennstoffhülle wird durch folgende Gleichung gegeben (in Zylinderkoordination):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = a_c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.7)$$

Hierbei ist:

$v = v(r, z, t)$ die Temperatur in der Hülle

$a_c^2 = \frac{k_c}{\rho_c c_c}$ die Temperaturleitfähigkeit der Hülle

$k_c =$ Wärmeleitfähigkeit der Hülle

$\rho_c =$ Dichte der Hülle

$c_c =$ spezifische Wärme der Hülle

Gl. (2.7) ist ebenfalls eine lineare Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung lässt sich daher ebenfalls aus einem stationären und einem instationären Temperaturanteil additiv zusammensetzen.

Damit gilt:

$$v = v_s + v_i \quad (2.8)$$

Gl. (2.8) in Gl. (2.7) eingesetzt ergibt:

$$\frac{\partial(v_s + v_i)}{\partial t} = a_c^2 \left(\frac{\partial^2(v_s + v_i)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_s + v_i)}{\partial r} + \frac{\partial^2(v_s + v_i)}{\partial z^2} \right) \quad (2.9)$$

Gl. (2.9) lässt sich zerlegen in,

die den stationären Anteil der Hülltemperatur beschreibende Gleichung:

$$0 = a_c^2 \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

und in die den instationären Anteil der Hülltemperatur beschreibende Gleichung:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = a_c^2 \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} \right)$$

3. Die stationäre Temperaturverteilung in Brennstoff und Hülle (bei konstanter Wärmeleistung und konstanter Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffs)

Aus Gl. (2.5) ergibt sich die, die stationäre Temperaturverteilung im Brennstoff beschreibende Gleichung zu:

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} = - \frac{q(r, z)}{k_b} \quad (3.1)$$

Die Lösung der Gl. (3.1) gibt, wie bereits erwähnt, den stationären Temperaturverlauf im Brennstab (Brennstoff) in radialer und axialer Richtung. Gl. (3.1) kann, wegen einigen technischen und physikalischen Gegebenheiten vereinfacht werden.

Der Brennstab ist, im Vergleich zum Durchmesser sehr lang, außerdem ist der Temperaturgradient in axialer Richtung wesentlich kleiner als in radialer.

Damit kann der stationäre Wärmestrom in axialer Richtung gegenüber dem in radialer vernachlässigt werden.

Damit läßt sich Gl. (3.1) zerlegen in:

$$\frac{d^2 u_{sz}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_{sz}(r)}{dr} = - \frac{q_z(r)}{k_b} \quad (3.2)$$

und

$$\frac{d^2 u_{se}(z)}{dz^2} = 0 \quad (3.3)$$

In Gl. (3.2) ist die Temperatur $u_{sz}(r)$ nur noch eine Funktion von r . $q_z(r)$ ist die radiale Wärmequellverteilung an der Stelle z .

Die radiale Temperaturverteilung $u_{sz}(r)$ an der Stelle z wird aus Gl. (3.2) dadurch erhalten, daß die Wärmeleistung $q_z(r)$ an der Stelle z in Gl. (3.2) eingesetzt wird.

Da die Wärmeleitungsgleichung, wie bereits bemerkt, eine lineare Gleichung ist, läßt sich die Gesamtlösung additiv aus Partikularlösungen zusammensetzen. Damit kann Gl. (3.3) zur Berücksichtigung der Temperaturerhöhung infolge Kühlmittelaufheizung herangezogen werden.

Die stationäre Temperatur an der Stelle (r, z) im Brennstab ist dann gegeben durch:

$$u_s(r, z) = u_{sz}(r) + u_{se}(z) \quad (3.4)$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (3.2) lautet:

$$u_{sz}(r) = - \frac{q_z(r) r^2}{4 k_b} + C_1 \ln r + C_2 \quad (3.5)$$

Hierbei sind C_1 und C_2 Konstanten; sie sind aus den radialen Randbedingungen zu bestimmen.

Die allgemeine Lösung der Gl. (3.3) lautet:

$$u_{se}(z) = \bar{C}_1 z + \bar{C}_2 \quad (3.6)$$

Hierbei sind \bar{C}_1 und \bar{C}_2 ebenfalls Konstanten, die aus den axialen Randbedingungen zu bestimmen sind.

Genau wie die Brennstoffgleichung (2.5) lässt sich auch die Hüllgleichung (2.10) in einen Radialteil:

$$\frac{d^2 v_{sz}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d v_{sz}(r)}{dr} = 0 \quad (3.7)$$

und einen Axialteil:

$$\frac{d^2 v_{se}(z)}{dz^2} = 0 \quad (3.8)$$

zerlegen.

Die allgemeine Lösung der Gl. (3.7) lautet:

$$v_{sz}(r) = B_1 \ln r + B_2 \quad (3.9)$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (3.8) lautet:

$$v_{se}(z) = \bar{B}_1 z + \bar{B}_2 \quad (3.10)$$

B_1 , B_2 , \bar{B}_1 und \bar{B}_2 sind hierbei wieder Konstanten, die aus den Randbedingungen zu bestimmen sind.

Die stationäre Temperatur an der Stelle (r, z) in der Hülle ist dann (entsprechend der Gl. (3.4) für den Brennstoff):

$$v_s(r, z) = v_{sz}(r) + v_{se}(z) \quad (3.11)$$

Randbedingungen (für den stationären Fall):

Die Kühlmiteleintrittstemperatur wird, der Einfachheit halber Null gesetzt. (Dies bedeutet lediglich eine Verschiebung des Nullpunktes.) Nun ist die Temperaturerhöhung des Kühlmittels gleich den axialen Temperaturanteilen von Brennstoff und Hülle ($u_{se}(z)$ und $v_{se}(z)$). Damit lautet die Randbedingung Hülle-Kühlmittel (Randbedingung in radialer Richtung):

$$k_c \left. \frac{d v_{sz}(r)}{dr} \right|_{r=r_a} = -\alpha v_{sz}(r) \Big|_{r=r_a} \quad (3.12)$$

Hierbei ist α die Wärmeübergangszahl und r_a der Hüllaußenradius.

Für die Randbedingung Brennstoff-Hülle wird angenommen, daß im Gasspalt Brennstoff-Hülle keine Wärme gespeichert wird. (Die Wärmespeicherung im Gasspalt ist, wegen der kleinen Spaltbreite und wegen der geringen Dichte der Gase vernachlässigbar klein.)

Damit lautet die radiale Randbedingung Brennstoff-Hülle:

$$k_b \left. \frac{d u_{sz}(r)}{dr} \right|_{r=r_1} = k_c \left. \frac{d v_{sz}(r)}{dr} \right|_{r=r_1} \quad (3.13)$$

Hierbei ist r_1 der Grenzschichtradius Brennstoff-Hülle.

Ferner gilt in dieser Grenzschicht (Gasspalt) mit dem Temperatursprung ΔT noch die Randbedingung:

$$u_{sz}(r) \Big|_{r=r_1} = v_{sz}(r) \Big|_{r=r_1} + \Delta T \quad (3.14)$$

Für den, in diesem Kapitel behandelten Fall ist der Brennstoff homogen über das gesamte Volumen verteilt. Damit besteht überall dieselbe Wärmeleitfähigkeit k_b des Brennstoffes. Es besteht kein Zentralkanal.

Damit gilt für das Stabzentrum folgende Randbedingung:

$$u_{sz}(r) \neq \infty \quad \text{für } r = 0 \quad (3.15)$$

Da die Wärmeleistung am Anfang und Ende des Brennstabes ($z = 0$ und $z = H$) Null ist, hat dort Brennstoff und Hülle dieselbe Temperatur wie das Kühlmittel.

Damit gelten folgende (axiale) Randbedingungen:

$$u_{se}(z) = v_{se}(z) = 0 \quad \text{für } z = 0 \quad (3.16)$$

$$u_{se}(z) = v_{se}(z) = U \quad \text{für } z = H \quad (3.17)$$

Hierbei ist U die Kühlmittelaustrittstemperatur (gemessener Wert) und H die Brennelementlänge (Brennstoff).

Bestimmung der in den Gl. (3.5), (3.6), (3.9) und (3.10) auftretenden Konstanten $C_1, C_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2, B_1, B_2, \bar{B}_1$ und \bar{B}_2 :

Nach der Randbedingung Gl. (3.15) muß für $r = 0$ (Stabzentrum) eine endliche Temperatur bestehen, da der Logarithmus für $r = 0$ nicht endlich ist, muß in Gl. (3.5) C_1 Null sein. Damit gilt für die stationäre Temperaturverteilung (bei homogener Brennstoffverteilung), (aus Gl. (3.5), wenn man noch gleiche Wärmequellverteilung in radialer Richtung annimmt):

$$u_{sz}(r) = - \frac{q_z r^2}{4k_b} + C_2 \quad (3.18)$$

Gl. (3.9) in die Randbedingung (3.12) eingesetzt ergibt:

$$B_2 = - B_1 \left(\ln r_a + \frac{k_c}{\alpha r_a} \right) \quad (3.19)$$

Gl. (3.19) in Gl. (3.9) eingesetzt, ergibt für die stationäre radiale Temperaturverteilung in der Hülle ($B_1 = B$ gesetzt):

$$v_{sz}(r) = B \left[\ln \left(\frac{r}{r_a} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} \right] \quad (3.20)$$

Die Gl. (3.18) und (3.20) in die Randbedingungen (3.13) und (3.14) eingesetzt, ergibt für die restlichen Konstanten:

$$B = - \frac{q_z}{2 k_c} \quad (3.21)$$

und

$$C_2 = \frac{q_z r_1^2}{2} \left[\frac{1}{2 k_b} - \frac{1}{k_c} \left(\ln \left(\frac{r_1}{r_a} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} \right) \right] + \Delta T \quad (3.22)$$

Die Gl. (3.21) und (3.22) in die Gl. (3.18) und (3.20) eingesetzt, ergibt für die radiale, stationäre Temperaturverteilung (im Falle einer konstanten Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes) für den Brennstoff:

$$u_{sz}(r) = \frac{q_z}{2} \left[\frac{(r_1^2 - r^2)}{2 k_b} - \frac{r_1^2}{k_c} \left(\ln \left(\frac{r_1}{r_a} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} \right) \right] + \Delta T \quad (3.23)$$

für die Hülle:

$$v_{sz}(r) = - \frac{q_z r_1^2}{2 k_c} \left[\ln \left(\frac{r}{r_a} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} \right] \quad (3.24)$$

Gl. (3.6) und (3.10) in die Randbedingung (3.16) eingesetzt ergibt:

$$\bar{c}_2 = \bar{b}_2 = 0$$

Die genannten Gleichungen in die Randbedingung (3.17) eingesetzt ergibt:

$$\bar{c}_1 = \bar{b}_1 = \frac{U}{H} \quad (3.25)$$

Gl. (3.25) (unter Beachtung, daß $\bar{c}_2 = \bar{b}_2 = 0$ gilt) in die Gl. (3.6) bzw. (3.10) eingesetzt, ergibt für die axiale stationäre Temperaturverteilung (im Falle einer konstanten Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes) für den Brennstoff:

$$u_{se}(z) = \frac{U}{H} z \quad (3.26)$$

für die Hülle:

$$v_{se}(z) = \frac{U}{H} z \quad (3.27)$$

Damit ist das stationäre Temperaturproblem für den Fall der konstanten Brennstoffwärmeleitfähigkeit und der gleichmäßig über den Stabquerschnitt verteilten Wärmequellldichte gelöst.

4. Die (quasi) stationäre Temperaturverteilung in Brennstoff und Hülle
(bei langsam veränderlicher Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes und
langsam veränderlicher Wärmeleistung)

Dieser Fall ist dann gegeben, wenn sich die Wärmeleitfähigkeit über den Stabquerschnitt infolge Porenwanderung, Brennstoffentmischung und ähnlichem mit der Zeit langsam ändert. Die Wärmeleitfähigkeit ist dann, ebenso wie die Wärmeleistung eine Funktion des Ortes. Außerdem tritt in diesem Fall ein Zentralkanal auf.

Um diesen Fall mathematisch zu behandeln, wird angenommen, daß sich die Wärmeleitfähigkeit des Brennstoffes innerhalb bestimmter kreissymmetrischer Zonen während eines bestimmten Zeitintervalls nur geringfügig ändert und somit innerhalb dieses Zeitschrittes als konstant angenommen werden kann.

Teilt man den Brennstoffzylinder in n solcher Zonen ein, innerhalb deren die Wärmeleitfähigkeit k_n besteht und innerhalb deren die Wärmeleistung q_n erbracht wird, so wird die radiale stationäre Temperaturverteilung in den einzelnen Zonen (nach Gl. (3.5)) durch folgende Gleichung gegeben (Die Indices s und z werden der Einfachheit halber weggelassen; es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß es sich in der folgenden Gleichung um die Wärmeleistungen und Temperaturen an der Stelle z im n -ten Ring handelt. Dementsprechend sind auch die Konstanten C_{1n} und C_{2n} Funktionen der axialen Koordinate z . Da die letzten beiden, wie sich zeigen wird, direkt proportional der Wärmeleistung q_n an der Stelle z sind, brauchen sie nur einmal für ein bestimmtes q_n berechnet werden und können leicht für andere, an anderen z -Stellen bestehende Wärmeleistungen umgerechnet werden.):

$$u_n = - \frac{q_n r^2}{4 k_n} + C_{1n} \ln r + C_{2n} \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots e \quad (4.1)$$

Randbedingungen (für den (quasi) stationären Fall):

An der Randbedingung Hülle-Kühlmittel ändert sich gegenüber dem vorhergehenden Fall nichts. Damit ist auch hier Gl. (3.12) und damit Gl. (3.20) gültig. Bezeichnet man die der Hülle benachbarten Zone mit dem Index 1, so gilt, nach

vorher Gesagtem für die Randbedingung Brennstoff-Hülle (entsprechend den Gl. (3.13) und (3.14)):

$$k_1 \left. \frac{d u_1(r)}{dr} \right|_{r=r_1} = k_c \left. \frac{d v_{sz}(r)}{dr} \right|_{r=r_1} \quad (4.2)$$

und:

$$u_1(r) \Big|_{r=r_1} = v_{sz}(r) \Big|_{r=r_1} + \Delta T \quad (4.3)$$

Die Unterteilung in radiale Brennstoffzonen führt zwischen den einzelnen Zonen auf folgende Randbedingungen:

$$k_{n+1} \left. \frac{d u_{n+1}}{dr} \right|_{r=r_{n+1}} = k_n \left. \frac{d u_n}{dr} \right|_{r=r_{n+1}} \quad (4.4)$$

$$u_{n+1}(r) \Big|_{r=r_{n+1}} = u_n(r) \Big|_{r=r_{n+1}} \quad (4.5)$$

An den axialen Randbedingungen ändert sich gegenüber dem vorhergehenden Fall (der konstanten Wärmeleitfähigkeit) nichts. Damit sind auch hier die Randbedingungen nach den Gl. (3.16) und (3.17) gültig. Das bedeutet, daß auch hier die axialen Temperaturgleichungen (3.26) und (3.27) gültig sind.

Bestimmung der in der Gl. (4.1) auftretenden Konstanten C_{1n} und C_{2n} und in der Gl. (3.20) auftretenden Konstanten B:

Da nun infolge Porenwanderung ein Zentralkanal vorhanden ist, tritt das Argument $r = 0$ nicht mehr auf, so daß C_{1e} nicht Null sein müßte (wenn man die innerste Zone mit e bezeichnet), um für den kleinsten r-Wert einen endlichen Funktionswert (Temperatur) zu erhalten.

Um aber C_{1e} zu bestimmen, müßte für den Zentralkanal eine bestimmte Randbedingung vorgegeben sein. (Dies wäre z.B. der Fall, wenn er mit einer definierten Kühlung versehen wäre.) Da dies nicht der Fall ist, kann die

Konstante C_{1e} nicht bestimmt werden. Da die im Zentralkanal befindlichen Gase stets angenähert dieselbe Temperatur haben wie die Brennstoffoberfläche am Kanal, ist der Fehler klein, wenn man für die Temperaturverteilung der innersten Zone die Gültigkeit der Gl. (3.18) annimmt.

Damit ist die radiale Temperaturverteilung der innersten (e-ten) Brennstoffzone durch folgende Gleichung gegeben:

$$u_e(r) = - \frac{q_e r^2}{4 k_e} + C_{2e} \quad (4.6)$$

Die Gl. (4.1) und (3.20) in die Randbedingungen (4.2) bzw. (4.4) und (4.5) eingesetzt, ergibt für die Konstanten C_{1n} und C_{2n} folgende Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{k_c}{k_1} B + \frac{r_1^2 q_1}{2 k_1} & (4.7) \\ C_{12} &= \frac{k_c}{k_2} B + \frac{r_1^2 q_1}{2 k_2} + \frac{r_2^2 (q_2 - q_1)}{2 k_2} \\ C_{13} &= \frac{k_c}{k_3} B + \frac{r_1^2 q_1}{2 k_3} + \frac{r_2^2 (q_2 - q_1)}{2 k_3} + \frac{r_3^2 (q_3 - q_2)}{2 k_3} \\ &\vdots \\ C_{1n} &= \frac{k_c}{k_n} B + \frac{r_1^2 q_1}{2 k_n} + \frac{r_2^2 (q_2 - q_1)}{2 k_n} + \frac{r_3^2 (q_3 - q_2)}{2 k_n} + \dots + \frac{r_n^2 (q_n - q_{n-1})}{2 k_n} \\ &\vdots \\ C_{1e-1} &= \frac{k_c}{k_{e-1}} B + \frac{r_1^2 q_1}{2 k_{e-1}} + \frac{r_2^2 (q_2 - q_1)}{2 k_{e-1}} + \frac{r_3^2 (q_3 - q_2)}{2 k_{e-1}} + \dots + \frac{r_{e-1}^2 (q_{e-1} - q_{e-2})}{2 k_{e-1}} \end{aligned}$$

C_{1e} ist wegen Gl. (4.6) Null.

$$C_{21} = \frac{r_1^2 q_1}{4 k_1} + \left[\left(1 - \frac{k_c}{k_1}\right) B - \frac{r_1^2 q_1}{2 k_1} \right] \ln r_1 - B \ln r_a - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T \quad (4.8)$$

$$C_{22} = \left[\left(1 - \frac{k_c}{k_1}\right) B - \frac{r_1^2 q_1}{2 k_1} \right] \ln r_1 - B \ln r_a - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T \quad (4.8)$$

$$+ \left[\frac{q_1(r_2^2 - r_1^2)}{2 k_2} - \frac{r_2^2 q_2}{2 k_2} + \frac{r_1^2 q_1}{2 k_1} + k_c B \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \right] \ln r_2$$

$$+ \frac{r_2^2 q_2}{4 k_2} + \frac{q_1 (r_1^2 - r_2^2)}{4 k_1}$$

$$C_{23} = \left[\left(1 - \frac{k_c}{k_1}\right) B - \frac{r_1^2 q_1}{2 k_1} \right] \ln r_1 - B \ln r_a - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T$$

$$+ \left[\frac{q_1(r_2^2 - r_1^2)}{2 k_2} - \frac{r_2^2 q_2}{2 k_2} + \frac{r_1^2 q_1}{2 k_1} + k_c B \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \right] \ln r_2$$

$$+ \left[\frac{q_2(r_3^2 - r_2^2)}{2 k_3} + \frac{q_1(r_2^2 - r_1^2)}{2 k_3} + \frac{q_1(r_1^2 - r_2^2)}{2 k_2} - \frac{r_3^2 q_3}{2 k_3} + \frac{r_2^2 q_2}{2 k_2} + k_c B \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} \right) \right] \ln r_3$$

$$+ \frac{r_3^2 q_3}{4 k_3} + \frac{q_2 (r_2^2 - r_3^2)}{4 k_2} + \frac{q_1 (r_1^2 - r_2^2)}{4 k_1}$$

$$C_{2n} = \left[\left(1 - \frac{k_c}{k_1}\right) B - \frac{r_1^2 q_1}{2 k_1} \right] \ln r_1 - B \ln r_a - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T$$

$$+ \left[\frac{q_1(r_2^2 - r_1^2)}{2 k_2} - \frac{r_2^2 q_2}{2 k_2} + \frac{r_1^2 q_1}{2 k_1} + k_c B \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \right] \ln r_2$$

$$+ \left[\frac{q_2(r_3^2 - r_2^2)}{2 k_3} + \frac{q_1(r_2^2 - r_1^2)}{2 k_3} + \frac{q_1(r_1^2 - r_2^2)}{2 k_2} - \frac{r_3^2 q_3}{2 k_3} + \frac{r_2^2 q_2}{2 k_2} + k_c B \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} \right) \right] \ln r_3$$

⋮

⋮

$$+ \left[\frac{q_{n-1}(r_n^2 - r_{n-1}^2)}{2 k_n} + \frac{q_{n-2}(r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2)}{2 k_n} + \dots + \frac{q_1(r_2^2 - r_1^2)}{2 k_n} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{q_{n-2}(r_{n-2}^2 - r_{n-1}^2)}{2 k_{n-1}} + \frac{q_{n-3}(r_{n-3}^2 - r_{n-2}^2)}{2 k_{n-1}} + \dots + \frac{q_1(r_1^2 - r_2^2)}{2 k_{n-1}} \\
 & - \frac{r_n^2 q_n}{2 k_n} + \frac{r_{n-1}^2 q_{n-1}}{2 k_{n-1}} + k_c B \left(\frac{1}{k_{n-1}} - \frac{1}{k_n} \right) \int \ln r_n \\
 & + \frac{q_n r_n^2}{4 k_n} + \frac{q_{n-1}(r_{n-1}^2 - r_n^2)}{4 k_{n-1}} + \frac{q_{n-2}(r_{n-2}^2 - r_{n-1}^2)}{4 k_{n-2}} + \dots + \frac{q_1(r_1^2 - r_2^2)}{4 k_1}
 \end{aligned}$$

Anmerkung:

Während der Index n bei der Berechnung der C_{1n} von 1 bis (e-1) läuft, läuft er bei der Berechnung der C_{2n} von 1 bis e. Die in den Rekursionsformeln (4.7) und (4.8) noch enthaltene Konstante B wird aus den Randbedingungen zwischen den beiden innersten Zonen bestimmt.

Die Gl. (4.1) und (4.6) mit den vorstehend berechneten Konstanten in die Randbedingung (4.4) an der Grenze (n+1) = e eingesetzt ergibt:

$$B = \frac{1}{2 k_c} \int r_e^2 (q_{e-1} - q_e) - r_{e-1}^2 (q_{e-1} - q_{e-2}) - r_{e-2}^2 (q_{e-2} - q_{e-3}) - \dots - r_2^2 (q_2 - q_1) - r_1^2 q_1 \int \quad (4.9)$$

Aus Gl.(4.9) erkennt man, daß für gleiche Wärmeleistungen in den einzelnen Zonen die Konstante B mit der in Gl. (3.21) identisch ist. (Was auch der Fall sein muß.)

Damit sind alle Konstanten für die Radialgleichungen (4.1) und (4.6) bestimmt, so daß die radiale (quasi)-stationäre Temperaturverteilung nach den genannten Gleichungen berechnet werden kann, wenn die Wärmeleistungen q_n und die Wärmeleitfähigkeiten k_n der einzelnen Zonen bekannt sind. Zu ihrer Festlegung bzw. Bestimmung werden andere Arbeiten herangezogen [z.B. [6]]; dasselbe gilt auch für die Bestimmung des Temperatursprunges ΔT [z.B. [6]].

Bezeichnet man in den Gl. (4.8) die Faktoren der Logarithmen $\ln r_n$ mit A_n und setzt die Gl. (4.7) und (4.8) in Gl. (4.1) ein, so erhält man für die radiale (quasi)-stationäre Temperaturverteilung in den Brennstoffzonen:

$$u_1(r) = \frac{q_1(r_1^2 - r^2)}{4k_1} + \ln \left(\frac{r^{C_{11}} r_1^{A_1}}{r_a^B} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T \quad (4.10)$$

$$u_2(r) = \frac{q_2(r_2^2 - r^2)}{4k_2} + \frac{q_1(r_1^2 - r_2^2)}{4k_1} + \ln \left(\frac{r^{C_{12}} r_1^{A_1} r_2^{A_2}}{r_a^B} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T$$

$$u_3(r) = \frac{q_3(r_3^2 - r^2)}{4k_3} + \frac{q_2(r_2^2 - r_3^2)}{4k_2} + \frac{q_1(r_1^2 - r_2^2)}{4k_1} + \ln \left(\frac{r^{C_{13}} r_1^{A_1} r_2^{A_2} r_3^{A_3}}{r_a^B} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T$$

⋮

$$u_n(r) = \frac{q_n(r_n^2 - r^2)}{4k_n} + \frac{q_{n-1}(r_{n-1}^2 - r_n^2)}{4k_{n-1}} + \frac{q_{n-2}(r_{n-2}^2 - r_{n-1}^2)}{4k_{n-2}} + \dots + \frac{q_1(r_1^2 - r_2^2)}{4k_1}$$

$$+ \ln \left(\frac{r^{C_{1n}} r_1^{A_1} r_2^{A_2} \dots r_n^{A_n}}{r_a^B} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T$$

Für die innerste Zone (e-te) gilt (wegen $C_{1e} = 0$):

$$u_e(r) = \frac{q_e(r_e^2 - r^2)}{4k_e} + \dots + \frac{q_n(r_n^2 - r_{n-1}^2)}{4k_n} + \frac{q_{n-1}(r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2)}{4k_{n-1}} + \dots + \frac{q_1(r_1^2 - r_2^2)}{4k_1} \quad (4.11)$$

$$+ \ln \left(\frac{r_1^{A_1} r_2^{A_2} r_3^{A_3} \dots r_{e-1}^{A_{e-1}}}{r_a^B} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} B + \Delta T$$

Mit den Gl. (4.10) und (4.11) ist das (quasi)-stationäre radiale Temperaturproblem auf einfache, übersichtliche Rekursionsformeln zurückgeführt, die leicht für einen Digitalrechner programmiert werden können. Da, wie bereits erwähnt, für die axiale Richtung zwischen dem ersten Fall und diesem kein Unterschied besteht und damit die Gl. (3.26) und (3.27) gelten, ist auch dieser Fall abgeschlossen.

Zu beachten ist, daß zu den, aus den Gl. (4.10) und (4.11) erhaltenen Temperaturen noch die Kühlmittteleintrittstemperatur additiv hinzuzufügen ist, da diese in der Randbedingung nach Gl. (3.12) Null gesetzt wurde.

5. Das instationäre Temperaturproblem

Die, die instationären Temperaturen beschreibenden Gleichungen (für Brennstoff Gl. (2.6), für die Hülle Gl. (2.7)) sind der Form nach gleich. Sie unterscheiden sich nur in den Stoffwerten, d.h. nur in der Temperaturleitfähigkeit (a^2). Es genügt daher, die beiden Gleichungen allgemein zu lösen und die allgemeine Lösung auf die beiden Fälle zu übertragen.

Die instationäre Wärmeleitungsgleichung lautet allgemein (Gl. (2.6) und (2.7)):

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} \right) \quad (5.1)$$

Gl. (5.1) ist eine lineare Differentialgleichung, ihre allgemeine Lösung kann damit durch Trennen der Veränderlichen erhalten werden. Es gilt folgender Separationsansatz:

$$w_i = R(r) Z(z) T(t) \quad (5.2)$$

Hierbei ist $R(r)$ eine nur von r , $Z(z)$ eine nur von z und $T(t)$ eine nur von t abhängige Funktion.

Gl. (5.2) in Gl. (5.1) eingesetzt ergibt: (5.3)

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = a^2 \left(\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \right)$$

Beide Seiten der Gl. (5.3) können nur dann einander gleich sein, wenn sie gleich einer Konstanten ($-\chi^2$) sind.

Damit ergibt sich aus Gl. (5.3):

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = a^2 \left(\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \right) = -\chi^2 \quad (5.4)$$

Da die rechte Seite der Gl. (5.4) Kombinationen der Funktionen $R(r)$ und $Z(z)$ enthält, muß jede dieser Kombinationen für sich eine Konstante sein.

Damit gilt für den z -abhängigen Teil:

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{d z^2} = - \lambda^2 \quad (5.5)$$

und für den r -abhängigen Teil:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{d R(r)}{d r} = - \omega^2 \quad (5.6)$$

Hierbei sind, wie bereits erwähnt, $(-\lambda^2)$ und $(-\omega^2)$ zunächst willkürliche Konstanten. Die Gl. (5.5) und (5.6) in Gl. (5.4) eingesetzt ergibt:

$$\frac{\chi^2}{a^2} = \omega^2 + \lambda^2 \quad (5.7)$$

Aus den Gl. (5.4), (5.5) und (5.6) ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen:

für den zeitabhängigen Teil (aus Gl. (5.4)):

$$\frac{dT(t)}{dt} + \chi^2 T(t) = 0 \quad (5.8)$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$T(t) = e^{-\chi^2 t} \quad (5.9)$$

für den axialen Teil (aus Gl. (5.5)):

$$\frac{d^2 Z(z)}{d z^2} + \lambda^2 Z(z) = 0 \quad (5.10)$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$Z(z) = E_1 \sin(\lambda z) + E_2 \cos(\lambda z) \quad (5.11)$$

Hierbei sind E_1 und E_2 ebenfalls, zunächst willkürliche Konstanten.

für den Radialteil (aus Gl. (5.6)):

$$\frac{d^2 R(r)}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d R(r)}{d r} + \omega^2 R(r) = 0 \quad (5.12)$$

Gl. (5.12) ist eine Bessel'sche Differentialgleichung nullter Ordnung.

Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$R(r) = K_1 J_0 (\omega r) + K_2 N_0 (\omega r) \quad (5.13)$$

Hierbei sind K_1 und K_2 , ebenso wie ω , zunächst willkürliche Konstanten. $J_0 (\omega r)$ und $N_0 (\omega r)$ sind Besselfunktionen nullter Ordnung erster bzw. zweiter Art.

Da es sich, wie schon angedeutet, um zwei Zonen (Brennstoff und Hülle) mit verschiedenen Stoffwerten, d.h.mit verschiedenen Temperaturleitwerten handelt, ergibt sich aus Gl. (5.13) und (5.11)

für den Brennstoff:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}(r) &= \bar{K}_1 J_0 (\bar{\omega} r) + \bar{K}_2 N_0 (\bar{\omega} r) \\ \bar{Z}(z) &= \bar{E}_1 \sin(\bar{\lambda} z) + \bar{E}_2 \cos (\bar{\lambda} z) \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

für die Hülle:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{R}}(r) &= \bar{\bar{K}}_1 J_0 (\bar{\bar{\omega}} r) + \bar{\bar{K}}_2 N_0 (\bar{\bar{\omega}} r) \\ \bar{\bar{Z}}(z) &= \bar{\bar{E}}_1 \sin (\bar{\bar{\lambda}} z) + \bar{\bar{E}}_2 \cos (\bar{\bar{\lambda}} z) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Mit den Gl. (5.9), (5.11), (5.14) und (5.15) ergibt sich nach Gl. (5.2) die instationäre Temperaturverteilung

für den Brennstoff:

$$u_1 = (\bar{K}_1 J_0 (\bar{\omega} r) + \bar{K}_2 N_0 (\bar{\omega} r)) (\bar{E}_1 \sin (\bar{\lambda} z) + \bar{E}_2 \sin (\bar{\lambda} z)) e^{-\chi^2 t} \quad (5.16)$$

für die Hülle:

$$v_1 = (\bar{\bar{K}}_1 J_0 (\bar{\bar{\omega}} r) + \bar{\bar{K}}_2 N_0 (\bar{\bar{\omega}} r)) (\bar{\bar{E}}_1 \sin (\bar{\bar{\lambda}} z) + \bar{\bar{E}}_2 \sin (\bar{\bar{\lambda}} z)) e^{-\chi^2 t} \quad (5.17)$$

Die in den Gl. (5.16) und (5.17) auftretenden Konstanten werden aus den Rand- und Anfangsbedingungen bestimmt.

Randbedingungen (für den instationären Fall):

Als Randbedingung zwischen Hülle und Kühlmittel gilt (wie im stationären Fall):

$$k_c \left. \frac{d v_i}{d r} \right|_{r=r_a} = -\alpha v_i \Big|_{r=r_a} \quad (5.18)$$

Die zwischen Brennstoff und Hülle gespeicherte Wärme ist, wie bereits erwähnt, vernachlässigbar klein; dies führt auf die Randbedingung:

$$k_b \left. \frac{d u_i}{d r} \right|_{r=r_1} = k_c \left. \frac{d v_i}{d r} \right|_{r=r_1} \quad (5.19)$$

Für den instationären Fall wird angenommen, daß zwischen Hülle und Brennstoff Kontakt besteht; dies führt auf die Randbedingung:

$$u_i \Big|_{r=r_1} = v_i \Big|_{r=r_1} \quad (5.20)$$

Im Stabzentrum gilt:

$$u_i \neq \infty \quad \text{für } r = 0 \quad (5.21)$$

Als axiale Randbedingungen gelten:

$$u_i = 0 \quad \text{für } z = 0 \text{ und } z = H \quad (5.22)$$

$$v_i = 0 \quad \text{für } z = 0 \text{ und } z = H \quad (5.23)$$

Bestimmung der Konstanten $\bar{\lambda}$ und $\bar{\bar{\lambda}}$:

Nach den Randbedingungen (5.22) und (5.23) muß für $z = 0$ in den Gl. (5.16) und (5.17) u_i und v_i Null sein. Da aber der Kosinus von Null nicht Null ist, kann $\cos(\lambda z)$ keine Lösung sein. Damit muß in den genannten Gleichungen \bar{E}_2 und $\bar{\bar{E}}_2$ Null sein. Als Axial-Lösung kommt nur $\sin(\lambda z)$ in Frage.

Nach denselben Randbedingungen muß für $z = H$, u_i und v_i ebenfalls Null sein. Diese Bedingungen sind erfüllt für alle:

$$\bar{\lambda}_n = \bar{\bar{\lambda}}_n = \lambda_n = \frac{n\pi}{H}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.24)$$

Für den Radialteil, hat man im Brennstoff, wie im (quasi)-stationären Fall zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob ein Zentralkanal vorhanden ist oder nicht.

Ist ein Kanal vorhanden, muß aber zur Bestimmung aller auftretenden Konstanten für ihn eine definierte Randbedingung vorliegen. Dies ist nicht der Fall, daher wird, wie im stationären Fall, auch hier zwischen beiden Fällen nicht unterschieden. Der Fehler, der im Falle des Vorhandenseins eines Kanals begangen wird, ist klein.

Die Besselfunktion zweiter Art $N_0(\bar{\omega} r)$ ist für $r = 0$ nicht endlich. Da aber nach der Randbedingung (5.21) für $r = 0$ (Brennstabzentrum) eine endliche Temperatur bestehen muß, kann sie ebenfalls keine Lösung des Problems sein. Es muß damit in Gl. (5.16) \bar{K}_2 Null sein.

Mit den axialen "Eigenwerten" λ_n aus Gl. (5.24) existieren nach Gl. (5.7) mindestens $\bar{\omega}_n$ bzw. $\bar{\bar{\omega}}_n$ radiale "Eigenwerte".

Nach Gl. (5.7) gilt:

$$\omega_n^2 = \frac{\chi^2}{a^2} - \lambda_n^2, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.25)$$

Mit den Eigenwerten λ_n , $\bar{\omega}_n$ und $\bar{\bar{\omega}}_n$ nehmen die Konstanten \bar{E}_1 und $\bar{\bar{E}}_1$ die Form \bar{E}_{1n} bzw. $\bar{\bar{E}}_{1n}$, die Konstanten \bar{K}_1 , \bar{K}_1 und \bar{K}_2 die Form \bar{K}_{1n} , \bar{K}_{1n} und \bar{K}_{2n} an. Bezeichnet man die zusammengezogenen Konstanten $\bar{K}_{1n} \bar{E}_{1n}$ mit \bar{K}_n , $\bar{K}_{1n} \bar{\bar{E}}_{1n}$ mit $\bar{\bar{K}}_n$ und $\bar{K}_{2n} \bar{E}_{1n}$ mit \bar{K}_{2n} , so wird die instationäre Temperaturverteilung

für den Brennstoff (aus Gl. (5.16)):

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n J_0(\bar{\omega} r) \sin(\lambda_n z) e^{-\chi^2 t} \quad (5.26)$$

für die Hülle (aus Gl. (5.17)):

$$v_i = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{k}_{1n} J_0 (\bar{\omega}_n r) + \bar{k}_{2n} N_0 (\bar{\omega}_n r)) \sin(\lambda_n z) e^{-\lambda^2 t} \quad (5.27)$$

Nach der Randbedingung (5.18) (Kühlmittel-Hülle) ergibt sich aus Gl. (5.27):

$$\bar{k}_{1n} J_0' (\bar{\omega}_n r_a) + \bar{k}_{2n} N_0' (\bar{\omega}_n r_a) = - \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} (\bar{k}_{1n} J_0 (\bar{\omega}_n r_a) + \bar{k}_{2n} N_0 (\bar{\omega}_n r_a))$$

daraus ist:

$$\bar{k}_{2n} = - \bar{k}_{1n} \left(\frac{J_0' (\bar{\omega}_n r_a) D \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} J_0 (\bar{\omega}_n r_a)}{N_0' (\bar{\omega}_n r_a) + \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} N_0 (\bar{\omega}_n r_a)} \right)$$

Diesen Ausdruck in Gl. (5.27) eingesetzt, ergibt für den stationären Temperaturanteil der Hülle ($\bar{k}_{1n} = \bar{k}_n$ gesetzt):

$$v_i = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{k}_n \left(J_0 (\bar{\omega}_n r) - \frac{J_0' (\bar{\omega}_n r_a) + \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} J_0 (\bar{\omega}_n r_a)}{N_0' (\bar{\omega}_n r_a) + \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} N_0 (\bar{\omega}_n r_a)} N_0 (\bar{\omega}_n r) \right) \sin(\lambda_n z) e^{-\lambda^2 t} \quad (5.28)$$

Bestimmung der Konstanten λ und der Eigenwerte $\bar{\omega}_n$ und $\bar{\omega}_n$:

Die Gl. (5.26) und (5.28) und die Randbedingungen (5.19) und (5.20) (Brennstoff-Hülle) eingesetzt ergibt:

(5.29)

$$k_b \bar{\omega}_n \frac{J_0' (\bar{\omega}_n r_1)}{J_0 (\bar{\omega}_n r_1)} = k_c \bar{\omega}_n \frac{(N_0' (\bar{\omega}_n r_a) + \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} N_0 (\bar{\omega}_n r_a)) J_0 (\bar{\omega}_n r_1) - (J_0' (\bar{\omega}_n r_a) + \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} J_0 (\bar{\omega}_n r_a)) N_0' (\bar{\omega}_n r_1)}{(N_0' (\bar{\omega}_n r_a) + \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} N_0 (\bar{\omega}_n r_a)) J_0 (\bar{\omega}_n r_1) - (J_0' (\bar{\omega}_n r_a) + \frac{\alpha}{k_c \bar{\omega}_n} J_0 (\bar{\omega}_n r_a)) N_0 (\bar{\omega}_n r_1)}$$

Nach Gl. (5.25) gilt:

$$\bar{\omega}_n^2 = \frac{\chi^2}{a_b^2} - \lambda_n^2 \quad (5.30)$$

$$\bar{\omega}_n^2 = \frac{\chi^2}{a_c^2} - \lambda_n^2 \quad (5.31)$$

Gl. (5.29) ist (mit den Gl. (5.30) und (5.31) zusammen) eine transzendente Gleichung für χ . Sie gibt für jedes einzelne λ_n unendlich viele Lösungen.

Damit wird: $\chi_{n,m}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Damit ergeben sich nach den Gl. (5.30) und (5.31) ebenfalls $\bar{\omega}_{n,m}$ und $\bar{\omega}_{n,m}$ Eigenwerte.

Mit den Ergebnissen aus der Eigenwertgleichung (5.29) nehmen die Temperaturgleichungen (5.26) und (5.28) folgende Form an:

für den Brennstoff (aus Gl. (5.26)):

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) e^{-\chi_{n,m}^2 t} \quad (5.32)$$

für die Hülle (aus Gl. (5.28)):

$$v_i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{K}_{n,m}}{p_{n,m}} (p_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) - g_{n,m} N_0(\bar{\omega}_{n,m} r)) \sin(\lambda_n z) e^{-\chi_{n,m}^2 t} \quad (5.33)$$

Hierbei sind die Konstanten:

$$g_{n,m} = \bar{\omega}_{n,m} J_0'(\bar{\omega}_{n,m} r_a) + \frac{\alpha}{k_c} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r_a) \quad (5.34)$$

$$p_{n,m} = \bar{\omega}_{n,m} N_0'(\bar{\omega}_{n,m} r_a) + \frac{\alpha}{k_c} N_0(\bar{\omega}_{n,m} r_a) \quad (5.35)$$

Für die stationäre Wärmeleistung gilt folgende z-Abhängigkeit (im allgemeinen):

$$q_z = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{H} z\right) \quad (5.36)$$

Hierbei ist q_0 die maximale Wärmeleistung (bei $z = \frac{H}{2}$).

Nach den Gl. (2.3) und 2.8) ergibt sich, mit den Gl. (3.23), (3.24), (3.26), (3.27), (5.32) und (5.33) die Gesamttemperatur (stationäre plus instationäre):

im Brennstoff:

$$u = \frac{q_0}{2} \left[\frac{(r_1^2 - r_2^2)}{2 k_b} - \frac{r_1^2}{k_c} \left(\ln \left(\frac{r_1}{r_a} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} \right) \right] \sin\left(\frac{\tilde{\eta}}{H} z\right) + \Delta T + \frac{U}{H} z \quad (5.37)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) e^{-\lambda_{n,m}^2 t}$$

in der Hülle:

$$v = - \frac{q_0 r_1^2}{2 k_c} \left[\ln \left(\frac{r}{r_a} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} \right] \sin\left(\frac{\tilde{\eta}}{H} z\right) + \frac{U}{H} z \quad (5.38)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{K}_{n,m}}{p_{n,m}} \left(p_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) - g_{n,m} N_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \right) \sin(\lambda_n z) e^{-\lambda_{n,m}^2 t}$$

Bestimmung der Konstanten (Amplitudenfaktoren) $\bar{K}_{n,m}$ und $\bar{K}_{n,m}$:

Bei der Bestimmung der Konstanten $\bar{K}_{n,m}$ und $\bar{K}_{n,m}$ werden die durch die Gl. (5.32) und (5.33) angegebenen allgemeinen instationären Lösungen zu solchen ausgezeichneten Lösungen aufgebaut, daß sie für $t = 0$ in die willkürlich vorgegebene Anfangstemperaturverteilung übergehen.

Die Anfangstemperaturverteilung in Brennstoff und Hülle ist (nach der Verschiebung des Nullpunktes) zu Beginn des Startvorgangs ($t = 0$) Null.

Der Übersichtlichkeit halber werden die in den Gl. (5.37) und (5.39) aufgetretenen Konstanten zusammengefaßt.

Es wird gesetzt:

$$\bar{G}_1 = \frac{r_1^2}{2} \left[\frac{1}{2 k_b} - \frac{1}{k_c} \left(\ln \left(\frac{r_1}{r_a} \right) - \frac{k_c}{\alpha r_a} \right) \right], \quad \bar{G}_2 = \frac{1}{4 k_b}, \quad \bar{G}_3 = \frac{U}{q_0 H} \quad (5.39)$$

$$\bar{G}_2 = \frac{r_1^2}{2 k_c}, \quad \bar{G}_2 = \frac{r_1^2}{2 k_c} \frac{k_c}{\alpha r_a}, \quad \bar{G}_3 = \frac{U}{q_0 H}$$

Mit den Abkürzungen (5.39) wird für $t = 0$ und $\Delta T = 0$

für den Brennstoff (aus Gl. (5.37)):

$$q_0 \left[(\bar{G}_2 r^2 - \bar{G}_1) \sin \frac{\tilde{H}}{H} z - \bar{G}_3 z \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) \quad (5.40)$$

für die Hülle (aus Gl. 5.38)):

(5.41)

$$q_0 \left[(\bar{G}_1 \ln \frac{r}{r_a} - \bar{G}_2) \sin \left(\frac{\tilde{H}}{H} z \right) - \bar{G}_3 z \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{K}_{n,m}}{p_{n,m}} (p_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) - g_{n,m} N_0(\bar{\omega}_{n,m} r)) \sin(\lambda_{n,m} z)$$

Die Gl. (5.40) mit $r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r)$ sind (λ_m) multipliziert und über das Grundgebiet (Brennstoff) integriert ergibt:

$$\begin{aligned} q_0 \bar{G}_2 & \int_{r=0}^{r_1} \int_{z=0}^H r^3 J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) \sin \left(\frac{\tilde{H}}{H} z \right) \sin(\lambda_n z) \, dz \, dr & (5.42) \\ & - q_0 \bar{G}_1 \int_{r=0}^{r_1} \int_{z=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) \sin \left(\frac{\tilde{H}}{H} z \right) \sin(\lambda_n z) \, dz \, dr \\ & - q_0 \bar{G}_3 \int_{r=0}^{r_1} \int_{z=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) z \sin(\lambda_n z) \, dz \, dr \\ & = \bar{K}_{n,m} \int_{r=0}^{r_1} \int_{z=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) \sin(\lambda_m z) \, dz \, dr \end{aligned}$$

Lösen der in Gl. (5.42) auftretenden Integrale:

Sowohl die Kreisfunktionen als auch die Besselfunktionen bilden Orthogonalsysteme. Damit gelten folgende Orthogonalitätsrelationen:

für die Kreisfunktion:

$$\int_0^H \sin(\lambda_n z) \sin(\lambda_m z) dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{H}{2} & \text{für } n = m \end{cases} \quad (5.43)$$

für die Besselfunktionen (nullter Ordnung):

$$\int_0^{r_1} r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) dr = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu, \mu \neq n, m \\ \frac{r_1^2}{2} J_1^2(\bar{\omega}_{n,m} r_1) & \text{für } \nu, \mu = n, m \end{cases} \quad (5.44)$$

Damit wird das Integral der rechten Seite von Gl. (5.42):

$$\int_{r=0}^{r_1} \int_{t=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) \sin(\lambda_m z) dz dr = \frac{H r_1^2}{4} J_1^2(\bar{\omega}_{n,m} r_1)$$

Die Integrale der linken Seite von Gl. (5.42) ergeben sich, unter Beachtung der Orthogonalitätsrelation der Kreisfunktionen und partieller Integration zu:

$$\int_{r=0}^{r_1} \int_{t=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) \sin\left(\frac{\tilde{H}}{H} z\right) \sin(\lambda_m z) dz dr = \frac{H r_1}{2 \bar{\omega}_{n,m}} J_1(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r_1)$$

$$\int_{r=0}^{r_1} \int_{z=0}^H r^3 J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) \sin\left(\frac{\tilde{H}}{H} z\right) \sin(\lambda_m r) dz dr = \frac{H r_1}{2 \bar{\omega}_{\nu,\mu}} \left[r_1^2 - \frac{4}{\bar{\omega}_{\nu,\mu}^2} \right] J_1(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r_1) + \frac{2 r_1}{\bar{\omega}_{\nu,\mu}} J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r_1)$$

$$\int_{r=0}^{r_1} \int_{z=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) z \sin(\lambda_m z) dz dr = - \frac{H(-1)^m}{\lambda_m} \frac{r_1}{\bar{\omega}_{\nu,\mu}} J_1(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r_1)$$

Die obigen Integrale in Gl. (5.42) eingesetzt und nach $\bar{K}_{n,m}$ aufgelöst ergibt:

(5.45)

$$\bar{K}_{n,m} = \frac{2q_0 r_1 \left\{ \left[\frac{\bar{G}_2}{\bar{\omega}_{n,m}} (r_1^2 - \frac{4}{\bar{\omega}_{n,m}^2}) - \frac{\bar{G}_1}{\bar{\omega}_{n,m}} - \frac{2(-1)^m \bar{G}_3}{\lambda_m \bar{\omega}_{n,m}} \right] J_1(\bar{\omega}_{n,m} r_1) + \frac{2\bar{G}_2 r_1}{\bar{\omega}_{n,m}^2} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r_1) \right\}}{r_1^2 J_1^2(\bar{\omega}_{n,m} r_1)}$$

Die Gl. (5.41) mit $r (p_{\nu,\mu} J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) - g_{\nu,\mu} N_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r)) \sin(\lambda_m z)$ multipliziert und über das Grundgebiet (Hülle) integriert ergibt:

(5.46)

$$q_0 \bar{G}_1 p_{\nu,\mu} \int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r \ln\left(\frac{r}{r_a}\right) J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) \sin\left(\frac{\tilde{l}}{H} z\right) \sin(\lambda_m z) dz dr$$

$$- q_0 \bar{G}_1 g_{\nu,\mu} \int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r \ln\left(\frac{r}{r_a}\right) N_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) \sin\left(\frac{\tilde{l}}{H} z\right) \sin(\lambda_m z) dz dr$$

$$- q_0 \bar{G}_2 p_{\nu,\mu} \int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) \sin\left(\frac{\tilde{l}}{H} z\right) \sin(\lambda_m z) dz dr$$

$$\begin{aligned}
 & + q_0 \bar{G}_2 g_{\nu, \mu} \int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r N_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) \sin\left(\frac{\tilde{l}}{H} z\right) \sin(\lambda_m z) dz dr \\
 & - \bar{G}_3 p_{\nu, \mu} \int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) z \sin(\lambda_m z) dz dr + \bar{G}_3 g_{\nu, \mu} \int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r N_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) \sin(\lambda_m z) dz dr \\
 & = \frac{\bar{K}_{n,m}}{p_{n,m}} \int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r Z_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) Z_0(\bar{\omega}_{n,m}) \sin(\lambda_n z) \sin(\lambda_m z) dz dr
 \end{aligned}$$

Lösen der in Gl. (5.46) auftretenden Integrale:

Wie die Kreis- und Besselfunktionen bilden die Zylinderfunktionen ebenfalls Orthogonalitätssysteme.

Für die Zylinderfunktion nullter Ordnung gilt:

$$\int_{r_1}^{r_a} r Z_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) Z_0(\bar{\omega}_{n,m} r) dr = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu, \mu \neq n, m \\ \left[\frac{r^2}{2} (Z_0^2(\bar{\omega}_{n,m} r) + Z_0'^2(\bar{\omega}_{n,m} r)) \right] \Big|_{r_1}^{r_a} & \text{für } \nu, \mu = n, m \end{cases} \quad (5.47)$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation nach Gl. (5.43) und partieller Integration ergeben sich die in Gl. (5.46) auftretenden Integrale der linken Seite:

$$\int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r \ln \left(\frac{r}{r_a} \right) J_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) \sin \left(\frac{\tilde{h}}{H} z \right) \sin(\lambda_m z) dz dr = \frac{H}{2 \bar{\omega}_{\nu, \mu}^2} \left[r_a J_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_a) - r_1 J_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_1) \right] + \frac{H}{2 \bar{\omega}_{\nu, \mu}^2} \left[J_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_a) - J_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_1) \right]$$

$$\int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r \ln \left(\frac{r}{r_a} \right) N_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) \sin \left(\frac{\tilde{h}}{H} z \right) \sin(\lambda_m z) dz dr = \frac{H}{2 \bar{\omega}_{\nu, \mu}^2} \left[r_a N_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_a) - r_1 N_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_1) \right] + \frac{H}{2 \bar{\omega}_{\nu, \mu}^2} \left[N_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_a) - N_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_1) \right]$$

$$\int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) \sin \left(\frac{\tilde{h}}{H} z \right) \sin(\lambda_m z) dz dr = \frac{H}{2 \bar{\omega}_{\nu, \mu}^2} \left[r_a J_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_a) - r_1 J_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_1) \right]$$

$$\int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r N_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) \sin \left(\frac{\tilde{h}}{H} z \right) \sin(\lambda_m z) dz dr = \frac{H}{2 \bar{\omega}_{\nu, \mu}^2} \left[r_a N_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_a) - r_1 N_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_1) \right]$$

$$\int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r J_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) z \sin(\lambda_m z) dz dr = - \frac{H(-1)^m}{\lambda_m \bar{\omega}_{\nu, \mu}^2} \left[r_a J_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_a) - r_1 J_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_1) \right]$$

$$\int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r N_0(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r) z \sin(\lambda_m z) dz dr = - \frac{H(-1)^m}{\lambda_m \bar{\omega}_{\nu, \mu}^2} \left[r_a N_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_a) - r_1 N_1(\bar{\omega}_{\nu, \mu} r_1) \right]$$

Das Integral auf der rechten Seite von Gl. (5.46) ergibt sich mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (5.47) unter Beachtung, daß die Hülle immer viel dünner als der Brennstoffradius ist, so daß gilt:

$$J_0(\bar{\omega}_{n,m} r_1) \approx J_0(\bar{\omega}_{n,m} r_a), \quad N_0(\bar{\omega}_{n,m} r_1) \approx N_0(\bar{\omega}_{n,m} r_a)$$

und unter Beachtung der Wronski-Beziehung für Besselfunktionen:

$$J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) N_0'(\bar{\omega}_{n,m} r) - J_0'(\bar{\omega}_{n,m} r) N_0(\bar{\omega}_{n,m} r) = \frac{2}{\tilde{l}(\bar{\omega}_{n,m} r)}$$

zu:

$$\int_{r=r_1}^{r_a} \int_{z=0}^H r Z_0(\bar{\omega}_{\nu,\mu} r) Z_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) \sin(\lambda_m z) dz dr = \frac{H}{2} \left\{ \frac{r_a^2 - r_1^2}{2} \left[\frac{2}{\tilde{l}(\bar{\omega}_{n,m} r_a)} \right]^2 \left(\bar{\omega}_{n,m}^2 + \frac{\alpha^2}{k_c^2} \right) \right\}$$

Mit den vorstehenden Integralen und unter Beachtung von oben Erwähntem ergeben sich aus Gl. (5.46) die Konstanten (Amplitudenfaktoren) zu:

$$\frac{K_{n,m}}{p_{n,m}} = \frac{\tilde{l}^2 q_0 r_a^2 \bar{\omega}_{n,m}}{2(r_a + r_1) \left(\bar{\omega}_{n,m}^2 + \frac{\alpha^2}{k_c^2} \right)} \left\{ \begin{aligned} & p_{n,m} (\bar{G}_1 - \bar{G}_2) J_1(\bar{\omega}_{n,m} r_a) + g_{n,m} (\bar{G}_2 - \bar{G}_1) N_1(\bar{\omega}_{n,m} r_a) \\ & + \frac{2(-1)^m \bar{G}_3}{\lambda_m} (p_{n,m} J_1(\bar{\omega}_{n,m} r_a) - g_{n,m} N_1(\bar{\omega}_{n,m} r_a)) \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

Damit wäre das instationäre Temperaturproblem für den Fall gelöst, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ im Brennelement die maximale konstante Wärmeleistung q_0 sprunghaft erzeugt wird.

Damit kann der instationäre Temperaturverlauf für diesen Fall in Brennstoff und Hülle nach den Gl. (5.37) und (5.38) berechnet werden.

6. Erweiterung des instationären Temperaturproblems auf beliebige, zum beliebigen Zeitpunkt einsetzende Stör-Wärmeleistungen

Mit den Amplitudenfaktoren $\bar{K}_{n,m} = q_0 \bar{K}_{n,m}^*$ kann man für Gl. (5.32) (instationäre Brennstoffgleichung) schreiben:

$$u_i = q_0 P(t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{n,m}^* J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) e^{-\chi_{n,m}^2 t} \quad (6.1)$$

Hierbei ist $P(t)$ die Einheitssprungfunktion; sie ist folgendermaßen definiert:

$$P(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Da es sich hier um lineare Gleichungssysteme handelt, läßt sich die instationäre Brennstofftemperatur durch folgende Integralgleichung darstellen:

$$u_i = \int_0^t q(\tau) \dot{\psi}(t - \tau) d\tau \quad (6.2)$$

Hierbei ist $q(\tau)$ die zum Zeitpunkt $t = \tau$ einsetzende Wärmeleistung. $\dot{\psi}(t - \tau)$ ist die zeitliche Ableitung der Übergangsfunktion des Systems. Definitionsgemäß ist die Übergangsfunktion das Verhältnis von Ausgangsfunktion (Temperatur) zu Eingangsfunktion (Wärmeleistung). Letztere stellt die Störfunktion dar.

Damit ergibt sich aus Gl. (6.1) als Übergangsfunktion für den Brennstoff:

$$\psi(t) = \frac{u_i}{q_0 P(t)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{n,m}^* J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) e^{-\chi_{n,m}^2 t} \quad (6.3)$$

Gl. (6.3) nach der Zeit abgeleitet und für $t = (t - \tau)$ eingeführt ergibt:

$$\dot{\Psi}(t - \tau) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n,m}^2 \bar{K}_{n,m}^* J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_{n,z}) e^{-\chi_{n,m}^2 t} \quad (6.4)$$

Gl. (6.4) in Gl. (6.2) eingesetzt ergibt:

$$u_1 = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n,m}^2 \bar{K}_{n,m}^* J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_{n,z}) \int_0^t q(\tau) e^{-\chi_{n,m}^2 (t-\tau)} d\tau \quad (6.5)$$

In dem, in Gl. (6.5) auftretenden Integral ist die Funktion $F_1 = q(\tau)$ mit der Funktion

$$F_2 = e^{-\chi_{n,m}^2 (t-\tau)} \text{ gefaltet.}$$

Es gilt also:

$$F_1 * F_2 = \int_0^t q(\tau) e^{-\chi_{n,m}^2 (t-\tau)} d\tau \quad (6.6)$$

Nach dem Faltungssatz ist:

$$L \left\{ F_1 * F_2 \right\} = L \left\{ F_1 \right\} \cdot L \left\{ F_2 \right\} \quad (6.7)$$

Hierbei ist:

$$L \left\{ F_1 \right\} = \text{Laplace transformierte der Funktion } F_1$$

$$L \left\{ F_2 \right\} = \text{Laplace transformierte der Funktion } F_2$$

Die Laplace-Transformation auf die Funktionen F_1 und F_2 angewandt ergibt:

$$L \left\{ F_1 \right\} = q(s) \quad , \quad L \left\{ F_2 \right\} = \frac{\frac{1}{\chi_{n,m}^2}}{1 + \frac{1}{\chi_{n,m}^2} s} \quad (6.8)$$

Hierbei ist s der Laplace-Operator.

Die Ausdrücke (6.8) in Gl. (6.7) eingesetzt ergibt:

$$L \left\{ F_1 * F_2 \right\} = L \left\{ \int_0^t q(\tau) e^{-\chi_{n,m}^2(t-\tau)} d\tau \right\} = q(s) \frac{\frac{1}{\chi_{n,m}^2}}{1 + \frac{1}{\chi_{n,m}^2} s} \quad (6.9)$$

Gl. (6.9) in Gl. (6.5) eingesetzt ergibt:

$$u_i(r, z, s) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{n,m}^* J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_n z) \frac{q(s)}{1 + \frac{1}{\chi_{n,m}^2} s} \quad (6.10)$$

Gl. (6.10) stellt die laplacetransformierte Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung für den Brennstoff bei veränderlicher Wärmeleistung q dar. Die Faktoren $1/\chi_{n,m}^2$ der komplexen Variablen s sind die Zeitkonstanten der einzelnen Temperaturanteile.

Genau auf dieselbe Weise wie nach den Gl. (6.2), (6.3), (6.4), (6.6), (6.7), (6.8) und (6.9) für den Brennstoff, ergibt sich aus Gl. (5.33) die laplacetransformierte Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung für die Hülle zu ($\bar{K}_{n,m} = q_0 \bar{K}_{n,m}^*$ gesetzt):

$$v_i(r, z, s) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{K}_{n,m}^*}{p_{n,m}} (p_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) - g_{n,m} N_0(\bar{\omega}_{n,m} r)) \sin(\lambda_n z) \frac{q(s)}{1 + \frac{1}{\chi_{n,m}^2} s} \quad (6.11)$$

Mit den Gl. (6.10) und (6.11) wird die instationäre Brennstoff- und Hülltemperatur durch Verzögerungsglieder erster Ordnung dargestellt.

Bezeichnet man die Zeitkonstanten $1/\chi_{n,m}^2$ des Systems mit $T_{n,m}$ so ergeben sich aus den Gl. (6.10) und (6.11) folgende Übertragungsfunktionen:

$$\frac{X_{n,m}(s)}{q(s)} = \frac{1}{1 + T_{n,m} s} \quad (6.12)$$

Die Rücktransformation der Gl. (6.12) vom Bildbereich in den Zeitbereich ergibt folgende Differentialgleichung:

$$T_{n,m} \frac{d X_{n,m}(t)}{dt} + X_{n,m}(t) = q(t) \quad (6.13)$$

Mit dem Einführen der Übergangsfunktionen $X_{n,m}(t)$ wird die instationäre Temperaturverteilung:

für den Brennstoff (aus Gl. (6.10)):

$$u_i(r,z,t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{n,m}^* J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_m z) X_{n,m}(t) \quad (6.14)$$

für die Hülle (aus Gl. (6.11)):

$$v_i(r,z,t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{K}_{n,m}^*}{p_{n,m}} (p_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) - g_{n,m} N_0(\bar{\omega}_{n,m} r)) \sin(\lambda_m z) X_{n,m}(t) \quad (6.15)$$

Die zeitlichen Temperaturänderungen in Brennstoff und Hülle sind, wie aus der Differentialgleichung (6.13) hervorgeht, neben den Zeitkonstanten $T_{n,m}$, von dem zeitlichen Verlauf der Wärmeleistung $q(t)$ abhängig, die in der genannten Gleichung als Störglied auftritt.

Um die instationäre Temperatur an irgend einer Stelle des Brennstoffes oder der Hülle zu bestimmen, ist die Gl. (6.13) zu lösen (der zeitliche Leistungsverlauf $q(t)$ wird als bekannt vorausgesetzt) und mit den ortsabhängigen Faktoren $\bar{K}_{n,m}^* J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) \sin(\lambda_m z)$ bzw. $\bar{K}_{n,m}^* / p_{n,m} (p_{n,m} J_0(\bar{\omega}_{n,m} r) - g_{n,m} N_0(\bar{\omega}_{n,m} r)) \sin(\lambda_m z)$ zu multiplizieren und die einzelnen Glieder zu summieren (gemäß Gl. (6.14) bzw. (6.15)).

Gl. (6.13) etwas anders geschrieben lautet:

$$\frac{d X(t)}{dt} + \frac{1}{T_{n,m}} X(t) - \frac{1}{T_{n,m}} q(t) = 0 \quad (6.16)$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (6.16) lautet:

$$X_{n,m}(t) = e^{-\frac{t}{T_{n,m}}} \left(C + \frac{1}{T_{n,m}} \int_0^t q(t) e^{\frac{t}{T_{n,m}}} dt \right) \quad (6.17)$$

Hierbei ist C Integrationskonstante, sie wird aus der Anfangsbedingung bestimmt.

Im Vorausgehenden wurde angenommen, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wärmeleitung $q = q_0$ besteht. Damit ist nach Gl. (6.17) : $X_{n,m}(0) = q_0$; damit ist: $C = q_0$.

Damit wird aus Gl. (6.17):

$$X_{n,m}(t) = e^{-\frac{t}{T_{n,m}}} \left(q_0 + \frac{1}{T_{n,m}} \int_0^t q(t) e^{\frac{t}{T_{n,m}}} dt \right) \quad (6.18)$$

Nimmt man an, was meistens der Fall ist, daß die Störwärmeleistung konstant gleich q_c ist, wird aus Gl. (6.18):

$$X_{n,m}(t) = e^{-\frac{t}{T_{n,m}}} \left(q_0 + \frac{q_c}{T_{n,m}} \int_0^t e^{\frac{t}{T_{n,m}}} dt \right) = q_0 e^{-\frac{t}{T_{n,m}}} + q_c \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{n,m}}} \right) \quad (6.19)$$

Setzt die Störwärmeleistung q_c nicht zum Zeitpunkt $t = 0$ sondern zum Zeitpunkt $t = t_1$ ein, so folgt (aus Gl. (6.18)):

$$X_{n,m}(t) = q_0 e^{-\frac{t}{T_{n,m}}} + q_c \left(1 - e^{-\frac{(t - t_1)}{T_{n,m}}} \right) \quad (6.20)$$

Aus Gl. (6.19) bzw. (6.20) erkennt man, daß der instationäre Term $q_0 e^{-\frac{t}{T_{n,m}}}$, der vom Anfahren herrührt, für $t \rightarrow \infty$ gegen Null geht; d.h. nach Gl. (5.37) und (5.38) läuft die Temperatur in den stationären Wert ein, wenn keine Störleistung q_c bzw. $q(t)$ vorhanden ist. Ist eine Störleistung (im vorliegenden Fall eine konstante (q_c)) vorhanden, gehen die Übergangsfunktionen $X_{n,m}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen q_c ; d.h. die Brennstoff- und Hülltemperatur steigen dann (nach Gl. (6.14) und (6.15)) proportional der Störleistung q_c .

Mit den vorangegangenen Herleitungen sind sowohl die stationäre, als auch die instationäre Temperaturverteilung in einem zylindrischen Brennstab mit Hülle auf übersichtliche, für einen Digitalrechner leicht zu programmierende Formeln zurückgeführt worden.

Zum instationären Temperaturproblem ist noch zu bemerken: Die Reihen, mit welchen die instationären Temperaturen dargestellt werden, konvergieren, wegen den sehr rasch größerwerdenden $\chi_{n,m}$, sehr schnell, so daß nur wenige Glieder benutzt werden müssen, um die instationäre Temperatur mit ausreichender Genauigkeit zu berechnen.

Literatur:

- [1] P. Frank, F. Mises:
Differentialgleichungen der Physik, 2 Bände, Friedr. Vieweg u. Sohn,
Braunschweig 1961
- [2] A. Sommerfeld:
Vorlesungen über Theoretische Physik, Band VI (Partielle Differential-
gleichungen), Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947
- [3] W.I. Smirnow:
Lehrgang der höheren Mathematik, Teil IV, VEB Deutscher Verlag der
Wissenschaften, Berlin 1963
- [4] W. Schneidler:
Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Band I:
Lineare Integralgleichungen, Adakdemische Verlagsges., Leipzig 1955
- [5] G. Doetsch:
Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation,
R. Oldenburg, München 1961
- [6] H. Kämpf, H. Elbel, K. Kummerer:
Brennstabmodelltheorie (Modelle und Materialdaten), KFK 1400, Okt. 1971
- [7] G.N. Watson:
Theory of Bessel Functions, 2nd ed, Cambridge 1944
- [8] N.W. Mc. Lachlan:
Bessel Functions for Engineers, Oxford, at the Clarendon Press 1961
- [9] Janke-Amde-Lösch:
Tafeln höherer Funktionen, B.G. Teubner Verlagsges., Stuttgart 1961